PERİYODİK POTANSİYELLİ İMPULSİV STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ İÇİN TERS PROBLEMLER

ELİF ERYILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK POTANSİYELLİ İMPULSİV STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ İÇİN TERS PROBLEMLER

ELİF ERYILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
PROF.DR. RAUF AMİROV

SİVAS
2011

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmış ve jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Üye :Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye :Yrd. Doç. Dr. Nilifer TOPSAKAL

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2011

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Mustafa DEĞİRMENCİ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

ÖZET

PERİYODİK POTANSİYELLİ İMPULSİV STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ İÇİN TERS PROBLEMLER

Elif ERYILMAZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

2011,72 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, incelenen diferansiyel denklemin başlangıç koşulları ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümünün varlığı ayrıca $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun ve $\varphi(x) = \varphi(x, k_n)$ özfonksiyonlarının sıfırlarının davranışları elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, tanımlanan L_1 ve L_2 problemlerinin sırasıyla $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ spektrumları yardımıyla α_n normalleştirici sayıları ifade edilmiş ve 1929 yılında W. A. Ambartsumyan tarafından ispatlanan teoremin süreksizlik koşulları altında genelleştirilmesi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters Problem, Spektrum, Impulsiv, Özdeğer, Özfonksiyon, Normalleştirici Sayılar.

ABSTRACT

INVERSE PROBLEMS FOR IMPULSIVE STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH PERIODIC POTENTIAL

Elif ERYILMAZ

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV

2011, 72 pages

This thesis consisits of three parts.

In the first part, important concepts and theorems, which are used frequently in the spectral theory of differential operators, have been given.

In the second part, existence of solution which satisfies initial conditions and discontinuity condition of consider differential equation has been investigated. Moreover behaviours of eigenfunction $\varphi(x) = \varphi(x, k_n)$ and behaviours of zeros of characteristic function $\Delta(\lambda)$ have been obtained.

In the last part, normalited numbers α_n have been expressed by helping spectrums $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ of defined problems L_1 and L_2. Generalization of proved theorem W. A. Ambartsumyan in 1929 has been given under the discontinuity conditions.

Keywords: Inverse Problems, Spectrum, Impulsive, Eigenvalue, Eigenfunction, Normalited Numbers.

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyip, fikir ve tecrübeleri ile bana çok büyük destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Rauf AMİROV' a ve Fen Biimleri Enstitüsü personeline teşekkür ederim.

Elif ERYILMAZ

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Spektral analizin bir dalı olan inverse (ters) problemler yani, spektral karakteristiklerine göre operatörlerin kurulması problemi, fiziğin bir çok alanında kullanılmaktadır. Örneğin mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesinde, Kuantum mekaniğinde, verilen e-nerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre parçacıklar arasında etkileşimin öğrenilmesinde, jeofizikte yer altı madenlerinin aranmasında karşımıza çıkmaktadır.

Bu alandaki temel sonuçlar G. Borg, N. Levinson, A.N. Tychonoff, V. A. Marchenko, M. G. Gasimov, F.S. Rofe-Beketov, L.P. Nijnik tarafından verilmiştir.

1967 yılında G. Gardner, J. Green, M. Kruskal ve R. Miura ilk kez inverse problemlerin yardımıyla fiziğin bir çok alanında ortaya çıkan nonlineer evolyisyon denklemlerin çözümlerini vermişlerdir. (Korteweg-de Vries denklemi bunlara ait bir örnektir) Bu çalışmadan sonra inverse problemlere olan ilgi daha da artmış, bunun sonucu olarak da inverse problemler konusu aktüel bir konu olarak güncelliğini korumaya devam etmiştir.

Tezde elde edilen önemli sonuçları vermeden önce II. mertebeden diferansiyel operatörler için spektral teorinin tarihsel gelişimi verilecek ve daha sonra tezde elde edilen sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 0.1. $l\left(y\right)=-y^{''}+q(x)y$ diferansiyel ifadesi verilsin. Eğer a ve b sonlu olmak üzere $q(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse $l\left(y\right)$ ifadesine regüler diferansiyel ifade denir. Eğer a ve b sayılarından herhangi biri ya da her ikisi de sonsuz ise veya $q(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenemezse veya da her iki durum birlikte söz konusu ise $l\left(y\right)$ ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

Tanım 0.2:

$$l\left(y\right):=-y^{''}+q(x)y=\lambda y\ ,\ \ x\in(0,d)\cup(d,\pi),\quad \lambda=k^{2} \tag{0.1}$$

$$U\left(y\right)=y^{'}(0)-hy(0)=0,\quad V\left(y\right)=y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \tag{0.2}$$

(0.1) diferansiyel denklemi ve (0.2) sınır koşulları tarafından üretilen lineer ope-ratör L olmak üzere

$$Ly=\lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y\neq 0$ çözümü varsa λ'ya L operatörünün özdeğeri, y çözümüne de λ'ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 0.3: $(L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne L operatörünün Resolvent Operatörü denir.

Tanım 0.4:$(L-\lambda I)^{-1}$ in mevcut ve sınırlı olduğu $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Tüm regüler noktalarının kümesine resolvent küme denir ve $\rho\left(L\right)$ ile gösterilir.

Tanım 0.5:

$$\sigma(L)=\mathbb{C}\backslash\rho(L)$$

kümesine $L-\lambda I$ operatörünün spektrum kümesi denir.

I) $(L-\lambda I)^{-1}$ in mevcut olmadığı λ noktalarının kümesine L operatörünün noktasal spektrumu veya özdeğerler kümesi denir.

II) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut olup, yoğun kümede tanımlı ve sınırlı olmayacak şe-kilde λ'ların kümesine sürekli spektrum denir.

III) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut fakat, yoğun olmayan kümede tanımlı λ'ların kümesine rezidü spektrum denir.

Tanım 0.6: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $\{y\left(x,\lambda_n\right)\}$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

$$\alpha_n=\int_a^b y^2\left(x,\lambda_n\right)dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 0.7: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün spektral karakteristikleri denir.

Tanım 0.8: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine düz problem**,** spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde L diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğunun bulunması problemine ise ters problem denir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 0.9: $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \quad (0 < x < \pi), \tag{0.3}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G.Borg' a aittir[2].

Teorem 0.10: $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (0.3) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.6}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (0.3) denklemi ve

$$y^{'}(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (h \neq h_1) \tag{0.7}$$

(0.6) sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. $(h, h_1$ ve H sonlu gerçel sayılardır.)

G. Borg' un bu çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatörü bu dizilerin yardımıyla belirtmektedir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilir. G. Borg, aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson [3], [4] ispatlamıştır. Ayrıca, N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko [12] tarafından kaydedilmiş-tir.

1950 yılında V.A. Marchenko[12] ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (0.3) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h, \tag{0.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu o-peratörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda verilen operatörün

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{0.9}$$

normalleştirici sayılarından faydalanarak oluşturulan

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda} \frac{1}{\alpha_n} \tag{0.10}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko, yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. V. A. Marchenko' nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein [10], [11] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tikhonov [7] tarafından V. A. Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A.N. Tikhonov çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.11: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)U = 0, \qquad x > 0, \qquad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B. M. Levitan [8], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ $(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}}, \\
\alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\|\frac{m+1}{2}\|}}
\end{aligned}$$

burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \left(\dfrac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov' un [9] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, veri-len problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.11}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.11) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümü-nü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.11) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [9] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralı, yani
$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2) λ_n ve μ_n'ler

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\\ \sqrt{\mu_n} &= n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a_0'$

Çevirme operatörlerine dayanan regüler Sturm- Liouville operatörünün spektral verisinden, q potansiyelini yeniden elde etmenin algoritması Marchenko

(1950) ve Gelfand (1951) tarafından geliştirilen Gelfand- Levitan- Marchenko denklemi olarak adlandırılır. İki spektrum ile q potansiyelinin kurulumu için bir alternatif metot Krein (1951) tarafından geliştirildi. Daha sonra H Hilbert uzayından potansiyellere sahip Sturm- Liouville operatörler sınıfı için Trubowitz ve Pöschel (1987) tarafından farklı bir yaklaşım önerildi. Yazarlar spektral veriyi ve H deki potansiyeller arasındaki dönüşümü ayrıntılı olarak çalışmışlar ve ters spektral problemin çözülebilirliğini ispatlamışlardır. Özellikle spektral veriyi tam olarak karakterize etmişlerdir.

Aralığın iç noktasında singülariteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, Amirov ve Yurko (2001) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $x = 0$ noktasında singülariteye sahip self adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm- Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durum incelenmiştir ve verilen operatörün spektral özellikleri ile bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde R.Kh Amirov (2002) çalışmasında self- adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm- Lioville operatörünün sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durumu incelemiştir. Burada verilen diferansiyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları, operatörün spektral özellikleri, spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca özdeğerlerden oluştuğu durumda, özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon ve koşulmuş fonksiyonlara göre operatörün ayrışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

R.Kh. Amirov un (2006) çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm- Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için çevirme operatörü, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerinin bazı özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri öğrenilmiştir.

I.BÖLÜM

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1.1: $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L_2[a,b]$ uzayı,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$).

Tanım 1.1.2: ℓ_2 uzayı,

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) |\, x_i \in K, \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım (Eşlenik Operatör) 1.1.3: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayları ve $L : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \to H_1$ operatörü $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ olmak üzere $< Lx, y >=< x, L^*y >$ şartını sağlıyorsa L^* o-

operatörüne L operatörünün eşlenik operatörü denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne öz eşlenik operatör denir.

Tanım(Çevirme Operatörü)1.1.4: E lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \to E$, $B : E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için çevirme operatörü denir.

Tanım 1.1.5: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının $\exists\delta$ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında ana-litiktir denir.

Tanım 1.1.6: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir.

Teorem(Rouché Teoremi) 1.1.7: f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar olsunlar. Eğer γ, f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen, B içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de γ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ olsun. Bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$, $z \in \gamma$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır.

Teorem(Cauchy İntegral Teoremi) 1.1.8: $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon, γ ise G de bulunan keyfi düzlendirilebilir kapalı eğri olacak biçimde $f(z)'$nin γ eğrisi üzerinden integrali sıfıra eşittir:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Teorem(Cauchy İntegral Formülü) 1.1.9: B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$$

dir.

Tanım 1.1.10: Analitik $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem(Rezidü Teoremi) 1.1.11: D bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, \ldots, z_n$ noktaları hariç) ve D nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksi-yonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re}_{z=z_k} s f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Re}_{z=z_0} s f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right]$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Re}_{z=z_0} s f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right]$$

dir.

Teorem(Gronwoll Teoremi) 1.1.12: Diyelim ki $w(x) \geq 0$, $h(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar ve

$$u(x) \leq h(x) + \int_a^x w(t)\, u(t)\, dt, x \in [a,b]$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. O halde $\forall x \in [a,b]$ için

$$u(x) \leq h(x) + \int_a^x w(s)\, h(s)\, e^{\int_s^x w(t)dt} ds$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Ayrıca eğer $h(x) = 0$ ise $u(x) \equiv 0$ olur.

II.BÖLÜM
REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİNİN ÖZELLİKLERİ

2.1 Çözümün Varlığı Ve Tekliği

$$l\,(y) := -y^{''} + q(x)y = \lambda y\ ,\quad x \in (0,d) \cup (d,\pi), \quad \lambda = k^2 \tag{2.1.1}$$

$$U\,(y) = y^{'}(0) - hy(0) = 0, \quad V\,(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$y(d+0) = \alpha y(d-0), \qquad y'(d+0) = \alpha^{-1}y'(d-0) \tag{2.1.3}$$

problemini $L := L\,(q(x), h.H, \alpha, d)$ ile gösterelim. Burada λ spektral parametre, α reel sayı ve $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $q(x)$ reel değerli sınırlı bir fonksiyon $d \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir.

İlk önce (2.1.1) diferansiyel denkleminin (2.1.2) başlangıç koşullarını ve (2.1.3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümünü bulalım.

(2.1.1) denkleminin

$$\varphi(0,k) = 1, \varphi^{'}(0,k) = h \tag{2.1.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü $\varphi(x,k)$ ile gösterelim.

$q(x) \equiv 0$ için (2.1.1) $-y^{''} = k^2 y$, 2. mertebeden, lineer, sabit katsayılı, homojen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin genel çözümü

$\varphi_0(x,k) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx,\ x < d$

şeklinde elde edilir. $c_1$ve c_2 katsayılarını bulmak için (2.1.4) başlangıç koşulları uygulanırsa;.

$c_1 = 1, \quad c_2 = \dfrac{h}{k}$

olur. Buradan;

$\varphi_0(x,k) = \cos kx + \dfrac{h}{k} \sin kx, \quad x < d$

elde edilir.

$x > d$ iken çözümü bulmak için bu denklemin iki tane lineer bağımsız çözümünden faydalanacağız. Bu nedenle aynı problemin $\psi(0,k) = 1$ ve $\psi'(0,k) = h_1, \quad h \neq h_1$ başlangıç koşullarını sağlayan $\psi(x,k)$ çözümü yazılırsa, benzer şekilde

$$\psi(x,k) = \cos kx + \frac{h_1}{k}\sin kx$$

elde edilir. $x < d$ iken $\varphi_0(x,k)$ ve $\psi(x,k)$ çözümleri lineer bağımsızdırlar. Gerçekten de, Wronski determinantlarına bakılırsa ;

$$\begin{vmatrix} \cos kx + \dfrac{h}{k}\sin kx & \cos kx + \dfrac{h_1}{k}\sin kx \\ -k\sin kx + h\cos kx & -k\sin kx + h_1\cos kx \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -k\cos kx \sin kx + h_1\cos^2 kx - h\sin^2 kx + \frac{hh_1}{k}\cos kx\sin kx \\ &\quad +k\cos kx\sin kx + h_1\sin^2 kx - h_1\cos^2 kx - \frac{hh_1}{k}\cos kx\sin kx \\ &= h_1(\cos^2 kx + \sin^2 kx) - h(\cos^2 kx + \sin^2 kx) \\ &= h_1 - h \neq 0 \ (h \neq h_1 \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

Bu durumda, (2.1.1) denkleminin (2.1.3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözü-mü $x > d$ için;

$$\varphi_0(x,k) = A(k)\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + B(k)\left(\cos kx + \frac{h_1}{k}\sin kx\right) \tag{2.1.5}$$

şeklinde aranabilir. $A(k)$ ve $B(k)$ katsayılarını bulmak için (2.1.3) süreksizlik koşullarından faydalanalım:

$$A(k)\left(\cos kd + \frac{h}{k}\sin kd\right) + B(k)\left(\cos kd + \frac{h_1}{k}\sin kd\right) = \alpha\left(\cos kd + \frac{h}{k}\sin kd\right)$$

$$A(k)(-k\sin kd + h\cos kd) + B(k)(-k\sin kd + h_1\cos kd) = \alpha^{-1}(-k\sin kd + h\cos kd)$$

$$(A(k) + B(k))\cos kd + \frac{A(k)h + B(k)h_1}{k}\sin kd = \alpha\cos kd + \frac{\alpha h}{k}\sin kd \tag{2.1.6}$$

$$-(A(k)+B(k))\sin kd+\frac{A(k)h+B(k)h_1}{k}\cos kd = -\frac{1}{\alpha}\sin kd+\frac{h}{\alpha k}\cos kd \tag{2.1.7}$$

(2.1.6) ve (2.1.7) cebirsel denklem sisteminden;

$$A(k)=\alpha^+-\alpha^-\frac{h+h_1}{h-h_1}\cos 2kd+\frac{\alpha^-}{h-h_1}(k-\frac{hh_1}{k})\sin 2kd \tag{2.1.8}$$

$$B(k) = \frac{2\alpha^-h}{h-h_1}\cos 2kd+\frac{\alpha^-}{h-h_1}(\frac{h^2}{k}-k)\sin 2kd \tag{2.1.9}$$

elde edilir. Burada $\alpha^{\pm}=\frac{1}{2}(\alpha\pm\frac{1}{\alpha})$' dır. $A(k)$ ve $B(k)$ katsayılarının ifadeleri (2.1.5) eşitliğinde yerlerine yazılırsa $x>d$ için;

$$\varphi_0(x,k) = \left[\alpha^+-\alpha^-\frac{h+h_1}{h-h_1}\cos 2kd+\frac{\alpha^-}{h-h_1}(k-\frac{hh_1}{k})\sin 2kd\right]\left(\cos kx+\frac{h}{k}\sin kx\right)$$

$$+\left[\frac{2\alpha^-h}{h-h_1}\cos 2kd+\frac{\alpha^-}{h-h_1}(\frac{h^2}{k}-k)\sin 2kd\right](\cos kx+\frac{h_1}{k}\sin kx)$$

veya

$$\varphi_0(x,k) = \alpha^+\left(\cos kx+\frac{h}{k}\sin kx\right)+\alpha^-\left[\frac{2h}{h-h_1}-\frac{h+h_1}{h-h_1}\right]\cos kx\cos 2kd$$

$$+\left[\frac{k-\frac{hh_1}{k}}{h-h_1}+\frac{\frac{h^2}{k}-k}{h-h_1}\right]\cos kx\sin 2kd+\alpha^-\left[\frac{k-\frac{hh_1}{k}}{h-h_1}\frac{h}{k}+\frac{\frac{h^2}{k}-k}{h-h_1}\frac{h_1}{k}\right]\sin kx\sin 2kd$$

$$+\alpha^-\left[\frac{2\alpha^-h}{h-h_1}\frac{h_1}{k}+\frac{h+h_1}{h-h_1}\frac{h}{k}\right]\cos 2kd\sin kx$$

$$=\alpha^+\left(\cos kx+\frac{h}{k}\sin kx\right)+\alpha^-\left(\cos k(2d-x)+\frac{h}{k}\sin k(2d-x)\right)$$

olur. Buradan $\varphi(x,k)$ çözümü

$$\varphi_0(x,k)=\begin{cases}\cos kx+\frac{h}{k}\sin kx, & x<d\\ \alpha^+\cos kx+\alpha^-\cos k(2d-x)+\frac{h}{k}\left[\alpha^+\sin kx+\alpha^-\sin k(2d-x)\right], & x>d\end{cases}$$

bulunur.

Şimdi $q(x) \neq 0$ olduğu durumda (2.1.1) diferansiyel denklemine karşılık gelen integral denklemini yazalım. $x < d$ için çözüm $\varphi_0(x,k) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ bulunmuştu. Homojen olmayan kısmının çözümünü bulmak için sabitlerin değişimi yöntemini kullanalım.

$$\varphi(x,k) = \quad c_1(x)\cos kx + c_2(x)\sin kx \tag{2.1.10}$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\varphi'(x,k) &= \quad -kc_1(x)\sin kx + kc_2(x)\cos kx + c_1'(x)\cos kx + c_2'(x)\sin kx \\
\varphi''(x,k) &= \quad -k^2c_1(x)\cos kx - k^2c_2(x)\sin kx - kc_1'(x)\sin kx + kc_2'(x)\cos kx
\end{aligned}$$

eşitlikleri (2.1.1) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&k^2c_1(x)\cos kx + k^2c_2(x)\sin kx - kc_1'(x)\sin kx + kc_2'(x)\cos kx + q(x)y \\
&= k^2c_1(x)\cos kx + k^2c_2(x)\sin kx
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$-c_1'(x)\sin kx + c_2'(x)\cos kx \quad = \quad \frac{1}{k}q(x)\varphi(x,k) \tag{2.1.11}$$

$$c_1'(x)\cos kx + c_2'(x)\sin kx \quad = \quad 0 \tag{2.1.12}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.1.11) eşitliği $\cos kx$, (2.1.12) eşitliği $\sin kx$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$c_2'(x) = \quad \frac{q(x)\varphi(x,k)}{k}\cos kx \quad \text{ise} \quad c_2(x) = \quad \frac{1}{k}\int_0^x \cos kt q(t)\varphi(t,k)dt + \widetilde{c}_2$$

(2.1.11) eşitliği $-\sin kx$, (2.1.12) eşitliği $\cos kx$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$c_1'(x) = \quad -\frac{q(x)\varphi(x,k)}{k}\sin kx \quad \text{ise} \quad c_1(x) = \quad -\frac{1}{k}\int_0^x \sin kt q(t)\varphi(t,k)dt + \widetilde{c}_1$$

elde edilir. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonlarının bulunan ifadeleri (2.1.10) eşitliğinde yerlerine yazılırsa $x < d$ için;

$$\varphi(x,k) \quad = \quad c_1(x)\cos kx + c_2(x)\sin kx$$

$$= -\frac{\cos kx}{k}\int_0^x \sin ktq(t)\varphi(t,k)dt + \frac{\sin kx}{k}\int_0^x cosktq(t)\varphi(t,k)dt + \widetilde{c}_1\cos kx + \widetilde{c}_2\sin kx$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^x \left(\sin kx\cos kt - \sin kt\cos kx\right)q(t)\varphi(t,k)dt + \widetilde{c}_1\cos kx + \widetilde{c}_2\sin kx$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt + \widetilde{c}_1\cos kx + \widetilde{c}_2\sin kx$$

Buradan $x < d$ iken $\varphi(x,k)$ çözümü için

$$\varphi(x,k) = \widetilde{c}_1\cos kx + \widetilde{c}_2\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt$$

elde edilir. $\widetilde{c}_1$ ve $\widetilde{c}_2$ katsayılarını bulmak için (2.1.4) başlangıç koşulları uygulanırsa

$$\begin{aligned} \varphi(0,k) &= 1 \Rightarrow \widetilde{c}_1 = 1 \\ \varphi'(0,k) &= h \Rightarrow \widetilde{c}_2 = \frac{h}{k} \end{aligned}$$

bulunur. $\widetilde{c}_1$ ve $\widetilde{c}_2$ katsayılarını yerlerine yazarsak, $x < d$ iken $\varphi(x,k)$ çözümü için

$$\varphi(x,k) = \cos kx + \frac{h}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt$$

elde edilir.

Şimdi $x > d$ iken $\varphi(x,k)$ çözümünün sağladığı integral denklemi bulalım. Bunun için $\varphi(x,k)$ denkleminin iki tane lineer bağımsız çözümünden faydalanacağız. $x > d$ iken $\varphi(x,k)$ çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi(x,k) = {} & A_1(k)\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + B_1(k)\left(\cos kx + \frac{h_1}{k}\sin kx\right) \\ & + \frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

şeklinde arayalım. Burada $A_1(k)$ ve $B_1(k)$ bilinmeyen katsayılarıdır. $A_1(k)$ ve $B_1(k)$ katsayılarını belirlemek için;

$$\begin{aligned} \varphi(d+0,k) &= \alpha\varphi(d-0,k) \\ \varphi'(d+0,k) &= \alpha^{-1}\varphi'(d-0,k) \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

süreksizlik koşullarını uygulayalım. Önce (2.1.13) ifadesini düzenlersek $x < d$ için;

$$\begin{aligned}\varphi(x,k) = \quad & (A_1(k) + B_1(k))\cos kx + (A_1(k)\,h + B_1(k)\,h_1)\frac{\sin kx}{k} \\ & + \frac{1}{k}\int\limits_d^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt,\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

elde edilir. (2.1.14) süreksizlik koşullarından

$$\begin{aligned}&(A_1(k) + B_1(k))\cos kd + (A_1(k)\,h + B_1(k)\,h_1)\frac{\sin kd}{k} = \alpha\cos kd \\ &+ \frac{\alpha h}{k}\sin kd + \frac{\alpha}{k}\int\limits_0^d \sin k(d-t)q(t)\varphi(t,\xi)dt\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

$$\begin{aligned}&-(A_1(k) + B_1(k))\sin kd + (A_1(k)\,h + B_1(k)\,h_1)\frac{\cos kd}{k} = -\frac{1}{\alpha}\sin kd \\ &+ \frac{\alpha h}{k}\cos kd + \frac{1}{\alpha k}\int\limits_0^d \cos k(d-t)q(t)\varphi(t,\xi)dt\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

elde edilir. (2.1.16) eşitliği $\dfrac{\cos kd}{k}$, (2.1.17) eşitliği $\dfrac{\sin kd}{k}$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{A_1(k) + B_1(k)}{k} \quad = \quad & \frac{\alpha}{k}\cos^2 kd + \frac{1}{\alpha k}\sin^2 kd + \frac{\alpha h}{2k^2}\sin 2kd - \frac{h}{2\alpha k^2}\sin 2kd \\ + \frac{\alpha}{k^2}\int\limits_0^d \sin k(d-t)\cos kd\, q(t)\varphi(t,\xi)dt & - \frac{1}{\alpha k^2}\int\limits_0^d \cos k(d-t)\sin kd\, q(t)\varphi(t,\xi)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A_1(k) + B_1(k)}{k} \quad = \quad & \frac{\alpha}{k}\left(\frac{1+\cos 2kd}{2}\right) + \frac{1}{\alpha k}\left(\frac{1-\cos 2kd}{2}\right) + \frac{\alpha h}{2k^2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\sin 2kd \\ &+ \frac{\alpha}{2k^2}\int\limits_0^d [\sin k(2d-t) + \sin(-kt)]\, q(t)\varphi(t,\xi)dt \\ &- \frac{1}{2\alpha k^2}\int\limits_0^d [\sin k(2d-t) + \sin kt]\, q(t)\varphi(t,\xi)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_1(k) + B_1(k) &= \alpha^+ + \alpha^- \cos 2kd + \frac{h}{k}\alpha^- \sin 2kd \\
&+ \frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \sin k(2d-t)q(t)\varphi(t,\xi)dt - \frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \sin ktq(t)\varphi(t,\xi)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.1.16) eşitliği $\sin kd$, (2.1.17) eşitliği $\cos kd$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa;

$$
\begin{aligned}
\frac{A_1(k)h + B_1(k)h_1}{k} &= \frac{\alpha}{k}\sin 2kd + \frac{\alpha h}{k}\sin^2 kd + \frac{\alpha}{k}\int_0^d \sin k(d-t)\sin kdq(t)\varphi(t,\xi)dt \\
&- \frac{1}{2\alpha}\sin 2kd + \frac{h}{k\alpha}\cos^2 kd + \frac{1}{k\alpha}\int_0^d \cos k(d-t)\cos ktq(t)\varphi(t,\xi)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1(k)h + B_1(k)h_1 &= k\alpha^- \sin 2kd + \alpha h\left(\frac{1-\cos 2kd}{2}\right) + \frac{h}{\alpha}\left(\frac{1+\cos 2kd}{2}\right) \\
&+ \alpha\int_0^d \sin k(d-t)\sin kdq(t)\varphi(t,\xi)dt + \frac{1}{\alpha}\int_0^d \cos k(d-t)\cos ktq(t)\varphi(t,\xi)dt \\
&= k\alpha^- \sin 2kd + \alpha^+ h - \alpha^- h\cos 2kd + \frac{\alpha}{2}\int_0^d \left[\cos(-kt) - \cos k(2d-t)\right]q(t)\varphi(t,\xi)dt \\
&+ \frac{1}{2\alpha}\int_0^d \left[\cos k(2d-t) + \cos(-kt)\right]q(t)\varphi(t,\xi)dt \\
&= \alpha^+ h + k\alpha^- \sin 2kd - \alpha^- h\cos 2kd - \alpha^-\int_0^d \cos k(2d-t)q(t)\varphi(t,\xi)dt \\
&+ \alpha^+\int_0^d \cos ktq(t)\varphi(t,\xi)dt
\end{aligned}
$$

Bulunan $A_1(k) + B_1(k)$ ve $A_1(k)h + B_1(k)h_1$ eşitlikleri (2.1.15) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,k) &= \Bigg\{\alpha^+ + \alpha^- \cos 2kd + \frac{h}{k}\alpha^- \sin 2kd \\
&+ \frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \sin k(2d-t)q(t)\varphi(t,\xi)dt - \frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \sin ktq(t)\varphi(t,\xi)dt\Bigg\}.\cos kx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\alpha^{+}h + k\alpha^{-}\sin 2kd - \alpha^{-}h\cos 2kd - \alpha^{-}\int_{0}^{d}\cos k(2d-t)q(t)\varphi(t,\xi)dt\right.\\
&\left.+\alpha^{+}\int_{0}^{d}\cos ktq(t)\varphi(t,\xi)dt\right\}.\frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{k}\int_{d}^{x}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt\\
=\ &\alpha^{+}\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + \alpha^{-}\cos 2kd\cos kx + \frac{h}{k}\alpha^{-}\sin 2kd\cos kx\\
&+\alpha^{-}\sin 2kd\sin kx - \frac{\alpha^{-}h}{k}\cos 2kd\sin kx + \frac{\alpha^{-}}{k}\int_{0}^{d}\sin k(2d-t)\cos kxq(t)\varphi(t,\xi)dt\\
&-\frac{\alpha^{-}}{k}\int_{0}^{d}\cos k(2d-t)\sin kxq(t)\varphi(t,\xi)dt - \frac{\alpha^{+}}{k}\int_{0}^{d}\sin kt\cos kxq(t)\varphi(t,\xi)dt\\
&+\frac{\alpha^{+}}{k}\int_{0}^{d}\cos kt\sin kxq(t)\varphi(t,\xi)dt + \frac{1}{k}\int_{d}^{x}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt\\
=\ &\alpha^{+}\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + \alpha^{-}\left(\cos k(2d-x) + \frac{h}{k}\sin k(2d-x)\right)\\
&+\frac{\alpha^{+}}{k}\int_{0}^{d}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,\xi)dt + \frac{\alpha^{-}}{k}\int_{0}^{d}\sin k\left(2d-x-t\right)q(t)\varphi(t,\xi)dt\\
&+\frac{1}{k}\int_{d}^{x}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $x < d$ iken

$$
\varphi(x,k) = \cos kx + \frac{h}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int_{0}^{x}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt,
$$

$x > d$ iken

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,k) =\ &\alpha^{+}\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + \alpha^{-}\left(\cos k(2d-x) + \frac{h}{k}\sin k(2d-x)\right)\\
&+\frac{\alpha^{+}}{k}\int_{0}^{d}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt + \frac{\alpha^{-}}{k}\int_{0}^{d}\sin k\left(2d-x-t\right)q(t)\varphi(t,k)dt\\
&+\frac{1}{k}\int_{d}^{x}\sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt
\end{aligned}
\tag{2.1.18}
$$

elde edilir.

Ardışık yaklaşımlar yöntemiyle (2.1.18) integral denkleminin bir tek çözümünün varlığını gösterelim. Bunun için ardışık yaklaşımları aşağıdaki gibi verelim:

$$\varphi_0(x,k) = \alpha^+\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + \alpha^-\left(\cos k(2d-x) + \frac{h}{k}\sin k(2d-x)\right) \tag{2.1.19}$$

$$\begin{aligned}\varphi_n(x,k) = & \frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \sin k(x-t)q(t)\varphi_{n-1}(t,k)dt + \frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \sin k\left(2d-x-t\right)q(t)\varphi_{n-1}(t,k)dt \\ & +\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\varphi_{n-1}(t,k)dt \ , n=1,2,...\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

(2.1.19) 'dan

$$\left|\varphi_0(x,k)e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\right| \leq (\alpha^+ + |\alpha^-|)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)$$

dır.

$n=1$ için (2.1.20)'den

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,k) = & \frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \sin k(x-t)q(t)\varphi_0(t,k)dt + \frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \sin k\left(2d-x-t\right)q(t)\varphi_0(t,k)dt \\ & +\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\varphi_0(t,k)dt\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}\left|\varphi_1(x,k)e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\right| \leq & \left|\alpha^+\int_0^d \frac{\sin k(x-t)}{k}e^{-|\mathrm{Im}\,k|(x-t)}e^{-|\mathrm{Im}\,k|t}q(t)\varphi_0(t,k)dt\right. \\ & -\alpha^-\int_0^d \frac{\sin k\left[x-(2d-t)\right]}{k}e^{-|\mathrm{Im}\,k|[x-(2d-t)]}e^{-|\mathrm{Im}\,k|(2d-t)}q(t)\varphi_0(t,k)dt \\ & \left.+\int_d^x \frac{\sin k(x-t)}{k}e^{-|\mathrm{Im}\,k|(x-t)}e^{-|\mathrm{Im}\,k|t}q(t)\varphi_0(t,k)dt\right|\end{aligned}$$

$$\leq \alpha^+(\alpha^+ + |\alpha^-|)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_0^d (x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$$+|\alpha^-|(\alpha^+ + |\alpha^-|)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_0^d (x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$$+(\alpha^+ + |\alpha^-|)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_d^x (x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$$\leq (\alpha^+ + |\alpha^-|)^2\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_0^d (x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$$+(\alpha^+ + |\alpha^-|)^2\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_d^x (x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$$= (\alpha^+ + |\alpha^-|)^2\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_0^x (x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$n=2$ için;

$$\varphi_2(x,k) = \frac{\alpha^+}{k}\int\limits_0^d \sin k(x-t)q(t)\varphi_1(t,k)dt + \frac{\alpha^-}{k}\int\limits_0^d \sin k\,(2d-x-t)\,q(t)\varphi_1(t,k)dt$$
$$+\frac{1}{k}\int\limits_d^x \sin k(x-t)q(t)\varphi_1(t,k)dt$$

olduğundan;

$$\left|\varphi_2(x,k)e^{-|\operatorname{Im}k|x}\right| = \left|\alpha^+\int\limits_0^d \frac{\sin k(x-t)}{k}e^{-|\operatorname{Im}k|(x-t)}e^{-|\operatorname{Im}k|t}q(t)\varphi_1(t,k)dt\right.$$
$$-\alpha^-\int\limits_0^d \frac{\sin k\,[x-(2d-t)]}{k}e^{-|\operatorname{Im}k|[x-(2d-t)]}e^{-|\operatorname{Im}k|(2d-t)}q(t)\varphi_1(t,k)dt$$
$$\left.+\int\limits_d^x \frac{\sin k(x-t)}{k}e^{-|\operatorname{Im}k|(x-t)}e^{-|\operatorname{Im}k|t}q(t)\varphi_1(t,k)dt\right|$$

$$\leq \alpha^+ \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_0^d (x-t)\,|q(t)| \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) dt$$

$$-\alpha^- \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_0^d (x-t)\,|q(t)| \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) dt$$

$$+ \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_d^x (x-t)\,|q(t)| \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) dt$$

$$= \alpha^+ \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_0^d \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) d\left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)$$

$$+ |\alpha^-| \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_0^d \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) d\left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)$$

$$+ \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_d^x (x-t)\,|q(t)| \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) dt$$

$$= \alpha^+ \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_0^d \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) d\left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)$$

$$+ |\alpha^-| \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_0^d \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) d\left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)$$

$$+ \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_d^x \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right) d\left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)$$

$$= \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^3 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_0^d u\,du + \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \int\limits_d^x u\,du$$

$$= \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^3 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^d + \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \left[\frac{u^2}{2}\right]_d^x$$

$$= \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^3 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)_{t=0}^{t=d}$$

$$+ \left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)^2 \left(1+\frac{h}{|k|}\right) \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^t (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)_{t=d}^{t=x}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ (\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{d}(x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)^{2} \\
&\quad +(\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)^{2}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{d}^{x}(x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)^{2} \\
&\leq \ (\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{d}(x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)^{2} \\
&\quad +(\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{d}^{x}(x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)^{2} \\
&= \ (\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{x}(x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)^{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda tümevarım yöntemiyle kolayca gösteririz ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$
\left|\varphi_{n}(x,k)e^{-|\operatorname{Im}k|x}\right| \ \leq \ (\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)^{n+1}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{n!}\left(\int\limits_{0}^{x}(x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)^{n}
$$

eşitsizliği sağlanır.

$$
\varphi(x,k) \ = \ \varphi_{0}(x,k)+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n}(x,k)
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi(x,k)e^{-|\operatorname{Im}k|x}\right| \ &= \ \left|\varphi_{0}(x,k)e^{-|\operatorname{Im}k|x}\right|+\left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n}(x,k)e^{-|\operatorname{Im}k|x}\right| \\
&\leq \ (\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\left\{1+\exp\left\{(\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)\int\limits_{0}^{x}(x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right\}\right\} \\
&\quad +(\alpha^{+}+|\alpha^{-}|)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\varphi_0'(x,k) = &\ \alpha^+\left(-k\sin kx + h\cos\sin kx\right) + \alpha^-\left[k\sin k(2d-x) - h\cos k(2d-x)\right] \\
\varphi_n'(x,k) = &\ \alpha^+\int_0^d \cos k(x-t)q(t)\varphi_{n-1}(t,k)dt + \alpha^-\int_0^d \cos k\left(2d-x-t\right)q(t)\varphi_{n-1}(t,k)dt \\
&+\int_d^x \cos k(x-t)q(t)\varphi_{n-1}(t,k)dt\ , n=1,2,...
\end{aligned}$$

$n = 0$ için;

$$\left|\varphi_0'(x,k)e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\right| \ \leq\ (k+h)\left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)$$

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(x,k) \ =&\ \alpha^+\int_0^d \cos k(x-t)q(t)\varphi_0(t,k)dt + \alpha^-\int_0^d \cos k\left(2d-x-t\right)q(t)\varphi_0(t,k)dt \\
&+\int_d^x \cos k(x-t)q(t)\varphi_0(t,k)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\left[\varphi_1'(x,k)-\varphi_0'(x,k)\right]e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\right| \ =&\ \Bigg|\alpha^+\int_0^d \cos k(x-t)q(t)e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\varphi_0(t,k)dt \\
+\ \alpha^-\int_0^d \cos k\left(2d-x-t\right)e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}q(t)\varphi_0(t,k)dt &+ \int_d^x \cos k(x-t)e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}q(t)\varphi_0(t,k)dt\Bigg| \\
\leq\ \Bigg|\left(\alpha^+ + |\alpha^-|\right)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int_0^x |q(t)|\,dt&
\end{aligned}$$

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_2'(x,k) \ =&\ \alpha^+\int_0^d \cos k(x-t)q(t)\varphi_1(t,k)dt + \alpha^-\int_0^d \cos k\left(2d-x-t\right)q(t)\varphi_1(t,k)dt \\
&+\int_d^x \cos k(x-t)q(t)\varphi_1(t,k)dt
\end{aligned}$$

$$\left|\left[\varphi_2'(x,k)-\varphi_1'(x,k)\right]e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\right| \ =\ \Bigg|\Bigg\{\alpha^+\int_0^d \cos k(x-t)q(t)(\varphi_1-\varphi_0)dt$$

$$
\begin{aligned}
&\left. +\alpha^{-}\int\limits_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-t\right)q(t)(\varphi_1-\varphi_0)dt+\int\limits_{d}^{x}\cos k(x-t)q(t)(\varphi_1-\varphi_0)dt\right\}e^{-|\operatorname{Im}k|x}\Bigg| \\
&\leq\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{2}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_{0}^{d}|q(t)|\left(\int\limits_{0}^{t}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|d\tau\right)dt \\
&+\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{2}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_{d}^{x}|q(t)|\int\limits_{0}^{t}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|d\tau dt \\
&=\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_{0}^{d}\left(\int\limits_{0}^{t}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|\right)d\left(\int\limits_{0}^{t}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|\right) \\
&+\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{2}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\int\limits_{d}^{x}\left(\int\limits_{0}^{t}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|\right)d\left(\int\limits_{0}^{t}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|\right) \\
&\leq\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{d}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|d\tau\right)^{2} \\
&+\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{d}^{x}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|d\tau\right)^{2} \\
&=\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{3}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{x}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|d\tau\right)^{2}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\left|\left[\varphi_n'(x,k)-\varphi_{n-1}'(x,k)\right]e^{-|\operatorname{Im}k|x}\right| &\leq \left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)^{n+1}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{n!} \\
&\quad\left(\int\limits_{0}^{x}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|d\tau\right)^{n} \\
&\leq \left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)\left(1+\frac{h}{|k|}\right) \\
&\quad.\exp\left\{\left(\alpha^{+}+\left|\alpha^{-}\right|\right)\left(\int\limits_{0}^{x}\left(x-\tau\right)\left|q(\tau)\right|d\tau\right)\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\left\{\varphi_n'(x,k)\right\}$ dizisini $\varphi_0'(x,k)+\left[\varphi_1'(x,k)-\varphi_0'(x,k)\right]+\left[\varphi_2'(x,k)-\varphi_1'(x,k)\right]+ \ldots+\left[\varphi_n'(x,k)-\varphi_{n-1}'(x,k)\right]+\ldots$ şeklinde oluşturursak bu dizinin kısmi toplamlar serisi $S_n(x,k) = \varphi_0^{'}(x,k) + \left[\varphi_1^{'}(x,k) - \varphi_0^{'}(x,k)\right] + \left[\varphi_2^{'}(x,k) - \varphi_1^{'}(x,k)\right] + ... + \left[\varphi_n^{'}(x,k) - \varphi_{n-1}^{'}(x,k)\right] = \varphi_n^{'}(x,k)$ dir ve

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\varphi_n^{'}(x,k) - \varphi_{n-1}^{'}(x,k)\right] e^{-|\operatorname{Im} k|x}\right| \leq \\
&\leq (\alpha^+ + |\alpha^-|)^{n+1}\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\frac{1}{n!}\left(\int_0^x (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)^n \\
&\leq \ (\alpha^+ + |\alpha^-|)\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\exp\left\{(\alpha^+ + |\alpha^-|)\left(\int_0^x (x-\tau)\,|q(\tau)|\,d\tau\right)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n^{'}(x,k) - \varphi_{n-1}^{'}(x,k)\right| \leq \ c\left(1+\frac{h}{|k|}\right)\exp\left\{c\int_0^x (x-t)\,|q(t)|\,dt + |\operatorname{Im} k|\,x\right\}$$

bulunur.

Burada $c = \alpha^+ + |\alpha^-|$ dır. Buradan da $\left\{\varphi_n^{'}(x,k)\right\}$ dizisinin $[0,\pi]$ aralığında $\forall k \in \mathbb{C}$ için mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu alırız.

Şimdi de $y(x) = \varphi(x,k)$ çözümünün tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki (2.1.1),(2.1.2),(2.1.3) Sturm Liouville Probleminin $(0,d)\cup(d,\pi)$ aralığında $y(x) = \varphi(x,k)$, ve $y(x) = \Psi(x,k)$ olmak üzere iki tane çözümü olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi(x,k) = \ &\alpha^+\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + \alpha^-\left(\cos k(2d-x) + \frac{h}{k}\sin k(2d-x)\right) \\
&+\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt + \frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \sin k\,(2d-x-t)\,q(t)\varphi(t,k)dt \\
&+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Psi(x,k) = \ &\alpha^+\left(\cos kx + \frac{h}{k}\sin kx\right) + \alpha^-\left(\cos k(2d-x) + \frac{h}{k}\sin k(2d-x)\right) \\
&+\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \sin k(x-t)q(t)\Psi(t,k)dt + \frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \sin k\,(2d-x-t)\,q(t)\Psi(t,k)dt \\
&+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\Psi(t,k)dt
\end{aligned}$$

$|\varphi(x,k)-\Psi(x,k)|$ farkını değerlendirelim.

$$\begin{aligned}|\varphi(x,k)-\Psi(x,k)| &= \left|\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \sin k(x-t)q(t)\left[\varphi(x,k)-\Psi(x,k)\right]dt\right. \\
&+\frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \sin k\left(2d-x-t\right)q(t)\left[\varphi(x,k)-\Psi(x,k)\right]dt \\
&\left.+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\left[\varphi(x,k)-\Psi(x,k)\right]\right| \\
&\leq \frac{\alpha^+}{|k|}\int_0^d |\varphi(x,k)-\Psi(x,k)|\,|q(t)|\,dt+\frac{\alpha^-}{|k|}\int_0^d |\varphi(x,k)-\Psi(x,k)|\,|q(t)|\,dt \\
&+\frac{1}{|k|}\int_d^x |\varphi(x,k)-\Psi(x,k)|\,|q(t)|\,dt\end{aligned}$$

$U\left(x,k\right)=|\varphi(x,k)-\Psi(x,k)|$ olsun. $(0,d)\cup(d,\pi)$ aralığında $U\left(x,k\right)\geq 0$ dır. O halde

$$\begin{aligned}U\left(x,k\right) &\leq \frac{(\alpha^++\alpha^-)}{|k|}\int_0^d U\left(t,k\right)|q(t)|\,dt+\frac{1}{|k|}\int_d^x U\left(t,k\right)|q(t)|\,dt \\
&\leq \frac{(\alpha^++\alpha^-)}{|k|}\int_0^x U\left(t,k\right)|q(t)|\,dt\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$U\left(t,k\right) \leq \int_0^x U\left(t,k\right)q_1(t)dt$$

bulunur. Burada $q_1(t)=\dfrac{(\alpha^++\alpha^-)}{|k|}|q(t)|$ dir. Gronwoll Lemmasından $U\left(t,k\right)\equiv 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\varphi(x,k)=\Psi(x,k)$ bulunur. Yani $\varphi(x,k)$ çözümü tektir.

2.2. Özdeğer, Özfonksiyon ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri

Teorem: 2.2.1: $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun λ_n sıfırları L sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakışır ve eğer $\varphi(x,\lambda_n)$, $\psi(x,\lambda_n)$ L sınır değer probleminin λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonları ise;

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(x,\lambda_n)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\{\beta_n\}$ dizisi vardır.

İspat: Kabul edelim ki λ_0; $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun bir sıfırı olsun.O halde $\Delta(\lambda_0) = 0$ dır. Ayrıca

$$\varphi^{'}(\pi,\lambda_0) + H\varphi(\pi,\lambda_0) = 0 \tag{2.2.1}$$

$$\psi^{'}(0,\lambda_0) - h\psi(0,\lambda_0) = 0 \tag{2.2.2}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$\Delta(\lambda_0) = \psi(x,\lambda_0)\varphi^{'}(x,\lambda_0) - \psi^{'}(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0) = 0$$

eşitliğinde $x = \pi$ yazılırsa;

$$\Delta(\lambda_0) = \psi(\pi,\lambda_0)\varphi^{'}(\pi,\lambda_0) - \psi^{'}(\pi,\lambda_0)\varphi(\pi,\lambda_0) = 0$$

olur. (2.1.2) ve (2.2.1) eşitliklerinden L probleminin 2. sınır koşulu sağlanır. Ayrıca (2.1.2) ve (2.2.2) eşitliklerinden L probleminin 1. sınır koşulu da sağlanır. Dolayısıyla $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun bir sıfırı olan λ_0 aynı zamanda L probleminin bir özdeğeri olmuş olur.

Tersine λ_0; L probleminin $y_0(x,\lambda_0)$ özfonksiyonuna karşılık gelen bir özdeğeri olsun. Bu durumda $y_0(x,\lambda_0)$ (2.1.2) sınır koşullarını sağlar. Yani

$$U(y_0) = V(y_0) = 0 \tag{2.2.3}$$

geçerlidir. Burada $y_0(0,\lambda_0) \neq 0$ dır. Gerçekten de eğer $y_0(0,\lambda_0) = 0$ ise (2.1.2) sınır koşulundan $y_0^{'}(0,\lambda_0) = 0$ dır. Dolayısıyla (2.1.1)diferansiyel denkleminin çözümünün tekliği teoreminden $y_0(x,\lambda_0) \equiv 0$ olur. Bu durum ise

$y_0(x, \lambda_0)$ ın özfonksiyon olmasıyla çelişir. O halde $y_0(0, \lambda_0) \neq 0$ dır. Özel olarak $y_0(0, \lambda_0) = 1$ alalım. (2.1.2) sınır koşulundan $y_0'(0, \lambda_0) = h$ olur. Böylece $y_0(x, \lambda_0) = \varphi(x, \lambda_0)$ elde edilir. $\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi)$ bağıntısından ve (2.2.3) eşitliğinden

$\Delta(\lambda_0) = V(\varphi) = V(y_0) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = \lambda_0$ için $\Delta(\lambda_0) = 0$ olur. Yani λ_0 özdeğeri $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun bir sıfırıdır.

Şimdi de $\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n)$ eşitliği sağlanacak şekilde sıfırdan farklı bir $\{\beta_n\}$ dizisinin mevcut olduğunu gösterelim.

$$\Delta(\lambda_0) = \psi(x, \lambda_0)\varphi'(x, \lambda_0) - \psi'(x, \lambda_0)\varphi(x, \lambda_0) = 0$$

eşitliğinden

$$\psi(x, \lambda_0) = \frac{\psi'(x, \lambda_0)}{\varphi'(x, \lambda_0)}\varphi(x, \lambda_0)$$

veya

$$\frac{\psi(x, \lambda_0)}{\varphi(x, \lambda_0)} = \frac{\psi'(x, \lambda_0)}{\varphi'(x, \lambda_0)} \tag{2.2.4}$$

elde edilir. Burada $\dfrac{\psi'(x, \lambda_0)}{\varphi'(x, \lambda_0)}$ ifadesinin x ten bağımsız olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için (2.2.4) eşitliğinin x e göre türevini alalım.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'}{\varphi'}\right]_{(x,\lambda_0)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\psi}{\varphi}\right]_{(x,\lambda_0)} = \frac{\psi'(x, \lambda_0)\varphi(x, \lambda_0) - \psi(x, \lambda_0)\varphi'(x, \lambda_0)}{\varphi^2(x, \lambda_0)} = \frac{\Delta(\lambda_0)}{\varphi^2(x, \lambda_0)}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\varphi(x, \lambda_0)$; λ_0 'a karşılık gelen bir özfonksiyon olduğu için $\varphi^2(x, \lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta(\lambda_0) = 0$ olduğundan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'}{\varphi'}\right]_{(x,\lambda_0)} = 0$$

dır. Yani $\dfrac{\psi'(x, \lambda_0)}{\varphi'(x, \lambda_0)}$ ifadesi x den bağımsızdır. Buradan

$$\psi(x, \lambda_0) = \beta_0\varphi(x, \lambda_0)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n\varphi(x, \lambda_n)$$

elde edilir.

Lemma 2.2.2: (2.1.1)-(2.1.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: $\lambda_0 = u + iv$'nin kompleks özdeğer olduğu kabul edilsin.$y(x,\lambda_0)$ da λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olsun. $\overline{\lambda_0} = u - iv$ sayısıda problemin $\overline{y}(x,\lambda_0)$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğerdir. Lagrange eşitliğinden

$$\langle Ly(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle = \langle y(x,\lambda_0), Ly(x,\lambda_0)\rangle \tag{2.2.5}$$

dır. Buradan (2.1.1) problemi $Ly = \lambda y$ şeklinde yazılabileceği için $Ly = \lambda_0 y$ eşitliği (2.2.5) de göz önünde bulundurulursa ve

$$\langle \lambda_0 y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle = \langle y(x,\lambda_0), \lambda_0 y(x,\lambda_0)\rangle$$

olduğundan

$$\int_0^\pi \lambda_0 y(x,\lambda_0)\overline{y(x,\lambda_0)}dx = \int_0^\pi y(x,\lambda_0)\overline{\lambda_0 y(x,\lambda_0)}dx$$

$$\lambda_0 \int_0^\pi |y(x,\lambda_0)|^2\, dx = \overline{\lambda_0} \int_0^\pi |y(x,\lambda_0)|^2\, dx$$

buradan da

$$\left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right) \int_0^\pi |y(x,\lambda_0)|^2\, dx = 0$$

elde edilir. Burada $y(x,\lambda_0)$ L probleminin bir özfonksiyonu olduğundan $y(x,\lambda_0) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ dır. Böylece (2.1.1)-(2.1.3) sınır-değer probleminin özdeğerleri reeldir.

Lemma 2.2.3: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir.

İspat: Lagrange eşitliğinden

$$\langle Ly_1, y_2\rangle = \langle y_1, Ly_2\rangle \tag{2.2.6}$$

dır. Buradan (2.1.1) eşitiği $Ly = \lambda y$ şeklinde yazılabileceği için $Ly_1 = \lambda_1 y_1$ ve $Ly_2 = \lambda_2 y_2$ eşitlikleri (2.2.6) da göz önünde bulundurulursa

$$\langle \lambda_1 y_1, y_2\rangle = \langle y_1, \lambda_2 y_2\rangle$$

olur. λ_1 , $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan;

$$\lambda_1 \langle y_1, y_2 \rangle = \lambda_2 \langle y_1, y_2 \rangle$$

elde edilir ve buradan da

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle y_1, y_2 \rangle = 0$$

dır. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\langle y_1, y_2 \rangle = 0$$

elde edilir. Yani λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y_1(x, \lambda_1)$ ve $y_2(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir.

L probleminin karakteristik fonksiyonu olan $\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0$ denkleminin kökleri L probleminin özdeğerleri olduğundan L probleminin özdeğerlerinin davranışlarını öğrenmek için $\varphi(x, k)$ ve $\varphi'(x, k)$ ifadelerinin asimptotik davranışlarını bulalım.

$$\varphi_0(x,k) = \alpha^+ \left(\cos kx + \frac{h}{k} \sin kx \right) + \alpha^- \left(\cos k(2d - x) + \frac{h}{k} \sin k(2d - x) \right) \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x,k) = {} & \varphi_0(x,k) + \frac{\alpha^+}{k} \int_0^d \sin k(x-t) q(t) \varphi_0(t,k) dt \\ & + \frac{\alpha^-}{k} \int_0^d \sin k\left(2d - x - t\right) q(t) \varphi_0(t,k) dt + \frac{1}{k} \int_d^x \sin k(x-t) q(t) \varphi_0(t,k) dt \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

olsun. (2.2.8) de (2.2.7) yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \varphi(x,k) = {} & \alpha^+ \left(\cos kx + \frac{h}{k} \sin kx \right) + \alpha^- \left(\cos k(2d-x) + \frac{h}{k} \sin k(2d-x) \right) \\ & + \frac{\alpha^+}{k} \int_0^d \sin k(x-t) q(t) \left\{ \alpha^+ \left(\cos kt + \frac{h}{k} \sin kt \right) \right. \\ & \left. + \alpha^- \left(\cos k(2d-t) + \frac{h}{k} \sin k(2d-t) \right) \right\} dt \\ & + \frac{\alpha^-}{k} \int_0^d \sin k\left(2d - x - t\right) q(t) \left\{ \alpha^+ \left(\cos kt + \frac{h}{k} \sin kt \right) \right. \end{aligned}$$

$$+\alpha^-\left(\cos k(2d-t)+\frac{h}{k}\sin k(2d-t)\right)\Bigg\}dt$$

$$+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\left\{\alpha^+\left(\cos kt+\frac{h}{k}\sin kt\right)\right.$$

$$\left.+\alpha^-\left(\cos k(2d-t)+\frac{h}{k}\sin k(2d-t)\right)\right\}dt$$

olur. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\varphi(x,k)=\alpha^+\left(\cos kx+\frac{h}{k}\sin kx\right)+\alpha^-\left(\cos k(2d-x)+\frac{h}{k}\sin k(2d-x)\right)$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2}{k}\left[\sin kx\int_0^d q(t)dt+\int_0^d \sin k(x-2t)q(t)dt\right]$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{2k}\left[\int_0^d \sin k(x+2d-2t)q(t)dt+\sin k(2d-x-2t)\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{(\alpha^-)^2}{2k}\left[\int_0^d \sin k(4d-x-2t)q(t)dt-\sin kx\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{\alpha^+}{2k}\left[\sin kx\int_d^x q(t)dt+\int_d^x \sin k(x-2t)q(t)dt\right]$$

$$+\frac{\alpha^-}{2k}\left[\int_d^x \sin k(x+2d-2t)q(t)dt+\sin k(x-2d)\int_d^x q(t)dt\right]$$

$$+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,k|x}}{k^2}\right)$$

elde edilir. $\varphi'(x,k)$ ifadesinin de asimptotik davranışına bakalım.

$$\varphi_0'(x,k)=\alpha^+\left(-k\sin kx+h\cos kx\right)+\alpha^-\left[k\sin k(2d-x)-h\cos k(2d-x)\right] \tag{2.2.9}$$

$$\varphi'(x,k)=\varphi_0'(x,k)+\alpha^+\int_0^d \cos k(x-t)q(t)\varphi_0(t,k)dt$$

$$+\alpha^-\int_0^d \cos k(2d-x-t)q(t)\varphi_0(t,k)dt+\int_d^x \cos k(x-t)q(t)\varphi_0(t,k)dt \tag{2.2.10}$$

(2.2.10) eşitliğinde (2.2.7) yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x,k) &= \alpha^{+}\left(-k\sin kx + h\cos kx\right) + \alpha^{-}\left[k\sin k(2d-x) - h\cos k(2d-x)\right] \\
&+ \frac{(\alpha^{+})^{2}}{2}\cos kx\int_{0}^{d} q(t)dt + \frac{(\alpha^{+})^{2}}{2}\int_{0}^{d}\cos k(x-2t)q(t)dt \\
&+ \frac{(\alpha^{+})^{2}h}{2k}\sin kx\int_{0}^{d} q(t)dt + \frac{(\alpha^{+})^{2}h}{2k}\int_{0}^{d}\sin k(2t-x)q(t)dt \\
&+ \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{2k}\int_{0}^{d}\cos k(x+2d-2t)q(t)dt + \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{2k}\cos k(x-2d)\int_{0}^{d} q(t)dt \\
&+ \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}h}{2k}\int_{0}^{d}\sin k(2d-2t+x)q(t)dt + \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}h}{2k}\sin k(2d-x)\int_{0}^{d} q(t)dt \\
&+ \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{2}\cos k\left(2d-x\right)\int_{0}^{d} q(t)dt + \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-2t\right)q(t)dt \\
&+ \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{2k}\sin k\left(2d-x\right)\int_{0}^{d} q(t)dt + \frac{\alpha^{+}\alpha^{-}h}{2k}\int_{0}^{d}\sin k\left(x-2d+2t\right)q(t)dt \\
&+ \frac{(\alpha^{-})^{2}}{2}\int_{0}^{d}\cos k(4d-2t-x)q(t)dt + \frac{(\alpha^{-})^{2}}{2}\cos kx\int_{0}^{d} q(t)dt \\
&+ \frac{(\alpha^{-})^{2}h}{2k}\int_{0}^{d}\sin k(4d-2t-x)q(t)dt + \frac{(\alpha^{-})^{2}h}{2k}\sin kx\int_{0}^{d} q(t)dt \\
&+ \frac{\alpha^{+}}{2}\cos kx\int_{d}^{x} q(t)dt + \frac{\alpha^{+}}{2}\int_{d}^{x}\cos k(x-2t)q(t)dt \\
&+ \frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d}^{x}\cos k(2d-2t+x)q(t)dt + \frac{\alpha^{-}}{2}\cos k(x-2d)\int_{d}^{x} q(t)dt \\
&+ \frac{\alpha^{-}h}{2k}\int_{d}^{x}\sin k(x+2d-2t)q(t)dt + \frac{\alpha^{-}h}{2k}\sin k(x-2d)\int_{d}^{x} q(t)dt + O\left(\frac{1}{k^{2}}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$\varphi'(x,k)=\varphi_0'(x,k)+\varphi_1'(x,k)$$

$$+\alpha^+\int_0^d \cos k(x-t)q(t)\varphi_1(t,k)dt+\alpha^-\int_0^d \cos k(2d-x-t)q(t)\varphi_1(t,k)dt$$

$$+\int_d^x \cos k(x-t)q(t)\varphi_1(t,k)dt$$

olduğundan gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\varphi'(x,k)=\alpha^+\left(-k\sin kx+h\cos kx\right)+\alpha^-\left[k\sin k(2d-x)-h\cos k(2d-x)\right]$$

$$+(\alpha^+)^2\cos kx\int_0^d q(t)dt+(\alpha^+)^2\int_0^d \cos k(x-2t)q(t)dt$$

$$+\alpha^+\alpha^-\int_0^d \cos k(x+2d-2t)q(t)dt+\alpha^+\alpha^-\cos k(2d-x)\int_0^d q(t)dt$$

$$+\alpha^+\alpha^-\int_0^d \cos k\left(2d-x-2t\right)q(t)dt+(\alpha^-)^2\int_0^d \cos k(4d-2t-x)q(t)dt$$

$$+(\alpha^-)^2\cos kx\int_0^d q(t)dt+\alpha^+\cos kx\int_d^x q(t)dt+\alpha^+\int_d^x \cos k(x-2d)q(t)dt$$

$$+\alpha^-\int_d^x \cos k(x+2d-2t)q(t)dt+\alpha^-\cos k(x-2d)\int_d^x q(t)dt$$

$$+\frac{1}{k}C\left(x,k\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

elde edilir. Burada

$$C\left(x,k\right)=\frac{(\alpha^+)^2h}{2}\sin kx\int_0^d q(t)dt+\frac{(\alpha^+)^2}{2}\int_0^d \sin k\left(2t-x\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-h}{2}\int_0^d \sin k(2d-2t+x)q(t)dt+\frac{\alpha^+\alpha^-h}{2k}\sin k\left(2d-x\right)\int_0^d q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^3h}{2}\sin kx\int_0^d\left(\int_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt+\frac{(\alpha^+)^3h}{2}\int_0^d \sin k(2t-x)\left(\int_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^3}{2}\int\limits_0^d \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2\,\alpha^-}{2}\int\limits_0^d \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(t+2d-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2\,\alpha^-}{2}\int\limits_0^d \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(2d-t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\,(\alpha^-)^2}{2}\int\limits_0^d \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(4d-t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$-\frac{\alpha^+\,(\alpha^-)^2}{2}\int\limits_0^d \sin kx\left(\int\limits_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt-\frac{\alpha^+\,(\alpha^-)^2}{2}\int\limits_0^d \sin k(2t-x)\left(\int\limits_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2}{2}\int\limits_0^d \sin kx\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt+\frac{(\alpha^+)^2}{2}\int\limits_0^d \sin k(2t-x)\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2}{2}\int\limits_0^d \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_d^t \sin k\,(t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{2}\int\limits_0^d \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_d^t \sin k\,(t+2d-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{4}\int\limits_0^d \cos k\,(x+2d-2t)\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{4}\cos k\,(x-2d)\int\limits_0^d\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt+\frac{\alpha^+\alpha^-}{2}\sin k\,(2d-x)\int\limits_0^d q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{2}\int\limits_0^d \sin k\,(x-2d+2t)\,q(t)dt+\frac{(\alpha^-)^2\,h}{2}\int\limits_0^d \cos k(4d-2t-x)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^-)^2\,h}{2}\cos kx\int\limits_0^d q(t)dt+\frac{(\alpha^+)^2\,\alpha^-}{2}\sin k\,(2d-x)\int\limits_0^d\left(\int\limits_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2\,\alpha^-}{2}\int\limits_0^d \sin k\,(x-2d+2t)\left(\int\limits_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\left(\alpha^{+}\right)^{2}\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-t\right)\left(\int\limits_{0}^{d}\sin k\left(t-2\tau\right)q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}\left(\alpha^{-}\right)^{2}}{2}\int\limits_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-t\right)\left(\int\limits_{0}^{d}\sin k\left(t+2d-2\tau\right)q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}\left(\alpha^{-}\right)^{2}}{2}\int\limits_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-t\right)\left(\int\limits_{0}^{d}\sin k\left(2d-t-2\tau\right)q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\left(\alpha^{-}\right)^{3}}{2}\int\limits_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-t\right)\left(\int\limits_{0}^{d}\sin k\left(4d-t-2\tau\right)q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$-\frac{\left(\alpha^{-}\right)^{3}}{4}\sin k\left(2d-x\right)\int\limits_{0}^{d}\left(\int\limits_{0}^{d}q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$-\frac{\left(\alpha^{-}\right)^{3}}{4}\int\limits_{0}^{d}\sin k(x-2d+2t)\left(\int\limits_{0}^{d}q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{4}\sin k\left(2d-x\right)\int\limits_{0}^{d}\left(\int\limits_{d}^{t}q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{4}\sin k\left(2d-x\right)\int\limits_{0}^{d}\left(\int\limits_{d}^{t}q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-t\right)\left(\int\limits_{d}^{t}\sin k\left(t-2\tau\right)q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\left(\alpha^{-}\right)^{2}}{2}\int\limits_{0}^{d}\cos k\left(2d-x-t\right)\left(\int\limits_{d}^{t}\sin k\left(t+2d-2\tau\right)q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\left(\alpha^{-}\right)^{2}}{2}\int\limits_{0}^{d}\sin k\left(4d-x-2t\right)\left(\int\limits_{d}^{t}q(\tau)d\tau\right)q(t)dt+\frac{\left(\alpha^{-}\right)^{2}}{2}\sin kx\int\limits_{0}^{d}\left(\int\limits_{d}^{t}q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}h}{2}\cos kx\int\limits_{d}^{x}q(t)dt+\frac{\alpha^{+}h}{2}\int\limits_{d}^{x}\cos k\left(x-2d\right)q(t)dt+\frac{\alpha^{-}h}{2}\int\limits_{d}^{x}\sin k\left(x-2d+2t\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}h}{2}\sin k\left(2d-x\right)\int\limits_{d}^{x}q(t)dt+\frac{(\alpha^{+})^{2}}{4}\sin kx\int\limits_{d}^{x}\left(\int\limits_{0}^{d}q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2}{4}\int\limits_0^d \sin k\,(2t-x)\left(\int\limits_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{(\alpha^+)^2}{4}\int\limits_d^x \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{2}\int\limits_d^x \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(t+2d-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{2}\int\limits_d^x \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(2d-t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{(\alpha^-)^2}{2}\int\limits_d^x \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_0^d \sin k\,(4d-t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$-\frac{(\alpha^-)^2}{4}\int\limits_d^x \sin kx\left(\int\limits_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt-\frac{(\alpha^-)^2}{4}\int\limits_d^x \sin k(2t-x)\left(\int\limits_0^d q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{\alpha^+}{4}\int\limits_d^x \sin kx\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt+\frac{\alpha^+}{4}\int\limits_d^x \sin k(2t-x)\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_d^x \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_d^t \sin k\,(t-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_d^x \cos k\,(x-t)\left(\int\limits_d^t \sin k\,(t+2d-2\tau)\,q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$
$$+\frac{\alpha^-}{4}\int\limits_d^x \sin k(x+2d-2t)\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt+\frac{\alpha^-}{4}\cos k\,(x-2d)\int\limits_d^x\left(\int\limits_d^t q(\tau)d\tau\right)q(t)dt$$

dır.

$\Delta(\lambda)=\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=0$ fonksiyonunun köklerinin davranışlarını öğrenelim. Bunun için bulduğumuz $\varphi(x,\lambda)$, $\varphi'(x,\lambda)$ fonksiyonlarının k'nın yete-rince büyük değerlerindeki davranışlarından yararlanalım:

$$\Delta(k)=-\alpha^+\sin k\pi+\alpha^-\sin k(2d-\pi)-\frac{\alpha^+h}{k}\cos k(2d-\pi)+\frac{\alpha^+h}{k}\cos k\pi$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2}{k}\cos k\pi\int_0^d q(t)dt+\frac{(\alpha^+)^2}{k}\int_0^d\cos k\,(\pi-2t)\,q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{k}\int_0^d\cos k(\pi+2d-2t)q(t)dt+\frac{\alpha^+\alpha^-}{k}\cos k(2d-\pi)\int_0^d q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+\alpha^-}{k}\int_0^d\cos k\,(2d-\pi-2t)\,q(t)dt+\frac{(\alpha^-)^2}{k}\int_0^d\cos k(4d-2t-\pi)q(t)dt$$

$$+\frac{(\alpha^-)^2}{k}\cos k\pi\int_0^d q(t)dt+\frac{\alpha^+}{k}\cos k\pi\int_d^\pi q(t)dt+\frac{\alpha^+}{k}\int_d^\pi\cos k(\pi-2d)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{k}\int_d^\pi\cos k(\pi+2d-2t)q(t)dt+\alpha^-\cos k(\pi-2d)\int_d^\pi q(t)dt$$

$$+H\alpha^+\left(\cos k\pi+\frac{h}{k}\sin k\pi\right)+H\alpha^-\left(\cos k(2d-\pi)+\frac{h}{k}\sin k(2d-\pi)\right)$$

$$+\frac{H(\alpha^+)^2}{2k}\left[\sin k\pi\int_0^d q(t)dt+\int_0^d\sin k(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^+\alpha^-}{2k}\left[\int_0^d\sin k(\pi+2d-2t)q(t)dt+\sin k(2d-\pi-2t)\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H(\alpha^-)^2}{2k}\left[\int_0^d\sin k(4d-\pi-2t)q(t)dt-\sin k\pi\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^+}{2k}\left[\sin k\pi\int_d^\pi q(t)dt+\int_d^\pi\sin k(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^-}{2k}\left[\int_d^\pi\sin k(\pi+2d-2t)q(t)dt+\sin k(\pi-2d)\int_d^\pi q(t)dt\right]+O\left(\frac{1}{k^2}\right)=$$

0

$\Delta(k)$ nın sıfırlarının davranışlarını incelemek için ilk önce

$$\Delta_0(k):=\ -\alpha^+\sin k\pi+\alpha^-\sin k(2d-\pi)+H\alpha^+\cos k\pi+H\alpha^-\cos k(2d-\pi)$$

fonksiyonunun sıfırlarının davranışlarını inceleyelim.

Teorem.2.2.4.[17]: $e^{\alpha_0\lambda}+a_1e^{\alpha_1\lambda}+\ldots+a_{p-1}e^{\alpha_{p-1}\lambda}+a_p=0$

α_s 'ler$(s=0,1,\ldots,p-1)$ gerçel sayılar, $\alpha_{s-1}>\alpha_s>0$, a_s 'ler $(s=\overline{1,p})$ kompleks, ve $a_p\neq 0$ ise bu denklemin kökleri $\lambda_n=\dfrac{2\pi ni}{\alpha_0}+\Psi(n)$ $(n=0,\pm1,\ldots)$ dir. $\Psi(n)$ ise sınırlı kompleks değerli fonksiyon, $\sup\limits_n|\Psi(n)|<+\infty$ dur.
Bu teoreme göre, $\Delta_0(k)$ ın ifadesini

$$\Delta_0(k) \;=\; -\alpha^+\sin k\pi+\alpha^-\sin k(2d-\pi)+H\alpha^+\cos k\pi+H\alpha^-\cos k(2d-\pi)$$

$$-\alpha^+\frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{2i}+\alpha^-\frac{e^{ik(2d-\pi)}-e^{-ik(2d-\pi)}}{2i}+H\alpha^+\frac{e^{ik\pi}+e^{-ik\pi}}{2i}$$
$$+H\alpha^-\frac{e^{ik(2d-\pi)}+e^{-ik(2d-\pi)}}{2i}$$

şeklinde yazalım.

Buradan; $\Delta_0(k)=0$ denklemi

$$e^{2ik\pi}-\frac{\alpha^-}{\alpha^+}e^{2ikd}+\frac{\alpha^-}{\alpha^+}\frac{(1-iH)^2}{1+H^2}e^{2ik(\pi-d)}-\frac{(1-iH)^2}{1+H^2}=0$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\alpha_0=2\pi,\quad \alpha_1=2d,\quad \alpha_2=2(\pi-d)\quad \text{ve}\quad \alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>0$$

dır ve

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{\alpha^-}{\alpha^+}\quad a_2=\frac{\alpha^-}{\alpha^+}\frac{(1-iH)^2}{1+H^2},\quad a_3=-\frac{(1-iH)^2}{1+H^2}\neq 0$$

olduğundan Teorem 2.2 4 uygulanırsa, denklemin kökleri için

$$ik_n^0 \;=\; \frac{2in\pi}{2\pi}+\psi(n),\qquad \sup_n|\psi(n)| \;<+\infty$$

veya

$$k_n^0 \;=\; n+\psi_1(n),\qquad \psi_1(n)= \;-i\psi(n),\qquad \sup_n|\psi_1(n)| \;<+\infty$$

ifadesi elde edilir. Şimdi $q(x)\neq 0$ olduğu durum için $\Delta(k_n)$' nın sıfırlarının davranışlarını bulalım:

$$\Delta(k_n)=-\alpha^+\sin k_n\pi+\alpha^-\sin k_n(2d-\pi)+H\alpha^+\cos k_n\pi+H\alpha^-\cos k_n(2d-\pi)$$

$$+\frac{1}{k_n}\left\{(\alpha^+)^2\left[\cos k_n\pi\int_0^d q(t)dt+\int_0^d \cos k_n\left(\pi-2t\right)q(t)dt\right]\right.$$

$$+\alpha^+\alpha^-\left[\int_0^d \cos k_n(\pi+2d-2t)q(t)dt-\int_0^d \cos k_n\left(2d-\pi-2t\right)q(t)dt\right]$$

$$+\alpha^+ h\cos k_n\pi-\alpha^-\cos k_n\left(2d-\pi\right)$$

$$-(\alpha^-)^2\left[\int_0^d \cos k_n(4d-2t-\pi)q(t)dt+\cos k_n\pi\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\alpha^+\left[\cos k_n\pi\int_d^\pi q(t)dt+\int_d^\pi \cos k_n(\pi-2d)q(t)dt\right]$$

$$+\alpha^-\left[\int_d^\pi \cos k_n(\pi+2d-2t)q(t)dt+\cos k_n(\pi-2d)\int_d^\pi q(t)dt\right]$$

$$+Hh\alpha^+\sin k_n\pi+\alpha^- h\sin k_n(2d-\pi)$$

$$+\frac{H(\alpha^+)^2}{2}\left[\sin k_n\pi\int_0^d q(t)dt+\int_0^d \sin k_n(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^+\alpha^-}{2}\left[\int_0^d \sin k_n(\pi+2d-2t)q(t)dt+\sin k_n(2d-\pi-2t)\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H(\alpha^-)^2}{2}\left[\int_0^d \sin k_n(4d-\pi-2t)q(t)dt-\sin k_n\pi\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^+}{2}\left[\sin k_n\pi\int_d^\pi q(t)dt+\int_d^\pi \sin k_n(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$\left.+\frac{H\alpha^-}{2}\left[\int_d^\pi \sin k_n(\pi+2d-2t)q(t)dt+\sin k_n(\pi-2d)\int_d^\pi q(t)dt\right]\right\}$$

$$+O\left(\frac{1}{k_n^2}\right)=0 \tag{2.2.12}$$

(2.2.12) eşitliğinde $k_n=k_n^0+\varepsilon_n,\ \varepsilon_n\to 0$ yazılırsa

$$\Delta\left(\lambda\right)=-\alpha^+\sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)+\alpha^-\sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)\left(2d-\pi\right)$$

$$+H\alpha^+\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)\pi+H\alpha^-\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)\left(2d-\pi\right)$$

$$+\frac{1}{(k_n^0+\varepsilon_n)}\left\{(\alpha^+)^2\cos(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi\int_0^d q(t)dt+(\alpha^+)^2\int_0^d\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi-2t)\,q(t)dt\right.$$

$$+\alpha^+\alpha^-\left[\int_0^d\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi+2d-2t)q(t)dt-\int_0^d\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(2d-\pi-2t)\,q(t)dt\right]$$

$$+\alpha^+h\cos(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi-\alpha^-\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(2d-\pi)$$

$$-(\alpha^-)^2\left[\int_0^d\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(4d-2t-\pi)q(t)dt+\cos(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\alpha^+\left[\cos(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi\int_d^\pi q(t)dt+\int_d^\pi\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi-2d)q(t)dt\right]$$

$$+\alpha^-\left[\int_d^\pi\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi+2d-2t)q(t)dt+\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi-2d)\int_d^\pi q(t)dt\right]$$

$$+h\alpha^+\sin(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi+\alpha^-h\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(2d-\pi)$$

$$+\frac{H(\alpha^+)^2}{2}\left[\sin(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi\int_0^d q(t)dt+\int_0^d\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^+\alpha^-}{2}\left[\int_0^d\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi+2d-2t)q(t)dt+\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(2d-\pi-2t)\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H(\alpha^-)^2}{2}\left[\int_0^d\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(4d-\pi-2t)q(t)dt-\sin(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^+}{2}\left[\sin(k_n^0+\varepsilon_n)\,\pi\int_d^\pi q(t)dt+\int_d^\pi\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$\left.+\frac{H\alpha^-}{2}\left[\int_d^\pi\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi+2d-2t)q(t)dt+\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(\pi-2d)\int_d^\pi q(t)dt\right]\right\}$$

$$+O\left(\frac{1}{(k_n^0+\varepsilon_n)^2}\right)=0$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\varepsilon_n=(k_n^0)^{-1}\left[\alpha^+\pi\cos k_n^0\pi-\alpha^-(2d-\pi)\cos k_n^0(2d-\pi)\right.$$

$$\left.-H\pi\alpha^+\sin k_n^0\pi-H\alpha^-(2d-\pi)\sin k_n^0(2d-\pi)\right]^{-1}$$

$$\cdot\left\{[-(\alpha^+)^2+(\alpha^-)^2+\alpha^+\alpha^-]\int\limits_0^d q(t)dt+\alpha^+\int\limits_d^\pi q(t)dt+\alpha^+h\right\}\cos k_n^0\pi$$

$$+\left[\alpha^+\alpha^-\int\limits_0^d q(t)dt+(\alpha^++\alpha^-)\int\limits_d^\pi q(t)dt-\alpha^-h\right]\cos k_n^0\left(2d-\pi\right)$$

$$-\alpha^+\alpha^-\int\limits_0^d \cos k_n^0\left(2d-\pi-2t\right)q(t)dt-(\alpha^-)^2\int\limits_0^d \cos k_n^0\left(4d-\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+\alpha^-\int\limits_d^\pi \cos k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt+\alpha^+Hh\sin k_n^0\pi+\alpha^-Hh\sin k_n^0\left(2d-\pi\right)$$

$$+\left[\frac{H\alpha^+}{2}-1\right]\sin k_n^0\pi\int\limits_0^d q(t)dt+\int\limits_0^d \sin k_n^0\left(\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+\int\limits_d^\pi \sin k_n^0\left(\pi-2t\right)q(t)dt+\frac{H\alpha^+\alpha^-}{2}+\int\limits_0^d \sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt$$

$$+\frac{H(\alpha^+)^2}{2}\int\limits_0^d \sin k_n^0\left(4d-\pi-2t\right)q(t)dt+\frac{H\alpha^+}{2}\int\limits_d^\pi q(t)dt$$

$$+\frac{H\alpha^-}{2}\int\limits_d^\pi \sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt+\sin k_n^0\left(\pi-2d\right)\int\limits_d^\pi q(t)dt$$

$$\cdot\left\{1+\frac{1}{k_n^0}\left[(\alpha^+)^2+(\alpha^-)^2\right]\pi\sin k_n^0\pi\int\limits_0^d q(t)dt\right.$$

$$+\left[\alpha^+\alpha^-\int\limits_0^d q(t)dt+(\alpha^++\alpha^-)\int\limits_d^\pi q(t)dt\right]\left(\pi-2d\right)\sin k_n^0\left(\pi-2d\right)$$

$$+\alpha^+\alpha^-\left(\pi+2d-2t\right)\int\limits_0^d \sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt$$

$$+\alpha^+\alpha^-\int\limits_0^d \left(2d-\pi-2t\right)\sin k_n^0\left(2d-\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+(\alpha^-)^2\int\limits_0^d \left(4d-\pi-2t\right)\sin k_n^0\left(4d-\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+\alpha^{+}\sin k_n^0\pi\int_d^{\pi} q(t)dt-\alpha^{-}\int_d^{\pi}(\pi+2d-2t)\sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt$$

$$+\alpha^{+}h\pi\cos k_n^0\pi+\alpha^{-}h\cos k_n^0\pi+\alpha^{-}h\left(2d-\pi\right)\sin k_n^0\left(2d-\pi\right)$$

$$+\frac{H(\alpha^{+})^2}{2}\left[\cos k_n^0\pi\int_0^d q(t)dt+\int_0^d(\pi-2t)\cos k_n^0(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^{+}\alpha^{-}}{2}\left[\int_0^d(\pi+2d-2t)\cos k_n^0(\pi+2d-2t)q(t)dt\right.$$

$$\left.+(2d-\pi-2t)\sin k_n^0(2d-\pi-2t)\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H(\alpha^{-})^2}{2}\left[\int_0^d\sin k_n^0(4d-\pi-2t)q(t)dt-\sin k_n^0\pi\int_0^d q(t)dt\right]$$

$$+\frac{H\alpha^{+}}{2}\left[\sin k_n^0\pi\int_d^{\pi} q(t)dt+\int_d^{\pi}\sin k_n^0(\pi-2t)q(t)dt\right]$$

$$\left.+\frac{H\alpha^{-}}{2}\left[\int_d^{\pi}\sin k_n^0(\pi+2d-2t)q(t)dt+\sin k_n^0(\pi-2d)\int_d^{\pi}q(t)dt\right]\right\}$$

veya

$$\varepsilon_n=\frac{\xi_n}{k_n^0\dot{\Delta}\left(k_n^0\right)}+\frac{\delta_n}{\left(k_n^0\right)^2}$$

dır ve $\{\xi_n\}\in l_\infty$, $\{\delta_n\}\in l_2$ dır. Ayrıca burada;

$$\xi_n=\left\{\left[-(\alpha^{+})^2+(\alpha^{-})^2+\alpha^{+}\alpha^{-}\right]\int_0^d q(t)dt+\alpha^{+}\int_d^{\pi}q(t)dt+\alpha^{+}h\right\}\cos k_n^0\pi$$

$$+\left[\alpha^{+}\alpha^{-}\int_0^d q(t)dt+(\alpha^{+}+\alpha^{-})\int_d^{\pi}q(t)dt-\alpha^{-}h\right]\cos k_n^0\left(2d-\pi\right)$$

$$-\alpha^{+}\alpha^{-}\int_0^d\cos k_n^0\left(2d-\pi-2t\right)q(t)dt-(\alpha^{-})^2\int_0^d\cos k_n^0\left(4d-\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+\alpha^{-}\int_d^{\pi}\cos k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt+\alpha^{+}Hh\sin k_n^0\pi+\alpha^{-}Hh\sin k_n^0\left(2d-\pi\right)$$

$$+\left[\frac{H\alpha^+}{2}-1\right]\sin k_n^0\pi\int_0^d q(t)dt+\int_0^d \sin k_n^0\left(\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+\int_d^\pi \sin k_n^0\left(\pi-2t\right)q(t)dt+\frac{H\alpha^+\alpha^-}{2}+\int_0^d \sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt$$

$$+\frac{H(\alpha^+)^2}{2}\int_0^d \sin k_n^0\left(4d-\pi-2t\right)q(t)dt+\frac{H\alpha^+}{2}\int_d^\pi q(t)dt$$

$$+\frac{H\alpha^-}{2}\int_d^\pi \sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt+\sin k_n^0\left(\pi-2d\right)\int_d^\pi q(t)dt$$

ve

$$\delta_n=\left[(\alpha^+)^2+(\alpha^-)^2\right]\pi\sin k_n^0\pi\int_0^d q(t)dt$$

$$+\left[\alpha^+\alpha^-\int_0^d q(t)dt+(\alpha^++\alpha^-)\int_d^\pi q(t)dt\right](\pi-2d)\sin k_n^0\left(\pi-2d\right)$$

$$+\alpha^+\alpha^-\left(\pi+2d-2t\right)\int_0^d \sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt$$

$$+\alpha^+\alpha^-\int_0^d \left(2d-\pi-2t\right)\sin k_n^0\left(2d-\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+(\alpha^-)^2\int_0^d \left(4d-\pi-2t\right)\sin k_n^0\left(4d-\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+\alpha^+\sin k_n^0\pi\int_d^\pi q(t)dt-\alpha^-\int_d^\pi \left(\pi+2d-2t\right)\sin k_n^0\left(\pi+2d-2t\right)q(t)dt$$

dır. Buradan;

$$k_n \;=\; k_n^0+\varepsilon_n \;=\; k_n^0+\frac{\xi_n}{k_n^0\dot{\Delta}\left(k_n^0\right)}+\frac{\delta_n}{\left(k_n^0\right)^2}$$

elde edilir.

Şimdi $\varphi_n(x) = \varphi(x,k_n)$ özfonksiyonlarının davranışlarını öğrenelim:

$$\begin{aligned}\varphi(x,k_n) = \; & \alpha^+\left(\cos k_n x + \frac{h}{k_n}\sin k_n x\right) + \alpha^-\left(\cos k_n(2d-x) + \frac{h}{k_n}\sin k_n(2d-x)\right) \\ & + \frac{\alpha^+}{k_n}\int_0^d \sin k_n(x-t)q(t)\varphi(t,k_n)dt + \frac{\alpha^-}{k_n}\int_0^d \sin k_n(2d-x-t)\,q(t)\varphi(t,k_n)dt \\ & + \frac{1}{k_n}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k_n)dt\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}&\varphi(x,k_n) = \alpha^+\left(\cos k_n x + \frac{h}{k_n}\sin k_n x\right) + \alpha^-\left(\cos k_n(2d-x) + \frac{h}{k_n}\sin k_n(2d-x)\right) \\ & + \frac{\sin k_n x}{2k_n}\int_0^d q(t)\,dt + \frac{(\alpha^+)^2}{k_n}\int_0^d \sin k_n(x-t)q(t)dt \\ & + \frac{\alpha^+\alpha^-}{k_n}\left[\int_0^d \sin k_n(2d+x-2t)\,q(t)dt + \int_0^d \sin k_n(2d-x-2t)\,q(t)dt\right] \\ & + \frac{(\alpha^-)^2}{k_n}\int_0^d \sin k_n(4d-x-2t)\,q(t)dt \\ & + \frac{\alpha^+}{k_n}\left[\sin kx\int_d^x q(t)\,dt + \int_d^x \sin k_n(2d-x-2t)\,q(t)dt\right] \\ & + \frac{\alpha^-}{k_n}\left[\int_d^x \sin k_n(2d+x-2t)\,q(t)dt + \sin k_n(x-2d)\int_d^x q(t)\,dt\right] + O\left(\frac{1}{k_n^2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(x,k_n)$ ifadesinde $k_n = k_n^0 + \varepsilon_n$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}&\varphi(x,k_n) = \alpha^+\left(\cos(k_n^0+\varepsilon_n)x + \frac{h}{k_n^0+\varepsilon_n}\sin(k_n^0+\varepsilon_n)x\right) \\ & + \alpha^-\left(\cos(k_n^0+\varepsilon_n)(2d-x) + \frac{h}{k_n^0+\varepsilon_n}\sin(k_n^0+\varepsilon_n)(2d-x)\right) \\ & + \frac{\sin(k_n^0+\varepsilon_n)x}{2(k_n^0+\varepsilon_n)}\int_0^d q(t)\,dt + \frac{(\alpha^+)^2}{(k_n^0+\varepsilon_n)}\int_0^d \sin(k_n^0+\varepsilon_n)(x-t)q(t)dt\end{aligned}$$

$$+\frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{2\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)}\left[\int_0^d \sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(2d+x-2t)\,q(t)dt\right.$$

$$\left.+\int_0^d \sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(2d-x-2t)\,q(t)dt\right]$$

$$+\frac{\left(\alpha^{-}\right)^2}{2\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)}\int_0^d \sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(4d-x-2t)\,q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)}\left[\sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)x\int_d^x q(t)\,dt+\int_d^x \sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(2d-x-2t)\,q(t)dt\right]$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)}\left[\int_d^x \sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(2d+x-2t)\,q(t)dt\right.$$

$$\left.+\sin\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(x-2d)\int_d^x q(t)\,dt\right]+O\left(\frac{1}{\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)^2}\right)$$

şeklinde olur. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\varphi(x,k_n)=\alpha^{+}\left(\cos k_n^0x+\frac{h}{k_n^0}\sin k_n^0x\right)+\alpha^{-}\left(\cos k_n^0(2d-x)+\frac{h}{k_n^0}\sin k_n^0(2d-x)\right)$$

$$+\frac{\sin k_n^0}{2k_n^0}x\int_0^d q(t)\,dt+\frac{\left(\alpha^{+}\right)^2}{k_n^0}\int_0^d \sin k_n^0(x-t)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}\alpha^{-}}{k_n^0}\left[\int_0^d \sin k_n^0(2d+x-2t)\,q(t)dt+\int_0^d \sin k_n^0(2d-x-2t)\,q(t)dt\right]$$

$$+\frac{\left(\alpha^{-}\right)^2}{k_n^0}\int_0^d \sin k_n^0(4d-x-2t)\,q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{k_n^0}\left[\sin k_n^0x\int_d^x q(t)\,dt+\int_d^x \sin k_n^0(2d-x-2t)\,q(t)dt\right]$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{k_n^0}\left[\int_d^x \sin k_n^0(2d+x-2t)\,q(t)dt+\sin k_n^0(x-2d)\int_d^x q(t)\,dt\right]+O\left(\frac{1}{k_n^2}\right)$$

elde edilir. $x=\pi$ ve $d=\dfrac{\pi}{2}$ için;

$$\varphi(\pi,k_n)=\alpha^+\left(\cos k_n^0\pi+\frac{h}{k_n^0}\sin k_n^0\pi\right)+\alpha^-+\frac{\sin k_n^0\pi}{2k_n^0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}q(t)\,dt$$

$$+\frac{(\alpha^+)^2}{k_n^0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin k_n^0(\pi-t)q(t)dt+\frac{(\alpha^-)^2}{k_n^0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin k_n^0\left(\pi-2t\right)q(t)dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{k_n^0}\left[\sin k_n^0\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}q(t)\,dt-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2k_n^0tq(t)dt\right]+\frac{\alpha^-}{k_n^0}\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2k_n^0\left(\pi-t\right)q(t)dt\right)$$

$$+O\left(\frac{1}{k_n^2}\right)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\pi)\quad=\quad\alpha^+(-1)^n+\alpha^-$$

elde edilir.

L probleminin normalleştirici sayılarının asimptotik davranışlarını bulmak için;

$$\alpha_n=\int\limits_0^{\pi}\varphi^2(x,k_n)\,dx \tag{2.2.14}$$

olduğundan (2.2.14) eşitliğinde (2.2.13) ifadesi yerine yazılırsa;

$$\alpha_n=\quad(\alpha^+)^2\int\limits_0^{\pi}\cos^2 k_nxdx+(\alpha^-)^2\int\limits_0^{\pi}\cos^2 k_n(2d-x)dx$$

$$+\frac{2\alpha^+h}{k_n^0}\int\limits_0^{\pi}\cos k_nx\sin k_nxdx+\frac{2\alpha^-h}{k_n^0}\int\limits_0^{\pi}\cos k_n(2d-x)\sin k_n(2d-x)dx+O\left(\frac{1}{k_n^2}\right)$$

$$=\left((\alpha^+)^2+(\alpha^-)^2\right)\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{k_n^2}\right)$$

elde edilir.

III. BÖLÜM

Regüler Sturm-Liouville Operatörünün İki Spektruma Göre Belirlenmesi

3.1. Normalleştirici Sayıların İki Spektruma Göre Belirlenmesi

$$L_1 := \begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \\ y'(0) - h_1 y(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}+0) = \alpha y(\frac{\pi}{2}-0) \\ y'(\frac{\pi}{2}+0) = \alpha^{-1} y'(\frac{\pi}{2}-0) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

$$L_2 := \begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \\ y'(0) - h_2 y(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}+0) = \alpha y(\frac{\pi}{2}-0) \\ y'(\frac{\pi}{2}+0) = \alpha^{-1} y'(\frac{\pi}{2}-0) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

problemlerini ele alalım.

Burada $q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon, h_1, h_2, H, α reel sayılar $h_1 \neq h_2$' dir. Ayrıca $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ ve λ spektral parametredir.

$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ ve $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < ...$ ile sırasıyla L_1,L_2 operatörlerinin özdeğerlerini belirtelim. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerinin sırasıyla

$$\begin{aligned} \varphi(0,\lambda) &= 1 \qquad \varphi'(0,\lambda) = h_1 \\ \psi(0,\lambda) &= 1 \qquad \psi'(0,\lambda) = h_2 \end{aligned}$$

başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar. Yukarıda belirttiğimiz gibi L_1 ve L_2 operatörlerinin özdeğerleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= \varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) \\ \phi_2(\lambda) &= \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) \end{aligned}$$

fonksiyonlarının kökleriyle çakışır. O halde $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ fonksiyonu L_1 operatörünün özfonksiyonudur.

$$\alpha_n=\int\limits_0^{\pi}\varphi_n^2(x)\,dx$$

sayılarına ise L_1 operatörünün **normalleştirici sayıları** denir.

Şimdi de α_n'leri L_1 ve L_2 operatörlerinin $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ spektrumları ile ifade etmeye çalışacağız. Böylece iki spektruma göre ters problemin çözümünü, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerine göre ters problemin çözümüne indirgemiş olacağız.

$$f(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

olarak işaretleyelim ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonu da

$$f'(\pi,\lambda)+Hf(\pi,\lambda)=0$$

koşulunu sağlasın. O halde;

$$\psi'(\pi,\lambda)+m(\lambda)\varphi'(\pi,\lambda)+H(\psi(\pi,\lambda)+m(\lambda)\varphi(\pi,\lambda))=0$$

veya

$$m(\lambda)=-\frac{\psi'(\pi,\lambda)+H\psi(\pi,\lambda)}{\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)}=\frac{\phi_2(\lambda)}{\phi_1(\lambda)}$$

olduğunu alırız. Görüldüğü gibi $m(\lambda)$ fonksiyonu menamorf fonksiyondur, onun sıfırları ve kutup noktaları sırasıyla L_1 ve L_2 operatörlerinin özdeğerleridir. Diğer taraftan

$$(\lambda_1-\lambda_2)\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0}f(x,\lambda_1)f(x,\lambda_2)\,dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}f(x,\lambda_1)f(x,\lambda_2)\,dx\right]$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left[-f''(x,\lambda_1)f(x,\lambda_2)+f(x,\lambda_1)f''(x,\lambda_2)\right]dx$$

$$
\begin{aligned}
& +\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[-f''(x,\lambda_1)\,f(x,\lambda_2)+f(x,\lambda_1)\,f''(x,\lambda_2)\right]dx \\
= & \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\left[-f'(x,\lambda_1)\,f(x,\lambda_2)+f(x,\lambda_1)\,f'(x,\lambda_2)\right]'dx \\
& +\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[-f'(x,\lambda_1)\,f(x,\lambda_2)+f(x,\lambda_1)\,f'(x,\lambda_2)\right]'dx \\
= & \left[-f'(x,\lambda_1)\,f(x,\lambda_2)+f(x,\lambda_1)\,f'(x,\lambda_2)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}-0} \\
& +\left[-f'(x,\lambda_1)\,f(x,\lambda_2)+f(x,\lambda_1)\,f'(x,\lambda_2)\right]_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} \\
= & -f'\left(\tfrac{\pi}{2}-0,\lambda_1\right)f\left(\tfrac{\pi}{2}-0,\lambda_2\right)+f\left(\tfrac{\pi}{2}-0,\lambda_1\right)f'\left(\tfrac{\pi}{2}-0,\lambda_2\right)+f'(0,\lambda_1)\,f(0,\lambda_2) \\
& -f(0,\lambda_1)\,f'(0,\lambda_2)-f'(\pi,\lambda_1)\,f(\pi,\lambda_2)+f(\pi,\lambda_1)\,f'(\pi,\lambda_2) \\
& +f'\left(\tfrac{\pi}{2}+0,\lambda_1\right)f\left(\tfrac{\pi}{2}+0,\lambda_2\right)-f\left(\tfrac{\pi}{2}+0,\lambda_1\right)f'\left(\tfrac{\pi}{2}+0,\lambda_2\right) \\
= & f'(0,\lambda_1)\,f(0,\lambda_2)-f(0,\lambda_1)\,f'(0,\lambda_2) \\
= & \left[\psi'(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\,\varphi'(0,\lambda_1)\right]\left[\psi(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\,\varphi(0,\lambda_2)\right] \\
& -\left[\psi(0,\lambda_1)+m(\lambda_1)\,\varphi(0,\lambda_1)\right]\left[\psi'(0,\lambda_2)+m(\lambda_2)\,\varphi'(0,\lambda_2)\right] \\
= & \left[h_2+m(\lambda_1)\,h_1\right]\left[1+m(\lambda_2)\right]-\left[1+m(\lambda_1)\right]\left[h_2+m(\lambda_2)\,h_1\right] \\
= & (h_1-h_2)\left[m(\lambda_1)-m(\lambda_2)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitlikte $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=\overline{\lambda}$ yazılırsa

$$\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} f(x,\lambda)\, f\left(x,\overline{\lambda}\right) dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} f(x,\lambda)\, f\left(x,\overline{\lambda}\right) dx\right]$$
$$=(h_1-h_2)\left[m(\lambda)-m\left(\overline{\lambda}\right)\right]$$

veya

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} |f(x,\lambda)|^2\, dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} |f(x,\lambda)|^2\, dx=(h_1-h_2)\,\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \tag{3.1.3}$$

olduğunu alınır. (3.1.3)'ten görüldüğü gibi $h_1 > h_2$ olduğunda $m(\lambda)$ fonksiyonu yukarı yarı düzlemi yukarı yarı düzleme dönüştürmektedir. Buradan anlaşılacağı üzere $m(\lambda)$ fonksiyonunun kökleri ve kutup noktaları birbirini ayırmaktadırlar. Yani L_1 ve L_2 operatörlerinin özdeğerleri birbirini ayırmaktadır.

$$\lambda_0<\mu_0<\lambda_1<\mu_1<...$$

$$(\lambda-\lambda_n)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} f(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda_n)\, dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} f(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda_n)\, dx\right]$$
$$=f'(0,\lambda)\,\varphi(0,\lambda_n)-f(0,\lambda)\,\varphi'(0,\lambda_n)$$
$$=h_1-h_2$$

olur. Diğer taraftan;

$$(\lambda-\lambda_n)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} f(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda_n)\, dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} f(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda_n)\, dx\right]$$
$$=(\lambda-\lambda_n)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left(\psi(x,\lambda_n)-\frac{\phi_2(\lambda)}{\phi_1(\lambda)}\varphi(x,\lambda_n)\right)\varphi(x,\lambda_n)\, dx+\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left(\psi(x,\lambda_n)-\frac{\phi_2(\lambda)}{\phi_1(\lambda)}\varphi(x,\lambda_n)\right)\varphi(x,\lambda_n)\, dx\right]$$
$$=(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\psi(x,\lambda_n)\,\varphi(x,\lambda_n)\, dx-(\lambda-\lambda_n)\,\frac{\phi_2(\lambda)}{\phi_1(\lambda)}\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda_n)\, dx$$

$$+\left(\lambda-\lambda_n\right)\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\psi\left(x,\lambda_n\right)\varphi\left(x,\lambda_n\right)dx-\left(\lambda-\lambda_n\right)\frac{\phi_2\left(\lambda\right)}{\phi_1\left(\lambda\right)}\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\varphi\left(x,\lambda\right)\varphi\left(x,\lambda_n\right)dx$$

$$=\left(\lambda-\lambda_n\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\psi\left(x,\lambda_n\right)\varphi\left(x,\lambda_n\right)dx-\frac{\left(\lambda-\lambda_n\right)\phi_2\left(\lambda\right)}{\phi_1\left(\lambda\right)-\phi_1\left(\lambda_n\right)}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\psi\left(x,\lambda_n\right)\varphi\left(x,\lambda_n\right)dx$$

$$+\left(\lambda-\lambda_n\right)\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\psi\left(x,\lambda_n\right)\varphi\left(x,\lambda_n\right)dx-\left(\lambda-\lambda_n\right)\frac{\phi_2\left(\lambda\right)}{\phi_1\left(\lambda\right)-\phi_1\left(\lambda_n\right)}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi\left(x,\lambda\right)\varphi\left(x,\lambda_n\right)dx$$

$$=h_1-h_2$$

elde edilir. Son eşitlikte $\lambda\rightarrow\lambda_n$ iken limite geçilirse;

$$-\frac{\phi_2\left(\lambda_n\right)}{\dot{\phi}_1\left(\lambda_n\right)}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi^2\left(x,\lambda_n\right)dx-\frac{\phi_2\left(\lambda_n\right)}{\dot{\phi}_1\left(\lambda_n\right)}\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\varphi^2\left(x,\lambda_n\right)dx=h_1-h_2$$

veya

$$\alpha_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi^2\left(x,\lambda_n\right)dx-\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\varphi^2\left(x,\lambda_n\right)dx=-\left(h_1-h_2\right)\frac{\dot{\phi}_1\left(\lambda_n\right)}{\phi_2\left(\lambda_n\right)}$$

ifadesi elde edilir.

3.2. S Sınıfı İçin Ters Problemler

L operatörü aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$l\,(y) := -y^{''} + q(x)y = \lambda y\ ,\ \ x \in (0,d) \cup (d,\pi), \quad \lambda = k^2 \tag{3.2.1}$$

$$U\,(y) = y^{'}(0) - hy(0) = 0, \quad V\,(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{3.2.2}$$

$$y(\frac{\pi}{2} + 0) = \alpha y(\frac{\pi}{2} - 0), \qquad y'(\frac{\pi}{2} + 0) = \alpha^{-1} y'(\frac{\pi}{2} - 0) \tag{3.2.3}$$

S ile $q(x) = q(\pi - x)$ ve $H = h$ koşullarını sağlayan $(3.2.1), (3.2.2), (3.2.3)$ Sturm-Liouville operatörleri sınıfını belirtelim. $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.2.1) denkleminin $\varphi(0, \lambda) = 1, \varphi^{'}(0, \lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 3.2.1: Sturm-Liouville operatörünün S sınıfından olması için gerek ve yeterli koşul ;

$$L \in S \Leftrightarrow \varphi(\pi, \lambda_n) = \alpha^{+}(-1)^n + \alpha^{-}$$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik: Diyelim ki, $q(\pi - x) \ = q(x), \quad H = h$ olsun. Bu durumda $\Psi_n(x, \lambda_n) \ = \varphi(\pi - x, \lambda_n)$ fonksiyonu da L operatörünün λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Bundan dolayı;

$$\varphi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(\pi - x, \lambda_n), \beta_n \neq 0 \tag{3.2.4}$$

dır. $x = \dfrac{\pi}{2}^{+}$ için ;

$$\varphi(\frac{\pi}{2}^{+}, \lambda_n) = \beta_n \varphi(\frac{\pi}{2}^{-}, \lambda_n)$$

$\varphi(\dfrac{\pi}{2}^{+}, \lambda_n) \neq 0$ olursa $\beta_n = \alpha$ dır.

$$\varphi(\frac{\pi}{2}^{+}, \lambda_n) = 0 \quad \text{ve} \quad \varphi^{'}(\frac{\pi}{2}^{+}, \lambda_n) \neq 0$$

olsun. (3.2.4) eşitliğinin x'e göre türevi alınıp tekrar $x = \dfrac{\pi}{2}^{+}$ yazılırsa

$$\varphi^{'}(\pi - x, \lambda_n) = \beta_n \varphi^{'}(x, \lambda_n)$$

$$-\varphi'(\frac{\pi}{2}^{+},\lambda_n)=-\beta_n\varphi'(\frac{\pi}{2}^{-},\lambda_n)\quad \text{ise}\quad \beta_n=-\alpha^{-1}$$

olarak bulunur. Buradan da $\beta_n=(-1)^n\,\alpha^{+}+\alpha^{-}$ olduğu çıkar.(3.2.4) eşitliğinde $x=0$ yazılırsa

$$\varphi(\pi,\lambda_n)=\beta_n\varphi(0,\lambda_n)\quad \text{ise}\quad \varphi(\pi,\lambda_n)=\beta_n=(-1)^n\,\alpha^{+}+\alpha^{-}$$

elde edilir.

Yeterlilik: α_n ; $q(\pi-x)$ potansiyelli (3.2.1)-(3.2.3) probleminin α_{n1} ise $q(x)$ potansiyelli (3.2.1)-(3.2.3) probleminin normalleştirici sayıları olsun. $n=0,1,2...$ için $\varphi(\pi,\lambda_n)=(-1)^n\alpha^{+}+\alpha^{-}$ olduğunu kabul edelim ve

$$\Psi_n(x)=\left[(-1)^n\alpha^{+}+\alpha^{-}\right]\varphi(\pi-x,\lambda_n)$$

olsun. O halde $\Psi_n(x)$ fonksiyonu L operatörünün λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Diğer yandan

$$\alpha_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\Psi_n^2(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\Psi_n^2(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left[\left((-1)^n\alpha^{+}+\alpha^{-}\right)\ \varphi(\pi-x)\right]^2dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[\left((-1)^n\alpha^{+}+\alpha^{-}\right)\ \varphi(\pi-x)\right]^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left[(\alpha^{+})^2+2\alpha^{+}\alpha^{-}+(\alpha^{-})^2\right]\varphi_n^2(\pi-x)dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[(\alpha^{+})^2+2\alpha^{+}\alpha^{-}+(\alpha^{-})^2\right]\varphi_n^2(\pi-x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left[2\alpha^2+\frac{2}{\alpha^2}+2(-1)^n\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\varphi_n^2(\pi-x)dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[2\alpha^2+\frac{2}{\alpha^2}+2(-1)^n\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\varphi_n^2(\pi-x)dx$$

$$=\left[2\alpha^2+\frac{2}{\alpha^2}+2(-1)^n\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi_n^2(x)dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[2\alpha^2+\frac{2}{\alpha^2}+2(-1)^n\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\varphi_n^2(x)dx$$
$$=2\left[\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+(-1)^n\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\alpha_{n1}$$
olduğundan dolayı (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) operatörlerinin spektral fonksiyonları bir sabit çarpanı ile farklıdırlar.

Bundan dolayı V.A.Marchenko'nun teklik teoremine göre $q(\pi-x)=q(x)$ ve $H=h$ olarak alınır.

Şimdi de gösterelim ki;

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx=\dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)\varphi^{'}(\pi,\lambda_n)-\dot{\varphi}^{'}(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_n)$$

eşitliği doğrudur.$\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları verilen diferansiyel denklemin uygun başlangıç koşullarını sağlayan fonksiyonları olduğundan

$$-\varphi^{''}(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{3.2.5}$$
$$-\varphi^{''}(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \tag{3.2.6}$$

(3.2.5) eşitliği $\varphi(x,\lambda)$, (3.2.6) eşitliği $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned}-\varphi^{''}(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda)&=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda)\\ -\varphi^{''}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)&=\lambda\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\end{aligned}$$

$$(\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)=-\varphi^{''}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi^{''}(x,\lambda_n)$$

eşitliği elde edilir.

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx+(\lambda-\lambda_n)\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left[-\varphi^{''}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi^{''}(x,\lambda_n)\right]dx$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[-\varphi^{''}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi^{''}(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda)\right]dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \tfrac{d}{dx}\left[-\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]dx \\
&+ \int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} \tfrac{d}{dx}\left[-\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]dx \\
&= \left[-\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\
&+ \left[-\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]_{\frac{\pi}{2}-0}^{\pi} \\
&= \left[-\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\
&+ \left[-\varphi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]_{\frac{\pi}{2}-0}^{\pi} \\
&= -\varphi'(\frac{\pi}{2}-0,\lambda)\varphi(\frac{\pi}{2}-0,\lambda_n)+\varphi(\frac{\pi}{2}-0,\lambda)\varphi'(\frac{\pi}{2}-0,\lambda_n)+\varphi'(0,\lambda)\varphi(0,\lambda_n) \\
&- \varphi(0,\lambda)\varphi'(0,\lambda_n)+\varphi'(\tfrac{\pi}{2}+0,\lambda)\varphi(\tfrac{\pi}{2}+0,\lambda_n)-\varphi(\frac{\pi}{2}+0,\lambda)\varphi'(\frac{\pi}{2}+0,\lambda_n) \\
&- \varphi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda_n)+\varphi(\pi,\lambda)\varphi'(\pi,\lambda_n) \\
&= -\varphi'(\frac{\pi}{2}-0,\lambda)\varphi(\frac{\pi}{2}-0,\lambda_n)+\varphi(\frac{\pi}{2}-0,\lambda)\varphi'(\frac{\pi}{2}-0,\lambda_n) \\
&+ \alpha^{-1}\varphi'(\frac{\pi}{2}-0,\lambda)\alpha\varphi(\frac{\pi}{2}-0,\lambda_n)-\alpha\varphi(\frac{\pi}{2}-0,\lambda)\alpha^{-1}\varphi'(\frac{\pi}{2}-0,\lambda_n) \\
&- \varphi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda_n)+\varphi(\pi,\lambda)\varphi'(\pi,\lambda_n)
\end{aligned}
$$

elde edilen eşitliğe $\varphi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda_n)$ ifadesi eklenip çıkartılırsa;

$$
= \left[\varphi'(\pi,\lambda_n)-\varphi'(\pi,\lambda)\right]\varphi(\pi,\lambda)-\left[\varphi(\pi,\lambda_n)-\varphi(\pi,\lambda)\right]\varphi'(\pi,\lambda)
$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $\lambda-\lambda_n$'e bölünürse;

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} \varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx \\
&= \frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)-\varphi'(\pi,\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\varphi(\pi,\lambda)-\frac{\varphi(\pi,\lambda_n)-\varphi(\pi,\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\varphi'(\pi,\lambda)
\end{aligned}
$$

bulunur. Son eşitlikte $\lambda\to\lambda_n$ koşulu altında limite geçilirse;

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \varphi^2(x,\lambda_n)dx+\int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} \varphi^2(x,\lambda_n)dx \\
&= \dot{\varphi}'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda)-\dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)$ ile fonksiyonun λ'ya göre türevi belirtilmektedir. Diğer taraftan $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu λ'ya göre tam fonksiyon ve $\{\lambda_n\}$'ler verilen problemin özdeğerleri olduğundan tam fonksiyonlar teorisinden bilindiği gibi aşağıdaki gösterim doğrudur.

$$\varphi^{'}(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda) \quad = \pi\left(\lambda_0-\lambda\right)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k^2}=\dot{\phi}\left(\lambda\right) \tag{3.2.7}$$

(3.2.7) eşitliğinin λ'ya göre türevi alınırsa;

$$\dot{\varphi}^{'}(\pi,\lambda)+H\dot{\varphi}(\pi,\lambda)= \quad \dot{\phi}\left(\lambda\right) \tag{3.2.8}$$

olur. Diğer taraftan

$$\varphi^{'}(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=0 \quad \text{veya} \quad \varphi^{'}(\pi,\lambda)=-H\varphi(\pi,\lambda)$$

olduğundan α_n'nin ifadesinde

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)\varphi^{'}(\pi,\lambda_n)-\dot{\varphi}^{'}(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_n) \\
&= -\dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)H\varphi(\pi,\lambda_n)-\dot{\varphi}^{'}(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_n) \\
&= -\left[\dot{\varphi}^{'}(\pi,\lambda_n)+H\dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)\right]\varphi(\pi,\lambda_n) \\
&= -\varphi(\pi,\lambda_n)\dot{\phi}\left(\lambda_n\right)
\end{aligned}$$

veya

$$\alpha_n \quad = \quad \varphi(\pi,\lambda_n)\dot{\phi}\left(\lambda_n\right) \tag{3.2.9}$$

elde edilir.

Eğer $L\in S$ ise yukarıda ispatı yapılan lemmaya göre

$$\alpha_n \quad =\left(\left(-1\right)^n\alpha^{+}+\alpha^{-}\right)\dot{\phi}\left(\lambda_n\right) \tag{3.2.10}$$

bulunur. Tersini kabul edelim. L operatörünün $\{\lambda_n\}$ spektrumu verilmiş ise o zaman (3.2.7) ve (3.2.10) formüllerinden α_n normalleştirilmiş sayıları ve $\{\lambda_n\}$ L'nin $\rho\left(\lambda\right)$ spektral fonksiyonunu belirler. Spektral fonksiyonu belli ise V. A. Marchenko' nun teklik teoremine göre L operatörü inşa edilebilir.

Gösterelim ki bu şekilde inşa edilen operatör $L \in S$ dir. Bunu gösterebilmek için yukarıda ispatı verilen lemmaya göre

$$\varphi(\pi, \lambda_n) \quad = (-1)^n \alpha^+ + \alpha^-$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (3.2.9) ve (3.2.10) eşitliklerinden

$$\alpha_n \quad = \varphi(\pi, \lambda_n)\dot{\phi}(\lambda_n) \quad \text{ve} \quad \alpha_n = ((-1)^n \alpha^+ + \alpha^-)\, \dot{\phi}(\lambda_n)$$

ise

$$\varphi(\pi, \lambda_n) \quad = (-1)^n \alpha^+ + \alpha^-$$

olduğu görülür.

Böylece belli asimtotiğe, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ spektrumuna ve $\varepsilon_n = (-1)^n \alpha^+ + \alpha^-$ sayılar dizisine göre S sınıfından olan Sturm-Liouville operatörü inşa edilebilir.

3.3. Regüler Sturm-Liouville Denklemi İçin V. A. Ambartsumyan Teoremi

λ spektral parametre $q(x) \in C[0,\pi]$ olmak üzere $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, ...$ sayıları

$$-y^{''} + q(x)y = \lambda y, 0 < x < \pi \tag{3.3.1}$$

$$y^{'}(0) = 0, y^{'}(\pi) = 0 \tag{3.3.2}$$

sınır değer probleminin özdeğerleri ise $q(x) \equiv 0$ dır.

İSPAT: $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ sınır değer problemin özdeğerleri ve $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları da λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

O zaman Sturm Teorisi'nden alırız ki; $\varphi_n(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında tam n tane $x_1^n, x_2^n, ..., x_n^n$ sıfırlara sahiptir.

Yani $\varphi_n(x_k^n) = 0, (k = \overline{1, n})$ dır.

$n = 0$ için λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $\varphi(x, \lambda_0) = \varphi_0(x)$ olsun. O halde Sturm Teorisi'nden $\varphi_0(x)$ 'in hiçbir sıfırı yoktur.

(3.3.1) eşitliğinde $\varphi_0(x)$ yazılırsa;

$$-\varphi_0^{''}(x) + q(x)\varphi_0(x) = \lambda_0\varphi_0(x)$$

$\lambda_0 = 0$ olduğu için ;

$$-\varphi_0^{''}(x) + q(x)\varphi_0(x) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$q(x) = \frac{\varphi_0^{''}(x)}{\varphi_0(x)} \ , x \in [0, \pi]$$

bulunur. Diğer taraftan $\varphi_0(x)$ in $[0, \pi]$ aralığında hiçbir sıfırı olmadığından $\varphi_0(x) \neq 0 \quad x \in [0, \pi]$ dır. Yani bu oran tanımlıdır.

$$q(x) = \frac{\varphi_0^{''}(x)}{\varphi_0(x)} = \left(\frac{\varphi_0^{'}(x)}{\varphi_0(x)}\right)^{'} + \left(\frac{\varphi_0^{'}(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \tag{3.3.3}$$

şeklinde yazalım.

(3.3.1),(3.3.2) sınır değer probleminin özdeğerleri;

$$\lambda_n = n^2 + a_0 + \psi(n)$$

davranışına sahiptir, burada $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} q(x)dx$ dır.

$n = 0$ için $\lambda_0 = a_0 = 0$ dır. Yani

$$a_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(x)dx = 0$$

elde edilir.

(3.3.3) eşitliğinde $q(x) \in C[0,\pi]$ olduğundan eşitliğin sol tarafındaki fonksiyonlar da süreklidirler. Dolayısıyla $[0,\pi]$ aralığında integrallenebilirdirler. (3.3.3) eşitliğinin her iki tarafını $[0,\pi]$ aralığında integralliyelim.

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_0^{\pi} q(x)dx = \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' dx + \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx \\
&= \left[\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx \\
&= \frac{\varphi_0'(\pi)}{\varphi_0(\pi)} - \frac{\varphi_0'(0)}{\varphi_0(0)} + \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx
\end{aligned}$$

Teorem: $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve bu aralıkta Riemann anlamına integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ve $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ ise $f \equiv 0$ dır.

Yukarıda ifadesi verilen teorem gereği;

$$\forall x \in [0,\pi] \quad \text{için} \quad \frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} \equiv 0$$

dır. Böylece (3.3.3) eşitliğinden $q(x) \equiv 0$ elde edilir.

3.4. Regüler Sturm-Liouville Denklemi İçin V. A. Ambartsumyan Teoreminin Genelleştirilmesi

Teorem: λ spektral parametre, $q(x) \in C[0,\pi]$ ve $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ olmak üzere $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, ...$ sayıları

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 < x < \pi \tag{3.4.1}$$

$$y'(0) = 0, y'(\pi) = 0 \tag{3.4.2}$$

$$\begin{aligned} y(x_0+0) &= \alpha y(x_0-0), \quad x_0 \in (0,\pi) \\ y'(x_0+0) &= \alpha y'(x_0-0) \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

sınır değer probleminin özdeğerleri ise $q(x) \equiv 0$ dır.

İSPAT: İlk önce problemimizin genel çözümünü bulalım. Bunun için; (3.4.1) eşitliğinin $\varphi(0,\lambda) = 1$, $\varphi'(0,\lambda) = 0$ (3.4.2) başlangıç ve (3.4.3) süreksizlik koşullarını sağlayan $\varphi(x,\lambda)$ çözümünü önerelim.

İlk olarak kabul edelim ki; $q(x) = 0$, $\lambda = k^2$ olsun. O halde ;

$$-y'' = k^2 y$$

2.mertebeden, lineer, sabit katsayılı, homojen diferansiyel denklemdir. Bu denk-lemin genel çözümü

$y(x,k) := \varphi_0(x,k) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$, $x < x_0$ şeklindedir. (3.3.2) başlangıç koşullarından $c_1 = 1$,$c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\varphi_0(x,k) = \cos kx, \; x < x_0$$

elde edilir. $x > x_0$ iken; $\varphi_0(x,k) = A\cos kx + B \sin kx$ şeklinde çözüm arayalım. (3.3.4) süreksizlik koşullarından; $A = \alpha$, $B = 0$ elde edilir.

O halde

$$\varphi(x,k) = \begin{cases} \cos kx, & x < x_0 \\ \alpha \cos kx, & x > x_0 \end{cases}$$

şeklinde olur. Özdeğer denklemi ise

$\Delta_0(k) = \varphi_0'(\pi, k) = 0$ dır.

$\Delta_0(k) = -\alpha k \sin k\pi = 0$ ise

$k_0 = 0$ bir özdeğer ve $k\pi = n\pi$ ise $k_n^0\pi = n\pi$ dır. Buradan $k_n^0 = n$ ve böylece $\lambda_n^0 = n^2$, $n = 0, 1, 2, ...$ elde edilir.

Yani $q = 0$ olduğunda $\lambda_n^0 = n^2$, $n = 0, 1, 2, ...$dir.

Şimdi $q(x) \neq 0$ olduğunda verilen denklemin çözümünü ve özdeğerlerini bulalım. $q(x) = 0$ olduğunda $y(x,k) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ bulunmuştu. $q(x) \neq 0$ durumu için sabitlerin değişimi yöntemini uygulayalım.

$$y(x,k) = c_1(x) \cos kx + c_2(x) \sin kx$$
$$y'(x,k) = -kc_1(x) \sin kx + kc_2(x) \cos kx + c_1'(x) \cos kx + c_2'(x) \sin kx$$
$$y''(x,k) = -k^2 c_1(x) \cos kx - k^2 c_2(x) \sin kx - kc_1'(x) \sin kx + kc_2'(x) \cos kx$$

eşitlikleri (3.4.1) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$-c_1'(x) \sin kx + c_2'(x) \cos kx = \frac{q(x)y}{k} \tag{3.4.4}$$

$$c_1'(x) \cos kx + c_2'(x) \sin kx = 0 \tag{3.4.5}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.4.4) eşitliği $\cos kx$, (3.4.5) eşitliği $\sin kx$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$c_2'(x) = \frac{q(x)y}{k} \cos kx \quad \text{ise} \quad c_2(x) = \frac{1}{k} \int_0^x cosktq(t)\varphi_p(t,k)dt + \widetilde{c}_2$$

(3.4.4) eşitliği $-\sin kx$, (3.4.5) eşitliği $\cos kx$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$c_1'(x) = -\frac{q(x)\varphi}{k} \sin kx \quad \text{ise} \quad c_1(x) = -\frac{1}{k} \int_0^x \sin ktq(t)\varphi_p(t,k)dt + \widetilde{c}_1$$

elde edilir. Bulunan $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} y(x,k) &= -\frac{\cos kx}{k} \int_0^x \sin ktq(t)y(t,k)dt + \frac{\sin kx}{k} \int_0^x cosktq(t)y(t,k)dt \\ &\quad + \widetilde{c}_1 \cos kx + \widetilde{c}_2 \sin kx \\ &= \widetilde{c}_1 \cos kx + \widetilde{c}_2 \sin kx + \frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x-t)\, q(t)y(t,k)dt \end{aligned}$$

bulunur. $\widetilde{c}_1$ ve $\widetilde{c}_2$ katsayılarını bulmak için (3.3.2) başlangıç koşulları uygulanırsa; $c_1 = 1, c_2 = 0$ bulunur. Buradan; $x < x_0$ için

$$y\left(x,k\right) = \cos kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k\left(x-t\right) q(t)y(t,k)dt$$

elde edilir.

Şimdi $x > x_0$ iken çözümü bulalım. Bunun için;

$$y_1(x,k) = \cos kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)q(t)y_1(t,k)dt, x < x_0 \text{ ve}$$

$$y_2(x,k) = A\cos kx + B\sin kx + \frac{1}{k}\int_{x_0}^x \sin k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt, x > x_0$$

olsun. (3.3.4) süreksizlik koşulları uygulanıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}
A &= \alpha\cos^2 kx_0 + \alpha\sin^2 kx_0 \int_{x_0}^x \sin k(x_0-t)\cos kx_0 \\
&\quad - \cos k(x_0-t)\sin kxq(t)y_1(t,k)dt \\
&= \alpha - \frac{\alpha}{k}\int_{x_0}^x \sin ktq(t)y_1(t,k)dt \\
B &= \frac{\alpha}{k}\int_{x_0}^x \left(\sin k(x_0-t) + \cos k(x_0-t)\cos kx_0\right)q(t)y_1(t,k)dt \\
&= \frac{\alpha}{k}\int_{x_0}^x \cos ktq(t)y_1(t,k)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan A ve B katsayıları yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
y_2(x,k) &= \alpha\cos kx + \frac{\alpha}{k}\cos kx \int_0^{x_0-0} \sin ktq(t)y_1(t,k)dt \\
&\quad + \frac{\alpha}{k}\sin kx \int_0^{x_0-0} \cos ktq(t)y_1(t,k)dt + \frac{1}{k}\int_{x_0+0}^x \sin k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} y_2(x,k) &= \alpha\cos kx + \frac{\alpha}{k}\int\limits_0^{x_0-0} \sin k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\ &+\frac{1}{k}\int\limits_{x_0+0}^{x} \sin k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

şeklinde bulunur. Özdeğer denklemi $\Delta_0(k) = y_2'(\pi,k) = 0$ dır.

$$\begin{aligned} y_2'(x,k) &= -k\alpha\sin kx + \alpha\int\limits_0^{x_0-0} \cos k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\ &+\int\limits_{x_0+0}^{x} \cos k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(k) &:= \max_{0\le x\le x_0}\left(|y_1(x,k)|\,e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\right) \\ \widetilde{\mu}(k) &:= \max_{x_0\le x\le \pi}\left(|y_2(x,k)|\,e^{-|\mathrm{Im}\,k|x}\right) \end{aligned}$$

tanımlayalım.

$$\begin{aligned} |\sin kx| &\le e^{|\mathrm{Im}\,k|x} \\ |\cos kx| &\le e^{|\mathrm{Im}\,k|x} \end{aligned}$$

olduğundan (3.4.1) denkleminden $|k|\ge 1$ ve $x\in[0,x_0)\cup(x_0,\pi]$ için;

$$\begin{aligned} |y_1(x,k)|\,e^{-|\imath mk|x} &= \left|\cos kx + \frac{1}{k}\int\limits_0^x \sin k(x-t)q(t)y_1(t,k)dt\right| e^{-|\imath mk|x} \\ &\le 1+\frac{1}{|k|}\int\limits_0^{x_0} \max|y_1(t,k)|\,|q(t)|\,dt \\ &\le 1+\frac{1}{|k|}\mu(k) \end{aligned}$$

$$\mu(k) \le 1+\frac{1}{|k|}\mu(k) \quad \text{ise} \quad \mu(k) = O(1)$$

bulunur. Yani $y_1(x,k) = O(e^{|\mathrm{Im}\,k|x})$

dir. Bu eşitlik

$$y_1(x,k) = \cos kx + \frac{1}{k}\int\limits_0^x \sin k(x-t)q(t)y_1(t,k)dt$$

ifadesinde yerine yazılırsa;

$$y_1(x,k) = \cos kx + \frac{1}{k}O(e^{|\mathrm{Im}\,k|x})$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
|y_2(x,k)|\, e^{-|\imath mk|x} &= \left|\alpha\cos kx + \frac{\alpha}{k}\int_0^{x_0-0} \sin k\,(x-t)\, q(t) y_1(t,k)dt\right. \\
&\left. + \frac{1}{k}\int_{x_0+0}^{x} \sin k(x'-t) q(t) y_2(t,k)dt\right| e^{-|\operatorname{Im} k|x} \\
&\leq \alpha + \frac{\alpha}{|k|}\int_0^{x_0-0} \max|y_1(t,k)|\,|q(t)|\,dt \\
&+ \frac{1}{k}\int_{x_0+0}^{x} \max|y_2(t,k)|\,|q(t)|\,dt \\
&\leq \alpha + \frac{\alpha}{|k|}\mu(k)\int_0^{x_0-0} |q(t)|\,dt + \frac{1}{|k|}\int_{x_0+0}^{x} \widetilde{\mu}(k)\,|q(t)|\,dt
\end{aligned}$$

ise;

$$\widetilde{\mu}(k) \quad \leq \quad \alpha + \frac{\alpha}{|k|}\mu(k) + \frac{1}{|k|}\widetilde{\mu}(k)$$

elde edilir. Yeterince büyük $|k|$ için $\widetilde{\mu}(k) = O(1)$ yani

$$y_2(x,k) \quad = O(e^{|\operatorname{Im} k|x})$$

dir. Bu ifade (3.4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$y_2(x,k) = \alpha\cos kx + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right)$$

bulunur. $\Delta_0(k)$ denkleminin özdeğerlerini bulmak için aşağıdaki teoremden faydalanalım.

Teorem [14]: (3.3.1)-(3.3.4) probleminin özdeğerleri için aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir.

$$k_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \quad \{k_n\} \in L_2$$

dir. Burada $w = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt$ dir.

Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
y_2(x,k) &= \alpha\cos kx + \frac{\alpha}{k}\int\limits_0^{x_0-0} \sin k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\
&+\frac{1}{k}\int\limits_{x_0+0}^{x} \sin k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt \\
y_2'\,(x,k) &= -k\alpha\sin kx + \alpha\int\limits_0^{x_0-0} \cos k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\
&+\int\limits_{x_0+0}^{x} \cos k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. $y_2(x,k) \;\; = \alpha\cos kx + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right)$ ve $y_1(x,k) \;\; = \cos kx + \frac{1}{k}O(e^{|\operatorname{Im} k|x})$ eşitlikleri $y_2'(x,k)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
y_2'\,(x,k) &= -k\alpha\sin kx + \alpha\int\limits_0^{x_0-0} \cos k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\
&+\int\limits_{x_0+0}^{x} \cos k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right) \\
&= -k\alpha\sin kx + \alpha\int\limits_0^{x} \cos k(x-t)\cos kt q(t)dt + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right) \\
&= -k\alpha\sin kx + \frac{\alpha}{2}\cos kx\int\limits_0^{x} q(t)dt + \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^{x}\cos(x-2t)q(t)dt \\
&+O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right) \\
&= \sin kx - \frac{w}{k}\cos kx + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. Burada $w = \int\limits_0^{x} q(t)dt$ dir. Bulunan $y_2'\,(x,k)$ ifadesi

$\Delta\,(k) = y'\,(\pi,k) = 0$ da yerine yazılırsa;

$\Delta\,(k) = y'\,(\pi,k) \;\; = \sin k\pi - \frac{w}{k}\cos k\pi + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right)$

elde edilir. Verilen problemin özdeğerleri ile $\Delta\,(k)$'nın sıfırları çakışmaktadır.

$\Gamma_n = \;\; \left\{k : |k| = \left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}$ bölgesini alalım.

$f(k) = \sin k\pi,\; g(k) = -\frac{w}{k}\cos k\pi + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|x}\right)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\Delta(k) &= f(k)+g(k), \quad \forall k \in \Gamma_n \\
|\sin k\pi| &= \left|\frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{2}\right| \geq \frac{\left|e^{ik\pi}\right|-\left|e^{-ik\pi}\right|}{2} \\
&= \frac{e^{\operatorname{Im} k\pi}-e^{\operatorname{Im} k\pi}}{2} \geq \frac{1}{2}e^{|\operatorname{Im} k|\pi}
\end{aligned}$$

$$|f(k)| = |\sin k\pi| \geq c_1 e^{|\operatorname{Im} k|\pi} \tag{3.4.7}$$

dır. Ayrıca $|\cos k\pi| \leq e^{|\operatorname{Im} k|\pi}$, $|\sin k\pi| \leq e^{|\operatorname{Im} k|\pi}$ olduğundan;

$$|g(k)| \leq \frac{|w|}{|k|}e^{|\operatorname{Im} k|\pi} \tag{3.4.8}$$

(3.4.7) ve (3.4.8)' den k' nın yeterince büyük değerlerinde

$$|f(k)| \geq ce^{|\operatorname{Im} k|\pi} \geq g(k)$$

sağlanır. Yani Rouche Teoremi'nin koşulları sağlanmış oldu. O halde $f(k)$ ve $\Delta(k)$'nın sıfırları aynıdır.

$f(k)=0$ ise $\sin k\pi = 0$ dır. Buradan da $k_n = n+\varepsilon_n, \varepsilon_n = o(1), n \to \infty$ elde edilir. ε_n in ifadesini $\Delta(k_n)=0$ eşitliğinden bulalım.

$$\Delta(k_n) = f(k)+g(k) = \sin k\pi - \frac{w}{k}\cos k\pi + O\left(\frac{1}{k_n}\right) = 0$$

$$\sin k_n\pi - \frac{w}{k_n}\cos k_n\pi + O\left(\frac{1}{k_n}\right) = 0$$

$$\sin(n+\varepsilon_n)\pi - \frac{w}{(n+\varepsilon_n)}\cos(n+\varepsilon_n)\pi + \frac{\delta_n}{n} = 0,$$

$$(n+\varepsilon_n)\sin(n+\varepsilon_n)\pi - w\cos(n+\varepsilon_n)\pi + \frac{\delta_n}{n} = 0$$

$$(n+\varepsilon_n)(\sin n\pi\cos\varepsilon_n\pi + \cos n\pi\sin\varepsilon_n\pi) - w(\cos n\pi\cos\varepsilon_n\pi - \sin n\pi\sin\varepsilon_n\pi) + \frac{\delta_n}{n} = 0$$

$$(-1)^n(n+\varepsilon_n)\sin n\pi - w(-1)^n\cos\varepsilon_n\pi + \frac{\delta_n}{n} = 0$$

$$(n+\varepsilon_n)\left(\varepsilon_n\pi - \frac{(\varepsilon_n\pi)^3}{3!} + ...\right) - w\left(1 - \frac{(\varepsilon_n\pi)^2}{2!} + ...\right) + \frac{\delta_n}{n} = 0$$

$$n(\varepsilon_n\pi + ...) + \varepsilon_n(\varepsilon_n\pi + ...) - w + w\left(1 - \frac{(\varepsilon_n\pi)^2}{2!} + ...\right) + \frac{\delta_n}{n} = 0$$

$$(\varepsilon_n + ...) + \frac{\varepsilon_n}{n\pi}\left(\frac{\varepsilon_n}{n} + ...\right) - \frac{w}{n\pi} + \frac{w}{n\pi}\left(\frac{(\varepsilon_n\pi)^2}{2!} + ...\right) + \frac{\delta_n}{n} = 0$$

$$\varepsilon_n - \frac{w}{n\pi} + \frac{\delta_n}{n} = 0$$

$$\varepsilon_n = \frac{w}{n\pi} + \frac{\delta_n}{n}, \delta_n \in \ell_2$$

elde edilir. Buradan $k_n = n + \varepsilon_n$ ifadesinde ε_n yerine yazılırsa;

$$k_n = n + \frac{w}{n\pi} + \frac{\delta_n}{n}, \delta_n \in \ell_2$$

$$\lambda_n = k_n^2 = n^2 + \frac{w}{\pi} + \delta_n, \delta_n \in \ell_2$$

bulunur.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ sınır değer probleminin özdeğerleri ve $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları da λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

O halde Sturm Teorisi'nden alırız ki; $\varphi_n(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında tam n tane $x_1^n, x_2^n, ..., x_n^n$ sıfırlara sahiptir.

Yani $\varphi_n(x_k^n) = 0, (k = \overline{1, n})$ dır.

$n = 0$ için λ_0 özdeğer ve $\varphi(x, \lambda_0) = \varphi_0(x)$, λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde Sturm Teorisi'nden $\varphi_0(x)$ 'in hiçbir sıfırı yoktur.

(3.4.1) eşitliğinde $\varphi_0(x)$ yazılırsa;

$$-\varphi_0''(x) + q(x)\varphi_0(x) = \lambda_0\varphi_0(x)$$

$\lambda_0 = 0$ olduğu için ;

$$-\varphi_0''(x) + q(x)\varphi_0(x) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$q(x) = \frac{\varphi_0''(x)}{\varphi_0(x)} \quad , x \in [0, x_0) \cup (x_0, \pi]$$

bulunur. Diğer taraftan $\varphi_0(x)$ in hiçbir sıfırı olmadığından $\varphi_0(x) \neq 0$ dır. Yani bu oran tanımlıdır.

$$q(x) = \frac{\varphi_0''(x)}{\varphi_0(x)} = \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' + \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \tag{3.4.9}$$

şeklinde yazalım.

(3.4.1)-(3.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri;

$$\lambda_n = n^2 + a_0 + \psi(n)$$

davranışına sahiptir. Burada $a_0 = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(x)dx$ dır. Böylece

$$q(x) = \frac{\varphi_0''(x)}{\varphi_0(x)} = \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' + \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \qquad x \in [0, x_0) \cup (x_0, \pi]$$

bulunur.

$$\int\limits_0^{x_0-0} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' dx + \int\limits_{x_0+0}^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' dx = \frac{\varphi_0'(x_0-0)}{\varphi_0(x_0-0)} - \frac{\varphi_0'(x_0-0)}{\varphi_0(x_0-0)}$$

$$-\frac{\varphi_0'(0)}{\varphi_0(0)} + \frac{\varphi_0'(\pi)}{\varphi_0(\pi)} - \frac{\varphi_0'(x_0+0)}{\varphi_0(x_0+0)} = 0$$

olduğundan;

$$0 = \int\limits_0^{x_0-0} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx + \int\limits_{x_0+0}^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx$$

elde edilir. Analizden bilinen teorem gereği;

$$\left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \equiv 0$$

ve $\forall x \in (x_0+0, \pi]$ için $\left(\dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \geq 0$ ve $\int\limits_{x_0+0}^{\pi} \left(\dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx = 0$ dır. Yani

$$\forall x \in [x_0+0, \pi) \text{ için } \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \equiv 0$$

dır. $\forall x \in [0, x_0-0) \cup (x_0+0, \pi]$ için $\dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} \equiv 0$ dolayısıyla

$\forall x \in [0, x_0) \cup (x_0, \pi]$ için

$$q(x) \equiv 0$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1]. V.A. Ambartsumyan, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 (1929), 690-695.

[2]. G.Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 (1945), 1-96.

[3]. N. Levinson, 1949, The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., pp. 25-30.

[4]. N.,Levinson, 1949, Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74, 17-20.

[5]. V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 (1950), 457-560.

[6]. M.G. Krein, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 (1951), 21-24.

[7] A.N. Tikhonov, Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 1949, 797-800.

[8]. I.M. Gelfand and B. M. Levitan, On the Determination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 15 (1951), 309-360.

[9]. M.G. Gasimov and B. M. Levitan, About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3, (1964).

[10]. E. Abdukadyrov, 1967, Computation of the Regularized Trace for a Dirac System, Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[11]. A. B. Khasanov, 1994, On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum, Theory and Math. Phys. v. 99, No:1, 20-26.

[12]. M. G. Gasymov, 1967, The Inverse Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[13]. J. Pöschel and E. Trubowitz, 1987 Inverse Spectral Theory(Pure Appl. Math. Vol 130)(Orlando, FL:Academic).

[14]. R. Kh. Amirov and V. A. Yurko, On Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval. Ukr. Math. Jour., 2001, v.53, No11, p. 1443-1458.

[15]. R. Kh Amirov, Direct and Inverse Problems for Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval Transactions of NAS Azerbaijan.

[16]. R. Kh Amirov, On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Conditions Inside an Interval J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 163-176.

[17]. V. F. Zhdanovich, Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135, No.8, 1046-1049 (1960).

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Tokat'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Tokat'ta tamamladı. 2008 yılında, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2009 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.