HALKALAR ÜZERİNDE

BAZI GENELLEŞTİRMELER

Hasret YAZARLI

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HALKALAR ÜZERİNDE BAZI GENELLEŞTİRMELER

Hasret YAZARLI
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2010

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmış ve jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Abdullah HARMANCI

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Üye : Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

ONAY

Bu tez çalışması, 10.12.2010 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulu tarafından belirlenen ve yukarıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Sezai ELAGÖZ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

Annem'e, Babam'a, Suna Teyzem'e, Neşe Teyzem'e, Ağabeyim'e

ve

Rıdvan'a...

ÖZET

HALKALAR ÜZERİNDE BAZI GENELLEŞTİRMELER

Doktora Tezi

Hasret YAZARLI

Cumhuriyet Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlardan bahsedilmiş ve tez konusu ile ilgili daha önce yapılan makaleler özetlenmiştir.

İkinci bölümde, halkada yeni bir genelleştirilmiş türev tanımı verilerek halkanın değişmeliliği incelenmiş ve halkanın genişletilmiş merkezi ile bağlantı kurulmuştur.

Üçüncü bölümde, yeni bir fuzzy Γ-halkası tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Türev, genelleştirilmiş türev, genişletilmiş merkez, Γ-halkası, fuzzy Γ-halkası.

ABSTRACT

SOME GENERALIZATIONS ON RINGS

Ph. D. Thesis

Hasret YAZARLI
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Assistant Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

This thesis consist of three parts:

In the first part, we recall some basic concepts and summarize twice-told papers.

In the second part, we investigate by defining a new generalized derivation in ring and correlate with extended centroid of ring.

In the third part, we define a new fuzzy Γ-ring and investigate basic properties of this ring.

Keywords: Derivation, generalized derivation, extended centroid, Γ-ring, fuzzy Γ-ring.

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyip, fikir ve tecrübeleri ile bana çok büyük destek sağlayan değerli hocalarım Prof. Dr. Abdullah HARMANCI' ya ve aynı zamanda danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK' e teşekkür ederim.

Hasret YAZARLI

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ 1
1. BÖLÜM- Temel Kavramlar 3
1.1 Asal Halkalar ve Genişletilmiş Merkez 3
1.2 Türevli Halkalar 5
1.3 Γ-Halkaları 17
1.4 Fuzzy Kümeler 20
2. BÖLÜM- Asal Halkalar Üzerinde Genelleştirilmiş Türevler 37
2.1 Simetrik İkili Türevin İzi ile Belirlenen Genelleştirilmiş Türevler 37
2.2 Permuting Üçlü Türevin İzi ile Belirlenen Genelleştirilmiş Türevler 49
3. BÖLÜM- Fuzzy Γ-Halkalarının Yeni Bir Tipi 66
KAYNAKLAR 101
ÖZGEÇMİŞ 105

GİRİŞ

Analiz ve uygulamalı matematiğin temel teorilerinden biri olan türevin çok önemli özelliklerinden bazıları halka teorisinde de sağlanır. Türevli asal halkaların değişmeli olması konusuna ilk olarak E. C. Posner (1957) başlangıç yaptı. Gy. Maksa (1980) ve M. A. Öztürk (1999), kısmi türeve karşılık olarak simetrik ikili türev ve permuting üçlü türevi tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmalardan sonra birçok araştırmacı halka teorisinde simetrik ikili türev ve permuting üçlü türev çalışmıştır.

Bir R halkasında genelleştirilmiş türev kavramı M. Bresar (1991) tarafından tanımlandı. $d : R \to R$ toplamsal dönüşüm ve α, R' de türev olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + x\alpha(y)$ bağıntısı sağlanıyor ise d' ye α ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev denir. Böylece genelleştirilmiş türev kavramı hem türev kavramından hem de sol çarpan (f toplamsal dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y$' dir) kavramını kapsar.Temel örnekler; türevler ve genelleştirilmiş iç türevler (bazı $a, b \in R$ için $x \mapsto ax + xb$ tipinde dönüşümler) dir. Eğer, R; $Rx = \{0_R\}$ iken $x = 0_R$ özelliğine sahip bir halka, $h : R \to R$ herhangi bir fonksiyon ve $d : R \to R$, her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xh(y)$ bağıntısını sağlayan herhangi bir toplamsal dönüşüm ise d, h tarafından tek türlü belirlenir. Üstelik, M. Bresar (1991) h' nin türev olduğunu gösterdi. B. Hvala (1998), halka teorisinde Bresar' ın tanımladığı genelleştirilmiş türevi kullanarak asal halka ile onun genişletilmiş merkezi arasında bağlantı kurdu. Birçok araştırmacı, genelleştirilmiş türevli yarı asal ve asal halkalar üzerinde benzer sonuçlar incelediler. Bizim burada amacımız yeni bir genelleştirilmiş türev tanımlamak ve bu tanımı çok iyi bilinen sonuçlara uygulamaktır.

N. Nobusawa (1964), halka kavramından daha genel olan Γ-halka kavramını tanımlamıştır. W. E. Barnes (1966), Nobusawa anlamında Γ-halka kavramının tanımındaki koşulları biraz zayıflatmış ve Γ-halka kavramını yeniden tanımlamıştır. Daha sonra W. E. Barnes, S. Kyuno, M. A. Öztürk ve Y. B. Jun gibi birçok matematikçi Γ-halkaların yapısını incelemeye devam etmiş ve halkalar teorisindeki sonuçlar ile ilgili olarak bazı genelleştirmeler yapmıştır.

Günümüz matematik dünyasında önemli ve popüler bir konu olan fuzzy (belirsiz, bulanık) mantığı, ilk defa L. A. Zadeh (1965) tarafından fuzzy kümesi tanımıyla ortaya çıkmış ve daha sonra birçok araştırmacı bu konu üzerinde çalışmaya başlamıştır. Bunun sonucu olarak matematikte yeni çalışma alanları oluşmuş, yaşantımız içinde var olan belirsizlik kavramı matematiksel olarak incelenmeye başlanmış ve denetim mühendisliği gibi teknik alanlarda yararlı uygulamalar bulmuştur.

A. Rosenfeld (1971), fuzzy grup kavramını tanımladıktan sonra birçok araştırmacı cebir ile ilgili bazı kavramları ve sonuçları fuzzy teorisine aktarmıştır. M. Demirci (2001), fuzzy ikili işlemi ve fuzzy eşitliği kavramını kullanarak smooth grup kavramını tanımladı. Daha sonra X. Yuan ve E. S. Lee (2004) tarafından bu kavram fuzzy ikili işlemine dayanan yeni bir çeşit fuzzy gruba uygulandı. H. Aktaş ve N. Çağman (2007), X. Yuan ve E. S. Lee' nin fuzzy ikili işleme dayanan fuzzy grup tanımını kullanarak bir fuzzy halkası tipi tanımladılar. Bizim burada amacımız yeni bir çeşit fuzzy Γ-halkası tanımlamak ve fuzzy idealleri yardımıyla çarpım fuzzy Γ-halkasını oluşturmaktır.

.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Asal Halkalar ve Genişletilmiş Merkez

Bu bölümde, diğer bölümlerde geçen kavramların tanımları, bu kavramlar ile ilgili bazı temel özellikler ve ayrıca sunduğumuz çalışmalar ile ilgili daha önce yapılan çalışmaların özetleri verilmiştir.

Tanım 1.1.1. R bir halka ve A, B, P' de R' nin idealleri olsun. $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının *asal ideali* denir.

Teorem 1.1.2. R bir halka ve P de R' nin bir ideali olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) P asal idealdir,

(2) Her $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$' dir,

(3) Her $a, b \in R$ için $(a)\,(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$' dir,

(4) U, V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$' dir,

(5) U, V R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$' dir.

Tanım 1.1.3. R halkasının (0_R) ideali asal ise o zaman R halkasına *asal halka* denir.

Önerme 1.1.4. R bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) R asal halkadır,

(2) $a, b \in R$ için $aRb = (0_R)$ ise $a = 0_R$ veya $b = 0_R$' dir,

(3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır,

(4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.1.5. R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $na = 0_R$ olacak biçimde n pozitif tamsayısı varsa böyle n' lerin en küçüğüne R *halkasının karakteristiği* denir ve $charR = n$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6. R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. Her $x \in R$ için $mx = 0_R$ olduğunda $x = 0_R$ oluyorsa R halkasına $m - torsion\ free$ *halka* denir.

Tanım 1.1.7. X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Buna göre

$$C_R(X) = \{a \in R|\, ax = xa, \forall x \in X\}$$

kümesine X' in R*' deki merkezleştiricisi* denir.

$$Z(R) = \{x \in R|\, xy = yx, \forall y \in R\}$$

kümesine de R *halkasının merkezi* denir ve kısaca Z ile gösterilir.

Önerme 1.1.8. R bir asal halka ve $a, b \in R$ olsun. $ab, b \in Z$ ise $b = 0_R$ veya $a \in Z$' dir.

Tanım 1.1.9. R bir halka ve $x, y \in R$ olsun. $xy = 0_R$ olduğunda $x = 0_R$ veya $y = 0_R$ oluyorsa R' ye *sıfır bölensiz halka* denir.

Tanım 1.1.10. R bir halka olsun. $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesine x *ile* y *elemanlarının komütatör çarpımı* denir ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Özellikler: R bir halka olsun. Her $x, y, z \in R$ için,

(1) $[x + z, y] = [x, y] + [z, y]$,

(2) $[x, yz] = [x, y]\, z + y\, [x, z]$,

(3) $[xz, y] = [x, y]\, z + x\, [z, y]$

eşitlikleri sağlanır.

Önerme 1.1.11. R bir asal halka ve $0_R \neq a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $a\,(ax - xa) = 0_R$ oluyorsa $a \in Z$' dir.

R bir asal halka olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} M = \ & \{ (I, f) \mid f : I \to R \text{ bir sağ } R-\text{modül homomorfizması} \\ & \text{ve } (0_R) \neq I, \ R\text{' nin ideali } \} \end{aligned}$$

olmak üzere, M üzerinde

$(I, f) \sim (J, g) \Leftrightarrow R$ nin sıfırdan farklı bir $K \subseteq I \cap J$ ideali üzerinde $f = g$' dir

bağıntısı tanımlansın. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre M' nin denklik sınıflarının kümesi $Q(R)$ olsun. $Q(R)$ kümesi,

$$\overline{(I, f)} + \overline{(J, g)} = \overline{(I \cap J, f + g)}, \quad \overline{(I, f)}.\overline{(J, g)} = \overline{(JI, fg)}$$

ikili işlemleri ile R' yi kapsayan birimli bir asal halkadır.

Tanım 1.1.12. (Martindale, 1969) $Q(R)$ halkasına *sağ Martindale kesirler halkası (quotient halkası)* denir.

$Q(R)$ halkası aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $Q(R)$' nin merkezi C ile gösterilir ve C' ye *R' nin genişletilmiş merkezi (extended centroid)* denir. C bir cisimdir.

(2) $S = RC$' ye *R' nin $Q(R)$' deki merkezi kapanışı (central closure)* denir. S, R' yi kapsayan bir asal halkadır.

Önerme 1.1.13. R bir asal halka ve $0_R \neq a \in R$, $b \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $axb = bxa$ ise $b = \lambda a$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

1. 2 Türevli Halkalar

Tanım 1.2.1. (Posner, 1957) R bir halka, $d : R \to R$ toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ koşulu sağlanıyorsa d' ye *R halkasında bir türevdir*, denir.

Örnek 1.2.2. R bir halka ve $a \in R$ olsun. $d : R \rightarrow R$, her $x \in R$ için $d(x) = ax - xa$ ile tanımlı dönüşüm R üzerinde bir türevdir. d' ye *R üzerinde a ile belirlenmiş iç türev* denir.

Tanım 1.2.3. (Bresar, 1991) R bir halka ve $f : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ olacak biçimde R' nin bir d türevi varsa f' ye *R üzerinde d ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev* denir.

Örnek 1.2.4. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. $f : R \rightarrow R$, her $x \in R$ için $f(x) = ax + xb$ ile tanımlanan dönüşüm R üzerinde bir genelleştirilmiş türevdir.

Tanım 1.2.5. R bir halka ve $D : R \times R \rightarrow R$ bir dönüşüm olsun.

(i) Her $x, y \in R$ için $D(x, y) = D(y, x)$,

(ii) Her $x, y, z \in R$ için $D(x + y, z) = D(x, z) + D(y, z)$ ($D(x, y + z) = D(x, y) + D(x, z)$)

koşulları sağlanırsa D' ye R üzerinde *simetrik ikili toplamsal dönüşüm* denir.

Tanım 1.2.6. (Maksa, 1987) R bir halka ve $D : R \times R \rightarrow R$ bir simetrik ikili toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in R$ için $D(xy, z) = D(x, z)y + xD(y, z)$ ($D(x, yz) = D(x, y)z + yD(x, z)$) ise D' ye *R üzerinde simetrik ikili türev* denir.

Ayrıca her $x \in R$ için $d(x) = D(x, x)$ biçiminde tanımlanan $d : R \rightarrow R$ dönüşümüne *D' 'nin izi* denir ve d aşağıdaki özellikleri sağlar:

(1) d bir çift dönüşümdür,

(2) $d(0_R) = 0_R$' dir,

(3) Her $x, y \in R$ için $d(x + y) = d(x) + 2D(x, y) + d(y)$' dir.

Örnek 1.2.7. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ halkası üzerinde,

$$D : M \times M \to M,\ D\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlı dönüşüm bir simetrik ikili türevdir. D' nin izi,

$$d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

Uyarı 1.2.8. R bir halka ve $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev olsun. $y \in R$ keyfi sabit eleman olmak üzere, $d : R \to R,\ x \mapsto D(x, y)$ ile tanımlanan dönüşüm bir türevdir. Dolayısıyla simetrik ikili türev kavramı türev kavramından daha geneldir.

Tanım 1.2.9. R bir halka ve $D : R \times R \times R \to R$ bir dönüşüm olsun.

(i) Her $x, y, z \in R$ için $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z) = D(y, z, x) = D(z, x, y) = D(z, y, x)$,

(ii) Her $x, y, z, w \in R$ için $D(x + w, y, z) = D(x, y, z) + D(w, y, z)$ ($D(x, y + w, z) = D(x, y, z) + D(x, w, z),\ D(x, y, z + w) = D(x, y, z) + D(x, y, w)$)

koşulları sağlanırsa D' ye R *üzerinde permuting üçlü toplamsal dönüşüm* denir.

Tanım 1.2.10. (Öztürk,1999) R bir halka ve $D : R \times R \times R \to R$ permuting üçlü toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y, z, w \in R$ için $D(xw, y, z) = D(x, y, z)w + xD(w, y, z)$ ($D(x, yw, z) = D(x, y, z)w + yD(x, w, z)$, $D(x, y, zw) = D(x, y, z)w + zD(x, y, w)$) ise D' ye *permuting üçlü türev* denir.

Ayrıca her $x \in R$ için $d(x) = D(x, x, x)$ biçiminde tanımlanan $d : R \to R$ dönüşümüne *D' nin izi* denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

(1) d bir tek dönüşümdür,

(2) $d(0_R) = 0_R$' dir,

(3) Her $x, y \in R$ için $d(x+y) = d(x) + 3D(x,x,y) + 3D(x,y,y) + d(y)$' dir.

Örnek 1.2.11. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ halkası üzerinde $D : R \times R \times R \to R$,

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1a_2a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlı dönüşüm bir permuting üçlü türevdir. D' nin izi,

$$d\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

Uyarı 1.2.12. R bir halka, $a \in R$ ve $D : R \times R \times R \to R$ permuting üçlü türev olsun. Her $x, y \in R$ için $D_1 : R \times R \to R$, $D_1(x,y) = D(a,x,y)$ ile tanımlanan dönüşüm bir simetrik ikili türevdir ve her $x \in R$ için $d_2 : R \to R$, $d_2(x) = D(a,a,x)$ ile tanımlı dönüşüm bir türevdir.

Lemma 1.2.13. (Posner, E. C., 1957) R bir asal halka, $d : R \to R$ bir türev ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = 0_R$ (veya $d(x)a = 0_R$) oluyorsa $a = 0_R$ veya $d = 0$' dır.

Lemma 1.2.14. (Posner, E. C., 1957) R bir asal halka olsun. Eğer $p, q, r \in R$ elemanları ve her $a \in R$ için $paqar = 0_R$ ise p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

Teorem 1.2.15. (Posner, E. C., 1957) R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d_1, d_2; R halkasının iki türevi olsun. Eğer d_1d_2 bir türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$' dır.

Lemma 1.2.16. (Posner, E. C., 1957) R bir asal halka ve $d : R \to R$ bir türev olsun. Eğer her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0_R$ oluyorsa $d = 0$ veya R halkası değişmelidir.

Teorem 1.2.17. (Herstein, I. N., 1978) R bir halka, $d : R \to R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$ olsun. Her $r \in R$ için $d(r)$ elemanları tarafından üretilen A alt halkası, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 1.2.18. (Herstein, I. N., 1978) R bir asal halka ve $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Her $x, y \in R$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ ise,

(1) R karakteristiği ikiden farklı halka ise bu durumda R halkası değişmeli tamlık bölgesidir.

(2) R karakteristiği iki olan halka ise bu durumda R halkası değişmeli veya R halkası merkezi üzerinde 4-boyutlu basit cebirdir.

Teorem 1.2.19. (Herstein, I. N., 1979) R bir asal halka ve $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. $a \in R$ ve her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ ise,

(1) R karakteristiği ikiden farklı halka ise $a \in Z$' dir (Z, R halkasının merkezidir),

(2) R karakteristiği iki olan halka ise $a^2 \in Z$' dir. Üstelik, $a \notin Z$ ise $\lambda \in C$ (R halkasının genişletilmiş merkezi) olmak üzere her $x \in R$ için $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$' dır.

Teorem 1.2.20. (Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981) R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev ve $a \in R$ olsun. $[a, d(R)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$' dir.

Teorem 1.2.21. (Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981) R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev olsun. $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 1.2.22. (Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981) R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev olsun. $d^2(R) \subseteq Z$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 1.2.23. (Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981) R karakteristiği ikiden farklı asal halka, d_1 ve d_2, R halkasının sıfırdan farklı iki türevi olsun. $d_1 d_2(R) \subseteq Z$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 1.2.24. (Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981) R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve $0 \neq d : R \to R$ bir türev olsun. Her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise R halkası değişmelidir.

Tanım 1.2.25. (Bresar, M., 1991) A bir cebir olsun. $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

özelliği sağlanıyorsa A' ya *normlu cebir* denir.

Tanım 1.2.26. (Bresar, M., 1991) A kompleks normlu cebir ve $M_{a,b}$, A üzerinde $x \mapsto axb$ biçiminde tanımlı dönüşüm olsun.

$$\|M_{a,b}\| \geq c \, \|a\| \, \|b\| , \qquad \forall a, b \in A$$

olacak biçimde $c > 0$ sabiti varsa A' ya *ultra yarı asal* denir.

Tanım 1.2.27. (Bresar, M., 1991) A bir halka, $\delta : A \to A$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\delta(xy) = \delta(x) y + x h(y)$$

koşulunu sağlayan bir $h : A \to A$ türevi varsa δ' ya *A halkasında h ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev* denir.

A herhangi bir halka, d_1, d_2 A' da türevler, $\Delta(A)$ A' nın genelleştirilmiş türevlerinin kümesi, $D(A)$ A' daki bütün türevlerin kümesi olsun. A normlu bir cebir iken

$$\Delta_b(A) = \{ \delta \in \Delta(A) | \, \delta : A \to A \text{ sınırlı lineer operatör} \} ,$$

$D_b(A)$, bütün sınırlı türevlerin kümesidir.

$$dist(d_1d_2, \Delta_b(A)) = \inf\{\|d_1d_2 - \delta\|, \delta \in \Delta_b(A)\}$$

olarak alınacaktır.

Teorem 1.2.28. (Bresar, M., 1991) A ultra asal normlu, $d_1, d_2 \in D_b(A)$ ve $a, b \in A$ için $M_{a,b} : A \to A$, $x \mapsto axb$ şeklinde tanımlı dönüşüm olsun. Her $a, b \in A$ için $\|M_{a,b}\| \geq c\|a\|\|b\|$ olacak biçimde $c > 0$ varsa bu durumda $dist(d_1d_2, \Delta_b(A)) \geq \dfrac{c^2}{6}\|d_1\|\|d_2\|$' dur.

Teorem 1.2.29. (Bresar, M., 1991) A ultra yarı asal normlu cebir ve $d \in D_b(A)$ olsun. $a \in A$ için $\|M_{a,a}\| \geq c\|a\|^2$ olacak biçimde $c > 0$ varsa bu durumda $dist(d^2, \Delta_b(A)) \geq \dfrac{c^2}{2}\|d\|^2$ dir.

Teorem 1.2.30. (Bresar, M., 1991) A Neumann cebiri olsun. $d_1, d_2 \in D(A)$ ise $dist(d_1d_2, \Delta(A)) \geq \dfrac{1}{2}\|d_1\|\|d_2\|$' dur. Her $d \in D(A)$ için $dist(d^2, \Delta_b(A)) \geq \dfrac{1}{2}\|d\|^2$ dir.

Aşağıda verilen Hvala, B., 1998 makalesindeki önerme ve lemmalarda; R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $Q(R)$ ve $Q_s(R)$ sırasıyla R' nin sağ ve simetrik Martindale quotient halkası, C; R' nin genişletilmiş merkezi, $R_C = RC$; R' nin merkezi kapanışıdır. A; R, R_C, $R_C + C$, $Q_r(R)$, $Q_s(R)$, $Q_r(R_C)$ ve $Q_s(R_C)$ halkalarından biridir.

Önerme 1.2.31. (Hvala, B., 1998) $f_j : R \to A$ ve $h_i : R \to R_C$ herhangi dönüşümler ve a_j, $c_i \in R$ olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z)xa_j + \sum_{i=1}^{k} c_izh_i(x) = 0, \qquad \forall x, z \in R$$

olsun. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ve $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$ kümeleri C-bağımsız ise

$$f_j(z) = -\sum_{j=1}^{k} c_izq_{ij}, \;\; h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}xa_j, \qquad \forall x, z \in R, \; i = 1, ..., k, \; j = 1, ..., n$$

olacak biçimde $q_{ij} \in Q_r(R_C)$, $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., n$ vardır.

Lemma 1.2.32. (Hvala, B., 1998) $f : R \to R_C$ toplamsal dönüşüm ve her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y$ olsun. Her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 1.2.33. (Hvala, B., 1998) R değişmeli olmayan halka ve $F : R \to C$ genelleştirilmiş türev olsun. Bu durumda $F = 0$' dır.

Lemma 1.2.34. (Hvala, B., 1998) $a, b \in A$ ve $f : R \to A$, $f(x) = axb$ şeklinde bir dönüşüm olsun. f genelleştirilmiş türev ise $a \in C$ veya $b \in C$' dir.

Aşağıda verilen Argaç, N. ve Albaş, E. 2004 makalesindeki teorem, sonuç ve lemmalarda; R asal halka, $Q_r(R)$; R' nin sağ Martindale quotient halkası, C; R' nin genişletilmiş merkezi, $R_C = RC$; R' nin merkezi kapanışı, Z R halkasının merkezi ve α türev olmak üzere, (d, α), R' de genelleştirilmiş türevdir.

Teorem 1.2.35. (Argaç, N., Elbaş, E., 2004) R değişmeli olmayan halka olsun. Her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = 0_R$ ise her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 1.2.36. (Argaç, N., Elbaş, E., 2004) R değişmeli olmayan halka olsun. Her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = \pm [x, y]$ ise her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Sonuç 1.2.37. (Argaç, N., Elbaş, E., 2004) R değişmeli olmayan halka olsun. Her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = \pm xy$ ise her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 1.2.38. (Argaç, N., Elbaş, E., 2004) (d, α) genelleştirilmiş türev ve d, R de homomorfizma veya anti-homomorfizma ise her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 1.2.39. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** (d,α), (g,β) iki genelleştirilmiş türev ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = g(x)a$ ise aşağıdakilerden herhangi biri sağlanır.

(1) $a \in C$' dir,

(2) Her $x \in R$ için $\alpha(x) = [x,p]$, $\beta(x) = [q,x]$, $qa \in C$, $q = \lambda a$, $\lambda \in C$ olacak biçimde $p, q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Sonuç 1.2.40. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $[a, d(x)] = 0_R$ ise $a \in C$ veya $\alpha(x) = [x,p]$, $qa \in C$, $p = \lambda a$, $\lambda \in C$ olacak biçimde $p \in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 1.2.41. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** R karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan halka ve (d,α) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Her $x \in R$ için $[x, d(x)] = 0_R$ ise her $x \in R$ için $d(x) = \lambda x$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır.

Teorem 1.2.42. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** R değişmeli olmayan halka ve (d,α) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 1.2.43. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** R karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan halka ve (d,α) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Her $x \in R$ için $xd(x) + d(x)x \in Z$ ise her $x \in R$ için $[x, d(x)] = 0_R$' dir.

Sonuç 1.2.44. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** R karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan halka ve (d,α) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Her $x \in R$ için $xd(x) + d(x)x \in Z$ ise her $x \in R$ için $d(x) = \lambda x$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır.

Teorem 1.2.45. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** R değişmeli olmayan halka ve (d,α) genelleştirilmiş türev, $\alpha(Z) \neq \{0_R\}$ ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$

için $[a, d(x)] \in Z$ ise $a \in Z$' dir.

Sonuç 1.2.46. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** R değişmeli olmayan halka, (d, α) genelleştirilmiş türev ve $\alpha(Z) \neq \{0_R\}$ olsun. $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ ise $d = 0$' dır.

Teorem 1.2.47. **(Argaç, N., Elbaş, E., 2004)** R karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan halka ve (d, α) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. $d^2(R) \subseteq Z$ ise aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:

(1) Her $x \in R$ için $d(x) = xa$ ve $a^2 = 0_R$ olacak biçimde $a \in Q_r(R_C)$ vardır.

(2) Her $x \in R$ için $d(x) = ax$ ve $a^2 = 0_R$ olacak biçimde $a \in Q_r(R_C)$ vardır.

(3) $d(x) = \lambda x + \alpha(x)$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır.

Teorem 1.2.48. **(Vukman, J., 1989)** R değişmeli olmayan, karakteristiği ikiden farklı asal halka, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev ve d, D' nin izi olsun. Her $x \in R$ için $[d(x), x] = 0_R$ ise $D = 0$' dır.

Teorem 1.2.49. **(Vukman, J., 1989)** R değişmeli olmayan, karakteristiği iki ve üçten farklı asal halka, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev ve d, D' nin izi olsun. Her $x \in R$ için $[d(x), x] \in Z$ ise $D = 0$' dır.

Teorem 1.2.50. **(Vukman, J., 1989)** R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $D_1 : R \times R \to R$ ve $D_2 : R \times R \to R$ simetrik ikili türevler ve d_1, d_2 sırasıyla D_1 ve D_2' nin izleri olsun. Her $x \in R$ için $D_1(d_2(x), x) = 0_R$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$' dır.

Teorem 1.2.51. **(Vukman, J., 1989)** R karakteristiği iki ve üçten farklı asal halka, $D_1 : R \times R \to R$ ve $D_2 : R \times R \to R$ simetrik ikili türevler, $B : R \times R \to R$ simetrik ikili toplamsal dönüşüm ve d_1 D_1' in, d_2 D_2' nin, f B' nin izleri olsun. Her $x \in R$ için $d_1(d_2(x)) = f(x)$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

Lemma 1.2.52. (Sapancı, M., Öztürk, M. A. ve Jun, Y. B., 1999) R karakteristiği ikiden farklı asal halka, d_1 ve d_2 sırasıyla D_1 ve D_2 simetrik ikili türevlerinin izleri olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d_1(x) d_2(y) = d_2(x) d_1(y)$$

ve $d_1 \neq 0$ ise C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, $d_2(x) = \lambda d_1(x)$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır.

Teorem 1.2.53. (Sapancı, M., Öztürk, M. A. ve Jun, Y. B., 1999) R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve $d_1 (\neq 0)$, d_2, d_3 ve d_4 sırasıyla D_1, D_2, D_3 ve D_4 simetrik ikili türevlerinin izleri olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d_1(x) d_2(y) = d_3(x) d_4(y)$$

ise C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, $d_2(x) = \lambda d_4(x)$ ve $d_3(x) = \lambda d_1(x)$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır.

Teorem 1.2.54. (Sapancı, M., Öztürk, M. A. ve Jun, Y. B., 1999) R karakteristiği iki ve üçten farklı asal halka ve d, sıfırdan farklı D simetrik ikili türevinin izi olsun. $d(a) \neq 0_R$ olan $a \in R$ için

$$d(x) ad(x) = 0_R, \quad \forall x \in R$$

ise $a \in Z$' dir.

Lemma 1.2.55. (Öztürk, M. A., 1999) R; $2, 3$-torsion free asal halka, D; R' de permuting üçlü toplamsal dönüşüm ve d, D' nin izi olsun. Her $x \in R$ için $d(x) = 0_R$ ise $D = 0$' dır.

Teorem 1.2.56. (Öztürk, M. A., 1999) R değişmeli olmayan, $2, 3$-torsion free asal halka, D; R' de permuting üçlü türev ve d, D' nin izi olsun. Her $x \in R$ için $[d(x), x] = 0_R$ ise $D = 0$' dır.

Teorem 1.2.57. (Öztürk, M. A., 1999) R değişmeli olmayan, karakteristiği ikiden farklı, 3-torsion free asal halka, D R' de permuting üçlü türev ve d, D' nin izi olsun. Her $x \in R$ için $[d(x), x] \in Z$ ise $D = 0$' dır.

Teorem 1.2.58. **(Öztürk, M. A., 1999)** R karakteristiği ikiden farklı, 3-torsion free asal halka, $D_1 : R \times R \times R \to R$ ve $D_2 : R \times R \times R \to R$ permuting üçlü türevler ve d_1, d_2 sırasıyla D_1 ve D_2' nin izleri olsun. Her $x \in R$ için $D_1(d_2(x), x, x) = 0_R$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$' dır.

Teorem 1.2.59. **(Öztürk, M. A., 1999)** R karakteristiği iki, üç ve beşten farklı, $3, 5$-torsion free asal halka, $D_1 : R \times R \times R \to R$ ve $D_2 : R \times R \times R \to R$ permuting üçlü türevler ve d_1, d_2 sırasıyla D_1 ve D_2' nin izleri olsun. Her $x \in R$ için $D_1(d_2(x), d_2(x), x) = 0$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$' dır.

Teorem 1.2.60. **(Öztürk, M. A., 1999)** R karakteristiği iki, üç ve beşten farklı asal halka, $D_1 : R \times R \times R \to R$ ve $D_2 : R \times R \times R \to R$ permuting üçlü türevler, $B : R \times R \times R \to R$ üçlü toplamsal dönüşüm ve d_1; D_1' in, d_2; D_2' nin, f ; B' nin izleri olsun. Her $x \in R$ için $d_1(d_2(x)) = f(x)$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$' dır.

Lemma 1.2.61. **(Yazarlı, H., Öztürk, M. A. ve Jun, B. A., 2005)** R karakteristiği iki ve üçten farklı asal halka, D; R' de permuting üçlü türev ve d; D' nin izi olsun. $a \in R$ için

$$ad(x) = 0_R, \ \ \forall x \in R$$

ise $a = 0_R$ veya $D = 0$' dır.

Lemma 1.2.62. **(Yazarlı, H., Öztürk, M. A. ve Jun, B. A., 2005)** R karakteristiği iki ve üçten farklı asal halka, d_1 ve d_2 sırasıyla D_1 ve D_2 permuting üçlü türevlerinin izleri olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d_1(x) d_2(y) = d_2(x) d_1(y)$$

ve $d_1 \neq 0$ ise C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, $d_2(x) = \lambda d_1(x)$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır.

Teorem 1.2.63. **(Yazarlı, H., Öztürk, M. A. ve Jun, B. A., 2005)** R karakteristiği iki ve üçten farklı asal halka ve $d_1 (\neq 0)$, d_2, d_3 ve d_4 sırasıyla

D_1, D_2, D_3 ve D_4 permuting üçlü türevlerinin izleri olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d_1(x)\, d_2(y) = d_3(x)\, d_4(y)$$

ise C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, $d_2(x) = \lambda d_4(x)$ ve $d_3(x) = \lambda d_1(x)$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır.

1.3. Γ-Halkaları

Halka kavramından daha genel olan Γ-halka kavramı ilk defa 1964' de N. Nobusawa tarafından tanımlanmıştır.

Tanım. 1.3.1. (Nobusawa, N., 1964) $M = \{x, y, z, ...\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ toplamsal değişmeli gruplar olmak üzere, her $x, y, z \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için,

(1) $x\alpha y \in M$ ve $\alpha x \beta \in \Gamma$,

(2) $(x + y)\, \alpha z = x\alpha z + y\alpha z$, $x(\alpha + \beta)\, y = x\alpha y + x\beta y$, $x\alpha(y + z) = x\alpha y + x\alpha z$,

(3) $(x\alpha y)\, \beta z = x(\alpha y \beta)\, z = x\alpha(y\beta z)$,

(4) $x\alpha y = 0_M$ ise $\alpha = 0_\Gamma$

koşulları sağlanıyorsa M' ye *(Nobusawa anlamında) bir* Γ*-halka* denir.

W. E. Barnes (1966), Nobusawa' nın Γ-halka tanımındaki koşulları biraz zayıflatmış ve Γ-halka kavramını yeniden tanımlamıştır.

Tanım 1.3.2. (Barnes, W. E., 1966) $M = \{x, y, z, ...\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ toplamsal değişmeli gruplar olmak üzere, her $x, y, z \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için,

(1) $x\alpha y \in M$,

(2) $(x + y)\, \alpha z = x\alpha z + y\alpha z$, $x(\alpha + \beta)\, y = x\alpha y + x\beta y$, $x\alpha(y + z) = x\alpha y + x\alpha z$,

(3) $(x\alpha y)\,\beta z = x\,(\alpha y\beta)\,z = x\alpha\,(y\beta z)$

koşulları sağlanıyorsa M' ye *(Barnes anlamında) bir* Γ*-halka* denir.

Örnek 1.3.3. (Barnes, W. E., 1966) G ve H iki toplamsal değişmeli grup olmak üzere, $M = Hom\,(G,H)$ ve $\Gamma = Hom\,(H,G)$ olsun. Bu durumda $M \times \Gamma \times M \to M$ dönüşümü, her $f, g \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $(f,\alpha,g) \mapsto f\alpha g$ (burada $f\alpha g$ çarpımı; f, α ve g dönüşümlerinin bileşkesidir) biçiminde tanımlı ise M bir Γ-halkasıdır.

Tanım 1.3.4. (Barnes, W. E., 1966) M bir Γ-halka ve U, M' nin bir toplamsal alt grubu olsun. $M\Gamma U \subseteq U$ $(U\Gamma M \subseteq U)$ ise U' ya *M' nin bir sol (sağ) ideali* denir. Ayrıca U, M' nin hem sol hem de sağ ideali ise U' ya *M nin iki-yanlı ideali veya kısaca ideali* denir.

U ve V, M' nin iki sol (sağ, iki-yanlı) ideali ise $U+V = \{u+v \mid u \in U,\ v \in V\}$ kümesine *U ile V' nin toplamı* denir. Diğer taraftan $U+V$ de M' nin bir sol (sağ, iki-yanlı) idealidir.

U, M' nin bir sağ ideali; V, M' nin bir sol ideali ve S de M' nin boştan farklı bir alt kümesi ise

$$S\Gamma U = \left\{ \sum_{k=1}^{n} s_k\alpha_k u_k \,\middle|\, s_k \in S,\ \alpha_k \in \Gamma,\ u_k \in U,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi M' nin bir sağ ideali; $V\Gamma S$, M' nin bir sol ideali ve $V\Gamma U$ da M' nin bir idealidir.

M' nin sonlu yada sonsuz sayıda bir takım sol (sağ, iki-yanlı) ideallerinin arakesiti de M' nin bir sol (sağ, iki-yanlı) idealidir.

$a \in M$ için M' nin a' yı içeren bütün ideallerinin arakesitine *M' nin a tarafından üretilen esas ideali* denir ve (a) ile gösterilir.

$$(a)=\left\{ na+x\alpha a+a\beta y+\sum_{sonlu} u\gamma a\delta v \;\middle|\; x,y,u,v\in M,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Gamma,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$$

dir.

Tanım 1.3.5. M bir Γ-halka ve U, M' nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$C(U):=\{x\in M|\, x\gamma u=u\gamma x,\ \forall u\in U,\ \forall\gamma\in\Gamma\}$$

kümesine *U' nun M' deki merkezleyeni* denir. Ayrıca $U=M$ alınırsa, $C(M)$ ye *'M' nin merkezi* denir ve kısaca C ile gösterilir.

Tanım 1.3.6. M bir Γ-halka ve U, M' nin bir ideali olmak üzere, M'nin U' ya göre $x+U$ $(x\in M)$ kalan sınıflarından oluşan küme M/U olsun. Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için M/U üzerinde,

$$(x+U)+(y+U)=(x+y)+U$$

ve

$$(x+U)\,\gamma\,(y+U)=(x\gamma y)+U$$

biçiminde tanımlı toplama ve çarpma işlemine göre bir Γ-halkadır. M/U Γ-halkasına *M' nin U idealine göre çarpım Γ-halkası* denir.

Tanım 1.3.7. M ve N iki Γ-halkası ve $\varphi : M\to N$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

(1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,

(2) $\varphi(x\gamma y)=\varphi(x)\,\gamma\varphi(y)$

koşulları sağlanıyorsa φ dönüşümüne bir *Γ-homomorfizma* denir. Ayrıca φ dönüşümü bire bir ve örtense φ' ye bir *Γ-izomorfizma* denir ve $M\cong N$ yazılır.

Tanım 1.3.8. M ve N herhangi iki Γ-halka ve $\varphi : M\to N$ bir Γ-homomorfizma olsun. Bu durumda

$$Ker\varphi=\{x\in M|\,\varphi(x)=0_N\}$$

kümesine *φ' nin çekirdeği* denir.

1. 4. Fuzzy Kümeler

Fuzzy küme kavramı ilk defa 1965' te L. A. Zadeh tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 1.4.1. **(Zadeh, L. A., 1965)** X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, $x \in X$ için $\mu(x) = t \in [0,1]$ olacak biçimde tanımlanan $\mu : X \to [0,1]$ dönüşümüne *X' in bir fuzzy kümesi* denir.

Tanım 1.4.2. **(Zadeh, L. A., 1965)** X boştan farklı herhangi bir küme ve μ, ν X' in fuzzy kümeleri olsun. Bu durumda

(1) Her $x \in X$ için $\mu = \nu :\Leftrightarrow \mu(x) = \nu(x)$' dir,

(2) Her $x \in X$ için $\mu \subseteq \nu :\Leftrightarrow \mu(x) \leq \nu(x)$' dir,

(3) Her $x \in X$ için $(\mu \cup \nu)(x) = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ biçiminde tanımlanan $\mu \cup \nu$ de X' in bir fuzzy kümesidir,

(4) Her $x \in X$ için $(\mu \cap \nu)(x) = \min\{\mu(x), \nu(x)\}$ biçiminde tanımlanan $\mu \cap \nu$ de X' in bir fuzzy kümesidir,

(5) Her $x \in X$ için $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ biçiminde tanımlanan μ^c (μ' nün tümleyeni) X' in bir fuzzy kümesidir.

Tanım 1.4.3. **(Zadeh, L. A., 1965)** X boştan farklı bir küme ve μ, X' in fuzzy kümesi olsun. Bu durumda $t \in [0,1]$ için

$$U(\mu; t) := \{x \in X | \, \mu(x) \geq t\}$$

kümesine X' in *μ' ye göre bir level (seviye) alt kümesi* denir.

Tanım 1.4.4. **(Zadeh, L. A., 1965)** X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere

$$\mu(y) := \begin{cases} t \in (0,1], & y = x \text{ ise,} \\ 0, & y \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan μ fuzzy kümesine *X' in bir fuzzy noktası* denir ve $(x)_t$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.5. **(Zadeh, L. A., 1965)** X ve Y boştan farklı iki küme ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda ν, Y' nin bir fuzzy kümesi ise her $x \in X$ için $\varphi^{-1}(\nu)(x) = \nu(\varphi(x))$ biçiminde tanımlanan $\varphi^{-1}(\nu)$ fuzzy kümesine ν' nün φ *altındaki ters görüntüsü* denir.

Tanım 1.4.6. **(Zadeh, L. A., 1965)** X ve Y boştan farklı iki küme ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda μ, X' in bir fuzzy kümesi ise Y nin

$$\varphi(\mu)(y) := \begin{cases} \sup_{\varphi(z)=y} \mu(z), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\varphi(\mu)$ fuzzy kümesine μ*' nün* φ *altındaki görüntüsü* denir.

Tanım 1.4.7. **(Zadeh, L. A., 1965)** X ve Y boştan farklı herhangi iki küme; μ, X' in bir fuzzy kümesi ve ν de Y' nin bir fuzzy kümesi olsun. Bu durumda her $(x, y) \in X \times Y$ için $(\mu \times \nu)(x, y) = \min\{\mu(x), \nu(y)\}$ biçiminde tanımlanan $\mu \times \nu : X \times Y \to [0, 1]$ fuzzy kümesine μ *ile* ν*' nün kartezyen çarpımı* denir. $X \times X$' in bir fuzzy kümesine X *üzerinde bir fuzzy bağıntı* denir ve R_μ (veya kısaca R) ile gösterilir.

Tanım 1.4.8. **(Zadeh, L. A., 1965)** X boştan farklı herhangi bir küme ve R, X üzerinde bir fuzzy bağıntısı olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için,

(1) $R(x, x) = 1$ (yansıma özelliği),

(2) $R(x, y) = R(y, x)$ (simetri özelliği),

(3) $R(x, y) \geq \sup\limits_{z \in X} \min\{R(x, z), R(z, y)\}$ (geçişme özelliği)

koşulları sağlanıyorsa R' ye X *üzerinde bir fuzzy denklik bağıntısı* denir. Ayrıca $a \in X$ olmak üzere her $x \in X$ için $R[a](x) = R(a, x)$ gösterimi kullanılır ve $R[a]$' ya *R fuzzy denklik bağıntısına göre a elemanı tarafından temsil edilen fuzzy sınıfı* denir. X' in R fuzzy denklik bağıntısına göre bütün fuzzy sınıflarından oluşan küme $X/R := \{R[a] \mid a \in X\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.9. **(Zadeh, L. A., 1965)** E evrensel küme ve $A \subset E$ olsun. Bu durumda

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_A : E \to \{0,1\}$ dönüşümüne *A' nın karakteristik dönüşümü* denir.

Tanım 1.4.10. **(Rosenfeld, A., 1971)** G bir grup ve μ, G' nin bir fuzzy kümesi olmak üzere, her $x, y \in G$ için

(1) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

koşulları sağlanıyorsa μ' ye *G' nin bir fuzzy alt grubu* denir.

Tanım 1.4.11. **(Liu, W., 1982)** H bir halka ve μ, H' nin bir fuzzy kümesi olmak üzere, her $x, y \in H$ için

(1) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(2) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

koşulları sağlanıyorsa μ' ye *H' nin bir fuzzy alt halkası* denir.

Tanım 1.4.12. **(Liu, W., 1982)** H bir halka ve μ, H' nin bir fuzzy kümesi olmak üzere, her $x, y \in H$ için

(1) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(2) $\mu(xy) \geq \mu(y)$ $(\mu(xy) \geq \mu(x))$

koşulları sağlanıyorsa μ' ye *H' nin bir fuzzy sol (sağ) ideali* denir. Ayrıca μ, H' nin hem fuzzy sol hem de fuzzy sağ ideali ise μ' ye *H' nin bir fuzzy ideali* denir.

Yukarıda tanımı verilen fuzzy ideal kavramı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 1.4.13. **(Liu, W., 1982)** H bir halka ve μ, H' nin bir fuzzy kümesi olmak üzere, her $x, y \in H$ için

(1) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(2) $\mu(xy) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$

koşulları sağlanıyorsa μ' ye *H' nin bir fuzzy ideali* denir.

Tanım 1.4.14. (Liu, W., 1982) H bir halka ve μ, ν; H' nin fuzzy kümeleri olsun. Bu durumda her $z \in H$ için

$$\eta(z) := \sup_{z=x+y} \min\{\mu(x), \nu(y)\}$$

biçiminde tanımlanan η fuzzy kümesine *μ ile ν' nün toplamı* denir ve $\mu + \nu$ ile gösterilir. Ayrıca $\mu + \nu = \nu + \mu$' dür.

Tanım 1.4.15. (Jun, Y. B. and Lee, C. Y., 1992) M bir Γ-halkası ve μ, M' nin bir fuzzy alt kümesi olmak üzere, her $x, y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

(1) $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(2) $\mu(x\gamma y) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$

koşulları sağlanıyorsa μ' ye *M' nin fuzzy alt Γ-halkası* denir.

Tanım 1.4.16. (Malik, D. S. ve Mordeson, J. N., 1992) R ve S boş kümeden farklı kümeler ve f, $R \times S$' nin fuzzy alt kümesi olsun. $\theta \in [0, 1]$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanırsa f' ye *R' den S' ye fuzzy fonksiyon* denir:

(1) Her $x \in R$ için $f(x, y) > \theta$ olacak biçimde en az bir $y \in S$ vardır,

(2) Her $x \in R$, $\forall y_1, y_2 \in S$ için $f(x, y_1) > \theta$ ve $f(x, y_2) > \theta$ iken $y_1 = y_2$ dir.

Tanım 1.4.16' dan yararlanarak, X. Yuan ve E. S. Lee yeni bir tanım vermiştir.

Tanım 1.4.17. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) G boş kümeden farklı bir küme ve R, $G \times G \times G$' nin fuzzy alt kümesi olsun. Aşağıdakiler sağlanırsa R' ye *G üzerinde fuzzy ikili işlem* denir:

(1) Her $a, b \in G$ için $R(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde en az bir $c \in G$ vardır.

(2) Her $a, b, c_1, c_2 \in G$ için $R(a, b, c_1) > \theta$ ve $R(a, b, c_2) > \theta$ iken $c_1 = c_2$ dir.

R, G üzerinde bir fuzzy ikili işlem olsun. Bu durumda,

$$F(G) = \{ A | \, A : G \to [0,1] \text{ dönüşüm}\}$$

ve

$$R(A,B)(c) = \bigvee_{a,b \in G} (A(a) \wedge B(b) \wedge R(a,b,c)), \, \forall c \in G$$

olmak üzere, $R : F(G) \times F(G) \to F(G)$, $(A,B) \longmapsto R(A,B)$ dönüşümü vardır.

$A = \{a\}$, $B = \{b\}$ olsun ve $R(A,B)$; $a \circ b$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$(a \circ b)(c) = R(a,b,c), \, \forall c \in G$$

$$((a \circ b) \circ c)(z) = \bigvee_{d \in G} (R(a,b,d) \wedge R(d,c,z)), \, \forall \, z \in G$$

$$(a \circ (b \circ c))(z) = \bigvee_{d \in G} (R(b,c,d) \wedge R(a,d,z)), \, \forall \, z \in G$$

dir.

Tanım 1.4.18. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) G boş kümeden farklı bir küme ve R, G üzerinde fuzzy ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (G,R)' ye *fuzzy grup* denir:

(G1) Her $a,b,c,z_1,z_2 \in G$ için $((a \circ b) \circ c)(z_1) > \theta$ ve $(a \circ (b \circ c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2,$

(G2) Her $a \in G$ için $(e_0 \circ a)(a) > \theta$ ve $(a \circ e_0)(a) > \theta$ olacak biçimde en az bir $e_0 \in G$ vardır (e_0' a *G' nin birim elemanı* denir),

(G3) Her $a \in G$ için $(a \circ b)(e_0) > \theta$ ve $(b \circ a)(e_0) > \theta$ olacak biçimde en az bir $b \in G$ vardır (b' ye *a' nın tersi* denir ve a^{-1} ile gösterilir).

Bir fuzzy grup aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Önerme 1.4.19. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) (G,R) bir fuzzy grup olsun. Bu durumda,

(1) G' nin birim elemanı tektir,

(2) $(a \circ a)(a) > \theta$ iken $a = e$,

(3) $(a \circ b)(d) > \theta$ ve $(a \circ c)(d) > \theta$ iken $b = c$,

(4) $(b \circ a)(d) > \theta$ ve $(c \circ a)(d) > \theta$ iken $b = c$,

(5) G' nin her a elemanının tersi tektir,

(6) $(a^{-1})^{-1} = a$,

(7) $(b^{-1} \circ a^{-1})(c) > \theta$ ve $(a \circ b)(d) > \theta$ iken $c = d^{-1}$ dir.

Teorem 1.4.20. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) R, G üzerinde fuzzy ikili işlem olsun ve (G, R), $(G1)$' i sağlasın. Bu durumda, (G, R) fuzzy gruptur$\Leftrightarrow$

(G2)$'$ Her $a \in G$ için $(e_l \circ a)(a) > \theta$ olacak biçimde en az bir $e_l \in G$ vardır (e_l' ye *G' nin sol birimi* denir),

(G3)$'$ Her $a \in G$ için $(b \circ a)(e_l) > \theta$ olacak biçimde en az bir $b \in G$ vardır (b' ye *a' nın sol tersi* denir).

Teorem 1.4.21. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) R, G üzerinde fuzzy ikili işlem olsun ve (G, R), $(G1)$' i sağlasın. Bu durumda, (G, R) fuzzy gruptur$\Leftrightarrow$

(G2)$'$ Her $a \in G$ için $(a \circ e_r)(a) > \theta$ olacak biçimde en az bir $e_r \in G$ vardır (e_r' ye *G' nin sağ birimi* denir),

(G3)$'$ Her $a \in G$ için $(a \circ b)(e_r) > \theta$ olacak biçimde en az bir $b \in G$ vardır (b' ye *a' nın sağ tersi* denir).

Teorem 1.4.22. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) R, G üzerinde fuzzy ikili işlem olsun ve (G, R), $(G1)$' i sağlasın. Bu durumda, (G, R) fuzzy gruptur$\Leftrightarrow$Her $a, b \in G$ için

$$(a \circ x)(b) > \theta, \quad (y \circ a)(b) > \theta$$

olacak biçimde en az bir $x, y \in G$ vardır.

(G,R) bir fuzzy grup, $\emptyset \neq H \subseteq G$ ve her $a,b,c \in H$ için $R_H(a,b,c) = R(a,b,c)$ olsun. Bu durumda,

$$(a \bullet b)(c) = R_H(a,b,c) = R(a,b,c), \qquad \forall a,b,c \in H,$$

$$((a \bullet b) \bullet c)(z) = \bigvee_{x \in H} (R(a,b,x) \wedge R(x,c,z)), \forall\ z \in H, \forall a,b,c \in H$$

$$(a \bullet (b \bullet c))(z) = \bigvee_{x \in H} (R(b,c,x) \wedge R(a,x,z)), \forall\ z \in H, \forall a,b,c \in H$$

dır.

Tanım 1.4.23. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) (G,R) bir fuzzy grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Aşağıdakiler sağlanırsa H' ye G*' nin fuzzy alt grubu* denir:

(H1) Her $a,b \in H$ ve her $c \in G$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ iken $c \in H$' dır,

(H2) Her $a,b,c \in H$, her $z_1, z_2 \in H$ için $((a \bullet b) \bullet c)(z_1) > \theta$ ve $(a \bullet (b \bullet c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$' dir,

(H3) Her $a \in H$ için $(e_H \bullet a)(a) > \theta$ ve $(a \bullet e_H)(a) > \theta$ olacak biçimde en az bir $e_H \in H$ vardır,

(H4) Her $a \in H$ için $(a \bullet b)(e_H) > \theta$ ve $(b \bullet a)(e_H) > \theta$ olacak biçimde en az bir $b \in H$ vardır.

Önerme 1.4.24. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) H, G' nin fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda,

(1) $e_H = e$,

(2) a' nın H' deki tersi b; a' nın G' deki tersi a^{-1} e eşittir.

Önerme 1.4.25. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) H, G' nin fuzzy alt grubudur$\Leftrightarrow$

(1) Her $a,b \in H$ ve her $c \in G$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ iken $c \in H$,

(2) $a \in H$ iken $a^{-1} \in H$' dir.

Önerme 1.4.26. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) Her $i \in I$ için H_i ler G' nin fuzzy alt grubu ise $\bigcap_{i \in I} H_i$ de G' nin fuzzy alt grubudur.

Önerme 1.4.27. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) (G, R) bir fuzzy grup ve

$$C = \{x|\, x \in G \text{ ve } (x \circ a)(c) > \theta \Leftrightarrow (a \circ x)(c) > \theta,\, \forall a, c \in G\}$$

ise C, G' nin fuzzy alt grubudur.

Tanım 1.4.28. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) H, G fuzzy grubunun fuzzy alt grubu olsun. Her $a, b \in G$ ve her $h \in H$ için

$$\left(a \circ \left(h \circ a^{-1}\right)\right)(b) > \theta \Rightarrow b \in H$$

ise H' ye *G' nin normal fuzzy alt grubu* denir.

Önerme 1.4.29. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) $((a \circ b) \circ c)(d) > \theta \Leftrightarrow (a \circ (b \circ c))(d) > \theta$' dır.

Önerme 1.4.29' daki koşul, aşağıdaki koşula denktir:

$$\forall a, b \in G,\, \forall h \in H,\quad \left((a \circ h) \circ a^{-1}\right)(b) > \theta \Rightarrow b \in H$$

dir.

Tanım 1.4.30. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) H, G fuzzy grubunun fuzzy alt grubu ve

$$(aH)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a, x, z)\,, \quad (Ha)(z) = \bigvee_{x \in H} R(x, a, z)$$

olsun. aH (Ha)' ye *H' nin sol (sağ) yan kümesi* denir.

Teorem 1.4.31. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) H, G' nin fuzzy alt grubu olsun. H, G' nin normal fuzzy alt grubudur$\Leftrightarrow$

$$\forall a, z \in G,\quad (aH)(z) > \theta \Leftrightarrow \quad (Ha)(z) > \theta$$

dır.

Lemma 1.4.32. **(Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003)** G bir fuzzy grup olsun. Bu durumda,

$$R(a,b,c) > \theta \Rightarrow R\left(c, b^{-1}, a\right) > \theta,\ R\left(a^{-1}, c, b\right) > \theta$$

dır.

H, G fuzzy grubunun normal fuzzy alt grubu ve $\sum = \{aH|\, a \in G\}$ olsun. $\sum$ üzerinde $\sim$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$a_1H \sim a_2H \Leftrightarrow R\left(a^{-1}, a_2, h\right) > \theta$ olacak biçimde en az bir $h \in H$ vardır.

Teorem 1.4.33. **(Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003)** $\sim$, $\sum$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 1.4.34. **(Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003)** $a_1H \sim a_2H \Leftrightarrow ((a_1H)(z) > \theta \Leftrightarrow (a_2H)(z) > \theta)$.

$[aH] = \{a'H|\, a'H \sim aH\}$, $\overline{a} = \{a'|\, a' \in G \text{ ve } a'H \sim aH\}$, $G/H = \{[aH]|\, a \in G\}$ ve $\overline{R} : \dfrac{G}{H} \times \dfrac{G}{H} \times \dfrac{G}{H} \to [0,1]$, $([aH], [bH], [cH]) \mapsto \overline{R}([aH], [bH], [cH]) = \displaystyle\bigvee_{(a',b',c') \in \overline{a} \times \overline{b} \times \overline{c}} R(a', b', c')$ olsun.

Teorem 1.4.35. **(Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003)** $\overline{R}$, G/H üzerinde fuzzy ikili işlemdir.

$\overline{R}$, G/H üzerinde fuzzy ikili işlem olduğundan,

$$([aH] \circ [bH])([cH]) = \bar{R}([aH], [bH], [cH]),$$

$$\begin{aligned}(([aH] \circ [bH]) \circ [cH])([dH]) &= \bigvee_{x \in G} (\overline{R}([aH], [bH], [xH]) \wedge \\ &\quad \overline{R}([xH], [cH], [dH]))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([aH] \circ ([bH] \circ [cH]))([wH]) &= \bigvee_{x \in G} (\overline{R}([bH], [cH], [xH]) \wedge \\ &\quad \overline{R}([aH], [xH], [wH]))\end{aligned}$$

dır.

Teorem 1.4.36. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) $\left(G/H,\overline{R}\right)$ bir fuzzy gruptur.

Tanım 1.4.37. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) $\left(G/H,\overline{R}\right)$' ye *G' nin H' ye göre çarpım fuzzy grubu* denir.

Tanım 1.4.38. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) (G_1, R_1) ve (G_2, R_2) iki fuzzy grup ve $f : G_1 \to G_2$ dönüşüm olsun.

$$R_1(a,b,c) > \theta \Rightarrow R_2(f(a), f(b), f(c)) > \theta$$

ise f' ye *fuzzy homomorfizm* denir. f, $1-1$ ise f' ye *fuzzy monomorfizm*, örtense *fuzzy epimorfizm* denir. f, hem $1-1$ hem de örtense f' ye *fuzzy izomorfizm* denir.

Teorem 1.4.39. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) (G, R) fuzzy grup ve H, G' nin normal fuzzy alt grubu olsun. $\left(G/H,\overline{R}\right)$ çarpım fuzzy grubu ise,

$$\varphi : G \to \frac{G}{H}, \ \ a \mapsto [aH]$$

dönüşümü bir fuzzy epimorfizmidir.

Önerme 1.4.40. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) $f : (G_1, R_1) \to (G_2, R_2)$ fuzzy grup homomorfizmi ise,

(1) $f(e_1) = e_2$,

(2) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

dir.

Teorem 1.4.41. (Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003) $f : (G_1, R_1) \to (G_2, R_2)$ fuzzy grup homomorfizmi ise,

(1) H_1, G_1' in fuzzy alt grubu ise $f(H_1)$, G_2' nin fuzzy alt grubudur,

(2) H_2, G_2' nin fuzzy alt grubu ise $f^{-1}(H_2)$, G_1' in fuzzy alt grubudur,

(3) N_2, G_2' nin normal fuzzy alt grubu ise $f^{-1}(N_2)$, G_1' in fuzzy normal alt grubudur,

(4) $K\text{erf} = \{x \in G_1 | \, f(x) = e_2\}$, G_1' in normal fuzzy alt grubudur,

(5) f fuzzy monomorfizmdir$\Leftrightarrow$ $K\text{erf} = \{e_1\}$' dir.

Teorem 1.4.42. **(Yuan, X. ve Lee, E. S., 2003)** $f : (G_1, R_1) \rightarrow (G_2, R_2)$ fuzzy grup epimorfizmi ise $H = K\text{erf}$ olmak üzere G_1/H, G_2' ye izomorfiktir.

H. Aktaş ve N. Çağman, X. Yuan ve E. S. Lee' nin fuzzy ikili işlemlere dayanan fuzzy grup tanımını kullanarak; yeni bir fuzzy halka tanımlamışlardır.

G ve H, R üzerinde iki fuzzy ikili işlem olsun. Bu durumda,

$$F(R) = \{A | \, A : R \rightarrow [0,1] \text{ dönüşüm}\},$$

$$G(A,B)(c) = \bigvee_{a,b \in R} (A(a) \wedge B(b) \wedge G(a,b,c))$$

ve

$$H(A,B)(c) = \bigvee_{a,b \in R} (A(a) \wedge B(b) \wedge H(a,b,c))$$

olmak üzere, $G : F(R) \times F(R) \rightarrow F(R)$, $(A,B) \longmapsto G(A,B)$ ve $H : F(R) \times F(R) \rightarrow F(R)$, $(A,B) \longmapsto H(A,B)$ dönüşümleri vardır.

$A = \{a\}$, $B = \{b\}$ olsun ve $G(A,B)$, $H(A,B)$; sırasıyla $a \circ b$ ve $a * b$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$(a \circ b)(c) = G(a,b,c), \, \forall c \in R$$

$$(a * b)(c) = H(a,b,c), \, \forall c \in R$$

$$((a \circ b) \circ c)(z) = \bigvee_{d \in R} (G(a,b,d) \wedge G(d,c,z))$$

$$(a \circ (b \circ c))(z) = \bigvee_{d \in R} (G(b,c,d) \wedge G(a,d,z))$$

$$(a * (b \circ c))(z) = \bigvee_{d \in R} (G(b, c, d) \wedge H(a, d, z))$$

$$((a * b) \circ (a * c))(z) = \bigvee_{d, e \in R} (H(a, b, d) \wedge H(a, c, e) \wedge G(d, e, z))$$

dir.

Tanım 1.4.43. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) R boş kümeden farklı bir küme ve G, H; R üzerinde iki fuzzy ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (R, G, H)' ye *fuzzy halka* denir:

(R1) (R, G) değişmeli fuzzy gruptur,

(R2) Her $a, b, c, z_1, z_2 \in R$ için $((a * b) * c)(z_1) > \theta$ ve $(a * (b * c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$,

(R3) Her $a, b, c, z_1, z_2 \in R$ için $((a \circ b) * c)(z_1) > \theta$ ve $((a * c) \circ (b * c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$, $(a * (b \circ c))(z_1) > \theta$ ve $((a * b) \circ (a * c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$ dir.

Her $a, b \in R$ için $(a * b)(u) > \theta \Leftrightarrow (b * a)(u) > \theta$ ise (R, G, H) *değişmeli fuzzy halkadır,* denir. Her $a \in R$ için $(a * e_*)(u) > \theta$ ve $(e_* * a)(v) > \theta$ iken $u = v$ olacak biçimde $e_* \in R$ varsa (R, G, H)' ye *birimli fuzzy halka* denir. e_0, (R, G) fuzzy gubunun birimi olmak üzere e_0' a *fuzzy halkasının sıfır elemanı* denir.

Teorem 1.4.44. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H), sıfır elemanı e_0 olan fuzzy halka ise herhangi $a, b \in R$ için,

(1) $(a * b)(b) > \theta$ ve $(a * b)(e_0) > \theta$ iken $b = e_0$ ve $(b * a)(b) > \theta$ ve $(b * a)(e_0) > \theta$ iken $b = e_0$,

(2) b^{-1}, b' nin (R, G)' de tersi olsun. Bu durumda, $(a * b^{-1})(v) > \theta$ ve $(a * b)(w) > \theta$ iken $v = w^{-1}$ ve $(a^{-1} * b)(s) > \theta$ ve $(a * b)(t) > \theta$ iken $s = t^{-1}$,

(3) $(a^{-1} * b^{-1})(u) > \theta$ ve $(a * b)(v) > \theta$ iken $u = v$' dir.

Tanım 1.4.45. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H) fuzzy halka ve $e_0 \neq a \in R$ olsun. $(a * b)(e_0) > \theta$ $((b * a)(e_0) > \theta)$ olacak biçimde

$e_0 \neq b \in R$ varsa a' ya *sol sıfır bölen (sağ sıfır bölen) eleman* denir. R' nin hem sağ hem de sol sıfır bölen elemanlarına R' *nin sıfır bölen elemanları* denir.

Önerme 1.4.46. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H) fuzzy halkasında sıfır bölen elemanlar yoktur$\Leftrightarrow$Her $a\,(\neq e_0)\,, b, c \in R$ için

$$(a * b)\,(u) > \theta \text{ ve } (a * c)\,(u) > \theta \text{ iken } b = c$$

ve

$$(b * a)\,(u) > \theta \text{ ve } (c * a)\,(u) > \theta \text{ iken } b = c$$

dir.

Tanım 1.4.47. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H) fuzzy halka olsun.

(1) $(a * b)\,(u) > \theta \Leftrightarrow (b * a)\,(u) > \theta$ ise (R, G, H)' ye *değişmeli fuzzy halka* denir.

(2) Her $a \in R$ için $(e_* * a)\,(a) > \theta$ ve $(a * e_*)\,(a) > \theta$ olacak biçimde en az bir $e_* \in R$ varsa (R, G, H)' ye *birimli fuzzy halka* denir,

(3) (R, G, H) birimli fuzzy halka olsun. $a \in R$ için $(a * b)\,(e_*) > \theta$ ve $(b \circ a)\,(e_*) > \theta$ olacak biçimde en az bir $b \in R$ varsa b' ye *a' nın tersi* denir ve a_*^{-1} ile gösterilir.

Teorem 1.4.48. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H) birimli fuzzy halka ise e_* tektir.

(R, G, H) fuzzy halka, $\emptyset \neq S \subseteq R$ ve her $a, b, c \in S$ için $G_S\,(a, b, c) = G\,(a, b, c)$ ve $H_S\,(a, b, c) = H\,(a, b, c)$ olsun. Bu durumda,

$$(a \bigtriangleup b)\,(c) = G_S\,(a, b, c) = G\,(a, b, c)\,, \qquad \forall a, b, c \in S,$$

$$(a \diamond b)\,(c) = H_S\,(a, b, c) = H\,(a, b, c)\,, \qquad \forall a, b, c \in S,$$

$$(a \diamond (b \bigtriangleup c))\,(z) = \bigvee_{x \in S} (G\,(b, c, x) \wedge H\,(a, x, z))\,, \quad \forall a, b, c, z \in S$$

$$((a \diamond b) \triangle (a \diamond c))(z) = \bigvee_{x,y \in S} (H(a,b,x) \wedge H(a,c,y) \wedge G(x,y,z)), \forall a,b,c,z \in S$$

dir.

Tanım 1.4.49. (R, G, H) fuzzy halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun.

(1) Her $a, b \in S$ ve her $c \in R$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ iken $c \in S$ ve $(a * b)(c) > \theta$ iken $c \in S$,

(2) (S, G_S, H_S) bir fuzzy halka

ise (S, G_S, H_S)' ye (R, G, H) *' nin fuzzy alt halkası* denir.

Önerme 1.4.50. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H) fuzzy halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. (S, G, H), R' nin fuzzy alt halkasıdır$\Leftrightarrow$

(1) Her $a, b \in S$ ve her $c \in R$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ iken $c \in S$ ve $(a * b)(c) > \theta$ iken $c \in S$,

(2) Her $a \in S$ için $a^{-1} \in S$' dir.

Önerme 1.4.51. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H) fuzzy halka ve

$$C = \{x | \, x \in R \text{ ve } (x * a)(c) > \theta \Leftrightarrow (a * x)(c) > \theta, \forall a, c \in R\}$$

olsun. Bu durumda C, R' nin fuzzy alt halkasıdır.

Tanım 1.4.52. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R, G, H) fuzzy halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa I' ya R*' nin fuzzy ideali* denir:

(1) Her $x, y \in I$ ve $z \in R$ için $(x \circ y)(z) > \theta \Rightarrow z \in I$,

(2) Her $x \in I$ için $x^{-1} \in I$' dır,

(3) $x, y \in R$ olmak üzere, her $s \in I$ ve her $r \in R$ için $(r * s)(x) > \theta \Rightarrow x \in I$ ve $(s * r)(y) > \theta \Rightarrow y \in I$' dır.

Teorem 1.4.53. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) Her $i \in I$ için I_i' ler R' nin fuzzy idealleri olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} I_i$, R' nin idealidir.

Uyarı 1.4.54. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) Tanım 1.4.50' ye göre R fuzzy halkasının fuzzy ideali, R' nin fuzzy alt halkasıdır.

I, R halkasının bir fuzzy ideali ve $\Omega = \{a \circ I : a \in R\}$ olsun. Ω üzerinde $\sim$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$a_1 \circ I \sim a_2 \circ I \Leftrightarrow G\left(a_1^{-1}, a_2, u\right) > \theta \text{ olacak biçimde en az bir } u \in I \text{ vardır.}$$

Teorem 1.4.55. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) $\sim$, Ω üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

(R, G, H) fuzzy halka ve I, R' nin fuzzy ideali olsun. Bu durumda (I, G), (R, G)' nin alt grubudur. (R, G) değişmeli olduğundan (I, G), (R, G)' nin normal fuzzy alt grubudur. Teorem 1.4.36' dan aşağıdaki işlemlerle iyi tanımlı R/I çarpım fuzzy grubu vardır.

$$\begin{aligned}([a \circ I] \oplus [b \circ I])([c \circ I]) &= \bar{G}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) \\ &= \bigvee_{(a', b', c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} G(a', b', c')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([a \circ I] \otimes [b \circ I])([c \circ I]) &= \bar{H}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) \\ &= \bigvee_{(a', b', c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} H(a', b', c')\end{aligned}$$

Bu işlemlerle R/I, fuzzy halka yapılabilir.

$\overline{G}$ ve $\overline{H}$, R/I üzerinde iki fuzzy ikili işlem olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(([a \circ I] \oplus [b \circ I]) \oplus [c \circ I])([d \circ I]) &= \bigvee_{x \in R} (\overline{G}([a \circ I], [b \circ I], [x \circ I]) \wedge \\ &\quad \overline{G}([x \circ I], [c \circ I], [d \circ I]))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([a \circ I] \oplus ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([w \circ I]) &= \bigvee_{x \in R} (\overline{G}([b \circ I], [c \circ I], [x \circ I]) \wedge \\ &\quad \overline{G}([a \circ I], [x \circ I], [w \circ I]))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([a\circ I]\otimes([b\circ I]\oplus[c\circ I]))([z\circ I]) &= \bigvee_{d\in R}(\overline{G}([b\circ I],[c\circ I],[d\circ I])\wedge \\ &\quad \overline{H}([a\circ I],[d\circ I],[z\circ I]))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(([a\circ I]\otimes[b\circ I])\oplus([a\circ I]\otimes[c\circ I]))([z\circ I]) = \\ &= \bigvee\nolimits_{d,w\in R}(\overline{H}([a\circ I],[b\circ I],[d\circ I])\wedge \\ &\overline{H}([a\circ I],[d\circ I],[z\circ I])\wedge\overline{G}([d\circ I],[w\circ I],[z\circ I]))\end{aligned}$$

dır.

Teorem 1.4.56. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R,G,H) fuzzy halka ve I, R' nin fuzzy ideali olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}([a\circ I]\otimes[b\circ I])([c\circ I]) &= \bar{H}([a\circ I],[b\circ I],[c\circ I]) \\ &= \bigvee_{(a',b',c')\in\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}} H(a',b',c')\end{aligned}$$

işlemi ile $\left(R/I,\overline{G}\right)$ çarpım fuzzy grubu, fuzzy halkadır.

Tanım 1.4.57. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) $\left(R/I,\overline{G},\overline{H}\right)$' ye *R' nin I' ya göre çarpım fuzzy halkası* denir.

Tanım 1.4.58. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) (R_1,G_1,H_1) ve (R_2,G_2,H_2) iki fuzzy halka ve $f: R_1\to R_2$ dönüşüm olsun.

(1) $G_1(a,b,c)>\theta\Rightarrow G_2(f(a),f(b),f(c))>\theta$,

(2) $H_1(a,b,c)>\theta\Rightarrow H_2(f(a),f(b),f(c))>\theta$

ise f' ye *fuzzy halka homomorfizmi* denir. f, $1-1$ ise f' ye *fuzzy halka monomorfizmi*, örtense *fuzzy halka epimorfizmi* denir. f, hem $1-1$ hem de örtense f' ye *fuzzy halka izomorfizmi* denir.

Önerme 1.4.59. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) $f:(R_1,G_1,H_1)\to(R_2,G_2,H_2)$ fuzzy halka homomorfizmi ise,

(1) $f(e_1)=e_2$,

(2) $f\left(a^{-1}\right) = \left(f\left(a\right)\right)^{-1}$

dir.

Teorem 1.4.60. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) $f : (R_1, G_1, H_1) \rightarrow (R_2, G_2, H_2)$ fuzzy halka homomorfizmi ise,

(1) $\operatorname{Im} f$, R_2' nin fuzzy alt halkasıdır,

(2) $K\mathrm{er}f$, R_1' in fuzzy idealidir.

Teorem 1.4.61. (Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007) $f : (R_1, G_1, H_1) \rightarrow (R_2, G_2, H_2)$ fuzzy halka epimorfizmi olsun. Bu durumda $N = K\mathrm{er}f$ olmak üzere, R_1/N, R_2' ye izomorfiktir.

2. BÖLÜM

ASAL HALKALAR ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde, simetrik ikili türev ve permuting üçlü türevin izleri yardımıyla yeni genelleştirilmiş türev tanımları verilmiş ve daha önce özetlenen çalışmalardaki özellikler bu tanımlara uygulanmaya çalışılmıştır.

2.1 Simetrik İkili Türevin İzi İle Belirlenen Genelleştirilmiş Türevler

Tanım 2.1.1. R bir halka, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev ve d, D' nin izi olsun. $f : R \to R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ eşitliği sağlanıyorsa f' ye *d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş türev* denir ve $(f-d)_r$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere, $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası üzerinde $D : R \times R \to R$,

$$D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix}$$

ve $f : R \to R$,

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleri tanımlansın.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}\right)$$

olsun. Bu durumda, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}$' dır.
Yani $a = e$, $b = f$, $c = h$ ve $d = g$' dir.

$$\begin{aligned} &D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ eh & 0 \end{pmatrix} \\ &= D\left(\begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

olduğundan D iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} &D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ca & 0 \end{pmatrix} \\ &= D\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

olduğundan D simetrik dönüşümdür.

$$\begin{aligned} &D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ b+d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (a+c)\,e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae+ce & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ce & 0 \end{pmatrix} \\ &= D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right) + D\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

ve D simetrik dönüşüm olduğundan D değişkenlerinin her ikisine göre de toplamsaldır.

$$\begin{aligned} &D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (ac)\,e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (ae)\,c & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$D\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} D\left(\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ce & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (ae)\,c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (ae)\,c & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$D\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = D\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} D\left(\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

dir. Yani D simetrik ikili türevdir. Ayrıca D' nin izi d,

$$d\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = D\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $a = c$, $b = d$' dir.

$$f\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

olduğundan f iyi tanımlıdır.

$$f\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\left(\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ b+d & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} a+b+c+d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\right) + f\left(\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

olduğundan f toplamsal dönüşümdür.

$$f\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\left(\begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} (a+b)\,c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)d\left(\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)\right)$$
$$=\left(\begin{array}{cc} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ c^2 & 0 \end{array}\right)$$
$$=\left(\begin{array}{cc} (a+b)\,c & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} (a+b)\,c & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

olduğundan

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)\right)=f\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)$$
$$+\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)d\left(\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)\right)$$

dır. Yani f, d ile belirlenmiş genelleştirilmiş sağ türevdir.

Diğer taraftan,

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)f\left(\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)\right)$$
$$=\left(\begin{array}{cc} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} c+d & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$=\left(\begin{array}{cc} (a+b)\,c & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} a\,(c+d) & 0 \\ b\,(c+d) & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} (a+b)\,c+a\,(c+d) & 0 \\ b\,(c+d) & 0 \end{array}\right)$$

olduğundan

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)\right)\neq f\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)$$
$$+\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)f\left(\left(\begin{array}{cc} c & 0 \\ d & 0 \end{array}\right)\right)$$

dır. Yani f türev değildir.

Uyarı 2.1.3. R bir asal halka, $charR\neq 2$, $D:R\times R\rightarrow R$ simetrik ikili türev, d; D' nin izi ve f ; d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş türev olsun.

Bu durumda, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$' dir. Bu eşitlikte y yerine $-y$ yazılırsa; $-f(xy) = -f(x)y + xd(y)$ olur. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa, $charR \neq 2$ olduğundan $xd(y) = 0_R$ elde edilir. R halkası asal halka olduğundan $x = 0_R$ veya $d(y) = 0_R$' dir. Eğer $x = 0_R$ ise o zaman $R = \{0_R\}$ elde edilir. Diğer taraftan $d(y) = 0_R$ ise o zaman Lemma 1.2.32 den her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Bu nedenle asal halkada $(f-d)_r$ genelleştirilmiş türevini tanımlamanın anlamı yoktur.

Tanım 2.1.4. R bir halka, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev ve d, D nin izi olsun. $f : R \to R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y) + xd(y)$ olacak biçimde $\alpha : R \to R$ fonksiyonu varsa f' ye *d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş α-türev* denir ve $(f-\alpha-d)_r$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.5. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ halkası üzerinde $D : R \times R \to R$,

$$D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix},$$

$f : R \to R$,

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $\alpha : R \to R$,

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleri tanımlansın. Örnek 2.1.2' deki gibi D' nin, R' de simetrik ikili türev olduğu gösterilebilir. Ayrıca D' nin izi d,

$$d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $a = c$, $b = d$' dir.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right)$$

olduğundan f iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ b+d & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a+c)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

olduğundan f toplamsal dönüşümdür.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (ac)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} & f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\alpha\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} d\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ d^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\alpha\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &+ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} d\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

dır. Yani f, d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş α-türevdir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
& f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \\
& =\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& =\begin{pmatrix} a^2 c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a c^2 & 0 \\ b c^2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 c+a c^2 & 0 \\ b c^2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \neq\ & f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\
& +\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

dır. Yani f türev değildir.

Uyarı 2.1.6. R bir asal halka, $charR \neq 2$, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev, d; D' nin izi ve f; d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş α-türev olsun. Bu durumda, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y) + xd(y)$' dir. Bu eşitlikte y yerine $-y$ yazılırsa; $-f(xy) = f(x)\alpha(-y) + xd(y)$ olur. Eğer α tek fonksiyon ise $-f(xy) = -f(x)\alpha(y) + xd(y)$ olur. $f(xy) = f(x)\alpha(y) + xd(y)$ ve $-f(xy) = -f(x)\alpha(y) + xd(y)$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, $charR \neq 2$ olduğundan $xd(y) = 0_R$ elde edilir. R halkası asal halka olduğundan $x = 0_R$ veya $d(y) = 0_R$' dir. $x = 0_R$ ise $R = \{0_R\}$ elde edilir. $d(y) = 0_R$ ise her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y)$ olur.

Tanım 2.1.7. R bir halka, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev ve d, D' nin izi olsun. $f : R \to R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$ olacak biçimde $\alpha : R \to R$ ve $\beta : R \to R$ fonksiyonları varsa f' ye *d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş (α, β)-türev* denir ve $(f - (\alpha, \beta) - d)_r$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.8. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ halkası üzerinde $D : R \times R \to R$,

$$D\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix},$$

$f : R \to R$,

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha : R \to R$,

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $\beta : R \to R$,

$$\beta\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleri tanımlansın.

Örnek 2.1.5' den D simetrik ikili türev, D' nin izi $d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$ ve f toplamsal dönüşümdür. Ayrıca f türev değildir.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (ac)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}
& f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\alpha\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)d\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ d^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)\alpha\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad +\beta\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right)d\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

dır. Yani f, d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş (α, β)-türevdir.

Uyarı 2.1.9. R bir asal halka, $charR \neq 2$, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev, d; D' nin izi ve f; d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş (α, β)-türev olsun. Bu durumda, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$' dir. Bu eşitlikte y yerine $-y$ yazılırsa; $-f(xy) = f(x)\alpha(-y) + \beta(x)d(y)$ olur. Uyarı 2.1.6' daki gibi α tek fonksiyon olursa $-f(xy) = -f(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$ olur. $f(xy) = f(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$ ve $-f(xy) = -f(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, $charR \neq 2$ olduğundan $\beta(x)d(y) = 0_R$ elde edilir. R halkası asal halka olduğundan $\beta(x) = 0_R$ veya $d(y) = 0_R$' dir. $\beta(x) = 0_R$ veya $d(y) = 0_R$ ise her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y)$ olur.

Yukarıda verilen Uyarı 2.1.3, Uyarı 2.1.6 ve Uyarı 2.1.9 doğrultusunda aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1.10. R bir halka, $D : R \times R \to R$ simetrik ikili türev ve d, D' nin izi olsun. $f : R \to R$ çift fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$ olacak biçimde $\alpha : R \to R$ ve $\beta : R \to R$ çift fonksiyonları varsa f' ye *d ile belirlenmiş hemen hemen genelleştirilmiş sağ (α, β)-türev* denir ve $f - (\alpha, \beta)_r - d$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.11. Örnek 2.1.8, Tanım 2.1.10' a örnek olarak verilebilir.

Önerme 2.1.12. R, $charR \neq 2$ olan asal halka, D_1, D_2, D_3 ve D_4; R de simetrik ikili türevler, $0 \neq d_1$, $0 \neq d_2$, $0 \neq d_3$ ve $0 \neq d_4$ sırasıyla D_1, D_2, D_3 ve D_4' ün izleri, $f_1 - (\alpha, \beta)_r - d_1$, $f_2 - (\alpha, \beta)_r - d_2$, $f_3 - (\alpha, \beta)_r - d_3$ ve

$f_4-(\alpha,\beta)_r-d_4$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ (α,β)-türevler olsun. Eğer $f_1\neq 0$, β örten ve

$$f_1(x)\,f_2(y)=f_3(x)\,f_4(y)\,,\qquad \forall x,y\in R \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanıyor ise bu durumda C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, her $x\in R$ için $f_3(x)=\lambda f_1(x)$ olacak biçimde en az bir $\lambda\in C$ vardır.

İspat. $x,y,z\in R$ olsun. (2.1) denkleminde y yerine yz yazılırsa,

$$f_1(x)\,f_2(yz)=f_3(x)\,f_4(yz)$$

$$f_1(x)\left[f_2(y)\,\alpha(z)+\beta(y)\,d_2(z)\right]=f_3(x)\left[f_4(y)\,\alpha(z)+\beta(y)\,d_4(z)\right]$$

$$f_1(x)\,f_2(y)\,\alpha(z)+f_1(x)\,\beta(y)\,d_2(z)=f_3(x)\,f_4(y)\,\alpha(z)+f_3(x)\,\beta(y)\,d_4(z)$$

olur ve (2.1) denkleminden

$$f_1(x)\,\beta(y)\,d_2(z)=f_3(x)\,\beta(y)\,d_4(z) \tag{2.2}$$

dir. (2.2) denkleminde $r\in R$ için z yerine $z+r$ yazılırsa,

$$f_1(x)\,\beta(y)\,d_2(z+r)=f_3(x)\,\beta(y)\,d_4(z+r)$$

$$\begin{aligned}&f_1(x)\,\beta(y)\,d_2(z)+f_1(x)\,\beta(y)\,d_2(r)+2f_1(x)\,\beta(y)\,D_2(r,z)\\ =\;&f_3(x)\,\beta(y)\,d_4(z)+f_3(x)\,\beta(y)\,d_4(r)+2f_3(x)\,\beta(y)\,D_4(r,z)\end{aligned}$$

olur ve $charR\neq 2$ olduğundan (2.2) denkleminden,

$$f_1(x)\,\beta(y)\,D_2(r,z)=f_3(x)\,\beta(y)\,D_4(r,z) \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.3) denkleminde $s\in R$ için z yerine zs yazılırsa,

$$\begin{aligned}f_1(x)\,\beta(y)\,D_2(r,z)\,s+f_1(x)\,\beta(y)\,zD_2(r,s)\;&=\;f_3(x)\,\beta(y)\,D_4(r,z)\,s\\ &\quad+f_3(x)\,\beta(y)\,zD_4(r,s)\end{aligned}$$

dir. Böylece (2.3) denkleminden,

$$f_1(x)\,\beta(y)\,zD_2(r,s)=f_3(x)\,\beta(y)\,zD_4(r,s)$$

elde edilir. Bu denklemde s yerine r yazılırsa,

$$f_1(x)\beta(y)zd_2(r) = f_3(x)\beta(y)zd_4(r) \tag{2.4}$$

olur. (2.4) denkleminde $v \in R$ için z yerine $zd_4(v)$ yazılırsa ,

$$f_1(x)\beta(y)zd_4(v)d_2(r) = f_3(x)\beta(y)zd_4(v)d_4(r)$$

dir. (2.4) denkleminden,

$$f_1(x)\beta(y)zd_4(v)d_2(r) = f_1(x)\beta(y)zd_2(v)d_4(r)$$

$$f_1(x)\beta(y)z(d_4(v)d_2(r) - d_2(v)d_4(r)) = 0_R$$

elde edilir. $f_1 \neq 0$, β örten ve R asal halka olduğundan,

$$d_4(v)d_2(r) = d_2(v)d_4(r), \qquad \forall v, r \in R$$

dir. $d_4 \neq 0$ olduğundan Lemma 1.2.52' den, her $r \in R$ için $d_2(r) = \lambda d_4(r)$ olacak biçimde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

(2.2) denkleminde $d_2(z) = \lambda d_4(z)$ eşitliği kullanılırsa,

$$f_1(x)\beta(y)\lambda d_4(z) = f_3(x)\beta(y)d_4(z)$$

bulunur ve $\lambda \in C$ olduğundan,

$$(\lambda f_1(x) - f_3(x))\beta(y)d_4(z) = 0_R$$

olur. R asal halka, $d_4 \neq 0$ ve β örten olduğundan her $x \in R$ için $f_3(x) = \lambda f_1(x)$ elde edilir.

Sonuç 2.1.13. R; $charR \neq 2$ olan asal halka, D_1 ve D_2; R' de simetrik ikili türevler, $0 \neq d_1$ ve $0 \neq d_2$ sırasıyla D_1 ve D_2' nin izleri, $f_1 - (\alpha,\beta)_r - d_1$ ve $f_2 - (\alpha,\beta)_r - d_2$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ (α,β)-türevler olsun. Eğer $f_1 \neq 0$, β örten ve

$$f_1(x)f_2(y) = f_2(x)f_1(y), \qquad \forall x, y \in R$$

eşitliği sağlanıyor ise, bu durumda C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, her $x \in R$ için $f_2(x) = \lambda f_1(x)$ olacak biçimde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat. Önerme 2.1.12' de $f_1 = f_4$ ve $f_2 = f_3$ alınırsa istenen elde edilir.

Lemma 2.1.14. R; $charR \neq 2$ olan asal halka, D; R' de simetrik ikili türev, $0 \neq d$; D' nin izi ve $f - (\alpha, \beta)_r - d$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ (α, β)-türev olsun. $a \in R$ ve β örtense her $x \in R$ için $af(x) = 0_R$ iken $a = 0_R$ dir.

İspat. Her $x \in R$ için $af(x) = 0_R$ olsun. Bu eşitlikte $y \in R$ için x yerine xy yazılırsa,

$$0_R = af(x)\alpha(y) + a\beta(x)d(y) = a\beta(x)d(y)$$

olur. R asal halka, $d \neq 0$ ve β örten olduğundan $a = 0_R$ elde edilir.

2.2 Permuting Üçlü Türevin İzi İle Belirlenen Genelleştirilmiş Türevler

Tanım 2.2.1. R bir halka, $D : R \times R \times R \to R$ permuting üçlü türev ve d, D' nin izi olsun. $f : R \to R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ eşitliği sağlanıyor ise f' ye *d ile belirlenmiş genelleştirilmiş sağ türev* denir ve $(f-d)_r$ ile gösterilir. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = xf(y) + d(x)y$ eşitliği sağlanıyorsa f' ye *d ile belirlenmiş genelleştirilmiş sol türev* denir ve $(f-d)_l$ ile gösterilir. f, d ile belirlenmiş hem genelleştirilmiş sağ hem de genelleştirilmiş sol türev ise f' ye *d ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev* denir ve $f-d$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.2. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası üzerinde

$D : R \times R \times R \to R$,

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1a_2a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $f : R \to R$,

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleri tanımlansın.

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} a_5 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} a_6 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \text{ için}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_5 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_6 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

olsun. Bu durumda $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_5 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_6 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. Yani $a_1 = a_4$, $b_1 = b_4$, $c_1 = c_4$, $a_2 = a_5$, $b_2 = b_5$, $c_2 = c_5$ ve $a_3 = a_6$, $b_3 = b_6$, $c_3 = c_6$' dır.

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1a_2a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_4a_5a_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D\left(\begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_5 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_6 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

olduğundan D iyi tanımlıdır.

$$D\left(x,y,z\right)=D\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1a_2a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2a_1a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2a_3a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3a_2a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3a_1a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1a_3a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan $D\left(x,y,z\right)=D\left(y,x,z\right)=D\left(y,z,x\right)=D\left(z,y,x\right)=D\left(z,x,y\right)=D\left(x,z,y\right)$' dir.

$$D\left(x+t,y,z\right)=D\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$=D\left(\begin{pmatrix} a_1+a_4 & 0 & 0 \\ b_1+b_4 & 0 & 0 \\ c_1+c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(a_1+a_4\right)a_2a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1a_2a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_4a_2a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=D\left(x,y,z\right)+D\left(t,y,z\right)$$

olduğundan D permuting üçlü toplamsal dönüşümdür.

$$D\left(xt,y,z\right)=D\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ b_1 & 0 & 0\\ c_1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0\\ b_4 & 0 & 0\\ c_4 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0\\ b_2 & 0 & 0\\ c_2 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0\\ b_3 & 0 & 0\\ c_3 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$=D\left(\begin{pmatrix} a_1a_4 & 0 & 0\\ b_1a_4 & 0 & 0\\ c_1a_4 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0\\ b_2 & 0 & 0\\ c_2 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0\\ b_3 & 0 & 0\\ c_3 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \left(a_1a_4\right)a_2a_3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ve

$$D\left(x,y,z\right)t+xD\left(t,y,z\right)$$

$$=D\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ b_1 & 0 & 0\\ c_1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0\\ b_2 & 0 & 0\\ c_2 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0\\ b_3 & 0 & 0\\ c_3 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0\\ b_4 & 0 & 0\\ c_4 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ b_1 & 0 & 0\\ c_1 & 0 & 0\end{pmatrix}D\left(\begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0\\ b_4 & 0 & 0\\ c_4 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0\\ b_2 & 0 & 0\\ c_2 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0\\ b_3 & 0 & 0\\ c_3 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ a_1a_2a_3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0\\ b_4 & 0 & 0\\ c_4 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ b_1 & 0 & 0\\ c_1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ a_4a_2a_3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ a_1a_2a_3a_4 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ a_1a_2a_3a_4 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

olduğundan $D\left(xt,y,z\right)=D\left(x,y,z\right)t+xD\left(t,y,z\right)$' dir. D permuting üçlü toplamsal dönüşüm olduğundan $D\left(x,yt,z\right)=D\left(x,y,z\right)t+yD\left(x,t,z\right)$ ve $D\left(x,y,zt\right)=D\left(x,y,z\right)t+zD\left(x,y,t\right)$ eşitlikleri de sağlanır. Böylece D permuting üçlü türevdir ve D' nin izi,

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= D\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dır.

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $x = y$ olsun. Bu durumda $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$' dir.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

olduğundan f iyi tanımlıdır.

$$f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 & 0 \\ b_1+b_2 & 0 & 0 \\ c_1+c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f(x) + f(y)$$

olduğundan f toplamsal dönüşümdür.

$$\begin{aligned} f(xy) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ b_1a_2 & 0 & 0 \\ c_1a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & f(x)\,y + xd(y) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ & = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan f, d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş türevdir.

Diğer taraftan,

$$f(x)y + xf(y) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 & 0 \\ b_1a_2 & 0 & 0 \\ c_1a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1a_2 & 0 & 0 \\ b_1a_2 & 0 & 0 \\ c_1a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq f(xy)$$

olduğundan f bir türev değildir.

Uyarı 2.2.3. R bir asal halka, $charR \neq 2,3$, $D : R\times R\times R \to R$ permuting üçlü türev, d; D' nin izi ve f ; d ile belirlenmiş genelleştirilmiş sağ türev olsun. Bu durumda, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ olur. Bu eşitlikte $z \in R$ için y yerine $y + z$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} f(x(y+z)) &= f(x)(y+z) + xd(y+z) \\ &= f(x)y + f(x)z + xd(y) + xd(z) \\ &\quad +3xD(y,y,z) + 3xD(y,z,z) \end{aligned}$$

ve

$$f(xy + xz) = f(xy) + f(xz) = f(x)y + xd(y) + f(x)z + xd(z)$$

olur. $f(x(y+z)) = f(xy + xz)$, $charR \neq 3$ ve R asal halka olduğundan

$$D(y,y,z) + D(y,z,z) = 0_R$$

elde edilir. Burada z yerine y yazılırsa, $charR \neq 2$ olduğundan $d(y) = 0_R$ olur. Böylece Lemma 1.2.32' den her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Bu nedenle asal halkada $(f-d)_r$ genelleştirilmiş sağ türevini tanımlamanın anlamı yoktur.

Tanım 2.2.4. R bir halka, $D : R \times R \times R \to R$ permuting üçlü türev ve d, D' nin izi olsun. Bu durumda, $f : R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ eşitliği sağlanırsa o zaman f' ye *d ile belirlenmiş hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev* denir ve $(f-d)_r$ ile gösterilir. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = xf(y) + d(x)y$ eşitliği sağlanırsa f'ye *d ile belirlenmiş hemen hemen genelleştirilmiş sol türev* denir ve $(f-d)_l$ ile gösterilir. Ayrıca f, d ile belirlenmiş hem hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev hem de hemen hemen genelleştirilmiş sol türev ise ozaman f' ye *d ile belirlenmiş hemen hemen genelleştirilmiş türev* denir ve $(f-d)$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.5. R, $charR \neq 2, 3$ olan asal halka, D_1, D_2, D_3 ve D_4; R' de permuting üçlü türevler, $0 \neq d_1$, $0 \neq d_2$, $0 \neq d_3$ ve $0 \neq d_4$ sırasıyla D_1, D_2, D_3 ve D_4' ün izleri, $(f_1 - d_1)_r$, $(f_2 - d_2)_r$, $(f_3 - d_3)_r$ ve $(f_4 - d_4)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türevler olsun. Eğer $f_1 \neq 0$ ve

$$f_1(x) f_2(y) = f_3(x) f_4(y), \qquad \forall x, y \in R \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanıyor ise bu durumda C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, her $x \in R$ için $f_3(x) = \lambda f_1(x)$ olacak biçimde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat. $x, y, z \in R$ olsun. (2.5) denkleminde y yerine yz yazılırsa,

$$f_1(x) f_2(yz) = f_3(x) f_4(yz)$$

$$f_1(x) [f_2(y) z + y d_2(z)] = f_3(x) [f_4(y) z + y d_4(z)]$$

$$f_1(x) f_2(y) z + f_1(x) y d_2(z) = f_3(x) f_4(y) z + f_3(x) y d_4(z)$$

olur ve (2.5) denkleminden

$$f_1(x) y d_2(z) = f_3(x) y d_4(z) \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.6) denkleminde $v \in R$ için y yerine $yd_4(v)$ yazılırsa,

$$f_1(x)\, yd_4(v)\, d_2(z) = f_3(x)\, yd_4(v)\, d_4(z)$$

ve (2.6) denkleminden,

$$f_1(x)\, yd_4(v)\, d_2(z) = f_1(x)\, yd_2(v)\, d_4(z)$$

$$f_1(x)\, y\left[d_4(v)\, d_2(z) - d_2(v)\, d_4(z)\right] = 0_R$$

bulunur ve $f_1 \neq 0$ ve R asal halka olduğundan,

$$d_4(v)\, d_2(z) = d_2(v)\, d_4(z), \qquad \forall v, z \in R$$

dir. Böylece $d_4 \neq 0$ olduğundan Lemma 1.2.62' den, her $z \in R$ için $d_2(z) = \lambda d_1(z)$ olacak biçimde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

(2.6) denkleminde $d_2(z) = \lambda d_4(z)$ eşitliği kullanılırsa,

$$f_1(x)\, y\lambda d_4(z) = f_3(x)\, yd_4(z)$$

ve burada $\lambda \in C$ olduğundan,

$$\left(\lambda f_1(x) - f_3(x)\right) yd_4(z) = 0_R$$

olur ve böylece R asal halka ve $d_4 \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için $f_3(x) = \lambda f_1(x)$ elde edilir.

Sonuç 2.2.6. R, $charR \neq 2, 3$ olan asal halka, D_1 ve D_2; R' de permuting üçlü türevler, $0 \neq d_1$ ve $0 \neq d_2$ sırasıyla D_1 ve D_2' nin izleri, $(f_1 - d_1)_r$ ve $(f_2 - d_2)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türevler olsun. Eğer $f_1 \neq 0$ ve

$$f_1(x)\, f_2(y) = f_2(x)\, f_1(y), \qquad \forall x, y \in R$$

eşitliği sağlanıyor ise bu durumda C, R' nin genişletilmiş merkezi olmak üzere, her $x \in R$ için $f_2(x) = \lambda f_1(x)$ olacak biçimde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat. Önerme 2.2.5' te $f_1 = f_4$ ve $f_2 = f_3$ alınırsa istenen elde edilir.

Lemma 2.2.7. R; $charR \neq 2,3$ olan asal halka, D; R'de permuting üçlü türev, $0 \neq d$, D'nin izi ve $(f-d)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $af(x) = 0_R$ ise $a = 0_R$' dir.

İspat. Her $x \in R$ için $af(x) = 0_R$ olsun. Bu eşitlikte $y \in R$ için x yerine xy yazılırsa,

$$0_R = af(x)y + axd(y) = axd(y)$$

bulunur. R asal halka ve $d \neq 0$ olduğundan $a = 0_R$' dir.

Teorem 2.2.8. R; $charR \neq 2,3$ olan asal halka, D; R'de permuting üçlü türev, $0 \neq d$, D'nin izi ve $(f-d)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $[a, f(x)] = 0_R$ ise $a \in Z$' dir.

İspat. Her $x \in R$ için $[a, f(x)] = 0_R$ olsun. Bu eşitlikte x yerine xy yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0_R &= [a, f(xy)] = [a, f(x)y + xd(y)] \qquad (2.7) \\ &= f(x)[a,y] + [a, f(x)]y + [a,x]d(y) + x[a, d(y)] \\ &= f(x)[a,y] + [a,x]d(y) + x[a, d(y)] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.7) denkleminde $z \in R$ için y yerine $y+z$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0_R &= f(x)[a, y+z] + [a,x]d(y+z) + x[a, d(y+z)] \\ &= f(x)[a,y] + f(x)[a,z] + [a,x]d(y) + [a,x]d(z) + 3[a,x]D(y,y,z) \\ &\quad +3[a,x]D(y,z,z) + x[a,d(y)] + x[a,d(z)] + 3x[a, D(y,y,z)] \\ &\quad +3x[a, D(y,z,z)] \end{aligned}$$

olur ve (2.7) denklemi kullanılırsa, $charR \neq 3$ olduğundan,

$$0_R = [a,x]D(y,y,z) + [a,x]D(y,z,z) + x[a, D(y,y,z)] + x[a, D(y,z,z)] \qquad (2.8)$$

bulunur. (2.8) denkleminde z yerine $-z$ yazılırsa,

$$0_R = -[a,x]D(y,y,z) + [a,x]D(y,z,z) - x[a, D(y,y,z)] + x[a, D(y,z,z)] \qquad (2.9)$$

olur. (2.7) ve (2.8) denklemleri taraf tarafa toplanırsa $charR \neq 2$ olduğundan

$$[a,x]\,D\,(y,z,z) + x\,[a,D\,(y,z,z)] = 0_R$$

$$axD\,(y,z,z) - xaD\,(y,z,z) + xaD\,(y,z,z) - xD\,(y,z,z)\,a = 0_R$$

elde edilir. Böylece $axD\,(y,z,z) = xD\,(y,z,z)\,a$' dır. $r \in R$ olmak üzere, x yerine xr yazılırsa $axrD\,(y,z,z) = xrD\,(y,z,z)\,a = xarD\,(y,z,z)$ olur ve buradan $[a,x]\,rd\,(y) = 0_R$ elde edilir. Bu durumda, R asal halka ve $d \neq 0$ olduğundan $a \in Z$' dir.

Lemma 2.2.9. R, $charR \neq 2,3$ olan asal halka, D; R' de permuting üçlü türev, $0 \neq d$; D' nin izi ve $(f-d)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev olsun. Her $x,y \in R$ için $[f\,(x)\,,f\,(y)] = 0_R$ ise R değişmeli halkadır.

İspat. Teorem 2.2.8' den $f\,(R) \subseteq Z$' dir. Bu durumda, her $x,r \in R$ için $[f\,(x)\,,r] = 0_R$' dir. $y \in R$ için x yerine xy yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0_R &= [f\,(xy)\,,r] = [f\,(x)\,y + xd\,(y)\,,r] \qquad (2.10)\\ &= f\,(x)\,[y,r] + [f\,(x)\,,r]\,y + [x,r]\,d\,(y) + x\,[d\,(y)\,,r]\\ &= f\,(x)\,[y,r] + [x,r]\,d\,(y) + x\,[d\,(y)\,,r] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.10) denkleminde $z \in R$ için y yerine $y+z$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0_R &= f\,(x)\,[y+z,r] + [x,r]\,d\,(y+z) + x\,[d\,(y+z)\,,r]\\ &= f\,(x)\,[y,r] + f\,(x)\,[z,r] + [x,r]\,d\,(y) + [x,r]\,d\,(z) + 3\,[x,r]\,D\,(y,y,z)\\ &\quad +3\,[x,r]\,D\,(y,z,z) + x\,[d\,(y)\,,r] + x\,[d\,(z)\,,r] + 3x\,[D\,(y,y,z)\,,r]\\ &\quad +3x\,[D\,(y,z,z)\,,r] \end{aligned}$$

olur ve burada (2.10) denklemi kullanılırsa, $charR \neq 3$ olduğundan,

$$0_R = [x,r]\,D\,(y,y,z) + [x,r]\,D\,(y,z,z) + x\,[D\,(y,y,z)\,,r] + x\,[D\,(y,z,z)\,,r]$$

bulunur. Bu denklemde z yerine y yazılırsa, $charR \neq 2$ olduğundan,

$$x\,[d\,(y)\,,r] + [x,r]\,d\,(y) = 0_R$$

$$xd(y)r - xrd(y) + xrd(y) - rxd(y) = 0_R$$

dir. Böylece $xd(y)r = rxd(y)$ olur. Bu bağıntıda $z \in R$ için x yerine xz yazılırsa $xzd(y)r = rxzd(y) = xrzd(y)$ olduğundan $[x,r]zd(y) = 0_R$ elde edilir. R asal halka ve $d \neq 0$ olduğundan her $x, r \in R$ için $[x,r] = 0_R$' dir. Yani R değişmeli halkadır.

Teorem 2.2.10. *R; $charR \neq 2,3$ olan asal halka, $0 \neq D$; R' de permuting üçlü türev, $0 \neq d$; D' nin izi ve $(f-d)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev olsun. $a \in R$ için $[a, f(R)] \subseteq Z$ ise o zaman $a \in Z$' dir.*

İspat. Her $x \in R$ için $[a, f(x)] \in Z$ olsun. Bu ifadede $y \in R$ için x yerine xy yazılırsa,

$$\begin{aligned}
[a, f(xy)] &= [a, f(x)y + xd(y)] \\
&= [a, f(x)]y + f(x)[a,y] + [a,x]d(y) + x[a,d(y)] \in Z
\end{aligned}$$

olur. Burada $z \in R$ için y yerine $y+z$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&[a, f(x)](y+z) + f(x)[a,y+z] + [a,x]d(y+z) + x[a,d(y+z)] \\
&= [a,f(x)]y + [a,f(x)]z + f(x)[a,y] + f(x)[a,z] + [a,x]d(y) + [a,x]d(z) \\
&+3[a,x]D(y,y,z) + 3[a,x]D(y,z,z) + x[a,d(y)] + x[a,d(z)] \\
&+3x[a,D(y,y,z)] + 3x[a,D(y,z,z)] \in Z.
\end{aligned}$$

$charR \neq 3$ olduğundan bir önceki ifadeden,

$$[a,x]D(y,y,z) + [a,x]D(y,z,z) + x[a,D(y,y,z)] + x[a,D(y,z,z)] \in Z \tag{2.11}$$

bulunur. (2.11) ifadesinde y yerine $-y$ yazılırsa,

$$[a,x]D(y,y,z) - [a,x]D(y,z,z) + x[a,D(y,y,z)] - x[a,D(y,z,z)] \in Z \tag{2.12}$$

olur. (2.11) ve (2.12) ifadeleri toplanılırsa, $charR \neq 2$ olduğundan,

$$[a,x]D(y,y,z) + x[a,D(y,y,z)] \in Z \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.13) ifadesinde $c \in Z$ olmak üzere, x yerine c yazılırsa,

$$[a,c]\,D(y,y,z) + c\,[a,D(y,y,z)] = c\,[a,D(y,y,z)] \in Z$$

olur. $c \in Z$ ve R asal halka olduğundan $c = 0_R$ veya $[a,D(y,y,z)] \in Z$' dir. Eğer $c = 0_R$ olursa her $x \in R$ için $[a,f(x)] = 0_R$ elde edilir. Böylece Teorem 2.2.8' den $a \in Z$' dir. Şimdi $[a,D(y,y,z)] \in Z$ olsun. Bu eşitlikte z yerine a^2 yazılırsa, $[a,D(y,y,a)] \in Z$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left[a,D\left(y,y,a^2\right)\right] &= [a,aD(y,y,a) + D(y,y,a)\,a] \\
&= a\,[a,D(y,y,a)] + [a,a]\,D(y,y,a) \\
&\quad + [a,D(y,y,a)]\,a + D(y,y,a)\,[a,a] \\
&= 2a\,[a,D(y,y,a)] \in Z
\end{aligned}$$

olur. $charR \neq 2$ olduğundan $a\,[a,D(y,y,a)] \in Z$' dir. Buradan $a \in Z$ veya $[a,D(y,y,a)] = 0_R$' dir. İki durumda da $[a,D(y,y,a)] = 0_R$' dir.

Her $z \in R$ için $[a,D(y,y,z)] \in Z$ olduğundan her $x \in R$ için $[a,D(y,y,[a,x])] \in Z$ dir. O halde $[a,D(y,y,x)] \in Z$ olduğundan

$$\begin{aligned}
[a,D(y,y,[a,x])] &= [a,D(y,y,ax-xa)] \\
&= [a,aD(y,y,x) + D(y,y,a)\,x - xD(y,y,a) - D(y,y,x)\,a] \\
&= [a,[a,D(y,y,x)] + [D(y,y,a),x]] \\
&= [a,[a,D(y,y,x)]] + [a,[D(y,y,a),x]] \\
&= [a,[D(y,y,a),x]] \in Z
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadede x yerine ax yazılırsa,

$$\begin{aligned}
[a,[D(y,y,a),ax]] &= [a,a\,[D(y,y,a),x] + [D(y,y,a),a]\,x] \\
&= a\,[a,[D(y,y,a),x]] \in Z
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan R asal halka ve $[a,[D(y,y,a),x]] \in Z$ olduğundan $[a,[D(y,y,a),x]] = 0_R$ veya $a \in Z$' dir. Her $x \in R$ için $[a,[D(y,y,a),x]] = 0_R$ ise I_a ve $I_{D(y,y,a)}$ sırasıyla a ve $D(y,y,a)$ tarafından belirlenen iç türevler olmak üzere, $\left(I_a I_{D(y,y,a)}\right)(x) = 0_R$' dir. Dolayısıyla Teorem 1.2.15' den $I_a = 0_R$ veya $I_{D(y,y,a)} = 0_R$' dir. Buradan $a \in Z$ veya $D(y,y,a) \in Z$ olur. $D(y,y,a) \in Z$ olsun.

Her $x \in R$ için $[a, D(y,y,ax)] \in Z$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
[a, D(y,y,ax)] &= [a, D(y,y,a)x + aD(y,y,x)] \qquad (2.14)\\
&= [a, D(y,y,a)]x + D(y,y,a)[a,x] + [a,a]D(y,y,x)\\
&\quad +a[a, D(y,y,x)]\\
&= D(y,y,a)[a,x] + a[a, D(y,y,x)] \in Z
\end{aligned}$$

dir. O halde $[a, D(y,y,a)[a,x] + a[a, D(y,y,x)]] = 0_R$ olur. Yani

$$\begin{aligned}
0_R &= [a, D(y,y,a)[a,x] + a[a, D(y,y,x)]]\\
&= D(y,y,a)[a,[a,x]] + [a, D(y,y,a)][a,x]\\
&\quad + [a,a][a, D(y,y,x)] + a[a,[a, D(y,y,x)]]\\
&= D(y,y,a)[a,[a,x]]
\end{aligned}$$

bulunur. $D(y,y,a) \neq 0_R$ ise her $x \in R$ için $a \in Z$' dir. $D(y,y,a) = 0_R$ ise (2.14) denkleminden $a[a, D(y,y,x)] \in Z$ olur. Buradan $a \in Z$ veya $[a, D(y,y,x)] = 0_R$'dir. Bu eşitlikte $z \in R$ için x yerine xz yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0_R &= [a, D(y,y,xz)] = [a, D(y,y,x)z + xD(y,y,z)] \qquad (2.15)\\
&= [a, D(y,y,x)]z + D(y,y,x)[a,z] + [a,x]D(y,y,z)\\
&\quad +x[a, D(y,y,z)]\\
&= D(y,y,x)[a,z] + [a,x]D(y,y,z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer z, a ile değişmeli ise $[a,z] = 0_R$' dir. (2.15) denkleminden $[a,x]D(y,y,z) = 0_R$' dir. Eğer $a \notin Z$ ise o zaman R asal halka olduğundan $D(y,y,z) = 0_R$ olur. Yani $C_R(a) = \{z \in R | \, az = za\}$ kümesi üzerinde $D(y,y,z) = 0_R$' dir. Fakat herhangi bir $x \in R$ için $D(y,y,x) \in C_R(a)$ olduğundan her $x, y \in R$ için $D(y,y,D(y,y,x)) = 0_R$' dir. Bu durumda her

$x \in R$ için $D(d(x), x, x) = 0_R$ olur. Böylece Teorem 1.2.58'den $D = 0$ olur. Bu ise $D \neq 0$ ile çelişir. O halde $a \in Z$' dir ve ispat biter.

Önerme 2.2.10. *R, $charR \neq 2,3$ olan, değişmeli olmayan asal halka, D; R' de permuting üçlü türev, d; D' nin izi ve $(f-d)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev olsun. Her $x, y \in R$ için $f([x, y]) = 0$ ise o zaman $d = 0$ dır.*

İspat. Her $x, y \in R$ için $f([x, y]) = 0_R$ olsun. Bu ifadede y yerine yx yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0_R &= f([x, yx]) = f(y[x, x] + [x, y]x) \\ &= f([x, y]x) = f([x, y])x + [x, y]d(x) = [x, y]d(x) \end{aligned}$$

elde edilir. $r \in R$ için son ifadede y yerine yr yazılırsa,

$$0_R = [x, yr]d(x) = [x, y]rd(x) + y[x, r]d(x) = [x, y]rd(x)$$

olur. $x \notin Z$ ise $d(x) = 0_R$' dir. Buna göre $x \in Z$ ve $y \notin Z$ olsun. Bu durumda $x + y, y \notin Z$' dir. Böylece

$$\begin{aligned} 0_R &= d(x+y) = d(x) + d(y) + 3D(x, x, y) + 3D(x, y, y) \\ &= d(x) + 3D(x, x, y) + 3D(x, y, y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0_R &= d(x + (-y)) = d(x) + d(-y) - 3D(x, x, y) + 3D(x, y, y) \\ &= d(x) - 3D(x, x, y) + 3D(x, y, y) \end{aligned}$$

olur. Bu iki denklemden ve $charR \neq 2,3$ olduğundan $D(x, x, y) = 0_R$ bulunur. Burada y yerine $x + y$ yazılırsa,

$$0_R = D(x, x, x+y) = D(x, x, x) + D(x, x, y) = d(x)$$

olduğundan her $x \in R$ için $d(x) = 0_R$' dir. Yani $d = 0$' dır.

Önerme 2.2.11. R; $charR \neq 2,3$ olan asal halka, D; R' de permuting üçlü türev, d; D' nin izi ve $(f-d)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türev olsun. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = \pm [x,y]$ ise o zaman $d=0$' dır.

İspat. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = \pm [x,y]$ olsun. Bu ifadede y yerine yx yazılırsa,

$$f([x,yx]) = \pm [x,y]$$

$$f(y[x,x] + [x,y]x) = \pm y[x,x] \pm [x,y]x$$

$$f([x,y])x + [x,y]d(x) = \pm [x,y]x$$

olduğundan $[x,y]d(x) = 0_R$ elde edilir. Önerme 2.2.10'daki ispat tekniği kullanılırsa her $x \in R$ için $d(x) = 0_R$' dir. Yani $d=0$' dır.

Teorem 2.2.12. R, $charR \neq 2,3$ olan asal halka, D_1 ve D_2; R' de permuting üçlü türevler, $0 \neq d_1$ ve $0 \neq d_2$ sırasıyla D_1 ve D_2' nin izleri, $(f_1-d_1)_r$ ve $(f_2-d_2)_r$ hemen hemen genelleştirilmiş sağ türevler olsun. $a \in R$ ve her $x \in R$ için $af_1(x) = f_2(x)a$ ise $a \in Z$' dir.

İspat. Her $x \in R$ için $af_1(x) = f_2(x)a$ olsun. Bu eşitlikte $y \in R$ için x yerine xy yazılırsa,

$$af_1(xy) = f_2(xy)a$$

$$af_1(x)y + axd_1(y) = f_2(x)ya + xd_2(y)a \tag{2.16}$$

olur. (2.16) denkleminde $z \in R$ için y yerine $y+z$ yazılırsa,

$$af_1(x)(y+z) + axd_1(y+z) = f_2(x)(y+z)a + xd_2(y+z)a$$

$$\begin{aligned} & af_1(x)y + af_1(x)z + axd_1(y) + axd_1(z) + 3axD_1(y,y,z) + 3axD_1(y,z,z) \\ = \; & f_2(x)ya + f_2(x)za + xd_2(y)a + xd_2(z)a + 3xD_2(y,y,z)a + 3xD_2(y,z,z)a \end{aligned}$$

bulunur ve $charR \neq 3$ olduğundan (2.16) denkleminden,

$$axD_1(y,y,z) + axD_1(y,z,z) = xD_2(y,y,z)a + xD_2(y,z,z)a \tag{2.17}$$

dır. (2.16) denkleminde z yerine $-z$ yazılırsa,

$$-axD_1(y,y,z)+axD_1(y,z,z)=-xD_2(y,y,z)\,a+xD_2(y,z,z)\,a \qquad (2.18)$$

olur. (2.17) ve (2.18) denklemleri taraf tarafa toplanılırsa, $char R \neq 2$ olduğundan

$$axD_1(y,z,z)=xD_2(y,z,z)\,a$$

dır. Bu denklemde z yerine y yazılırsa $axd_1(y)=xd_2(y)\,a$ bulunur. $r \in R$ için x yerine xr yazılırsa,

$$axrd_1(y)=xrd_2(y)\,a=xard_1(y)\,,$$

yani $[a,x]\,rd_1(y)=0_R$ elde edilir. R asal halka ve $d_1 \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için $[a,x]=0_R$ olur. Böylece $a \in Z$ elde edilir.

3. BÖLÜM
FUZZY Γ-HALKALARININ YENİ BİR TİPİ

Bu bölümde, H. Aktaş ve N. Çağman (2007)' nın, X. Yuan ve E. S. Lee (2003)' nin fuzzy ikili işleme dayanan fuzzy grup tanımını kullanarak oluşturduğu fuzzy halkası, fuzzy Γ-halkasına genelleştirilmiştir.

M ve Γ boş kümeden farklı iki küme, R_M ve R_Γ sırasıyla $M \times M \times M$ ve $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$' nın fuzzy alt kümeleri olmak üzere, R_M ve R_Γ, M ve Γ üzerinde fuzzy ikili işlemler olsun.

Tanım 3.1. M ve Γ boş kümeden farklı iki küme ve S, $M \times \Gamma \times M \times \Gamma \times M$ (kısaca (M, Γ))' nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa S' ye (M, Γ) üzerinde bir *fuzzy ikili işlem* denir:

$\theta \in [0, 1)$ sabit bir reel sayı olmak üzere,

(i) Her $a, b \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $S(a, \alpha, b, \beta, c) > \theta$ olacak biçimde en az bir $c \in M$ vardır,

(ii) Her $a, b, c_1, c_2 \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $\bigvee\limits_{\beta \in \Gamma} S(a, \gamma, b, \beta, c_1) > \theta$ ve $\bigvee\limits_{\beta \in \Gamma} S(a, \alpha, b, \beta, c_2) > \theta$ iken $c_1 = c_2$' dir.

S, (M, Γ) üzerinde bir fuzzy ikili işlem olsun. Bu durumda,

$$F(M) = \{A |\, A : M \to [0, 1] \text{ bir dönüşüm}\},$$

$$F(\Gamma) = \{G |\, G : \Gamma \to [0, 1] \text{ bir dönüşüm}\}$$

olmak üzere,

$$S : F(M) \times F(\Gamma) \times F(M) \to F(M),\ (A, G, B) \mapsto S(A, G, B)$$

dönüşümü vardır ve

$$S(A, G, B)(c) = \bigvee_{\substack{a,b,c \in M \\ \alpha,\beta \in \Gamma}} (A(a) \wedge G(\alpha) \wedge B(b) \wedge S(a, \alpha, b, \beta, c)) \tag{3.1}$$

dir.

$A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $G=\{\alpha\}$, ve $G'=\{\alpha'\}$ olsun. Bu durumda $R(A,B)$, $R(G,G')$ ve $S(A,G,B)$ sırasıyla $a\circ b$, $\alpha\circ\alpha'$ ve $a*\alpha*b$ ile gösterilsin. Böylece her $a,b,c,z\in M$ ve $\alpha,\alpha',\beta,\beta'\in\Gamma$ için,

$$(a*\alpha*b)(c)=\bigvee_{\beta\in\Gamma}S(a,\alpha,b,\beta,c) \tag{3.2}$$

$$((a*\alpha*b)*\beta*c)(z)=\bigvee_{\substack{d\in M\\ \alpha',\beta'\in\Gamma}}\left(S(a,\alpha,b,\alpha',d)\wedge S(d,\beta,c,\beta',z)\right) \tag{3.3}$$

$$(a*\alpha*(b*\beta*c))(z)=\bigvee_{\substack{d\in M\\ \alpha',\beta'\in\Gamma}}\left(S(b,\beta,c,\alpha',d)\wedge S(a,\alpha,d,\beta',z)\right) \tag{3.4}$$

$$(a*\alpha*(b\circ c))(z)=\bigvee_{\substack{d\in M\\ \alpha'\in\Gamma}}\left(R_M(b,c,d)\wedge S(a,\alpha,d,\alpha',z)\right) \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}((a*\alpha*b)\circ(a*\alpha*c))(z) &=\bigvee\nolimits_{\substack{d,e\in M\\ \alpha',\beta'\in\Gamma}}(S(a,\alpha,b,\alpha',d)\wedge S(a,\alpha,c,\beta',e)\\ &\wedge R_M(d,e,z))\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$(a*(\alpha\circ\beta)*b)(c)=\bigvee_{\gamma,\alpha'\in\Gamma}\left(R_\Gamma(\alpha,\beta,\gamma)\wedge S(a,\gamma,b,\alpha',c)\right) \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}((a*\alpha*b)\circ(a*\beta*b))(c) &=\bigvee\nolimits_{\substack{d,e\in M\\ \alpha',\beta'\in\Gamma}}(S(a,\alpha,b,\alpha',d)\wedge S(a,\beta,b,\beta',e)\\ &\wedge R_M(d,e,c))\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$((a\circ b)*\alpha*c)(z)=\bigvee_{\substack{d\in M\\ \alpha'\in\Gamma}}\left(R_M(a,b,d)\wedge S(d,\alpha,c,\alpha',z)\right) \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}((a*\alpha*c)\circ(b*\alpha*c))(z) &=\bigvee\nolimits_{\substack{d,e\in M\\ \alpha',\beta'\in\Gamma}}(S(a,\alpha,c,\alpha',d)\wedge S(b,\alpha,c,\beta',e)\\ &\wedge R_M(d,e,z))\end{aligned} \tag{3.10}$$

ifadeleri kullanılacaktır ayrıca bundan sonra, gösterimde kolaylık sağlanması için R_M ve R_Γ ifadelerinin yerine R kullanılacaktır.

Tanım 3.2. M ve Γ boş kümeden farklı iki küme, R; M ve Γ üzerinde fuzzy ikili işlem, S; (M,Γ) üzerinde fuzzy ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (M,Γ,R,S)' ye *fuzzy* Γ*-halkası* denir:

(M,Γ)1. (M,R) ve (Γ,R) değişmeli fuzzy gruplar,

(M,Γ)2. Her $a,b,c,z_1,z_2 \in M$ ve her $\gamma,\beta \in \Gamma$ için $((a*\gamma*b)*\beta*c)(z_1) > \theta$ ve $(a*\gamma*(b*\beta*c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$,

(M,Γ)3. Her $a,b,c,z_1,z_2 \in M$ ve her $\gamma,\beta \in \Gamma$ için,

(i) $(a*\gamma*(b\circ c))(z_1) > \theta$ ve $((a*\gamma*b)\circ(a*\gamma*c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$,

(ii) $(a*(\gamma\circ\beta)*b)(z_1) > \theta$ ve $((a*\gamma*b)\circ(a*\beta*b))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$,

(iii) $((a\circ b)*\gamma*c)(z_1) > \theta$ ve $((a*\gamma*c)\circ(b*\gamma*c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$' dir.

(M,R) fuzzy grubunun birim elemanına, (M,Γ,R,S)*' nin sıfır elemanı* denir ve e_0 ile gösterilir.

Tanım 3.3. (M,Γ,R,S) bir fuzzy Γ-halkası olsun. Her $a,b,z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$(a*\gamma*b)(z) > \theta \Leftrightarrow (b*\gamma*a)(z) > \theta$$

ise o zaman (M,Γ,R,S)' ye *değişmeli fuzzy* Γ*-halkası* denir.

$$C((M,\Gamma,R,S)) = \{a \in M \mid (a*\gamma*b)(z) > \theta \Leftrightarrow (b*\gamma*a)(z) > \theta \\ \forall\, b,z \in M,\ \gamma \in \Gamma\}$$

kümesine (M,Γ,R,S) fuzzy Γ-halkasının *merkezi* denir. (M,Γ,R,S) değişmeli fuzzy Γ-halkasıdır$\Leftrightarrow$ $(M,\Gamma,R,S) = C((M,\Gamma,R,S))$' dir.

Teorem 3.4. (M,Γ,R,S) bir fuzzy Γ-halkası, $a,b,c \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. Bu durumda,

(1)(i) $(a*\gamma*b)(b) > \theta$ ve $(a*\gamma*b)(e_0) > \theta$ iken $b = e_0$,

(ii) $(b*\gamma*a)(a) > \theta$ ve $(b*\gamma*a)(e_0) > \theta$ iken $a = e_0$' dır,

(2) b^{-1}, b' nin (M,R)' de tersi olsun. Bu durumda,

(i) $(a * \gamma * b^{-1})(v) > \theta$ ve $(a * \gamma * b)(w) > \theta$ iken $v = w^{-1}$,

(ii) $(a^{-1} * \gamma * b)(u) > \theta$ ve $(a * \gamma * b)(s) > \theta$ iken $u = s^{-1}$,

(iii) $(a^{-1} * \gamma * b^{-1})(t) > \theta$ ve $(a * \gamma * b)(r) > \theta$ iken $t = r$' dir,

(3) **(i)** $(a * \gamma * (b \circ c^{-1}))(z_1) > \theta$ ve $((a * \gamma * b) \circ (a * \gamma * c^{-1}))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$,

(ii) $((a \circ b^{-1}) * \gamma * c)(z_1) > \theta$ ve $((a * \gamma * c) \circ (b^{-1} * \gamma * c))(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$,

(iii) $\left(a * \left(\gamma \circ \beta^{-1}\right) * b\right)(z_1) > \theta$ ve $\left((a * \gamma * b) \circ \left(a * \beta^{-1} * b\right)\right)(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$' dir.

İspat. **(1)** **(i)** $(a * \gamma * b)(b) > \theta$ ve $(a * \gamma * b)(e_0) > \theta$ olsun. Her $a, b \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $(a * \gamma * b)(b) = \bigvee_{\beta \in \Gamma} S(a, \gamma, b, \beta, b) > \theta$ ve $(a * \gamma * b)(e_0) = \bigvee_{\beta \in \Gamma} S(a, \gamma, b, \beta, e_0) > \theta$ olduğundan Tanım 3.1.(ii)' den $b = e_0$' dır.

(ii) $(b * \gamma * a)(a) > \theta$ ve $(b * \gamma * a)(e_0) > \theta$ olsun. Her $a, b \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $(b * \gamma * a)(a) = \bigvee_{\alpha \in \Gamma} S(b, \gamma, a, \alpha, a) > \theta$ ve $(b * \gamma * a)(e_0) = \bigvee_{\alpha \in \Gamma} S(b, \gamma, a, \alpha, e_0) > \theta$ olduğundan Tanım 3.1.(ii)' den $a = e_0$' dır.

(2) **(i)** $c, v, w \in M$ için $S(a, \gamma, b^{-1}, \beta, v) > \theta$, $S(a, \gamma, b, \alpha, w) > \theta$ ve $R(v, w, c) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left((a * \gamma * b^{-1}) \circ (a * \gamma * b)\right)(c) \geq S\left(a, \gamma, b^{-1}, \beta, v\right) \wedge S(a, \gamma, b, \alpha, w) \wedge R(v, w, c) > \theta$$

ve

$$\left(a * \gamma * \left(b^{-1} \circ b\right)\right)(e_0) \geq R\left(b^{-1}, b, e_0\right) \wedge S(a, \gamma, e_0, \alpha', e_0) > \theta$$

olduğundan $c = e_0$' dır. Böylece $R(v, w, e_0) > \theta$' dır. (M, R) değişmeli fuzzy grup olduğundan $v = w^{-1}$ dir.

(ii) $c, u, s \in M$ için $S(a^{-1}, \gamma, b, \beta, u) > \theta$, $S(a, \gamma, b, \alpha, s) > \theta$ ve $R(u, s, c) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\left(a^{-1} * \gamma * b\right) \circ (a * \gamma * b)\right)(c) \geq S\left(a^{-1}, \gamma, b, \beta, u\right) \wedge S(a, \gamma, b, \alpha, s) \wedge R(u, s, c) > \theta$$

ve

$$\left(\left(a^{-1} \circ a\right) * \gamma * b\right)(e_0) \geq R\left(a^{-1}, a, e_0\right) \wedge S(e_0, \gamma, b, \beta', e_0) > \theta$$

olduğundan $c = e_0$' dır. Böylece $R(u, s, e_0) > \theta$' dır. (M, R) değişmeli fuzzy grup olduğundan $u = s^{-1}$ dir.

(iii) $(a^{-1} * \gamma * b^{-1})(t) > \theta$ olsun. (i)' den; $(a^{-1} * \gamma * b)(t^{-1}) > \theta$' dır. $k \in M$ için $R(r, t^{-1}, k) > \theta$ olsun.

$$\begin{aligned}((a * \gamma * b) \circ (a^{-1} * \gamma * b))(k) &\geq S(a, \gamma, b, \alpha, r) \wedge S(a^{-1}, \gamma, b, \alpha', t^{-1}) \\ &\wedge R(r, t^{-1}, k) > \theta\end{aligned}$$

ve

$$\left(\left(a \circ a^{-1}\right) * \gamma * b\right)(e_0) \geq R\left(a, a^{-1}, e_0\right) \wedge S(e_0, \gamma, b, \beta, e_0) > \theta$$

olduğundan $k = e_0$' dır. Böylece $R(r, t^{-1}, e_0) > \theta$' dır. (M, R) değişmeli fuzzy grup olduğundan $t = r$' dir.

(3) (i), (ii), (iii); Tanım 3.2' den açıktır.

Tanım 3.5. (M, Γ, R, S) bir fuzzy Γ-halkası olsun. Buna göre,

(i) Her $a \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için $(e_* * \gamma * a)(a) > \theta$ ve $(a * \gamma * e_*)(a) > \theta$ olacak biçimde $e_* \in M$ varsa (M, Γ, R, S)' ye *birimli fuzzy* Γ*-halkası* denir.

(ii) $a \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için $(a * \gamma * b)(e_*) > \theta$ ve $(b * \gamma * a)(e_*) > \theta$ olacak biçimde $b \in M$ varsa b' ye *a' nın tersi denir* ve a_*^{-1} ile gösterilir.

Teorem 3.6. (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasında e_* birim elemanı varsa tektir.

İspat. e'_* ve e''_*, (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasında birim elemanlar olsun. Bu durumda, her $\gamma \in \Gamma$ için, $(e'_* * \gamma * e''_*)(e'_*) > \theta$ ve $(e'_* * \gamma * e''_*)(e''_*) > \theta$ dır. Böylece $\bigvee_{\beta \in \Gamma} S(e'_*, \gamma, e''_*, \beta, e'_*) > \theta$ ve $\bigvee_{\beta \in \Gamma} S(e'_*, \gamma, e''_*, \beta, e''_*) > \theta$ olduğundan Tanım 3.1.(ii)' den $e'_* = e''_*$ olur.

Tanım 3.7. (M, Γ, R, S) bir fuzzy Γ-halkası ve $e_0 \neq a \in M$ olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için $(a * \gamma * b)(e_0) > \theta$ veya $(b * \gamma * a)(e_0) > \theta$ olacak biçimde $e_0 \neq b \in M$ varsa a' ya *sıfır bölen eleman* denir.

Aşağıdaki teorem fuzzy gamma halkalarında sıfır bölen olma ile kısalma kuralı arasındaki bağıntıyı verir.

Teorem 3.8. (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasında sıfır bölen eleman yoktur$\Leftrightarrow$ $(e_0 \neq) \, a, b, c \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için, $(a * \gamma * b)(v) > \theta$ ve $(a * \gamma * c)(v) > \theta$ iken $b = c$ (sol kısalma kuralı) veya $(b * \gamma * a)(v) > \theta$ ve $(c * \gamma * a)(v) > \theta$ iken $b = c$ (sağ kısalma kuralı)' dır.

İspat. (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasında sıfır bölen eleman olmasın. $(a * \gamma * b)(v) > \theta$ ve $(a * \gamma * c)(v) > \theta$ olsun. Teorem 3.4.(2)' den, $(a * \gamma * c^{-1})(v^{-1}) > \theta$ dır. $k, t \in M$ ve $\beta' \in \Gamma$ için $R(b, c^{-1}, k) > \theta$ ve $S(a, \gamma, k, \beta', t) > \theta$ olsun. (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkası olduğundan, her $\alpha, \beta, \beta' \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} ((a * \gamma * b) \circ (a * \gamma * c^{-1}))(e_0) \quad & \geq S(a, \gamma, b, \alpha, v) \wedge S(a, \gamma, c^{-1}, \beta, v^{-1}) \\ & \wedge R(v, v^{-1}, e_0) > \theta \end{aligned}$$

ve

$$\left(a * \gamma * \left(b \circ c^{-1}\right)\right)(t) \geq R\left(b, c^{-1}, k\right) \wedge S(a, \gamma, k, \beta', t) > \theta$$

dır. Böylece $t = e_0$ olduğundan $S(a, \gamma, k, \beta', e_0) > \theta$ olur. $a \neq e_0$ ve (M, Γ, R, S) de sıfır bölen elemanlar bulunmadığından $k = e_0$' dır. O halde $R(b, c^{-1}, e_0) > \theta$' dır. (M, R) değişmeli fuzzy grup olduğundan $b = c$' dir.

$(b * \gamma * a)(v) > \theta$ ve $(c * \gamma * a)(v) > \theta$ olsun. $(c * \gamma * a)(v) > \theta$ olduğundan Teorem 3.4.(2)' den $(c^{-1} * \gamma * a)(v^{-1}) > \theta$' dır. $k, u \in M$ ve $\beta' \in \Gamma$ için $R(b, c^{-1}, k) > \theta$ ve $S(k, \gamma, a, \beta', u) > \theta$ olsun. Her $\alpha, \beta, \alpha' \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} ((b * \gamma * a) \circ (c^{-1} * \gamma * a))(e_0) \quad & \geq S(b, \gamma, a, \alpha, v) \wedge S(c^{-1}, \gamma, a, \beta, v^{-1}) \\ & \wedge R(v, v^{-1}, e_0) > \theta \end{aligned}$$

ve

$$\left(\left(b \circ c^{-1}\right) * \gamma * a\right)(u) \geq R\left(b, c^{-1}, k\right) \wedge S(k, \gamma, a, \beta', u) > \theta.$$

dır. Böylece $u = e_0$ olduğundan $S(k, \gamma, a, \alpha', e_0) > \theta$' dır. $a \neq e_0$ olduğundan $k = e_0$' dır. $R(b, c^{-1}, e_0) > \theta$ ve (M, R) değişmeli fuzzy grup olduğundan $b = c$' dir.

Tersine, sol kısalma kuralı sağlansın. $(e_0 \neq) \, a, b \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için, $(a * \gamma * b)(e_0) > \theta$ olsun. $(a * \gamma * e_0)(e_0) > \theta$ olduğundan $b = e_0$' dır. Benzer şekilde sağ kısalma kuralı sağlanırsa, $(b * \gamma * a)(e_0) > \theta$ ve $(e_0 * \gamma * a)(e_0) > \theta$

iken $b = e_0$ olduğundan (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasında sıfır bölen eleman bulunmaz.

(M, Γ, R, S) bir fuzzy Γ-halkası ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Her $a, b, c \in N$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $R_N(a, b, c) = R(a, b, c)$ ve $S_N(a, \gamma, b, \beta, c) = S(a, \gamma, b, \beta, c)$ olsun. Bu durumda,

$$(a \triangle b)(c) = R_N(a, b, c) = R(a, b, c), \ \forall \ a, b, c \in N \tag{3.11}$$

$$(a \diamond \gamma \diamond b)(c) = \bigvee_{\beta \in \Gamma} S_N(a, \gamma, b, \beta, c) = \bigvee_{\beta \in \Gamma} S(a, \gamma, b, \beta, c) \ \ \forall a, b, c \in N \ \text{ ve } \forall \ \gamma \in \Gamma. \tag{3.12}$$

Tanım 3.9. (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkası ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Buna göre,

(i) Her $a, b \in N$, $c \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ iken $c \in N$ ve $(a * \gamma * b)(c) > \theta$ iken $c \in N$,

(ii) (N, Γ, R_N, S_N) bir fuzzy Γ-halka,

koşulları sağlanırsa (N, Γ, R_N, S_N)' ye (M, Γ, R, S)*' nin fuzzy alt* Γ*-halkası* denir.

Önerme 3.10. (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkası ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun.Buna göre (N, Γ, R_N, S_N), (M, Γ, R, S)' nin fuzzy alt Γ-halkasıdır$\Leftrightarrow$

(i) Her $a, b \in N$, $c \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ iken $c \in N$ ve $(a * \gamma * b)(c) > \theta$ iken $c \in N$,

(ii) Her $a \in N$ için $a^{-1} \in N$' dir.

İspat. (N, Γ, R_N, S_N), (M, Γ, R, S)'nin fuzzy alt Γ-halkası olsun. Tanım 3.9(i)' den (i) sağlanır. Tanım 3.9(ii)' den (N, Γ, R_N, S_N) bir fuzzy Γ-halka olduğundan (N, R_N) değişmeli fuzzy gruptur. Dolayısıyla (ii) de sağlanır.

Tersine, (i) ve (ii) sağlansın. (i)' den Tanım 3.9(i) sağlanır. Her $a \in N$ için $a^{-1} \in N$ ve $R_N(a, a^{-1}, e_0) = R(a, a^{-1}, e_0) > \theta$ olduğundan $e_0 \in N$ olur. $N \subseteq M$ olduğundan fuzzy Γ-halkası tanımının diğer şartları da sağlanır. Dolayısıyla (N, Γ, R_N, S_N) bir fuzzy Γ-halkasıdır. O halde (N, Γ, R_N, S_N), (M, Γ, R, S)' nin bir fuzzy alt Γ-halkasıdır.

Teorem 3.11. (M, Γ, R, S) bir fuzzy Γ-halkası olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} C = \{ a \in M | & \left(x * \gamma * a \right)(c) > \theta \Leftrightarrow \left(a * \gamma * x \right)(c) > \theta \\ & \forall x, c \in M,\ \gamma \in \Gamma \} \end{aligned}$$

kümesi (M, Γ, R, S)' nin bir fuzzy alt Γ-halkasıdır.

İspat. Her $x \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için $(x * \gamma * e_0)(e_0) > \theta$ ve $(e_0 * \gamma * x)(e_0) > \theta$ olduğundan $e_0 \in C$' dir. Böylece $C \neq \emptyset$' dir.

(i) $a_1, a_2 \in C$ ve $(a_1 \circ a_2)(b) = R(a_1, a_2, b) > \theta$ iken $b \in C$ mi?

$a, b, c, b_1, b_2, d_1, d_2 \in M$ için $S(b, \gamma, a, \beta, c) > \theta$, $S(a, \gamma, b, \beta, d_1) > \theta$, $S(a, \gamma, a_1, \alpha, b_1) > \theta$, $S(a, \gamma, a_2, \alpha', b_2) > \theta$ ve $R(b_1, b_2, d_2) > \theta$ olsun.

$R(a_1, a_2, b) > \theta$ ve $R(a_2, a_1, b) > \theta$ olduğundan,

$$(a * \gamma * (a_1 \circ a_2))(d_1) \geq R(a_1, a_2, b) \wedge S(a, \gamma, b, \beta, d_1) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned} ((a * \gamma * a_1) \circ (a * \gamma * a_2))(d_2) & \geq S(a, \gamma, a_1, \alpha, b_1) \wedge S(a, \gamma, a_2, \alpha', b_2) \\ & \wedge R(b_1, b_2, d_2) > \theta \end{aligned}$$

olduğundan $d_1 = d_2$' dir. Yani $R(b_1, b_2, d_1) > \theta$ olur.

$a_1, a_2 \in C$ olduğundan $S(a_1, \gamma, a, \alpha, b_1) > \theta$, $S(a_2, \gamma, a, \alpha', b_2) > \theta$ dır. Bu durumda,

$$((a_2 \circ a_1) * \gamma * a)(c) \geq R(a_2, a_1, b) \wedge S(b, \gamma, a, \beta, c) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned} ((a_2 * \gamma * a) \circ (a_1 * \gamma * a))(d_1) & \geq S(a_2, \gamma, a, \alpha', b_2) \wedge S(a_1, \gamma, a, \alpha, b_1) \\ & \wedge R(b_2, b_1, d_1) > \theta \end{aligned}$$

olduğundan $c = d_1$' dir. Yani $S(b, \gamma, a, \beta, c) > \theta$ iken $S(a, \gamma, b, \beta, c) > \theta$ olur.

Tersine, $S(a, \gamma, b, \beta, c) > \theta$, $S(b, \gamma, a, \beta, d_1) > \theta$, $S(a, \gamma, a_1, \alpha, b_1) > \theta$, $S(a, \gamma, a_2, \alpha', b_2) > \theta$ ve $R(b_1, b_2, d_2) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$((a_1 \circ a_2) * \gamma * a)(d_1) \geq R(a_1, a_2, b) \wedge S(b, \gamma, a, \beta, d_1) > \theta$$

ve

$$
\begin{aligned}
((a_1 * \gamma * a) \circ (a_2 * \gamma * a))(d_2) &\geq S(a_1, \gamma, a, \alpha, b_1) \wedge S(a_2, \gamma, a, \alpha', b_2) \\
&\wedge R(b_1, b_2, d_2) > \theta
\end{aligned}
$$

olduğundan $d_1 = d_2$' dir. Böylece $R(b_1, b_2, d_1) > \theta$ olur.

$$
(a * \gamma * (a_1 \circ a_2))(c) \geq R(a_1, a_2, b) \wedge S(a, \gamma, b, \beta, c) > \theta
$$

ve

$$
\begin{aligned}
((a * \gamma * a_1) \circ (a * \gamma * a_2))(d_1) &\geq S(a, \gamma, a_1, \alpha, b_1) \wedge S(a, \gamma, a_2, \alpha', b_2) \\
&\wedge R(b_1, b_2, d_2) > \theta
\end{aligned}
$$

olduğundan $d_1 = c$ olur. Yani $S(a, \gamma, b, \beta, c) > \theta$ iken $S(b, \gamma, a, \beta, c) > \theta$ olur. Böylece $b \in C$' dir.

$a_1, a_2 \in C$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $(a_1 * \gamma * a_2)(b) > \theta$ iken $b \in C$ mi?

$a, b, c, b_1, b_2, d_1, d_2 \in M$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \Gamma$ için $S(a, \beta, b, \alpha', d_1) > \theta$, $S(a, \beta, a_2, \beta', d) > \theta$, $S(b, \beta, a, \alpha', c) > \theta$ ve $S(d, \alpha, a_1, \alpha', d_2) > \theta$ olsun. $S(a_1, \alpha, a_2, \gamma, b) > \theta$ ve $S(a_2, \alpha, a_1, \gamma, b) > \theta$ olduğundan

$$
(a * \beta * (a_2 * \alpha * a_1))(d_1) \geq S(a_2, \alpha, a_1, \gamma, b) \wedge S(a, \beta, b, \alpha', d_1) > \theta
$$

ve

$$
((a * \beta * a_2) * \alpha * a_1)(d_2) \geq S(a, \alpha, a_2, \beta', d) \wedge S(d, \alpha, a_1, \alpha', d_2) > \theta
$$

dır. Böylece $d_1 = d_2$' dir. $S(d, \alpha, a_1, \alpha', d_1) > \theta$ olur.

$S(a_2, \beta, a, \beta', d) > \theta$ ve $S(a_1, \gamma, d, \alpha', d_1) > \theta$ olduğundan

$$
((a_1 * \alpha * a_2) * \beta * a)(c) \geq S(a_1, \alpha, a_2, \gamma, b) \wedge S(b, \beta, a, \alpha', c) > \theta
$$

ve

$$
(a_1 * \alpha * (a_2 * \beta * a))(d_1) \geq S(a_2, \beta, a, \beta', d) \wedge S(a_1, \alpha, d, \alpha', d_1) > \theta
$$

olduğundan $d_1 = c$' dir. O halde $S(b, \beta, a, \alpha', d_1) > \theta$' dır. Yani $S(a, \beta, b, \alpha', d_1)$ $> \theta$ iken $S(b, \beta, a, \alpha', d_1) > \theta$ olur.

Tersine, $S(b,\beta,a,\alpha',c)>\theta$ iken $S(a,\beta,b,\alpha',c)>\theta$ mı? $S(a,\beta,b,\alpha',d_1)$ $>\theta$, $S(a,\beta,a_2,\beta',d)>\theta$, $S(b,\beta,a,\alpha',c)>\theta$ ve $S(d,\alpha,a_1,\alpha',d_2)>\theta$ olsun. $S(a_1,\alpha,a_2,\gamma,b)>\theta$ ve $S(a_2,\alpha,a_1,\gamma,b)>\theta$ olduğundan

$$(a*\beta*(a_2*\alpha*a_1))(d_1)\geq S(a_2,\alpha,a_1,\gamma,b)\wedge S(a,\beta,b,\alpha',d_1)>\theta$$

ve

$$((a*\beta*a_2)*\alpha*a_1)(d_2)\geq S(a,\beta,a_2,\beta',d)\wedge S(d,\alpha,a_1,\alpha',d_2)>\theta$$

dır. Böylece $d_1=d_2$' dir. $S(d,\alpha,a_1,\alpha',d_1)>\theta$ olur.

$S(a_2,\beta,a,\beta',d)>\theta$ ve $S(a_1,\alpha,d,\alpha',d_1)>\theta$ olduğundan

$$((a_1*\alpha*a_2)*\beta*a)(c)\geq S(a_1,\alpha,a_2,\gamma,b)\wedge S(b,\beta,a,\alpha',c)>\theta$$

ve

$$(a_1*\alpha*(a_2*\beta*a))(d_1)\geq S(a_2,\beta,a,\beta',d)\wedge S(a_1,\alpha,d,\alpha',d_1)>\theta$$

olduğundan $d_1=c$' dir. O halde $S(a,\beta,b,\alpha',c)>\theta$' dır. Yani $S(b,\beta,a,\alpha',c)>\theta$ iken $S(a,\beta,b,\alpha',c)>\theta$' dır. Böylece $b\in C$' dir.

(ii) $a\in C$ ise $a^{-1}\in C$ mi? Yani $S(b,\gamma,a^{-1},\beta,d)>\theta$ iken $S(a^{-1},\gamma,b,\beta,d)$ $>\theta$ mı?

$S(a^{-1},\gamma,b,\beta,c)>\theta$, $S(b,\gamma,a,\gamma',b_1)>\theta$, $R(b_1,c,b_2)>\theta$ ve $R(b_1,d,d_1)$ $>\theta$ olsun.

$$\left(\left(a^{-1}\circ a\right)*\gamma*b\right)(e_0)\geq R\left(a^{-1},a,e_0\right)\wedge S(e_0,\gamma,b,\alpha,e_0)>\theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a^{-1}*\gamma*b)\circ(a*\gamma*b))(b_2) &\geq S(a^{-1},\gamma,b,\beta,c)\wedge S\left(a,\gamma,b,\gamma',b_1\right)\\ &\wedge R(c,b_1,b_2)>\theta\end{aligned}$$

olduğundan $e_0=b_2$' dir. $R(c,b_1,e_0)>\theta$ olur.

$$\left(b*\gamma*\left(a^{-1}\circ a\right)\right)(e_0)\geq R\left(a^{-1},a,e_0\right)\wedge S(b,\gamma,e_0,\alpha,e_0)>\theta$$

ve

$$\begin{aligned}((b*\gamma*a^{-1})\circ(b*\gamma*a))(d_1) &\geq S(b,\gamma,a^{-1},\beta,d)\wedge S\left(b,\gamma,a,\gamma',b_1\right)\\ &\wedge R(d,b_1,d_1)>\theta\end{aligned}$$

olduğundan $e_0 = d_1$' dir. $R(d,b_1,e_0)>\theta$ olur.

$R(b_1,c,e_0)>\theta$, $R(d,b_1,e_0)>\theta$ ve (M,R) değişmeli fuzzy grup olduğundan $d=c$' dir. Böylece $S(b,\gamma,a^{-1},\beta,d)>\theta$ iken $S(a^{-1},\gamma,b,\beta,d)>\theta$' dır.

Tersine, $S(a^{-1},\gamma,b,\beta,c)>\theta$ iken $S(b,\gamma,a^{-1},\beta,c)>\theta$ mı?

$S(b,\gamma,a^{-1},\beta,d)>\theta$, $S(b,\gamma,a,\gamma',b_1)>\theta$, $R(b_1,c,b_2)>\theta$ ve $R(b_1,d,d_1)$ $>\theta$ olsun.

$$\left(\left(a^{-1}\circ a\right)*\gamma*b\right)(e_0)\geq R\left(a^{-1},a,e_0\right)\wedge S(e_0,\gamma,b,\alpha,e_0)>\theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a^{-1}*\gamma*b)\circ(a*\gamma*b))(b_2) &\geq S(a^{-1},\gamma,b,\beta,c)\wedge S\left(a,\gamma,b,\gamma',b_1\right)\\ &\wedge R(c,b_1,b_2)>\theta\end{aligned}$$

olduğundan $e_0=b_2$' dir. $R(c,b_1,e_0)>\theta$ olur.

$$\left(b*\gamma*\left(a^{-1}\circ a\right)\right)(e_0)\geq R\left(a^{-1},a,e_0\right)\wedge S(b,\gamma,e_0,\alpha,e_0)>\theta$$

ve

$$\begin{aligned}((b*\gamma*a^{-1})\circ(b*\gamma*a))(d_1) &\geq S(b,\gamma,a^{-1},\beta,d)\wedge S\left(b,\gamma,a,\gamma',b_1\right)\\ &\wedge R(d,b_1,d_1)>\theta\end{aligned}$$

olduğundan $e_0 = d_1$' dir. $R(d,b_1,e_0)>\theta$ olur.

$R(b_1,c,e_0)>\theta$, $R(d,b_1,e_0)>\theta$ ve (M,R) değişmeli fuzzy grup olduğundan $d=c$' dir. Böylece $S(a^{-1},\gamma,b,\beta,c)>\theta$ iken $S(b,\gamma,a^{-1},\beta,c)>\theta$' dır. Sonuç olarak, $a^{-1}\in C$ olur.

Tanım 3.12. (M,Γ,R,S) bir fuzzy Γ-halkası ve $\emptyset\neq I\subseteq M$ olsun. Her $a,b\in I$, her $n,m\in M$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için, $(a\circ b)(m)>\theta$ iken $m\in I$, $a^{-1}\in I$, $(n*\gamma*a)(m)>\theta$ iken $m\in I$ $((a*\gamma*n)(m)>\theta$ iken $m\in I)$ ise I' ya M *nin sol (sağ) fuzzy ideali* denir.

I, M' nin hem sağ hem de sol fuzzy ideali ise I' ya *M' nin fuzzy ideali* denir.

I, (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasının sol (sağ) ideali ise I, M' nin fuzzy alt Γ-halkasıdır. M değişmeli fuzzy Γ-halkası ise M' nin her sol (sağ) ideali aynı zamanda sağ (sol) fuzzy idealidir.

Önerme 3.13. Λ indeks kümesi olmak üzere; $i \in \Lambda$ için I_i' ler, (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasının fuzzy idealleri olsun. Bu durumda, $\bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$, M' nin bir fuzzy idealidir.

İspat. Her $i \in \Lambda$ için I_i' ler, (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasının fuzzy idealleri olsun. Her $a \in I_i$ için $a^{-1} \in I_i$ ve $(a \circ a^{-1})(e_0) > \theta$ olduğundan $e_0 \in I_i$' dir. Böylece $e_0 \in \bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$ olur. $\bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i \neq \emptyset$ ve $\bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i \subseteq M$' dir. $a, b \in \bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$ olsun. Her $i \in \Lambda$ için $a, b \in I_i$' dir. (M, R) fuzzy grup olduğundan $R(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde en az bir $c \in M$ vardır. I_i' ler ideal olduğundan $(a \circ b)(c) > \theta$ iken $c \in I_i$' dir. O halde $c \in \bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$' dir. $a \in \bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$ olduğundan her $i \in \Lambda$ için $a \in I_i$' dir. I_i'ler M' nin fuzzy idealleri olduğundan her $i \in \Lambda$ için $a^{-1} \in I_i$ olur. Böylece $a^{-1} \in \bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$' dir. $n \in M$ olsun. $a \in M$ ve M fuzzy Γ-halkası olduğundan $\gamma \in \Gamma$ için $(a * \gamma * n)(m) > \theta$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. Her $i \in \Lambda$ için $a \in I_i$ ve I_i' ler M' nin fuzzy idealleri olduğundan her $i \in \Lambda$ için $(a * \gamma * n)(m) > \theta$ iken $m \in I_i$' dir. Böylece $m \in \bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$' dir. Benzer şekilde, $n, k \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $(n * \beta * a)(k) > \theta$ iken $k \in \bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$' dir. O halde $\bigcap\limits_{i \in \Lambda} I_i$, M' nin bir fuzzy idealidir.

I, (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkasının fuzzy ideali olsun. Her $a \in M$ için $(a \circ I)(u) = \bigvee\limits_{x \in I} R(a, x, u)$ olmak üzere, $\Delta = \{a \circ I \mid a \in M\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki bağıntı tanımlansın:

$$a_1 \circ I \sim a_2 \circ I \Leftrightarrow R\left(a_1^{-1}, a_2, u\right) > \theta \text{ olacak biçimde en az bir } u \in I \text{ vardır.}$$

Teorem 1.4.33'den $\sim$, Δ kümesi üzerinde bir fuzzy denklik bağıntısıdır. Ayrıca (I,R), (M,R)' nin fuzzy alt grubu ve (M,R) değişmeli olduğundan (I,R), (M,R)' nin normal fuzzy alt grubudur. $[a\circ I]=\{a'\circ I|\, a'\circ I\sim a\circ I\}$, $\overline{a}=\{a'|\, a'\in M,\, a'\circ I\sim a\circ I\}$ ve $M/I=\{[a\circ I]|\, a\in M\}$ olsun. Teorem 1.4.36 dan,

$$([a\circ I]\oplus[b\circ I])([c\circ I])=\overline{R}([a\circ I],[b\circ I],[c\circ I])=\bigvee_{(a',b',c')\in\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}} R(a',b',c') \tag{3.13}$$

olmak üzere, $\left(M/I,\overline{R}\right)$ bir değişmeli fuzzy gruptur.

$\left(M/I,\overline{R}\right)$, (Γ,R) fuzzy gruplar ve $\overline{S}$, $M/I\times\Gamma\times M/I\times\Gamma\times M/I$ (kısaca $(M/I,\Gamma)$) üzerinde bir fuzzy ikili işlem olsun. Bu durumda,

$$F(M/I)=\left\{\overline{A}\middle|\,\overline{A}:M/I\to[0,1)\ \text{bir dönüşüm}\right\}$$

ve

$$\overline{S}\left(\overline{A},G,\overline{B}\right)(c')=\bigvee_{\substack{a',b'\in M/I\\ \gamma,\beta\in\Gamma}}\left(\overline{A}(a')\wedge G(\gamma)\wedge\overline{B}(b')\wedge\overline{S}(a',\gamma,b',\beta,c')\right)$$

olmak üzere,

$$\overline{S}:F(M/I)\times F(\Gamma)\times F(M/I)\to F(M/I)$$

dönüşümü vardır.

$\overline{R}$ ve $\overline{S}$, $(M/I,\Gamma)$ üzerinde iki fuzzy ikili işlem olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}([a\circ I]\otimes\gamma\otimes[b\circ I])([c\circ I])&=\overline{S}([a\circ I],\gamma[b\circ I],\beta,[c\circ I])\\ &=\bigvee_{(a',\gamma,b',\beta,c')\in\overline{a}\times\gamma\times\overline{b}\times\beta\times\overline{c}} S(a',\gamma,b',\beta,c')\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}(([a\circ I]\oplus[b\circ I])\oplus([c\circ I]))([u\circ I])=\bigvee_{d\in M}&(\overline{R}([a\circ I],[b\circ I],[d\circ I])\\ &\wedge\overline{R}([d\circ I],[c\circ I],[u\circ I)])\end{aligned}$$

$$([a\circ I]\oplus([b\circ I]\oplus(c\circ I)))([w\circ I])=\bigvee_{d\in M}(\overline{R}([b\circ I],[c\circ I],[d\circ I])$$
$$\wedge\,\overline{R}([a\circ I],[d\circ I],[w\circ I]))$$

$$([a\circ I]\otimes\gamma\otimes([b\circ I]\oplus[c\circ I]))([z\circ I])=\bigvee_{d\in M,\beta\in\Gamma}(\overline{R}([b\circ I],[c\circ I],[d\circ I])$$
$$\wedge\,\overline{S}([a\circ I],\gamma,[d\circ I],\beta,[z\circ I]))$$

$$(([a\circ I]\otimes\gamma\otimes[b\circ I])\oplus([a\circ I]\otimes\gamma\otimes[c\circ I]))([z\circ I])$$
$$=\bigvee_{\substack{d_1,d_2\in M\\ \beta,\beta'\in\Gamma}}(\overline{S}([a\circ I],\gamma,[b\circ I],\beta,[d\circ I])$$
$$\wedge\overline{S}([a\circ I],\gamma,[c\circ I],\beta',[d_2\circ I])\wedge\overline{R}([d_1\circ I],[d_2\circ I],[z\circ I]))$$

$$([a\circ I]\otimes(\gamma\circ\gamma')\otimes[b\circ I])([z\circ I])\ \ =\bigvee_{\beta,\beta'\in\Gamma}(R(\gamma,\gamma',\beta)$$
$$\wedge\overline{S}([a\circ I],\gamma,[b\circ I],\beta',[z\circ I]))$$

$$(([a\circ I]\otimes\gamma\otimes[b\circ I])\oplus([a\circ I]\otimes\gamma'\otimes[b\circ I]))([z\circ I])$$
$$=\bigvee_{\substack{c,d\in M\\ \alpha,\alpha'\in\Gamma}}(\bar{S}([a\circ I],\gamma,[b\circ I],\alpha,[c\circ I])$$
$$\wedge\bar{S}([a\circ I],\gamma',[b\circ I],\alpha',[d\circ I])\wedge\bar{R}([c\circ I],[d\circ I],[z\circ I]))$$

$$(([a\circ I]\oplus[b\circ I])\otimes\beta\otimes[c\circ I])([z\circ I])=\bigvee_{\substack{d\in M\\ \beta'\in\Gamma}}(\overline{R}([a\circ I],[b\circ I],[d\circ I])$$
$$\wedge\,\overline{S}([d\circ I],\beta,[c\circ I],\beta',[z\circ I]))$$

$$(([a\circ I]\otimes\beta\otimes[c\circ I])\oplus([b\circ I]\otimes\beta\otimes[c\circ I]))([z\circ I])$$
$$=\bigvee_{\substack{d_1,d_2\in M\\ \beta',\beta''\in\Gamma}}(\overline{S}([a\circ I],\beta,[c\circ I],\beta',[d_1\circ I])$$
$$\wedge\overline{S}([b\circ I],\beta,[c\circ I],\beta'',[d_2\circ I])\wedge\overline{R}([d_1\circ I],[d_2\circ I],[z\circ I]))$$

biçiminde özellikler vardır.

Teorem 3.15. (M, Γ, R, S) bir fuzzy Γ-halkası ve I, M' nin fuzzy ideali olsun. Buna göre, $\left(M/I, \overline{R}\right)$ çarpım fuzzy grubu,

$$\begin{aligned}([a \circ I] \otimes \gamma \otimes [b \circ I])([c \circ I]) &= \overline{S}([a \circ I], \gamma, [b \circ I], \beta, [c \circ I]) \\ &= \bigvee_{(a', \gamma, b', \beta, c') \in \overline{a} \times \gamma \times \overline{b} \times \beta \times \overline{c}} S(a', \gamma, b', \beta, c')\end{aligned}$$

işlemi ile bir fuzzy Γ-halkasıdır.

İspat. $\overline{S}([a \circ I], \gamma, [b \circ I], \beta, [c \circ I]) > \theta$ ve $\overline{S}([a \circ I], \gamma, [b \circ I], \beta, [d \circ I]) > \theta$ olsun. $[c \circ I] = [d \circ I]$ mı?

$a_1 \in \overline{a}$, $b_1 \in \overline{b}$, $c_1 \in \overline{c}$, $a_1' \in \overline{a}$, $b_1' \in \overline{b}$, $d_1 \in \overline{d}$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $S(a_1, \gamma, b_1, \beta, c_1) > \theta$ ve $S(a_1', \gamma, b_1', \beta, d_1) > \theta$' dır.

$a_1' \circ I \sim a_1 \circ I$, $b_1' \circ I \sim b_1 \circ I$ olduğundan $h_1, h_2 \in I$ için $R(a_1', h_1, a_1) > \theta$ ve $R(b_1', h_2, b_1) > \theta$' dır.

$z, h_3, t \in M$ ve $\alpha, \alpha_1 \in \Gamma$ için $S(a_1', \gamma, b_1, \alpha, z) > \theta$, $S(h_1, \gamma, b_1, \alpha_1, h_3) > \theta$ ve $R(z, h_3, t) > \theta$ olsun. I ideal ve $h_1 \in I$ olduğundan $h_3 \in I$' dır.

$$((a_1' \circ h_1) * \gamma * b_1)(c_1) \geq R(a_1', h_1, a_1) \wedge S(a_1, \gamma, b_1, \beta, c_1) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a_1' * \gamma * b_1) \circ (h_1 * \gamma * b_1))(t) &\geq S(a_1', \gamma, b_1, \alpha, z) \wedge S(h_1, \gamma, b_1, \alpha_1, h_3) \\ &\wedge R(z, h_3, t) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $t = c_1$' dir. Böylece $R(z, h_3, c_1) > \theta$ olur.

$z_2, h_4 \in M$ ve $\gamma_1 \in \Gamma$ için $S(a_1', \gamma, h_2, \gamma_1, h_4) > \theta$ ve $R(h_4, d_1, z_2) > \theta$ olsun. I ideal ve $h_2 \in I$ olduğundan $h_4 \in I$' dır. Bu durumda,

$$(a_1' * \gamma * (h_2 \circ b_1'))(z) \geq R(b_1', h_2, b_1) \wedge S(a_1', \gamma, b_1, \alpha, z) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a_1' * \gamma * h_2) \circ (a_1' * \gamma * b_1'))(z_2) &\geq S(a_1', \gamma, h_2, \gamma_1, h_4) \wedge S(a_1', \gamma, b_1', \beta, d_1) \\ &\wedge R(h_4, d_1, z_2) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $z = z_2$' dir. Böylece $R(h_4, d_1, z) > \theta$ olur.

$h_3, h_4 \in I$ olduğundan $R\left(h_3^{-1}, h_4^{-1}, h_5\right) > \theta$ olacak biçimde $h_5 \in I$ vardır. $R(h_4, d_1, z) > \theta$ ve $R(z, h_3, c_1) > \theta$ olduğundan $R\left(z, h_4^{-1}, d_1\right) > \theta$ ve $R\left(c_1, h_3^{-1}, z\right) > \theta$' dır. $t_1 \in M$ için $R(c_1, h_5, t_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\left(c_1 \circ h_3^{-1}\right) \circ h_4^{-1}\right)(d_1) \geq R\left(c_1, h_3^{-1}, z\right) \wedge R\left(z, h_4^{-1}, d_1\right) > \theta$$

ve

$$\left(c_1 \circ \left(h_3^{-1} \circ h_4^{-1}\right)\right)(t_1) \geq R\left(h_3^{-1}, h_4^{-1}, h_5\right) \wedge R(c_1, h_5, t_1) > \theta$$

olduğundan $t_1 = d_1$' dir. Yani $R(c_1, h_5, d_1) > \theta$ olur. Sonuç olarak, $[d \circ I] = [c \circ I]$ olur. O halde, $\overline{S}$; M/I üzerinde fuzzy ikili işlemdir.

(M,Γ)1. $\left(M/I, \overline{R}\right)$ ve (Γ, R) değişmeli fuzzy gruplardır.

(1) $\forall a, b \in M$, $R(a, b, c) > \theta$ olacak biçimde $c \in M$ vardır. $\overline{R}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) \geq R(a, b, c) > \theta$' dır.

(2) $\overline{R}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) > \theta$ ve $\overline{R}([a \circ I], [b \circ I], [d \circ I]) > \theta$ olsun. $[c \circ I] = [d \circ I]$ mı?

$a_1 \in \overline{a}$, $b_1 \in \overline{b}$, $c_1 \in \overline{c}$, $a_1' \in \overline{a}$, $b_1' \in \overline{b}$, $d_1 \in \overline{d}$ için $R(a_1, b_1, c_1) > \theta$ ve $R(a_1', b_1', d_1) > \theta$' dır.

$a_1' \circ I \sim a_1 \circ I$, $b_1' \circ I \sim b_1 \circ I$ olduğundan $h_1, h_2 \in I$ için $R(a_1', h_1, a_1) > \theta$ ve $R(b_1', h_2, b_1) > \theta$' dır.

$z \in M$ için $R(h_1, b_1', z) > \theta$ ise $R\left(z, b_1'^{-1}, h_1\right) > \theta$' dır. Buradan $b_1'^{-1} \circ I \sim z \circ I$' dır ve $h_1' \in I$ için $R\left(b_1'^{-1}, z, h_1'\right) > \theta$' dır.

$y \in M$ için $R(b_1', h_1', y) > \theta$ ise

$$\left(b_1' \circ \left(b_1'^{-1} \circ z\right)\right)(y) \geq R\left(b_1'^{-1}, z, h_1'\right) \wedge R(b_1', h_1', y) > \theta$$

ve

$$\left(\left(b_1' \circ b_1'^{-1}\right) \circ z\right)(z) \geq R\left(b_1', b_1'^{-1}, e_0\right) \wedge R(e_0, z, z) > \theta$$

olduğundan $y = z$' dir.

$z_1, y_1 \in M$ için $R(h_1, b_1, z_1) > \theta$ ve $R(a_1', z_1, y_1) > \theta$ ise

$$(a_1' \circ (h_1 \circ b_1))(y_1) \geq R(h_1, b_1, z_1) \wedge R(a_1', z_1, y_1) > \theta$$

ve

$$((a_1' \circ h_1) \circ b_1)(c_1) \geq R(a_1', h_1, a_1) \wedge R(a_1, b_1, c_1) > \theta$$

olduğundan $y_1 = c_1$' dir. Yani $R(a_1', z_1, c_1) > \theta$ olur.

$p_1 \in M$ için $R(z, h_2, p_1) > \theta$ ise

$$((h_1 \circ b_1') \circ h_2)(p_1) \geq R(h_1, b_1', z) \wedge R(z, h_2, p_1) > \theta$$

ve

$$(h_1 \circ (b_1' \circ h_2))(z_1) \geq R(b_1', h_2, b_1) \wedge R(h_1, b_1, z_1) > \theta$$

olduğundan $p_1 = z_1$' dir. Yani $R(z, h_2, z_1) > \theta$ ve $R(y, h_2, z_1) > \theta$ olur.

$h, w_1 \in M$ için $R(h_1', h_2, h) > \theta$, $R(b_1', h, w_1) > \theta$ alınırsa; $h \in I$ ve

$$(b_1' \circ (h_1' \circ h_2))(w_1) \geq R(h_1', h_2, h) \wedge R(b_1', h, w_1) > \theta$$

ve

$$((b_1' \circ h_1') \circ h_2)(z_1) \geq R(b_1', h_1', z) \wedge R(z, h_2, z_1) > \theta$$

olduğundan $w_1 = z_1$' dir. Yani $R(b_1', h, z_1) > \theta$ olur.

$w \in M$ için $R(d_1, h, w) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$((a_1' \circ b_1') \circ h)(w) \geq R(a_1', b_1', d_1) \wedge R(d_1, h, w) > \theta$$

ve

$$(a_1' \circ (b_1' \circ h))(c_1) \geq R(b_1', h, z_1) \wedge R(a_1', z_1, c_1) > \theta$$

olduğundan $w = c_1$' dir. Yani $R(d_1, h, c_1) > \theta$' dır. Böylece $R\left(d_1^{-1}, c_1, h\right) > \theta$ olduğundan $d_1 \circ I \sim c_1 \circ I$' dır. Sonuç olarak, $[d \circ I] = [c \circ I]$ olur. O halde, $\overline{R}$; M/I üzerinde fuzzy ikili işlemdir.

(3) $(([a \circ I] \oplus [b \circ I]) \oplus [c \circ I])([d \circ I]) > \theta$ ve
$([a \circ I] \oplus ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([w \circ I]) > \theta$ olsun.

$a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, c_1', d_1, w_1 \in M$ için $c_1 \circ I \sim c_1' \circ I$, $a_1' \circ I \sim a_1 \circ I \sim a \circ I$, $b_1' \circ I \sim b_1 \circ I \sim b \circ I$, $d_1 \circ I \sim d \circ I$ ve $w_1 \circ I \sim w \circ I$ olsun. Bu durumda, $h_1, h_2, h_3 \in I$ ve $x_1', x_2' \in M$ için

$$R(a_1, b_1, x_1') \wedge R(x_1', c_1, d_1) > \theta,$$

$$R\left(b_1', c_1', x_2'\right) \wedge R\left(a_1', x_2', w_1\right) > \theta,$$

$$R\left(a_1', h_1, a_1\right) > \theta,\ R\left(b_1', h_2, b_1\right) > \theta,\ R\left(c_1', h_3, c_1\right) > \theta$$

dır.

$z_1 \in M$ için $R\left(a_1', b_1', z_1\right) > \theta$ olsun.

$R\left(h_1, b_1', z\right) > \theta$ olacak biçimde $z \in M$ vardır. Buradan $R\left(z, b_1'^{-1}, h_1\right) > \theta$ olduğundan $b_1'^{-1} \circ I \sim z \circ I$' dır. O halde $R\left(b_1'^{-1}, z, h_1'\right) > \theta$ olacak biçimde $h_1' \in I$ vardır.

$y \in M$ için $R\left(b_1', h_1', y\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(b_1' \circ \left(b_1'^{-1} \circ z\right)\right)(y) \geq R\left(b_1'^{-1}, z, h_1'\right) \wedge R\left(b_1', h_1', y\right) > \theta$$

ve

$$\left(\left(b_1' \circ b_1'^{-1}\right) \circ z\right)(z) \geq R\left(b_1', b_1'^{-1}, e_0\right) \wedge R\left(e_0, z, z\right) > \theta$$

olduğundan $y = z$' dir.

$z_2, y_1 \in M$ için $R\left(h_1, b_1, z_2\right) > \theta$ ve $R\left(a_1', z_2, y_1\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(a_1' \circ \left(h_1 \circ b_1\right)\right)(y_1) \geq R\left(h_1, b_1, z_2\right) \wedge R\left(a_1', z_2, y_1\right) > \theta$$

ve

$$\left(\left(a_1' \circ h_1\right) \circ b_1\right)(x_1') \geq R\left(a_1', h_1, a_1\right) \wedge R\left(a_1, b_1, x_1'\right) > \theta$$

olduğundan $y_1 = x_1'$ dür. Yani $R\left(a_1', z_2, x_1'\right) > \theta$ olur.

$p_1 \in M$ için $R\left(y, h_2, p_1\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\left(h_1 \circ b_1'\right) \circ h_2\right)(p_1) \geq R\left(h_1, b_1', z\right) \wedge R\left(z, h_2, p_1\right) > \theta$$

ve

$$\left(h_1 \circ \left(b_1' \circ h_2\right)\right)(z_2) \geq R\left(b_1', h_2, b_1\right) \wedge R\left(h_1, b_1, z_2\right) > \theta$$

olduğundan $p_1 = z_2$' dir. Yani $R\left(z, h_2, z_2\right) > \theta$ ve $R\left(y, h_2, z_2\right) > \theta$ olur.

$h, w_1 \in M$ için $R\left(h_1', h_2, h\right) > \theta,\ R\left(b_1', h, w_1\right) > \theta$ alınırsa; $h \in I$ ve

$$\left(b_1' \circ \left(h_1' \circ h_2\right)\right)(w_1) \geq R\left(h_1', h_2, h\right) \wedge R\left(b_1', h, w_1\right) > \theta$$

ve

$$((b_1' \circ h_1') \circ h_2)(z_2) \geq R(b_1', h_1', y) \wedge R(y, h_2, z_2) > \theta$$

olduğundan $w_1 = z_2$' dir. Yani $R(b_1', h, z_2) > \theta$ olur.

$w \in M$ için $R(z_1, h, w) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$((a_1' \circ b_1') \circ h)(w) \geq R(a_1', b_1', z_1) \wedge R(z_1, h, w) > \theta$$

ve

$$(a_1' \circ (b_1' \circ h))(x_1') \geq R(b_1', h, z_2) \wedge R(a_1', z_2, x_1') > \theta$$

olduğundan $w = x_1'$ dür. Yani $R(z_1, h, x_1') > \theta$' dır.

$z_3 \in M$ için $R(z_1, c_1', z_3) > \theta$ olsun.

$R(h, c_1', z_4) > \theta$ olacak biçimde $z_4 \in M$ vardır. Buradan $R\left(z_4, c_1'^{-1}, h\right) > \theta$ olduğundan $c_1'^{-1} \circ I \sim z_4 \circ I$' dır. O halde $R\left(c_1'^{-1}, z_4, h_2'\right) > \theta$ olacak biçimde $h_2' \in I$ vardır. $y_3 \in M$ için $R(c_1', h_2', y_3) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(c_1' \circ \left(c_1'^{-1} \circ z_4\right)\right)(y_3) \geq R\left(c_1'^{-1}, z_4, h_2'\right) \wedge R(c_1', h_2', y_3) > \theta$$

ve

$$\left(\left(c_1' \circ c_1'^{-1}\right) \circ z_4\right)(z_4) \geq R\left(c_1', c_1'^{-1}, e_0\right) \wedge R(e_0, z_4, z_4) > \theta$$

olduğundan $y_3 = z_4$' dür. Yani $R(c_1', h_2', z_4) > \theta$ olur.

$z_5, y_4 \in M$ için $R(h, c_1, z_5) > \theta$ ve $R(z_1, z_5, y_4) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(z_1 \circ (h \circ c_1))(y_4) \geq R(h, c_1, z_5) \wedge R(z_1, z_5, y_4) > \theta$$

ve

$$((z_1 \circ h) \circ c_1)(d_1) \geq R(z_1, h, x_1') \wedge R(x_1', c_1, d_1) > \theta$$

olduğundan $y_4 = d_1$ olur. Yani $R(z_1, z_5, d_1) > \theta$' dır.

$p_2 \in M$ için $R(y_3, h_3, p_2) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(h \circ (c_1' \circ h_3))(z_5) \geq R(c_1', h_3, c_1) \wedge R(h, c_1, z_5) > \theta$$

ve

$$((h \circ c_1') \circ h_3)(p_2) \geq R(h, c_1', z_4) \wedge R(z_4, h_3, p_2) > \theta$$

olduğundan $p_2 = z_5$' tir. Böylece $R(y_3, h_3, z_5) > \theta$ ve $R(z_4, h_3, z_5) > \theta$ olur.

$h_4 \in I$ için $R(h_2', h_3, h_4) > \theta$ ve $w_2 \in M$ için $R(c_1', h_4, w_2) > \theta$ olsun.

$$(c_1' \circ (h_2' \circ h_3))(w_2) \geq R(h_2', h_3, h_4) \wedge R(c_1', h_4, w_2) > \theta$$

ve

$$((c_1' \circ h_2') \circ h_3)(z_5) \geq R(c_1', h_2', z_4) \wedge R(z_4, h_3, z_5) > \theta$$

olduğundan $w_2 = z_5$' tir.

$w_3 \in M$ için $R(z_3, h_4, w_3) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(z_1 \circ (c_1' \circ h_4))(d_1) \geq R(c_1', h_4, z_5) \wedge R(z_1, z_5, d_1) > \theta$$

ve

$$((z_1 \circ c_1') \circ h_4)(w_3) \geq R(z_1, c_1', z_3) \wedge R(z_3, h_4, w_3) > \theta$$

olduğundan $d_1 = w_3$' dür. Böylece $R(z_3, h_4, d_1) > \theta$' dır.

$$(a_1' \circ (b_1' \circ c_1'))(w_1) \geq R(b_1', c_1', x_2') \wedge R(a_1', x_2', w_1) > \theta$$

ve

$$((a_1' \circ b_1') \circ c_1')(z_3) \geq R(a_1', b_1', z_1) \wedge R(z_1, c_1', z_3) > \theta$$

olduğundan $w_1 = z_3$' dür. Böylece $R(w_1, h_4, d_1) > \theta$ olduğundan $w_1 \circ I \sim d_1 \circ I$ dır. O halde $[w \circ I] = [d \circ I]$ olur.

(4) Her $a \in M$ için, $([a \circ I] \oplus [e_0 \circ I])([a \circ I]) \geq R(a, e_0, a) > \theta$ ve $([e_0 \circ I] \oplus [a \circ I])([a \circ I]) \geq R(e_0, a, a) > \theta$' dır.

(5) $([a \circ I] \oplus [a^{-1} \circ I])([e_0 \circ I]) \geq R(a, a^{-1}, e_0) > \theta$ ve $([a^{-1} \circ I] \oplus [a \circ I])([e_0 \circ I]) \geq R(a^{-1}, a, e_0) > \theta$' dır.

Böylece $(M/I, \overline{R})$ bir fuzzy gruptur. Üstelik, $([a \circ I] \oplus [b \circ I])([c \circ I]) > \theta$ ve $([b \circ I] \oplus [a \circ I])([w \circ I]) > \theta$ iken $R(a, b, c) > \theta$ ve $R(b, a, w) > \theta$ olduğundan $c = w$' dır. Dolayısıyla $(M/I, \overline{R})$ değişmeli fuzzy gruptur.

(M,Γ)2. $(([a \circ I] \otimes \gamma \otimes [b \circ I]) \otimes \beta \otimes [c \circ I])([d \circ I]) > \theta$ ve $([a \circ I] \otimes \gamma \otimes ([b \circ I] \otimes \beta \otimes [c \circ I]))([w \circ I]) > \theta$ olsun.

$a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, c_1', d_1, w_1 \in M$ için $c_1 \circ I \sim c_1' \circ I$, $a_1' \circ I \sim a_1 \circ I \sim a \circ I$, $b_1' \circ I \sim b_1 \circ I \sim b \circ I$, $d_1 \circ I \sim d \circ I$, $w_1 \circ I \sim w \circ I$ olsun. Bu durumda, $h_1, h_2, h_3 \in I$, $x_1', x_2' \in M$ ve $\gamma, \beta, \alpha, \gamma_1, \beta_1, \alpha_1 \in \Gamma$ için,

$$S(a_1, \gamma, b_1, \alpha, x_1') \wedge S(x_1', \beta, c_1, \alpha_1, d_1) > \theta,$$

$$S(b_1', \beta, c_1', \beta_1, x_2') \wedge S(a_1', \gamma, x_2', \gamma_1, w_1) > \theta,$$

$$R(a_1', h_1, a_1) > \theta,\ R(b_1', h_2, b_1) > \theta,\ R(c_1', h_3, c_1) > \theta$$

dır.

$z_1 \in M$ ve $\gamma_2 \in \Gamma$ için $S(a_1', \gamma, b_1', \gamma_2, z_1) > \theta$ olsun.

$R(a_1', h_1, a_1) > \theta$ olduğundan $R\left(a_1, h_1^{-1}, a_1'\right) > \theta$' dır.

$z \in M$, $h_4 \in I$ ve $\alpha_2, \beta_2 \in \Gamma$ için $S(a_1', \gamma, b_1, \alpha_2, z) > \theta$ ve $S(h_1, \gamma, b_1, \beta_2, h_4) > \theta$ olsun. $S\left(h_1^{-1}, \gamma, b_1, \beta_2, h_4^{-1}\right) > \theta$' dır. $y \in M$ için $R\left(x_1', h_4^{-1}, y\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\left(a_1 \circ h_1^{-1}\right) * \gamma * b_1\right)(z) \geq R\left(a_1, h_1^{-1}, a_1'\right) \wedge S(a_1', \gamma, b_1, \alpha_2, z) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned} \left((a_1 * \gamma * b_1) \circ \left(h_1^{-1} * \gamma * b_1\right)\right)(y) \ &\geq S(a_1, \gamma, b_1, \alpha, x_1') \wedge S\left(h_1^{-1}, \gamma, b_1, \beta_2, h_4^{-1}\right) \\ &\wedge R\left(x_1', h_4^{-1}, y\right) > \theta \end{aligned}$$

olduğundan $y = z$' dir. Böylece $R\left(x_1', h_4^{-1}, z\right) > \theta$ olur.

$y_1 \in M$, $h_5 \in I$ ve $\beta_2 \in \Gamma$ için $S(a_1', \gamma, h_2, \beta_2, h_5) > \theta$ ve $R(h_5, z_1, y_1) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$(a_1' * \gamma * (h_2 \circ b_1')(z)) \geq R(h_2, b_1', b_1) \wedge S(a_1', \gamma, b_1, \alpha_2, z) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned} ((a_1' * \gamma * h_2) \circ (a_1' * \gamma * b_1'))(y_1) \ &\geq S(a_1', \gamma, h_2, \beta_2, h_5) \wedge S(a_1', \gamma, b_1', \gamma_2, z_1) \\ &\wedge R(h_5, z_1, y_1) > \theta \end{aligned}$$

olduğundan $y_1 = z$' dir. Böylece $R(h_5, z_1, z) > \theta$ olur.

$h_4, h_5 \in I$ olduğundan $R\left(h_4^{-1}, h_5^{-1}, h'\right) > \theta$ olacak biçimde $h' \in I$ vardır. $R(h_5, z_1, z) > \theta$ olduğundan $R\left(z, h_5^{-1}, z_1\right) > \theta$' dır. $t \in M$ için $R(x_1', h', t) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(x_1' \circ \left(h_4^{-1} \circ h_5^{-1}\right)\right)(t) \geq R\left(h_4^{-1}, h_5^{-1}, h'\right) \wedge R(x_1', h', t) > \theta$$

ve

$$\left(\left(x_1' \circ h_4^{-1}\right) \circ h_5^{-1}\right)(z_1) \geq R\left(x_1', h_4^{-1}, z\right) \wedge R\left(z, h_5^{-1}, z_1\right) > \theta$$

olduğundan $t = z_1$' dir. Böylece $R(x_1', h', z_1) > \theta$ olduğundan $R(z_1, h, x_1') > \theta$ olacak biçimde $h \in I$ vardır.

$z_3 \in M, h_6 \in I$ ve $\beta_1, \beta_3 \in \Gamma$ için $S(z_1, \beta, c_1, \beta_1, z_3) > \theta$ ve $S(h, \beta, c_1, \beta_3, h_6) > \theta$ olsun. $R(z_1, h, x_1') > \theta$ olduğundan $R(x_1', h^{-1}, z_1) > \theta$ ve $S(h, \beta, c_1, \beta_3, h_6) > \theta$ olduğundan $S\left(h^{-1}, \beta, c_1, \beta_3, h_6^{-1}\right) > \theta$' dır. $p \in M$ için $R\left(d_1, h_6^{-1}, p\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\left(x_1' \circ h^{-1}\right) * \beta * c_1\right)(z_3) \geq R\left(x_1', h^{-1}, z_1\right) \wedge S(z_1, \beta, c_1, \beta_1, z_3) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((x_1' * \beta * c_1) \circ (h^{-1} * \beta * c_1))(p) \quad &\geq S(x_1', \beta, c_1, \alpha_1, d_1) \wedge S\left(h^{-1}, \beta, c_1, \beta_3, h_6^{-1}\right) \\ &\wedge R\left(d_1, h_6^{-1}, p\right) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $p = z_3$' tür. Böylece $R\left(d_1, h_6^{-1}, z_3\right) > \theta$ olur.

$z_2, p_1 \in M, h_7 \in I$ ve $\gamma_3 \in \Gamma$ için $S(z_1, \beta, c_1', \gamma_3, z_2) > \theta$, $S(z_1, \beta, h_3, \alpha_3, h_7) > \theta$ ve $R(h_7, z_2, p_1) > \theta$ olsun.

$$(z_1 * \beta * (h_3 \circ c_1'))(z_3) \geq R(h_3, c_1', c_1) \wedge S(z_1, \beta, c_1, \beta_1, z_3) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((z_1 * \beta * h_3) \circ (z_1 * \beta * c_1'))(p_1) \quad &\geq S(z_1, \beta, h_3, \alpha_3, h_7) \wedge S(z_1, \beta, c_1', \gamma_3, z_2) \\ &\wedge R(h_7, z_2, p_1) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $p_1 = z_3$' tür. Böylece $R(h_7, z_2, z_3) > \theta$ olur.

$h_6, h_7 \in I$ olduğundan $R\left(h_6^{-1}, h_7^{-1}, h''\right) > \theta$ olacak biçimde $h'' \in I$ vardır. $R(h_7, z_2, z_3) > \theta$ olduğundan $R\left(z_3, h_7^{-1}, z_2\right) > \theta$' dır. $t_1 \in M$ için $R(h'', d_1, t_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(d_1 \circ \left(h_6^{-1} \circ h_7^{-1}\right)\right)(t_1) \geq R\left(h_6^{-1}, h_7^{-1}, h''\right) \wedge R(d_1, h'', t_1) > \theta$$

ve

$$\left(\left(d_1 \circ h_6^{-1}\right) \circ h_7^{-1}\right)(z_2) \geq R\left(d_1, h_6^{-1}, z_3\right) \wedge R\left(z_3, h_7^{-1}, z_2\right) > \theta$$

olduğundan $t_1 = z$' dir. Böylece $R(h'', d_1, z_2) > \theta$ olur.

$$((a_1' * \gamma * b_1') * \beta * c_1')(z_2) \geq S(a_1', \gamma, b_1', \gamma_2, z_1) \wedge S(z_1, \beta, c_1', \gamma_3, z_2) > \theta$$

ve

$$(a_1' * \gamma * (b_1' * \beta * c_1'))(w_1) \geq S(b_1', \beta, c_1', \beta_1, x_2') \wedge S(a_1', \gamma, x_2', \gamma_1, w_1) > \theta$$

olduğundan $z_2 = w_1$' dir. Böylece $R(h'', d_1, w_1) > \theta$ olduğundan $w_1 \circ I \sim d_1 \circ I$ dır. O halde $[w \circ I] = [d \circ I]$ olur.

(M,Γ)3. (i) $([a \circ I] \otimes \gamma \otimes ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([d \circ I]) > \theta$ ve $(([a \circ I] \otimes \gamma \otimes [b \circ I]) \oplus ([a \circ I] \otimes \gamma \otimes [c \circ I]))([w \circ I]) > \theta$ olsun.

$a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, c_1', d_1, w_1 \in M$ için $c_1 \circ I \sim c_1' \circ I$, $a_1' \circ I \sim a_1 \circ I \sim a \circ I$, $b_1' \circ I \sim b_1 \circ I \sim b \circ I$, $d_1 \circ I \sim d \circ I$, $w_1 \circ I \sim w \circ I$ olsun.

Bu durumda, $h_1, h_2, h_3 \in I$, $x_1', x_2', x_3' \in M$ ve $\gamma, \beta, \alpha, \tau, \in \Gamma$ için

$$R(b_1, c_1, x_1') \wedge S(a_1, \gamma, x_1', \beta, d_1) > \theta,$$

$$S(a_1', \gamma, b_1', \alpha, x_2') \wedge S(a_1', \gamma, c_1', \tau, x_3') \wedge R(x_2', x_3', w_1) > \theta,$$

$$R(a_1', h_1, a_1) > \theta, \quad R(b_1', h_2, b_1) > \theta, \quad R(c_1', h_3, c_1) > \theta$$

dır.

$z_1 \in M$ için $R(b_1', c_1', z_1) > \theta$ olsun.

$R(h_2, c_1', z)$ olacak biçimde $z \in M$ vardır.

$z_2, y_1 \in M$ için $R(h_2, c_1, z_2) > \theta$ ve $R(b_1', z_2, y_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(b_1' \circ (h_2 \circ c_1))(y_1) \geq R(h_2, c_1, z_2) \wedge R(b_1', z_2, y_1) > \theta$$

ve

$$((b_1' \circ h_2) \circ c_1)(x_1') \geq R(b_1', h_2, b_1) \wedge R(b_1, c_1, x_1') > \theta$$

olduğundan $x_1' = y_1$' dir. Böylece $R(b_1', z_2, x_1') > \theta$ olur.

$p_1 \in M$ için $R(z, h_3, p_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(h_2 \circ (c_1' \circ h_3))(z_2) \geq R(c_1', h_3, c_1) \wedge R(h_2, c_1, z_2) > \theta$$

ve

$$((h_2 \circ c_1') \circ h_3)(p_1) \geq R(h_2, c_1', z) \wedge R(z, h_3, p_1) > \theta$$

olduğundan $z_2 = p_1$' dir. Böylece $R(z, h_3, z_2) > \theta$ olur.

$h \in I$ için $R(h_2, h_3, h) > \theta$ ve $y_2 \in M$ için $R(c_1', h, y_2) > \theta$ olsun.

$$(c_1' \circ (h_2 \circ h_3))(y_2) \geq R(h_2, h_3, h) \wedge R(c_1', h, y_2) > \theta$$

ve

$$((c_1' \circ h_2) \circ h_3)(z_2) \geq R(c_1', h_2, z) \wedge R(z, h_3, z_2) > \theta$$

olduğundan $y_2 = z_2$' dir. Böylece $R(c_1', h, z_2) > \theta$ olur.

$p_2 \in M$ için $R(z_1, h, p_2) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(b_1' \circ (c_1' \circ h))(x_1') \geq R(c_1', h, z_2) \wedge R(b_1', z_2, x_1') > \theta$$

ve

$$((b_1' \circ c_1') \circ h)(p_2) \geq R(b_1', c_1', z_1) \wedge R(z_1, h, p_2) > \theta$$

olduğundan $x_1' = p_2$' dir. Böylece $R(z_1, h, x_1') > \theta$ olur.

$z_3 \in M$ ve $\gamma_1 \in \Gamma$ için $S(a_1', \gamma, z_1, \gamma_1, z_3) > \theta$ olsun. $R(z_1, h, x_1') > \theta$ olduğundan $R(x_1', h^{-1}, z_1) > \theta$'dır. $S(a_1, \gamma, h, \beta_1, h_4) > \theta$ olacak biçimde $h_4 \in I$ ve $\beta_1 \in \Gamma$ vardır. Buradan $S\left(a_1, \gamma, h^{-1}, \beta_1, h_4^{-1}\right) > \theta$ dır.

$z_4, y \in M$ ve $\alpha_1 \in \Gamma$ için $S(a_1, \gamma, z_1, \alpha_1, z_4) > \theta$ ve $R\left(d_1, h_4^{-1}, y\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(a_1 * \gamma * \left(x_1' \circ h^{-1}\right)\right)(z_4) \geq R\left(x_1', h^{-1}, z_1\right) \wedge S(a_1, \gamma, z_1, \alpha_1, z_4) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a_1 * \gamma * x_1') \circ (a_1 * \gamma * h^{-1}))(y) &\geq S(a_1, \gamma, x_1', \beta, d_1) \wedge S\left(a_1, \gamma, h^{-1}, \beta_1, h_4^{-1}\right) \\ &\wedge R\left(d_1, h_4^{-1}, y\right) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $y = z_4$' dür. Böylece $R\left(d_1, h_4^{-1}, z_4\right) > \theta$ olur.

$z_5 \in M$, $h_1' \in I$ ve $\tau_1 \in \Gamma$ için $S(h_1, \gamma, z_1, \tau_1, h_1') > \theta$ ve $R(z_3, h_1', z_5) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$((h_1 \circ a_1') * \gamma * z_1)(z_4) \geq R(h_1, a_1', a_1) \wedge S(a_1, \gamma, z_1, \alpha_1, z_4) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((h_1 * \gamma * z_1) \circ (a_1' * \gamma * z_1))(z_5) &\geq S(h_1, \gamma, z_1, \tau_1, h_1') \wedge S(a_1', \gamma, z_1, \gamma_1, z_3) \\ &\wedge R(h_1', z_3, z_5) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $z_4 = z_5$' tir. Böylece $R(z_3, h_1', z_4) > \theta$ olur.

$h_1', h_4 \in I$ olduğundan $R\left(h_4^{-1}, h_1'^{-1}, h_5\right) > \theta$ olacak biçimde $h_5 \in I$ vardır. $t \in M$ için $R(d_1, h_5, t) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(d_1 \circ \left(h_4^{-1} \circ h_1'^{-1}\right)\right)(t) \geq R\left(h_4^{-1}, h_1'^{-1}, h_5\right) \wedge R(d_1, h_5, t) > \theta$$

ve

$$\left(\left(d_1 \circ h_4^{-1}\right) \circ h_1'^{-1}\right)(z_3) \geq R\left(d_1, h_4^{-1}, z_4\right) \wedge R\left(z_4, h_1'^{-1}, z_3\right) > \theta$$

olduğundan $z_3 = t$' dir. Böylece $R(d_1, h_5, z_3) > \theta$ olur.

$$(a_1' * \gamma * (b_1' \circ c_1'))(z_3) \geq R(b_1', c_1', z_1) \wedge S(a_1', \gamma, z_1, \gamma_1, z_3) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a_1' * \gamma * b_1') \circ (a' * \gamma * c_1'))(w_1) &\geq S(a_1', \gamma, b_1', \alpha, x_2') \wedge S(a_1', \gamma, c_1', \tau, x_3') \\ &\wedge R(x_2', x_3', w_1) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $z_3 = w$' dir. Böylece $R(d_1, h_5, w_1) > \theta$ olduğundan $w_1 \circ I \sim d_1 \circ I$ dır. O halde $[w \circ I] = [d \circ I]$ olur.

(ii) $([a \circ I] * (\gamma \circ \beta) * [b \circ I])([c \circ I]) > \theta$ ve $([a \circ I] * \gamma * [b \circ I]) \oplus ([a \circ I] * \beta * [b \circ I])([d \circ I]) > \theta$ olsun.

$a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, d_1 \in M$ için $a_1' \circ I \sim a_1 \circ I \sim a \circ I$, $b_1' \circ I \sim b_1 \circ I \sim b \circ I$, $c_1 \circ I \sim c \circ I$, $d_1 \circ I \sim d \circ I$ olsun. Bu durumda, $h_1, h_2, \in I$, $x_1', x_2' \in M$ ve $\alpha, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \Gamma$ için

$$R(\gamma, \beta, \alpha) \wedge S(a_1, \alpha, b_1, \alpha_1, c_1) > \theta$$

$$S(a_1', \gamma, b_1', \gamma_1, x_1') \wedge S(a_1', \beta, b_1', \beta_1, x_2') \wedge R(x_1', x_2', d_1) > \theta$$

$$R(a_1', h_1, a_1) > \theta, \quad R(b_1', h_2, b_1) > \theta$$

dır.

$z_1 \in M$, $\alpha_2 \in \Gamma$ için $S(a_1', \alpha, b_1', \alpha_2, z_1) > \theta$ olsun. $h_1 \in I$ olduğundan $S(h_1, \alpha, b_1, \beta_2, h_3) > \theta$ olacak biçimde $h_3 \in I$, $\beta_2 \in \Gamma$ vardır. $z, t \in M$ ve $\gamma_2 \in \Gamma$ için $S(a_1', \alpha, b_1, \gamma_2, z) > \theta$ ve $R(z, h_3, t) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$((a_1' \circ h_1) * \alpha * b_1)(c_1) \geq R(a_1', h_1, a_1) \wedge S(a_1, \alpha, b_1, \alpha_1, c_1) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned} ((a_1' * \alpha * b_1) \circ (h_1 * \alpha * b_1))(t) \quad & \geq S(a_1', \alpha, b_1, \gamma_2, z) \wedge S(h_1, \alpha, b_1, \beta_2, h_3) \\ & \wedge R(z, h_3, t) > \theta \end{aligned}$$

olduğundan $t = c_1$' dir. Böylece $R(z, h_3, c_1) > \theta$ olur.

$h_2 \in I$ olduğundan $S(a_1', \alpha, h_2, \alpha_3, h_4) > \theta$ olacak biçimde $h_4 \in I, \alpha_3 \in \Gamma$ vardır. $t_1 \in M$ için $R(h_4, z_1, t_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(a_1' * \alpha * (h_2 \circ b_1'))(z) \geq R(h_2, b_1', b_1) \wedge S(a_1', \alpha, b_1, \gamma_2, z) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned} ((a_1' * \alpha * h_2) \circ (a_1' * \alpha * b_1'))(t_1) \quad & \geq S(a_1', \alpha, h_2, \alpha_3, h_4) \wedge S(a_1', \alpha, b_1', \alpha_2, z_1) \\ & \wedge R(h_4, z_1, t_1) > \theta \end{aligned}$$

olduğundan $z = t_1$' dir. Böylece $R(z_1, h_4, z) > \theta$ olur.

$h_3, h_4 \in I$ olduğundan $R(h_3, h_4, h_5) > \theta$ olacak biçimde $h_5 \in I$ vardır. $t_2 \in M$ için $R(z_1, h_5, t_2) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(z_1 \circ (h_4 \circ h_3))(t_2) \geq R(h_4, h_3, h_5) \wedge R(z_1, h_5, t_2) > \theta$$

ve

$$((z_1 \circ h_4) \circ h_3)(c_1) \geq R(z_1, h_4, z) \wedge R(z, h_3, c_1) > \theta$$

olduğundan $t_2 = c_1$' dir. Böylece $R(z_1, h_5, c_1) > \theta$ olur.

$$(a_1' * (\gamma \circ \beta) * b_1')(z_1) \geq R(\gamma, \beta, \alpha) \wedge S(a_1', \alpha, b_1', \alpha_2, z_1) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a_1' * \gamma * b_1') \circ (a_1' * \beta * b_1'))(d_1) &\geq S(a_1', \gamma, b_1', \gamma_1, x_1') \wedge S(a_1', \beta, b_1', \beta_1, x_2') \\ &\wedge R(x_1', x_2', d_1) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $d_1 = z$' dir. Böylece $R(d_1, h_5, c_1) > \theta$ olduğundan $c_1 \circ I \sim d_1 \circ I$ dır. Yani $[c \circ I] = [d \circ I]$ olur.

(iii) $(([a \circ I] \oplus [b \circ I]) * \gamma * [c \circ I])([d \circ I]) > \theta$ ve $(([a \circ I] * \gamma * [c \circ I]) \oplus ([b \circ I] * \gamma * [c \circ I]))([w \circ I]) > \theta$ olsun.

$a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, c_1', d_1, w_1 \in M$ için $c_1 \circ I \sim c_1' \circ I$, $a_1' \circ I \sim a_1 \circ I \sim a \circ I$, $b_1' \circ I \sim b_1 \circ I \sim b \circ I$, $d_1 \circ I \sim d \circ I$, $w_1 \circ I \sim w \circ I$ olsun. Bu durumda, $h_1, h_2, h_3 \in I$, $x_1', x_2', x_3' \in M$ ve $\gamma, \beta, \alpha, \alpha_1 \in \Gamma$ için

$$R(a_1, b_1, x_1') \wedge S(x_1', \gamma, c_1, \alpha, d_1) > \theta,$$

$$S(a_1', \gamma, c_1', \beta, x_2') \wedge S(b_1', \gamma, c_1', \alpha_1, x_3') \wedge R(x_2', x_3', w_1) > \theta,$$

$$R(a_1', h_1, a_1) > \theta, \quad R(b_1', h_2, b_1) > \theta, \quad R(c_1', h_3, c_1) > \theta$$

dır.

$z_1 \in M$ için $R(a_1', b_1', z_1) > \theta$ olsun.

$z_2, y_1 \in M$ için $R(h_1, b_1, z_2) > \theta$ ve $R(a_1', z_2, y_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(a_1' \circ (h_1 \circ b_1))(y_1) \geq R(h_1, b_1, z_2) \wedge R(a_1', z_2, y_1) > \theta$$

ve

$$((a_1' \circ h_1) \circ b_1)(x_1') \geq R(a_1', h_1, a_1) \wedge R(a_1, b_1, x_1') > \theta$$

olduğundan $y_1 = x_1'$ dür. Böylece $R(a_1', z_2, x_1') > \theta$ olur.

$z, p_1 \in M$ için $R(b_1', h_1, z) > \theta$ ve $R(z, h_2, p_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(h_1 \circ (b_1' \circ h_2))(z_2) \geq R(b_1', h_2, b_1) \wedge R(h_1, b_1, z_2) > \theta$$

ve

$$((h_1 \circ b_1') \circ h_2)(p_1) \geq R(b_1', h_1, z) \wedge R(z, h_2, p_1) > \theta$$

olduğundan $z_2 = p_1$' dir. Böylece $R(z, h_2, z_2) > \theta$ olur.

$h_1, h_2 \in I$ olduğundan $R(h_1, h_2, h) > \theta$ olacak biçimde $h \in I$ vardır. $y_2 \in M$ için $R(b_1', h, y_2) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(b_1' \circ (h_1 \circ h_2))(y_2) \geq R(h_1, h_2, h) \wedge R(b_1', h, y_2) > \theta$$

ve

$$((b_1' \circ h_1) \circ h_2)(z_2) \geq R(b_1', h_1, z) \wedge R(z, h_2, z_2) > \theta$$

olduğundan $y_2 = z_2$' dir. Böylece $R(b_1', h, z_2) > \theta$ olur.

$p_2 \in M$ için $R(z_1, h, p_2) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(a_1' \circ (b_1' \circ h))(x_1') \geq R(b_1', h, z_2) \wedge R(a_1', z_2, x_1') > \theta$$

ve

$$((a_1' \circ b_1') \circ h)(p_2) \geq R(a_1', b_1', z_1) \wedge R(z_1, h, p_2) > \theta$$

olduğundan $p_2 = x_1'$ dür. Böylece $R(z_1, h, x_1') > \theta$ olur.

$z_3 \in M$, $\beta_1 \in \Gamma$ için $S(z_1, \gamma, c_1', \beta_1, z_3) > \theta$ olsun. $R(z_1, h, x_1') > \theta$ olduğundan $R(x_1', h^{-1}, z_1) > \theta$' dır. $h \in I$ olduğundan $S(h, \gamma, c_1, \gamma_1, h_4) > \theta$ olacak biçimde $\gamma_1 \in \Gamma$, $h_4 \in I$ vardır. Buradan $S\left(h^{-1}, \gamma, c_1, \gamma_1, h_4^{-1}\right) > \theta$' dır.

$z_4, y \in M$ ve $\tau \in \Gamma$ için $S(z_1, \gamma, c_1, \tau, z_4) > \theta$ ve $R\left(d_1, h_4^{-1}, y\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\left(x_1' \circ h^{-1}\right) * \gamma * c_1\right)(z_4) \geq R\left(x_1', h^{-1}, z_1\right) \wedge S(z_1, \gamma, c_1, \tau, z_4) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((x_1' * \gamma * c_1) \circ (h^{-1} * \gamma * c_1))(y) \ &\geq S(x_1', \gamma, c_1, \alpha, d_1) \wedge S\left(h^{-1}, \gamma, c_1, \gamma_1, h_4^{-1}\right) \\ &\wedge R\left(d_1, h_4^{-1}, y\right) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $y = z_4$' dür. Böylece $R\left(d_1, h_4^{-1}, z_4\right) > \theta$ olur.

$h_3 \in I$ olduğundan $S(z_1, \gamma, h_3, \tau_1, h_3') > \theta$ olacak biçimde $h_3' \in I$ ve $\tau_1 \in \Gamma$ vardır. $z_5 \in M$ için $R(z_3, h_3', z_5) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(z_1 * \gamma * (h_3 \circ c_1'))(z_4) \geq R(c_1', h_3, c_1) \wedge S(z_1, \gamma, c_1, \tau, z_4) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((z_1 * \gamma * h_3) \circ (z_1 * \gamma * c_1'))(z_5) &\geq S(z_1, \gamma, h_3, \tau_1, h_3') \wedge S(z_1, \gamma, c_1', \beta_1, z_3) \\ &\wedge R(z_3, h_3', z_5) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $z_4 = z_5$' tir. Böylece $R(z_3, h_3', z_4) > \theta$ olur.

$h_4^{-1}, h_3'^{-1} \in I$ olduğundan $R\left(h_4^{-1}, h_3'^{-1}, h_5\right) > \theta$ olacak biçimde $h_5 \in I$ vardır. $t \in M$ için $R(d_1, h_5, t) > \theta$ olsun.

$$\left(d_1 \circ \left(h_4^{-1} \circ h_3'^{-1}\right)\right)(t) \geq R\left(h_4^{-1}, h_3'^{-1}, h_5\right) \wedge R(d_1, h_5, t) > \theta$$

ve

$$\left(\left(d_1 \circ h_4^{-1}\right) \circ h_3'^{-1}\right)(z_3) \geq R\left(d_1, h_4^{-1}, z_4\right) \wedge R\left(z_4, h_3'^{-1}, z_3\right) > \theta$$

olduğundan $z_3 = t$' dir. Böylece $R(d_1, h_5, z_3) > \theta$' dır.

$$((a_1' \circ b_1') * \gamma * c_1')(z_3) \geq R(a_1', b_1', z_1) \wedge S(z_1, \gamma, c_1', \beta_1, z_3) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a_1' * \gamma * c_1') \circ (b_1' * \gamma * c_1'))(w_1) &\geq S(a_1', \gamma, c_1', \beta, x_2') \wedge S(b_1', \gamma, c_1', \alpha_1, x_3') \\ &\wedge R(x_2', x_3', w_1) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $z_3 = w_1$' dir. Böylece $R(d_1, h_5, w_1) > \theta$ olduğundan $d_1 \circ I \sim w_1 \circ I$ dır. Yani $[d \circ I] = [w \circ I]$ olur.

Tanım 3.16. (M, Γ, R, S) fuzzy Γ-halkası ve I, M' nin fuzzy ideali olsun. $\left(M/I, \Gamma, \overline{R}, \overline{S}\right)$ fuzzy Γ-halkasına *M' nin I' ya göre çarpım fuzzy Γ-halkası* denir.

Tanım 3.17. (M_1, Γ, R_1, S_1) ve (M_2, Γ, R_2, S_2) iki fuzzy Γ-halkası ve f, M_1' den M_2' ye fonksiyon olsun. Her $a, b, c \in M_1$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için

(i) $R_1(a,b,c)>\theta$ iken $R_2(f(a),f(b),f(c))>\theta$,

(ii) $S_1(a,\gamma,b,\beta,c)>\theta$ iken $S_2(f(a),\gamma,f(b),\beta,f(c))>\theta$

ise f' ye *fuzzy* Γ-*homomorfizmi* denir.

Tanım 3.18. $f:M_1\to M_2$ fuzzy Γ-homomorfizmi olsun. Buna göre;

(i) f 1-1 ise f' ye *monomorfizm*,

(ii) f örten ise f' ye *epimorfizm*,

(iii) f 1-1 ve örten ise f' ye *izomorfizm* denir.

$f:M_1\to M_2$ izomorfizm ise M_1 ve M_2 fuzzy Γ-halkalarına *izomorfiktir,* denir ve $M_1\cong M_2$ ile gösterilir.

Teorem 3.19. (M_1,Γ,R_1,S_1) ve (M_2,Γ,R_2,S_2) fuzzy Γ-halkaları ve $f:M_1\to M_2$ fuzzy Γ-homomorfizmi olsun. Buna göre;

(i) e_0', M_2' nin sıfırı olmak üzere $f(e_0)=e_0'$ dür,

(ii) Her $a\in M_1$ için $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$ dir,

(iii) $\operatorname{Im} f=\{f(a)|\, a\in M_1\}$, M_2' nin alt fuzzy Γ-halkasıdır.

İspat. **(i)** f bir fuzzy Γ-halka homomorfizmi olduğundan her $a\in M_1$ için,

$$R_1(a,e_0,a)>\theta \text{ iken } R_2(f(a),f(e_0),f(a))>\theta$$

dır. e_0', M_2' nin sıfırı olduğundan $f(a)\in M_2$ için $R_2(f(a),e_0',f(a))>\theta$' dır. Bu durumda,.

$$\begin{aligned}\left(f(a)^{-1}\circ(f(a)\circ f(e_0))\right)(e_0') &\geq R_2(f(a),f(e_0),f(a))\\ &\wedge R_2\left(f(a)^{-1},f(a),e_0'\right)>\theta\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\left(f(a)^{-1}\circ f(a)\right)\circ f(e_0)\right)(f(e_0)) &\geq R_2\left(f(a)^{-1},f(a),e_0'\right)\\ &\wedge R_2(e_0',f(e_0),f(e_0))>\theta\end{aligned}$$

olduğundan $f(e_0)=e_0'$ olur.

(ii) f bir fuzzy Γ-halka homomorfizmi olduğundan her $a\in M_1$ için,

$$R_1\left(a,a^{-1},e_0\right)>\theta \text{ iken } R_2\left(f(a),f\left(a^{-1}\right),f(e_0)\right)>\theta$$

dır. Buradan $R_2\left(f\left(a\right), f\left(a^{-1}\right), e_0'\right) > \theta$ olur. Böylece $f\left(a^{-1}\right) = f\left(a\right)^{-1}$ dir.

(iii) f bir fuzzy Γ-halka homomorfizmi olduğundan $e_0 \in M_1$ için $f\left(e_0\right) = e_0' \in \operatorname{Im} f$' dir. Böylece $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$' dir.

$b_1, b_2 \in \operatorname{Im} f$ için $b_1 = f\left(a_1\right)$ ve $b_2 = f\left(a_2\right)$ olacak biçimde $a_1, a_2 \in M_1$ vardır. M_1 fuzzy Γ-halkası olduğundan $R_1\left(a_1, a_2, a\right) > \theta$ olacak biçimde $a \in M_1$ vardır. Bu durumda, $R_2\left(f\left(a_1\right), f\left(a_2\right), f\left(a\right)\right) > \theta$ ve $f\left(a\right) \in \operatorname{Im} f$' dir. Benzer şekilde $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $S_1\left(a_1, \gamma, a_2, \beta, a'\right) > \theta$ olacak biçimde $a' \in M_1$ vardır. Bu durumda, $S_2\left(f\left(a_1\right), \gamma, f\left(a_2\right), \beta, f\left(a'\right)\right) > \theta$ ve $f\left(a'\right) \in \operatorname{Im} f$' dir.

$b \in \operatorname{Im} f$ için $b = f\left(a\right)$ olacak biçimde $a \in M_1$ vardır. $a^{-1} \in M_1$ olduğundan $b^{-1} = f\left(a\right)^{-1} = f\left(a^{-1}\right) \in \operatorname{Im} f$' dir.

Teorem 3.20. $\left(M_1, \Gamma, R_1, S_1\right)$ ve $\left(M_2, \Gamma, R_2, S_2\right)$ iki fuzzy Γ-halkası ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ fuzzy Γ-homomorfizmi olsun. Buna göre;

(i) $K\operatorname{erf} = \{a \in M_1 |\, f\left(a\right) = e_0'\}$, M_1' in fuzzy idealidir,

(ii) B, M_2' nin fuzzy ideali ise $f^{-1}\left(B\right)$, M_1' in fuzzy idealidir,

(iii) f örten ve A, M_1' in fuzzy ideali ise $f\left(A\right)$, M_2' nin fuzzy idealidir.

İspat. **(i)** $e_0 \in M_1$ için $f\left(e_0\right) = e_0'$ olduğundan $e_0 \in K\operatorname{erf}$' tir. Yani $K\operatorname{erf} \neq \emptyset$' dir.

$a, b \in K\operatorname{erf}$ için $R_1\left(a, b, m_1\right) > \theta$, $m_1 \in M_1$ olsun. f fuzzy Γ-homomorfizmi olduğundan $R_2\left(f\left(a\right), f\left(b\right), f\left(m_1\right)\right) = R_2\left(e_0', e_0', f\left(m_1\right)\right) > \theta$' dır. Böylece $f\left(m_1\right) = e_0'$ olduğundan $m_1 \in K\operatorname{erf}$' tir.

$a \in K\operatorname{erf}$ için $R_1\left(a, a^{-1}, e_0\right) > \theta$ olduğundan $R_2\left(f\left(a\right), f\left(a^{-1}\right), f\left(e_0\right)\right) = R_2\left(e_0', f\left(a^{-1}\right), e_0'\right) > \theta$ olur.Böylece $f\left(a^{-1}\right) = e_0'$ olduğundan $a^{-1} \in K\operatorname{erf}$' tir.

$a \in K\operatorname{erf}$, $m_1, w \in M_1$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $S_1\left(a, \gamma, m_1, \beta, w\right) > \theta$ olsun. $a \in K\operatorname{erf}$ olduğundan $S_2\left(f\left(a\right), \gamma, f\left(m_1\right), \beta, f\left(w\right)\right) = S_2\left(e_0', \gamma, f\left(m_1\right), \beta, f\left(w\right)\right) > \theta$' dır. Bu durumda $\left(e_0' * \gamma * f\left(m_1\right)\right)\left(f\left(w\right)\right) > \theta$ ve $\left(e_0' * \gamma * f\left(m_1\right)\right)\left(e_0'\right) > \theta$ olduğundan $f\left(w\right) = e_0'$ dür. Benzer şekilde $u \in M_1$ için $S_1\left(m_1, \gamma, a, \beta, u\right) > \theta$ ise $S_2\left(f\left(m_1\right), \gamma, f\left(a\right), \beta, f\left(u\right)\right) > \theta$. $f\left(a\right) = e_0'$ olduğundan
$S_2\left(f\left(m_1\right), \gamma, f\left(a\right), \beta, f\left(u\right)\right) = \left(f\left(m_1\right) * \gamma * e_0'\right)\left(f\left(u\right)\right) > \theta$ olur. Bu durumda,

$(f(m_1) * \gamma * e_0')(e_0') > \theta$ olduğundan $f(u) = e_0'$ dür. $w, u \in K\text{erf}$ olur. Yani $K\text{erf}$, M_1' in bir fuzzy idealidir.

(ii) B, M_2' nin fuzzy ideali olsun. $e_0' \in B$ ve $f(e_0) = e_0'$ olduğundan $e_0 \in f^{-1}(B)$' dir. Yani $f^{-1}(B) \neq \emptyset$' dir.

$a, b \in f^{-1}(B)$ için $R_1(a, b, m_1) > \theta$, $m_1 \in M_1$ olsun. f fuzzy Γ-homomorfizmi olduğundan $R_2(f(a), f(b), f(m_1)) > \theta$' dır. $f(a), f(b) \in B$ ve B, M_2' nin fuzzy ideali olduğundan $m_1 \in f^{-1}(B)$' dir. $f(a)^{-1} = f(a^{-1}) \in B$ olduğundan $a^{-1} \in f^{-1}(B)$' dir.

$a \in f^{-1}(B)$, $m, w \in M_1$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $S_1(a, \gamma, m, \beta, w) > \theta$ olsun. $S_2(f(a), \gamma, f(m), \beta, f(w)) > \theta$ olur. $f(a) \in B$, $f(m) \in M_2$ ve B, M_2' nin fuzzy ideali olduğundan $f(w) \in B$' dir. Yani $w \in f^{-1}(B)$ olur. Benzer şekilde $m, u \in M_1$ ve $\gamma, \alpha \in \Gamma$ için $S_1(m, \gamma, a, \alpha, u) > \theta$ olsun. $S_2(f(m), \gamma, f(a), \alpha, f(u)) > \theta$ olur. $f(a) \in B$, $f(m) \in M_2$ ve B, M_2 nin fuzzy ideali olduğundan $f(u) \in B$' dir. Yani $u \in f^{-1}(B)$ olur. Böylece $f^{-1}(B)$, M_1' in fuzzy idealidir.

(iii) A, M_1' in fuzzy ideali olsun. $e_0 \in A$ olduğundan $f(e_0) = e_0' \in f(A)$ dır. Yani $f(A) \neq \emptyset$' dir.

$b_1, b_2 \in f(A)$ için $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ ve $a_1, a_2 \in A$ olsun. A, M_1 in fuzzy ideali olduğundan $R_1(a_1, a_2, a) > \theta$ olacak biçimde $a \in A$ vardır. f fuzzy Γ-homomorfizmi olduğundan $R_2(f(a_1), f(a_2), f(a)) > \theta$' dır ve $f(a) \in f(A)$' dır.

$b \in f(A)$ için $R_2(b, b^{-1}, e_0') > \theta$' dır. $b = f(a)$, $a \in A$ olsun. $R_1(a, a^{-1}, e_0) > \theta$ iken $R_2(f(a), f(a^{-1}), f(e_0)) = R_2(f(a), f(a^{-1}), e_0') > \theta$ olur. Böylece $b^{-1} = f(a^{-1}) \in f(A)$' dır.

$b \in f(A)$, $m_2, w \in M_2$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $S_2(b, \gamma, m_2, \beta, w) > \theta$ olsun. $b = f(a)$ ve f örten olduğundan $f(m_1) = m_2$ olacak biçimde $a \in A$ ve $m_1 \in M_1$ vardır. A, M_1' in fuzzy ideali olduğundan $S_1(a, \gamma, m_1, \beta, m_1') > \theta$ olacak biçimde $m_1' \in A$ vardır. $S_2(f(a), \gamma, f(m_1), \beta, f(m_1')) > \theta$ olduğundan $w = f(m_1') \in f(A)$' dır. Benzer şekilde $u \in M_2$ için $S_2(m_2, \gamma, b, \beta, u) > \theta$

olsun. $S_1(m_1,\gamma,a,\beta,u)>\theta$ olsun. $S_1(m_1,\gamma,a,\beta,m_1'')>\theta$ olacak biçimde $m_1''\in A$ vardır. $S_2(f(m_1),\gamma,f(a),\beta,f(m_1''))>\theta$ olduğundan $u=f(m_1'')\in f(A)$' dır. Böylece $f(A)$, M_2' nin fuzzy idealidir.

Teorem 3.21. (M,Γ,R,S) fuzzy Γ-halkası ve I, M' nin fuzzy ideali olsun. Buna göre; $\Pi:M\to M/I$, $\Pi(a)=[a\circ I]$ dönüşümü bir fuzzy Γ-homomorfizmidir. Π' ye *fuzzy kanonikal (doğal)* Γ*-homomorfizm* denir.

İspat. $a,b,c\in M$ için $R(a,b,c)>\theta$ olsun.

$$\begin{aligned}\overline{R}(\Pi(a),\Pi(b),\Pi(c))&=\overline{R}([a\circ I],[b\circ I],[c\circ I])=([a\circ I]\oplus[b\circ I])(c\circ I)\\&=\bigvee_{(a',b',c')\in\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}}R(a',b',c')\geq R(a',b',c')>\theta\end{aligned}$$

dır. $a,b,c\in M$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için $S(a,\gamma,b,\beta,c)>\theta$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overline{S}(\Pi(a),\gamma,\Pi(b),\beta,\Pi(c))&=\overline{S}([a\circ I],\gamma,[b\circ I],\beta,[c\circ I])\\&=([a\circ I]\otimes\gamma\otimes[b\circ I])(c\circ I)\\&=\bigvee_{(a',\gamma,b',\beta,c')\in\overline{a}\times\gamma\times\overline{b}\times\beta\times\overline{c}}S(a',\gamma,b',\beta,c')\\&\geq S(a',\gamma,b',\beta,c')>\theta\end{aligned}$$

dır.

$a,b\in M$ için $a=b$ olsun. $R(a,b^{-1},e_0)>\theta$ ve $e_0\in I$ olduğundan $[a\circ I]=[b\circ I]$' dır. Böylece Π bir fuzzy Γ-homomorfizmidir.

Teorem 3.22. $f:(M_1,\Gamma,R_1,S_1)\to(M_2,\Gamma,R_2,S_2)$ bir fuzzy Γ-epimorfizması olsun. $N=Ker f$ olmak üzere $M_1/N\cong M_2$' dir.

İspat. Her $a\in M_1$ için, $\varphi:M_1/N\to M_2$, $\varphi([a\circ N])=f(a)$ dönüşümü tanımlansın. Teorem 1.4.42' den φ iyi tanımlı, 1-1 fuzzy grup homomorfizmasıdır. Bu durumda, $\overline{S}_1([a\circ N],\alpha_1,[b\circ N],\beta,[c\circ N])>\theta$ iken $S_2(\varphi([a\circ N]),\alpha_1,\varphi([b\circ N]),\beta,\varphi([c\circ N]))>\theta$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda, $S_1(a_1,\alpha_1,b_1,\alpha_2,c_1)>\theta$, $R_1(a_1,h_1,a)>\theta$, $R_1(b_1,h_2,b)>$

θ ve $R_1(c_1, h_3, c) > \theta$ olacak biçimde $a_1, b_1, c_1 \in M_1$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$ ve $h_1, h_2, h_3 \in N$ vardır.

$u \in M_1$, $\beta \in \Gamma$ için $S_1(a, \alpha_1, b, \beta, u) > \theta$ olsun.

$R_1(a_1, h_1, a) > \theta$ olduğundan $R_1\left(a, h_1^{-1}, a_1\right) > \theta$' dır.

$z \in M_1$, $h_4 \in N$ ve $\gamma, \beta_1 \in \Gamma$ için $S_1(a_1, \alpha_1, b, \beta_1, z) > \theta$ ve $S_1(h_1, \alpha_1, b, \beta_1, h_4) > \theta$ olsun. $S_1\left(h_1^{-1}, \alpha_1, b, \beta_1, h_4^{-1}\right) > \theta$' dır. $y \in M_1$ için $R_1\left(u, h_4^{-1}, y\right) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\left(a \circ h_1^{-1}\right) * \alpha_1 * b\right)(z) \geq R_1\left(a, h_1^{-1}, a_1\right) \wedge S_1(a_1, \alpha_1, b, \beta_1, z) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}\left((a * \alpha_1 * b) \circ \left(h_1^{-1} * \alpha_1 * b\right)\right)(y) &\geq S_1(a, \alpha_1, b, \beta, u) \wedge S_1\left(h_1^{-1}, \alpha_1, b, \beta_1, h_4^{-1}\right) \\ &\wedge R_1\left(u, h_4^{-1}, y\right) > \theta\end{aligned}$$

oduğundan $y = z$' dir. Böylece $R_1\left(u, h_4^{-1}, z\right) > \theta$ olur.

$y_1 \in M_1$, $h_5 \in N$ ve $\beta_2 \in \Gamma$ için $S_1(a_1, \alpha_1, h_2, \beta_2, h_5) > \theta$ ve $R_1(h_5, c_1, y_1) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$(a_1 * \alpha_1 * (h_2 \circ b_1))(z) \geq R_1(h_2, b_1, b) \wedge S_1(a_1, \alpha_1, b, \beta_1, z) > \theta$$

ve

$$\begin{aligned}((a_1 * \alpha_1 * h_2) \circ (a_1 * \alpha_1 * b_1))(y_1) &\geq S_1(a_1, \alpha_1, h_2, \beta_2, h_5) \wedge S_1(a_1, \alpha_1, b_1, \alpha_2, c_1) \\ &\wedge R_1(h_5, c_1, y_1) > \theta\end{aligned}$$

olduğundan $y_1 = z$' dir. Böylece $R_1(h_5, c_1, z) > \theta$ olur.

$h_4, h_5 \in N$ olduğundan $R_1\left(h_4^{-1}, h_5^{-1}, h'\right) > \theta$ olacak biçimde $h' \in N$ vardır. $R_1(h_5, c_1, z) > \theta$ olduğundan $R_1\left(z, h_5^{-1}, c_1\right) > \theta$' dır. $t \in M_1$ için $R_1(u, h', t) > \theta$ olsun. Bu durumda,

$$\left(u \circ \left(h_4^{-1} \circ h_5^{-1}\right)\right)(t) \geq R_1\left(h_4^{-1}, h_5^{-1}, h'\right) \wedge R_1(u, h', t) > \theta$$

ve

$$\left(\left(u \circ h_4^{-1}\right) \circ h_5^{-1}\right)(c_1) \geq R_1\left(u, h_4^{-1}, z\right) \wedge R_1\left(z, h_5^{-1}, c_1\right) > \theta$$

olduğundan $t = c_1$' dir. Böylece $R_1(u, h', c_1) > \theta$ olur. Buradan $u \circ N \sim c_1 \circ N$ dir. Yani $[u \circ N] = [c \circ N]$ olur. O halde $f(u) = f(c)$' dir. $S_1(a, \alpha_1, b, \beta, u) > \theta$ olduğundan $S_2(f(a), \alpha_1, f(b), \beta, f(u)) > \theta$' dır. Yani $S_2(f(a), \alpha_1, f(b), \beta, f(c)) > \theta$ olur.

.

KAYNAKLAR

Aktaş, H. and Çağman, N., (2007) A type of fuzzy ring, Arch. Math. Logic, 46(3-4), 117-165.

Argaç, N. and Albaş, E., (2004) Generalized derivations of prime rings, Algebra Coll. 11(3) , 399-410.

Barnes, W. E., (1966) ,On the Γ-rings of Nobusawa, Pasific J. Math. 18 , 411-422.

Beidar, K. I., Martindale, W. S. and Mikhalev, A. V., (1995); Rings with generalized identities, Marcel Dekker, Monographs and text-books in pure and applied mathematics 195, New York.

Beidar, K. I. and Chebotar, M. A., (2001), On Lie derivations of Lie ideals of prime rings, Israel Math. 123, 131-148.

Bell, H. E. and Martindale, W. S., (1988); Semiderivations and commutativity in prime rings, Canad. Math. Bull. 31(4), 500-508.

Bell, H. E. and Daif, M. N., (1995), On derivations and commutativity in prime rings, Acta Math. Hungary 66(4), 337-343.

Bresar, M., (1990), A note on derivations, Math. J. Okayama Univ. 32, 83-88.

Bresar, M., (1991), On the distance of the compositions of two derivations to generalized derivations, Glasgow Math. J. 33, 89-93.

Bresar, M., (1993), Centralizing mappings and derivations in prime rings, J. Algebra 156(2) , 385-394.

Bresar, M., (1993), Commuting trace of bi-additive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 335 , 525-546.

Bresar, M., (1995), Functional identities of degree two, J. Algebra 172(3), 690-720.

Bresar, M., (1995), On generalized bi-derivations and related maps, J. Algebra 172(3), 764-786.

Daif, M. N. and Bell, H. E., (1992), Remarks on derivations on semi-prime rings, Internat. J. Math. and Math. Sci. 15(1), 205-206.

Demirci, M., (2001), Smooth groups, Fuzzy Sets and Systems, 117, 431-437.

Demirci, M., (2001), Smooth subgroups and smooth homomorphisms, Fuzzy Sets and Systems, 117, 439-446.

Hong, S. M., Jun, Y. B., (1995), A note on fuzzy ideals in gamma rings, Bull. Honam Math. Soc. 12, 39-48.

Hvala, B., (1998), Generalized derivation in rings, Comm. Algebra, 26(4), 1147-1166.

Jun, Y. B. and Lee, C. Y., (1992), Fuzzy Γ-rings, Pusan Kyongnam Math. J. 8, 163-170.

Jun, Y. B. and Lee, C. Y., (1993), Fuzzy prime ideals in Γ-rings, Pusan Kyongnam Math. J. (Presently, East Asian Math. J.) 9 (1),105-111.

Jun, Y. B., Uçkun, M. and Öztürk, M. A., (2007), Fuzzy quotient gamma rings, J. Fuzzy Math. 15(2), 363-374.

Kharchenko, V. K., (1991), Automorphisms and derivations of associative rings, Mathematics and Its Applications 69, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Kyuno, S., (1978), On prime gamma rings, Pasific J. Math., 75 (1), 185-190.

Liu, W., Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982), 133-139.

Maksa, Gy., (1980), A remark on symmetric bi-additive functions having non-negative diagonalization, Glasnik Mat., III. Ser. 15(2), 279-282.

Maksa, Gy., (1987), On the trace of symmetric bi-derivations, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 9, 1303-1307.

Martindale, W. S., (1969), Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, J. Algebra 12, 576-584.

Mayne, J., (1984), Centralizing mappings of prime rings, Canad. Math. Bull. 27, 122-126.

Morderson, J. M. and Malik, D. S., (1998), Fuzzy commutative algebra, World Scientitific, Singapore.

Mukherjee, T. K. and Sen, M. K., (1987), On fuzzy ideals of a ring I, Fuzzy Sets and Systems, 21 (1), 99-104.

Nobusawa, N., (1978), On generalization of the ring theory, Osaka J. Math. 1, 185-190.

Öztürk, M. A. and Sapancı, M., (1997), Orthogonal symmetric bi-derivation on semi-prime gamma rings, Hacettepe Bull. Nat. Sci. Eng. 26, 31-46.

Öztürk, M. A. and Sapancı, M., (1999), On generalized symmetric bi-derivations in prime rings, East Asian Math. J. 15(2), 165-176.

Öztürk, M. A., (1999), Permuting tri-derivations in prime and semi-prime rings, East Asian Math. J. 15, No. 2, pp. 177-190.

Öztürk, M. A., Jun, Y. B. and Kim, K. H., (2001), Orthogonal traces on semi-prime gamma rings, Sci. Math. Jpn. 53(3), 495-501.

Öztürk, M. A., Uçkun, M. and Jun, Y. B., (2002), Characterizations of artinian and noetherian gamma-rings in terms of fuzzy ideals, Turk J. Math. 26 (2), 199-205.

Öztürk, M. A., Uçkun, M. and Jun, Y. B., (2003), Fuzzy ideals in gamma rings, Turk J. Math. 27 (3), 369-374.

Passman, D., (1989), Infinite crossed products, Academic Press, San Diego.

Posner, E. C., (1957), Derivations in prime rings, Proc. Amer. Math. Soc. 8, 1093-1100.

Rosenfeld, A., (1971), Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl., 35, 512-517.

Sapancı, M., Öztürk, M. A. and Jun, Y. B., (1999), Symmetric bi-derivations on prime rings, East Asian Math. J. 15(1), 105-109.

Uçkun, M. and Öztürk, M. A., (2007), On trace of symmetric bi-gamma-derivations in gamma-near-rings, Houston J. Math. 33(2), 323-339.

Vukman, J., (1989), Symmetric bi-derivations on prime and semi-prime rings, Aequationes Math. 38, 245-254.

Vukman, J., (1990), Commuting and centralizing mappings in prime rings, Proc. Amer. Math. Soc. 109, 47-52.

Yazarlı, H., Öztürk, M. A. and Jun, Y. B., (2005), Tri-additive maps and permuting tri-derivations, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1 54(1), 1-8.

Yong-Chai, Y., (1985), Fuzzy ideal and fuzzy quotient rings, J. Fuzzy Math. 12, 19-26.

Yuan, X. and Lee, E. S., (2004), Fuzzy group based on fuzzy binary operation, Comput. Math. Appl. 47, 631-641.

Zadeh, L. A., (1965), Fuzzy sets, Inform Control 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad ve Soyadı: Hasret Yazarlı

Doğum Yeri ve Tarihi: SİVAS, 07.10.1980

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

İletişim Adresi: Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 58140 SİVAS,

E-posta Adresi: hyazarli@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise: Atatürk Lisesi, 1997

Lisans: Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2002

Yüksek Lisans: Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2005

İş Tecrübesi

Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi, 2003-