T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNKOWSKİ UZAYINDA ÖZEL NULL EĞRİLER

Gülay SARGIN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **08/07/2011**

Tez Danışmanı:

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Gülay SARGIN tarafından **YRD**. **DOÇ. DR. ÇETİN CAMCI** yönetiminde hazırlanan "**MİNKOWSKİ UZAYINDA ÖZEL NULL EĞRİLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

Danışman

Prof. Dr. İhsan YILMAZ

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Can AKTAŞ

Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 08/07/2011

Prof. Dr. İsmet KAYA

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Gülay SARGIN

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen değerli hocalarım Prof. Dr. İhsan YILMAZ, Yrd. Doç. Dr. Can AKTAŞ ve hayatımın her evresinde bana destek olan canım babam Halil SARGIN ve canım annem Aliye SARGIN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gülay SARGIN

ÖZET

MİNKOWSKİ UZAYINDA ÖZEL NULL EĞRİLER

Gülay SARGIN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

08/07/2011, 51

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın amacı 4-boyutlu Minkowski uzayında Lancret anlamında helisler tanımlayarak, bu tip helislerin karakterizasyonunu incelemektir. Birinci bölümde giriş kısmı verildi. İkinci bölümde tezin ana konusu için gerekli olan temel tanım ve kavramlara yer verildi. Üçüncü bölüm n-boyutlu Minkowski uzayında Frenet denklemlerine ayrılıp, kısaca helis tipleri tanıtıldı. Dördüncü bölüm, 3-boyutlu Minkowski uzayında Cartan (Kartan) çatılarına ayrılıp 3-boyutlu uzayda Hayden anlamında helis ile Lancret anlamında helislerin çakıştığı gösterildi. Beşinci bölümde tezin ana konusu olan 4-boyutlu Minkowski uzayında null Eğriler ve Cartan (Kartan) çatıları tanıtıldı, herhangi bir eğrinin Lancret anlamında helis olması için sağlaması gereken denklem verildi ve 4-boyutlu Minkowski uzayında Slant eğri kısaca tanıtıldı. Ayrıca bazı gerekli teoremler ispatlandı. Altıncı bölümde ise 4-boyutlu Minkowski uzayında pseudo küresel null eğriler tanıtıldı. Ayrıca herhangi bir null eğrinin Bertrand çiftinin null olmak zorunda olmadığı, timelike veya spacelike olabileceği gösterildi.

Anahtar sözcükler: Lancret anlamında helis, Null eğri, Cartan (Kartan) eğrisi, Cartan (Kartan) eğrilikleri, Cartan (Kartan) çatıları, Frenet denklemleri, Minkowski uzayı, Spacelike ve Timelike eğriler, Pseudo küresel null eğriler.

ABSTRACT

SPECIAL NULL CURVES IN MINKOWSKI SPACE

Gülay SARGIN

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of

Natural and Applied Science

Advisor: Assist. Prof. Dr.

Çetin CAMCI

08/07/2011, 51

The main topic of this study which consists of six chapters is to define the Lancret type helices and is to investigate the type of Lancret helices characterization. In the first chapter, the introduction has been given. The second chapter is devoted to basic definitions and concepts which are the main topic of the thesis. In the third chapter is devoted to Frenet frames in n-dimensional Minkowski space and helices types has been shortly introduced. In the fourth chapter, is assigned the Cartan Frames in 3-dimensional Minkowski space and it has been shown that the type of Hayden helices and the type of Lancret helices are the same in 3-dimensional Minkowski space. In the fifth chapter, it is introduced that null curves in 4-dimensional Minkowski space Cartan Frames, the equation of the type of Lancret helices for any curves were given and the Slant curves has been shortly introduced in 4-dimensional Minkowski space. In the sixth chapter, pseudo spherical null curves were introduced in 4-dimensional Minkowski space. Furthermore, it has been shown that for any null curve's Bertrand mate does not have to null curve, it may have been spacelike or timelike.

Keywords: The type of Lancret helices, Null Curves, Cartan (Kartan) Curves, Cartan (Kartan) Curvatures, Cartan (Kartan) Frames, Frenet Frames, Minkowski Space, Spacelike and Timelike Curves, Pseudo Spherical Null Curves.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bonnor (1969), bir Minkowski uzayında null eğrilerin geometrisini tanımlamış ve bu konu hakkındaki uygun teoremleri ispatlayarak Cartan çatılarını oluşturmuştur. Ayrıca Cartan çatılarının bir null eğriyi nasıl etkilediği hakkında çalışmalar yapmıştır. Bejancu (1994) ise, Lorentz monifoldlarda özellikle Semi-Riemannian monifoldlarda null eğrilerin geometri çalışmaları için bir method geliştirmiştir. A.Ferrandez, A.Gimenez ve P.Lucas (2001) da Cartan çatılarını Lorentzian uzay formlarına genelleştirerek temel terimleri açıklamış, teklik teoremini ispatlamış ve daha yüksek boyutta Cartan eğriliklerinin değerlerini elde etmişlerdir. Ayrıca A.Ferrandez, A.Gimenez ve P.Lucas (2002), indeksi iki olan bir pseudo- Öklidyen uzayda bütün türevleri lineer bağımsız olan null eğrilerin 3-aile tipinin var olduğunu göstererek indeksi q olan bir Semi-Öklidyen uzayda null eğrilerin $2^q - 1$ tane farklı aile tipinin var olduğunu ispatlamışlardır. Çöken ve Cifti (2005) de, Cartan çatılarının parametreden bağımsız olduğunu göstermişlerdir.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın, ikinci bölümünde Semi-Öklidyen uzaylar genel olarak tanıtılarak, Semi-Öklidyen uzay ve Riemann uzay arasındaki fark belirtilmiştir. Üçüncü bölümde ise n-boyutlu Minkowski uzayında Frenet denklemleri verilerek Cartan çatıları ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Ayrıca n-boyutlu Minkowski uzayında helis tipleri kısaca tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, n-boyutlu Minkowski uzayının özel bir hali olan 3-boyutlu Minkowski uzayında Cartan çatılarına ayrılmış olup 3-boyutlu Minkowski uzayında Hayden anlamında helisler ile Lancret anlamında helislerin çakıştığı vurgulanmıştır. Beşinci bölümde tezin ana konusu olan 4-boyutlu Minkowski uzayında Cartan çatıları tanımlanmış ve bir eğrinin Lancret anlamında helis olması için sağlaması gereken şart ortaya konup bu şartın doğruluğu örneklerle açıklanmıştır. Dahası bir eğrinin hem 1. Tip hem de 2. Tip bir helis olması için gerek ve yeter şartlar ispatlanmıştır. Ayrıca 4-boyutlu Minkowski uzayında slant eğri kavramına kısaca değinilmiş ve bir eğrinin W_1-slant eğri olması için sağlaması gereken denklem ispatlanıp, W_2- slant bir eğrinin 3-boyutlu Minkowski uzayında yatması için gerek ve yeter şartın eğrinin ikinci eğriliğinin sıfır olması gerektiği ispatlanmıştır. Son olarak altıncı bölümde kısaca 4-boyutlu Minkowski uzayında pseudo küresel null eğriler tanıtılmıştır. Ayrıca bir null eğrinin Bertrand çiftinin mutlaka null olmak zorunda olmadığı spacelike veya timelike olabileceği ile ilgili problemlere yer verilerek ispatları yapılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1: V, bir $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir "**iç çarpım**" adını alır;

i) g simetriktir, yani;

$\forall x, y \in V$ için

$$g(x, y) = g(y, x) \ ,$$

ii) g iki lineerdir, yani;

$\forall x, y, z \in V \ ve \ \forall \lambda, \beta \in K$ için

$$g(\lambda x + \beta y, z) = \lambda g(x, z) + \beta g(x, z)$$

ve

$$g(x, \lambda y + \beta z) = \lambda g(x, y) + \beta g(x, z),$$

iii) g pozitif tanımlıdır, yani;

$\forall x \in V (x \neq 0)$için

$$g(x, x) \geq 0 \quad \text{ve} \quad g(x, x) = 0 \iff x = 0.$$

Bir vektör uzayı üzerinde simetrik, iki lineer, pozitif tanımlı bir iç çarpım tanımlanabiliyorsa bu uzaya "**Riemann uzayı**" denir.

Tanım 2.2: V, m-boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü simetrik, iki lineer bir dönüşüm olsun. Eğer ,

$$\forall v \in V \text{ için} \qquad g(\xi, v) = 0$$

olacak şekilde V'nin sıfırdan farklı en az bir ξ elemanı varsa g'ye V üzerinde ''**dejenere**''dir denir. Aksi taktirde g dönüşümüne V üzerinde "**non-dejenere**" dir denir (Duggal ve Bejancu, 1996). Yani;

$$\forall v \in V \text{ için} \qquad g(u,v) = 0 \quad \text{iken } u = 0$$

oluyorsa g dönüşümüne V üzerinde "**non-dejenere**" dir denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Örnek 2.1: Tüm Riemannian uzayları non-dejeneredir. Gerçekten; g bir Riemannian uzayında tanımlı bir iç çarpım olsun. O halde g simetrik, iki lineer ve pozitif tanımlıdır.

$\forall v \in V$ için $g(u,v) = 0$ olsun. Eğer $u = v$ seçersek,

$$g(u,u) = 0$$

olur. İç çarpımın tanımı gereğince $u = 0$ elde edilir. O halde, g non-dejeneredir.

Örnek 2.2: $V = \mathbb{R}^2$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g &: V \times V \to \mathbb{R} \\ &(x,y) \to g(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{aligned}$$

g'nin, V üzerinde non-dejenere olduğunu gösterelim.

$\forall y \in V$ için $g(x,y) = 0$ olsun. İlk olarak $y = (1,0)$ seçersek;

$$g(x,y) = x_1$$

olur. Yani;

$$x_1 = 0$$

dır. İkinci olarak da $y = (0,1)$ seçersek;

$$g(x,y) = -x_2$$

olur. Buradan ise

$$x_2 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$x = (x_1, x_2) = (0,0) = 0$$

olup g, V üzerinde non-dejeneredir.

Uyarı: V üzerindeki bir non-dejenere, simetrik ve iki lineer g formu, V'nin bir alt uzayı üzerinde ya non-dejenere ya da dejeneredir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Örnek 2.3: $V = \mathbb{R}^2$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V$ olmak üzere

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to g(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

olsun.

i) $W = \{x = (a, a) \big| a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$, V'nin bir alt uzayıdır. $\bar{g} = g|_W$ olmak üzere $\bar{g}$' nin dejenere olduğunu gösterelim.

$\forall x, y \in W$ için $x = (a, a), y = (b, b)$ şeklindedir.

$$\bar{g}(x, y) = ab - ab = 0$$

elde edilir. $\forall x, y \in W$ için $\bar{g}(x, y) = 0$ iken $x \neq 0,\ y \neq 0$ olduğundan $\bar{g}$ dönüşümü dejeneredir.

ii) $U = \{x = (x_1, x_2) |\ x_2 = 3x_1\}$, V'nin bir alt uzayıdır. $\tilde{g} = g|_U$ olmak üzere $\tilde{g}$' nin non-dejenere olduğunu gösterelim.

$\forall x, y \in U$ için $x = (x_1, 3x_1)$ ve $y = (y_1, 3y_1)$ olmak üzere

$$\tilde{g}(x, y) = 0$$

Bu durumda;

$$\tilde{g}(x, y) = x_1 y_1 - 9x_1 y_1 = 0\ ,\ -8x_1 y_1 = 0$$

olur. Buradan $y = (1,3)$ seçersek;

$$x_1 = 0$$

olarak bulunur. Yani; $x = (x_1, 3x_1)$ olduğundan

$$x = (0,0)$$

demektir. Dolayısıyla, $\tilde{g}$ non-dejeneredir.

Tanım 2.3: g simetrik, iki lineer formuna bağlı olarak V'nin "**radikali**" (Artin, 1975) veya "**null uzayı**" (O'Neill, 1983) aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$Rad\ V = \{\xi \in V | g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}.$$

$Rad\ V$ 'nin boyutuna g'nin "**nullity derecesi**" denir ve

$$null\ V = \dim Rad\ V$$

ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Uyarı: g, V üzerinde dejenere veya non-dejeneredir $\Leftrightarrow$ sırasıyla $null\ V > 0$ veya $null\ V = 0$ (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.4: $\forall\ v \in V$ için $g(v, v) > 0$ (veya $g(v, v) < 0$) ise g'ye "**pozitif (veya negatif)**" tanımlı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Uyarı: g pozitif (veya negatif) tanımlı ise non-dejeneredir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.5: $\forall\ v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ (veya $g(v, v) \leq 0$) iken $g(u, u) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $u \in V$ varsa g'ye V üzerinde "**pozitif (veya negatif) yarı tanımlı**" denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Örnek 2.4: $V = \mathbb{R}^2$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $g(x, y) = x_1 y_1$ olsun. g pozitif yarı tanımlıdır.

Gerçekten; pozitif yarı tanımlılığın tanımı gereğince $g(x, x) = {x_1}^2 \geq 0$ dir. Şimdi sıfırdan farklı bir $x \in V$ alalım ve $x = (0,1) \neq 0$ olsun. Bu durumda $g(x, x) = 0$ olur. Yani; g pozitif yarı tanımlıdır.

W, V uzayının bir alt uzayı olsun.

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik, iki lineer form ise

$$g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to g|_W(x, y) = g(x, y)$$

kısıtlanış dönüşümüde simetrik, ikilineer formdur (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.6: $g|_W$ negatif tanımlı olmak üzere V'nin en geniş W alt uzayının boyutuna V üzerinde g'nin "**indeksi**" denir ve

$$ind\ V = q$$

ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996) .

Örnek 2.5: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$'de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$g(x,y) = -x_1y_1 - x_2y_2 - \cdots - x_qy_q + x_{q+1}y_{q+1} + \cdots + x_n$$
$$= -\sum_{i=1}^{q} x_iy_i + \sum_{j=q+1}^{n} x_jy_j$$

olsun.

$$W = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_q, 0, \dots, 0)\middle| x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,2,\dots,q\}\right\} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

olsun. Bu durumda $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_q}, 0,0, \dots, 0)$, $\bar{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \dots, \overline{y_q}, 0,0, \dots, 0)$ olmak üzere

$$\bar{g} = g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \to \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}).$$
$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{x}) = -\overline{x_1}^2 - \overline{x_2}^2 - \cdots - \overline{x_q}^2 < 0$$

olup $\bar{g}$ negatif tanımlıdır. V nin negatif tanımlı en geniş alt uzayı W dır. O halde

$$ind\ \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = q \text{ dur.}$$
$$(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, g) = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{q}}$$

ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

g'nin "**bağlantılı quadratik formu**" $\forall v \in V$ için,

$$h: V \to \mathbb{R}$$
$$v \to h(v) = g(v,v)$$

dönüşümüdür. $\forall v, w \in V$ için,

$$g(v,w) = \frac{1}{2}[h(v+w) - h(v) - h(w)]$$

dır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Uyarı: Dikkat edersek metrik belliyken, bağlantılı quadratik form bellidir. Aynı şekilde bağlantılı quadratik form belliyken metrik bellidir.

Lineer cebirin bir sonucu olarak; V'nin bir $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ tabanı vardır öyleki; $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ve (v^i), V' nin E tabanına bağlı bileşenleri olmak üzere bağlantılı quadratik form,

$$h(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v^i)^2 \tag{2.1}$$

kanonik formuna sahiptir (Duggal ve Bejancu, 1996).

p, q, r sırasıyla, λ_i özdeğerlerinin pozitif olanları, negatif olanları ve sıfır olanları olmak üzere $p + q + r = m$ olsun. Bu durumda h'ye "$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ **tipindedir**" denir. Burada q ve r sırasıyla, g'nin V üzerindeki indeksi ve nullity derecesidir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 2.1: h, V üzerinde g'nin bağlantılı quadratik formu olsun. O halde;

i) g, dejeneredir (non-dejeneredir) ⇔ $r > 0$ $(r = 0)$ 'dır.

ii) g, pozitif (negatif) tanımlıdır ⇔ $p = m$ $(q = m)$'dir.

iii) g, pozitif (negatif) yarı tanımlıdır ⇔ $q = 0,\ p > 0,\ r > 0$ $(p = 0,\ q > 0,\ r > 0)$ dır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Örnek 2.6 : $\mathbb{R}^2$'de $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$ olmak üzere;

i) $g: V \times V \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to g(x, y) = x_1 y_1$

ile verilsin. Bu durumda,

$$h(x) = g(x, x) = {x_1}^2 + 0.{x_2}^2$$

olduğundan $p = 1,\ r = 1, q = 0$ dır. O halde g, pozitif yarı tanımlıdır.

ii) $g: V \times V \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to g(x, y) = -x_1 y_1$

ile verilsin. Bu durumda,

$$h(x) = g(x,x) = -{x_1}^2 + 0.{x_2}^2$$

olduğundan $p = 0,\ r = 1,\ q = 1$ dır. O halde g, negatif yarı tanımlıdır.

Örnek 2.7: $\mathbb{R}^m$'de $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ olmak üzere

i) $g: V \times V \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to g(x,y) = \sum_{i=1}^{m} y_i\, x_i$$

İle verilsin. $h(x) = g(x,x) = \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2$ olduğundan $p = m$'dir. O halde g, pozitif tanımlıdır.

ii) $g: V \times V \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to g(x,y) = -\sum_{i=1}^{m} y_i\, x_i$$

ile verilsin. $h(x) = g(x,x) = -\sum_{i=1}^{m} {x_i}^2$ olduğundan $q = m$'dir. O halde g, negatif tanımlıdır.

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, V'nin keyfi bir tabanı olsun. Bu durumda g,

$$g_{ij} = g\big(u_i, u_j\big), \qquad 1 \le i,j \le m$$

olmak üzere

$$G = \big[g_{ij}\big]_{m \times m}$$

simetrik matrisine genişletilebilir. Bu $G = \big[g_{ij}\big]_{m\times m}$ matrisi tabana bağlı olarak g'nin "**bağlantılı matrisi**" olarak adlandırılır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Uyarı: Taban değiştikçe G matrisi değişir fakat, bu matrislerin rankı, determinantı ve izi değişmez (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 2.2: (Duggal ve Bejancu, 1996)

i) G matrisi, V üzerinde non-dejeneredir $\Leftrightarrow rank\ G = m$.

ii) G matrisi, V üzerinde dejeneredir $\Leftrightarrow rank\ G < m$.

Tanım 2.7: V üzerindeki non-dejenere, simetrik, iki lineer g formuna bir "**skaler çarpım**" veya "**semi-Öklidyen metrik**" denir. V uzayına da "**semi-Öklidyen uzay**" denir (Duggal ve Bejancu, 1996). $p.q \neq 0$ olduğu durumda V uzayına "**proper semi-Öklidyen uzay**" denir ve g formu da " **proper semi-Öklidyen metrik**" adını alır(Duggal ve Bejancu, 1996).

Dikkat edersek; semi-Öklidyen uzayın Riemann uzaydan farkı pozitif tanımlılık şartı yerine non-dejenerelik şartının gelmesidir.

Tanım 2.8: Eğer V semi-Öklidyen uzayının indeksi $q = 1$ ise V'ye "**Lorentz uzayı**"denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Eğer V, semi-Öklidyen uzayının indeksi $q > 0$ ise, V'ye "**Minkowski uzayı**" denir. Lorentz uzayı, Minkowski uzayının özel bir halidir.

Tanım 2.9: Vnüzerinde dejenere bir g formu varsa V'ye "**lightlike (dejenere)**" vektör uzayı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

V, g semi-Öklidyen metriği ile bir semi-Öklidyen uzay olsun.

$$\|.\|: V \to \mathbb{R}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $\forall v \in V$ için

$$\|v\| = |g(v,v)|^{\frac{1}{2}}$$

ifadesine v vektörünün "**uzunluğu**" denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.10: Bir v vektörüne;

i) $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise "**spacelike**",

ii) $g(v,v) < 0$ ise "**timelike**",

iii) $g(v,v) = 0$ veya $v \neq 0$ ise "**lightlike(null)**" vektör denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Λ ile gösterilen V'nin lightlike (null) konisi V'nin tüm lightlike vektörlerinin kümesidir (Duggal ve Bejancu, 1996). Null vektörlerin kümesi aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\Lambda = \{v \in (V - \{0\}) |\; g(v,v) = 0\}$$ (Duggal ve Bejancu, 1996).

Uzunluğu 1 birim olan vektöre "**birim vektör**" denir; yani, $g(u,u) = \mp 1$'dir (Duggal ve Bejancu, 1996). U ve W, V'nin iki alt kümesi olmak üzere $\forall\, u \in U$ ve $\forall w \in W$ için $g(u,w) = 0$ ise, $U\; ve\; W$ "**ortogonaldir**" denir ve $U \perp W$ ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

<u>Örnek 2.8:</u> Null vektör kendisiyle ortogonal olan sıfırdan farklı bir vektördür.

Kendisi hariç ortogonal olan birim vektörlerin bir E kümesini lineer bağımsız olan bir "**ortonormal küme**" olarak adlandıracağız (Duggal ve Bejancu, 1996). Yani; $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$ olmak üzere *i,j=1,2,…,m* için

$$g(e_i, e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Böylece *V'* nin ortonormal olan *m* vektörlerinin kümesine "**ortonormal taban**" denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

<u>Önerme 2.3:</u> Sıfırdan farklı bir *V*, semi Öklidyen uzayının bir ortonormal tabanı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

<u>Not:</u> $\mathbb{R}^m_q$ ile indeksi q olan m-boyutlu $\mathbb{R}^m$ proper semi Öklidyen uzay gösterilir. Özellikle

$\mathbb{R}_1^m$ bir Lorentz (Minkowski) uzayıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 2.4: (W, g), n-boyutlu bir lightlike vektör uzayı olsun. $Rad\, W$, (W, g) uzayının radikali ve $\dim Rad\, W = null\, W < n$ olsun. Bu durumda $Rad\, W$ için herhangi bir tümleyen (tamamlayan) alt uzay non-dejeneredir (Duggal ve Bejancu, 1996).

W uzayında $Rad\, W$'nin tümleyen alt uzay SW, W'nın "**screen alt uzayı**"olarak adlandırılır (Duggal ve Bejancu, 1996). O halde SW, g metriğine bağlı olduğu için semi Öklidyen uzaydır (Duggal ve Bejancu, 1996). Sıfırdan farklı herhangi bir semi Öklidyen uzayın bir ortonormal tabanı var olduğundan SW'nin $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ şeklinde bir ortonormal tabanı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996). Böylece W'nın (1.2)'ye uygulanan bir tabanı $i \in \{1,2, \dots, r\}$ için $f_i \in Rad\, W$ olmak üzere;

$$B = \{f_1, f_2, \dots, f_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$$

ile verilir (Duggal ve Bejancu, 1996). Tabanı bu şekilde almamızın nedeni $Rad\, W$'nin herhangi bir vektörünün W için ortogonal olmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996). B tabanınına bağlı g'nin matrisi aşağıdaki gibi elde edilir (Duggal ve Bejancu, 1996);

$$[g] = \begin{bmatrix} g(f_1, f_1) & g(f_1, f_2) & \cdots & g(f_1, f_r) & g(f_1, u_{r+1}) & \cdots & g(f_1, u_n) \\ g(f_2, f_1) & g(f_2, f_2) & \cdots & g(f_2, f_r) & g(f_2, u_{r+1}) & \cdots & g(f_2, u_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g(f_r, f_1) & g(f_r, f_2) & \cdots & g(f_r, f_r) & g(f_r, u_{r+1}) & \cdots & g(f_r, u_n) \\ g(u_{r+1}, f_1) & g(u_{r+1}, f_2) & \cdots & g(u_{r+1}, f_r) & g(u_{r+1}, u_{r+1}) & \cdots & g(u_{r+1}, u_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g(u_n, f_1) & g(u_n, f_2) & & g(u_n, f_r) & g(u_n, u_{r+1}) & & g(u_n, u_n) \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

$f_i \in Rad\, W$, $u_i \in SW$ ve $Rad\, W \perp SW$ olduğundan

$$[g]=\begin{bmatrix} 00\ldots0 & 0 & \ldots & 0 \\ 00\ldots0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots\vdots\cdots\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 00\cdots0 & 0 & \cdots & 0 \\ 00\ddots0 & g(u_{r+1},u_{r+1}) & \ddots & g(u_{r+1},u_n) \\ \vdots\vdots\ddots\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 00\cdots0 & g(u_n,u_{r+1}) & & g(u_n,u_n) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olur (Duggal ve Bejancu, 1996)**.** Buradan ise; $a,b\in\{r+1,\ldots,n\}$,

$$\mathcal{E}_a=g(u_a,u_a) \text{ ve } \delta_{ab}=\begin{cases}1, & a=b\\ 0, & a\neq b\end{cases} \text{ olmak üzere}$$

$$[g]=\begin{bmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \mathcal{E}_a\delta_{ab}\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

(V,g), m-boyutlu semi Öklidyen uzay ve W, V'nin bir alt uzayı olsun. $g|_W$ dejenere olduğu durumda W bir lightlike alt uzay olarak adladırılır (Duggal ve Bejancu, 1996). Aksi halde W bir non-dejenere alt uzay olarak adlandırılır (Duggal ve Bejancu, 1996). V'nin

$$W^{\perp}=\{v\in V|g(v,w)=0,\forall w\in W\}$$

alt uzayını düşünelim. Bu alt uzaya "***W*****'nın diki**" denir (O'Neill, 1983).

Uyarı: ***i)*** $Rad\,W=\{\xi\in W|\ g(\xi,w)=0,\forall w\in W\}$, W'nın bir alt uzayıdır. Ancak $W^{\perp}$ her zaman W'nın alt uzayı olmak zorunda değildir (Duggal ve Bejancu, 1996).

ii) Dikkat edilmesi gereken önemli bir durum da, genellikle $W^{\perp}\cap W\neq\{0\}$'dır. Sadece metriğin pozitif tanımlı olduğu durumu düşünürsek $W^{\perp}\cap W=\{0\}$ olur (Duggal ve Bejancu, 1996).

Örnek 2.9: $V=\mathbb{R}^4$ ve (V,g), 4-boyutlu semi Öklidyen uzayı olmak üzere

$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3,x_4), y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in V$ için

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to g(x,y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4\ y_1$$

ile tanımlansın. V'nin

$$W = \{((x,y,x,y) \in \mathbb{R}_1^4 | x,y \in \mathbb{R}\}$$

alt uzayını düşünelim.

$\forall\ y = (y_1, y_2, y_1, y_2) \in W$ için $x = (1,0,1,0) \in W$ seçersek;

$$g|_W(x,y) = -y_1 + 0 + y_1 + 0 = 0$$

olduğundan $g|_W$ dejeneredir.

$$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}_1^4 |\ g(x,y) = 0, \forall y \in W\}$$

şeklindedir. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_1^4, y = (y_1, y_2, y_1, y_2) \in W$ için

$$g(x,y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_4y_2$$
$$= y_1(-x_1 + x_3) + y_2(x_2 + x_4) = 0$$

elde edilir.

Eğer $y = (0,1,0,1)$ alırsak;

$$x_2 + x_4 = 0$$

olur. Buradan $x_2 = -x_4$ elde edilir.

Eğer $y = (1,0,1,0)$ alırsak;

$$-x_1 + x_3 = 0$$

olur. Buradan da $x_1 = x_3$ elde edilir. Yani;

$$x = (x_1, x_2, x_1, -x_2)$$

olur. Böylece $W^\perp$ kümesi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$W^{\perp} = \{(x, y, x, -y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

O halde

$$W^{\perp} \cap W = \{(x, 0, x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$$

olarak elde edilir. Yani; $W^{\perp} \cap W \neq \{0\}$ olarak bulunmuş olur. (Duggal ve Bejancu, 1996).

W'nın aşağıdaki özellikler ise genellikle semi Öklidyen uzaylar için korunur.

Önerme 2.5: (V, g), m-boyutlu semi Öklidyen uzay ve W, V'nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda;

i) $dim\, W + dim\, W^{\perp} = m$

ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

iii) $Rad\ W = Rad\ W^{\perp} = W^{\perp} \cap W$ (Duggal ve Bejancu, 1996).

Sonuç 2.1: V bir semi Öklidyen uzay ve W, V'nin bir alt uzayı olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir;

i) W, non-dejenere alt uzay

ii) $W^{\perp}$, non-dejenere alt uzay

iii) W ve $W^{\perp}$, V uzayının ortogonal tümleyen alt uzaylarıdır.

iv) V, W ve $W^{\perp}$'nin ortogonal toplamıdır; yani, $V = W \perp W^{\perp}$ (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 2.6: g, indeksi q olan bir m-boyutlu V vektör uzayı üzerinde bir proper semi Öklidyen metrik olsun. Bu durumda, boyutu $min\{q, m - q\}$ olan ve genişletilemeyen V' nin bir $\overline{W}$ alt uzayı vardır, öyleki $g|_{\overline{W}} = 0$'dır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Örnek 2.10: $\mathbb{R}^4_2$' te $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ olmak üzere

$$g(x, y) = -x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4\ y_1$$

şeklinde tanımlansın. Burada $q = 2, m = 4$' tür. O halde $\mathbb{R}^4_2$' nin genişletilemeyen $\overline{W}$ alt uzayının boyutu $min\{q, m - q\} = min\{2,2\} = 2$ 'dir. Ayrıca $g(x, x) = 0$'dır. Buradan da $g|_{\overline{W}} = 0$’dır.

(V, g), m-boyutlu proper semi Öklidyen uzay olsun. Böylece bağlantılı kuadratik form $(p, q, 0)$, $p + q = m$ ve $p.q \neq 0$ tipindedir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ ve $\{e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_{q+p}\}$ sırasıyla, birim timelike ve birim spacelike vektörler olmak üzere, $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ V’nin ortonormal tabanı olsun. Bazı lightlike vektörleri içeren bir taban oluşturmak için aşağıdaki üç durum geçerlidir (Duggal ve Bejancu, 1996):

- **Durum 1:** $(\boldsymbol{q} < p)$ $i \in \{1,2, \dots, q\}$ için

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\},\ f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \text{ ve } i, j \in \{1,2, \dots, q\}$$

olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır;

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, g(f_i, f_i^*) = \delta_{ij}.$$

Bu durumda,

$$\{f_1, f_2, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{2q+1}, \dots, e_{q+p}\}$$

V’nin $2q$ tane lightlike ve $p - q$ tane spacelike vektörü içeren bir tabanıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Örneğin; $\mathbb{R}_1^3$’ün $(q < p)$ olacak şekilde herhangi bir tabanını oluşturalım. $p = 2$, $q = 1$ olarak seçersek $m = p + q$ olur ve bu taban $2q = 2$ tane lightlike, $p - q = 1$ tane spacelike vektörü içerir.

- **Durum 2:** $(p < q)$ $a \in \{1,2, \dots, p\}$ için

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} + e_a\},\ f_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} - e_a\} \text{ ve } a, b \in \{1,2, \dots, p\}$$

olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır,

$$(f_a, f_b) = g(f_a^*, f_b^*) = 0, g(f_a, f_a^*) = \delta_{ab}.$$

Bu durumda,

$$\{f_1, f_2, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{p+1}, \dots, e_q\}$$

V'nin $2p$ tane lightlike ve $q-p$ tane timelike vektörü içeren bir tabanıdır (Duggal ve Bejancu, 1996):

- **Durum 3:** $(\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q})$ $a \in \{1,2,\dots,p\}$ için

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a}+e_a\},\ f_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a}-e_a\} \text{ ve } a,b \in \{1,2,\dots,p\}$$

olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır;

$$(f_a, f_b) = g(f_a^*, f_b^*) = 0, g(f_a, f_a^*) = \delta_{ab}.$$

Bu durumda, $m = 2p = 2q$ olduğu için

$$\{f_1, f_2, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*\}$$

V'nin bir lightlike tabanıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Sonuç 2.2: İndeksi q olan Minkowski uzayında

$$\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

tabanındaki maksimum lightlike (null) vektör sayısı $min\{2q, 2p\}$'dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

İndeksi $q=1$ olan *2*-boyutlu non-dejenere vektör uzayına "**hiperbolik düzlem**"denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

(V,g) proper semi-Öklidyen uzayının bir

$$B = \{f_1, f_2, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$$

tabanı eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa "**quasi ortonormal taban**" olarak adlandırılır (Duggal ve Bejancu, 1996).

$i,j \in \{1,2,\dots,r\}$ ve $\alpha,\beta \in \{1,2,\dots,t\}$ için

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0; \qquad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0; \qquad g(u_\alpha, u_\beta) = \mathcal{E}_\alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

Sonuç 2.3: W bir proper semi-Öklidyen V uzayının bir proper lightlike alt uzayı olsun. Bu durumda, W', W'', V'nın screen alt uzayları olmak üzere

$$ind\ V = ind\ W' + ind\ W'' + null\ W$$

dır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.11: (V, g) ve $(\bar{V}, \bar{g})$ iki semi-Öklidyen uzay ve $T: V \to \bar{V}$ dönüşümü lineer olsun. Eğer T dönüşümü skaler çarpımı korursa yani; $\forall v, w \in V$ için

$$\bar{g}\big(T(v), T(w)\big) = g(v, w)$$

ise T dönüşümüne bir "**lineer izometri**" denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

BÖLÜM 3
M^n DE FRENET DENKLEMLERİ

M^n Minkowski spacetime veya uzay-zamanı göstersin yani; Lorentz metriği ile birlikte $\mathbb{R}^n$ manifoldunun işareti (-,+,+,…,+) olsun. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M^n$ ile parametrize edilen Γ eğrisine bir null eğri denir, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$\forall\, t \in I$ için

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \text{ ve } \gamma'(t) \neq 0.$$

Farzedelim ki; her $t \in I$ için $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \gamma'(t) \neq 0$ ve $\langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle$ hiçbir zaman sıfır olmasın (Çöken ve Çiftçi, 2005). Eğer $\langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle = a$ dersek ve $a = 1$ kabul edersek, bu durumda “ **pseudo yay parametresi**” aşağıdaki gibi tanımlanır (Çöken ve Çiftçi, 2005);

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \langle \gamma''(u), \gamma''(u) \rangle^{1/4}\, du.$$

M^n’de $n = m + 2$ ve t pseudo yay parametresi olmak üzere $\gamma(t)$’nin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir tek $\{L, N, W_1, W_2, \ldots, W_m\}$ Frenet çatısı vardır (Bonnor, 1969);

$$L = \frac{\gamma'(t)}{\langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle^{\frac{1}{2}}} \quad ,$$

$$L' = W_1 \quad ,$$

$$N' = k_1 W_1 + k_2 W_2 \quad ,$$

$$W_1' = -k_1 L - N \quad ,$$

$$W_2' = -k_2 L + k_3 W_3 \quad ,$$

…………………………...

$$W_i' = -k_i W_{i-1} + k_{i+1} W_{i+1} \quad , \qquad i \in \{3, \ldots, m-1\}$$

…………………………...

$$W_m' = -k_m W_{m-1}$$

Burada N null, $\langle N, L \rangle = 1$, $\{L, N\}$ ve $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$ ortogonal ve

$\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ orthonormaldir. Yukarıdaki özellikleri sağlayan Γ eğrisine $\{L, N, W_1, W_2, \dots, W_{n-2}\}$ çatısıyla birlikte "**Kartan (Cartan) eğrisi**" ve $\{k_i\}_{1\le i\le m}$ "**Kartan (Cartan) eğrilikleri**" olarak adlandırılırlar (Bonnor, 1969).

Şimdi M^n'deki helis tiplerini tanımlayalım;

1.Tip Helisler: $\{k_i\}_{1\le i\le m}$ eğrilikleri sıfırdan farklı sabit olan null eğriler null helisler olarak adlandırılırlar. Bu tip helisleri " $H1$"tipi helisler olarak adlandıracağız, yani;

$$H1 = \{\gamma: I \to M^n \mid \gamma \;\; null\; Kartan(Cartan)\; eğrisi\; ve\; \{k_i\}_{1\le i\le m} \;\; sabit\}$$

(Bonnor, 1969).

2.Tip Helisler: Lancret tipi helislerin kümesini "$H2$" ile gösterelim ve aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$H2 = \{\gamma: I \to M^n \mid \gamma\; null\; Kartan(Cartan)\;\; eğrisi, \langle L, U\rangle = a, U = sabit\}$$

(Lancret, 1806).

3.Tip Helisler: Son olarak ise Hayden tipi helislerin ailesini "$H3$" ile gösterelim ve $n = 2q + 1$, $1 \le i \le q - 1$ (q = uzayın indeksi) olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır; (Hayden, 1931)

$$H3 = \{\gamma: I \to M^n \mid \gamma\; null\; \text{Kartan(Cartan)}\;\; eğri, \langle L, U\rangle \neq 0, \langle N, U\rangle \neq 0, \langle W_{2i+1}, U\rangle = 0\; U = sabit\}.$$

Tanım 3.1: Γ ve Γ* iki Kartan(Cartan) eğrisi olsun. Eğer Γ ve Γ* ın normalleri bağlantı noktalarında lineer bağımlı ise, bu durumda Γ, Γ*için bir Bertrand null çiftidir. Bir Bertrand null çiftine sahip olan bir Kartan (Cartan) eğrisine "**Bertrand null eğri**" denir (Bertrand, 1850).

BÖLÜM 4

M^3 TE KARTAN (CARTAN) ÇATILARI

M^3'te, $\gamma: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{M}^3$ bir null eğri olsun. Bu durumda $\{L, N, W\}$, Kartan (Cartan) çatıları ve k, γ'nın Kartan (Cartan) eğriliği olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Bonnor, 1969);

$$L = \frac{\gamma'(t)}{\langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle^{\frac{1}{2}}} \quad ,$$

$$L' = W \quad ,$$

$$N' = kW \quad ,$$

$$W' = -kL - N \quad ,$$

Burada birim spacelike vektör olan W eğrinin normali ve null vektör olan N eğrinin binormali veya iki normali olarak adlandırılır (Duggal ve Jin, 2007).

<u>Tanım 4.1:</u> $\alpha: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{E}^3$ ve $\beta: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{E}^3$ iki eğri olsun. α ve β eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{V_1, V_2, V_3\}$, $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*\}$ olsun. Eğer bu iki eğrinin normalleri lineer bağımlı ise yani; $\{V_2, V_2^*\}$ lineer bağımlı ise (α, β) eğri ikilisine "**Bertrand eğri çifti**" denir (Bertrand, 1850).

<u>Teorem 4.1:</u> $\gamma: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{E}^3$ ve $\delta: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{E}^3$ iki eğri olsun. γ eğrisinin eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. Bu durumda (γ, δ) eğri çifti Bertrand çiftidir ancak ve ancak

$$\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$$

dir (Bertrand, 1850).

<u>Tanım 4.2:</u> $\alpha: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{M}^3$ ve $\beta: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{M}^3$ iki Kartan(Cartan) eğrisi olmak üzere α ve β eğrilerinin Kartan(Cartan) çatıları sırasıyla $\{L, N, W\}$, $\{L^*, N^*, W^*\}$ olsun. α ve β eğrilerinin normalleri line bağımlı ise yani; $\{W,, W^*\}$ lineer bağımlı ise (α, β) eğri çiftine "**Bertrand eğri çifti**" denir (Bertrand, 1850).

<u>Teorem 4.2:</u> t keyfi bir parametre olmak üzere γ(t), M^3'te bir null Kartan(Cartan) eğrisi olsun. γ ‘nın bir Bertrand çifti γ^* vardır ancak ve ancak γ nın eğriliği sıfırdan farklı sabittir (Inoguchi ve Lee, 2006).

Uyarı: γ^* eğrisi, γ eğrisine lineer bağımlıdır. $\gamma^* = \gamma + \lambda W_1$ olduğu için, direkt hesaplamalar sonucunda

$$L^* = -\lambda N \qquad , \qquad N^* = -\lambda^{-1} L \qquad , \qquad W^* = -W$$

elde edilir (Inoguchi ve Lee, 2006).

Teorem 4.3: M^3’te, Hayden anlamında helisler ile Lancret anlamında helisler çakışır.

İspat:

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M^3$ Lancret anlamında helis ve $\{L, N, W\}, \gamma'$nın Cartan çatıları olsun.$''H2''$ tipi helis tanımından

$$\langle L, U \rangle = a(sabit) \tag{4.1}$$

Eğer (4.1)’in pseudo yer parametresine göre türevini alırsak, $L' = W$ olduğundan

$$\langle W, U \rangle = 0 \tag{4.2}$$

elde ederiz. (4.2)’nin tekrar türevini alırsak , $W^{'} = -kL - N$ olduğundan ve (4.1) denkleminden

$$\langle N, U \rangle = -ka.$$

elde edilir. Buradan son eşitliğin tekrar türevi alınırsa, $N' = kW$olduğundan

$$\langle kW, U \rangle = -k'a$$

olur. (4.2) denkleminden ise $-k'a = 0$ dır. Buradan k sabit olarak bulunur. Bu durumda

$$\langle N, U \rangle = sabit, \langle W, U \rangle = 0,\ \langle L, U \rangle = a(sabit)$$

olur. Bu ise γ ‘nın Hayden anlamında helis olması demektir.

BÖLÜM 5

$\mathbf{M}^4$ TE KARTAN (CARTAN) ÇATILARI

$\gamma\colon \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathrm{M}^4$, M^4'te bir null eğri olsun. Bu durumda, γ eğrisinin $\{L, N, W_1, W_2\}$ Kartan (Cartan) çatıları ve $\{k_1,\, k_2\}$ Kartan (Cartan) çatıları olmak üzere Frenet denklemleri aşağıdaki gibi verilir (Bonnor, 1969);

$$L = \frac{\gamma'(t)}{\langle\, \gamma''(t), \gamma''(t)\rangle^{\frac{1}{2}}} \quad ,$$

$$L' = W_1 \quad ,$$

$$N' = k_1 W_1 + k_2 W_2 \quad ,$$

$$W_1' = -k_1 L - N \quad ,$$

$$W_2' = -k_2 L \; .$$

Direkt hesaplamalar sonucunda ise $a = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle^{1/2}$ olmak üzere Kartan (Cartan) eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur (Bonnor, 1969);

$$k_1 = \frac{1}{2a^2}\left(\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle + 2aa'' - 4(a')^2\right)$$

$$k_2 = -\frac{1}{a^4}\, .\det\left(\gamma', \gamma'', \gamma^{(''')}, \gamma^{(4)}\right)$$

Kartan (Cartan) çatıları tek taraflı yönlendirilebildiği için, Kartan (Cartan) eğriliklerinin sayısı minimumdur ve Kartan (Cartan) eğrilikleri Lorentz dönüşümleri altında sabittir (Çöken ve Çiftçi, 2005).

Null doğrular sadece null eğrilerdir, Kartan(Cartan) eğrisi değildirler (Çöken ve Çiftçi, 2005). Çünkü, bir doğrunu parametrelenişi A ve B sabit vektörler olmak üzere: $\gamma(t) = At + B$ şeklindedir (Çöken ve Çiftçi, 2005). Eğer γ null bir doğru ise , $\langle\, \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ olur. Yani; $\langle A, A \rangle = 0$. Ancak, $\gamma''(t) = 0$ olduğu için $L = \frac{\gamma'(t)}{\langle\, \gamma''(t), \gamma''(t)\rangle^{1/2}}$ tanımsız olur. Böylece Kartan (Cartan) çatısı oluşturulamaz ve dolayısıyla null doğrular Kartan(Cartan) eğrisi olamazlar.

$k_2 = 0$ olan null eğriler tamamen 3- boyutlu uzayda yatar ve $k_1 = k_2 = 0$ olan null eğriler ise "**null kübik**" adını alır (Bonnor, 1969). Bonnor (1969), genel null kübik tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir;

$$\gamma(\mathrm{s})=\left(\frac{6s+s^3}{12\sqrt{2}},\frac{s^2}{4},0,\frac{6s-s^3}{12\sqrt{2}}\right) \quad .$$

Bonnor M^4'te "$H1$" tipi helislerin denklemlerini aşağıdaki şeklinde tanımlamıştır;

a. $k_2 \neq 0$ olduğu durumda;

$$\omega = \left[\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) - k_1\right]^{1/2} \text{ ve } \sigma = \left[\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) - k_1\right]^{1/2} \text{ olmak üzere;}$$

$$\gamma(s) = \sqrt{\frac{1}{\omega^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{\omega}\sinh\omega s, \frac{1}{\omega}\cosh\omega s, \frac{1}{\sigma}\sin\sigma s, \frac{1}{\sigma}\cos\sigma s\right) \text{ (Bonnor, 1969).}$$

b. $k_2 = 0$ olduğu durumda;

i) $\sigma = \sqrt{2k_1}$ olmak üzere,

Eğer $k_1 > 0$ ise,

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma s, \sin\sigma s, 0, \cos\sigma s)$$

ii) $\omega = \sqrt{-k_1}$ olmak üzere,

Eğer $k_1 < 0$ ise,

$$\gamma(s) = \frac{1}{\omega^2}(\sin\omega s, \cos\omega s, 0, \omega s)$$

şeklindedir (Bonnor, 1969).

Tanım 5.1: $\gamma: I \to M^4$, $\delta: J \to M^4$ iki null Kartan(Cartan) eğrisi olsun. γ ve δ eğrilerinin Kartan (Cartan) eğrilikleri sırasıyla $\{L, N, W_1, W_2\}$, $\{L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*\}$ olsun. Eğer γ ve δ eğrilerinin normalleri lineer bağımlı ise, yani; $\{W_1, {W_1}^*\}$ lineer bağımlı ise (γ, δ) ikilisine "**Bertrand null çifti**" denir (Bertrand, 1850).

Lemma 5.1: Bir Bertrand null eğri ve bunun Bertrand eğri çiftinin bağlantı noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Çöken ve Çiftçi, 2005).

Teorem 5.2: M^4'de bir Kartan (Cartan) eğrisinin Bertrand null eğri olması için gerek ve yeter şart k_1 eğriliği sıfırdan farklı bir sabit ve k_2 eğriliğinin sıfır olmasıdır (Çöken ve Çiftçi, 2005).

Sonuç 5.1: k_2 nin sıfır olması, M^4'de yatan bir Kartan (Cartan) Bertrand null eğrinin aslında M^3 de yattığını gösterir.

Teorem 5.3: Γ, M^4'te bir Kartan(Cartan) eğrisi olsun. Γ eğrisi 3-boyutlu null helistir ancak ve ancak a ve b sıfırdan farklı sabitler ve $\{L, N, W_1, W_2\}$ Γ'nın Kartan (Cartan) çatıları olmak üzerec

$$\langle L, U\rangle = a \tag{5.1}$$

ve

$$\langle N, U\rangle = b \tag{5.2}$$

olacak şekilde sabit yönlü bir U vektörü vardır (Çöken ve Çiftçi, 2005).

Teorem 5.4: $\gamma: I \to M^4$ eğrisinin "$H2$" (Lancret anlamında) tipi bir helistir ancak ve ancak

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'' - k_2 = 0 \tag{5.3}$$

denklemi sağlanır.

İspat : $\gamma: I \to M^4$ eğrisi " $H2$"tipinde bir helis olsun, yani;

$$\gamma \in H2 = \{\gamma: I \to M^n |\ \gamma\ null \text{ Kartan(Cartan) } eğrisi, \langle L, X\rangle = c, X = sabit\}$$

olsun. X sabit yönlü bir vektör olmak üzere

$$\langle L, X\rangle = \text{c (sbt)} \tag{5.4}$$

olsun. (5.4) denkleminin pseudo yay parametresine göre türevini alırsak, $L' = W_1$ olduğundan,

$$\langle W_1, X\rangle = 0 \tag{5.5}$$

elde edilir. Eğer (5.5) denkleminin tekrar türevini alırsak, $W_1' = -k_1 L - N$ olduğundan ve iç çarpımın iki lineerliğinden,

$$-k_1\langle L,X\rangle-\langle N,X\rangle=0$$

olarak bulunur. (5.4) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\langle N,X\rangle=-k_1c \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir. (5.6) eşitliğinin pseudo yay parametresine göre türevi alınarak ise $N^{'}=k_1W_1+k_2W_2$ olduğundan ve iç çarpımın lineerliğinden

$$k_1\langle W_1,X\rangle+k_2\langle W_2,X\rangle=-k_1{}^{'}c$$

elde edilir. Bu durumda (5.5) eşitliği gereğince

$$k_2\langle W_2,X\rangle=-k_1{}^{'}c$$

eşitliği bulunur. Böylece

$$\langle W_2,X\rangle=\frac{-k_1{}^{'}c}{k_2} \tag{5.7}$$

olarak elde edilmiş olur. (5.7) eşitliğinin türevini alırsak $W_2^{'}=-k_2L$ olduğundan, iç çarpımın lineerliğinden ve (5.4) denkleminden

$$-k_2.c=-c\left(\frac{k_1{}^{'}}{k_2}\right)^{'}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\left(\frac{k_1{}^{'}}{k_2}\right)^{'}-k_2=0$$

denklemi elde edilmiş olur.

Tersine, $\gamma: I\rightarrow M^4$ bir eğri olsun ve aşağıdaki denklem sağlansın,

$$\left(\frac{k_1{}^{'}}{k_2}\right)^{'}-k_2=0$$

U vektörünü ise aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

$$U=-k_1L+N-\frac{k_1{}^{'}}{k_2}W_2.$$

Bu durumda pseudo yay parametresine göre türev alınırsa

$$U' = -\left[\left(\frac{k_1{}'}{k_2}\right)' - k_2\right] W_2 = 0$$

olur ve buradan da

$$\langle L, U\rangle = 1$$

elde edilir. Böylece $\gamma: I \to M^4$ eğrisi "$H2$"tipinde bir helis olur.

Şimdi ise (5.3) diferansiyel denklemini çözelim. Eğer

$$t = \int_a^s k_2\, ds$$

dersek $\frac{dt}{ds}$=k_2 elde edilir ve direkt hesaplamalar sonucunda,

$$k_1{}' = \frac{dk_1}{ds} = \frac{dk_1}{dt}.\frac{dt}{ds} = \dot{k_1}.k_2$$

elde edilir.

Böylece

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1{}'}{k_2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{k_1}.k_2}{k_2}\right) = \frac{d}{ds}\dot{k_1} = \frac{d}{dt}(\dot{k_1})\ \frac{dt}{ds} = \ddot{k_1}.k_2 \tag{5.8}$$

olur. Eğer (5.8) denklemini (5.3) denkleminde yerine yazarak gerekli işlemler yapılırsa;

$$k_2(\ddot{k_1} - 1) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda

$$k_2 = 0 \qquad \text{veya} \qquad (\ddot{k_1} - 1) = 0$$

olur. Eğer $k_2 \neq 0$ kabul edersek, $\ddot{k_1}$=-1 olur. Buradan ise s pseudo yay parametresine göre integral alırsak;

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(\int_a^s k_2 ds\right)^2 + c_1\left(\int_a^s k_2 ds\right) + c_2$$

olur.

Örnekler:

1. $\gamma: I \to M^4$ bir Kartan (Cartan) eğrisi ve her $t \in I$ için

$$\gamma(\mathrm{t}) = (\ \sinh \mathrm{t}, \cosh \mathrm{t}\,, \cos t\,, \sin t).$$

olsun. Bu eğrinin “$H1$”tipi bir helis olduğunu ancak “$H2$” tipinde bir helis olmadığını gösterelim.

İlk olarak, γ eğrisinin “$H1$” tipi bir helis olduğunu gösterelim. Bunun için $k_1,\ k_2$ eğriliklerinin sabit olduğunu göstermeliyiz. Bildiğimiz üzere $k_1,\ k_2$ eğrilikleri aşağıdaki gibi tanımlı idi;
$a = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle^{1/2}$ olmak üzere;

$$k_1 = \frac{1}{2a^2}\left(\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle + 2aa'' - 4(a')^2\right) \tag{5.9}$$

$$k_2 = -\frac{1}{a^4}\,.\det\left(\gamma', \gamma'', \gamma^{(''')}, \gamma^{(4)}\right) \quad (5.10).$$

Bu durumda;

$$\gamma'(t) \ = (\cosh t\,, \sinh t\,, -\sin t\,, \cos t)$$

$$\gamma''(t) = (\ \sinh \mathrm{t}, \cosh \mathrm{t}\ , -\cos t\,, -\sin t)$$

$$\gamma^{(3)}(t) = (\cosh t\,, \sinh t\,, \sin t\,, -\cos t)$$

$$\gamma^{(4)}(t) = (\ \sinh \mathrm{t}, \cosh \mathrm{t}\ , \cos t\,, \sin t)$$

olduğu açıktır. Buradan $a = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle^{1/2}$ ifadesi $\langle \gamma'', \gamma'' \rangle = 2$ olmak üzere $a = \sqrt{2}$ olarak bulunur. O halde

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = -1$$

olarak elde edilir. Bu ise eğrinin “$H1$”tipi bir helis olduğunu gösterir.

Şimdi de yukarıda verilen eğrinin “$H2$” tipinde bir helis olmadığını gösterelim. Bunun için ise (5.3) denkleminin sağlanıp sağlanmadığını gösterelim.

$k_1 = 0$ (sabit) olduğundan $k_1{}' = 0$ olur. Dolayısıyla $\left(\frac{k_1{}'}{k_2}\right)' = 0$’dır. $k_2 = -1$ olduğundan ise $0 - (-1) = 1 \neq 0$ olur. Yani; (5.3) denklemi sağlanmaz. Bu ise eğrinin “$H2$”tipi bir helis olmadığını gösterir.

2. $\gamma: I \to M^4$ bir Kartan(Cartan) eğrisi ve her $t \in I$ için

$$\gamma(\mathrm{t}) = (\,\mathrm{t}\,, \int \cos(2\tan^{-1}\mathrm{e^t}) \cos \mathrm{t}dt\,, \int \cos(2\tan^{-1}\mathrm{e^t}) \sin \mathrm{t}dt\,, \int \sin(2\tan^{-1}\mathrm{e^t}) dt).$$

Bu eğrinin "$H2$"tipi bir helis olduğunu ancak "$H1$" tipinde bir helis olmadığını gösterelim.

İlk olarak eğrinin "$H2$" tipi bir helis olduğunu gösterelim. Yine bunu göstermek için (5.3) denkleminin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$\varphi = 2\tan^{-1} e^t$ dersek,

$$x_1 = t,$$

$$x_2 = \int \cos\varphi \cos t \, dt,$$

$$x_3 = \int \cos \varphi \sin \mathrm{t} \, dt,$$

$$x_4 = \int \sin\varphi \; dt$$

olur. Buradan trigonometrik dönüşümlerden yararlanılarak;

$\varphi = 2\tan^{-1} e^t$ ise $\tan\frac{\varphi}{2} = e^t$olur. $\tan\varphi = \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}$ olduğundan

$$\tan\varphi = \frac{2e^t}{1-e^{2t}}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\cos\varphi = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

ve

$$\sin\varphi = \frac{2e^t}{1+e^{2t}}$$

olarak bulunur. Bu eğri için k_1 ve k_2 eğriliklerini (5.9), (5.10) denklemlerinden hesaplarsak

$$k_1 = \frac{1}{2}\,\frac{e^{4t}+18e^{2t}+1}{(1+e^{2t})^2}$$

$$k_2 = \frac{4e^t(-1+e^{2t})}{(1+e^{2t})^2}$$

olarak elde edilir. O halde k_1 ve k_2 eğriliklerinin sabit olmadığı yani; γ eğrisinin "$H1$" tipi helis olmadığı anlamına gelir. Fakat γ eğrisi "$H2$" tipi bir helistir. Çünkü, yukarıdaki gibi elde edilen k_1 ve k_2 eğrilikleri (5.3) denkleminde yerine yazılırsa, denklemin sağlandığı görülür.

Teorem 5.5: Γ , M^4'te bir Kartan (Cartan) eğrisi olsun. $\Gamma \in H1 \cap H2$ ancak ve ancak a sabit olmak üzere $\langle L, U\rangle = a \neq 0$ ve k_2eğriliği sıfırdır.

İspat: Γ, M^4'te bir Kartan (Cartan) eğrisi olsun. Γ 3-boyutlu null helis, a ve b sıfırdan farklı sabitler ve $\{L, N, W_1 W_2\}$ Γ'nın Kartan (Cartan) çatıları olsun. $\Gamma \in H1\cap H2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda hem $\Gamma \in$ "$H1$"hem de $\Gamma \in$ "$H2$" olacaktır. "$H1$" ve "$H2$"tipi helis tanımlarından Γ bir null Kartan(Cartan) eğrisi , k_1, k_2eğrilikleri sabit ve $\langle L, U\rangle = a(sbt)$ olacak şekilde bir sabit yönlü U vektörü vardır. O halde $k_2 = 0$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olacaktır. $\langle L, U\rangle = a(sbt)$ olduğundan,

$$\langle W_1, U\rangle = 0 \tag{5.11}$$

olur. (5.11) eşitliğin pseudo yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\langle N, U\rangle = -k_1 a \tag{5.12}$$

(5.12) eşitliğinin tekrar türevi alınırsa, (5.11) denkleminden ve iç çarpımın lineerliğinden,

$$k_2\langle W_2, U\rangle = 0 \tag{5.13}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde (5.13) denkleminin türevi alınarak devam edilirse,

$$-{k_2}^2\langle L, U\rangle = 0$$

olur ve $\langle L, U\rangle = a(sbt)$ olduğundan

$$-{k_2}^2 a = 0 \ ,$$

$$(a \neq 0) \ \ k_2 = 0.$$

Şimdi tersine, $\langle L, U\rangle = a$(sbt) ve $k_2 = 0$ olsun. "$H2$" tipinde helis tanımı gereğince

$\Gamma \in$ "$H2$" olur. Eğer $\Gamma \in$ "$H1$" olduğunu gösterirsek, ispat tamamlanmış olacaktır. Eğer $\langle L, U \rangle = a$ eşitliğinin s yay parametresine göre türevini alırsak,

$$\langle W_1, U \rangle = 0 \tag{5.14}$$

olur. Buradan ise (5.14) denkleminin türevi alınarak devam edilirse,

$$\langle N, U \rangle = -k_1 a \tag{5.15}$$

elde edilir. Tekrar (5.15) denkleminin de türevi alınırsa,

$$-k_1{}' a = 0$$

elde edilmiş olur. $a \neq 0$ olduğu için k_1 sabit ve $\Gamma \in$ "$H1$". Sonuç olarak, $\Gamma \in H1 \cap H2$.

Teorem 5.2, Teorem 5.3 ve Teorem 5.5 den yararlanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir;

Sonuç 5.2: Γ, M^4'te bir Kartan (Cartan) eğrisi, $\{L, N, W_1 W_2\}$ eğrinin Kartan (Cartan) çatıları ve k_1, k_2 eğrinin Kartan (Cartan) eğrilikler olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

1. $k_1 = sabit$ ve $k_2 = 0$.
2. $\langle L, U \rangle = a(sabit)$ ve $\langle N, U \rangle = b$(sabit) dir.
3. Eğrinin bir Bertrand çifti vardır.
4. $\Gamma \in H1 \cap H2$.

5.1. M^4 te Slant Eğriler

Izumiya ve Takeuchi (2004), 3-boyutlu Öklid uzayında özel bir eğri tipi olan slant eğrileri tanımlayarak bu notasyonu silindirik helislere genellemişlerdir. Kula ve Yaylı (2005), slant helislerin sabit hızlı eğriler olduğunu göstermiş ve bir helisin slant helis olması için gerek ve yeter şartın involütünün genel helis olması gerektiğini ispatlamışlardır. Önder ve ark. (2010), önce 4-boyutlu Öklid uzayında B2 slant eğrileri tanımlayıp bu eğriler için bir karakterizasyon vermişlerdir. Daha sonra B2 slant spacelike helisleri 4-boyutlu Minkowski uzayında karakterize etmişlerdir. Ayrıca Gök ve ark. (2009), B2 slant eğrileri E^n Öklid uzayına genelleyip, bu uzayda $V_n - slant$ eğrileri incelemişlerdir.

Şimdi kısaca slant eğri kavramını yukarıdaki kaynaklar yardımıyla açıklayalım;

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M^4$ eğrisinin bir null Cartan eğrisi olduğunu farzedelim ve α eğrisinin Kartan(Cartan) çatıları $\{L, N, W_1, W_2\}$, Kartan (Cartan) eğrilikleri $\{k_1, k_2\}$ ve pseudo yay parametresi s olsun. Ayrıca α eğrisinin Frenet denklemleri aşağıdaki gibi verilsin;

$$\begin{aligned} L' &= W_1 \quad , \\ N' &= k_1 W_1 + k_2 W_2 \quad , \\ W_1' &= -k_1 L - N \quad , \\ W_2' &= -k_2 L \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Tanım 5.2: N ile sabit açı yapacak şekilde sabit yönlü bir vektör bulunabiliyorsa, α eğrisine "$\boldsymbol{N - slant}$" eğri denir. Yani; a bir sabit olmak üzere

$$\langle N, X \rangle = a(sabit)$$

olacak şekilde sabit yönlü bir X vektörü bulunabiliyorsa α eğrisine "$N - slant$" eğri adı verilir.

Tanım 5.3: W_1 ile sabit açı yapacak şekilde sabit yönlü bir vektör bulunabiliyorsa, α eğrisine "$\boldsymbol{W_1 - slant}$" eğri denir. Yani; c bir sabit olmak üzere

$$\langle W_1, U \rangle = c(sabit)$$

olacak şekilde sabit yönlü bir U vektörü bulunabiliyorsa α eğrisine "$W_1 - slant$" eğri adı verilir.

Tanım 5.4: W_2 ile sabit açı yapacak şekilde sabit yönlü bir vektör bulunabiliyorsa, α eğrisine "$\boldsymbol{W_2 - slant}$" eğri denir. Yani; p bir sabit olmak üzere

$$\langle W_2, V \rangle = p(sabit)$$

olacak şekilde sabit yönlü bir V vektörü bulunabiliyorsa α eğrisine "$W_2 - slant$" eğri adı verilir.

Teorem 5.7: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M^4$ eğrisi herhangi bir $W_1 - slant$ eğri olsun. Bu durumda M^4 uzayında $W_1 - slant$ eğrilerin karakterizasyonu (s pseudo yay parametresi ve c_1 herhangi bir sabit olmak üzere)aşağıdaki gibidir;

$$(c-s)\left(\left(\frac{k_1'}{k_2}\right)'-k_2\right)-2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'-\frac{k_1'}{k_2}=0.$$

İspat: $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to M^4$ eğrisi herhangi bir $W_1-slant$ bir eğri olsun. α eğrisi $W_1-slant$ eğri olduğu için a bir sabit olmak üzere

$$\langle W_1, X\rangle = a(sabit) \quad (5.1.2)$$

olacak şekilde sabit yönlü bir X vektörü vardır. (5.1.2) denkleminin s pseudo yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle W_1', X\rangle = 0$$

elde edilir. (5.1.1) denklemleri ve iç çarpımın iki lineerliğinden;

$$\langle N, X\rangle = -k_1\langle L, X\rangle \quad (5.1.3)$$

olur . Buradan (5.1.3) denkleminin tekrar s pseudo yay parametresine göre türevi alınırsa (5.1.1) denklemleri ve yine iç çarpımın iki lineerliğinden;

$$\langle k_1W_1+k_2W_2, X\rangle = -k_1'\langle L, X\rangle - k_1\langle W_1, X\rangle$$

$$\langle W_2, X\rangle = -\frac{k_1'}{k_2}\langle L, X\rangle - \frac{2k_1}{k_2}a \quad (5.1.4)$$

olur. (5.1.4) denkleminin tekrar türevi alınırsa (5.1.1) denklemleri ve yine iç çarpımın iki lineerliğinden;

$$-k_2\langle L, X\rangle = -\left(\frac{k_1'}{k_2}\right)'\langle L, X\rangle - \frac{k_1'}{k_2}\langle W_1, X\rangle - 2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'a$$

elde edilir. (5.1.2) eşitliğini kullanarak yukarıdaki eşitlik düzenlenirse

$$\left(\left(\frac{k_1'}{k_2}\right)'-k_2\right)\langle L, X\rangle = -\left(\frac{k_1'}{k_2}+2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)a \quad (5.1.5)$$

eşitliği elde edilir. (5.1.5) denkleminin son kez türevi alınıp ve gerekli hesaplamalar yapılırsa c herhangi bir sabit olmak üzere;

$$(c-s)\left(\left(\frac{{k_1}'}{k_2}\right)' - k_2\right) - 2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' - \frac{{k_1}'}{k_2} = 0$$

olur.

Teorem 5.8: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4$ eğrisi M^4'te bir $W_2 - slant$ eğridir $\Leftrightarrow$ eğri $3 - boyutlu$ Minkowski uzayında yatar yani; $k_2 = 0$ ‘dır.

İspat: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4$ eğrisi herhangi bir $W_2 - slant$ bir eğri olsun. α eğrisi $W_2 - slant$ eğri olduğu için c bir sabit olmak üzere

$$\langle W_2, X\rangle = c(sabit) \tag{5.1.6}$$

olacak şekilde sabit yönlü bir X vektörü vardır. (5.1.6) denkleminin s pseudo yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\langle {W_2}', X \rangle = 0$$

elde edilir. (5.1.1) denklemleri ve iç çarpımın iki lineerliğinden;

$$k_2 = 0 \text{ veya } \langle L, X \rangle = 0$$

dır. Eğer $k_2 \neq 0$ olduğu durumu düşünürsek

$$\langle L, X \rangle = 0 \tag{5.1.7}$$

olur. (5.1.7) denkleminin yay parametresine göre türevini alırsak (5.1.1) denklemleri ve iç çarpımın iki lineerliğinden,

$$\langle W_1, X\rangle = 0 \tag{5.1.8}$$

olarak bulunur. (5.1.8) ifadesinin tekrar türevini alırsak;

$$\langle -k_1 L - N \ , X\rangle = 0$$

olur. Buradan iç çarpımın lineerliğinden ve (5.1.7) denkleminden

$$\langle N \ , X\rangle = 0 \tag{5.1.9}$$

elde edilir. Son kez (5.1.9) ifadesinin türevi alınırsa

$$\langle k_1 W_1 + k_2 W_2 \;, X \rangle = 0$$

olur ve (5.1.6), (5.1.8) denklemlerinden

$$k_2 c = 0$$

sonucuna varılır. Buradan ise $k_2 \neq 0$ olduğundan

$$c = 0$$

olması demektir. Ancak 4- boyutlu uzayda, uzayı geren vektörlerin hepsine birden dik olan bir vektör bulunamayacağından kabulümüz yanlış olup

$$k_2 = 0$$

dır. Dolayısıyla eğri $3 - boyutlu$ Minkowski uzayında yatar.

BÖLÜM 6
M^4 DE PSEUDO- KÜRESEL NULL EĞRİLER

Merkezi A ve yarıçapı $r > 0$ olan bir pseudo- küre

$$S_1^3 = \{X \in M^4 : \langle X - A, X - A \rangle = r^2\}$$

ile gösterilir (O'Neill, 1983). Pseudo-küresel null eğriler için bir karakterizasyon elde etmek için aşağıdaki şekilde tanımlanan oskülatör pseudo-küreyi kullanacağız.

Tanım 6.1: Γ, M^4 de bir Kartan (Cartan) eğrisi olsun. Bu durumda pseudo-kürenin sahip olduğu Γ ile bağlantılı olan sonsuz yakın 5 noktası varsa bu küreye Γ nın "**oskülatör pseudo-küresi**" denir.(Öklidyen durum için (Millman ve Parker, 1977)

Lemma 6.1: Bir $\gamma(s_0)$ noktasında oskülatör pseudo-kürenin merkezi

$$A(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k_2(s_0)} W_2(s_0)$$

şeklindedir (Çöken ve Çiftçi, 2005).

Teorem 6.1: Γ, bir Kartan (Cartan) eğrisi olsun. Bu durumda Γ bir pseudo-küresel eğridir ancak ve ancak k_2 sıfırdan farklı bir sabittir (Çöken ve Çiftçi, 2005).

k_2 eğriliği sıfırdan farklı bir sabit olan null eğriler bir pseudo küre üzerinde yatar. Fakat; bunlar jeodezikler olmayabilir. Çünkü, pseudo kürenin null jeodezikleri M^4 ün null doğrularıdır. k_2 eğriliği sıfırdan farklı olan null helisler pseudo küreseldir. Fakat diğer null helisler ve null kübikler pseudo küresel değildirler. Genellikle Minkowski uzayında da bir pseudo küre üzerinde yatan 3-boyutlu null eğri yoktur (Petrovic ve Sucurovic, 2001).

Ayrıca

$$H_0^3(r) = \{X \in M^4 : \langle X, X \rangle = -r^2\}$$

hiperbolik uzayında da herhangi bir null eğri yatmadığı gösterilmiştir (Camcı, İlarslan ve Sucurovic, 2003).

Sonuç 6.1: $\Gamma \subset M^4$ Kartan (Cartan) eğrisi tam olarak bir pseudo küre üzerinde yatar ancak ve ancak her $s \in I$ için sabit bir A noktası vardır öyle ki ;

$$\langle A - \gamma(s), \gamma'(s) \rangle = 0$$

dır (Çöken ve Çiftçi, 2005).

5.1.Problemler

Problem 1. M^4 ‘de bir Kartan (Cartan) null eğrinin Bertrand çifti spacelike olamaz mı?

İspat: γ, M^4 uzayında herhangi bir null Kartan (Cartan) eğrisi ve bu eğrinin Bertrand çifti γ^*olsun. Ayrıca γ ve γ^*’ın Kartan (Cartan) çatıları sırasıyla $\{L, N, W_1, W_2\}$ ve $\{L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*\}$, Kartan (Cartan) eğrilikleri sırasıyla $\{k_1, k_2\}$, $\{{k_1}^*, {k_2}^*\}$ ve pseudo yay parametreleri sırasıyla s ve s^* olsun. γ^*eğrisinin spacelike olduğunu kabul edelim. Bu durumda incelememiz gereken iki durum söz konusudur(Camcı, İlarslan ve Sucurovic, 2003)

Durum1: N^*spacelike olabilir. Bu durumda ise N^*aşağıdaki üç durumu incelememiz gerekecektir;

Durum 1.1: ${W_1}^*$ spacelike olabilir. Bu durumda γ^*’ın Kartan (Cartan) çatıları $\{L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*\}$, $\{{k_1}^*, {k_2}^*\}$ Kartan (Cartan) eğrilikleri ve s^* pseudo yay parametresi olmak üzere Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$L^{*\prime} = {k_1}^* N^*$$

$$N^{*\prime} = -{k_1}^* L^* + {k_2}^* {W_1}^*$$

$${W_1}^{*\prime} = -{k_2}^* N^*$$

$${W_2}^{*\prime} = 0.$$

ve $L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*$ortogonal vektörler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$g(L^*, L^*) = g(N^*, N^*) = g({W_1}^*, {W_1}^*) = 1, \; g({W_2}^*, {W_2}^*) = -1 \qquad (6.1)$$

Durum 1.2: ${W_1}^*$ timelike olabilir. Bu durumda γ^*'ın Kartan (Cartan) çatıları $\{L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*\}$, $\{{k_1}^*, {k_2}^*\}$ Kartan (Cartan) eğrilikleri ve s^* pseudo yay parametresi olmak üzere Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$L^{*\prime} = {k_1}^* N^*$$

$$N^{*\prime} = -{k_1}^* L^* + {k_2}^* {W_1}^*$$

$${W_1}^{*\prime} = {k_2}^* N^*$$

$${W_2}^{*\prime} = 0$$

ve yine $L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*$ ortogonal vektörler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$g(L^*, L^*) = g(N^*, N^*) = g({W_2}^*, {W_2}^*) = 1, \;\; g({W_1}^*, {W_1}^*) = -1 \qquad (6.2)$$

Durum 1.3: ${W_1}^*$ null olabilir. Bu durumda γ^*'ın Kartan (Cartan) çatıları $\{L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*\}$, $\{{k_1}^*, {k_2}^*\}$ Kartan (Cartan) eğrilikleri ve s^* pseudo yay parametresi olmak üzere Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$L^{*\prime} = {k_1}^* N^* \quad ,$$

$$N^{*\prime} = -{k_1}^* L^* + {k_2}^* {W_1}^* \quad ,$$

$${W_1}^{*\prime} = 0 \quad ,$$

$${W_2}^{*\prime} = -{k_2}^* N^* \, .$$

ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$g(L^*, L^*) = g(N^*, N^*) = 1, \;\; g({W_2}^*, {W_2}^*) = g({W_1}^*, {W_1}^*) = 0,$$

$$g(L^*, N^*) = g(L^*, {W_1}^*) = g(L^*, {W_2}^*) = g(N^*, {W_1}^*) = g(N^*, {W_2}^*) = 0,$$

$$g({W_1}^*, {W_2}^*) = 1 \qquad (6.3)$$

Durum2: N^*timelike olabilir. O halde γ^*'ın Kartan (Cartan) çatıları $\{L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*\}$, $\{{k_1}^*, {k_2}^*\}$ Kartan (Cartan) eğrilikleri ve s^* pseudo yay parametresi olmak üzere Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$L^{*\prime} = {k_1}^* N^*$$

$$N^{*\prime} = {k_1}^* L^* + {k_2}^* {W_1}^*$$

$W_1{}^{*\prime} = k_2{}^* N^*$

$W_2{}^{*\prime} = 0$.

ve $L^*, N^*, W_1{}^*, W_2{}^*$ ortogonal vektörler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir ;

$$g(L^*, L^*) = g(W_2{}^*, W_2{}^*) = g(W_1{}^*, W_1{}^*) = 1, \;\; g(N^*, N^*) = -1 \qquad (6.4)$$

Şimdi yukarıdaki durumları sırasıyla inceleyelim.

Durum1: N^*spacelike olsun.

Durum 1.1**:** $W_1{}^*$ spacelike olsun. O halde $\{W_1, N^*\}$ lineer bağımlı olacağından Bertrand eğri çifti tanımından;

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda W_1 \qquad (6.5)$$

şeklinde yazabiliriz. (6.5) eşitliğinin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = L - \lambda k_1 L - \lambda N + \lambda' W_1$$

elde edilir. Bu eşitliğin W_1 ile iç çarpımını alırsak;

$$g(L^*, W_1) \frac{ds^*}{ds} = g(L, W_1) - \lambda k_1 g(L, W_1) - \lambda g(N, W_1) + \lambda' g(W_1, W_1)$$

olur. (6.1) eşitlikleri kullanılarak $\lambda' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = p(sabit)$’ tir.

O halde

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = L - \lambda k_1 L - \lambda N$$

olup buradan,

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1) L - \lambda N$$

$$L^* = \frac{ds}{ds^*}(1 - \lambda k_1) L - \lambda \frac{ds}{ds^*} N \qquad (6.6)$$

elde edilir. (6.6) eşitliğini aşağıdaki gibi yeniden parametrize edelim;

$$L^* = xL + yN \qquad (6.7)$$

(6.7) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$\frac{dL^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = x'L + y'N + xL' + yN'$$

elde edilir. $L^{*'} = {k_1}^* N^*$, $L' = W_1$, $N^{'} = k_1 W_1 + k_2 W_2$ olduğu için,

$${k_1}^* N^* \frac{ds^*}{ds} = x'L + y'N + (x + yk_1)W_1 + yk_2 W_2 \tag{6.8}$$

elde edilir. (6.8) eşitliğinin ilk olarak N ile iç çarpımını alırsak;

$$g(N^*, N){k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = x'g(L, N) + y'g(N, N) + (x + yk_1)g(W_1, N) + yk_2 g(W_2, N)$$

elde ederiz. Buradan ise yine (6.1) eşitliklerini kullanırsak

$$x = a(sabit)$$

olur.

Şimdi ise (6.8) eşitliğini L ile iç çarpımını alalım;

$$g(N^*, L){k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = x'g(L, L) + y'g(N, L) + (x + yk_1)g(W_1, L) + yk_2 g(W_2, L)$$

olur. O halde (6.1) eşitliklerinden

$$y' = 0$$

olur.Yani;

$$y = c(sabit).$$

Son olarak ise (6.8) eşitliğinin W_2 ile iç çarpımını alalım;

$$g(N^*, W_2){k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = x'g(L, W_2) + y'g(N, W_2) + (x + yk_1)g(W_1, W_2) + yk_2 g(W_2, W_2)$$

eşitliğini elde ederiz. Yine (6.1) eşitliklerinden;

$$yk_2 = 0$$

olur. Buradan $y = c(sabit)$ olduğundan

$$k_2 = 0$$

olur. $x = \frac{ds}{ds^*}(1 + \lambda k_1) = sabit$, $y = \lambda \frac{ds}{ds^*} = sabit$ ve $\lambda = sabit$ olduğu için

$$\frac{ds}{ds^*} = sabit \quad \text{ve} \quad k_1 = sabit$$

olarak bulunur. $k_1 = sabit$ ve $k_2 = 0$ olduğundan ise Teorem 5.2'den spacelike γ^*eğrisinin Bertand çifti γ gerçektende bir null olur.

Durum 1.2: ${W_1}^*$ timelike olsun. O halde $\{W_1, N^*\}$ lineer bağımlı olacağından Bertrand eğri çifti tanımından;

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda W_1 \tag{6.9}$$

şeklinde yazabiliriz. (6.9) eşitliğinin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = L - \lambda k_1 L - \lambda N + \lambda' W_1$$

elde edilir. Bu eşitliğin W_1 ile iç çarpımını alırsak;

$$g(L^*, W_1)\frac{ds^*}{ds} = g(L, W_1) - \lambda k_1 g(L, W_1) - \lambda g(N, W_1 + \lambda' g(W_1, W_1)$$

olur. (6.2) eşitlikleri kullanılarak $\lambda' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = p(sabit)$'tir.
O halde

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = L - \lambda k_1 L - \lambda N$$

olup buradan,

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1)L - \lambda N$$

$$L^* = \frac{ds}{ds^*}(1 - \lambda k_1)L - \lambda \frac{ds}{ds^*} N \tag{6.10}$$

elde edilir. (6.10) eşitliğini aşağıdaki gibi yeniden parametrize edelim;

$$L^* = mL + nN \tag{6.11}$$

(6.11) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$\frac{dL^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = m'L + n'N + mL' + nN'$$

elde edilir. ${L^*}' = {k_1}^* N^*$, $L' = W_1$, $N' = k_1 W_1 + k_2 W_2$ olduğu için,

$${k_1}^* N^* \frac{ds^*}{ds} = m'L + n'N + (m + nk_1)W_1 + nk_2 W_2 \tag{6.12}$$

elde edilir. (6.12) eşitliğinin ilk olarak N ile iç çarpımını alırsak;

$$g(N^*, N){k_1}^*\frac{ds^*}{ds} = m'g(L, N) + n'g(N, N) + (m + nk_1)g(W_1, N) + nk_2g(W_2, N)$$

elde ederiz. Buradan ise yine (6.2) eşitliklerini kullanırsak,

$$m = c(sabit).$$

Şimdi ise (6.12) eşitliğini L ile iç çarpımını alalım;

$$g(N^*, L){k_1}^*\frac{ds^*}{ds} = m'g(L, L) + n'g(N, L) + (m + nk_1)g(W_1, L) + nk_2g(W_2, L)$$

olur. O halde (6.2) eşitliklerinden

$$n' = 0$$

olur.Yani;

$$n = a(sabit).$$

Son olarak ise (6.12) eşitliğinin W_2 ile iç çarpımını alalım;

$$g(N^*, W_2){k_1}^*\frac{ds^*}{ds} = m'g(L, W_2) + n'g(N, W_2) + (m + nyk_1)g(W_1, W_2) + nk_2g(W_2, W_2)$$

eşitliğini elde ederiz. Yine (6.2) eşitliklerinden;

$$nk_2 = 0$$

olur. Buradan $n = c(sabit)$ olduğundan

$$k_2 = 0$$

olur. $m = \frac{ds}{ds^*}(1 + \lambda k_1) = sabit$, $n = \lambda\frac{ds}{ds^*} = sabit$ olduğu için

$$\frac{ds}{ds^*} = sabit \text{ ve } \quad k_1 = sabit$$

olarak bulunur. $k_1 = sabit$ ve $k_2 = 0$ olduğundan ise Teorem 5.2'den spacelike γ^*eğrisinin bir Bertand null çifti vardır.

Durum 1.3: ${W_1}^*$ null olabilir. O halde $\{W_1, N^*\}$ lineer bağımlı olacağından Bertrand eğri çifti tanımından;

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \lambda W_1 \quad (6.13)$$

şeklinde yazabiliriz. (6.13) eşitliğinin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$L = L^* \frac{ds^*}{ds} - \lambda k_1 L - \lambda N + \lambda' W_1$$

elde edilir. Bu eşitliğin W_1 ile iç çarpımını alalım;

$$g(L, W_1) = g(L^*, W_1)\frac{ds^*}{ds} - \lambda k_1 g(L, W_1) - \lambda g(N, W_1) + \lambda' g(W_1, W_1)$$

olur. (6.3) eşitlikleri kullanılarak $\lambda' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = sabit$'tir. O halde

$$L = L^* \frac{ds^*}{ds} - \lambda k_1 L - \lambda N$$

elde edilir. Bu eşitlikten ise

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda k_1)L + \lambda N$$

$$L^* = \frac{ds}{ds^*}(1 + \lambda k_1)L + \lambda \frac{ds}{ds^*} N \quad (6.14)$$

elde edilir. (6.14) eşitliğini aşağıdaki gibi yeniden parametrize edelim;

$$L^* = mL + nN \quad (6.15)$$

(6.15) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$\frac{dL^*}{ds^*} . \frac{ds^*}{ds} = m'L + n'N + mL' + nN'$$

elde edilir. $L^{*\prime} = k_1{}^* N^*$, $L' = W_1$, $N' = k_1 W_1 + k_2 W_2$ olduğu için,

$$k_1{}^* N^* \frac{ds^*}{ds} = m'L + n'N + (m + nk_1)W_1 + nk_2 W_2 \quad (6.16)$$

elde edilir. (6.16) eşitliğinin N ile iç çarpımını alırsak;

$$g(N^*, N)k_1{}^* \frac{ds^*}{ds} = m'g(L, N) + n'g(N, N) + (m + nk_1)g(W_1, N) + nk_2 g(W_2, N)$$

elde ederiz. Buradan ise yine (6.3) eşitliklerini kullanırsak,

$$m' = 0$$

olur. Yani;

$$m = c(sabit).$$

Şimdi ise (6.16) eşitliğini L ile iç çarpımını alalım;

$$g(N^*, L){k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = m' g(L, L) + n' g(N, L) + (m + nk_1) g(W_1, L) + nk_2 g(W_2, L)$$

olur. O halde (6.3) eşitliklerinden

$$n' = 0$$

olur.Yani;

$$n = a(sabit).$$

Son olarak ise (6.16) eşitliğini W_2 ile iç çarpımını alalım;

$$g(N^*, W_2){k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = m' g(L, W_2) + n' g(N, W_2) + (m + nk_1) g(W_1, W_2) + nk_2 g(W_2, W_2)$$

eşitliğini elde ederiz. Yine (6.3) eşitliklerinden;

$$nk_2 = 0$$

olur. Buradan $n = a(sabit)$ olduğundan

$$k_2 = 0$$

olur. $m = \frac{ds}{ds^*}(1 + \lambda k_1) = sabit$, $n = \lambda \frac{ds}{ds^*} = sabit$ olduğu için

$$\frac{ds}{ds^*} = sabit \text{ ve } \quad k_1 = sabit$$

olarak bulunur. $k_1 = sabit$ ve $k_2 = 0$ olduğundan ise Teorem 5.2'den bu spacelike γ^*eğrisinin bir Bertand null çifti vardır.

Durum2: N^*timelike olsun. $\{W_1, N^*\}$ lineer bağımlı olacağından Bertrand eğri çifti tanımından;

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda W_1 \tag{6.17}$$

olur. (6.17) eşitliğinin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = L - \lambda k_1 L - \lambda N + \lambda' W_1$$

elde edilir. Bu eşitliğin W_1 ile iç çarpımını alalım;

$$g(L,W_1)=g(L^*,W_1)\frac{ds^*}{ds}-\lambda k_1 g(L,W_1)-\lambda g(N,W_1)+\lambda' g(W_1,W_1)$$

olur. (6.4) eşitlikleri kullanılarak $\lambda'=0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda=sabit$'tir.

O halde

$$L^*\frac{ds^*}{ds}=L-\lambda k_1 L-\lambda N$$

elde edilir. Bu eşitlikten ise

$$L^*\frac{ds^*}{ds}=(1-\lambda k_1)L-\lambda N$$

$$L^*=\frac{ds}{ds^*}(1-\lambda k_1)L-\lambda\frac{ds}{ds^*}N \tag{6.18}$$

elde edilir. (6.18) eşitliğini aşağıdaki gibi yeniden parametrize edelim;

$$L^*=mL+nN \tag{6.19}$$

(6.19) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$\frac{dL^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds}=m'L+n'N+mL'+nN'$$

elde edilir. $L^{*\prime}=k_1{}^*N^*$, $L'=W_1$, $N'=k_1W_1+k_2W_2$ olduğu için,

$$k_1{}^*N^*\frac{ds^*}{ds}=m'L+n'N+(m+nk_1)W_1+nk_2W_2 \tag{6.20}$$

elde edilir. (6.20) eşitliğinin N ile iç çarpımını alırsak;

$$g(N^*,N)k_1{}^*\frac{ds^*}{ds}=m'g(L,N)+n'g(N,N)+(m+nk_1)g(W_1,N)+nk_2g(W_2,N)$$

elde ederiz. Buradan ise yine (6.4) eşitliklerini kullanırsak,

$$m'=0$$

olur. Yani;

$$m=c(sabit).$$

Şimdi ise (6.20) eşitliğini L ile iç çarpımını alalım;

$$g(N^*,L)k_1{}^*\frac{ds^*}{ds}=m'g(L,L)+n'g(N,L)+(m+nk_1)g(W_1,L)+nk_2g(W_2,L)$$

olur. O halde (6.4) eşitliklerinden

$$n'=0$$

olur. Yani;

$$n = a(sabit).$$

olur. (6.20) eşitliğini W_2 ile iç çarpımını alırsak;

$$g(N^*, W_2){k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = m' g(L, W_2) + n' g(N, W_2) + (m + nk_1) g(W_1, W_2) + nk_2 g(W_2, W_2)$$

eşitliğini elde ederiz. Yine (6.4) eşitliklerinden;

$$nk_2 = 0$$

olur. Buradan $n = a(sabit)$ olduğundan

$$k_2 = 0$$

olur. $m = \frac{ds}{ds^*}(1 + \lambda k_1) = sabit$, $n = \lambda \frac{ds}{ds^*} = sabit$ olduğu için

$$\frac{ds}{ds^*} = sabit \text{ ve } \quad k_1 = sabit$$

olarak bulunur. $k_1 = sabit$ ve $k_2 = 0$ olduğundan ise Teorem 5.2'den bu spacelike γ^*eğrisinin bir Bertand null çifti vardır.

<u>Problem 2</u>. M^4 'de bir Kartan (Cartan) null eğrinin Bertrand çifti timelike olamaz mı?

<u>İspat:</u> γ, M^4 uzayında herhangi bir null Kartan (Cartan) eğrisi ve bu eğrinin Bertrand çifti γ^* olsun. Ayrıca γ ve γ^*'ın Kartan (Cartan) çatıları sırasıyla $\{L, N, W_1, W_2,\}$ ve $\{L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*\}$, Kartan (Cartan) eğrilikleri sırasıyla $\{k_1, k_2\}$, $\{{k_1}^*, {k_2}^*\}$ ve pseudo yay parametreleri sırasıyla s ve s^* olsun. γ^* eğrisinin timelike olduğunu kabul edelim.

Bu durumda γ^*'ın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir (Camcı, İlarslan ve Sucurovic, 2003) ;

$$L^{*\prime} = {k_1}^* N^*$$

$$N^{*\prime} = {k_1}^* L^* + {k_2}^* {W_1}^*$$

$${W_1}^{*\prime} = {k_2}^* N^*$$

$${W_2}^{*\prime} = 0$$

ve $L^*, N^*, {W_1}^*, {W_2}^*$ ortogonal vektörler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$g(L^*, L^*) = -1, g(N^*, N^*) = g({W_2}^*, {W_2}^*) = g({W_1}^*, {W_1}^*) = 1 . \quad (6.21)$$

Bu durumda Bertrand çifti tanımından $\{W_1, N^*\}$ lineer bağımlı olacağından;

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda W_1 \quad (6.22)$$

olmalıdır. s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$\frac{ds^*}{ds} L^* = (1 - \lambda k_1)L - \lambda N + \lambda' W_1$$

olur. Buradan

$$L^* = \frac{ds}{ds^*}(1 - \lambda k_1)L - \frac{ds}{ds^*}\lambda N + \frac{ds}{ds^*}\lambda' W_1 \quad (6.23)$$

elde edilir.(6.23) eşitliğinin N^* ile iç çarpımını alırsak

$$\lambda' = 0$$

olur, yani; λ sabittir.

O halde

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = L - \lambda k_1 L - \lambda N$$

olup buradan,

$$L^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1)L - \lambda N$$

$$L^* = \frac{ds}{ds^*}(1 - \lambda k_1)L - \lambda \frac{ds}{ds^*} N \quad (6.24)$$

elde edilir. (6.24) eşitliğini aşağıdaki gibi yeniden parametrize edelim;

$$L^* = xL + yN \quad (6.25)$$

(6.25) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak;

$$\frac{dL^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = x'L + y'N + xL' + yN'$$

elde edilir. $L^{*\prime} = {k_1}^* N^*$, $L' = W_1$, $N' = k_1 W_1 + k_2 W_2$ olduğu için,

$$ {k_1}^* N^* \frac{ds^*}{ds} = x' L + y' N + (x + y k_1) W_1 + y k_2 W_2 \qquad (6.26) $$

elde edilir. (6.26) eşitliğinin ilk olarak W_1 ile iç çarpımını alırsak ;

$$ g(N^*, W_1) {k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = x' g(L, W_1) + y' g(N, W_1) + (x + y k_1) g(W_1, W_1) + y k_2 g(W_2, W_1) $$

elde edilir. Buradan (6.26) eşitliğinin N ile iç çarpımını alalım;

$$ g(N^*, N) {k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = x' g(L, N) + y' g(N, N) + (x + y k_1) g(W_1, N) + y k_2 g(W_2, N) $$

elde ederiz. Buradan ise yine (6.21) eşitliklerini kullanırsak,

$$ x' = 0 $$

olur. Yani;

$$ x = c(sabit). $$

Şimdi ise (6.26) eşitliğini L ile iç çarpımını alalım;

$$ g(N^*, L) {k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = x' g(L, L) + y' g(N, L) + (x + y k_1) g(W_1, L) + y k_2 g(W_2, L) $$

olur. O halde (6.21) eşitliklerinden

$$ y' = 0 $$

olur.Yani;

$$ y = a(sabit). $$

Son olarak ise (6.26) eşitliğini W_2 ile iç çarpımını alalım;

$$ g(N^*, W_2) {k_1}^* \frac{ds^*}{ds} = x' g(L, W_2) + y' g(N, W_2) + (x + y k_1) g(W_1, W_2) + y k_2 g(W_2, W_2) $$

eşitliğini elde ederiz. Yine (6.21) eşitliklerinden;

$$ y k_2 = 0 $$

olur. Buradan $y = a(sabit)$ olduğundan

$$ k_2 = 0 $$

olur. $x = \frac{ds}{ds^*}(1 + \lambda k_1) = sabit$, $y = \lambda \frac{ds}{ds^*} = sabit$ ve $\lambda = sabit$ olduğu için

$$\frac{ds}{ds^*} = sabit \text{ ve } \quad k_1 = sabit$$

olarak bulunur. $k_1 = sabit$ ve $k_2 = 0$ olduğundan ise Teorem 5.2'den bu spacelike γ^*eğrisinin Bertand çifti γ gerçektende bir null eğri olur.

Örnek: γ, M^4 uzayında bir Kartan (Cartan) eğrisi olsun ve s herhangi bir parametre ve $w \in \mathbb{R}$, olmak üzere

$$\gamma(s) = \frac{1}{w^2}(\sinh ws, \cosh ws, \sin ws, \cos ws)$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\gamma'(s) = \frac{1}{w^2}(\mathrm{w}\cosh ws, \mathrm{w}\sinh ws, \mathrm{w}\cos ws, -\mathrm{w}\sin ws)$$

elde edilir. Buradan ise

$$g\big(\gamma'(s), \gamma'(s)\big) = 0$$

olup γ bir null Kartan (Cartan) eğrisidir.

$$\gamma''(s) = \frac{1}{w^2}(w^2\sinh ws, w^2\cosh ws, -w^2\sin ws, -w^2\cos ws)$$

Buradan da

$$g\big(\gamma''(s), \gamma''(s)\big) = 2$$

olup $L = \dfrac{\gamma^{'}(t)}{\langle \gamma^{''}(t), \gamma^{''}(t)\rangle^{\frac{1}{2}}}$ olduğundan

$$L = \frac{1}{w^2\sqrt{2}}(\sinh ws, \cosh ws, \sin ws, \cos ws)$$

olarak bulunur. $L^{'} = W_1$ olduğundan ise

$$W_1 = \frac{1}{w^2\sqrt{2}}(w^2\sinh ws, w^2\cosh ws, -w^2\sin ws, -w^2\cos ws)$$

dir. Bu durumda γ eğrisinin Bertrand çifti ($\lambda = sabit\ eğriler\ arasındaki\ uzaklık$)

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda W_1$$

şeklinde olacaktır. O halde

$$\gamma^*(s) = \frac{1}{w^2}\left((1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\sinh ws, (1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\cosh ws, (1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\sin ws, (1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\cos ws\right)$$

dir. γ^* eğrisi timelike bir eğridir. Gerçekten;

$$\gamma^{*\prime}(s) = \frac{1}{w^2}\left((1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\,\mathrm{wcosh}\, ws, (1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\ \mathrm{wsinh}\, ws, (1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\,\mathrm{wcos}\, ws, -(1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w^2)\mathrm{wsin}\, ws\right)$$

olup

$$g\left(\gamma^{*\prime}(s), \gamma^{*\prime}(s)\right) = \frac{-4\lambda}{\sqrt{2}} < 0$$

dır. Dolayısıyla null bir eğrinin Bertrand çifti timelike olur.

Sonuç: M^4 uzayında herhangi bir null eğrinin Bertrand çifti null olmak zorunda değildir.

KAYNAKLAR

Artin E., 1975. Geometric Algebra, *Interscience Publishers, New York.*: 115 p.

Bejancu A., 1994 . Lightlike Curves in Lorentz Manifolds, *Publ. Math. Debrecen*. 44: 145-155.

Bertrand J. M., 1850. Memoire Sur La Double a Theore des Courbes , *Comptes Rendus Vol.* 36.

Bonnor W., 1969 . Null curves in Minkowski Space-time, *Tensor N.S.* 20: 229-242.

Camci Ç., İlarslan K. Sucurovic E., 2003. On Pseudohyperbolical Curves in Minkowski Space-time ,*Turk J. Math.* 27: 315-328.

Coken A. C. ve Ciftci Ü., 2005. On the Cartan Curvatures of a Null Curve in Minkowski Space-time, *Geometriae dedicate.* 114: 71-78.

Duggal K. L. ve Bejancu A ., 1996. *Lightlike Submonifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers.: 1-18.

Duggal K. L. ve Jin D. H., 2007. *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Scientific. : 141-157.

Eisenhart L. P., 1909. Atreatise on Differantial Geometry of Curves and Surfaces, *Ginn and Company*: p 41.

Ferrandez A., Gimenez A. ve Lucas P., 2001. Null Helices in Lorentzian Space Forms, *Int. J. Mod. Phys. A* 16: 4845-4863.

Ferrandez A., Gimenez A. and Lucas P., 2002. Geometrical Particle Models on 3D Null Curves, *.Phys. Lett.* B 543 (3-4): 311-317.

Ferrandez A., Gimenez A. and Lucas P., 2002. Null Generalized Helices in Lorentz-Minkowski Spaces, *J. Phys. A: Math. Gen.* 35:8243-8251.

Ferrandez A., Gimenez A. ve Lucas P., 2002. Degenerate curves in Pseudo-Euclidean Spaces of Index Two, *Proc. 3rd Internat. Conf. On Geometry, Integrability and Quantization , Varna ,Bulgaria ,June* 14-23, *2001, Coral Press Scientific Publishing, Sofia*, pp.209-223.

Gök İ., Camcı Ç. ve Hacısalihoğlu H., 2009. V^n-Slant Helices in Euclidean n-Space E^n, *Math. Commun.,Vol.14*: pp.317-329.

Hayden H. A., 1931. On a general helix in a Riemannian n-space, *Proc. London Math. Soc.* 2: 37-45.

Izumiya S. ve Takeuchi N., 2004. New Special Curves and Developable Surface, *Turkish J. Math.* 28:153-165.

Inoguchi J. ve Lee S., 2006. Null Curves in Minkowski 3-space, *Preprint*.

Kula, L., Yayli, Y., (2005). On Slant Helix and its Spherical Indicatrix, *Applied Mathematics and Computation.* 169:600-607.

Langert M.A., 1806. Memoire Sur Les Courbes A Double Courbure, *Memoires presents a I'Institut* 1:416-454.

Önder M., Kazaz M. ve Kocayiğit H., 2010. Spacelike B2-Slant Helix in Minkowski 4-Space, *Int. Journal of the Physical Sciences, Vol*. 5(5):470-475p.

Millman R. S. ve Parker G. D., 2000. Elements of Differential Geometry, *Prentice-hall , New Jersey* . pp.36-4.

O'Neill B., 1983. *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press,New York, pp.110-112.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER:

Adı Soyadı : Gülay SARGIN

Doğum Yeri : ÇANAKKALE

Doğum Yılı : 1985

EĞİTİM DURUMU:

Lisans Öğrenimi : Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

İŞ DENEYİMİ:

1. Matematik Öğretmeni, Atatürk Lisesi

İLETİŞİM:

E-posta: sargin_17@hotmail.com