GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY MATRİSLERİNİN CEBİRSEL VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Nuh DURNA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY MATRİSLERİNİN CEBİRSEL VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

NUH DURNA
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. MUSTAFA YILDIRIM

SİVAS
2011

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmış ve jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

Üye : Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV

Üye : Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Üye : Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

ONAY

Bu tez çalışması, 12.05.2011 tarihinde 17/5 sayılı toplantıda Enstitü Yönetim Kurulu tarafından belirlenen ve yukarıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Mustafa DEĞİRMENCİ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 009 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY MATRİSLERİNİN CEBİRSEL VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Doktora Tezi

Nuh DURNA

Cumhuriyet Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, ilk önce Banach uzayları üzerinde sınırlı lineer operatörlerin temel özellikleri verilmiştir ve sınırlı lineer peratörlerin spektrumundan bahsedilmiştir. Daha sonra spektrumla ilgili temel teoremimizi ispatlayabilmemiz için gereken lemmaların ifadesinde bulunan C^*-cebirlerinin tanım ve özelliklerinden kısaca bahsedilmiştir ve C^*-cebirlerinin spektrumu açıklanmıştır. Devamında spektral teoride önemli bir yeri olan Fredholm teoriden bahsedilip, kompakt lineer operatörlerin daha geniş bir sınıfı olan Fredholm operatörleri ile esaslı spektruma kısaca giriş yapılmıştır. Birinci bölüm; Cesàro, Rhaly ve genelleştirilmiş Cesàro operatörleri için bilinen bazı sonuçların verilmesiyle sonlandırılmıştır.

İkinci bölümde genelleştirilmiş Rhaly matrisleri tanımlanmıştır. Bu matrislerin operatör teoride yer alan bazı özellikleri ve bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Rhaly matrisi ile ilgili spektral sonuçlar ispatlanmıştır ve bu operatörler için esaslı spektrum açık bir şekilde elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cesàro operatörü, Rhaly operatörü, genelleştirilmiş Cesàro operatörü, genelleştirilmiş Rhaly matrisi, spektrum, esaslı spektrum.

ABSTRACT

ALGEBRAIC AND SPECTRAL PROPERTIES OF GENERALIZED RHALY MATRICES

Ph. D. Thesis

Nuh DURNA

Cumhuriyet University

Institute of Science

Department of Mathematics

Advisor: Assistant Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

This thesis consist of three parts.

In the first part, initially, some basic properties of bounded linear operators defined on Banach spaces have been given and spectrum of bounded linear operators has been considered. Later, definition and properties of C^*-algebras, involved in states of lemmas which are needed to us prove our main theorem related with spectrum, have been considered and also the spectrum of C^*-algebra has been explained. Then, Fredholm Theory, which have a important role in spectral theory, has been recalled and by using Fredholm operators which is a more general class then compact linear operators, essential spectrum has been briefly introduced. We ended the first part by giving some known results about Cesàro, Rhaly and generalized Cesàro operators.

In the second part, generalized Rhaly matrices have been defined. Also, some known properties in operator theory has been proved for these matrices and some topological properties of these matrices have been given.

In the third part, spectral results for generalized Rhaly matrix has been proved and essential spectrum for generalized Rhaly matrix has been obtained explicitly.

Keywords: Cesàro operator, Rhaly operator, generalized Cesàro operator, generalized Rhaly matrix, spectrum, essential spectrum.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmam sırasında beni aydınlatan danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr.Mustafa YILDIRIM'a çalışmam sırasında yardımları esirgemeyen Bölüm Başkanımız Prof.Dr.Rauf AMİROV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Nuh DURNA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$B(X)$	X uzayı üzerinde verilen bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\mathcal{K}(X)$	X uzayı üzerinde verilen bütün kompakt lineer operatörlerin kümesi
$B_2(X)$	X uzayı üzerinde verilen bütün Hilbert-Schimidt operatörlerin kümesi
$N(T)$	T operatörünün sıfır uzayı
$R(T)$	T operatörünün değer kümesi
$\rho(T)$	T operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(T)$	T operatörünün spekturumu
$R_\lambda(T)$	$(\lambda I - T)^{-1}$ operatörü
$r(T)$	T operatörünün spektral yarıçapı
$\sigma_p(T)$	T operatörünün özdeğerlerinin kümesi
$\sigma_c(T)$	T operatörünün sürekli spektrumunun kümesi
$\sigma_r(T)$	T operatörünün rezidü spektrumunun kümesi
BMO	Sınırlı ortalama salınımlı fonksiyonların kümesi
VMO	Sıfırlayan ortalama salınımlı fonksiyonların kümesi
$g \in BMOA$	$g\left(e^{i\theta}\right) \in H^2$ ve $g \in BMO$
$g \in VMOA$	$g\left(e^{i\theta}\right) \in H^2$ ve $g \in VMO$
$\mathbb{T}$	Birim çember
$\mathbb{D}$	Açık birim daire
$\mathcal{B}$	$BMOA$ fonksiyonlarının türev uzayı
$\mathcal{D}$	$VMOA$ fonksiyonlarının türev uzayı
$\rho_+(T)$	Sol yarı Fredholm operatörü olan T operatörlerinin kümesi
$\rho_-(T)$	Sağ yarı Fredholm operatörü olan T operatörlerinin kümesi
$\sigma_e(T)$	T operatörünün esaslı spektrumunun kümesi
C	Cesàro operatörü
C_g	g sembolü ile genelleştirilmiş Cesàro operatörü
R_a	$\{a_n\}$ dizisi ile verilmiş Rhaly matrisi
$H(\mathbb{D})$	Birim diskte analitik fonksiyonların uzayı
H^p	Hardy uzayı

R_b^g	$\{b_n\}$ dizisi ile verilmiş g sembolü ile genelleştirilmiş Rhaly matrisi
$\mathcal{R}_b$	b dizisi ile verilen H^2 deki bütün sınırlı R_b^g lerin kümesi
ZOT	Zayıf operatör topoloji
KOT	Kuvvetli operatör topoloji

Eşim Ayşegül ve Oğlum Furkan'a

1. FONKSIYONEL ANALIZ VE OPERATÖR TEORI

1.1 Giriş

Bu bölümün amacı, sonraki bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremleri vermektir. İlk önce Banach uzayları üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin temel özelliklerini vereceğiz ve sınırlı lineer operatörün spektrumundan bahsedeceğiz. Daha sonra spektrumla ilgili temel teoremimizi ispatlayabilmemiz için gereken lemmaların ifadesinde bulunan C^*-cebirlerinin tanım ve özelliklerinden kısaca bahsedeceğiz ve C^*-cebirlerinin spektrumunu açıklayacağız. Devamında spektral teoride önemli bir yeri olan Fredholm teoriden bahsedip, kompakt lineer operatörlerin daha geniş bir sınıfı olan Fredholm operatörleri ile esaslı spektruma kısaca giriş yapacağız. Bu bölümü Cesàro, Rhaly ve genelleştirilmiş Cesàro operatörleri için bilinen bazı sonuçların verilmesiyle sonuçlandıracağız.

1.2 Operatör Teori

Fonksiyonel analiz sonlu veya sonsuz boyutlu vektör uzaylarının çalışılmasıdır. Bununla birlikte fonksiyonel analiz başlığı altında iki farklı disiplin vardır. Bu alanlardan birisi Hilbert uzayları üzerinde sınırlı operatörlerin çalışılmasıdır, bu operatör teori olarak adlandırılır. Bu bölümde operatör teoride kullanılan ana hatlar verilecektir.

Çalışmanın amacı bir Hilbert uzayı üzerinde verilen sınırlı lineer operatörün yapısı üzerinedir. $B(\mathcal{H})$ ile bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerindeki bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesini göstereceğiz. $B(\mathcal{H})$ ın kendisi bileşkenin doğal çarpımı ile bir Banach uzayıdır ve bir cebirsel yapıdır. Eğer $\dim \mathcal{H} = \infty$ ise $B(\mathcal{H})$ ın aşikar olmayan bir ideali, kompakt operatörlerin iki taraflı idealidir ve $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ile gösterilir. Sadelik için eğer $\mathcal{H}$, Hilbert uzayı belli ise $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{D} := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| < 1\}$$

olsun. Tez boyunca verilen Hilbert uzaylarının ayrılabilir olduğunu kabul edeceğiz.

Bu bölümde, ilk olarak sınırlı lineer operatör kavramını tanımlayıp bazı özelliklerini belirteceğiz. Daha sonra ise bir sınırlı lineer operatörün spektrumunun önemli özelliklerini belirttikten sonra, spektrumun ayrık bir ayrışımını vereceğiz.

1.3 Sınırlı Lineer operatör

X ve Y, aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$||Tx|| \leq M. ||x||$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa T operatörüne X uzayından Y uzayı içine bir *sınırlı lineer operatör* adı verilir ve X uzayından Y uzayı içine tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin sınıfı $B(X,Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y$ ise $B(X,X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır.

Bir lineer operatörün sıfır uzayını

$$N(T) := \{x \in X : Tx = 0\} \tag{1.1}$$

ve değer kümesini

$$R(T) := \{Tx : x \in X\} \tag{1.2}$$

ile göstereceğiz. Böylece T birebirdir $\Leftrightarrow N(T) = 0$ dır ve örtendir $\Leftrightarrow R(T) = Y$ dir.

$T, S \in B(X,Y)$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $(T+S)x = Tx + Sx$, $(\lambda T)x = \lambda Tx$ şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $B(X;Y)$, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır, ayrıca

$$||T|| = \sup_{x \neq \theta} \frac{||Tx||}{||x||} \tag{1.3}$$

normuyla birlikte bir normlu uzay olup, Y nin bir Banach uzayı olması halinde $B(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır ([6] Brown ve Page 1970, s. 105,[26] Rudin 1973, s. 88).

X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. X^*, X uzayının sürekli dualini göstermek üzere yani, $X^* = B(X, \mathbb{K})$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her $f \in X^*$ için

$$T^* : X^* \to X^*$$
$$(T^* f)x = f(Tx)$$

biçiminde tanımlanan T^* operatörüne T operatörünün *adjointi* denir.

T ile T^* adjoint operatörü arasındaki ilişkilerden bazılarını belirleyen önemli teoremleri ispatsız olarak aşağıda veriyoruz.

Teorem 1.1 *X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X^*)$ olup $\|T^*\| = \|T\|$ dir ([6] Brown ve Page 1970, s. 239).*

Teorem 1.2 *Eğer T ve T^* operatörlerinin tersleri mevcut ise $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ dir ([13] Goldberg 1966, s. 60,[11] Dunford ve Schwartz 1958, s. 479).*

Teorem 1.3 *X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T^{-1} ters operatörünün mevcut ve sınırlı olması için gerek ve yeter şart T^* operatörünün örten olmasıdır ([13] Goldberg 1966, s. 60).*

Teorem 1.4 *X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T döşümünün X içinde yoğun bir görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart T^* operatörünün bire-bir olmasıdır ([13] Goldberg 1966, s. 59).*

Tanım 1.1 *X ve Y birer Banach uzayı ve $T \in B(X,Y)$ olsun. $\mathbb{D}$, X içinde açık birim yuvar olmak üzere $\overline{T(\mathbb{D})}$, Y içinde kompakt ise T operatörüne kompakttır denir ([19] Hutson ve Pym 1980, s. 179;[26] Rudin 1973, s. 97).*

Kompakt operatörlerin bazı özelliklerini aşağıdaki teoremlerle ifade edebiliriz.

Teorem 1.5 *X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer T döşümünün görüntü uzayı $R(T)$, sonlu boyutlu ise T kompakttır ([19] Hutson ve Pym 1980, s. 180;[26] Rudin 1973, s. 98).*

Teorem 1.6 *X bir Banach uzayı ve (T_n), $B(X)$ deki kompakt operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer (T_n) dizisi T ye düzgün operatör yakınsak ise $T \in B(X)$ de kompakttır ([19] Hutson ve Pym 1980, s. 180;[20] Kreyszig 1978, s. 408).*

Operatörlerin somut fonksiyon uzaylarında incelenmesinde, kompakt kümelerden sıkça yararlanılması nedeniyle, kompakt kümelerin öğrenilmesinde kolaylıkla kullanılabilen kriterlerin bulunması önem taşımaktadır. Bu nedenle şimdi

Ω herhangi bir X Banach uzayının önkompakt bir kümesi olmak üzere, uygulamalarda en çok kullanılan $C(\Omega;\mathbb{K})$ ve $L_p(\Omega;\mathbb{K})$ uzaylarında mevcut olan kompaktlık kriterlerinden bahsedelim.

Tanım 1.2 *$(X, \|.\|)$ Banach uzayının önkompakt bir Ω kümesi ve $E \subset (C(\Omega), \|.\|_\infty)$ kümesi verilsin.*
(a) Eğer her $x \in E$ ve her $t \in \Omega$ için $|x(t)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa E kümesi düzgün sınırlıdır denir.
(b) Eğer her $\epsilon > 0$ için enaz bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyleki her $t_1, t_2 \in \Omega$ ve her $x \in E$ için

$$\|t_1 - t_2\| < \delta \text{ iken } |x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon$$

oluyorsa, E kümesi $(C(\Omega), \|.\|_\infty)$ da aynı dereceden süreklidir denir.

Teorem 1.7 (Arzelà-Ascoli) *$(X, \|.\|)$ Banach uzayının önkompakt bir Ω kümesi ve $E \subset (C(\Omega), \|.\|_\infty)$ kümesi verilsin. E nin $(C(\Omega), \|.\|_\infty)$ da önkompakt olması için gerekli ve yeterli koşul E nin $(C(\Omega), \|.\|_\infty)$ da düzgün sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır ([24] Musayev ve Alp 2000, s.231).*

Şimdi $L_p(\Omega;\mathbb{K})$ uzayında bir kompaktlık kriteri verelim. Her $x \in L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ fonksiyonunu $[0,1]$ aralığının dışına $x(t) = 0$ olarak devam ettirelim. O zaman her $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde $\int_a^b |x(s)|^p \, ds$ integrali mevcuttur.

Tanım 1.3 *$\left(L_p[0,1], \|.\|_p\right)$ $(1 < p < \infty)$ Banach uzayının bir E alt kümesi verilsin. Eğer her $\epsilon > 0$ için en az bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyleki her $0 < h < \delta$ ve her $x \in E$ için*

$$\int_0^1 |x(s+h) - x(s)|^p \, ds < \epsilon^p$$

oluyorsa, E kümesi ortalama anlamında aynı dereceden süreklidir denir. Eğer her $x \in E$ için $\|x\|_p \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa E kümesi $\left(L_p[0,1], \|.\|_p\right)$ uzayında düzgün sınırlıdır denir.

Teorem 1.8 (M. Riesz) *$E = \{x(t) : x(t) \in L_p[0,1]\}$ kümesinin $\left(L_p[0,1], \|.\|_p\right)$ de kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul E nin $\left(L_p[0,1], \|.\|_p\right)$ de düzgün* *sınırlı ve ortalama anlamında aynı dereceden sürekli olmasıdır ([24] Musayev ve Alp 2000, s.235).*

1.4 Spektrum

Bu kısımda X i $\mathbb{C}$, kompleks sayılar cismi üzerinde bir normlu vektör uzayı olarak göz önüne alıp, θ ile X vektör uzayının sıfır elemanını ve I ile X den X içine tanımlı özdeşlik operatörünü göstereceğiz.

Tanım 1.4 *$X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T operatörünün bir regüler değeri; T nin bütün regüler değerlerinin oluşturduğu cümleye de T operatörünün rezolventi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$ cümlesine de T nin spektrumu adı verilir. Buna göre, eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise*
(i) $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut
(ii) $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırlı (yani sürekli)
(iii) $(\lambda I - T)^{-1}$ X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı
özelliklerinden enaz biri gerçeklenmez ([20] Kreyszig 1978, s. 371).

Eğer T sınırlı lineer operatörü birden fazla normlu uzay üzerinde gözönüne alınıyorsa, gözönüne alındığı X normlu uzayını belirtmek için $\rho(T)$ yerine $\rho(T, X)$ ve $\sigma(T)$ yerine $\sigma(T, X)$ yazacağız.

Kapalı grafik teoreminden $\lambda \in \rho(T)$ iken

$$R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1} \tag{1.4}$$

ters operatörü her zaman sınırlıdır. $\lambda \in \rho(T)$ iken bu operatöre genellikle λ da T nin *rezolvent operatörü* denir. $|\lambda| > \|T\|$ ile verilen her λ için $\lambda \in \rho(T)$ ve

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \tag{1.5}$$

elde ederiz.

Bunun anlaşılması için aşağıda Teorem 1.12 (b) verilecektir. Son olarak,

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \tag{1.6}$$

sayısına T nin *spektral yarıçapı* denir. Bu sayı bir kompleks Banach uzayı durumunda

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|} \tag{1.7}$$

Gel'fand formülü ile hesaplanabilir.

Tanım 1.5 *$T : X \to X$ lineer bir operatör olsun. Eğer $Tx = \lambda x$ olacak biçimde X içinde bir $x \neq \theta$ elemanı varsa λ kompleks sayısına T lineer operatörünün bir özdeğeri ve $x \in X$ elemanına da bir özvektör adı verilir ([6] Brown ve Page 1970, s. 230,[20] Kreyszig 1978, s. 372).*

Tanım 1.5 gereğince "λ kompleks sayısının, T nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\lambda I - T$ operatörünün bire-bir olmamasıdır" önermesi doğrudur. Buradan şu sonucu elde ederiz.

Sonuç 1.1 *$X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $\lambda \in \mathbb{C}$, T nin bir özdeğeri ise $\lambda \in \sigma(T, X)$ dir.*

$X \neq \{\theta\}$ bir normlu uzay olmak üzere $T \in B(X)$ operatörünün bütün özdeğerlerinin oluşturduğu cümleyi $\sigma_p(T, X)$ ile göstereceğiz ve T operatörünün nokta (point) spektrumu diyeceğiz.

Bilindiği gibi eğer X sonlu boyutlu bir normlu uzay ise $T : X \to X$ lineer operatörü sınırlı ve T^{-1} ters operatörünün mevcut olması için gerek ve yeter şart T operatörünün bire-bir olmasıdır. O halde şu önemli sonucu elde ederiz.

Sonuç 1.2 *$X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer operatör olsun. Bu durumda $\sigma_p(T, X) = \sigma(T, X)$ dir.*

Burada hemen belirtelim ki, X sonsuz boyutlu bir normlu uzay ise $T \in B(X)$ operatörü için $\sigma_p(T, X) \subset \sigma(T, X)$ bağıntısı genellikle kesin içerme bağıntısıdır.

Şimdi sınırlı lineer bir operatörün spektral özelliklerini veren aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 1.9 *$X \neq \{\theta\}$ sonsuz boyutlu bir uzay ve $T \in B(X)$ operatörü kompakt ise $0 \in \sigma(T, X)$ dir ([6] Brown ve Page 1970, s. 255,[19] Hutson ve Pym 1980, s. 188).*

Teorem 1.10 *$X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ operatörü kompakt olsun. Bu durumda $\lambda \in \sigma(T,X)$ ve $\lambda \neq 0$ ise $\lambda \in \sigma_p(T,X)$ dir ([6] Brown ve Page 1970, s. 255,[11] Dunford ve Schwartz 1958, s. 577).*

Teorem 1.11 *$X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*, X^*) \subseteq \sigma(T,X)$ dir. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*, X^*) = \sigma(T,X)$ dir ([6] Brown ve Page 1970, s. 255,[11] Dunford ve Schwartz 1958, s. 568).*

Ancak $\sigma_p(T^*, X^*)$ ile $\sigma_p(T,X)$ arasında yukarıdaki teoremdeki gibi bir karşılaştırma yapılamamaktadır.

Daha fazla bilgi için aşağıdaki teoremde spektrum, rezolvent operatör ve spektral yarıçapla ilgili bazı önemli özellikler verilmiştir (bkz [4] Appell, Pascale ve Vignoli 2004).

Teorem 1.12 *$\rho(T)$ ve $\sigma(T)$ kümeleri, $R_\lambda(T)$ operatörü ve $r(T)$ sayısı için aşağıdaki özellikler doğrudur.*

(a) $T, S \in B(X)$ için

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T) \quad , \qquad (\lambda, \mu \in \rho(T)) \tag{1.8}$$

ve

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(T - S) R_\lambda(S) \ , \ (\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)) \tag{1.9}$$

rezolvent özdeşlikleri doğrudur. Ayrıca $R_\lambda(T)$ ve $R_\mu(T)$ $\lambda, \mu \in \rho(T)$ için değişmelidir.

(b) $|\lambda| > r(T)$ ile herbir $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{T}{K}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}I + \frac{1}{\lambda^2}T + \frac{1}{\lambda^3}T^2 + \cdots) \tag{1.10}$$

Neumann serisi $B(X)$ de yakınsaktır.

(c) $\lambda \in \rho(T)$ ve $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda(T)\|^{-1}$ olması $\mu \in \rho(T)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\rho(T)$, $\mathbb{C}$ de açıktır.

(d) $\lambda \in \rho(T)$ olmak üzere $\lambda \to R_\lambda(T) \in B(X)$ operatörü analitiktir, böylece kompleks durumunda $\rho(T)$ kompleks düzlemin bir özalt kümesidir, dolayısıyla $\sigma(T) \neq \emptyset$ dir.

(e)

$$r(T) \leq \|T\| \tag{1.11}$$

eşitsizliği doğrudur; X bir Hilbert uzayı ve T normalse (yani, Hilbert adjointi ile değişmeli ise) (1.11) de eşitlik sağlanır.

(f) $\sigma(T)$ kapalı ve sınırlıdır dolayısıyla kompakttır.

(g) Tersine, boşkümeden farklı kompakt bir $\Sigma \subset \mathbb{C}$ kümesi verildiğinde $\sigma(T) = \Sigma$ olacak şekilde bir $T \in B(X)$ operatörü ve X Banach uzayı bulabiliriz.

(h) Herbir $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ polinomu için

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) \tag{1.12}$$

özdeşliği sağlanır.
Burada $P(T) = a_nT^n + \cdots + a_1T + a_0I$ ve $P(\sigma(T)) = \{P(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ dir. (Bu teoreme spektral dönüşüm teoremi denir.)

(i) Sabit bir $T \in B(X)$ ve her $G \supseteq \sigma(T)$ açık kümesi için $\|S - T\| < \delta$ olan her $S \in B(X)$ için $\sigma(S) \subseteq G$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcuttur (Appell, Pascale ve Vignoli 2004, s 13).

(g) şıkkı ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek 1.1 *$X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ seçelim ve $(a_n)_n$, Σ kümesinde yoğun olmak üzere*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots) \tag{1.13}$$

olsun. $a_nI - T$ nin her $n \in \mathbb{N}$ için tersinir olmadığı açıktır, $\sigma(T)$ nin kompaktlığı ile birlikte $\Sigma \subseteq \sigma(T)$ sağlanır. Diğer taraftan her bir $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Sigma$ noktası Σ dan bir pozitif uzaklığa sahiptir ve böylece $\lambda I - T$ operatörü

$$R_\lambda(T)(x_1, x_2, x_3, \ldots) := \left((\lambda - a_1)^{-1} x_1, (\lambda - a_2)^{-1} x_2, \ldots\right)$$

tersi ile bir izomorfizmadır. Böylece bu λ lar için $\lambda \in \rho(T)$ dir ve dolayısıyla $\sigma(T) \subseteq \Sigma$ dir.

Uyarı 1.1 *(h) şıkkındaki ifade, polinomlardan daha genel operatörler için de doğrudur.*

(i) deki ifade herbir sınırlı lineer T operatöründen onun $\sigma(T)$ spektrumu ile $B(X)$ den $\mathbb{C}$ içine üst yarı sürekli (çok değerli) operatör olduğunu gösterir. Bu

operatörün genel olarak alt yarı sürekli olmadığına örnek verilebilir. Bunun anlamı T *nin sürekliliği değiştiğinde* $\sigma(T)$ *"hızlıca büyümez" fakat "hızlıca büzülme" yapabilir.*

Örnek 1.2 $X = \ell_1(\mathbb{Z})$ *alışılmış norm ile tamsayılarla indekslenmiş bütün toplanabilir*

$$x = (x_n)_n = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

dizilerinin uzayı olsun. Herbir $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *için,*

$$y_k = \begin{cases} x_{k-1} & , k \neq 0 \\ \varepsilon x_{k-1} & , k = 0 \end{cases}$$

ile verilmiş $x = (x_n)_n$ *ve* $y = (y_n)_n$ *dizileri için* $T_\varepsilon x = y$ *ile* $T_\varepsilon \in B(X)$ *operatörü tanımlansın.*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$$

açık kompleks birim diski göstermek üzere $\sigma(T_0) = \bar{\mathbb{D}}$ *elde ederiz. Diğer deyişle*

$$\sigma(T_\varepsilon) = \mathbb{T} := \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, (\varepsilon \neq 0)$$

dır. Böylece, ε *sıfırdan sıfır olmayan bir değere değiştiğinde spektrum çöker.*

1.5 Spektrumun Ayrışımı

Sınırlı lineer bir operatörün spektrumu birçok farklı yolla ayrıştırılır, bunlardan bazıları fiziğin uygulamalarına götürür (özellikle quantum mekaniği).

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ operatörü, X in bir yoğun alt uzayında tanımlı ve sınırsızsa bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ ye T nin $\sigma_c(T)$ *sürekli spektrumuna* aittir denir. Ayrıca eğer $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, ancak onun tanım bölgesi (yani;$\lambda I - T$ nin $R(\lambda I - T)$ değer kümesi), X de yoğun değilse $\lambda \in \mathbb{C}$ ye T nin $\sigma_r(T)$ *rezidü spektrumuna* aittir denir, bu durumda $R_\lambda(T)$ sınırlı veya sınırsız olabilir. $\sigma_p(T)$ point spektumu ile birlikte bu iki spektrum T nin

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \tag{1.14}$$

spektrumun bir ayrık ayrışımıdır. Kabaca konuşacak olursak altspektrumdaki λ elemanlarının karakterize edilmesi için, $\lambda I - T$ operatörünün , $\sigma_p(T)$ de 1-1 ve örtenliği, $\sigma_r(T)$ de örtenliği ve $\sigma_c(T)$ de de stability (durgunluğu) mevcut değildir. (1.14) ayrışımını izah etmek için aşağıdaki tabloyu ve bazı örnekler verelim.

	$R_\lambda(T)$ mevcut ve sınırlı	$R_\lambda(T)$ mevcut fakat sınırsız	$R_\lambda(T)$ mevcut değil
$R(\lambda I - T) = X$	$\lambda \in \rho(T)$	–	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$\overline{R(\lambda I - T)} = X$	$\lambda \in \rho(T)$	$\lambda \in \sigma_c(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

Tabloda; X bir Banach uzayı olduğundan; 1. satır ve 2. sütunun kapalı grafik teoreminden mümkün olmadığını belirtelim.

Teorem 1.13 (Kapalı Grafik) *X ve Y, Banach uzayı ve $T : D(T) \to Y$ kapalı bir operatör olsun (yani grafiği $X \times Y$ de kapalı). Eğer $D(T)$ tanım kümesi X de kapalı ise T operatörü sınırlıdır.*

$R(\lambda I - T) = X \Rightarrow \overline{R(\lambda I - T)} = \overline{X} = X = R(\lambda I - T)$ kapalı yani $R_\lambda(T)$ nin tanım kümesi kapalı olduğundan kapalı grafik teoreminden $R(\lambda I - T) = X$ iken $R_\lambda(T)$ sınırsız olamaz.

Eğer biz 3.sütunda değilsek, yani eğer λ, T nin bir özdeğeri değilse, daima $R_\lambda(T)$ operatörünü $\lambda I - T$ nin cebirsel tersi gibi düşünebiliriz.

Örnek 1.3 *$X = \ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, (a_n), $\mathbb{K}$ da sınırlı bir dizi ve*

$$\begin{aligned} T :\ & \ell^p \to \ell^p \\ & x_n \longmapsto (a_n x_n) \end{aligned}$$

olsun. (a_n) sınırlıdır $\Leftrightarrow T \in B(\ell^p)$ dır. İlk önce $p < \infty$ olsun. (a_n) dizisinin bütün elemanlarının kümesini $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ ile gösterelim, bu durumda

$$\sigma(T) = \overline{A}, \quad \sigma_p(T) = A, \quad \sigma_c(T) = \overline{A} \backslash A, \quad \sigma_r(T) = \emptyset \tag{1.15}$$

elde ederiz. Özellikle eğer $a_n \to 0$ *ise, yani;* $T \in \mathcal{K}(\ell^p)$ *ise* $\sigma_c(L) = \{0\}$ *dır.*
$p = \infty$ *durumunda rezidü ve sürekli spektrumun rolleri değişir, yani*

$$\sigma(T) = \overline{A}, \quad \sigma_p(T) = A, \quad \sigma_c(T) = \emptyset, \quad \sigma_r(T) = \overline{A} \backslash A \tag{1.16}$$

elde ederiz. Bu örneği Teorem 1.12 (g) nin ispatı için kullanabiliriz.

Örnek 1.4 $\mathbb{C}$ *üzerinde* $X = \ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *olsun ve* T *bir*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := \quad (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

sol kaydırma operatörü olsun. $r(T) = \|T\| = 1$ *ile* $T \in B(\ell^p)$ *olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla* $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ *dir. Ayrıca* T *örtendir fakat 1-1 değildir çünkü onun sıfır uzayı*

$$N(T) = \quad \{(x_n) \in \ell^p : x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = 0\}$$

dır. Özellikle bu $0 \in \sigma_p(T)$ *olmasını sağlar.*
T *nin spektrumunu incelemek için* $1 \leq p < \infty$ *ve* $p = \infty$ *durumlarını ayıralım.*
$1 \leq p < \infty$ *için dikkatli bir analizle*

$$\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}, \quad \sigma_p(T) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T) = \emptyset \tag{1.17}$$

olduğunu ve $p = \infty$ *için*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset \tag{1.18}$$

olduğunu görürüz. Gerçekten de λ *özdeğerinin özuzayı her* $|\lambda| < 1$ *için* ℓ^p *ye ait olan* $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ *vektörü tarafından üretilir, fakat bu* ℓ_∞ *da yalnızca* $|\lambda| = 1$ *iken geçerlidir.*

Örnek 1.5 $\mathbb{C}$ *üzerinde* $X = \ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *olsun ve*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots) \tag{1.19}$$

sağ kaydırma operatörü olsun. $r(T) = \|T\| = 1$ *ile* $T \in B(\ell^p)$ *olduğunu kolayca görebiliriz. Dolayısıyla* $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ *dir. Bu örnekte* T*, 1-1 dir fakat örten değildir, çünkü onun*

$$R(T) = \{(y_n) \in \ell^p : y_1 = 0\}$$

tanım kümesi ℓ^p *de yoğun bile değildir. Özellikle bu* $0 \in \sigma_r(T)$ *olmasını sağlar. Şimdi* T *nin spektrumun yukarıda verilen ayrışımını yapalım. Bunun için* $p = 1$, $1 < p < \infty$ *ve* $p = \infty$ *durumlarını ayıralım.*

$$p = 1 \text{ veya } \quad p = \infty \text{ durumlarında}$$

$$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \overline{\mathbb{D}}\ , \quad \sigma_p(T) = \sigma_c(T) = \emptyset \tag{1.20}$$

ve $1 < p < \infty$ *için*

$$\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}\ , \quad \sigma_p T = \emptyset \quad \sigma_c(T) = \mathbb{T}\ , \quad \sigma_r(T) = \mathbb{D} \tag{1.21}$$

dir. Dikkat edecek olursak sağ kaydırma operatörünün hiçbir ℓ^p *uzayında özdeğeri yoktur.*

Teorem 1.9 da sonsuz boyutlu uzayda bir kompakt lineer operatörün spektrumunda 0 ın bulunduğunu görmüştük. Biz şimdi 0 ın spektral ayrışım içerisinde hangi kümeye ait olduğunu veren aşağıdaki örnekleri verelim.

Örnek 1.6 $\mathbb{C}$ *üzerinde* $X = \ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *olsun. Eğer*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots\right) \tag{1.22}$$

ile $T \in \mathcal{K}(\ell^p)$ *gösterirsek* $0 \in \sigma_c(T)$ *dir. Çünkü,*

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_1, 2y_2, 3y_3, \ldots)$$

ters operatörü ℓ^p *nin bir yoğun alt uzayı üzerinde tanımlıdır ve* ℓ^p *de sınırlı değildir. Sonuç olarak*

$$\sigma_p(T) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}, \quad \sigma_c(T) = \{0\}\,, \quad \sigma_r(T) = \emptyset$$

dir. Çünkü $T \in \mathcal{K}(\ell^p) \Rightarrow \sigma(T) = \sigma_p \cup \{0\}$ *dır. O halde* $\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) = \{0\}$ *ve* $\sigma_c(T) = \{0\}$ *ve* $\sigma_c(T) \cap \sigma_r(T) = \emptyset$ *olduğundan* $\sigma_r(T) = \emptyset$ *dır. Diğer taraftan*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_2, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_4, \frac{1}{4}x_5, \ldots\right) \tag{1.23}$$

biçiminde tanımlanırsa $T \in \mathcal{K}(\ell^p)$ *dir ve* $0 \in \sigma_p(T)$ *dır, çünkü* $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $\lambda = 0$ *özdeğerine karşılık gelen özvektördür.* T^{-1} *ters operatörü burada tanımlı değildir. Sonuç olarak*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}\,, \quad \sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset \tag{1.24}$$

elde ederiz. Son olarak eğer

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_{2,} \frac{1}{3}x_3, \ldots) \tag{1.25}$$

biçimde tanımlanırsa $T \in \mathcal{K}(\ell^p)$ *dir ve* $0 \in \sigma_r(T)$ *dir, çünkü* T *nin* $R(T)$ *değer kümesi* ℓ^p *de yoğun değildir. Burada*

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, 2y_3, 3y_4, \ldots)$$

ters operatörü tanımlıdır fakat $R(T)$ *de sınırlı değildir. Sonuç olarak*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}, \quad \sigma_p(T) = \sigma_c(T) = \emptyset \tag{1.26}$$

elde edilir.

Şimdi ; $c = c\,[0,1] = \{x : x : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ veya $[0,1]$ de p-integrallenebilir $(1 \leq p < \infty)$ veya esaslı sınırlı $(p = \infty)$ fonksiyonların

$$\|x\|_p = \begin{cases} \int_0^1 |x\,(t)|^p\, dt & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \\ ess \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |x\,(t)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

olmak üzere

$$L_p = L_p\,[0,1] = \left\{x\,(t) : \|x\|_p < \infty\right\}$$

uzaylarında göz önüne alınan bir örnek verelim, burada

$$ess \sup_{0 \leq t \leq 1} |x\,(t)| = \inf_{mD=0} \sup_{t \in [0,1] \setminus D} |x\,(t)|$$

dir.

Örnek 1.7 $a \in c\,[0,1]$ *sabit ve*

$$Tx\,(t) = a\,(t)\,x\,(t)$$

olsun. T *nin* $c\,[0,1]$ *üzerinde sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca* $[0,1]$ *üzerinde* $a(t) \equiv 0 \Leftrightarrow L$ *kompakttır (Teorem 1.7 (Arzelà-Ascoli) den görülür).* $a(t) \equiv 0$

durumunda $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$ *elde ederiz.*

Genel olarak a *nın sürekliliğinden* a *fonksiyonunun* $R(a) = \{a(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ *değer kümesi kompakttır ve*

$$\sigma(T) = R(a),\ \sigma_c(T) = \emptyset,\ \sigma_p(T) = R_t(a),\ \sigma_r(T) = R(a)\backslash R_t(a) \tag{1.27}$$

dır. Burada $R_t(a)$, $\{t : a(t) = \lambda\}$ *kümesi boş kümeden farklı bir içe sahip olacak şekilde bütün* $\lambda \in \mathbb{R}$ *lerden meydana gelen topolojik değer kümesidir. Özellikle eğer* a *çarpanı kesin monotonsa, bu durumda* $R_t(a) = \emptyset$ *dur ve böylece* T *operatörü hiç özdeğere sahip değildir ve sadece rezidü spektrumdan oluşur.*

Eğer a *çarpanı sürekli değil, sadece esaslı sınırlı ise karşılık gelen* $Tx(t) = a(t)x(t)$ *operatörünü* $L_p[0,1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *içinde düşünebiliriz. Bu durumda* λ *nın her* I *komşuluğu için* $\{t : a(t) \in I\}$ *kümesi, pozitif ölçüme sahip olacak şekilde her* $\lambda \in \mathbb{R}$ *lerden meydana gelen* $R_e(a)$ *esaslı görüntüsü ile* $R_t(a)$ *topolojik görüntüsü yer değiştirmek zorundadır. (1.27) den* $p < \infty$ *durumunda*

$$\sigma(T) = R_e(a),\ \sigma_c(T) = R_e(T)\backslash\sigma_p(T) \tag{1.28}$$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in R_e(a) : m\{t : a(t) = \lambda\} > 0\},\ \sigma_r(T) = \emptyset$$

dır ve $p = \infty$ *durumunda*

$$\sigma(T) = R_e(a),\ \sigma_c(T) = \emptyset \tag{1.29}$$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in R_e(a) : m\{t : a(t) = \lambda\} > 0\},\ \sigma_r(T) = R_e(T)\backslash\sigma_p(T)$$

olur.

Aşağıdaki örnekte kendisi kompakt olmayıp, karesi kompakt olan bir operatör verilmektedir.

Örnek 1.8 $\mathbb{C}$ *üzerinde* $X = \ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *olsun ve* $T \in B(\ell^p)$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) := (x_2, 0, x_4, 0, \cdots) \tag{1.30}$$

biçiminde tanımlansın. Aşikar olarak $T^2(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) \equiv (0, 0, 0, \cdots)$ *elde ederiz ki bu bir kompakt operatördür. Buna rağmen* T *operatörünün kendisi kompat değildir, çünkü* $e_k = (\delta_{k,n})_n$ *taban vektörlerinin* $\{TLe_k : k \in \mathbb{N}\}$ *görüntüsü* ℓ^p *de ön kompakt değildir. Polinomlar için spektral dönüşüm teoreminden (Teorem 1.12 (h))* $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\theta\}$ *elde edilir.*

Aşağıdaki teoremler [8] de bulunabilir.

Teorem 1.14 *$T \in B(\mathcal{H})$ ve $K \in \mathcal{K}$ ise TK ve KT operatörleri kompakttır.*

Teorem 1.15 (Schauder) *$T \in B(\mathcal{H})$ ise $T \in \mathcal{K} \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{K}$.*

Bu tezin ana sonucunu ispatlayabilmek için , kompakt operatörlerin belirli bir alt sınıfına ihtiyaç vardır.

Tanım 1.6 *$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operatörü verilsin. Eğer*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$$

olacak şekilde $\mathcal{H}$ ın bir $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bazı varsa, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerindeki bu A operatörüne Hilbert-Schmidt operatörü denir. Denk olarak eğer (a_{nj}) , A nın matris gösterimi ise bu durumda

$$\sum_{n,j=1}^{\infty} |a_{nj}|^2 < \infty$$

ise A bir Hilbert-Schmidt operatörüdür.

Aşağıdaki Teoremler [9] bölüm 3 de bulunabilir.

Önerme 1.1 *Her Hilbert-Schmidt operatörü kompakttır. Dahası, $B_2(\mathcal{H})$ ile gösterilen bütün Hilbert-Schmidt operatörlerinin kümesi $B(\mathcal{H})$ ın bir idealidir.*

Sınırlı lineer operatörlerin iki farklı sınıfını daha tanımlamalıyız. Onlar altnormal operatörler ve devirli operatörlerdir. Eğer $T^*T = TT^*$ ise T ye bir *normal operatör* denir.

Tanım 1.7 *Eğer $N(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ (yani; $\mathcal{H}$, N-invaryant ve $N|_{\mathcal{H}} = S$) olacak şekilde $\mathcal{H}$ ı içeren bir $\mathcal{L}$ Hilbert uzayı ve bir $N : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ normal operatörü varsa $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operatörüne altnormal operatör denir.*

Her normal operatörün altnormal olduğu açıktır fakat tersi doğru değildir. U, ℓ^2 üzerinde aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$U(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots) \quad , \qquad a_i \in \mathbb{C} \tag{1.31}$$

U ya *ileri kaydırma operatörü* denir. ℓ^2 üzerinde U^*

$$U^*(a_1, a_2, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots) \quad , \qquad a_i \in \mathbb{C} \tag{1.32}$$

biçimindedir. (1.32) eşitliği ile tanımlanan operatöre *geri kaydırma operatörü* denir. U ileri kaydırma operatörü, normal olmayan bir altnormal operatördür. $U^*U = I$, fakat $UU^* \neq I$ olduğu kolayca görülebilir.

Tanımlanacak operatörlerin son sınıfı devirli operatörlerdir. Devirlilik sınıfları, normal operatörler tamamen sınıflandırılabildiğinden önemlidir. Devirli operatör tanımını verebilmek için devirli vektör tanımını yapmalıyız.

Tanım 1.8 *Eğer $\{p(T)x : p$ bir polinom$\}$ kümesi $\mathcal{H}$ da yoğun ise x vektörüne $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı T operatörü için bir devirli vektör denir. Eğer T bir devirli vektöre sahipse T ye devirli operatör denir.*

1.6 Fonksiyon Teorisinde Tanımlar

Tanım 1.9 *I, $\mathbb{T}$ birim çemberinde bir yay ve $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $|I|$, I nın uzunluğu olmak üzere $\varphi_I : \dfrac{1}{|I|}\displaystyle\int_I |\varphi|\, dt$ olsun. Eğer*

$$\|\varphi\|_* = \sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I|\, dt < \infty \tag{1.33}$$

ise φ ye sınırlı ortalama salınımlıdır denir. BMO ile bütün sınırlı ortalama salınımlı fonksiyonların kümesini göstereceğiz. Eğer BMO , $\|\varphi\|_{BMO} = \|\varphi\|_* + |\varphi(0)|$ normuna sahipse BMO bir Banach uzayıdır (bkz [12]).

Tanım 1.10 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *kompleks düzlem üstündeki açık birim disk ve $1 \leq p < \infty$ olsun.*

$$M_p(f) = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right)^{1/p}$$

olmak üzere üzerinde $H^p(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f$ analitik, $M_p(f) < \infty\}$. Tanımını yapalım. Benzer şekilde $p = \infty$ için $H^\infty(\mathbb{D})$ uzayı

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ analitik, } \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında $H^p(\mathbb{D})$ uzayı bir kompleks vektör uzayıdır ve bu uzaya Hardy uzayı denir.

Burada $H^p(\mathbb{D})$ uzayının vektör uzay işlemleri $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ve } (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

ile tanımlıdır. Kolayca görüleceği gibi $1 \leq s < p < \infty$ için

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$$

dir.

Teorem 1.16 *$1 \leq p < \infty$ için $(H^p(\mathbb{D}), M_p(f))$ bir Banach uzayıdır ([28] Soykan 2008, s. 470).*

Önerme 1.2 *f, $\mathbb{D}$ üzerinde analitik ve $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Bu durumda $f \in H^2(\mathbb{D})$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a = (a_n) \in \ell^2$ olmasıdır ([28] Soykan 2008, s. 474).*

Önerme 1.3 *$h(f) = (a_n)$, $\left(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$ ile tanımlı*

$$h : H^2(\mathbb{D}) \to \ell^2$$

fonksiyonu bir Hilbert uzay izometrik izomorfizmasıdır ([28] Soykan 2008, s. 476).

Yani Önerme 1.3 bize, eğer $p = 2$ ise $H^2(\mathbb{D}) = H^2$ nin, ℓ^2 ye izomorf olan bir $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ bazlı bir Hilbert uzayı olduğunu söyler. Eğer $\{e_n\}$, ℓ^2 nin standart bazı ise $z^n \to e^n$ ile tanımlanan bir lineer operatör, izomorfizmdir. Bu yüzden eğer $g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \in H^2$ ise

$$\|g\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \tag{1.34}$$

dir. T_z , H^2 üzerinde z ve fonksiyon değeri ile çarpılan bir operatör olmak üzere, yani; $f \in H^2$ için

$$T_z(f)(z) = zf(z)$$

olmak üzere U, (ℓ^2 üzerinde ileri kaydırma operatörü) T_z ye üniter denktir.

Her $g \in H^2$ için Fatou Teoreminden [12] , $\mathbb{T}$ nin hemen hemen her yerde aşikar olmayan sınır değerine sahiptir. Bu yüzden $g\left(e^{i\theta}\right) = \lim\limits_{r\to 1} g\left(re^{i\theta}\right)$, $\mathbb{T}$ üzerinde L^2-fonksiyonu gibi düşünülebilir.

Tanım 1.11 *Eğer $g \in H^2$ ve $g\left(e^{i\theta}\right) \in BMO$ ise $g \in BMOA$ diyeceğiz.*

$BMOA$ da BMO normuyla bir Banach uzayıdır. Bununla birlikte $BMOA$ fonksiyonlarının türevlerinin uzayıyla ilgileneceğiz.

$$\mathcal{B} := \left\{ g : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \int\limits_0^z g(t)\,dt \in BMOA \right\}$$

kümesini tanımlayalım.

H^p uzaylarının sınıfları için $BMOA$ ile ilgili bir ana teorem [12] de bulunan Fefferman'ın teoremidir. O, $(H^1)^*$ ın (H^1 üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı) $BMOA$ ya bir Banach uzayı olarak izometrik olduğunu göstermiştir.

Tanım 1.12 *I, $\mathbb{T}$ nin bir yayı olsun. Eğer*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{|I|<\delta} \frac{1}{|I|} \int\limits_I |\varphi - \varphi_I|\,dt = 0 \tag{1.35}$$

ise $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna sıfırlayan ortalama salınımlıdır denir.

VMO ile bütün sıfırlayan ortalama salınımlı fonksiyonların kümesini göstereceğiz. VMO, BMO nun kapalı bir alt uzayıdır.

$BMOA$ daki gibi $g\left(e^{i\theta}\right) \in VMO$ olacak şekildeki $g \in H^2$ lerin kümesi olarak $VMOA$ tanımlanır. $VMOA$, $BMOA$ nın kapalı bir altuzayıdır [12] . Ayrıca

$$\mathcal{D} := \left\{ g : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \int\limits_0^z g(t)\,dt \in VMOA \right\}$$

kümesini tanımlayalım.

BMO ve VMO ile ilgili daha fazla bilgi için[12] ye bakılabilir.

1.7 C^*-Cebirleri ve Spektrum

Şimdi fonksiyonlar teorisinden bazı tanım ve notasyonları vereceğiz. Bunlardan biri C^*-cebridir. Bundan sonraki bölümlerde bütün Banach cebirlerini $\mathbb{C}$ cismi üzerinde düşüneceğiz.

Tanım 1.13 *A bir kompleks vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için*
(i) $(xy)\,z = x\,(yz)$,
(ii) $x\,(y+z) = xy + xz$ *ve* $(y+z)\,x = yx + zx$,
(iii) $\alpha\,(xy) = (\alpha x)\,y$
özelliklerini sağlayan A uzayına cebir denir.

Tanım 1.14 *A bir cebir ve $\|.\| : A \to [0, +\infty)$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için*
(i) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$,
(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
(iii) $\|x.y\| \leq \|x\| . \|y\|$,
(iv) $\|1_A\| = 1$
özellikleri sağlanıyorsa $\|.\|$ ya cebirsel-yarınorm denir.
(v) $\|x\| = 0$ *iken* $x = 0$
özelliğide sağlanıyorsa $\|.\|$ ya cebirsel-norm denir

Tanım 1.15 *A bir cebir ve $\|.\|$ bir cebirsel-norm olmak üzere $(A, \|.\|)$ ikilisine bir normlu cebir denir.*
Norma göre tam olan normlu cebire de Banach cebri denir.

Tanım 1.16 *$\mathcal{A}$ bir Banach cebri olsun. $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, $\mathcal{A}$ ya bir C^*-cebri denir.*
C-1) $\forall x \in \mathcal{A}$ *için* $(x^*)^* = x$,
C-2) $\forall x, y \in \mathcal{A}$ *ve* $a, b \in \mathbb{C}$ *için* $(ax+by)^* = \overline{a}x^* + \overline{b}y^*$,
C-3) $\forall x, y \in \mathcal{A}$ *için* $(xy)^* = y^*x^*$,
C-4) $\forall x \in \mathcal{A}$ *için* $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

C^*-cebirlerinin en basit örnekleri $a^* = \overline{a}$ olmak üzere $\mathbb{C}$ dir ve $B(H)$ dır. Bu tez boyunca bütün C^*-cebirlerinin birimli olduğunu kabul edeceğiz, yani; tezde kullanılan bütün C^*-cebirleri bir çarpımsal birime sahip olsun.

$B(H)$ ın sağladığı özellikleri düşünerek genel bir C^*-cebiri durumunda aşağıdaki notasyonları verebiliriz.

Tanım 1.17 *$\mathcal{A}$ bir C^*-cebri ve $x \in \mathcal{A}$ olsun.*
(i) *Eğer $x^* = x$ ise x e self-adjointtir denir.*
(ii) *Eğer $x^*x = xx^*$ ise x e normaldir denir.*

C^*-cebirleri bir cebir olduğundan, onlar bir ideale sahip olabilir.

Tanım 1.18 *Eğer $\mathcal{I}$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{I}$ ya $\mathcal{A}$, C^*-cebrinin bir $*$-ideali denir.*
(i) *$\mathcal{I}$ cebirsel anlamda $\mathcal{A}$ nin bir idealidir,*
(ii) *Eğer $a \in \mathcal{I}$ ise $a^* \in \mathcal{I}$ dır.*

Eğer $\mathcal{I}$, bir $\mathcal{A}$, C^*-cebrinde kapalı bir $*$-idealse $\mathcal{A}/\mathcal{I}$,

$$\|a + \mathcal{I}\| := \inf \{\|a + i\| : i \in \mathcal{I}\}$$

normlu bir C^*-cebridir (bkz[8] , bölüm VIII). Aşağıdaki tanım, C^*-cebirleri bölümünün önemli bir örnek olduğunu gösterir.

Tanım 1.19 *$Q(H) := B(H)/\mathcal{K}$, C^*-cebrine Calkin cebri denir.*

$\pi : B(H) \to Q(H)$ kanonikal dönüşümü göstersin.

Bir C^*-cebri durumunda spektrumu formüle edebiliriz. $\sigma(a)$ ile bir C^*-cebrinin bir a elemanının spektrumunu göstereceğiz ve bunu

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ tersinir değil}\}$$

olarak tanımlayacağız.

Tezin diğer kısımlarında gerekli olacağından dolayı C^*-cebirleri teorisinin önemli bazı teoremlerini vereceğiz. Bu teoremlerin ispatları [34] de bulunabilir.

Tanım 1.20 *A ve B iki C^*-cebri olsun. Eğer $\phi : A \to B$ aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde bijective, lineer ve sürekli operatörü varsa A ve B, C^*-cebirlerine izomorfiktir denir ve $A \approx B$ ile gösterilir.*

(i) *$\forall a, b \in A$ için $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$,*

(ii) *$\forall a \in A$ için $\phi(a^*) = [\phi(a)]^*$.*

Teorem 1.17 (Gel'fand) *Eğer A bir komutatif C^*-cebri ise $C(K)$, K dan $\mathbb{C}$ ye sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere $A \approx C(K)$ olacak şekilde bir kompakt Hausdorff K uzayı vardır.*

Teorem 1.18 *A bir B, C^*-cebrinin altcebri ve $a \in A$ olsun. A nın bir a elemanının spektrumuınu $\sigma_A(a)$ ile gösterelim. Aynı şekilde $\sigma_B(a)$ ile de a nın B deki spektrumunu gösterelim. Bu durumda $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ dır.*

Teorem 1.19 (Spektral Dönüşüm Teoremi) *A bir C^*-cebri ve $a \in A$ olsun. $Hol(\sigma(a))$, $\sigma(a)$ nın yakın komşuluğunda analitik fonksiyonları göstersin. Eğer $f \in Hol(\sigma(a))$ ise $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$ dır.*

1.8 Calkin Cebirleri ve Fredholm Teori

Şimdi esaslı spektrumun bir kaç tanımını verelim. Bunların hepsi bir Hilbert uzayı üzerinde aynıdır, fakat Banach uzayında farklı olabilirler.

$L \in B(X)$ olsun,

$$\rho_+(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda I - L) \text{ kapalı ve } \dim N(\lambda I - L) < \infty\} \tag{1.36}$$

$$\rho_-(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda I - L) \text{ kapalı ve } \operatorname{codim} R(\lambda I - L) < \infty\}\,) \tag{1.37}$$

Burada $N(\lambda I - L)$, $\lambda I - L$ operatörünün çekirdeğini ve

$$\operatorname{codim} R(\lambda I - L) = \dim(X/R(\lambda I - L))$$

ifadesini göstermektedir. Ayrıca

$$\sigma_\pm(L) := \mathbb{C} \backslash \rho_\pm(L) \tag{1.38}$$

tanımlayalım.

Böylece;

- $\lambda \in \rho_+ (L)$ ise $\lambda I - L$ ye *sol yarı Fredholm operatör* denir,

- $\lambda \in \rho_- (L)$ ise $\lambda I - L$ ye *sağ yarı Fredholm operatör* denir ve

- $\lambda \in \rho_+ (L) \cap \rho_- (L)$ ise $\lambda I - L$ ye *Fredholm operatör* denir.

Şimdi L operatörünün çeşitli esaslı spektrumlarını tanımlayabiliriz.

$$\rho_{ek} (L) := \rho_+ (L) \cup \rho_- (L) , \; \sigma_{ek} (L) := \sigma_+ (L) \cap \sigma_- (L) \tag{1.39}$$

kümelerine sırasıyla L operatörünün *Kato anlamında esaslı rezolventi ve esaslı spektrumu* denir ve

$$\rho_{ew} (L) := \rho_+ (L) \cap \rho_- (L) , \; \sigma_{ek} (L) := \sigma_+ (L) \cup \sigma_- (L) \tag{1.40}$$

kümelerine sırasıyla L operatörünün *Wolf anlamında esaslı reszolventi ve esaslı spektrumu* denir (bazı yazarlar *Fredholm spektrumu* diyor).

Böylece;

- $\lambda \in \rho_{ek} (L)$ dir $\Leftrightarrow \lambda I - L$ yarı Fredholmdür ve

- $\lambda \in \rho_{ew} (L)$ dir $\Leftrightarrow \lambda I - L$ Fredholmdür.

Şimdi bir Fredholm operatörün indeksinin tanımını verelim.

Tanım 1.21 *Eğer T bir Fredholm operatör ise, Fredholm indeksi;*

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T) &= \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T) \\ &= \dim N(T) - \dim N(T^*) \end{aligned} \tag{1.41}$$

ile tanımlanır.

$$\rho_{es} (L) := \{\lambda \in \rho_{ew} (L) : \operatorname{ind}(\lambda I - L) = 0\} , \; \sigma_{es} (L) := \mathbb{C} \backslash \rho_{es} (L) \tag{1.42}$$

kümelerine sırasıyla L operatörünün *Schechter anlamında esaslı rezolventi ve esaslı spektrumu* denir.

Böylece;

- $\lambda \in \rho_{es}(L)$ dir $\Leftrightarrow \lambda I - L$ sıfır indeksli Fredholmdür.

Eğer hem $\lambda I - L$ nın değer kümesi kapalı değilse hem λ, $\sigma(L)$ nin bir yığılma noktası ise hem de λ, L nin

$$n(\lambda, L) := \dim \bigcup_{k=1}^{\infty} N\left[(\lambda I - L)^k\right]$$

katlılığının bir özdeğeri ise λ ya *Browder anlamında esaslı spektrum* denir ve $\lambda \in \sigma_{eb}(L)$ ile gösterilir.

Bu çalışma boyunca kullanılacak olan Fredholm operatör teorisinin temel kavramlarını verelim. Bir Fredholm operatör, $\pi(T)$, $Q(H) = B(H)/\mathcal{K}$ da tersinir olan sınırlı bir T operatörüdür. Özellikle, bir Fredholm operatörün indeksi hakkında önermeler vereceğiz. Bir önerme ile sonuçları toparlayacağız. Örnek ve daha fazla bilgi için [8] e bakılabilir.

Önerme 1.4 (Fredholm Teori) *Eğer S, T Fredholm operatörler ve K bir kompakt operatör ise bu durumda aşağıdakiler doğrudur.*
(i) *T kapalı görüntüye sahiptir ve $N(T)$ ve $N(T^*)$ ın her ikiside sonlu boyutludur.*
(ii) *TS Fredholmdür ve $\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(S)$ dir.*
(iii) *$T + K$ Fredholmdür ve $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$ dir.*

Uyarı 1.2 *Biz H^2 de çalışıyoruz ve H^2 bir Hilbert uzayı olduğundan esaslı spektranın yukarıda bahsedilen tanımları çakışmaktadır.*

Fredholm teoride esaslı spektrum denk olarak aşağıdaki gibi de verilebilir.

Tanım 1.22 *Bir T operatörünün esaslı spektrumu; Calkin cebrindeki $\pi(T)$ yan kümesinin spektrumudur ve $\sigma_e(T)$ ile gösterilir. Denk olarak esaslı spektrum $T - \lambda$ nın Fredholm olmadığı λ ların kümesidir.*

Tanım 1.23 *Eğer $T^*T - TT^*$ kompakt ise T ye esaslı normal operatör denir. Denk olarak, eğer $\pi(T)^* \pi(T) = \pi(T) \pi(T)^*$ ise T esaslı normal operatördür, yani; $\pi(T)$, $Q(H)$ da normaldir.*

1.9 Cesàro Operatörü

Şimdiye kadar Cesàro operatörünün birçok özelliği çalışılmıştır. Cesàro operatörünün çeşitli uzaylar üzerindeki spektrumları bir çok yazar tarafından çalışılmıştır. Burada biz Cesàro operatörünün tanımını ve bu operatörün spektrumu hakkında bilinen gerçeklerden bazılarını aşağıda vereceğiz.

[17] de Hardy, Littlewood ve Polya $(a_n) \in \ell^2$ için

$$\left\| \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i \right) \right\| \leq K \left\| (a_n) \right\| \quad , \qquad K > 0 \tag{1.43}$$

olduğunu göstermiştir.

$$C\left(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\right) = \left(a_0, \frac{a_0 + a_1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i, \ldots \right) \tag{1.44}$$

ile verilen C operatörüne Cesàro operatörü denir. Bu operatör $\ell^2 \to \ell^2$ sınırlı lineer bir operatördür.

Önerme 1.3 den H^2 ve ℓ^2 nin izometrik izomorf olmasından, H^2 üzerindeki C operatörü; $f \in H^2$ için

$$Cf\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i \right) z^n \tag{1.45}$$

ile verilir.

$f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Eğer $z = 0$ da $\frac{1}{z} \int_0^z \frac{f\left(t\right)}{1-t} dt$ Taylor serisini hesaplarsak Kısım 2.1 de açıkça hesaplandığı üzere, H^2 üzerinde C nin

$$C\left(f\right)\left(z\right) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{f\left(t\right)}{1-t} dt \tag{1.46}$$

integral gösterimini elde ederiz.

1965 de [5] de Brown, Halmos ve Shields Cesàro operatörünün cebirsel yapısı hakkındaki bazı gösterimleri kullanarak aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 1.20 (Brown-Halmos-Shields) *$C : \ell^2 \to \ell^2$ Cesàro operatörü için aşağıdakiler geçerlidir.*

(i) $\sigma\left(C\right) = \left\{ z : \left| z - 1 \right| \leq 1 \right\},$

(ii) $\sigma_p(C) = \emptyset$,

(iii) $\sigma_p(C^*) = \{z : |z-1| < 1\}$,

(iv) C^* *ın özdeğerleri basittir, yani; herbir özdeğere karşılık gelen özuzay 1 boyutludur.*

(v) C *hiponormaldir (yani; her* $x \in \ell^2$ *için* $\|Cx\| \geq \|C^*x\|$ *dir).*

[21] de Kriete ve Trutt C nin altnormal olduğunu göstermiştir. İlave olarak onlar devirlilik için önemli özellikleri de göstermişlerdir.

Teorem 1.21 (Kriete-Trutt) C *altnormaldir ve devirlidir.*

[14] de Gonzalez aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 1.22 (Gonzalez) ℓ^2 *üzerinde verilen* C *operatörü için aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) Her $\lambda \in \{z : |z-1| < 1\}$ *için* $\lambda I - C$, $\operatorname{ind}(\lambda - C) = -1$ *ve* $\operatorname{codim} R(C) = 1$ *ile bir Fredholm operatördür,*

(ii) Her $\lambda \in \{z : |z-1| = 1\}$ *için* $\lambda I - C$ *yoğun görüntüye sahiptir ve 1-1 dir.*

Gonzalez'e göre bu teorem $1 < p < \infty$ için ℓ^p üzerine formüle edilebilir. $\lambda \notin \{z : |z-1| = 1\}$ olduğunda $\lambda I - C$ nin Fredholm olduğunu Gonzalez göstermiştir. İlave olarak $\lambda \in \{z : |z-1| = 1\}$ için $\lambda I - C$ kapalı görüntüye sahip olmadığından Fredholm değildir. Bu yüzden $\sigma_e(C)$, $\lambda I - C$ Fredholm olmayacak şekildeki $\lambda \in \mathbb{C}$ elemanlarının kümesi olarak tanımlandığından $\sigma_e(C) = \{z : |z-1| = 1\}$ olduğu Teorem 1.22 den görülür.

1.10 Genelleştirilmiş Cesàro Operatörü

[25] de Pommerenke H^2 üzerinde

$$I_G = \int_0^z f(t)\, G'(t)\, dt$$

operatörünü tanımlamıştır ve [25] de Lemma 1 olarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.23 (Pommerenke) *I_G, H^2 de sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $G \in BMOA$ dır. Ayrıca, $\|I_G\|_{op} \leq K_1 \|G\|_*$ olacak şekilde bir K_1 sabiti vardır.*

[1] de Aleman ve Siskakis $1 \leq p < \infty$ için Pommerenke'nin sonuçlarını H^p ye genelleştirdiler. İlave olarak, I_G operatörünün kompaktlığı için bir kriter verdiler:

Teorem 1.24 (Aleman-Siskakis) *$1 \leq p < \infty$ için I_G, H^p de kompakttır $\Leftrightarrow$ $G \in VMOA$ dır.*

[3] de Aleman ve Cima herhangi $p > 0$ için Teorem 1.23 ve 1.24 yi H^p ye genişletmiştir.

Tanım 1.24 *$\mathbb{D}$ üzerinde analitik g fonksiyonu için, H^2 üzerinde*

$$C_g(f)(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(t)\,g(t)\,dt$$

biçiminde tanımlanan operatöre, H^2 üzerinde g sembolü ile genelleştirilmiş Cesàro operatörü denir.

(1.46) dan Cesàro operatörü ile genelleştirilmiş Cesàro operatörü arasındaki ilişki görülür. Eğer $g(t) = \dfrac{1}{1-t}$ ise $C_g = C$ dir. Dolayısıyla Cesàro operatörü, genelleştirilmiş Cesàro operetörüne bir örnektir. Teorem 1.23 ve 1.24 den

- C_g sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $g \in \mathcal{B}$ dir.

- C_g kompakttır $\Leftrightarrow$ $g \in \mathcal{D}$ dir.
  elde edilir.

[31] de, Scott W. Young doktora tezinde H^2 nin $\{z^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ standart bazına göre Genelleştirilmiş Cesàro operatörünün matris gösterimini

$$C_g = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ \frac{a_1}{2} & \frac{a_0}{2} & & & \\ \frac{a_2}{3} & \frac{a_1}{3} & \frac{a_0}{3} & & \\ \frac{a_3}{4} & \frac{a_2}{4} & \frac{a_1}{4} & \frac{a_0}{4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

biçiminde vermiştir ve bu matrisin normalliği ve self-adjointliği için aşağıdaki gerekli ve yeterli koşulları vermiştir.

Önerme 1.5 *C_g normaldir $\Leftrightarrow$ bir $c \in \mathbb{C}$ için $g(z) = c$ dir ([31] , Young 2002, s.16).*

Sonuç 1.3 *C_g self-adjointtir $\Leftrightarrow$ bir $c \in \mathbb{R}$ için $g(z) = c$ dir ([31] , Young 2002, s.17).*

Ayrıca S.W. Young Aşağıdakileri de ispatlamıştır.

Önerme 1.6 *Her $g \in \mathcal{B}$ için C_g^* devirlidir ([31] , Young 2002, s.17).*

Önerme 1.7 *Bir $n \geq 0$ için $g(z) = z^n$ ise bu durumda;*
(i) *$n = 0$ için $\sigma(C_g) = \left\{\frac{1}{j}\right\}_{j=1}^{\infty} \cup \{0\}$ dır.*
(ii) *$n > 0$ için $\sigma(C_g) = \{0\}$ dır ([31] , Young 2002, s.18).*

Teorem 1.25 *Eğer $|\beta| = 1$ ile $g_\beta(z) = g(\beta z)$ ise bu durumda C_{g_β} , C_g ye üniter denktir ([32] , Young 2004, Önerme 3.1).*

Teorem 1.26 *$|\beta_1| = |\beta_2| = 1$ ve $\beta_1 \neq \beta_2$ olduğunda $C_{\beta_1} C_{\beta_2}$ bir Hilbert-Schimidt operatörüdür ([32] , Young 2004, Teorem 3.2).*

[32] de S.W. Young, g sembolü bir rasyonel sembol olduğunda her bir $a \in \mathbb{C}$ için $D(a) = \{z : |z - a| < |a|\}$ olmak üzere genelleştirilmiş Cesàro matrisinin spektrumunu aşağıdaki şekilde hesaplamıştır.

Teorem 1.27 *Her bir i için $a_i \neq 0$, β_i ler farklı ve $|\beta_i| = 1$ olmak üzere $g(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - \beta_i z}$ ise bu durumda C_g için aşağıdakiler geçerlidir.*

(i) $\varepsilon = \{\lambda \in \sigma(C_g) : \operatorname{ind}(C_g - \lambda) = 0\} = \left\{\frac{g(0)}{k}\right\}_{k=1}^{\infty} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(a_i)}$ *olmak üzere* $\sigma(C_g) = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(a_i)} \cup \varepsilon$ *dir.*

(ii) $\sigma_e(C_g) = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D(a_i)$ *dir.*

(iii) $G = \sum_{i=1}^{n} \chi_{D(a_i)}$ *olmak üzere* $\lambda \notin \sigma_e(C_g)$ *için* $\operatorname{ind}(C_g - \lambda) = -G(\lambda)$ *dır ([32] , Young 2004, Teorem 3.3).*

1.11 Rhaly Matrisleri

$\{a_n\}$ dizisi bir skaler dizi olmak üzere

$$R_a = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_1 & & & \\ a_2 & a_2 & a_2 & & \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

biçimindeki alt üçgensel matrise *Rhaly matrisi* denir. C Cesàro matrisi $R_{\{1/(n+1)\}}$ dir. $a_n = n^{-z}$ ise C_z , z-Cesàro matrisidir.

1987 de G. Leibowitz [23] de Rhaly matrisi için aşağıdakileri ispatlamıştır.

Önerme 1.8 *Eğer R_a , C ile değişmeli ise R_a , C nin bir skaler katıdır ([23] , Leibowitz 1987, Önerme 2.1).*

Önerme 1.9 *Eğer bir B sonsuz matrisi her Rhaly matrisi ile değişmeli ise bu durumda B birim matrisin bir skaler katıdır ([23] , Leibowitz 1987, Önerme 2.3).*

Önerme 1.10 *(a) Eğer* $\{(n+1)\,a_n\}$ *sınırlı ise her* $p>1$ *için* R_a*,* ℓ^p *de sınırlıdır ve* $\|R_a\| \le (p/(p-1))\sup_n |(n+1)\,a_n|$ *dir.*
(b) Eğer $\lim (n+1)\,a_n = 0$ *ise her* $p>1$ *için* R_a*,* ℓ^p *de bir kompakt operatördür.*
(c) Eğer $\lim (n+1)\,a_n = \infty$ *ise* R_a*,* ℓ^p *de sınırsızdır ([23] , Leibowitz 1987, Önerme 3.1).*

Ayrıca Rhaly matrisinin spektrumu çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. 2001 de M. Yildirim [30] da ℓ^p dizi uzayı üzerinde aşağıdaki koşullar altında Rhaly matrisinin spektrumunu hesaplamıştır. Bu koşullar;

(i) $L = \lim (n+1)\,a_n$ sonlu,

(ii) Her n için $a_n > 0$,

(iii) $i \neq j$ için $a_i \neq a_j$,

(iv) (a_n) monoton azalan.

Teorem 1.28 (Yildirim) *Eğer* $0 \neq L < \infty$ *ise* $p>1$ *ve* $p^{-1}+q^{-1}=1$ *için*

$$\sigma(R_a, \ell^p) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{qL}{2}\right| \le \frac{qL}{2}\right\} \cup S$$

dir. Burada $S = \{a_n : n = 0, 1, \ldots\}$ *dir ([30] , Yildirim 2001, Teorem 3.3).*

2010 yılında [15] de O. V. Gulina ℓ^p dizi uzayı üzerinde Rhaly matrisinin esaslı spektrumu ile ilgili aşağıdaki teoremleri vermiştir.

Teorem 1.29 (Gulina) $1 < p < \infty$, $0 \neq L = \lim_n (n+1)\,a_n$ *ve* $q = p/(p-1)$ *ise*

$$\begin{aligned} \sigma_{eg}(R_a) &= \sigma_{ek}(R_a) = \sigma_{ef}(R_a) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{qL}{2}\right| = \frac{qL}{2}\right\}, \\ \sigma_{ew}(R_a) &= \sigma_{eb}(R_a) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{qL}{2}\right| \le \frac{qL}{2}\right\} \end{aligned}$$

dir ([15] , Gulina 2010, Teorem 2.1).

Teorem 1.30 (Gulina) $1 < p < \infty$, $0 \neq L = \lim_n (n+1)\,a_n$ *ve* $q = p/(p-1)$ *ise*

$$\sigma_{es}(R_a) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{qL}{2}\right| = \frac{qL}{2}\right\}$$

dir ([15] ,Gulina 2010, Teorem 2.2).

2. GENELLEŞTIRILMIŞ RHALY MATRISLERI

Bu bölümde genelleştirilmiş Rhaly matrislerinden sadece $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ ve $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alındığında elde edilen C Cesàro matrisinin bir Hausdorff matrisi olduğunu gösterdik yani; C Cesàro matrisi dışında hiçbir genelleştirilmiş Rhaly matrisi bir Hausdorff matrisi değildir ve her bir B sonsuz matrisi ile değişmeli olan genelleştirilmiş Rhaly matrisinin birim matrisin bir skaler katı olduğunu ispatladık.

Ayrıca genelleştirilmiş Rhaly matrislerinin normalliği ve self-adjointliği ile ilgili gerekli ve yeterli koşullar ispatladık. Tezin ana sonucunun verildiği 3. bölümdeki spektrum kısmında kullanılmak üzere $g_\beta(z) = g(\beta z)$ olamak üzere $|\beta| = 1$ iken $R_b^{g_\beta}$ nin R_b^g ye üniter denk olduğunu ispatladık. Burada $g_\beta = \dfrac{1}{1-\beta z}$ dir.

2.1 Genelleştirilmiş Rhaly matrislerinin tanımı ve bazı özellikleri

1987 de A.G. Siskakis,[27] da Cesàro matrisinin H^p deki spektrumunu hesaplamıştır ve bunun için de Cesàro matrisinin integral gösterimini kullanmıştır.

$1 < p < \infty$ için H^p, $\mathbb{D}$ birim diski üzerinde,

$$H^p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^p}^p = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta < \infty \right\}$$

Hardy uzayını göstersin. $(b_n) \in \ell^p$ olsun. Bu durumda

$$C(b) = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} b_k \right\}_{n=0}^{\infty}$$

dir. Eğer $f \in H^p$ ise f analitik olduğundan $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ dir. O halde

$$C(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} b_k \right) z^n$$

dir.

Şimdi $\frac{1}{z}\int\limits_0^z f(\zeta)\frac{1}{1-\zeta}d\zeta$ ifadesindeki kuvvet serilerini hesaplayalım;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z}\int\limits_0^z f(\zeta)\frac{1}{1-\zeta}d\zeta &= \frac{1}{z}\int\limits_0^z \sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^k\frac{1}{1-\zeta}d\zeta\ , \quad \left(f(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^k\right) \\
&= \frac{1}{z}\int\limits_0^z \sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^k\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n d\zeta\ , \quad \left(\frac{1}{1-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n\right) \\
&= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^z \zeta^{n+k}d\zeta\ , \quad \text{(birim diskte düzgün yak.)} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^{n+k+1}}{n+k+1}\Big|_{\zeta=0}^{z} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+k}}{n+k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{z^{n}}{n+1}\ , \quad \text{(2. toplam } k \text{ dan başladı)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k\right)z^n\ , \quad \text{(toplamların sırası değiştirildi)} \\
&= C(f)(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani;

$$C(f)(z)=\frac{1}{z}\int\limits_0^z f(\zeta)\frac{1}{1-\zeta}d\zeta \tag{2.1}$$

integral gösterimi elde edilir.

Scott W. Young [32] de, (2.1) eşitliğinin sağ tarafındaki $\frac{1}{1-\zeta}$ fonksiyonu yerine daha genel bir analitik fonksiyon alarak Cesàro matrislerini aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir.

Tanım 2.1 *$\mathbb{D}$ üzerinde analitik g fonksiyonu için H^2 üzerinde C_g operatörü,*

$$C_g(f)(z)=\frac{1}{z}\int\limits_0^z f(t)\,g(t)\,dt \tag{2.2}$$

ile tanımlanır. Bu operatöre H^2 üzerinde g sembolü ile genelleştirilmiş Cesàro operatörü denir.

[31] de, Scott W. Young doktora tezinde H^2 nin standart bazına göre C_g nin matris gösterimini aşağıdaki gibi vermiştir;

H^2 nin $\{z^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ standart bazına göre C_g nin matris gösterimini bulmak için her i için $C_g\left(z^i\right)$ yi hesaplamalıyız.

$g \in \mathcal{B}$ ve $g \in H(\mathbb{D})$ olduğundan $g(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ biçiminde bir Taylor gösterimi vardır. O halde

$$\begin{aligned}
C_g\left(z^i\right)(z) &= \frac{1}{z}\int_0^z \left(t^i \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right) dt \\
&= \frac{1}{z}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_0^z t^{i+j} dt\right) \\
&= \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+i+1} z^{i+j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+i+1} z^{i+j}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla standart baza göre matris gösterimi;

$$\begin{aligned}
C_g\left(z^0\right)(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} z^j &&= a_0 z^0 + \frac{a_1}{2} z + \frac{a_2}{3} z^2 + \frac{a_3}{4} z^3 + \cdots \\
C_g(z)(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+2} z^{j+1} &&= 0.z^0 + \frac{a_0}{2} z + \frac{a_1}{3} z^2 + \frac{a_2}{4} z^3 + \cdots \\
C_g\left(z^2\right)(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+3} z^{j+2} &&= 0.z^0 + 0.z + \frac{a_0}{3} z^2 + \frac{a_1}{4} z^3 + \cdots \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$C_g = \begin{pmatrix}
a_0 & & & & \\
\frac{a_1}{2} & \frac{a_0}{2} & & & \\
\frac{a_2}{3} & \frac{a_1}{3} & \frac{a_0}{3} & & \\
\frac{a_3}{4} & \frac{a_2}{4} & \frac{a_1}{4} & \frac{a_0}{4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

dir. Yani;

$$
(C_g)_{nj} = \begin{cases} \dfrac{a_{n-j}}{n} & , \quad n \geq j \\ \\ 0 & , \quad n < j \end{cases}
$$

biçiminde yazabiliriz.

H^2 bir Hilbert uzayı olduğundan matrisin eşlenik traspozunu alarak;

$$
C_g^* = \begin{pmatrix} \overline{a}_0 & \dfrac{\overline{a}_1}{2} & \dfrac{\overline{a}_2}{3} & \dfrac{\overline{a}_3}{4} & \cdots \\ & \dfrac{\overline{a}_0}{2} & \dfrac{\overline{a}_1}{3} & \dfrac{\overline{a}_2}{4} & \cdots \\ & & \dfrac{\overline{a}_0}{3} & \dfrac{\overline{a}_1}{4} & \cdots \\ & & & \dfrac{\overline{a}_0}{4} & \cdots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.4}
$$

elde edilir. Yani, koordinatsal olarak

$$
\left(C_g^*\right)_{nj} = \begin{cases} \dfrac{\overline{a}_{j-n}}{j} & , \quad j \geq n \\ \\ 0 & , \quad j < n \end{cases}
$$

elde edilir.

Rhaly matrisi ile C Cesàro matrisi arasında aşağıdaki ilişki vardır;

$D = diag\{d_n\}$ olacak şekilde bir köşegen matris olmak üzere $DR_{\{a_n\}} = R_{\{d_n a_n\}}$ dir. Dolayısıyla her Rhaly matrisi, $D_a = diag\{(n+1)\,a_n\}_{n=0}^{\infty}$ olmak üzere $R_a = D_a C$ çarpanına sahiptir, eğer her $a_n \neq 0$ ise $\overline{D}_a = diag\left\{\dfrac{1}{(n+1)\,a_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$

olmak üzere $C = \overline{D}_a R_a$ dır. Gerçektende,

$$D_a C = \begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & 2a_1 & & \\ & & 3a_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_1 & & \\ a_2 & a_2 & a_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = R_a$$

elde edilir. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\, a_n = L \neq 0$ olmak üzere (zaten $L = 0$ durumunda R_a , ℓ^2 de kompakttır) $R_a = LC + (D_a - LI)\, C$ dir ve burada $D_a - LI$, ℓ^2 de kompakt olduğundan $K \equiv (D_a - LI)\, C$, ℓ^2 de kompakttır. Böylece R_a , LC in bir kompakt perturbasyonudur.

Şimdi yukarıda verilen Cesàro ve Rhaly matrisleri arasındaki ilişkiyi kullanarak genelleştirilmiş Cesàro matrisleri yardımıyla genelleştirilmiş Rhaly matrislerini tanımlayabiliriz.

Tanım 2.2 *$g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ olmak üzere $g \in H(\mathbb{D})$ ve $\{b_n\}$ bir skaler dizi olsun. Bu durumda*

$$R_b^g = \begin{pmatrix} a_0b_0 & & & & \\ a_1b_1 & a_0b_1 & & & \\ a_2b_2 & a_1b_2 & a_0b_2 & & \\ a_3b_3 & a_2b_3 & a_1b_3 & a_0b_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanan matrise g sembolü ile genelleştirilmiş Rhaly matrisi denir.

Rhaly matrislerinde olduğu gibi $D_b = diag\{(n+1)\, b_n\}_{n=0}^{\infty}$ olmak üzere; $R_b^g = D_b C_g$ dir. Eğer $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alırsak $C_g = C$ olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 1$ olacaktır ve (2.5) den

$$R_b^g = \begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ b_1 & b_1 & & & \\ b_2 & b_2 & b_2 & & \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = R_b$$

elde edilir. Ayrıca $b_n = \{1/(n+1)\}$ alınırsa $R_{1/(n+1)}^g = C_g$ dir. Yani bu iki türlü bir genelleşmedir. $\{b_n\}$ nin özel seçimi ile genelleştirilmiş Cesàro ve $g(t)$ nin özel seçimiyle Rhaly matrisi elde edilir, ayrıca $\{b_n\}$ ve $g(z)$ nin özel seçimi ile Cesàro matrisi elde edilir.

(2.5) den

$$\left(R_b^g\right)_{nj} = \begin{cases} a_{n-j} b_n &, \quad n \geq j \\ 0 &, \quad n < j \end{cases} \tag{2.6}$$

biçiminde yazabiliriz.

H^2 Hilbert uzayı olduğundan, matrisin eşlenik traspozunu alarak

$$\left[\left(R_b^g\right)^*\right]_{nj} = \begin{pmatrix} \overline{a_0 b_0} & \overline{a_1 b_1} & \overline{a_2 b_2} & \overline{a_3 b_3} & \cdots \\ & \overline{a_0 b_1} & \overline{a_1 b_2} & \overline{a_2 b_3} & \cdots \\ & & \overline{a_0 b_2} & \overline{a_1 b_3} & \cdots \\ & & & \overline{a_0 b_3} & \cdots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

ve

$$\left[(R_b^g)^*\right]_{nj} = \begin{cases} \overline{a_{j-n}b_j} & , \ j \geq n \\ \\ 0 & , \ j < n \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 2.1 *$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \neq 0$ olmak üzere eğer R_b^g, C_g ile değişmeli ise R_b^g , C_g nin bir skaler katıdır.*

İspat.

$$R_b^g C_g = \begin{cases} b_n \sum_{k=0}^{n-j} \dfrac{a_k a_{n-k-j}}{k+j+1} & , \ n \geq j \\ 0 & , \ n < j \end{cases}$$

ve

$$C_g R_b^g = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-j} a_k a_{n-k-j} b_{k+j} & , \ n \geq j \\ 0 & , \ n < j \end{cases}$$

dir. $R_b^g C_g = C_g R_b^g$ ise birinci sütunların eşitliğinden

$$b_n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k a_{n-k}}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} b_k \tag{2.8}$$

elde ederiz. (2.8) ı kullanarak her n için tümevarımla

$$b_n = \frac{1}{n+1} b_0$$

olduğunu elde ederiz. $R^g_{\{1/(n+1)\}} = C_g$ olduğundan $R_b^g = b_0 C_g$ elde ederiz. ■

Uyarı 2.1 *Teorem 2.1 de $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alınırsa Önerme 1.8 elde edilir.*

Teorem 2.2 *Eğer bir B sonsuz matrisi her genelleştirilmiş Rhaly matrisi ile değişmeli ise bu durumda B birim matrisin bir skaler katıdır.*

İspat. R_b^g genelleştirilmiş Rhaly matrisinde $b = \dfrac{1}{n+1}$ ve $g(t) = \dfrac{1}{1-t}$ alırsak C Cesàro matrisi olur. İlk önce B, C ile değişmeli olduğundan B bir Hausdorff matrisidir. Yani; $1 \leq n \leq m$ için $\delta(m,n) = (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1}$ ve $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ köşegen girişleri ile $D(\mu)$ bir köşegen matris olmak üzere $B = \delta D(\mu)\delta$ biçiminde alt üçgensel matristir. Özellikle, B, $b_{nn} = \mu_n$ köşegen girişli bir üçgensel matristir. $g(t) = \dfrac{1}{1-t}$ ve $b = e = \{1, 1, \ldots\}$ alırsak

$$R_b^g = E(m,n) = \begin{cases} 1 & , \quad n \leq m \\ 0 & , \quad n > m \end{cases} \quad , \quad \sum_{j=n}^{m} b_{mj} = \sum_{k=n}^{m} b_{kn}$$

ile B değişmelidir. Özellikle, $n = m-1$ alt köşegen şeriti boyunca $b_{m,m-1} + b_{mm} = b_{m-1,m-1} + b_{m,m-1}$ dir. Dolayısıyla $b_{m,m} = b_{m-1,m-1}$ dir. Bu her $m \geq 2$ değeri için doğru olduğundan B nin köşegeni bir sabit dizidir. B bir Hausdorff matrisi olduğundan b_{mn} , bir tekrarlı ileri farklı binom katsayılarının çarpımı ile μ_n den elde edilir. Bütün μ ler eşit olduğundan, farklar sıfırdır ve böylece $n < m$ için $b_{mn} = 0$ dır.

Dolayısıyla B bütün köşegen girişleri birim olan bir köşegendir ve teorem ispatlanır. ■

Uyarı 2.2 *Teorem 2.2 de $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alınırsa Önerme 1.9 elde edilir.*

Sonuç 2.1 *Eğer bir B sonsuz matrisi her genelleştirilmiş Cesàro matrisi ile değişmeli ise bu durumda B birim matrisin bir skaler katıdır.*

Teorem 2.3 *Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ olsun. Bu durumda, R_b^g normaldir $\Leftrightarrow$ bir $c \in \mathbb{C}$ için $g(z) = c$ dir.*

İspat. Matris çarpımı yardımıyla $\left[(R_b^g)^* (R_b^g)\right]_{00}$ ve $\left[(R_b^g)(R_b^g)^*\right]_{00}$ ı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \left[(R_b^g)^* (R_b^g)\right]_{00} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(R_b^g)^*\right]_{0k} \left[R_b^g\right]_{k0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\overline{a_k b_k}\right)(a_k b_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 |b_k|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \left[(R_b^g)(R_b^g)^*\right]_{00} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[R_b^g\right]_{0k} \left[(R_b^g)^*\right]_{k0} \\ &= a_0 b_0 \overline{a_0 b_0} = |a_0|^2 |b_0|^2 \end{aligned}$$

dir. Normallik $(R_b^g)^* (R_b^g) = (R_b^g)(R_b^g)^*$ biçiminde tanımlandığından $\left[(R_b^g)^* (R_b^g)\right]_{00} = \left[(R_b^g)(R_b^g)^*\right]_{00}$ olmalıdır. O halde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 |b_k|^2 = |a_0|^2 |b_0|^2$$

dir. Yani;

$$|a_0|^2 |b_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 |b_k|^2 = |a_0|^2 |b_0|^2$$

dir. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 |b_k|^2 = 0$ olmalıdır. O halde her k için $b_k \neq 0$ olduğundan $k \geq 1$ için $a_k = 0$ dır. $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ Taylor açılımına sahip olduğundan $g(z) = a_0$ olmalıdır.

$g(z) = a_0$ olması (2.5) den $R_b^g = diag\{\{a_0 b_k\}_{k=1}^{\infty}\}$ olmasını sağladığından diğer taraflar aşikardır. ■

Uyarı 2.3 *Teorem 2.3 de* $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ *alınırsa Önerme 1.5 elde edilir.*

Sonuç 2.2 R_b *Rhaly matrisi normal değildir.*

İspat. R_b^g de $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alınırsa R_b elde edilir. O halde $g(z)$ sabit olmadığından Teorem 2.3 den R_b normal değildir. ■

Sonuç 2.3 C *Cesàro matrisi normal değildir.*

İspat. Teorem 2.3 de $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ ve $g(z) = \dfrac{1}{1-z} \neq c$ (sabit) alınırsa istenilen elde edilir. ■

Teorem 2.4 *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n \neq 0$ *ve* $\exists b_n \in \mathbb{R}$ *olsun. Bu durumda,* R_b^g *self-adjointtir* $\Leftrightarrow$ *bir* $c \in \mathbb{R}$ *için* $g(z) = c$ *dir.*

İspat. $R_b^g = (R_b^g)^*$ olmalı. O halde (2.5) ve (2.7) den

$$a_0 b_0 = \overline{a_0 b_0}\ ,\ a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \cdots = 0$$

dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ olduğundan

$$a_0 = \overline{a_0}\ ,\ a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

elde edilir. O halde $a_0 \in \mathbb{R}$ ve $g(z) = a_0 \in \mathbb{R}$ dir. ■

Uyarı 2.4 *Teorem 2.4 de* $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ *alınırsa Sonuç 1.3 elde edilir.*

Sonuç 2.4 R_b *Rhaly matrisi self-adjoint değildir.*

İspat. Teorem 2.4 de $g(z) = \dfrac{1}{1-z} \neq c$ (sabit) alınırsa istenilen elde edilir. ■

Sonuç 2.5 C *Cesàro matrisi self-adjoint değildir.*

İspat. Teorem 2.4 de $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ ve $g(z) = \dfrac{1}{1-z} \neq c$ (sabit) alınırsa istenilen elde edilir. ■

Teorem 2.5 *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n > 0$ *ve* (b_n) *kesin azalan olsun. Bu durumda, her* $g \in \mathcal{B}$ *için* $(R_b^g)^*$ *devirlidir.*

İspat. $g(0) = 0$ ise bu durumda sonuç, [29] Teorem 2 den elde edilir. Eğer $g(0) \neq 0$ ise (2.7) deki köşegen girişleri farklıdır (her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n > 0$ ve b_n kesin azalan). Dolayısıyla [18] Önerme 3.6 dan $(R_b^g)^*$ devirlidir. ■

Uyarı 2.5 *Teorem 2.5 de* $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ *alırsak Önerme 1.6 elde edilir.*

Aşağıda, bir alt üçgensel matrisin point spektrumunun belirlenmesinde kullanılan, temel lemma verilmiştir.

Lemma 2.1 *Eğer* T , $D = \{a_{ii}\}_{i=1}^{\infty}$ *köşegen girişleri ile* $\mathcal{B}$ *nin bir ortonormal bazında bir alt üçgensel matris gösterimine sahipse* $\sigma_p(T) \subseteq D$ *dir.*

İspat. Altüçgensel matris gösterimine sahip T verilsin. v, T nin bir özvektörü olsun. Böylece en az bir λ için $Tv = \lambda v$ dir. $\mathcal{B}$ nin bazında $v = (v_1, v_2, \ldots)$ yazalım. Bu baza göre T altüçgensel olduğundan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

elde ederiz. v bir özvektör olduğundan sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $1 \leq i \leq n-1$ için $v_n \neq 0$ ve $v_i = 0$ olacak şekilde bir n vardır. Yukarıdaki matrisi kullanarak $\lambda v_n = (Tv)_n = a_{nn} v_n$ olduğunu hesaplarız. $v_n \neq 0$ olduğundan $a_{nn} = \lambda$ olduğunu elde ederiz. Böylece $\lambda \in D$ dir. ■

Teorem 2.6 *Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ ve $\{(n+1) b_n\}$ dizisi sınırlı olsun. Bir $n \geq 0$ için $g(z) = z^n$ ise bu durumda;*
(i) *$n = 0$ için $\sigma(R_b^g) = \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{0\}$ dır.*
(ii) *$n > 0$ için $\sigma(R_b^g) = \{0\}$ dır.*

İspat. Teorem 1.24 den C_g kompakttır ve $R_b^g = D_b C_g$ olduğundan ve D_b sınırlı (bak Lemma 2.2) olduğundan R_b^g kompakttır. Böylece $0 \in \sigma(R_b^g)$ dir. Ayrıca eğer $\lambda \in \sigma(R_b^g) \setminus \{0\}$ ise bu durumda $\lambda \in \sigma_p(R_b^g)$ dir. Lemma 2.1 den $\sigma_p(R_b^g) \subseteq \{g(0) b_k\}_{k=1}^{\infty}$ olduğunu biliyoruz.

Eğer $n = 0$ ise yani $g(z) = 1$ ise bu durumda Teorem 2.3 den R_b^g normaldir. Ayrıca R_b^g köşegendir. Dolayısıyla $\sigma_p(R_b^g) = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ dir. Böylece $\sigma(R_b^g) = \{0\} \cup \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ dir.

Eğer $g(z) = z^n$ bu durumda $g(0) = 0$ dır. Dolayısıyla $\sigma(R_b^g) = \sigma_p(R_b^g) = \{0\}$ dir. ■

Uyarı 2.6 *Teorem 2.6 da $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ alınırsa Önerme 1.7 elde edilir.*

Teorem 2.7 *Eğer $|\beta| = 1$ ile $g_\beta(z) = g(\beta z)$ ise bu durumda $R_b^{g_\beta}$, R_b^g ye üniter denktir. Bunu $R_b^{g_\beta} \approxeq R_b^g$ ile göstereceğiz.*

İspat. $U_\beta : H^2 \to H^2$, $U_\beta(f)(z) = f(\beta z)$ operatörünü tanımlayalım. U_β nın $U_\beta^* = U_{\overline{\beta}}$ ile üniter olduğunu görmek kolaydır.
Şimdi üniter denkliği gösterelim, $U_\beta^* R_b^{g_\beta} U_\beta = R_b^g$ olduğunu göstermeliyiz. U_β nın $\{z^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ bazına göre matris gösterimi; $U_\beta(z^i)(z) = (\beta z)^i$ olduğundan, yani,

$$U_\beta(1)(z) = 1,\ U_\beta(z)(z) = \beta z,\ U_\beta\left(z^2\right)(z) = \beta^2 z^2, \cdots$$

olduğundan, $diag\{\beta^n\}$ köşegen matrisidir. Ayrıca biliyoruz ki $(U_\beta)^* = U_{\overline{\beta}} = (U_\beta)^{-1}$

dir. O halde $U_\beta^* R_b^{g\beta} U_\beta =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \overline{\beta} & & \\ & & \overline{\beta}^2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0b_0 & & & \\ a_1b_1\beta & a_0b_1 & & \\ a_2b_2\beta^2 & a_1b_2\beta & a_0b_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \beta & & \\ & & \beta^2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \overline{\beta} & & \\ & & \overline{\beta}^2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0b_0 & & & \\ a_1b_1\beta & a_0b_1\beta & & \\ a_2b_2\beta^2 & a_1b_2\beta^2 & a_0b_2\beta^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0b_0 & & & \\ a_1b_1\beta\overline{\beta} & a_0b_1\beta\overline{\beta} & & \\ a_2b_2\beta^2\overline{\beta}^2 & a_1b_2\beta^2\overline{\beta}^2 & a_0b_2\beta^2\overline{\beta}^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0b_0 & & & \\ a_1b_1\left|\beta\right|^2 & a_0b_1\left|\beta\right|^2 & & \\ a_2b_2\left|\beta\right|^4 & a_1b_2\left|\beta\right|^4 & a_0b_2\left|\beta\right|^4 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = R_b^g$$

dir. Böylece $R_b^{g\beta} \approxeq R_b^g$ elde edilir. ■

Uyarı 2.7 *Teorem 2.7 de* $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ *alırsak Teorem 1.25 elde edilir.*

Sonuç 2.6 *Eğer* $\beta \in \mathbb{T}$ *ise bu durumda* $\sigma\left(R_b^{\frac{1}{1-\beta z}}\right) = \sigma(R_b) = \{z : |z - L| \leq L\} \cup S$ *dir. Burada* $L = \lim_n (n+1) b_n$ *ve* $S = \{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *dir.*

İspat. İstenilen Teorem 2.7 ve Teorem 1.28 den elde edilir. ∎

Lemma 2.2 $g \in \mathcal{B}$ *ve* $\{(n+1) b_n\}$ *dizisi sınırlı bir dizi ise* R_b^g *sınırlıdır.*

İspat. $(x_k) \in \ell^2$ olsun,

$$\begin{aligned} D_b x_n &= \begin{pmatrix} b_0 & & & \\ & 2b_1 & & \\ & & 3b_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= (b_0 x_0, 2b_1 x_1, \ldots, (n+1) b_n x_n, \ldots) \end{aligned}$$

dir. O halde $\{(n+1) b_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $|(n+1) b_n| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(n+1) b_n|^2 |x_n|^2 \leq M^2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = M^2 \|x\|^2$$

olur ki, bu

$$\|D_b x_n\| \leq M \|x\|$$

olması demektir. Böylece D_b sınırlıdır. Ayrıca $g \in \mathcal{B}$ iken C_g sınırlı olduğundan, $R_b^g = D_b C_g$ operatörü sınırlıdır. ∎

Uyarı 2.8 *Lemma 2.2 de* $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *alınırsa Önerme 1.10 elde edilir.*

2.2 Genelleştirilmiş Rhaly matrislerinin Topolojik özellikleri

Bu kısımda b dizisi ile verilen H^2 deki bütün sınırlı genelleştirilmiş Rhaly operatörlerinin kümesi olan $\mathcal{R}_b$ kümesinin bazı topolojik özelliklerini araştıracağız.

$\mathcal{R}_b$, Lemma 2.2 den $\{(n+1)\,b_n\}$ dizisi sınırlı bir dizi olmak üzere

$$\mathcal{R}_b = \{R_b^g : g \in \mathcal{B}\}$$

kümesidir. $\mathcal{R}_b$ nin $B\left(H^2\right)$ nin bir kapalı altuzayı olduğunu göstereceğiz ve $\mathbb{T}$ den $\mathcal{R}_b$ ye bir operatör tanımlayıp kuvvetli operatör topolojide bu operatörün birebir örten ve sürekli olduğunu göstereceğiz.

Tanım 2.3 *Zayıf operator topoloji veya ZOT, $x, y \in H$ ve $T \in B(H)$ için*

$$T_{x,y} = |\langle Tx, y\rangle|$$

yarınormu ile üretilen $B(H)$ üzerinde lokal konveks topolojidir.
Denk olarak eğer $\{T_\alpha\}$, $B(H)$ içindeki operatörlerin bir ağı ise $T_\alpha \overset{ZOT}{\to} T$ dir $\Leftrightarrow$ $x, y \in H$ için $\langle T_\alpha x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ dir.

Tanım 2.4 *Kuvvetli operatör topoloji veya KOT, $x \in H$ ve $T \in B(H)$ için*

$$T_x = \|Tx\|$$

yarınormu ile üretilen $B(H)$ üzerinde lokal konveks topolojidir.
ZOT-yakınsaklıktaki gibi KOT-yakınsaklık da denk olarak eğer $\{T_\alpha\}$, $B(H)$ içindeki operatörlerin bir ağı ise $T_\alpha \overset{KOT}{\to} T$ dir $\Leftrightarrow$ her bir $x \in H$ için $\|(T_\alpha - T)\,x\| \to 0$ dır.

Teorem 2.8 $\mathcal{R}_b$, $B\left(H^2\right)$ *nin bir zayıf operatör kapalı altuzayıdır.*

İspat. $\mathcal{R}_b$ nin altuzay oluşu, matris operatörlerinin lineerliği ve $\mathcal{B}$ nin lineerliğinden çıkar. Gerçekten de; $R_b^{g_1}, R_b^{g_2} \in \mathcal{R}_b$ ise $R_b^{g_1} + R_b^{g_2} = R_b^{g_1+g_2}$ dir ve $g_1, g_2 \in \mathcal{B}$ iken $g_1 + g_2 \in \mathcal{B}$ olduğundan $R_b^{g_1+g_2} \in \mathcal{R}_b$ dir. Biz $\mathcal{R}_b$ nin zayıf operatör topolojide kapalı olduğunu ispatlayalım.
$\{R_b^g\}_\alpha$, $\mathcal{R}_b$ içinde $\{R_b^g\}_\alpha \overset{\text{ZOT}}{\to} S$ olacak şekilde operatörlerin bir ağı olsun. Bizim amacımız bir $h \in \mathcal{B}$ için $S = R_b^h$ olduğunu göstermektir. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k)_\alpha\, z^k$, g_α nın Taylor serisi olsun.

$B(H^2)$, ZOT-kapalı olduğundan $S \in B(H^2)$ elde ederiz. $\left[\{R_b^g\}_\alpha\right]_{nj}$, H^2 nin standart bazına göre $\{R_b^g\}_\alpha$ nın matris gösterimi olsun. $\{R_b^g\}_\alpha \overset{\text{ZOT}}{\rightarrow} S$ olduğundan her n, j için $\left[\{R_b^g\}_\alpha\right]_{nj} \rightarrow S_{nj}$ dir. Bu bir Hilbert uzayı üzerinde her bir T sınırlı operatörü için genel bir gerçek olan, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal baza göre T için matrisin nj-inci girişinin $T_{nj} = \langle Te_n, e_j \rangle$ olmasıdır. Eğer $n \geq j$ ise $\left[\{R_b^g\}_\alpha\right]_{nj} = (a_{n-j})_\alpha b_n$ dir. Bu $n \geq j$ için $S_{nj} = \lim_\alpha (a_{n-j})_\alpha b_n$ olmasını sağlar. $n < j$ için $\left[\{R_b^g\}_\alpha\right]_{nj} = 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $n < j$ için $S_{nj} = 0$ dır. Böylece S, (2.6) formuna sahiptir.

$c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$h(z) := c + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\{R_b^g\}_\alpha\right]_{n1} z^n$$

tanımlayalım. Bu durumda $S = R_b^h$ dir. Teorem 1.23 den $h \in \mathcal{B}$ dir. Böylece $S \in \mathcal{R}_b$ dir.

ZOT, norm topolojiden daha zayıftır, dolayısıyla $\mathcal{R}_b$ nin norm kapalı olduğunu da elde ederiz. Böylece $\mathcal{R}_b$, $B(H^2)$ nin kapalı altuzayıdır. ■

Şimdi

$$\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{R}_b \quad , \qquad \beta \rightarrow R_b^{\frac{1}{1-\beta z}}$$

operatörünü tanımlayalım.

Teorem 2.9 $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{R}_b$ *bir bijektif kuvvetli operatör sürekli dönüşümdür.*

İspat. $\beta_k \rightarrow \beta$ olsun. Herbir $f \in H^2$ için

$$\left\| \left(R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b^{\frac{1}{1-\beta z}} \right)(f) \right\| \rightarrow 0$$

olduğunu göstermeliyiz. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Teorem 2.7 den

$$R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b^{\frac{1}{1-\beta z}} \approxeq R_b^{\frac{1}{1-\overline{\beta}\beta_k z}} - R_b$$

dir. Eğer $f \in H^2$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned} \left\| \left(R_b^{\frac{1}{1-\overline{\beta}\beta_k z}} - R_b \right)(f) \right\| &= \left\| U_\beta \left(R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b^{\frac{1}{1-\beta z}} \right) U_{\overline{\beta}}(f) \right\| \\ &= \left\| \left(R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b^{\frac{1}{1-\beta z}} \right) U_{\overline{\beta}}(f) \right\| \quad , \ U_\beta \text{ birimsel} \\ &= \left\| \left(R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b^{\frac{1}{1-\beta z}} \right)(g) \right\| \quad , \text{ burada } g = U_{\overline{\beta}}(f) \in H^2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} \stackrel{\text{KOT}}{\longrightarrow} R_b^{\frac{1}{1-\beta z}} \Leftrightarrow R_b^{\frac{1}{1-\overline{\beta}\beta_k z}} \stackrel{\text{KOT}}{\longrightarrow} R_b$$

dir. $\beta = 1$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}}(f(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n \sum_{j=0}^{n} a_j\right)(\beta_k z)^n \\ R_b(f(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n \sum_{j=0}^{n} a_j\right) z^n \end{aligned}$$

dir. Son iki eşitliği taraf tarafa çıkartırsak

$$\left(R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b\right)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\left(\beta_k^j - 1\right)\right)$$

elde edilir. Buradan $\beta_k^j - 1 = (\beta_k - 1)\left(1 + \beta_k + \beta_k^2 + \cdots + \beta_k^{j-1}\right) = (\beta_k - 1)\sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\|\left(R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b\right)(f)\right\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \left|\sum_{j=0}^{n} a_j\left(\beta_k^j - 1\right)\right|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \left|\beta_k - 1\right|^2 \left|\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l\right|^2 \\ &= \left|\beta_k - 1\right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_n \sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l\right|^2 \end{aligned}$$

dir. $\left(R_b^{\frac{1}{1-\beta_k z}} - R_b\right)(f) \in H^2$ ise $\forall \epsilon > 0$ için $\exists N$ vardır öyleki $\forall n \geq N$ için

$$\left|\beta_k - 1\right|^2 \sum_{n=N}^{\infty} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_n \sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l\right|^2 < \frac{\epsilon}{2} \text{ (kalan terim sıfıra gider)} \tag{2.9}$$

geçerlidir.

$$M = \sum_{n=0}^{N-1} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_n \sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l\right|^2$$

olsun. $M < \infty$ dur, çünkü toplam sonludur. $\beta_k \to 1$ olmasının manası $\forall \epsilon > 0$ için $\exists K$ vardır öyleki $\forall k \geq K$ için $\left|\beta_k - 1\right| < \frac{\epsilon}{2M}$ dir. $\epsilon > 0$ sabit olsun. Eğer $n \geq N$ ve

$k \geq K$ alırsak, bu durumda

$$\begin{aligned} |\beta_k - 1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j b_n \sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l \right|^2 &= |\beta_k - 1|^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j b_n \sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l \right|^2 \\ &\quad + |\beta_k - 1|^2 \sum_{n=N}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j b_n \sum_{l=0}^{j-1} \beta_k^l \right|^2 \\ &< \frac{\epsilon}{2M}.M + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $R_b^{\frac{1}{1-\overline{\beta}\beta_k z}} \overset{\text{KOT}}{\rightarrow} R_b$ dir dolayısıyla ϕ, KOT-süreklidir. ■

3. GENELLEŞTIRILMIŞ RHALY MATRISININ SPEKTRUMU

Bu bölümde, g sembolü bir rasyonel fonksiyon olduğunda genelleştirilmiş Rhaly matrisi ile ilgili spektral sonuçlar ispatlayacağız. Burada spektrumun sadece bir kısmi kesir biçiminde yazılan rasyonel fonksiyonun katsayılarına bağlı olduğu görülmektedir. Bu operatörler için esaslı spektrum açık bir şekilde elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş Rhaly matrislerinin spektrumunu hesaplayabilmek için 2002 yılında [32] de S.W. Young'un kullandığı tekniği uygulamak istedik. [32] deki çalışmasında S.W. Young, Berger-Shaw teoremini kullanarak her $\beta \in \mathbb{T}$ için C_β nın esaslı normal olduğunu söylemiştir ve spektrumu hesaplamak için iki lemma kullanmıştır. Bizim bu lemmaları kullanabilmemiz için Rhaly matrisinin devirli ve altnormal olduğunu göstermemiz gerekir. Rhaly matrisinin bu beklenen özellikleri açık problem olarak durmaktadır. Üstesinden gelemediğimiz bu yöntem dışında ikinci bir yöntem ise S.W. Young'ın [33] deki kullandığı yöntemdir. Bu yöntemi kullanabilmemiz için Hilbert-Schimidt başlıklı aşağıdaki kısma ihtiyacımız vardır.

3.1 R_b^g nin Hilbert-Schimidt Özelliği

Genelleştirilmiş Rhaly matrisinin spektrumunu hesaplayabilmek için S.W. Young'nin [33] de verilen çalışmasındaki lemmaları kullandık. Bu lemmaların hipotezlerini sağlayabilmemiz için bu kısımda, $|\beta_1| = |\beta_2| = 1$ olmak üzere $\beta_1 \neq \beta_2$ kompleks sayıları için $R_b^{\beta_1} R_b^{\beta_2}$, $\left(R_b^{\beta_1}\right)^* R_b^{\beta_2}$ ve $R_b^{\beta_1}\left(R_b^{\beta_2}\right)^*$ operatörlerinin birer Hilbert-Schimidt operatörü olduğunu gösterdik. Burada; $R_b^{\beta_1} = R_b^{\frac{1}{1-\beta_1 z}}$ dir.

Lemma 3.1 *Eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$, $B_{j-1} = 0$, $B_k = \sum_{k=j}^{n} \beta^k$, $k = j, \ldots, n$ ve (a_k) pozitif terimli azalan bir dizi ise, bu durumda*

$$\left|\sum_{k=j}^{n} \frac{\beta^k}{a_k^\alpha}\right| \leq \frac{2}{|1-\beta|}\left(\frac{1}{a_n^\alpha} + \left|\frac{1}{a_j^\alpha} - \frac{1}{a_n^\alpha}\right|\right)$$

dır.

İspat. Her k için

$$|B_k| = \left|\sum_{k=j}^{n} \beta^k\right| = \left|\beta^j \frac{1-\beta^{n-j+1}}{1-\beta}\right| \leq \left|\beta^j\right| \frac{1+\left|\beta^{n-j+1}\right|}{|1-\beta|} = \frac{2}{|1-\beta|}$$

dır. O halde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{n} \frac{\beta^k}{a_k^\alpha} &= \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{a_k^\alpha} (B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \frac{B_k}{a_k^\alpha} - \sum_{k=j}^{n-1} \frac{B_k}{a_{k+1}^\alpha} \\
&= \frac{B_n}{a_n^\alpha} + \sum_{k=j}^{n-1} B_k \left(\frac{1}{a_k^\alpha} - \frac{1}{a_{k+1}^\alpha} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte mutlak değere geçersek

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=j}^{n} \frac{\beta^k}{a_k^\alpha} \right| &= \left| \frac{B_n}{a_n^\alpha} + \sum_{k=j}^{n-1} B_k \left(\frac{1}{a_k^\alpha} - \frac{1}{a_{k+1}^\alpha} \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{B_n}{a_n^\alpha} \right| + \sum_{k=j}^{n-1} \left| B_k \left(\frac{1}{a_k^\alpha} - \frac{1}{a_{k+1}^\alpha} \right) \right| \\
&\leq \frac{2}{|1-\beta|} \left(\left| \frac{1}{a_n^\alpha} \right| + \sum_{k=j}^{n-1} \left| \frac{1}{a_k^\alpha} - \frac{1}{a_{k+1}^\alpha} \right| \right) \\
&\leq \frac{2}{|1-\beta|} \left(\frac{1}{a_n^\alpha} + \left| \frac{1}{a_j^\alpha} - \frac{1}{a_n^\alpha} \right| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1 *$(b_n) \in \ell^2$ pozitif azalan bir dizi ve $|\beta_1| = |\beta_2| = 1$ olmak üzere $\beta_1 \neq \beta_2$ kompleks sayıları için $R_b^{\beta_1} R_b^{\beta_2}$ bir Hilbert-Schimidt operatörüdür. Burada; $R_b^{\beta_1} = R_b^{\frac{1}{1-\beta_1 z}}$ dir.*

İspat. $R_b^{\beta_1} R_b^{\beta_2} \in B_2(H^2)$ dir $\Leftrightarrow$ $U_{\overline{\beta_2}} R_b^{\beta_1} U_{\beta_2} U_{\overline{\beta_2}} R_b^{\beta_2} U_{\beta_2} \in B_2(H^2)$ dir. Bununla birlikte Teorem 2.7 den $U_{\overline{\beta_2}} R_b^{\beta_2} U_{\beta_2} = R_b$ dir. Dolayısıyla $\beta_2 = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. β_1 i β olarak yeniden sınıflandıralım.

H^2 için $\{z^{n-1}\}$ standart baza göre R_b^β için aşağıdaki matris gösterimini yazalım.

$$\begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ \beta b_1 & b_1 & & & \\ \beta^2 b_2 & \beta b_2 & b_2 & & \\ \beta^3 b_3 & \beta^2 b_3 & \beta b_3 & b_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$(R_b^\beta = R_b^{\frac{1}{1-\beta z}}$, $\dfrac{1}{1-\beta z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta z)^n = \underbrace{1}_{a_0} + \underbrace{\beta}_{a_1} z + \underbrace{\beta^2}_{a_2} z^2 + \cdots)$. O halde

$$\left(R_b^\beta\right)_{nj} = \begin{cases} 0 & , \quad n < j \\ & \\ \beta^{n-j} b_{n-1} & , \quad n \geq j \end{cases} \quad , \quad n, j = 1, 2, \ldots$$

olduğunu elde ederiz. $R_b^\beta R_b$ yi hesaplarsak

$$(R_b)_{nk} = \begin{cases} b_n & , \quad n \geq k \\ 0 & , \quad n < k \end{cases}$$

olduğundan

$$R_b^{\beta} R_b =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ \beta b_1 & b_1 & & & \\ \beta^2 b_2 & \beta b_2 & b_2 & & \\ \beta^3 b_3 & \beta^2 b_3 & \beta b_3 & b_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ b_1 & b_1 & & & \\ b_2 & b_2 & b_2 & & \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_0^2 & & & & \\ \beta b_1 b_0 + b_1^2 & b_1^2 & & & \\ \beta^2 b_2 b_0 + \beta b_2 b_1 + b_1^2 & \beta b_2 b_1 + b_2^2 & b_2^2 & & \\ \beta^3 b_3 b_0 + \beta^2 b_3 b_1 + \beta b_3 b_2 + b_3^2 & \beta^2 b_3 b_1 + \beta b_3 b_2 + b_3^2 & \beta b_3 b_2 + b_3^2 & b_3^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir. O halde koordinatsal olarak,

$$\left(R_b^{\beta} R_b\right)_{nj} = \begin{cases} 0 & , \quad n < j \\ \sum_{k=j}^{n} \beta^{n-k} b_{n-1} b_{k-1} & , \quad n \geq j \end{cases} \quad , \quad n, j = 1, 2, \ldots$$

elde ederiz, bunu düzenlersek

$$\beta^{n-k} = \beta^n \frac{1}{\beta^k} = \beta^n \frac{\overline{\beta}^k}{\left(\beta\overline{\beta}\right)^k} = \frac{\beta^n \overline{\beta}^k}{\left(|\beta|^2\right)^k} = \beta^n \overline{\beta}^k$$

olduğundan

$$\left(R_b^{\beta}R_b\right)_{nj}=\begin{cases} 0 & , \ n<j \\ & \\ \beta^n\sum\limits_{k=j}^{n}\overline{\beta}^k b_{n-1}b_{k-1} & , \ n\geq j \end{cases} \quad , \quad n,j=1,2,\ldots$$

matrisini elde ederiz. Şimdi $R_b^{\beta}R_b$ nin Hilbert-Schmidt normunu hesaplarsak

$$\begin{aligned}\left\|R_b^{\beta}R_b\right\|_{\text{H.S}} &= \sum_{n,j}\left|\left(R_b^{\beta}R_b\right)_{nj}\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|\left(R_b^{\beta}R_b\right)_{nj}\right|^2 \quad , \quad (\left(R_b^{\beta}R_b\right) \text{ alt üçgensel}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(b_{n-1})^2\left|\sum_{k=j}^{n}\overline{\beta}^k b_{k-1}\right|^2 \quad , \quad (|\beta|^{2n}=1)\end{aligned}$$

dir. $\alpha=-1$ ile Lemma 3.1 i uygularsak

$$\left|\sum_{k=j}^{n}\overline{\beta}^k b_{k-1}\right|\leq\frac{2}{|1-\beta|}\left(b_{n-1}+|b_{j-1}-b_{n-1}|\right)\leq\frac{2b_{j-1}}{|1-\beta|} \tag{3.2}$$

o halde (3.2) den

$$\begin{aligned}\left\|R_b^{\beta}R_b\right\|_{H.S}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(b_{n-1})^2\left(\frac{2b_{j-1}}{|1-\beta|}\right)^2 \\ &\leq \frac{4}{|1-\beta|^2}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n-1})^2\sum_{j=1}^{n}(b_{j-1})^2 \\ &\leq \frac{4}{|1-\beta|^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n-1})^2\right)^2<\infty\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $R_b^{\beta}R_b$ bir Hilbert-Schmidt operatörüdür. ■

Spektrumu hesaplayabilmemiz için yeni sonuçlara ihtiyacımız var.

Teorem 3.2 *$(b_n)\in\ell^2$ pozitif azalan bir dizi ve $|\beta_1|=|\beta_2|=1$ olmak üzere $\beta_1\neq\beta_2$ kompleks sayıları için $\left(R_b^{\beta_1}\right)^*R_b^{\beta_2}$ ve $R_b^{\beta_1}\left(R_b^{\beta_2}\right)^*$ Hilbert-Schimidt operatörüdürler.*

İspat. Genelliği bozmaksızın $\beta_2=1$ olduğunu ve β_1 yerine β aldığımızı kabul edelim.

Biz ilk önce $\left(R_b^{\beta_1}\right)^* R_b^{\beta_2} \in B_2(H^2)$ olduğunu göstereceğiz. (3.1) den

$$\left(R_b^{\beta}\right)^*_{nj} = \begin{cases} 0 & , \quad n > j \\ & \\ \overline{\beta}^{j-n} b_{j-1} & , \quad n \leq j \end{cases} \quad , \quad n, j = 1, 2, \ldots$$

olduğunu elde ederiz. Böylece

$$\left(R_b^{\beta}\right)^* R_b =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & \overline{\beta} b_1 & \overline{\beta}^2 b_2 & \overline{\beta}^3 b_3 & \cdots \\ & b_1 & \overline{\beta} b_2 & \overline{\beta}^2 b_3 & \cdots \\ & & b_2 & \overline{\beta} b_3 & \cdots \\ & & & b_3 & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ b_1 & b_1 & & & \\ b_2 & b_2 & b_2 & & \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_0^2 + \overline{\beta} b_1^2 + \overline{\beta}^2 b_2^2 + \cdots & \overline{\beta} b_1^2 + \overline{\beta}^2 b_2^2 + \cdots & \overline{\beta}^2 b_2^2 + \overline{\beta}^3 b_3^2 + \cdots & \cdots \\ b_1^2 + \overline{\beta} b_2^2 + \overline{\beta}^2 b_3^2 + \cdots & b_1^2 + \overline{\beta} b_2^2 + \overline{\beta}^2 b_3^2 + \cdots & \overline{\beta} b_2^2 + \overline{\beta}^2 b_3^2 + \cdots & \cdots \\ b_2^2 + \overline{\beta} b_3^2 + \overline{\beta}^2 b_4^2 + \cdots & b_2^2 + \overline{\beta} b_3^2 + \overline{\beta}^2 b_4^2 + \cdots & b_2^2 + \overline{\beta} b_3^2 + \overline{\beta}^2 b_4^2 + \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

yani; koordinatsal olarak,

$$\left[\left(R_b^{\beta}\right)^* R_b\right]_{nj} = \overline{\beta}^{-n} \sum_{k=\max\{n,j\}}^{\infty} \overline{\beta}^k b_{k-1}^2 \tag{3.3}$$

elde ederiz. Dolayısıyla aşağıdaki toplamın yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

$$\sum_{n,j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=\max\{n,j\}}^{\infty} \overline{\beta}^k b_{k-1}^2 \right|^2$$

Biz ilk önce $\left|\sum_{k=\max\{n,j\}}^{\infty} \overline{\beta}^k b_{k-1}^2\right|$ yi değerlendirelim.

Durum 3.1 *$n \geq j$ olsun. $\alpha = -2$ durumunda Lemma 3.1 i uygularsak*

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \overline{\beta}^k b_{k-1}^2\right| \leq \frac{2b_{n-1}^2}{|1-\beta|}$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned}
\left\|\left(R_b^{\beta}\right)^* R_b\right\|_{H.S} &= \sum_{n,j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=j}^{\infty} \overline{\beta}^k b_{k-1}^2\right|^2 \\
&\leq \frac{4}{|1-\beta|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{n-1}^4 \\
&\leq \frac{4}{|1-\beta|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{n-1}^2 b_{j-1}^2 \quad , \quad (n \geq j,\ b_n \leq b_j) \\
&= \frac{4}{|1-\beta|^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}^2\right)^2 < \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Durum 3.2 *$j \geq n$ olsun. O halde benzer şekilde*

$$\left|\sum_{k=j}^{m} \overline{\beta}^k b_{k-1}^2\right| \leq \frac{2b_{j-1}^2}{|1-\beta|}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\left\|\left(R_b^{\beta}\right)^* R_b\right\|_{H.S} &= \sum_{n,j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=j}^{\infty} \overline{\beta}^k b_{k-1}^2\right|^2 \\
&\leq \frac{4}{|1-\beta|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{j-1}^4 \\
&\leq \frac{4}{|1-\beta|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{n-1}^2 b_{j-1}^2 \quad , \quad (j \geq n,\ b_j \leq b_n) \\
&= \frac{4}{|1-\beta|^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}^2\right)^2 < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\left(R_b^{\beta_1}\right)^* R_b^{\beta_2} \in B_2\left(H^2\right)$ dir.

Şimdi dikkatimizi $R_b^\beta (R_b)^*$ operatörüne çevirelim

$$R_b^\beta (R_b)^* =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ \beta b_1 & b_1 & & & \\ \beta^2 b_2 & \beta b_2 & b_2 & & \\ \beta^3 b_3 & \beta^2 b_3 & \beta b_3 & b_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ & & b_2 & b_3 & \cdots \\ & & & b_3 & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_0^2 & b_0 b_1 & b_0 b_2 & b_0 b_3 & \cdots \\ \beta b_0 b_1 & \beta b_1^2 + b_1^2 & \beta b_1 b_2 + b_1 b_2 & \beta b_1 b_3 + b_1 b_3 & \cdots \\ \beta^2 b_0 b_2 & \beta^2 b_1 b_2 + \beta b_1 b_2 & \beta^2 b_2^2 + \beta b_2^2 + b_2^2 & \beta^2 b_2 b_3 + \beta b_2 b_3 + b_2 b_3 & \cdots \\ \beta^3 b_0 b_3 & \beta^3 b_1 b_3 + \beta^2 b_1 b_3 & \beta^3 b_2 b_3 + \beta^2 b_2 b_3 + \beta b_2 b_3 & \beta^3 b_3^2 + \beta^2 b_3^2 + \beta b_3^2 + b_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olduğundan, koordinatsal olarak

$$\begin{aligned} \left[R_b^\beta (R_b)^*\right] &= \sum_{k=1}^{\min\{n,j\}} \beta^{n-k} b_{n-1} b_{j-1} \\ &= \beta^n b_{n-1} b_{j-1} \sum_{k=1}^{\min\{n,j\}} \overline{\beta}^k \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\left|\beta^n b_{n-1} b_{j-1} \sum_{k=1}^{\min\{n,j\}} \overline{\beta}^k\right| &= b_{n-1} b_{j-1} \left|\sum_{k=1}^{\min\{n,j\}} \overline{\beta}^k\right| \\
&= b_{n-1} b_{j-1} \left|\overline{\beta}\right| \frac{\left|1-\overline{\beta}^{\min\{n,j\}}\right|}{\left|1-\overline{\beta}\right|} \\
&\leq \frac{2 b_{n-1} b_{j-1}}{|1-\beta|}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\left\|R_b^\beta (R_b)^*\right\|_{\mathrm{H.S}} &= \sum_{n,j=1}^{\infty} \left|\beta^n b_{n-1} b_{j-1} \sum_{k=1}^{\min\{n,j\}} \overline{\beta}^k\right|^2 \\
&\leq \frac{4}{|1-\beta|^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} b_{j-1}^2\right) \\
&= \frac{4}{|1-\beta|^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}^2\right)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $R_b^\beta (R_b)^* \in B_2(H^2)$ dir. ■

Uyarı 3.1 *Teorem 2.7 ve 3.1 de* $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ *alınırsa*[33] , *Teorem 2.3 elde edilir.*

π, $B(H^2)$ den $Q(H^2)$ Calkin cebri üzerine kanonik dönüşümü göstersin. Teorem 2.7 ve 3.1 den aşağıdakileri elde ederiz.

$$\pi\left(R_b^\beta R_b\right) = 0 \tag{3.4}$$

$$\pi\left(\left(R_b^\beta\right)^* R_b\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$\pi\left(R_b^\beta (R_b)^*\right) = 0 \tag{3.6}$$

3.2 R_b^g nin Spektrumu

Bu kısımda biz, sembol rasyonel fonksiyon olduğunda genelleştirilmiş Rhaly matrisinin spektrumunu hesaplayacağız.

İlk önce rasyonel fonksiyon tanımını verelim. Eğer P ve Q, $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ olacak şekilde iki polinomsa R ye *rasyonel fonksiyon* denir. Spektrumu hesaplanacak olan genelleştirilmiş Rhaly matrisindeki rasyonel fonksiyonu seçerken biz R_b^R yi sınırlı yapan R rasyonel fonksiyonunu kullanmalıyız. Son olarak bu R nin birim disk içinde hiçbir kutuba sahip olamayacağını not edelim. Ayrıca eğer Q, $\mathbb{T}$ üzerinde sıfırlara sahip olursa bu sıfırlar basit olmalıdır. Eğer birim çember üzerinde bir çift katlı kutup varsa bu durumda kutupta ilkelin büyüklüğü logaritmik büyüklükten daha hızlı olmalıdır, dolayısıyla bu BMOA da değildir (BMOA fonksiyonlarının büyüme özellikleri üzerine bilgi edinmek için [7] ye bkz).

Bu kısımda, $\mathbb{T}$ ile ilişkili onun kısmi kesir ayrışımını R ile göstereceğiz, yani; S kapalı birim diskte analitik olan bir rasyonel fonksiyon olmak üzere

$$R(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\beta_i z} + S(z)$$

dir.

Bizim ana teoremimizi ispatlayabilmemiz için gereken ve S.W. Young'ın [33] de ispatladığı iki önemli Lemmayı aşağıda ispatları ile verelim.

Lemma 3.2 *$i \neq j$ için $a_i a_j = a_j a_i = 0$ ve $a_i^* a_j = a_j a_i^* = 0$ olmak üzere eğer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bir A , C^* cebrinin elemanları ise ve $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ise bu durumda*

$$\{0\} \cup \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(\alpha_i a_i) \tag{3.7}$$

geçerlidir ([33] , Young 2004, Lemma 3.2).

(Lemmayı ispatlamadan önce not edelimki tersinir olmayan elemanların toplamının tersinir olabilmesi için (3.7) deki $\{0\}$ gereklidir. Örneğin P bir izdüşüm olsun. $PP^{\perp} = P^{\perp}P = 0$ dır fakat $P + P^{\perp} = I$ dır.)

İspat. İspatı tümevarımla yapacağız.

a_1 ve a_2 ile üretilen C^* cebrini $C^*(a_1, a_2)$ ile gösterelim. $C^*(a_1, a_2)$, A nın bir altcebridir. $\forall x \in C^*(a_1, a_2)$ elemanı için Teorem 1.18 den $\sigma_A(x) = \sigma_{C^*(a_1,a_2)}(x)$

elde ederiz. $a_1a_2 = a_2a_1 = 0$ ve $a_1^*a_2 = a_2a_1^*$, $a_{21}^*a_1 = a_1a_2^*$ olduğundan $C^*(a_1, a_2)$ bir komutatif C^*-cebridir. Teorem 1.17 yi uygularsak $C(X)$, X üzerindeki sürekli fonksiyonları göstermek üzere, $C^*(a_1, a_2) \approx C(X)$ olacak şekilde bir X kompakt Hausdorff uzayı olduğu sonucuna varırız.

f ve g sırasıyla a_1 ve a_2 nin fonksiyonları olsun. $a_1a_2 = 0$ olduğundan $x \in X$ için $f(x)g(x) = 0$ dır. Bu, $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g) = \emptyset$ olduğunu söyler.

h, bir kompakt uzay üzerinde çarpımsal tersinir sürekli bir fonksiyon olsun, yani; eğer h hiç bir zaman sıfır değilse $\frac{1}{h}$ mevcut olsun. Biz $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\alpha_1 f + \alpha_2 g - \lambda$$

nın tersinir olmasını istiyoruz. $\lambda \in \sigma(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2)$ olsun. Böylece $\alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 g(x_0) = \lambda$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası vardır. $x_0 \in \operatorname{supp}(f)$ olduğunu kabul edelim, bu durumda f ve g nin destekleri farklı olduğundan $g(x_0) = 0$ dır. Bu yüzden $\alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 g(x_0) = \alpha_1 f(x_0) = \lambda$ dir. Böylece $\lambda \in \sigma(\alpha_1a_1)$ *dir.*

Eğer $x_0 \notin \operatorname{supp}(f)$ ise bu durumda hem $x_0 \in \operatorname{supp}(g)$ hem de $x_0 \notin \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)$ dir. Eğer $x_0 \in \operatorname{supp}(g)$ ise bu durumda yukarıdaki argümen $\lambda \in \sigma(\alpha_2a_2)$ olduğunu gösterir.

Eğer $x_0 \notin \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)$ ise bu durumda $\lambda = \alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 g(x_0) = 0$ dır. Biz

$$\{0\} \cup \sigma(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2) \subseteq \sigma(\alpha_1a_1) \cup \sigma(\alpha_2a_2)$$

olduğunu gösterdik. Tersi için $\lambda \in \sigma(\alpha_1a_1)$ olsun. $\alpha_1 f(x_0) = \lambda$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası vardır. Eğer $\lambda = 0$ ise, sol kısım içindedir. Şimdi $\lambda \neq 0$ olduğunu kabul edelim, bu durumda $x_0 \in \operatorname{supp}(f)$ ve $x_0 \notin \operatorname{supp}(g)$ dir. Dolayısıyla

$$\lambda = \alpha_1 f(x_0) = \alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 g(x_0)$$

dır, yani; $\lambda \in \sigma(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2)$ dir.

n nin genel durumu için $\alpha_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha_1a_1 + \cdots + \alpha_na_n = b \in A$ yazalım. $i \neq j$ için $a_i^*a_j = a_ja_i^* = 0$ olduğundan bunların lineer kombinasyonu içinde toplamın 0 olacağını belirtelim. b ve α_na_n elemanlarınii yukarıdaki gibi iki eleman için doğru olan duruma uygularsak

$$\{0\} \cup \sigma(b + \alpha_na_n) = \sigma(b) \cup \sigma(\alpha_na_n)$$

elde ederiz.

Sonuç tümevarımdan elde edilir. ■

Lemma 3.3 *Eğer $i \neq j$ için $T_iT_j \in \mathcal{K}(H)$ olacak şekilde $T_1, \ldots, T_n \in B(H)$ ise ve $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ise bu durumda her $\lambda \notin \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_e(T_i)$ için*

$$\operatorname{ind}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i - \lambda\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ind}(\alpha_i T_i - \lambda) \tag{3.8}$$

elde ederiz ([33] , Young 2004, Lemma 3.4).

İspat. İspatı tümevarımla yapacağız.

Kabul edelim ki $\lambda \notin \sigma_e(T_1) \cup \sigma_e(T_2)$ olsun.

Eğer $\lambda = 0$ ise bu durumda $T_1 \in \mathcal{F}$ ve $T_2 \in \mathcal{F}$ dir. Böylece $T_1T_2 \in \mathcal{F}$ dir. Bununla birlikte $\pi(T_1T_2) = 0$ dır ve 0 tersinir değildir. Dolayısıyla $0 \in \sigma_e(T_1) \cup \sigma_e(T_2)$ dir. Bu nedenle $\lambda \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

$(T_1 - \lambda)(T_2 - \lambda)$ yı hesaplayalım.

$$(T_1 - \lambda)(T_2 - \lambda) = T_1T_2 - \lambda(T_1 + T_2 - \lambda) \tag{3.9}$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\lambda}(T_1 - \lambda)(T_2 - \lambda) = \frac{1}{\lambda}T_1T_2 - T_1 - T_2 + \lambda$$

elde ederiz. Burada $T_1 + T_2 - \lambda$, $\frac{1}{\lambda}(T_1 - \lambda)(T_2 - \lambda)$ Fredholm operatörünün bir kompakt perturbasyonu olduğundan

$$\sigma_e(T_1 + T_2) \subset \sigma_e(T_1) \cup \sigma_e(T_2)$$

olduğunu dikkate alalım. Önerme 1.4 (iii) den

$$\operatorname{ind}(T_1 + T_2 - \lambda) = \operatorname{ind}\left(\frac{1}{\lambda}(T_1 - \lambda)(T_2 - \lambda)\right)$$

olduğunu elde ederiz. Önerme 1.4 (ii) den

$$\operatorname{ind}\left(\frac{1}{\lambda}(T_1 - \lambda)(T_2 - \lambda)\right) = \operatorname{ind}\left(\frac{1}{\lambda}I\right) + \operatorname{ind}(T_1 - \lambda) + \operatorname{ind}(T_2 - \lambda)$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T_1 + T_2 - \lambda) &= \operatorname{ind}\left(\frac{1}{\lambda}I\right) + \operatorname{ind}(T_1 - \lambda) + \operatorname{ind}(T_2 - \lambda) \\ &= \operatorname{ind}(T_1 - \lambda) + \operatorname{ind}(T_2 - \lambda) \end{aligned}$$

dır.

Şimdi tümevarımla n tane genel operatör için ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3 *Eğer* $(b_k) \in \ell^2$ *kesin azalan bir dizi,* $\{(k+1)\,b_k\}$ *kesin artarak* $0 \neq L < \infty$ *sayısına yakınsayan bir dizi ve her bir i için* $\alpha_i \neq 0$, β_i *ler farklı ve* $|\beta_i| = 1$ *olmak üzere* $g(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\beta_i z}$ *ise, bu durumda* R_b^g *için aşağıdakiler geçerlidir.*

(i) $E = \{g(0)\,b_k\}_{k=0}^{\infty} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(\alpha_i L)}$ *olmak üzere* $\sigma(R_b^g) = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(\alpha_i L)} \cup E$ *dir.*

(ii) $\sigma_e(R_b^g) = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D(\alpha_i L)$ *dir.*

(iii) $G = \sum_{i=1}^{n} \chi_{D(\alpha_i L)}$ *olmak üzere* $\lambda \notin \sigma_e(R_b^g)$ *için* $\operatorname{ind}(R_b^g - \lambda) = -G(\lambda)$

dır.

Burada $D(a) = \{z : |z-a| < |a|\}$ *kümesini,* $\overline{D(a)}$ *onun kapanışını* $\partial D(a)$ *da onun sınırını göstermektedir.*

İspat. $g(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\beta_i z}$ olduğundan

$$R_b^g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_b^{\beta_i} \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.4), (3.5), (3.6) ve Lemma 3.2 den

$$\begin{aligned} \{0\} \cup \sigma(\pi(R_b^g)) &= \{0\} \cup \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \pi\left(\alpha_i R_b^{\beta_i}\right)\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \sigma\left(\pi\left(\alpha_i R_b^{\beta_i}\right)\right). \end{aligned}$$

Bir T operatörünün esaslı spektrumu Calkin cebrindeki $\pi(T)$ yan kümesinin spektrumu olduğundan, yani; $\sigma_e(T) = \sigma(\pi(T))$ olduğundan ve Teorem 1.30 dan

$$\{0\} \cup \sigma_e(R_b^g) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_e\left(\alpha_i R_b^{\beta_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D(\alpha_i L) \tag{3.11}$$

elde ederiz.

Bununla birlikte (3.11) den 0 ın sağ tarafın bir limit noktası olduğunu biliyoruz. Böylece $0 \in \sigma_e(R_b^g)$ dır. Dolayısıyla

$$\sigma_e(R_b^g) = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D(\alpha_i L) \tag{3.12}$$

dir.

Benzer şekilde $R_b^{\beta_i} R_b^{\beta_j} \in B_2(H^2) \subset \mathcal{K}(H^2)$ ve $\mathcal{K}(H^2)$ bir vektör uzayı olduğundan $\alpha_i R_b^{\beta_i} \alpha_j R_b^{\beta_j} \in \mathcal{K}(H^2)$ dir o halde Lemma 3.3 den $\lambda \notin \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_e\left(\alpha_i R_b^{\beta_i}\right)$ için $\operatorname{ind}(R_b^g - \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ind}\left(\alpha_i R_b^{\beta_i} - \lambda\right)$ sonucuna varırız. [15] Lemma 2.2 den $\lambda \in D(\alpha_i L)$ için ind $\left(\alpha_i R_b^{\beta_i} - \lambda\right) = -1$ ve $\lambda \notin \overline{D(\alpha_i L)}$ için ind $\left(\alpha_i R_b^{\beta_i} - \lambda\right) = 0$ dir. Böylece ind $\left(\alpha_i R_b^{\beta_i} - \lambda\right) = -\chi_{D(\alpha_i L)}$ dir. Lemma 3.3 den indeksin R_b^g için toplamsal olduğunu biliyoruz. Buradan, $\lambda \notin \sigma_e(R_b^g) = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D(\alpha_i L)$ için

$$\operatorname{ind}(R_b^g - \lambda) = -\sum_{i=1}^{n} \chi_{D(\alpha_i L)} = -G(\lambda) \tag{3.13}$$

elde ederiz. Dolayısıyla teoremin 3. şıkkı elde edilir.

(3.8) den $\operatorname{ind}(R_b^g - \lambda) = 0$ olması için tek yol her $i = \overline{1,n}$ için $\lambda \notin \overline{D(\alpha_i L)}$ olmasıdır.

Gerçekten de

$$0 = ind\,(R_b^g - \lambda) = \sum_{i=1}^{n} ind\left(R_b^{\beta_i} - \lambda\right)$$

ise $i = \overline{1,n}$ için $ind\left(R_b^{\beta_i} - \lambda\right) = 0$ dır. Böylece[15] Lemma 2.2 den her $i = \overline{1,n}$ için $\lambda \notin \overline{D(\alpha_i L)}$ dir.

Şimdi $\operatorname{ind}(R_b^g - \lambda) = 0$ olacak şekilde $\lambda \in \sigma(R_b^g)$ noktalarını inceleyelim. Bu tip noktalar R_b^g nin özdeğerleridir, yani; $\lambda \in \sigma_p(R_b^g)$ dir.

$$E := \{\lambda \in \sigma(R_b^g) : \operatorname{ind}(R_b^g - \lambda) = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. $E \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(\alpha_i L)} = \emptyset$ dır.
R_b^g alt üçgensel olduğundan Lemma 2.1 den R_b^g nin sadece mümkün özdeğerlerinin $\{g(0)\,b_k\}_{k=1}^{\infty}$ köşegen elemanları olduğunu biliyoruz. $\left\{\overline{g(0)} b_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \sigma_p\left((R_b^g)^*\right)$ olduğunu göstermek kolaydır. Çünkü, onlar bir üst üçgensel operatörün köşegen elemanlarıdır. Dolayısıyla

$$E \subseteq \{g(0)\,b_k\}_{k=1}^{\infty}$$

dır. Böylece

$$\sigma(R_b^g) = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(La_i)} \cup E$$

dir. ■

Uyarı 3.2 *Teorem 3.3 de* $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ *alınırsa Teorem 1.27 elde edilir.*

Uyarı 3.3 *Teorem 3.3 de* $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *alınırsa Teorem 1.28 ve 1.30 elde edilir.*

Uyarı 3.4 *Teorem 3.3 de* $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ *ve* $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *alınırsa Teorem 1.20 ve 1.22 elde edilir.*

KAYNAKLAR

[1] Aleman, A. and Siskakis, A.G., (1995) *An integral Operator on H^p*, Complex Variables, 28 , 149-158.

[2] Aleman, A. and Siskakis, A.G., (1997) *Integration Operators onBergman spaces*, Indiana Univ. Math. J., 46, 337-356.

[3] Aleman, A. and Cima, J. A., (2001) *An integral Operator on H^p and Hardy Inequalities*, Journal D'Analyse Mathematique, 85, 157-176.

[4] Appell, J, Pascale, E. and Vignoli, A., (2004) *Nonlinear Spectral Theory*, Walter de Gruyter · Berlin · New York.

[5] Brown, A., Halmos, P. R. and Shields, A. L., (1965), *Cesàro Operators*, Acta Sci. Math., 26, 125-134.

[6] Brown, A.L. and Page, E., (1970) *Elements of Functional Analysis*, Von Nonstrand Reinhold Comp.

[7] Cima, J.A. and Petersen, K.E., (1976) *Some Analytic Functions Whose Boundary Values Have Bounded Mean Oscillation*, Math. Z., 147, 237-247.

[8] Conway, J.B., (1990) *A Course in Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York.

[9] Conway, J.B., (2000) *A Course in Operator Theory,* AMS.

[10] Copson, E. T., (1927) *Note on series of positive terms*, J. London Math. Soc., 2, 9-12.

[11] Dunford, N. and Schwartz, J.T., (1958) *Linear Operators*, Interscience Publishers, Inc. New York.

[12] Garnett, J.B., (1981) *Bounded Analytic Functions*, Academic Press.

[13] Goldberg, S., (1966) *Unbounded Linear Operators*, Mc Graw-Hill Book Comp.

[14] Gonzalez, M., (1985) *The fine spectrum of the Cesàro operator in ℓ^p* $(1 < p < \infty)$, Arch. Math., 44, 355-358.

[15] Gulina, O.V., (2010) *Stability properties of Saphar essential spectrum* ,Dissertation, Belarusian State University at Minsk.

[16] Hardy, G. H., (1920) *Note on a theorem of Hilbert*, Math. Z., 6, 843-847.

[17] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G., (1934), *Inequalities*, Cambridge.

[18] Herrero, D. A., Larson, D. R. and Wogen, W. R., (1991) *Semitriangular Operators*, Houston J. Math:, 17, 477-499.

[19] Hutson, V. and Pym, J.S., (1980) *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Acedemic Press, London, .

[20] Kreyszing, E., (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons New York .

[21] Kriete, T.L. and Trutt, D., (1971) *The Cesàro operator in ℓ^2 is subnormal*, American J. Math., 93, 215-225.

[22] Landau, E., (1926) *A note on a theorem concerning series of positive terms*, J. London Math. Soc., 1, 38-39.

[23] Leibowitz, G., (1987) *Rhaly Matrices*, J.Math. Anal. Appl. 128, 2729-286.

[24]Musayev, B. ve Alp, M., (2000) *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları.

[25] Pommerenke, Ch., (1977) *Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschr¨ankter mittlerer Oszillation,* Comment. Math. Helv., 52, 591-602.

[26] Rudin, W., (1973) *Functional Analysis*, Mc Graw-hill Book Comp.

[27] Siskakis, A.G., (1987) *Composition Semigroups and the Cesàro Operator on H^p*, J. London Math. Soc., 36, 153-164.

[28] Soykan, Y., (2008) *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Yayınları.

[29] Wogen, W. R., (1978) *On Some Operators with Cyclic Vectors*, Indiana Univ. Math. J., 27, 163-171.

[30] Yildirim, M., (2001) *On the Spectrum of the Rhaly Operators on ℓ^p*, Indian J. Pure Appl. Math., 32(2), 191-198.

[31] Young, S. W., (2002) *Algebraic and Spectral Properties of Generalized Cesàro Operators*, Dissertation, University of North Carolina at Chapel Hill.

[32] Young, S. W., (2004) *Spectral Properties of Generalized Cesàro Operators*, Integr. Equ. Oper. Theory 50, 129-146.

[33] Young, S. W., (2004) *Generalized Cesàro Operators and the Bergman Spaces*, J. Operator Theory, 52, 341-351.

[34] Zhu, K., (1993) *Introduction to Operator Algebras*, CRC Press, Inc.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Nuh DURNA

Doğum Yeri: Sivas

Doğum Tarihi: 21.02.1980

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Sivas Cumhuriyet Lisesi

Lisans: Cumhuriyet Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: Cumhuriyet Üniversitesi, FBE

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yayınları: