

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKSİZLİK KOŞULLARINA SAHİP COULOMB POTANSİYELLİ
STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS PROBLEMLER

MERVE GÜRAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. YALÇIN GÜLDÜ

SİVAS

2011

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmış ve jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye : Prof. Dr. Hüseyin SARI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2011

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Mustafa DEĞİRMENCİ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 09 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

SÜREKSİZLİK KOŞULLARINA SAHİP COULOMB POTANSİYELLİ
STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS PROBLEMLER

MERVE GÜRAY
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2011

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜREKSİZLİK KOŞULLARINA SAHİP COULOMB POTANSİYELLİ STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS PROBLEMLER

Merve GÜRDAY

Cumhuriyet Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, sonlu aralıkta süreksizlik koşullarına sahip Coulomb potansiyelli Sturm-Liouville operatörünü türeten diferansiyel denklemin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için integral gösterimi yazılmış, operatörün spektral karakteristiklerinin özellikleri, Weyl çözümü, Weyl fonksiyonu verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sonlu aralıkta süreksizlik koşullarına sahip Coulomb potansiyelli Sturm-Liouville diferansiyel operatörünün ters problemi için spektral metod kullanılarak esas denklem elde edilmiş ve ters problemin çözümü için algoritma verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Operatör, Spektrum, Özdeğer, Özfonksiyon, Spektral Metod, Ters Problem, Weyl Fonksiyon, Weyl Çözümü.

SUMMARY

MSc. Thesis

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR WHICH HAS DISCONTINUITY CONDITIONS AND COULOMB POTENTIAL

Merve GÜRAY

Cumhuriyet University

Institute of Natural Science

Department of Mathematics

Advisor: Assistant Professor Yalçın GÜLDÜ

This thesis consists of three parts.

In the first part, fundamental definitions and theorems which are used in this thesis have been given.

In the second part, integral representation has been written for solution which satisfies certain initial conditions of differential equation generated by Sturm-Liouville operator with Coulomb potential in finite interval and properties of spectral characteristics, Weyl solution, Weyl function have been given.

In the third part, main equation has been obtained by using spectral method for inverse problem of Sturm-Liouville differential operator which has discontinuity conditions and Coulomb potential in finite interval. Moreover, an algorithm has been given for solution of inverse problem.

Keywords: Operator, Spectrum, Eigenvalue, Eigenfunction, Weyl Function, Weyl Solution, Spectral Method, Inverse Problem

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tm safhalarında yardımını esirgemeyip, fikir ve tecrbeleri ile bana ok büyük destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Yrd. Do. Dr. Yalçın GLD' ye, değerli Bltm Başkanımız Prof. Dr. Rauf AMİROV' a ve katkılarından dolayı Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü personeline teşekkür ederim.

Merve GÜRAY

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
GİRİŞ.....	1
1.BÖLÜM Temel Tanım Ve Teoremler	12
2.BÖLÜM Çözümün İntegral Gösterimi Ve Özellikleri.....	16
2.1 Karakteristik Fonksiyon ve Özellikleri	24
2.2 Özdeğer ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri	25
2.3 Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonunun Özellikleri.....	30
3.BÖLÜM Spektral Dönüşüm Metodu ve Ters Problemler	42
3.1 Ters Problemin Esas Denklemi	43
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	68

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Sivas' ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Sivas' ta tamamladı. 2008 yılında, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2008 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Şu an aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaya devam etmekte.

GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi; matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir(telin titreşimi vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H de lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX. ve XX. yüzyıllarda birçok matematikçiler sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda öz değerler, öz fonksiyonlar, spektral fonksiyon, normalleştirici sayılar, vs. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

İlk olarak II. mertebeden diferansiyel operatörler için spektral teorisinin tarihsel gelişimini verelim.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır.

Tanım 0.1. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları(bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler için toplanabilir teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin öz değerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin öz değerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır.

Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Riesz, J. Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için öz değerlerin dağılımı formülü E. C. Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için öz değerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. B. M. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle öz değerlerin, öz fonksiyonların asimptotığına ve öz fonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Tanım 0.2: $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ dizilerine L operatörünün spektral karakteristikleri denir. L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine düz problem, spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde L diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise ters problem denir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı

bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 0.3: $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 < x < \pi), \quad (0.1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \quad (0.2)$$

probleminin öz değerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) \equiv 0$ dir.

V.A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G.Borg' a aittir[2].

Teorem 0.4: $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ ler (0.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (0.3)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (0.4)$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ ler ise (0.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \quad (0.5)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (0.6)$$

sınır koşullarıyla verilen problemin öz değerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır.)

G. Borg' un bu çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatörü bu dizilerin yardımıyla belirtmektedir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilir. G. Borg, aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için

bir tek $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlama durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson [3], [4] ispatlamıştır. Ayrıca, N. Levinson negatif öz değerlerin mevcut olmadığı durumda saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan çevirme operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions[5], [6] ve B. M. Levitan [7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için çevirme operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] kendi çalışmalarında incelemiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko [9] tarafından kaydedilmiştir. 1950 yılında V.A. Marchenko[9] ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad (0.7)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu operatörün öz fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \quad (0.8)$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko, G. Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla

vermiştir. Ayrıca bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko' nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein; [10], [11] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tikhonov [12] V. A. Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlamıştır. A.N. Tikhonov' un çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.5: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda \rho^2(x)U = 0, \quad x > 0, \quad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x, \lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır. $R(\lambda) = \frac{U'(0, \lambda)}{U(0, \lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B. M. Levitan [13], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları vermişlerdir. Ayrıca bu çalışmada, Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ ($\alpha_n > 0$) dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a \|\frac{m}{2}\|}{n^2 \|\frac{m}{2}\| + 1} + \frac{\gamma_n}{n^2 \|\frac{m}{2}\| + 1}, \\ \alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b \|\frac{m}{2}\|}{n^2 \|\frac{m}{2}\| + 1} + \frac{\tau_n}{n^2 \|\frac{m+1}{2}\|} \end{aligned}$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi} \left[h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\frac{\tau_n}{n} \right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n} \right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov' un [14] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \quad (0.9)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada \prod' sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri sıralı, yani

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots$$

2) λ_n ve μ_n 'ler

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ \sqrt{\mu_n} &= n + \frac{a'_0}{n} + \frac{a'_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a'_0$

Şimdi ise, singüler Sturm-Liouville operatörleriyle ilgili bazı sonuçlardan kısaca bahsedilecektir.

Gasimov' un (1965) çalışmasında,

$$-y'' + \left\{ \frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) \right\} y = \lambda y \quad (0.10)$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad (0.11)$$

$$y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0 \quad (0.12)$$

$$y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0 \quad (0.12')$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatörü incelenmiş ve bu diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü verilmiştir.

Teorem 0.6: l pozitif tamsayı, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ ve μ_0, μ_1, \dots dizilerinin sırasıyla (0.10), (0.11), (0.12) ve (0.10), (0.11), (0.12') tipindeki diferansiyel operatörlerin öz değerleri olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

- 1) $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,
- 2) $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) + \alpha + a_n$,
 $\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) + b + b_n$,

Burada $a \neq b$ ve $\{a_n\}, \{b_n\}$ dizileri için $\sum |a_n|^2, \sum |b_n|^2$ serileri yakınsaktır.

- 3) $\sum |A_n|^2$ serisi yakınsak olmak üzere $\mu_n - \lambda_n = b - a + \frac{A_n}{n}$ koşullarının sağlanması gerekli ve yeterli şarttır.

Gasimov ve Amirov' un çalışmasında,

$$-y'' + \left\{ \frac{A}{x} + q(x) \right\} y = \lambda y$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad (0.13)$$

$$y'(\pi) - h_1 y(\pi) = 0 \quad (0.14)$$

$$y'(\pi) - h_2 y(\pi) = 0 \quad (0.14')$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü ile ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.7: $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1) $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

$$2) \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi} \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) + 2A_0 + a_n$$

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi} \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) + 2A'_0 + a'_n$$

Burada $A_0 \neq A'_0$ ve $\{a_n\}, \{a'_n\}$ dizileri için $\sum |a_n|^2, \sum |a'_n|^2$ serileri yakınsaktır.

O halde bir $q(x)$ sürekli fonksiyonu ve h_1, h_2 gerçel sayıları vardır ki $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, (0.13), (0.14), (0.15) operatörünün $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ ise (0.13), (0.14), (0.15') operatörünün spektrumlarıdır ve

$$h_1 - h_2 = \pi (A'_0 - A_0)$$

eşitliği sağlar.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0, 1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm- Liouville operatör sınıfı için ters spektral problem Hryniv ve Mkytyuk (2003) çalışmasında incelenmiştir.

Bu çalışmada $q \in W_2^{-1}(0, 1)$ reel değerli dağılım (distribution) fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0, 1)$ Hilbert uzayında

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm- Liouville operatörü tanımlanmış ve Savchuk ve Shkalikov' un (1999) çalışmasına göre, regülarizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşullarından bahsedilmiştir.

Dağılım anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \{u \in W_1^1(0, 1) \mid u' - \sigma u \in W_1^1(0, 1), l_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0\}$$

kümesinde tanımlı

$$Tu = T_\sigma u = l_0(u) := -(u' - \sigma u)' - \sigma u'$$

operatörü yazılmıştır.

Burada dağılım anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_0(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü regüler potansiyeller için ilkel σ nın özel seçimine bağlı değildir ve (0.16) ya karşılık gelen standart Dirichlet Sturm- Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ , ilkel $\sigma \in H$ ya düzgün resolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece T_σ herhangi bir $q = \sigma' \in W_2^{-1}(0, 1)$ için (0.16) ya ait standart Sturm- Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac δ -*tipli* ve $\frac{1}{x}$ - Coloumb tipli potansiyelleri içerir. Matematiksel fizik ve Quantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır.(Albeverio, Gesztesy ve Ark, 1988;Albeverio ve Kurasov, 2000)

Savchuk ve Shkalikov' un [16] çalışmasından da bilindiği gibi, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarıda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit (λ_k^2) , $k \in \mathbb{N}$ spektrumlu self- adjoint operatördür ve $\lambda_1, \lambda_2 = \pi k + \mu_k$, $(\mu_k \in l_2)$ şeklinde asimptotiğe sahiptir. (Savchuk ve Shkalikov, 1999, Savchuk, [19], ve Hryniv, 2003). Regüler q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu_k = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada ” Reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarıda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi (λ_k^2) dizileri, $W_2^{-1}(0, 1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm- Liouville operatörlerinin spektrumudur? ” sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru bizi, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece (λ_k^2) spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı Dirichlet spektrumlu Sturm- Liouville operatörlerinin Dirichlet spektrumunun ürettiği birçok farklı q potansiyelleri (isospectral) vardır. Pöschel ve Trubowitz (1987), verilen (λ_k^2) spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O(\frac{1}{k})$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerin kümesinin, analitik olarak $\omega_n = n$ ağırlıkları ile $l_2(\omega_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı

ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0, 1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Çevirme operatörlerine dayanan regüler Sturm- Liouville operatörünün spektral verisinden, q potansiyelini yeniden elde etmenin algoritması Marchenko [9] ve Gelfand [23] tarafından geliştirilen Gelfand- Levitan- Marchenko denklemi olarak adlandırılır. İki spektrum ile q potansiyelinin kurulumu için bir alternatif metod Krein [24] tarafından geliştirildi. Daha sonra H Hilbert uzayından potansiyellere sahip Sturm- Liouville operatörler sınıfı için Trubowitz ve Pöschel [21] tarafından farklı bir yaklaşım önerildi. Yazarlar spektral veriyi ve H deki potansiyeller arasındaki dönüşümü ayrıntılı olarak çalışmışlar ve ters spektral problemin çözülebilirliğini ispatlamışlardır. Özellikle spektral veriyi tam olarak karakterize etmişlerdir.

Hryniv ve Mkytyuk'un [15] çalışmasında, Gelfand, Levitan ve Marchenko'ya göre, klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve W_2^{-1} den singüler potansiyellere sahip Sturm- Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elemanından q nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır.

Diğer singülerite tiplerine (örneğin Sturm- Liouville operatörler sınıfı için $\frac{1}{x^\gamma}$ ya benzer potansiyeller vs.), Hald [25], Andersson [26], Carlson [27], Hald ve McLaughlin [28], Yurko [29] ve Freiling [30], Amirov ve Yurko [31] bakmışlardır.

Aralığın iç noktasında singüleriteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, Amirov ve Yurko [31] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $x = 0$ noktasında singüleriteye sahip self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durum incelenmiştir ve verilen operatörün spektral özellikleri ile bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde Amirov(2002) çalışmasında self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörünün sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durumu incelemiştir. Burada verilen diferansiyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları, operatörün spektral özellikleri, spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca öz değerlerden oluştuğu durumda, öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyon ve koşullu fonksiyonlara göre operatörün ayrışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Amirov'un [33] çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için çevirme operatörü, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerinin bazı özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri öğrenilmiştir.

Amirov'un [33] çalışmasında sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfının ters problemi için teklik teoremleri verilmiştir.

Nilifer Topsakal'ın [35] doktora tezinde sonlu aralıkta Coulomb potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörünü üreten diferansiyel denklemin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için integral gösterilimi elde edilmiş, operatörün spektral karakteristiklerinin özellikleri, davranışları incelenmiş, Weyl fonksiyonu, Weyl çözümleri ve ters problemin konumu tanımlanmış, ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

I.BÖLÜM

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1.1: $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L_2[a, b]$ uzayı,

$$L_2[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$).

Tanım 1.1.2: ℓ_2 uzayı,

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_i \in K, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.3: $Ly = -y'' + q(x)y = \lambda y$, $0 < x < \pi$ diferansiyel denklemi ve $U(y) := y'(0) - hy(0)$, $V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi)$ sınır koşulları tarafından üretilen lineer operatör L olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ çözümü varsa λ 'ya L operatörünün öz değeri, y çözümüne de λ 'ya karşılık gelen öz fonksiyon denir.

Tanım 1.1.4: $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ dizisi L operatörünün öz değerleri ve $\{y(x, \lambda_n)\}$ ler bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar olsun.

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x, \lambda_n) dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 1.1.5: $(L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne L operatörünün Resolvent operatörü denir.

Tanım 1.1.6: $(L - \lambda I)^{-1}$ in tüm $L_2 [0, \pi]$ de mevcut ve sınırlı olduğu $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Tüm regüler noktalarının kümesine resolvent küme denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.7:

I) $(L - \lambda I)^{-1}$ in mevcut olmadığı λ noktalarının kümesine L operatörünün spektrumu veya öz değerler kümesi denir ve

$$\sigma(L) = \{\lambda : Ly = \lambda y, y \in D(L)\}$$

ile gösterilir. Buradan

$$\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L)$$

dır.

II) $(L - \lambda I)^{-1}$ mevcut olup, yoğun kümede tanımlı ve sınırlı olmayacak şekilde λ 'ların kümesine sürekli spektrum denir.

III) $(L - \lambda I)^{-1}$ mevcut fakat, yoğun olmayan kümede tanımlı λ 'ların kümesine rezidü spektrum denir.

Tanım(Adjoint Operatör) 1.1.8: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayları ve $L : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatörü $\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne, L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self-adjoint operatör denir.

Tanım(Çevirme Operatörü) 1.1.9: E lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \rightarrow E$, $B : E \rightarrow E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için çevirme operatörü denir.

Tanım 1.1.10: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının $\exists \delta$ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 1.1.11: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir.

Tanım 1.1.12: Analitik $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem(Rouché Teoremi) 1.1.13: f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri ve kutup yerleri olan fonksiyonlar olsunlar. Eğer γ , f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen, B içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de γ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ olsun. Bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır.

Teorem(Cauchy İntegral Teoremi) 1.1.14: $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon, γ ise G de bulunan keyfi düzleştirilebilir kapalı eğri olacak biçimde $f(z)$ 'nin γ eğrisi üzerinden integrali sıfıra eşittir:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Teorem(Cauchy İntegral Formülü) 1.1.15: B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer a , γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

dir.

Teorem(Rezidü Teoremi) 1.1.16: D bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayıda ayrık tekil z_1, z_2, \dots, z_n noktaları hariç) ve D nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyono-

nu için

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f(z)(z-z_0)^k]$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z-z_0)]$$

dir.

II. BÖLÜM

ÇÖZÜMÜN İNTEGRAL GÖSTERİMİ VE ÖZELLİKLERİ

$$l(y) = -y'' + \frac{C}{x}y + q(x)y$$

diferansiyel ifadesini ele alımsın. Bu ifade singüler diferansiyel ifadedir ve

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{l} y(x) : y(x), y'(x) \in AC(0, d) \cup (d, \pi), ly \in L_2(0, \pi), \\ y(d+0) = \alpha y(d-0), y'(d+0) = \alpha^{-1}y'(d-0), \\ d \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{array} \right\}$$

kümesinde bir singüler diferansiyel operatör üretmektedir. Bu durumda

$$-y'' + \frac{C}{x}y + q(x)y = \lambda y \text{ veya } ly = \lambda y$$

diferansiyel denklemi bir singüler diferansiyel denklemdir. Ayrıca $y'(0)$ değeri mevcut değildir. Dolayısıyla öncelikle verilen diferansiyel operatörün, bu biçimdeki değerler de tanımlı olacak şekilde yeni bir operatör tanımlamak gerekmektedir.

Bu operatör ise verilen operatörün self-adjoint genişlemesi olarak alınabilir.

$$ly = -y'' + \frac{C}{x}y + q(x)y = \lambda y, \lambda = k^2, 0 < x < \pi \quad (2.1)$$

diferansiyel denklemi

$$U(y) := y(0) = 0, V(y) := y(\pi) = 0 \quad (2.2)$$

sınır koşulları ve

$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) = \alpha^{-1}y'(d-0) \end{cases} \quad (2.3)$$

süreksizlik koşullarının ürettiği L problemi ele alımsın. Burada λ spektral parametre, $C > 0, C, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 1, d \in (\frac{\pi}{2}, \pi), q(x)$ gerçel değerli, sınırlı bir fonksiyon ve $q(x) \in L_2(0, \pi)$ dir.

(2.1) diferansiyel denkleminde $u(x) = C \ln x \in L_2(0, \pi)$ olmak üzere;

$(\Gamma y)(x) = y' - u(x)y$ alınırsa;

$$\begin{aligned} l(y) &= -y'' + u'(x)y + q(x)y = -(y' - u(x)y)' - u(x)y' + q(x)y \\ &= -[(\Gamma y)(x)]' - u(x)(\Gamma y)(x) - u^2(x)y + q(x)y \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lim_{x \rightarrow 0} (\Gamma y)(x)$ değeri mevcuttur.

Şimdi $y_1 = y$, $y_2 = y' - u(x)y = (\Gamma y)(x)$ denilirse;

$$\begin{cases} y_1' - y_2 &= u(x)y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 &= -u(x)y_2 - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} y_1(d+0) &= \alpha y_1(d-0) \\ y_2(d+0) &= \alpha^{-1} y_2(d-0) - 2\alpha^{-1} u(d)y_1(d-0) \end{cases} \quad (2.6)$$

problemi elde edilir. (2.4) sisteminin matris gösterimi;

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -k^2 - u^2 + q & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

veya

$$A = \begin{pmatrix} u(x) & 1 \\ -k^2 - u^2(x) + q(x) & -u(x) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $y' = Ay$ matrisinin elemanları toplanabilir olduklarından Naimark'ın çalışmasında [36], $y' = Ay + f$, $f \in L_1(0, \pi)$ sistemleri için başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili teorem gereği her $\xi \in [0, \pi]$,

$v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{C}^2$ için (2.4) sisteminin $y_1(\xi) = v_1$, $y_2(\xi) = v_2$ başlangıç koşullarını sağlayan sadece bir tek çözümü vardır. Özel olarak $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = ik$ alınabilir.

Şimdi (2.4) diferansiyel denklemler sisteminde $C = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ alınırsa;

$$\begin{cases} y_1' - y_2 &= 0 \\ y_2' + k^2 y_1 &= 0 \end{cases} \quad \text{lineer homojen diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu}$$

sistemin; $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü;

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} e^{ikx}$ dir. Lineer homojen sistemin bir diğer çözümü de;

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} e^{-ikx}$ dir. O halde lineer homojen sistemin genel çözümü;

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \\ ikc_1 e^{ikx} - ikc_2 e^{-ikx} \end{pmatrix}$ dir.

$$\begin{cases} y_1' - y_2 &= u(x)y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 &= -u(x)y_2 - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{cases}$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulmak için;

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} c_1(x)e^{ikx} + c_2(x)e^{-ikx} \\ ikc_1(x)e^{ikx} - ikc_2(x)e^{-ikx} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} c_1'(x)e^{ikx} + c_2'(x)e^{-ikx} + ikc_1(x)e^{ikx} - ikc_2(x)e^{-ikx} \\ ikc_1'(x)e^{ikx} - ikc_2'(x)e^{-ikx} - k^2 c_1(x)e^{ikx} - k^2 c_2(x)e^{-ikx} \end{pmatrix}$$

alınır ve (2.4) sisteminde yerine yazılıp parametrelerin değişimi metodu uygulanırsa;

$$\begin{cases} c_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{-ikt} dt + c_1^0 \\ c_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{ikt} dt + c_2^0 \end{cases}$$

elde edilir. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ ifadeleri denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} y_1(x, k) &= c_1^0 e^{ikx} + c_2^0 e^{-ikx} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{ik(x-t)} dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{-ik(x-t)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x, k) &= ikc_1^0 e^{ikx} - ikc_2^0 e^{-ikx} \\
&\quad + \frac{ik}{2} \int_0^x \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{ik(x-t)} dt \\
&\quad - \frac{ik}{2} \int_0^x \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{-ik(x-t)} dt
\end{aligned}$$

olur. Buradan da,

$$\begin{aligned}
y_1(x, k) &= c_1^0 e^{ikx} + c_2^0 e^{-ikx} \\
&\quad + \int_0^x \left[u(t)y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(x-t) \right] dt \\
y_2(x, k) &= ikc_1^0 e^{ikx} - ikc_2^0 e^{-ikx} \\
&\quad + \int_0^x [-ku(t)y_1 \sin k(x-t) - (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla (2.4) sisteminin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü;

$x < d$ iken

$$\left\{ \begin{aligned}
y_1(x, k) &= e^{ikx} \\
&\quad + \int_0^x \left[u(t)y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(x-t) \right] dt \\
y_2(x, k) &= ik e^{ikx} \\
&\quad - \int_0^x [ku(t)y_1 \sin k(x-t) + (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt
\end{aligned} \right.$$

olarak elde edilir. $x > d$ iken çözüm;

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x, k) = A(k)e^{ikx} + B(k)e^{-ikx} + \int_0^x u(t)y_1 \cos k(x-t) dt \\ \quad - \frac{1}{k} \int_0^x [(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(x-t)] dt \\ y_2(x, k) = ikA(k)e^{ikx} - ikB(k)e^{-ikx} - \int_0^x ku(t)y_1 \sin k(x-t) dt \\ \quad - \int_0^x [(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt \end{array} \right.$$

şeklinde aransın. (2.6) süreksizlik koşullarını uygulayarak $A(k)$ ve $B(k)$ fonksiyonları,

$$\begin{aligned} A(k) = & \alpha^+ - \frac{\alpha^- u(d)}{ik} + \frac{\alpha e^{-ikd}}{2} \int_0^d u(t)y_1 \cos k(d-t) dt \\ & - \frac{\alpha e^{-ikd}}{2k} \int_0^d (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(d-t) dt \\ & - \frac{e^{-ikd}}{2} \int_0^d u(t)y_1 \cos k(d-t) dt + \frac{e^{-ikd}}{2k} \int_0^d (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(d-t) dt \\ & - \frac{e^{-ikd}}{2i\alpha} \int_0^d u(t)y_1 \sin k(d-t) dt - \frac{e^{-ikd}}{2ik\alpha} \int_0^d (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(d-t) dt \\ & + \frac{e^{-ikd}}{2i} \int_0^d u(t)y_1 \sin k(d-t) dt + \frac{e^{-ikd}}{2ik} \int_0^d (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(d-t) dt \\ & - \frac{e^{-ikd}}{ik\alpha} \int_0^d \left[u(t)y_1 \cos k(d-t) - \frac{1}{k} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(d-t) \right] dt \\ & - \frac{\alpha^- u(d)e^{-ikd}}{ik} \int_0^d \left[u(t)y_1 \cos k(d-t) - \frac{1}{k} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(d-t) \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(k) = & \alpha^- e^{2ikd} + \frac{\alpha^- u(d) e^{2ikd}}{ik} + \frac{\alpha e^{ikd}}{2} \int_0^d u(t) y_1 \cos k(d-t) dt \\
& - \frac{\alpha e^{ikd}}{2k} \int_0^d (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(d-t) dt \\
& - \frac{e^{ikd}}{2} \int_0^d u(t) y_1 \cos k(d-t) dt + \frac{e^{ikd}}{2k} \int_0^d (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(d-t) dt \\
& - \frac{e^{ikd}}{2i\alpha} \int_0^d u(t) y_1 \sin k(d-t) dt - \frac{e^{ikd}}{2ik\alpha} \int_0^d (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \cos k(d-t) dt \\
& + \frac{e^{ikd}}{2i} \int_0^d u(t) y_1 \sin k(d-t) dt + \frac{e^{ikd}}{2ik} \int_0^d (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \cos k(d-t) dt \\
& + \frac{\alpha^- u(d) e^{ikd}}{ik} \int_0^d \left[u(t) y_1 \cos k(d-t) - \frac{1}{k} (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(d-t) \right] dt
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu sabitler yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$\alpha^\mp = \frac{1}{2} \left(\alpha \mp \frac{1}{\alpha} \right)$ olmak üzere $y_1(x, k)$ ve $y_2(x, k)$ fonksiyonları için $x > d$ iken

$$\begin{aligned}
y_1(x, k) = & \alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} - \frac{\alpha^- u(d)}{ik} [e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}] \\
& + \int_0^d u(t) y_1 [\alpha^+ \cos k(x-t) + \alpha^- \cos k(x-2d+t)] dt \\
& - \frac{1}{k} \int_0^d (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) [\alpha^+ \sin k(x-t) - \alpha^- \sin k(x-2d+t)] dt \\
& + \int_d^x \left[u(t) y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k} (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(x-t) \right] dt \\
& - \frac{\alpha^- u(d)}{k} \int_0^d u(t) y_1 [\sin k(x-t) + \sin k(x-2d+t)] dt \\
& - \frac{\alpha^- u(d)}{k^2} \int_0^d (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) [\cos k(x-t) - \cos k(x-2d+t)] dt
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x, k) = & ik (\alpha^+ e^{ikx} - \alpha^- e^{ik(2d-x)}) - u(d)\alpha^- e^{ik(2d-x)} \\
& + \int_0^d u(t)y_1 [-k\alpha^+ \sin k(x-t) + k\alpha^- \sin k(x-2d+t)] dt \\
& + \int_0^d (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) [-\alpha^+ \cos k(x-t) - \alpha^- \cos k(x-2d+t)] dt \\
& - \int_d^x [ku(t)y_1 \sin k(x-t) + (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt \\
& - u(d)\alpha^- \int_0^d u(t)y_1 [\cos k(x-t) + \cos k(x-2d+t)] dt \\
& - \frac{u(d)\alpha^-}{k} \int_0^d (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) [\sin k(x-t) + \sin k(x-2d+t)] dt
\end{aligned} \tag{2.9}$$

integral denklemler sistemi elde edilir. (2.4) diferansiyel denklemler sisteminin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını ve (2.6) süreksizlik koşullarını sağlayan her çözümünün;

$x < d$ iken

$$\begin{cases} y_1 = e^{ikx} + \int_{-x}^x K_{11}(x, t) e^{ikt} dt \\ y_2 = ik e^{ikx} + b(x) e^{ikx} \\ \quad + \int_{-x}^x K_{21}(x, t) e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^x K_{22}(x, t) e^{ikt} dt \end{cases} \tag{2.10}$$

$x > d$ iken

$$\begin{cases} y_1 = \alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \int_{-x}^x K_{11}(x, t) e^{ikt} dt \\ y_2 = ik (\alpha^+ e^{ikx} - \alpha^- e^{ik(2d-x)}) + b(x) [\alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)}] \\ \quad + \int_{-x}^x K_{21}(x, t) e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^x K_{22}(x, t) e^{ikt} dt \end{cases} \tag{2.11}$$

şeklinde bir integral gösterimine sahip olduğu aşğıdaki teorem ile ispatlanmıştır. Burada $K_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, 2$ ve $b(x)$ reel değerli fonksiyonlardır.

Teorem 2.1 [35] : L probleminin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri için řu gösterim mevcuttur:

$x < d$ iken;

$$\begin{cases} y_1 = e^{ikx} + \int_{-x}^x K_{11}(x, t)e^{ikt} dt \\ y_2 = ik e^{ikx} + b(x)e^{ikx} \\ \quad + \int_{-x}^x K_{21}(x, t)e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^x K_{22}(x, t)e^{ikt} dt \end{cases}$$

$x > d$ iken;

$$\begin{cases} y_1 = \alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \int_{-x}^x K_{11}(x, t)e^{ikt} dt \\ y_2 = ik (\alpha^+ e^{ikx} - \alpha^- e^{ik(2d-x)}) + b(x) [\alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)}] \\ \quad + \int_{-x}^x K_{21}(x, t)e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^x K_{22}(x, t)e^{ikt} dt \end{cases}$$

Burada $b(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x [u^2(s) - q(s)] e^{-\frac{1}{2} \int_s^x u(t) dt} ds$,

$$K_{11}(x, x) = \frac{\alpha^+}{2} u(x), \quad K_{11}(x, -x) = 0,$$

$$K_{11}(x, 2d - x + 0) - K_{11}(\pi, 2d - x - 0) = \frac{\alpha^-}{2} u(x)$$

$$K_{21}(x, x) = b'(x) - \frac{1}{2} \int_0^x [u^2(s) - q(s)] K_{11}(s, s) ds - \frac{1}{2} \int_0^x u(s) K_{21}(s, s) ds,$$

$$K_{22}(x, x) = -\frac{\alpha^+}{2} [u(x) + 2b(x)], \quad \frac{\partial K_{ij}(x, \cdot)}{\partial x}, \frac{\partial K_{ij}(x, \cdot)}{\partial t} \in L_2(0, \pi), \quad i, j = 1, 2$$

şeklindedir.

2.1 Karakteristik Fonksiyon ve Özellikleri

$C = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ olması durumunda L problemi, L_0 ile gösterilsin.

$\varphi(x, k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, k) \\ \varphi_2(x, k) \end{pmatrix}$ fonksiyonu, $\varphi(0, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ başlangıç koşulu ve (2.6)

süreksizlik koşulunu sağlayan çözüm olsun. $C = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ olması durumunda bu çözüm $\varphi_0(x, k)$ ile gösterilsin. $k \in \mathbb{R}$ için,

$x < d$ iken

$$\begin{cases} \varphi_{01}(x, k) = \frac{y_{01}(x, k) - \overline{y_{01}(x, k)}}{2i} = \sin kx \\ \varphi_{02}(x, k) = \frac{y_{02}(x, k) - \overline{y_{02}(x, k)}}{2i} = k \cos kx \end{cases}$$

$x > d$ iken

$$\begin{cases} \varphi_{01}(x, k) = \frac{y_{01}(x, k) - \overline{y_{01}(x, k)}}{2i} = \alpha^+ \sin kx + \alpha^- \sin k(2d - x) \\ \varphi_{02}(x, k) = \frac{y_{02}(x, k) - \overline{y_{02}(x, k)}}{2i} = \alpha^+ k \cos kx - \alpha^- k \cos k(2d - x) \end{cases}$$

şeklindedir.

$\Delta_0(k)$ ile L_0 probleminin karakteristik fonksiyonu gösterilirse;

$$\varphi_{01}(\pi, k) = \Delta_0(k) = \alpha^+ \sin k\pi + \alpha^- \sin k(2d - \pi)$$

olduğu açıktır. $\Delta_0(k) = 0$ denkleminin $n \in \mathbb{N}$ için k_n^0 kökleri L_0 probleminin öz değerleridir.

Tanım 2.1.1 : $y(x, \lambda) \in D(L)$ için, α_n normalleştirici sayıları

$$\alpha_n = \int_0^d y^2(x, \lambda_n) dx + \int_d^\pi y^2(x, \lambda_n) dx$$

olarak tanımlanır.

2.2 Öz değer ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri

Lemma 2.2.1: L probleminin öz değerleri aşağıdaki asimptotik davranışa sahiptir:

$$k_n = k_n^0 + \frac{d_n}{k_n^0} + \frac{\delta_n}{k_n^0}$$

Burada $\delta_n \in l_2$ ve

$$d_n = \frac{\alpha^+ \cos(k_n^0)\pi - \alpha^- \cos k_n^0(2d - \pi)}{2\dot{\Delta}_0(k_n^0)} u(\pi)$$

sınırlı bir dizidir.

İspat: δ yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere ($\delta \ll \frac{\sigma}{2}$)

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \left\{ k : |k| = |k_n^0| + \frac{\sigma}{2}, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \right\} \\ G_\delta &= \{ k : |k - k_n^0| \geq \delta, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \} \end{aligned}$$

olsun. $k \in \overline{G_\delta}$ için

$$\begin{aligned} \Delta_0(k) &= \alpha^+ \sin k\pi + \alpha^- \sin k(2d - \pi) \\ &= \frac{\alpha^+}{2i} e^{ik\pi} + \frac{\alpha^-}{2i} e^{ik(2d-\pi)} - \frac{\alpha^+}{2i} e^{-ik\pi} - \frac{\alpha^-}{2i} e^{-ik(2d-\pi)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |\Delta_0(k)| &\geq \frac{\alpha^+}{2} |e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}| + \frac{|\alpha^-|}{2} |e^{ik(2d-\pi)} - e^{-ik(2d-\pi)}| \\ &= \alpha^+ |\sin(\pi x + i\pi y)| + |\alpha^-| |\sin(x(2d - \pi) + iy(2d - \pi))| \\ &\geq \alpha^+ |\cosh \pi y| + |\alpha^-| |\cosh \pi y| \\ &\geq e^{\pi y} \left[\frac{\alpha^+}{2} + \frac{\alpha^+}{2} e^{-2\pi y} + \frac{|\alpha^-|}{2} + \frac{|\alpha^-|}{2} e^{-2\pi y} \right] \\ &= e^{|\operatorname{Im} k|\pi} C_\delta \end{aligned}$$

olacak biçimde $C_\delta > 0$ vardır. Diğer taraftan $\Delta(k) = \varphi_1(\pi, k)$, $\Delta_0(k) = \varphi_{01}(\pi, k)$ ve $\tilde{K}_{11}(x, t) = K_{11}(x, t) - K_{11}(x, -t)$ olmak üzere L probleminin karakteristik fonksiyonu

$$\Delta(k) = \Delta_0(k) + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t) \sin kt dt$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\pi} (\Delta(k) - \Delta_0(k)) = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\pi} \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t) \sin kt dt = 0$$

yazılabilir ve n nin yeterince büyük değerleri için

$$|\Delta(k) - \Delta_0(k)| < \frac{C_\delta}{2} e^{|\operatorname{Im} k|\pi}$$

ve

$$|\Delta_0(k)| > C_\delta e^{|\operatorname{Im} k|\pi} > \frac{C_\delta}{2} e^{|\operatorname{Im} k|\pi} > |\Delta(k) - \Delta_0(k)|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada Rouché teoremi uygulanırsa n nin yeterince büyük değerlerinde Γ_n yörüngesinin iç kısmında $\Delta_0(k)$ ve $\Delta_0(k) + (\Delta(k) - \Delta_0(k)) = \Delta(k)$ fonksiyonunun sıfırları aynı sayıdadır. Benzer şekilde Rouché teoreminden gösterilebilir ki yeterince büyük n ler için $|k - k_n^0| < \delta$ çemberlerinin herbirinde $\Delta(k)$ fonksiyonunun yalnızca bir sıfırı vardır.

Bu durumda δ yeterince küçük pozitif sayı olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olmak üzere $k_n = k_n^0 + \varepsilon_n$ elde edilir. k_n sayıları, $\Delta(k)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri olduğundan

$$\Delta(k_n) = \Delta_0(k_n^0 + \varepsilon_n) + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t) \sin(k_n^0 + \varepsilon_n)t dt = 0$$

ve diğer taraftan $\Delta_0(k_n^0) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta_0(k_n) &= \Delta_0(k_n^0 + \varepsilon_n) = \Delta_0(k_n^0) + \dot{\Delta}_0(k_n^0)\varepsilon_n + \ddot{\Delta}_0(k_n^0)\frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \dots \\ &= \dot{\Delta}_0(k_n^0) + O(\varepsilon_n) \end{aligned}$$

$$\Delta_0(k_n^0 + \varepsilon_n) = \dot{\Delta}_0(k_n^0)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) = \left(\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1) \right) \varepsilon_n$$

olur. $\Delta_0(k_n^0 + \varepsilon_n)$ ifadesi $\Delta(k_n)$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\left(\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1) \right) \varepsilon_n + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t) \sin(k_n^0 + \varepsilon_n)t dt = 0$$

bulunur. $\Delta_0(k)$ sinüs tipli fonksiyon olduğundan her n doğal sayısı için N_1 ve N_2 doğal sayıları vardır öyle ki

$$0 < N_1 < \left| \dot{\Delta}_0(k_n^0) \right| < N_2 < \infty, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

eşitsizliği sağlanır. Zhdanovich [34] ve Krein'in[37] çalışmalarından yararlanılırsa, $\sup_n |h_n| < M$ olmak üzere $k_n^0 = n + h_n$ sağlanır.

Teorem (Zhdanovich, 1960) :

$$e^{\alpha_0 \lambda} + a_1 e^{\alpha_1 \lambda} + \dots + a_{p-1} e^{\alpha_{p-1} \lambda} + a_p = 0$$

α_s ler ($s = 0, 1, \dots, p-1$) gerçel sayılar, $\alpha_{s-1} > \alpha_s > 0$, a_s ler ($s = \overline{1, p}$) kompleks ve $a_p \neq 0$ ise bu denklemin kökleri $\lambda_n = \frac{2n\pi i}{\alpha_0} + \Psi(n)$, ($n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$) dir. $\Psi(n)$ ise sınırlı kompleks değerli fonksiyon, $\sup_n |\Psi(n)| < +\infty$ dur.

Bu teoreme göre

$$\Delta_0(k) = \alpha^+ \sin k\pi + \alpha^- \sin k(2d - \pi)$$

denklemini

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^+}{2i} e^{ik\pi} + \frac{\alpha^-}{2i} e^{ik(2d-\pi)} - \frac{\alpha^+}{2i} e^{-ik\pi} - \frac{\alpha^-}{2i} e^{-ik(2d-\pi)} &= 0 \\ e^{2ik\pi} + \frac{\alpha^-}{\alpha^+} e^{2ikd} - \frac{\alpha^-}{\alpha^+} e^{2ik(\pi-d)} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve

$$\alpha_0 = 2\pi, \alpha_1 = 2d, \alpha_2 = 2(\pi - d), \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2$$

$$a_1 = \frac{\alpha^-}{\alpha^+}, a_2 = -\frac{\alpha^-}{\alpha^+}, a_3 = -1$$

olmak üzere denklemin kökleri için

$$ik_n^0 = \frac{2n\pi i}{2\pi} + \Psi(n) = ni + \Psi(n)$$

veya

$$k_n^0 = n - i\Psi(n) = n + \Psi_1(n), (\Psi_1(n) = h_n = -i\Psi(n))$$

ifadesi elde edilir. Burada $\sup_n |\Psi_1(n)| < M < \infty$ koşulu sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= -\frac{1}{\Delta_0(k_n^0) + o(1)} \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t) \sin k_n^0 t dt \\ &= \frac{1}{\Delta_0(k_n^0) + o(1)} \frac{1}{k_n^0} \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t) d(\cos k_n^0 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)} \frac{1}{k_n^0} \left[\tilde{K}_{11}(\pi, t) \cos(k_n^0) \left(\Big|_0^{2d-\pi-0} + \Big|_{2d-\pi+0}^\pi \right) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\pi \tilde{K}'_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt \right] \\
&= \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)} \frac{1}{k_n^0} \left[(\tilde{K}_{11}(\pi, 2d - \pi - 0) - \tilde{K}_{11}(\pi, 2d - \pi + 0)) \cos k_n^0(2d - \pi) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{K}_{11}(\pi, \pi) \cos k_n^0 \pi - \tilde{K}_{11}(\pi, 0) - \int_0^\pi \tilde{K}'_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt \right]
\end{aligned}$$

$$\tilde{K}_{11}(x, x) = \frac{\alpha^+}{2} u(x) \text{ ve } K_{11}(x, 2d - x + 0) - K_{11}(\pi, 2d - x - 0) = \frac{\alpha^-}{2} u(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)} \frac{1}{k_n^0 + \varepsilon_n} \left[-\frac{\alpha^-}{2} u(\pi) \cos k_n^0(2d - \pi) + \frac{\alpha^+}{2} u(\pi) \cos k_n^0 \pi \right. \\
&\quad \left. - \tilde{K}_{11}(\pi, 0) - \int_0^\pi \tilde{K}'_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt \right] \\
&= \frac{\alpha^+ \cos k_n^0 \pi - \alpha^- \cos k_n^0(2d - \pi)}{2\dot{\Delta}_0(k_n^0)k_n^0} u(\pi) \\
&\quad - \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)} \frac{1}{k_n^0} \left[\int_0^\pi \tilde{K}'_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt + \tilde{K}_{11}(\pi, 0) \right] \\
&\hspace{20em} (2.2.1) \\
d_n &= \frac{\alpha^+ \cos k_n^0 \pi - \alpha^- \cos k_n^0(2d - \pi)}{2\dot{\Delta}_0(k_n^0)k_n^0} u(\pi)
\end{aligned}$$

sınırlı bir dizi ve

$$\delta_n = -\frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)} \frac{1}{k_n^0} \left[\int_0^\pi \tilde{K}'_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt + \tilde{K}_{11}(\pi, 0) \right] \in l_2$$

elde edilir. ■

Lemma 2.2.2 : L probleminin normalleştirici sayıları için $\alpha_n = \alpha_n^0 + \delta_n$ asimptotik eşitliği geçerlidir. Burada $\delta_n \in l_2$ dir.

İspat:

$$\Delta(k) = \Delta_0(k) + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t) \sin kt dt$$

$$\dot{\Delta}(k_n) = \dot{\Delta}_0(k_n) + \int_0^\pi t \tilde{K}_{11}(\pi, t) \cos k_n t dt$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_0(k_n) &= \dot{\Delta}_0(k_n^0 + \varepsilon_n) = \dot{\Delta}_0(k_n^0) + \ddot{\Delta}_0(k_n^0) \varepsilon_n + \dddot{\Delta}_0(k_n^0) \frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \dots \\ &= \dot{\Delta}_0(k_n^0) + O(\varepsilon_n) \end{aligned}$$

ve

$$\cos k_n t = \cos k_n^0 t + O(\varepsilon_n t), \varepsilon_n \in l_2$$

yazılabildiğinden

$$\begin{aligned} \alpha_n \gamma_n &= -\dot{\Delta}(k_n) \\ &= -\dot{\Delta}_0(k_n^0) - \int_0^\pi t \tilde{K}_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt \\ &\quad - O(\varepsilon_n t) \int_0^\pi t \tilde{K}_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt + O(\varepsilon_n) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\varepsilon_n \in l_2$, $\tilde{K}_{11}(\pi, \cdot) \in L_2(0, \pi)$, ve $k_n^0 = n + h_n$ olduğundan

$$\delta_n = - \int_0^\pi t \tilde{K}_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt - O(\varepsilon_n t) \int_0^\pi t \tilde{K}_{11}(\pi, t) \cos k_n^0 t dt + O(\varepsilon_n) \in l_2$$

olmak üzere $\alpha_n \gamma_n = \alpha_n^0 \gamma_n^0 + \delta_n$ elde edilir. ■

2.3 Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonunun Özellikleri

$\Phi(x, k) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, k) \\ \Phi_2(x, k) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu (2.4) denklem sisteminin $\Phi_1(0, k) = 1$ ve $\Phi_1(\pi, k) = 0$ koşullarını ve (2.6) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\Phi(x, k)$ fonksiyonuna L probleminin Weyl çözümü denir.

$$\Psi(x, k) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x, k) \\ \Psi_2(x, k) \end{pmatrix}, \quad \varphi(x, k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, k) \\ \varphi_2(x, k) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C(x, k) = \begin{pmatrix} C_1(x, k) \\ C_2(x, k) \end{pmatrix}$$

fonksiyonları (2.4) denkleminin

$$\Psi(\pi, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(0, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C(0, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını ve (2.6) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\Psi(x, k)$ ve $C(x, k)$ fonksiyonlarının k ya göre tam olduğu açıktır. Ayrıca;

$$\Psi(x, k) = c_1(k)\varphi(x, k) + c_2(k)C(x, k)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\langle \Psi(x, k), \varphi(x, k) \rangle = \Psi_1(x, k)\varphi_2(x, k) - \Psi_2(x, k)\varphi_1(x, k)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x, k), \varphi(x, k) \rangle &= c_1(k) \langle \varphi(x, k), \varphi(x, k) \rangle + c_2(k) \langle C(x, k), \varphi(x, k) \rangle \\ &= c_2(k) \langle C(x, k), \varphi(x, k) \rangle \\ &= c_2(k) [C_1(x, k)\varphi_2(x, k) - C_2(x, k)\varphi_1(x, k)] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Başlangıç koşulları uygulanırsa,

$$\langle \Psi(x, k), \varphi(x, k) \rangle|_{x=0} = \Psi_1(0, k)\varphi_2(0, k) - \Psi_2(0, k)\varphi_1(0, k) = \Psi_1(0, k) = \Delta(k)$$

ve

$$\langle \Psi(x, k), \varphi(x, k) \rangle|_{x=0} = c_2(k) [C_1(0, k)\varphi_2(0, k) - C_2(0, k)\varphi_1(0, k)] = c_2(k)$$

eşitliklerinden

$$c_2(k) = \Psi_1(0, k) = \Delta(k)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde;

$$\langle \Psi(x, k), C(x, k) \rangle = \Psi_1(x, k)C_2(x, k) - \Psi_2(x, k)C_1(x, k)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x, k), C(x, k) \rangle &= c_1(k) \langle \varphi(x, k), C(x, k) \rangle + c_2(k) \langle C(x, k), C(x, k) \rangle \\ &= c_1(k) \langle \varphi(x, k), C(x, k) \rangle \\ &= c_1(k) [\varphi_1(x, k)C_2(x, k) - \varphi_2(x, k)C_1(x, k)] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Başlangıç koşulları uygulanırsa,

$$\langle \Psi(x, k), C(x, k) \rangle|_{x=0} = \Psi_1(0, k)C_2(0, k) - \Psi_2(0, k)C_1(0, k) = -\Psi_2(0, k)$$

ve

$$\langle \Psi(x, k), C(x, k) \rangle|_{x=0} = c_1(k) [\varphi_1(0, k)C_2(0, k) - \varphi_2(0, k)C_1(0, k)] = -c_1(k)$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} c_1(k) &= \Psi_2(0, k), \\ \Psi(x, k) &= \Psi_2(0, k)\varphi(x, k) + \Delta(k)C(x, k), \\ \frac{\Psi(x, k)}{\Delta(k)} &= \frac{\Psi_2(0, k)}{\Delta(k)}\varphi(x, k) + C(x, k). \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\Phi(x, k) = A(k)\varphi(x, k) + B(k)C(x, k)$$

şeklinde Weyl çözümü oluşturulursa

$$\begin{cases} \Phi_1(x, k) = A(k)\varphi_1(x, k) + B(k)C_1(x, k) \\ \Phi_2(x, k) = A(k)\varphi_2(x, k) + B(k)C_2(x, k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1(0, k) = A(k)\varphi_1(0, k) + B(k)C_1(0, k) = B(k) \\ \Phi_2(0, k) = A(k)\varphi_2(0, k) + B(k)C_2(0, k) = A(k) \end{cases}$$

ve $\Phi_1(0, k) = B(k) = 1$, $\Phi_2(0, k) = A(k)$ olduğundan,

$$\Phi(x, k) = \Phi_2(0, k)\varphi(x, k) + C(x, k)$$

elde edilir. $C(x, k)$ ve $\varphi(x, k)$, (2.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü ve bunların lineer birleşimi de (2.1) denkleminin çözümü olacağından ve bu çözümün tekliğinden,

$$\begin{cases} \Phi(x, k) &= \Phi_2(0, k)\varphi(x, k) + C(x, k) \\ \frac{\Psi(x, k)}{\Delta(k)} &= \frac{\Psi_2(0, k)}{\Delta(k)}\varphi(x, k) + C(x, k) \end{cases}$$

aynı çözümler olur. Buradan da $\Phi(x, k)$ Weyl çözümü ve $\Phi_2(0, k) = M(k)$ Weyl fonksiyonları

$$\begin{aligned} \Phi(x, k) &= \frac{\Psi(x, k)}{\Delta(k)} = C(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad C(0, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Phi_2(0, k) &= \frac{\Psi_2(0, k)}{\Delta(k)} = M(k) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Psi(x, k) &= \Delta(k)\Phi(x, k) = \Psi_2(0, k)\varphi(x, k) + \Delta(k)C(x, k) \\ \langle \Phi(x, k), \varphi(x, k) \rangle &= \varphi_1(x, k)\Phi_2(x, k) - \varphi_2(x, k)\Phi_1(x, k) \\ &= \varphi_1(x, k) [\Phi_2(0, k)\varphi_2(x, k) + C_2(x, k)] \\ &\quad - \varphi_2(x, k) [\Phi_2(0, k)\varphi_1(x, k) + C_1(x, k)] \\ &= \varphi_1(x, k)C_2(x, k) - \varphi_2(x, k)C_1(x, k) \\ &= \langle C(x, k), \varphi(x, k) \rangle = 1 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x, k), \varphi(x, k) \rangle &= \varphi_1(x, k)\Psi_2(x, k) - \varphi_2(x, k)\Psi_1(x, k) \\ &= \varphi_1(x, k) [\Psi_2(0, k)\varphi_2(x, k) + \Delta(k)C_2(x, k)] \\ &\quad - \varphi_2(x, k) [\Psi_2(0, k)\varphi_1(x, k) + \Delta(k)C_1(x, k)] \\ &= \Delta(k) [\varphi_1(x, k)C_2(x, k) - \varphi_2(x, k)C_1(x, k)] \\ &= \Delta(k) \langle C(x, k), \varphi(x, k) \rangle = \Delta(k) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlar.

Şimdi $\Psi(x, k)$ çözümü için $\varphi(x, k)$ çözümüne benzer bir gösterim elde edilsin.

$$\begin{cases} y_1' - y_2 &= 0 \\ y_2' + k^2 y_1 &= 0 \end{cases} \text{ lineer homojen diferansiyel denklem sisteminin } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} e^{ik(x-\pi)}$ dir. Lineer

homojen sistemin bir diğ̈er ç̈özümü de $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -ik \end{pmatrix} e^{-ik(x-\pi)}$ dir. O

halde lineer homojen sistemin genel ç̈özümü; $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{ik(x-\pi)} + c_2 e^{-ik(x-\pi)} \\ ikc_1 e^{ik(x-\pi)} - ikc_2 e^{-ik(x-\pi)} \end{pmatrix}$

şeklindedir. Şimdi $\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 = -u(x)y_2 - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{cases}$ homojen olmayan

lineer diferansiyel denklem sisteminin genel ç̈özümünü bulmak için parametrelerin değişimi metodu uygulanırsa:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} c_1(x) e^{ik(x-\pi)} + c_2(x) e^{-ik(x-\pi)} \\ ikc_1(x) e^{ik(x-\pi)} - ikc_2(x) e^{-ik(x-\pi)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} c_1'(x) e^{ik(x-\pi)} + c_2'(x) e^{-ik(x-\pi)} - ikc_1(x) e^{ik(x-\pi)} + ikc_2(x) e^{-ik(x-\pi)} \\ ikc_1'(x) e^{ik(x-\pi)} - ikc_2'(x) e^{-ik(x-\pi)} - k^2 c_1(x) e^{ik(x-\pi)} - k^2 c_2(x) e^{-ik(x-\pi)} \end{pmatrix}$$

olur. Bunlar $\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 = -u(x)y_2 - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{cases}$ sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) e^{ik(x-\pi)} + c_2'(x) e^{-ik(x-\pi)} = u(x)y_1 \\ ikc_1'(x) e^{ik(x-\pi)} - ikc_2'(x) e^{-ik(x-\pi)} = -u(x)y_2 - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{pmatrix} \text{ ve } \{c_1'(x), c_2'(x)\}$$

bilinmeyenleri hesaplanırsa,

$$\begin{cases} c_1(x) = -\frac{1}{2} \int_x^\pi \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{-ik(t-\pi)} dt + c_1^0 \\ c_2(x) = -\frac{1}{2} \int_x^\pi \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{ik(t-\pi)} dt + c_2^0 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} y_1(x, k) &= c_1^0 e^{ik(x-\pi)} + c_2^0 e^{-ik(x-\pi)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_x^\pi \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{ik(x-t)} dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_x^\pi \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{-ik(x-t)} dt \\ y_2(x, k) &= ikc_1^0 e^{ik(x-\pi)} - ikc_2^0 e^{-ik(x-\pi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ik}{2} \int_x^\pi \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{ik(x-t)} dt \\
& + \frac{ik}{2} \int_x^\pi \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \right] e^{-ik(x-t)} dt
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
y_1(x, k) = c_1^0 e^{ik(x-\pi)} + c_2^0 e^{-ik(x-\pi)} \\
\quad - \int_x^\pi \left[u(t)y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(x-t) \right] dt \\
y_2(x, k) = ikc_1^0 e^{ik(x-\pi)} - ikc_2^0 e^{-ik(x-\pi)} \\
\quad + \int_x^\pi [ku(t)y_1 \sin k(x-t) + (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt
\end{array} \right.$$

olur ve (2.4) sisteminin $y_1(\pi) = 1, y_2(\pi) = ik$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$\begin{aligned}
& x > d \text{ iken} \\
& \left\{ \begin{array}{l}
y_1(x, k) = e^{ik(x-\pi)} \\
\quad - \int_x^\pi \left[u(t)y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(x-t) \right] dt \\
y_2(x, k) = ik e^{ik(x-\pi)} \\
\quad + \int_x^\pi [ku(t)y_1 \sin k(x-t) + (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$x < d$ iken çözüm

$$\left\{ \begin{array}{l}
y_1(x, k) = A(k)e^{ik(x-\pi)} + B(k)e^{-ik(x-\pi)} - \int_x^\pi u(t)y_1 \cos k(x-t) dt \\
\quad + \frac{1}{k} \int_x^\pi [(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(x-t)] dt \\
y_2(x, k) = ikA(k)e^{ik(x-\pi)} - ikB(k)e^{-ik(x-\pi)} + \int_x^\pi ku(t)y_1 \sin k(x-t) dt \\
\quad + \int_x^\pi [(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt
\end{array} \right.$$

şeklinde aransın. (2.6) süreksizlik koşulları uygulanarak elde edilen $A(k)$ ve $B(k)$ fonksiyonları denklemde yerine yazılırsa,

$x < d$ iken çözüm,

$$\begin{aligned}
y_1(x, k) &= \alpha^+ e^{ik(x-\pi)} - \alpha^- e^{ik(2d-x-\pi)} + \frac{\alpha^-}{ik} u(d) e^{ik(x-\pi)} - \frac{\alpha^-}{ik} e^{ik(2d-x-\pi)} \\
&+ \int_d^\pi u(t) y_1 [\alpha^+ \cos k(x-t) - \alpha^- \cos k(x-2d+t)] dt \\
&- \frac{\alpha^+}{k} \int_d^\pi (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(x-t) dt \\
&+ \frac{\alpha^-}{k} \int_d^\pi (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(x-2d+t) dt \\
&+ \frac{2\alpha^-}{ik} u(d) (1-\alpha) \sin k(x-d) \int_d^\pi u(t) y_1 \cos k(d-t) dt \\
&- \frac{2\alpha^-}{ik^2} u(d) (1-\alpha) \sin k(x-d) \int_d^\pi (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(d-t) dt \\
&+ \frac{\alpha\alpha^-}{ik} u(d) e^{-ik(d-\pi)} \int_d^\pi \left[u(t) y_1 \cos k(d-t) - \frac{1}{k} (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(d-t) \right] dt \\
&+ \int_x^d \left[u(t) y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k} (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(x-t) \right] dt \\
y_2(x, k) &= ik(\alpha^+ e^{ik(x-\pi)} + \alpha^- e^{ik(2d-x-\pi)}) + \alpha^- u(d) (e^{ik(x-\pi)} + e^{ik(2d-x-\pi)}) \\
&+ \int_d^\pi u(t) y_1 [-k\alpha^+ \sin k(x-t) + k\alpha^- \sin k(x-2d+t)] dt \\
&- \alpha^+ \int_d^\pi (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \cos k(x-t) dt \\
&+ \alpha\alpha^- u(d) e^{ik(x-d)} \int_d^\pi \left[u(t) y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k} (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \sin k(x-t) \right] dt \\
&+ \alpha^- \int_d^\pi (u(t) y_2 + u^2(t) y_1 - q(t) y_1) \cos k(x-2d+t) dt \\
&+ \alpha^- u(d) (1-\alpha) \cos k(x-d)
\end{aligned}$$

$$\times \int_d^\pi \left[u(t)y_1 \cos k(d-t) - \frac{1}{k} (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \sin k(d-t) \right] dt$$

$$- \int_x^\pi [ku(t)y_1 \sin k(x-t) + (u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1) \cos k(x-t)] dt$$

şeklinde bulunur. $\Psi(x, k) = \frac{y(x, k) - \overline{y(x, k)}}{2i}$ olarak alınırsa $\varphi(x, k)$ gösterimi

ne benzer olarak

$x > d$ iken

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(x, k) = -\sin k(\pi - x) + \int_{-(\pi-x)}^{\pi-x} N_{11}(x, t) \sin ktdt \\ \Psi_2(x, k) = k \cos k(\pi - x) - b(x) \sin k(\pi - x) + \int_{-(\pi-x)}^{\pi-x} N_{21}(x, t) \sin ktdt \\ \quad + \int_{-(\pi-x)}^{\pi-x} kN_{22}(x, t) \cos ktdt \end{array} \right.$$

$x < d$ iken

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(x, k) = -\alpha^+ \sin k(\pi - x) + \alpha^- \sin k(x + \pi - 2d) + \int_{-(\pi-x)}^{\pi-x} N_{11}(x, t) \sin ktdt \\ \Psi_2(x, k) = k\alpha^+ \cos k(\pi - x) + k\alpha^- \cos k(x + \pi - 2d) \\ \quad + b(x) [-\alpha^+ \sin k(\pi - x) + \alpha^- \sin k(x + \pi - 2d)] \\ \quad + \int_{-(\pi-x)}^{\pi-x} N_{21}(x, t) \sin ktdt + \int_{-(\pi-x)}^{\pi-x} kN_{22}(x, t) \cos ktdt \end{array} \right.$$

gösterimi vardır ve buradan da $\tilde{N}_{ij}(x, t) = N_{ij}(x, t) - N_{ij}(x, -t)$, $i, j = 1, 2$ olmak üzere

$x > d$ iken

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(x, k) = -\sin k(\pi - x) + \int_0^{\pi-x} \tilde{N}_{11}(x, t) \sin ktdt \\ \Psi_2(x, k) = k \cos k(\pi - x) - b(x) \sin k(\pi - x) + \int_0^{\pi-x} \tilde{N}_{21}(x, t) \sin ktdt \\ \quad + \int_0^{\pi-x} k \tilde{N}_{22}(x, t) \cos ktdt \end{array} \right.$$

$x < d$ iken

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(x, k) = -\alpha^+ \sin k(\pi - x) + \alpha^- \sin k(x + \pi - 2d) + \int_0^{\pi-x} \tilde{N}_{11}(x, t) \sin ktdt \\ \Psi_2(x, k) = k\alpha^+ \cos k(\pi - x) + k\alpha^- \cos k(x + \pi - 2d) \\ \quad + b(x) [-\alpha^+ \sin k(\pi - x) + \alpha^- \sin k(x + \pi - 2d)] \\ \quad + \int_0^{\pi-x} \tilde{N}_{21}(x, t) \sin ktdt + \int_0^{\pi-x} k \tilde{N}_{22}(x, t) \cos ktdt \end{array} \right.$$

elde edilir. $N_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, 2$ fonksiyonları her sabitlenmiş $x \in [0, \pi]$ için t değişkenine göre $L_2(0, \pi)$ uzayına aittir.

Şimdi ise III. bölümde kullanılacak $P(x, k) = [P_{ij}(x, k)]_{j,k=1,2}$ matrisi ele alın-
sın.

$$P(x, k) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

eşitliği sağlansın.

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x, k) & P_{12}(x, k) \\ P_{21}(x, k) & P_{22}(x, k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}$$

eşitliğin her iki yanını $\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & -\tilde{\Phi}_1 \\ -\tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}$ matrisi ile çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x, k) & P_{12}(x, k) \\ P_{21}(x, k) & P_{22}(x, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & -\tilde{\Phi}_1 \\ -\tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} P_{11}(x, k) &= \varphi_1(x, k)\tilde{\Phi}_2(x, k) - \Phi_1(x, k)\tilde{\varphi}_2(x, k) \\ P_{12}(x, k) &= \Phi_1(x, k)\tilde{\varphi}_1(x, k) - \varphi_1(x, k)\Phi_1(x, k) \\ P_{21}(x, k) &= \varphi_2(x, k)\tilde{\Phi}_2(x, k) - \Phi_2(x, k)\tilde{\varphi}_2(x, k) \\ P_{22}(x, k) &= \Phi_2(x, k)\tilde{\varphi}_1(x, k) - \varphi_2(x, k)\tilde{\Phi}_1(x, k) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{cases} \varphi_1(x, k) &= P_{11}(x, k)\tilde{\varphi}_1(x, k) + P_{12}(x, k)\tilde{\varphi}_2(x, k) \\ \varphi_2(x, k) &= P_{21}(x, k)\tilde{\varphi}_1(x, k) + P_{22}(x, k)\tilde{\varphi}_2(x, k) \\ \Phi_1(x, k) &= P_{11}(x, k)\tilde{\Phi}_1(x, k) + P_{12}(x, k)\tilde{\Phi}_2(x, k) \\ \Phi_2(x, k) &= P_{21}(x, k)\tilde{\Phi}_1(x, k) + P_{22}(x, k)\tilde{\Phi}_2(x, k) \end{cases} \quad (2.3.5)$$

olduğu alınır. $\Phi(x, k) = \frac{\Psi(x, k)}{\Delta(k)}$ ifadelerinden faydalanılırsa

$$\Phi_1(x, k) = \frac{\Psi_1(x, k)}{\Delta(k)}, \Phi_2(x, k) = \frac{\Psi_2(x, k)}{\Delta(k)}$$

yazılabilir. $\langle \Psi(x, k), \varphi(x, k) \rangle = \Delta(k)$ olduğundan ve (2.3.4) den;

$$\begin{aligned} P_{11}(x, k) &= \frac{1}{\Delta(k)} \left[\varphi_1(x, k)\tilde{\Psi}_2(x, k) - \Psi_1(x, k)\tilde{\varphi}_2(x, k) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{\Delta(k)} \left[\varphi_1(x, k) \left(\tilde{\Psi}_2(x, k) - \Psi_2(x, k) \right) - \Psi_1(x, k) \left(\tilde{\varphi}_2(x, k) - \varphi_2(x, k) \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{\Delta(k)} \left[\Psi_1(x, k) \left(\tilde{\varphi}_2(x, k) - \varphi_2(x, k) \right) - \varphi_1(x, k) \left(\tilde{\Psi}_2(x, k) - \Psi_2(x, k) \right) \right] \\ P_{12}(x, k) &= \frac{1}{\Delta(k)} \left[\varphi_1(x, k)\tilde{\Psi}_1(x, k) - \Psi_1(x, k)\tilde{\varphi}_1(x, k) \right] \\ P_{21}(x, k) &= \frac{1}{\Delta(k)} \left[\Psi_2(x, k)\tilde{\varphi}_2(x, k) - \varphi_1(x, k)\tilde{\Psi}_2(x, k) \right] \\ P_{22}(x, k) &= \frac{1}{\Delta(k)} \left[\varphi_2(x, k)\tilde{\Psi}_1(x, k) - \varphi_1(x, k)\tilde{\Psi}_2(x, k) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{\Delta(k)} \left[\varphi_2(x, k) \left(\tilde{\Psi}_1(x, k) - \tilde{\Psi}_2(x, k) \right) - \Psi_2(x, k) \left(\tilde{\varphi}_1(x, k) - \tilde{\varphi}_2(x, k) \right) \right] \end{aligned}$$

eşitlikler elde edilir. $k \in G_\delta$ için $|\Delta(k)| > C_\delta e^{|\text{Im}k|\pi}$ olduğundan Lebesgue Lemma'sına göre aşağıdaki eşitlikler alınır.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in G_\delta}} \max_{0 \leq x \leq \pi} |P_{11}(x, k) - 1| &= \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in G_\delta}} \max_{0 \leq x \leq \pi} |P_{12}(x, k)| \\
&= \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in G_\delta}} \max_{0 \leq x \leq \pi} |P_{22}(x, k) - 1| = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in G_\delta}} \max_{0 \leq x \leq \pi} |P_{21}(x, k)| = 0
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Ayrıca L probleminin öz fonksiyonlarının asimptotik formüllerini aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür. Bu problemin öz fonksiyonları;

$$x < d \text{ iken; } \varphi(x, k_n) = \sin k_n x + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x, t) \sin k_n t dt$$

$$x > d \text{ iken; } \varphi(x, k_n) = \alpha^+ \sin k_n x + \alpha^- \sin k_n (2d - x) + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x, t) \sin k_n t dt$$

şeklindedir.

$x < d$ iken;

$$\begin{aligned}
|\varphi(x, k_n)| &= \left| \sin k_n x + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x, t) \sin k_n t dt \right| \\
&\leq |\sin k_n x| + \int_0^x \left| \tilde{K}_{11}(x, t) \right| |\sin k_n t| dt \\
&\leq e^{|\operatorname{Im} k_n| x} + e^{|\operatorname{Im} k_n| x} \int_0^\pi \left| \tilde{K}_{11}(x, t) \right| dt
\end{aligned}$$

$$\varphi(x, k_n) = \sin k_n x + O(e^{|\operatorname{Im} k_n| x}) = O(e^{|\operatorname{Im} k_n| x}), k_n \rightarrow \infty$$

dir.

$$\varphi'(x, k_n) = k_n \cos k_n x + \tilde{K}_{11}(x, x) \sin k_n x + \int_0^x \tilde{K}'_{11x}(x, t) \sin k_n t dt$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
(\Gamma\varphi)(x, k_n) &= \varphi'(x, k_n) - u(x)\varphi(x, k_n) \\
&= k_n \cos k_n x + \tilde{K}_{11}(x, x) \sin k_n x + \int_0^x \tilde{K}'_{11x}(x, t) \sin k_n t dt \\
&\quad - \sin k_n x - \int_0^x \tilde{K}_{11}(x, t) \sin k_n t dt
\end{aligned}$$

olur. Buradan;

$x < d$ iken;

$$\begin{aligned}
|(\Gamma\varphi)(x, k_n)| &= |k_n \cos k_n x| + \left| \tilde{K}_{11}(x, x) \right| |\sin k_n x| + |\sin k_n x| \\
&+ \int_0^x \left\{ \left| \tilde{K}'_{11x}(x, t) \right| + \left| \tilde{K}_{11}(x, t) \right| \right\} |\sin k_n t| dt \\
&\leq |k_n| e^{|\operatorname{Im} k_n| x} + e^{|\operatorname{Im} k_n| x} \\
&+ e^{|\operatorname{Im} k_n| x} \int_0^\pi \left\{ \left| \tilde{K}'_{11x}(x, t) \right| + \left| \tilde{K}_{11}(x, t) \right| \right\} dt
\end{aligned}$$

$$(\Gamma\varphi)(x, k_n) = k_n \cos k_n x + O(e^{|\operatorname{Im} k_n| x}) = O(|k_n| e^{|\operatorname{Im} k_n| x}), k_n \rightarrow \infty$$

$x > d$ iken;

$$\begin{aligned}
|\varphi(x, k_n)| &= \left| \alpha^+ \sin k_n x + \alpha^- \sin k_n (2d - x) + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x, t) \sin k_n t dt \right| \\
&\leq \alpha^+ e^{|\operatorname{Im} k_n| x} + |\alpha^-| e^{|\operatorname{Im} k_n|(2d-x)} + e^{|\operatorname{Im} k_n| x} \int_0^\pi \left| \tilde{K}_{11}(x, t) \right| dt \\
&\leq \alpha^+ e^{|\operatorname{Im} k_n| x} + |\alpha^-| e^{|\operatorname{Im} k_n| x} + e^{|\operatorname{Im} k_n| x} \int_0^\pi \left| \tilde{K}_{11}(x, t) \right| dt
\end{aligned}$$

$$\varphi(x, k_n) = \alpha^+ \sin k_n x + \alpha^- \sin k_n (2d - x) + O(e^{|\operatorname{Im} k_n| x}) = O(e^{|\operatorname{Im} k_n| x}), k_n \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma\varphi)(x, k_n) &= \varphi'(x, k_n) - u(x)\varphi(x, k_n) \\
&= \alpha^+ k_n \cos k_n x - \alpha^- k_n \cos k_n (2d - x) + \tilde{K}_{11}(x, x) \sin k_n x \\
&+ \int_0^x \tilde{K}'_{11x}(x, t) \sin k_n t dt - \alpha^+ u(x) \sin k_n x - \alpha^- u(x) \sin k_n (2d - x) \\
&- u(x) \int_0^x \tilde{K}_{11}(x, t) \sin k_n t dt
\end{aligned}$$

$x > d$ iken;

$$\begin{aligned}
|(\Gamma\varphi)(x, k_n)| &\leq \alpha^+ |k_n| |\cos k_n x| + |\alpha^-| |k_n| |\cos k_n(2d - x)| \\
&\quad + \left| \tilde{K}_{11}(x, x) \right| |\sin k_n x| + e^{|\operatorname{Im} k_n| x} \int_0^\pi \left| \tilde{K}'_{11x}(x, t) \right| dt \\
&\quad + \alpha^+ |u(x) \sin k_n x| + |\alpha^-| |u(x) \sin k_n(2d - x)| \\
&\quad + |u(x)| e^{|\operatorname{Im} k_n| x} \int_0^x \left| \tilde{K}_{11}(x, t) \right| dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma\varphi)(x, k_n) &= \alpha^+ k_n \cos k_n x - \alpha^- k_n \cos k_n(2d - x) + O(e^{|\operatorname{Im} k_n| x}) \\
&= O(|k_n| e^{|\operatorname{Im} k_n| x}), k_n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

III. BÖLÜM

SPEKTRAL DÖNÜŞÜM METODU VE TERS PROBLEMLER

Bu bölümde,

$$l(y) = -y'' + \frac{C}{x}y + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = \rho^2, \quad 0 < x < \pi$$

diferansiyel denklemi,

$$U(y) := y(0) = 0, V(y) := y(\pi) = 0$$

sınır koşulları ve

$$\begin{cases} y(d+0) &= \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) &= \alpha^{-1}y'(d-0) \end{cases}$$

süreksizlik koşullarının ürettiği problemi ele alalım. Bu problemin öz fonksiyonlarının karakteristik özelliklerini ve ters problem için bir algoritmayı spektral dönüşüm metodu yardımıyla elde edelim. Bunun için ilk olarak spektral dönüşüm metodundan bahsedelim.

Bu bölümde verilen spektral dönüşüm metodu, sadece Sturm- Liouville operatörleri için değil keyfi mertebeden diferansiyel operatörler, singülariteye sahip diferansiyel operatörler, operatör sınıfları ve daha karışık operatör sınıfları için ters problemlerin geniş bir sınıfını incelemede önemli bir rol oynar. Spektral dönüşüm metodunda eğrisel integral metodundan yararlanılır. Ayrıca spektral dönüşüm metodu, ters problemin çözümü için uyarlanan eğrisel integral metodunun bir çeşidi olarak ele alınabilir.

Spektral dönüşüm metodunda analitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülünden yararlanılır. Verilen spektral karakteristiklere bağlı singülariteye sahip özel olarak kurulan analitik fonksiyonlara spektral parametrelili kompleks düzlemde bu teorem uygulanır. Bu durum; karşılık gelen Banach diziler uzayında lineer denklem olan ve esas denklem olarak adlandırılan ters probleme indirilmesine imkan sağlar. Burada esas denklemin türevi elde edilir ve onun çözümünün tek

olduğu ispatlanır. Esas denklemin çözümleri kullanılarak ters problemin çözümleri için bir algoritma elde edilir.

3.1 Ters Problemin Esas Denklemi

$q(x) \in L_2(0, \pi)$ olmak üzere (2.1), (2.2), (2.3) formunda verilen L problemini ele alalım. $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$ olmak üzere $\{\lambda_n, \alpha_n\}$, L nin spektral karakteristikleri olsun. Bu durumda;

$$\rho_n = \rho_n^0 + \frac{d_n}{\rho_n^0} + \frac{\delta_n}{\rho_n^0}, \quad \alpha_n = \alpha_n^0 + \delta_{n1}, \quad \delta_n, \delta_{n1} \in l_2 \text{ ve } d_n \text{ sınırlı}$$

geçerlidir.

Eğer $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \mu)$ sırasıyla $ly = \lambda y$ ve $lz = \mu z$ denklemlerinin çözümleri ise bu durumda

$$\frac{d}{dx} \langle y, z \rangle = (\lambda - \mu)yz, \quad \langle y, z \rangle := y(\Gamma z) - (\Gamma y)z \quad (3.1.1)$$

geçerlidir.

$$D(x, \lambda, \mu) := \frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} = \int_0^x \varphi(t, \lambda) \varphi(t, \mu) dt \quad (3.1.2)$$

şeklinde gösterilsin. Son eşitlik, (3.1.1)'den açıktır.

L sınırlı değer probleminin bir modelini ele alalım öyle ki $d_n = \tilde{d}_n$ dır..

$$\xi_n := |\rho_n - \tilde{\rho}_n| + |\alpha_n - \tilde{\alpha}_n|$$

olsun. $d_n = \tilde{d}_n$ olduğundan,

$$\Omega := \left(\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)\xi_n]^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_n \xi_n < \infty \quad (3.1.3)$$

geçerlidir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \xi_n &= |\rho_n - \tilde{\rho}_n| + |\alpha_n - \tilde{\alpha}_n| \\ &= \left| \rho_n^0 + \frac{d_n}{\rho_n^0} + \frac{\delta_n}{\rho_n^0} - \tilde{\rho}_n^0 - \frac{\tilde{d}_n}{\tilde{\rho}_n^0} - \frac{\tilde{\delta}_n}{\tilde{\rho}_n^0} \right| + \left| \alpha_n^0 + \delta_{n1} - \tilde{\alpha}_n^0 - \tilde{\delta}_{n1} \right| \\ &= \frac{|\delta_n - \tilde{\delta}_n|}{|\rho_n^0|} + \left| \delta_{n1} - \tilde{\delta}_{n1} \right| \end{aligned}$$

$$\sum_n \xi_n = \sum_n \left(\frac{|\delta_n - \tilde{\delta}_n|}{|\rho_n^0|} + |\delta_{n1} - \tilde{\delta}_{n1}| \right) < \infty$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)\xi_n]^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)^2 \frac{|\delta_n - \tilde{\delta}_n|^2}{|\rho_n^0|^2} + 2(n+1)^2 \frac{|\delta_n - \tilde{\delta}_n| |\delta_{n1} - \tilde{\delta}_{n1}|}{|\rho_n^0|} + (n+1)^2 |\delta_{n1} - \tilde{\delta}_{n1}|^2 \right] < \infty \end{aligned}$$

olur.

Bu bölümde

$$\begin{aligned} \lambda_{n0} &= \lambda_n, \lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_n, \alpha_{n0} = \alpha_n, \alpha_{n1} = \tilde{\alpha}_n, \varphi_{ni}(x) = \varphi(x, \lambda_{ni}) \\ \tilde{\varphi}_{ni}(x) &= \tilde{\varphi}(x, \lambda_{ni}), P_{ni,kj}(x) = \frac{1}{\alpha_{kj}} D(x, \lambda_{ni}, \lambda_{kj}) \\ \tilde{P}_{ni,kj}(x) &= \frac{1}{\alpha_{kj}} \tilde{D}(x, \lambda_{ni}, \lambda_{kj}), i, j \in \{0, 1\}, n, k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

olsun. Bu durumda (3.1.2)'ye göre

$$\begin{aligned} P_{ni,kj}(x) &= \frac{\langle \varphi_{ni}(x), \varphi_{kj}(x) \rangle}{\alpha_{kj}(\lambda_{ni} - \lambda_{kj})} = \frac{1}{\alpha_{kj}} \int_0^x \varphi_{ni}(t), \varphi_{kj}(t) dt \\ \tilde{P}_{ni,kj}(x) &= \frac{\langle \tilde{\varphi}_{ni}(x), \tilde{\varphi}_{kj}(x) \rangle}{\alpha_{kj}(\lambda_{ni} - \lambda_{kj})} = \frac{1}{\alpha_{kj}} \int_0^x \tilde{\varphi}_{ni}(t), \tilde{\varphi}_{kj}(t) dt \end{aligned}$$

olur. Açıkta ki;

$$P'_{ni,kj}(x) = \frac{1}{\alpha_{kj}} \varphi_{ni}(x) \varphi_{kj}(x), \tilde{P}'_{ni,kj}(x) = \frac{1}{\alpha_{kj}} \tilde{\varphi}_{ni}(x) \tilde{\varphi}_{kj}(x) \quad (3.1.5)$$

dir.

Lemma 3.1.1 (Schwarz Lemması) : $|\rho - \rho^0| < a$ için $f(\rho)$ analitik bir fonksiyon ve $f(\rho^0) = 0$ ve $|\rho - \rho^0| < a$ için $|f(\rho)| \leq A$ olsun. Bu durumda;

$$|f(\rho)| \leq \frac{A}{a} |\rho - \rho^0|, |\rho - \rho^0| < a$$

dır. ■

Lemma 3.1.2: $\forall x \in [0, \pi] \setminus \{d\}$, $n, k \geq 0, i, j, v = 0, 1$ için aşağıdaki formüller geçerlidir.

$$\begin{aligned} |\varphi_{ni}(x)| &\leq c, \quad |(\Gamma\varphi_{ni})(x)| \leq c(n+1), \\ |\varphi_{n0}(x) - \varphi_{n1}(x)| &\leq c\xi_n, \\ |(\Gamma\varphi_{n0})(x) - (\Gamma\varphi_{n1})(x)| &\leq c\xi_n(n+1) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$$|P_{ni,kj}(x)| \leq \frac{c}{|n-k|+1}, \quad |P_{ni,kj}^{(v+1)}(x)| \leq c(n+k+1)^v$$

$$|P_{ni,k0}(x) - P_{ni,k1}(x)| \leq \frac{c\xi_k}{|n-k|+1}, \quad |P_{n0,kj}(x) - P_{n1,kj}(x)| \leq \frac{c\xi_n}{|n-k|+1}$$

$$|P_{n0,k0}(x) - P_{n1,k0}(x) - P_{n0,k1}(x) + P_{n1,k1}(x)| \leq \frac{c\xi_n\xi_k}{|n-k|+1} \quad (3.1.7)$$

Benzer hesaplamalar aynı zamanda $\tilde{\varphi}_{ni}(x), \tilde{P}_{ni,kj}(x)$ için de geçerlidir.

İspat: $x < d$ ve $x > d$ iken $|\varphi_{ni}(x)| \leq c$ olduğu açıktır. $x < d$ ve $x > d$ iken $|(\Gamma\varphi_{ni})(x)| \leq c(n+1)$ sağlanır. Ayrıca fix edilmiş bir $a > 0$ için;

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq c, \quad |(\Gamma\varphi)(x, \lambda)| \leq c(n+1), \quad |\rho - \rho_{n1}| \leq a$$

dir. Fix edilmiş v, n, x ve a için $f(\rho) := \varphi^{(v)}(x, \lambda) - \varphi^{(v)}(x, \lambda_{n1})$ fonksiyonuna ρ -düzleminde Schwarz lemmasını uygularsak;

$$|\varphi^{(v)}(x, \lambda) - \varphi^{(v)}(x, \lambda_{n1})| \leq c(n+1)^v |\rho - \rho_{n1}|, \quad |\rho - \rho_{n1}| \leq a$$

elde ederiz. (Burada $v = 1$ için $\varphi^{(v)}(x, \lambda) = (\Gamma\varphi)(x, \lambda)$ olarak işaretlenmiştir.)

Sonuç olarak;

$$\left| \varphi_{n0}^{(v)}(x) - \varphi_{n1}^{(v)}(x) \right| \leq c(n+1)^v |\rho_{n0} - \rho_{n1}|$$

dir. Böylece (3.1.6) ispatlanmış olur.

$$|D(x, \lambda, \lambda_{kj})| \leq \frac{ce^{|\tau|x}}{|\rho \mp k| + 1}, \quad \lambda = \rho^2, \mp \operatorname{Re} \rho \geq 0, \tau = \operatorname{Im} \rho, k \geq 0 \quad (3.1.8)$$

olduğunu gösterelim. Kesinlik için $\sigma := \operatorname{Re} \rho > 0$ olsun. Fix edilmiş bir $\delta_0 > 0$ alalım. $|\rho - \rho_{kj}| > \delta_0$ için;

$$|D(x, \lambda, \lambda_{kj})| = \frac{|\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda_{kj}) \rangle|}{|\lambda - \lambda_{kj}|} \leq ce^{|\tau|x} \frac{|\rho| + |\rho_{kj}|}{|\rho^2 - \rho_{kj}^2|}$$

yazarız.

$$\frac{|\rho| + |\rho_{kj}|}{|\rho + \rho_{kj}|} \leq \frac{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} + |\rho_{kj}|}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2 + \rho_{kj}^2}} \leq \frac{\sqrt{2(\sigma^2 + \tau^2 + \rho_{kj}^2)}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2 + \rho_{kj}^2}} = \sqrt{2}$$

(burada $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ olduğu kullanıldı.) olduğundan;

$$|D(x, \lambda, \lambda_{kj})| \leq \frac{ce^{|\tau|x}}{|\rho - \rho_{kj}|}$$

olduğunu alırız. $|\rho - \rho_{kj}| \geq \delta_0$ için

$$\frac{|\rho - k| + 1}{|\rho - \rho_{kj}|} = \frac{|\rho - \rho_{kj} + \rho_{kj} - k| + 1}{|\rho - \rho_{kj}|} \leq 1 + \frac{|\rho_{kj} - k| + 1}{|\rho - \rho_{kj}|} \leq c$$

ve sonuç olarak $\frac{1}{|\rho - \rho_{kj}|} \leq \frac{c}{|\rho - k| + 1}$ elde ederiz. Bu; $|\rho - \rho_{kj}| \geq \delta_0$ için (3.1.8)'i sağlar. $|\rho - \rho_{kj}| \leq \delta_0$ için

$$|D(x, \lambda, \lambda_{kj})| = \left| \int_0^x \varphi(t, \lambda) \varphi(t, \lambda_{kj}) dt \right| \leq ce^{|\tau|x}$$

yani $|\rho - \rho_{kj}| \leq \delta_0$ için (3.1.8) sağlanır. Benzer şekilde gösterebiliriz ki;

$$|D(x, \lambda, \mu)| \leq \frac{ce^{|\tau|x}}{|\rho \mp \theta| + 1}, \quad \mu = \theta^2, \quad |\operatorname{Im} \theta| \leq c_0, \quad \mp \operatorname{Re} \rho \operatorname{Re} \theta \geq 0$$

dır. Schwarz lemmasını kullanarak;

$$|D(x, \lambda, \lambda_{k1}) - D(x, \lambda, \lambda_{k0})| \leq \frac{ce^{|\tau|x} \xi_k}{|\rho \mp k| + 1}, \quad \mp \operatorname{Re} \rho \geq 0, \quad k \geq 0 \quad (3.1.9)$$

elde ederiz. Bu

$$|D(x, \lambda_{ni}, \lambda_{k1}) - D(x, \lambda_{ni}, \lambda_{k0})| \leq \frac{c\xi_k}{|n - k| + 1}$$

eşitsizliğini üretir. Benzer olarak;

$$|D(x, \lambda_{n1}, \lambda_{kj}) - D(x, \lambda_{n0}, \lambda_{kj})| \leq \frac{c\xi_n}{|n - k| + 1}$$

eşitsizliği de sağlanır.

$$Q_k(x, \lambda) := D(x, \lambda, \lambda_{k1}) - D(x, \lambda, \lambda_{k0})$$

fonksiyonuna Schwarz lemmasını uygularsak fix edilmiş k ve x için

$$|D(x, \lambda_{n0}, \lambda_{k0}) - D(x, \lambda_{n1}, \lambda_{k0}) - D(x, \lambda_{n0}, \lambda_{k1}) + D(x, \lambda_{n1}, \lambda_{k1})| \leq \frac{c\xi_n \xi_k}{|n-k|+1}$$

elde ederiz. Dolayısıyla (3.1.4) ve (3.1.5) ile verilen fonksiyonlar (3.1.7)'yi sağlar. ■

Lemma 3.1.3: Aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, \lambda) &= \varphi(x, \lambda) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} \varphi_{k0}(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} \varphi_{k1}(x) \right) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

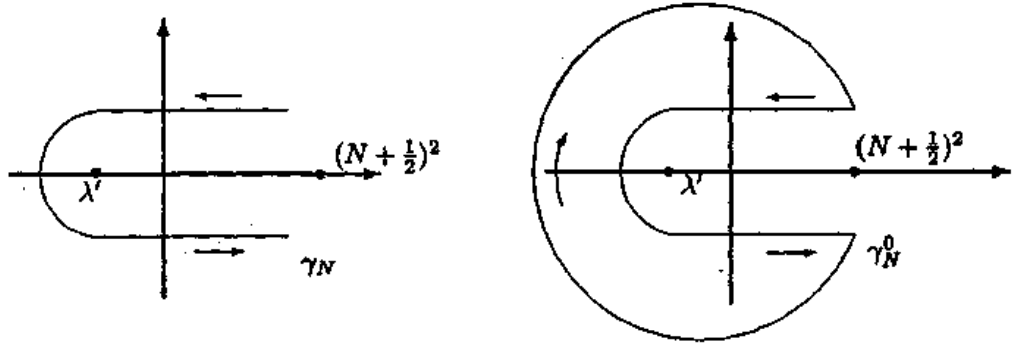
$$\begin{aligned} &\frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle \langle \varphi_{k0}(x), \varphi(x, \mu) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0}) \lambda_{k0} - \mu} \right. \\ &\left. - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle \langle \varphi_{k1}(x), \varphi(x, \mu) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1}) \lambda_{k1} - \mu} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

İspat: 1) $\lambda' = \min_{ni} \lambda_{ni}$ diyelim ve fix edilmiş bir $\delta > 0$ olsun. λ - düzleminde (saat yönünün tersinde yönlendirilmiş) $\gamma_N = \gamma_N^+ \cup \gamma_N^- \cup \gamma' \cup \Gamma'_N$ formundaki kapalı γ_N eğrisini alalım. Burada;

$$\gamma_N^{\pm} = \left\{ \lambda : \pm \operatorname{Im} \lambda = \delta, \operatorname{Re} \lambda \geq \lambda', |\lambda| \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}$$

$$\gamma' = \left\{ \lambda : \lambda - \lambda' = \delta e^{i\alpha}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\}$$

$$\Gamma'_N = \Gamma_N \cap \{\lambda : |\operatorname{Im} \lambda| \leq \delta, \operatorname{Re} \lambda > 0\}, \Gamma_N = \left\{ \lambda : |\lambda| = \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}$$



$\gamma_N^0 = \gamma_N^+ \cup \gamma_N^- \cup \gamma' \cup (\Gamma_N \setminus \Gamma'_N)$ (saat yönünde yönlendirilmiş) ve

$P(x, \lambda) = [P_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1,2}$; (2.3.3) ile tanımlanan matris olsun. (2.3.1) ve (2.3.4)'den fix edilmiş herbir x için $P_{jk}(x, \lambda)$ fonksiyonları, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\tilde{\lambda}_n\}$ basit kutuplarıyla λ da meromorftur. Cauchy integral formülünden;

$$P_1(x, k) - \delta_{1k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N^0} \frac{P_{1k}(x, \xi) - \delta_{1k}}{\lambda - \xi} d\xi, k = 1, 2, \dots$$

ve burada $\lambda \in \text{int}(\gamma_N^0)$ ve δ_{jk} Kronecker deltasıdır. Böylece;

$$P_1(x, k) - \delta_{1k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{P_{1k}(x, \xi)}{\lambda - \xi} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{P_{1k}(x, \xi) - \delta_{1k}}{\lambda - \xi} d\xi$$

dir ve burada Γ_N saat yönünün tersinde alınmıştır. Bu eşitlikleri; (2.3.5) de yerine yazarsak;

$$\varphi(x, \lambda) = \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\tilde{\varphi}(x, \lambda) P_{11}(x, \xi) + (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) P_{12}(x, \xi)}{\lambda - \xi} d\xi + \varepsilon_N(x, \lambda)$$

elde ederiz. Burada;

$$\varepsilon_N(x, \lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\tilde{\varphi}(x, \lambda) (P_{11}(x, \xi) - 1) + (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) P_{12}(x, \xi)}{\lambda - \xi} d\xi$$

dir. (2.3.6)'dan, kompakt kümeler üzerindeki λ ve $x \in [0, \pi]$ 'e göre düzgün olarak;

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N(x, \lambda) = 0 \quad (3.1.12)$$

eşitliğini elde ederiz. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \varepsilon_N(x, \lambda) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\tilde{\varphi}(x, \lambda) (P_{11}(x, \xi) - 1) + (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) P_{12}(x, \xi)}{\lambda - \xi} d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_N} \frac{|\tilde{\varphi}(x, \lambda)| |P_{11}(x, \xi) - 1|}{|\lambda - \xi|} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_N} \frac{|(\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda)| |P_{12}(x, \xi)|}{|\lambda - \xi|} d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{c_\delta}{|\rho|} \int_{\Gamma_N} \frac{|\tilde{\varphi}(x, \lambda)|}{|\lambda - \xi|} d\xi + \frac{1}{2\pi} |\rho| e^{|\tau|x} \frac{c_\delta}{|\rho|} \left| \int_{\Gamma_N} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} \right| \end{aligned}$$

dir. $\lambda \in \text{int}(\gamma_N^0)$ olduğundan $\lambda \notin \Gamma_N$ dir. Dolayısıyla $\frac{1}{\lambda - \xi}$ fonksiyonu Γ_N bölgesinde analitik olur. Dolayısıyla Cauchy teoreminden; $\int_{\Gamma_N} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} = 0$ dir. Buradan;

$$|\varepsilon_N(x, \lambda)| \leq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_N(x, \lambda) = 0$$

elde ederiz.

(2.3.4)'den yararlanarak,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) = & \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ \tilde{\varphi}(x, \lambda) \left[\varphi(x, \xi)(\Gamma\tilde{\Phi})(x, \xi) - \tilde{\Phi}(x, \xi)(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \xi) \right] \right. \\ & \left. + (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \left[\Phi(x, \xi)\tilde{\varphi}(x, \xi) - \varphi(x, \xi)\tilde{\Phi}(x, \xi) \right] \right\} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} + \varepsilon_N(x, \lambda) \end{aligned}$$

hesaplayabiliriz. (2.3.1)'den dolayı;

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} \hat{M}(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi + \varepsilon_N(x, \lambda) \quad (3.1.13)$$

elde ederiz. Burada $\hat{M}(\lambda) = M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda)$ dir. $C(x, \xi)$ li terimler Cauchy teoreminden sıfırdır.

$$(\Phi(x, \lambda) = C(x, \lambda) + M(\lambda) \varphi(x, \lambda)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) = & \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ \tilde{\varphi}(x, \lambda) \left[\varphi(x, \xi) \Gamma \left(\tilde{C}(x, \xi) + \tilde{M}(\xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) \right) \right. \right. \\ & - (C(x, \xi) + M(\xi) \varphi(x, \xi)) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \xi) \\ & + (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) [(C(x, \xi) + M(\xi) \varphi(x, \xi)) \tilde{\varphi}(x, \xi) \\ & \left. \left. - \varphi(x, \xi) \left(\tilde{C}(x, \xi) + \tilde{M}(\xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) \right) \right] \right\} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} + \varepsilon_N(x, \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) = & \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ \tilde{\varphi}(x, \lambda) \left[\varphi(x, \xi) \left(\Gamma\tilde{C} \right) (x, \xi) + \varphi(x, \xi) \tilde{M}(\xi) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \xi) \right. \right. \\ & - C(x, \xi) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \xi) - M(\xi) \varphi(x, \xi) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \xi) \\ & + (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) [C(x, \xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) + M(\xi) \varphi(x, \xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) \\ & \left. \left. - \varphi(x, \xi) \tilde{C}(x, \xi) - \tilde{M}(\xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) \varphi(x, \xi) \right] \right\} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} + \varepsilon_N(x, \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) = & \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ \tilde{\varphi}(x, \lambda) \varphi(x, \xi) (\Gamma \tilde{C}) (x, \xi) + \tilde{M}(\xi) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \varphi(x, \xi) (\Gamma \tilde{\varphi}) (x, \xi) \right. \\
& - C(x, \xi) (\Gamma \tilde{\varphi}) (x, \xi) \tilde{\varphi}(x, \lambda) - M(\xi) \varphi(x, \xi) (\Gamma \tilde{\varphi}) (x, \xi) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\
& + (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) C(x, \xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) + M(\xi) (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) \varphi(x, \xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) \\
& \left. - \varphi(x, \xi) \tilde{C}(x, \xi) (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) \right. \\
& \left. - \tilde{M}(\xi) (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \xi) \varphi(x, \xi) \right\} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} + \varepsilon_N(x, \lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) = & \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ -\hat{M}(\xi) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \varphi(x, \xi) (\Gamma \tilde{\varphi}) (x, \xi) \right. \\
& + \hat{M}(\xi) (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) \varphi(x, \xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) - C(x, \xi) \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \\
& \left. + \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{C}(x, \xi) \rangle \varphi(x, \xi) \right\} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} + \varepsilon_N(x, \lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) = & \tilde{\varphi}(x, \lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} \hat{M}(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} C(x, \xi) d\xi \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{C}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} \varphi(x, \xi) d\xi + \varepsilon_N(x, \lambda)
\end{aligned}$$

olur. γ_N kapalı bölge ve $C(x, \xi), \varphi(x, \xi)$ analitik fonksiyonlar olduğundan Cauchy teoreminden eşitliğin sağ tarafındaki son iki integral sıfırdır. Böylece

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} \hat{M}(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi + \varepsilon_N(x, \lambda)$$

formunu elde ederiz.)

$$\operatorname{Re} s M(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_n} = -\frac{\Delta^0(\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)} = -\frac{\beta_n}{\dot{\Delta}(\lambda_n)} = \frac{1}{\alpha_n} \quad (*)$$

eşitliğinden;

$$\operatorname{Re} s \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} \hat{M}(\xi) \varphi(x, \xi) \Big|_{\xi=\lambda_{kj}} = \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{kj}(x) \rangle}{\alpha_{kj}(\lambda - \lambda_{kj})} \varphi_{kj}(x)$$

dir. Rezidü teoremiyle (3.1.13) deki integrali hesaplırsak;

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} \hat{M}(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi = \sum_{k=0}^N \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{kj}(x) \rangle}{\alpha_{kj}(\lambda - \lambda_{kj})} \varphi_{kj}(x) \right)$$

ve (3.1.12)'yi kullanarak (3.1.10)'u elde ederiz.

2) $\frac{1}{\lambda - \mu} \left(\frac{1}{\lambda - \xi} - \frac{1}{\mu - \xi} \right) = \frac{1}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)}$ olduğundan, Cauchy integral formülü kullanılırsa;

$$\frac{P_{jk}(x, \lambda) - P_{jk}(x, \mu)}{\lambda - \mu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N^0} \frac{P_{jk}(x, \xi)}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi, k, j = 1, 2, \lambda, \mu \in \text{int}(\gamma_N^0)$$

elde edilir.. Yukarıdaki gibi aynı yol ve (2.3.6) kullanılırsa;

$$\frac{P_{jk}(x, \lambda) - P_{jk}(x, \mu)}{\lambda - \mu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{P_{jk}(x, \xi)}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi + \varepsilon_{N_{jk}}(x, \lambda, \mu) \quad (3.1.14)$$

elde edilir. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{N_{jk}}(x, \lambda, \mu) = 0 \quad j, k = \overline{1, n}$ dir. (2.3.2) ve (2.3.4) kullanılarak;

$$\left. \begin{aligned} P_{11}(x, \lambda)(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) - P_{21}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) &= (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \\ P_{22}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) - P_{12}(x, \lambda)(\Gamma\varphi)(x, \lambda) &= \tilde{\varphi}(x, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.15)$$

eşitlikleri ve $\forall y(x) \in C^1[0, 1]$ için

$$\begin{aligned} P(x, \lambda) \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} &= \langle y(x), \tilde{\Phi}(x, \lambda) \rangle \begin{bmatrix} \varphi(x, \lambda) \\ (\Gamma\varphi)(x, \lambda) \end{bmatrix} \\ &- \langle y(x), \tilde{\varphi}(x, \lambda) \rangle \begin{bmatrix} \Phi(x, \lambda) \\ (\Gamma\Phi)(x, \lambda) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

eşitliği elde edilir. Gerçekten;

$$\left\{ \begin{aligned} P_{11}(x, \lambda)(\Gamma\varphi)(x, \lambda) - P_{21}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) &= (\Gamma\Phi)(x, \lambda)(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) \\ &- \Phi(x, \lambda)(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda)(\Gamma\varphi)(x, \lambda) \\ P_{22}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) - P_{12}(x, \lambda)(\Gamma\varphi)(x, \lambda) &= (\Gamma\Phi)(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) \\ &- \Phi(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda)(\Gamma\varphi)(x, \lambda) \end{aligned} \right.$$

ve

$\langle \varphi(x, \lambda), \Phi(x, \lambda) \rangle = 1$ olduğundan, $\varphi(x, \lambda)(\Gamma\Phi)(x, \lambda) - (\Gamma\varphi)(x, \lambda)\Phi(x, \lambda) = 1$

dir. Dolayısıyla;

$$\begin{cases} P_{11}(x, \lambda)(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) - P_{21}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) = (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \\ P_{22}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) - P_{12}(x, \lambda)(\Gamma\varphi)(x, \lambda) = \tilde{\varphi}(x, \lambda) \end{cases}$$

elde edilir.

(3.1.14) ve (3.1.16)'dan yararlanarak,

$$\begin{aligned} & \frac{P_{jk}(x, \lambda) - P_{jk}(x, \mu)}{\lambda - \mu} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ \langle y(x), \tilde{\Phi}(x, \xi) \rangle \begin{bmatrix} \varphi(x, \xi) \\ (\Gamma\varphi)(x, \xi) \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. - \langle y(x), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \begin{bmatrix} \Phi(x, \xi) \\ (\Gamma\Phi)(x, \xi) \end{bmatrix} \right\} \frac{d\xi}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} \\ & + \varepsilon_N^0(x, \lambda, \mu), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N^0(x, \lambda, \mu) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

olarak hesaplanır. (2.3.3)'den; $P(x, \lambda) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x, \lambda) \\ (\Gamma\varphi)(x, \lambda) \end{bmatrix}$ dir. Bu

nedenle;

$$\det \left(P(x, \lambda) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(x, \mu) \\ (\Gamma\varphi)(x, \mu) \end{bmatrix} \right) = \langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle$$

dir. Ayrıca (3.1.15) kullanılarak;

$$\begin{aligned} & \det \left(P(x, \mu) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(x, \mu) \\ (\Gamma\varphi)(x, \mu) \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} P_{11}(x, \mu)\tilde{\varphi}(x, \lambda) + P_{12}(x, \mu)(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) & \varphi(x, \mu) \\ P_{21}(x, \mu)\tilde{\varphi}(x, \lambda) + P_{22}(x, \mu)(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) & (\Gamma\varphi)(x, \mu) \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\varphi}(x, \lambda) (P_{11}(x, \mu)(\Gamma\varphi)(x, \mu) - P_{21}(x, \mu)\varphi(x, \mu)) \\ & \quad - (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) (P_{22}(x, \mu)\varphi(x, \mu) - P_{12}(x, \mu)(\Gamma\varphi)(x, \mu)) \\ &= \tilde{\varphi}(x, \lambda) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \mu) - (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda)\varphi(x, \mu) = \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\det \left((P(x, \lambda) - P(x, \mu)) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(x, \mu) \\ (\Gamma\varphi)(x, \mu) \end{bmatrix} \right) \\ = \langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle - \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.1.17) de $y(x) = \tilde{\varphi}(x, \lambda)$ için;

$$\frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\Phi}(x, \xi) \rangle \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} \right. \\ \left. - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \langle \Phi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} \right\} d\xi \\ + \varepsilon'_N(x, \lambda, \mu), \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon'_N(x, \lambda, \mu) = 0$$

sağlanır. (2.3.1), (*) ve Rezidü teoreminden (3.1.11) elde edilir.

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\Phi}(x, \xi) \rangle \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{C}(x, \xi) + \tilde{M}(\xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left\{ \tilde{\varphi}(x, \lambda) (\Gamma\tilde{C})(x, \xi) + \tilde{\varphi}(x, \lambda) \tilde{M}(\xi) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \xi) - (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{C}(x, \xi) \right. \\ \left. - (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{M}(\xi) \tilde{\varphi}(x, \xi) \right\} \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle \frac{d\xi}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} \\ I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\tilde{M}(\xi) \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\ I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \langle \Phi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \langle C(x, \xi) + M(\xi) \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \{ C(x, \xi) (\Gamma\varphi)(x, \mu) + M(\xi) \varphi(x, \xi) (\Gamma\varphi)(x, \mu) \\ - (\Gamma C)(x, \xi) \varphi(x, \mu) - M(\xi) (\Gamma\varphi)(x, \xi) \varphi(x, \mu) \} \frac{d\xi}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{M(\xi) \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\
&\quad \frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\hat{M}(\xi) \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\
&+ \varepsilon'_N(x, \lambda, \mu) = 0
\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\hat{M}(\xi) \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{kj}(x) \rangle \langle \varphi_{kj}(x), \varphi(x, \mu) \rangle}{\alpha_{kj}(\lambda - \lambda_{kj})(\lambda_{kj} - \mu)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $N \rightarrow \infty$ için limite geçilirse;

$$\begin{aligned}
&\frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \\
&+ \sum_{k=0}^N \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{kj}(x) \rangle \langle \varphi_{kj}(x), \varphi(x, \mu) \rangle}{\alpha_{kj}(\lambda - \lambda_{kj})(\lambda_{kj} - \mu)} = 0
\end{aligned}$$

sonucu alınır.

Benzer şekilde aşağıdaki formüller de elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} \varphi_{k0}(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} \varphi_{k1}(x) \right) \quad (3.1.18)
\end{aligned}$$

$\tilde{P}_{ni,kj}(x)$ ile $P_{ni,kj}(x)$ 'in tanımından ve (3.1.10) , (3.1.11) den;

$$\tilde{\varphi}_{ni}(x) = \varphi_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{P}_{ni,k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \tilde{P}_{ni,k1}(x) \varphi_{k1}(x)) \quad (3.1.19)$$

$$P_{ni,lj}(x) - \tilde{P}_{ni,lj}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{P}_{ni,k0}(x) P_{k0,lj}(x) - \tilde{P}_{ni,k1}(x) P_{k1,lj}(x)) = 0 \quad (3.1.20)$$

olur. ■

Şimdi

$$\varepsilon_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right), \text{ ve } \varepsilon(x) = -2\varepsilon'_0(x) \quad (3.1.21)$$

tanımlansın.

Lemma 3.1.4: (3.1.21)'deki seriler, $[0, \pi]$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. $\varepsilon_0(x)$ fonksiyonu mutlak sürekli ve $\varepsilon(x) \in L_2(0, \pi)$ dir.

İspat: $\varepsilon_0(x)$ fonksiyonunu

$$\varepsilon_0(x) = A_1(x) + A_2(x) \quad (3.1.22)$$

formunda yeniden yazalım. Burada;

$$\begin{cases} A_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}} \right) \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) \\ A_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{k1}} \{ (\tilde{\varphi}_{k0}(x) - \tilde{\varphi}_{k1}(x)) \varphi_{k0}(x) + \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x)) \} \end{cases} \quad (3.1.23)$$

dir. (3.1.3) ve (3.1.6)' dan (3.1.23) deki seriler $[0, \pi]$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır ve

$$|A_j(x)| \leq c \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \leq c\Omega, j = 1, 2 \quad (3.1.24)$$

geçerlidir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha_{n0}} = \frac{1}{\alpha_{n0}^0 + \delta_{n0}} = \frac{1}{\alpha_{n0}^0} \frac{1}{1 + \frac{\delta_{n0}}{\alpha_{n0}^0}} = \frac{1}{\alpha_{n0}^0} \left(1 - \frac{\delta_{n0}}{\alpha_{n0}^0} + \frac{\delta_{n0}^3}{(\alpha_{n0}^0)^3} - \dots \right) \right. \\ \left. \frac{1}{\alpha_{n1}} = \frac{1}{\alpha_{n1}^0 + \delta_{n1}} = \frac{1}{\alpha_{n1}^0} \frac{1}{1 + \frac{\delta_{n1}}{\alpha_{n1}^0}} = \frac{1}{\alpha_{n1}^0} \left(1 - \frac{\delta_{n1}}{\alpha_{n1}^0} + \frac{\delta_{n1}^3}{(\alpha_{n1}^0)^3} - \dots \right) \right) \end{aligned}$$

dir. α_{n0}^0 ve α_{n1}^0 sayıları $q \equiv 0$ ve $C = 0$ durumuna karşılık gelen normalleştirici sayılar olduğundan $\alpha_{n0}^0 = \alpha_{n1}^0 = \frac{\pi}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{n0}} - \frac{1}{\alpha_{n1}} &= \left(\frac{1}{\alpha_{n0}^0} - \frac{1}{\alpha_{n1}^0} \right) + \left(-\frac{\delta_{n0}}{(\alpha_{n0}^0)^2} + \frac{\delta_{n1}}{(\alpha_{n1}^0)^2} \right) + \dots \\ &= \left(-\frac{\delta_{n0}}{(\alpha_{n0}^0)^2} + \frac{\delta_{n1}}{(\alpha_{n1}^0)^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
|A_1(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}} \right) \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}} \right| |\tilde{\varphi}_{k0}(x)| |\varphi_{k0}(x)| \\
&\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}} \right| = c \sum_{k=0}^{\infty} \left| -\frac{\delta_{k0}}{(\alpha_{n0}^0)^2} + \frac{\delta_{k1}}{(\alpha_{n1}^0)^2} \right| \\
&= \frac{4c}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} |\delta_{k1} - \delta_{k0}| \leq c \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| \\
&\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\xi_k}{k+1} \leq c \left(\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)\xi_k]^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_2(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{k1}} \{ (\tilde{\varphi}_{k0}(x) - \tilde{\varphi}_{k1}(x)) \varphi_{k0}(x) + \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x)) \} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_{k1}} \right| \{ |\tilde{\varphi}_{k0}(x) - \tilde{\varphi}_{k1}(x)| |\varphi_{k0}(x)| + |\tilde{\varphi}_{k1}(x)| |\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x)| \} \\
&\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{|\alpha_{k1}|} \leq c \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\xi_k}{k+1} \\
&\leq c \left(\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)\xi_k]^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c\Omega
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
A_1'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}} \right) \frac{d}{dx} (\tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\sin 2kx + \frac{\eta_k(x)}{k+1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{\gamma_k\} \in l_2$ ve $k \geq 0$ için $\max_{0 \leq x \leq \pi} |\eta_k(x)| \leq c$ dir. Böylece $A_1(x) \in W_2^1(0, \pi)$ dir. Benzer şekilde $A_2(x) \in W_2^1(0, \pi)$ olduğu alınır ve sonuç olarak $\varepsilon(x) \in W_2^1(0, \pi)$ dir.

Lemma 3.1.5: Aşağıdaki formül geçerlidir:

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \varepsilon(x) \quad (3.1.25)$$

Burada $\varepsilon(x)$, (3.1.21) de tanımlanmıştır.

İspat: (3.1.10) ifadesi x 'e göre iki kez diferansiyellenirse ve (3.1.1) ile (3.1.21) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) - \varepsilon_0(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) &= (\Gamma\varphi)(x, \lambda) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right) \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma\tilde{\varphi})'(x, \lambda) &= (\Gamma\varphi)'(x, \lambda) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})'(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})'(x) \right) \\ &+ 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} [\Gamma(\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k0}(x))] \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} [\Gamma(\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k1}(x))] \varphi_{k1}(x) \right) \\ &+ 2u(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi_{k1}(x) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left(\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} \varphi_{k0}(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} \varphi_{k1}(x) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) &= (\Gamma\varphi)(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\lambda - \lambda_{k0})\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k0}(x)}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} \varphi_{k0}(x) \right. \\ &+ \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{(\lambda - \lambda_{k1})\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k1}(x)}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} \varphi_{k1}(x) \\ &\left. - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) &= (\Gamma\varphi)(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi_{k1}(x) \right) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) - \varepsilon_0(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) &= (\Gamma\varphi)(x, \lambda) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right) \end{aligned}$$

formülü elde edilir.

$$\begin{aligned}
(\Gamma\tilde{\varphi})'(x, \lambda) &= (\Gamma\varphi)'(x, \lambda) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})'(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})'(x) \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} (\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k0}(x))' \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} (\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k1}(x))' \varphi_{k1}(x) \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi'_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi'_{k1}(x) \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k0}(x)}{\alpha_{k0}} (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k1}(x)}{\alpha_{k1}} (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma\tilde{\varphi})'(x, \lambda) &= (\Gamma\varphi)'(x, \lambda) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})'(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})'(x) \right) \\
&+ 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right\} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \Gamma(\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k0}(x)) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \Gamma(\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k1}(x)) \varphi_{k1}(x) \right) \\
&+ 2u(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi_{k1}(x) \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.)

Burada (2.1) denklemini kullanıp, $[(\Gamma\varphi)(x, \lambda)]'$ ve $[(\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda)]'$ türevlerini yerine yazıp ve (3.1.10) denklemini kullanarak $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ 'yı yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
&-u(x) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) - u^2(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) + \tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) - \lambda\tilde{\varphi}(x, \lambda) = -u(x) (\Gamma\varphi)(x, \lambda) \\
&-u^2(x)\varphi(x, \lambda) + q(x)\varphi(x, \lambda) - \lambda\varphi(x, \lambda) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (-u(x) (\Gamma\varphi_{k0})(x) - u^2(x)\varphi_{k0}(x) + q(x)\varphi_{k0}(x) - \lambda_{k0}\varphi_{k0}(x)) \right. \\
&\left. - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (-u(x) (\Gamma\varphi_{k1})(x) - u^2(x)\varphi_{k1}(x) + q(x)\varphi_{k1}(x) - \lambda_{k1}\varphi_{k1}(x)) \right\} \\
&+ 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right\} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \Gamma(\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k0}(x)) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \Gamma(\tilde{\varphi}(x, \lambda)\tilde{\varphi}_{k1}(x)) \varphi_{k1}(x) \right)
\end{aligned}$$

$$+3u(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) - u(x) (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) &= q(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) - u(x) (\Gamma\varphi)(x, \lambda) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle \varphi_{k1}(x) \right) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ -u(x) \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})} (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})} (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right) \right\} \\ &+ 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) (\Gamma\varphi_{k0})(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right\} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma\tilde{\varphi}_{k0})(x) \varphi_{k0}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) \right. \\ &- \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma\tilde{\varphi}_{k1})(x) \varphi_{k1}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) - \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \\ &\left. + 2u(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right) \right\} \\ &+ 2u(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) &= q(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle \varphi_{k0}(x) \right. \\ &- \left. \frac{1}{\alpha_{k1}} \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle \varphi_{k1}(x) \right\} + 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) (\Gamma\varphi_{k0})(x) \right. \\ &- \left. \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\Gamma\varphi_{k1})(x) \right\} + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma\tilde{\varphi}_{k0})(x) \varphi_{k0}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \right. \\ &+ \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma\tilde{\varphi}_{k1})(x) \varphi_{k1}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ &- \left. \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right\} \\ &+ 4u(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) &= q(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}(x, \lambda) (\Gamma\tilde{\varphi}_{k0})(x) \varphi_{k0}(x) \right. \\ &- \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}(x, \lambda) (\Gamma\tilde{\varphi}_{k1})(x) \varphi_{k1}(x) \\ &\left. + \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma\tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right\} + 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) (\Gamma\varphi_{k0})(x) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\Gamma \varphi_{k1})(x) \Big\} + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma \tilde{\varphi}_{k0})(x) \varphi_{k0}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \right. \\
& + \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma \tilde{\varphi}_{k1})(x) \varphi_{k1}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\
& \left. - \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma \tilde{\varphi})(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right\} \\
& + 4u(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) &= q(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) + 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} (\Gamma \tilde{\varphi}_{k0})(x) \varphi_{k0}(x) \right. \\
& + \frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) (\Gamma \varphi_{k0})(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} (\Gamma \tilde{\varphi}_{k1})(x) \varphi_{k1}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) (\Gamma \varphi_{k1})(x) \Big\} \\
& + 4u(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) &= q(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) + 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) [\varepsilon'_0(x) \\
& - 2u(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k0}} \varphi_{k0}(x) \tilde{\varphi}_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \varphi_{k1}(x) \tilde{\varphi}_{k1}(x) \right\}] \\
& + 4u(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k0}} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right)
\end{aligned}$$

$$\tilde{q}(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) = q(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \tilde{\varphi}(x, \lambda) 2\varepsilon'_0(x)$$

$$\tilde{q}(x) = q(x) - \varepsilon(x)$$

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \varepsilon(x)$$

elde edilir. ■

Uyarı 3.1.1 : Herbir fix edilmiş $x \in [0, \pi]$ için (3.1.19) eşitliği, $n \geq 0$, $i = 0, 1$ olmak üzere $\varphi_{ni}(x)$ 'e göre lineer bir denklem sistemi olarak ele alınabilir. Fakat (3.1.19) daki seriler yalnızca "köşeli parantez" (Lagrange) anlamında yakınsar. Bu yüzden ters problemin esas denklemi olarak (3.1.19) denklemini kullanmak elverişli değildir. Aşağıda (3.1.19) denklemini Banach diziler uzayında bir lineer denkleme dönüştürülecektir.

$n \geq 0, i = 0, 1$ olmak üzere V kümesi; $u = (n, i)$ indis kümesi olsun. Herbir

fix edilmiş $x \in [0, \pi]$ için;

$$\begin{bmatrix} \Psi_{n0}(x) \\ \Psi_{n1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n0}(x) \\ \varphi_{n1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n (\varphi_{n0}(x) - \varphi_{n1}(x)) \\ \varphi_{n1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\chi_n = \begin{cases} \xi_n^{-1} & , \xi_n \neq 0 \\ 0 & , \xi_n = 0 \end{cases}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= [\Psi_u(x)]_{u \in V} = \begin{bmatrix} \Psi_{n0}(x) \\ \Psi_{n1}(x) \end{bmatrix}_{n \geq 0} \\ &= [\Psi_{00}, \Psi_{01}, \Psi_{10}, \Psi_{11}, \dots]^T \end{aligned}$$

vektörünü tanımlayalım. Aynı zamanda;

$$\begin{bmatrix} H_{n0,k0}(x) & H_{n0,k1}(x) \\ H_{n1,k0}(x) & H_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n0,k0}(x) & P_{n0,k1}(x) \\ P_{n1,k0}(x) & P_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_k \chi_n (P_{n0,k0}(x) - P_{n1,k0}(x)) & \chi_n (P_{n0,k0}(x) - P_{n0,k1}(x) - P_{n1,k0}(x) + P_{n1,k1}(x)) \\ \xi_k P_{n1,k0}(x) & P_{n1,k0}(x) - P_{n1,k1}(x) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$H(x) = [H_{u,v}(x)]_{u,v \in V} = \begin{bmatrix} H_{n0,k0}(x) & H_{n0,k1}(x) \\ H_{n1,k0}(x) & H_{n1,k1}(x) \end{bmatrix}_{n,k \geq 0}, \quad u = (n, i), v = (k, j)$$

blok matrisini tanımlayalım. Benzer şekilde; önceki tanımlarda $\varphi_{ni}(x)$ ile $\tilde{\varphi}_{ni}(x)$ ' i ve $P_{ni,kj}(x)$ ile $\tilde{P}_{ni,kj}(x)$ ' i yer değiştirerek $\tilde{\Psi}(x)$ ve $\tilde{H}(x)$ ' i de tanımlayabiliriz. (3.1.6) ve (3.1.7) den

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{ni}^{(v)}(x) \right| &\leq c(n+1)^v, \quad |H_{ni,kj}(x)| \leq \frac{c\xi_k}{|n-k|+1} \\ \left| H_{ni,kj}^{(v+1)}(x) \right| &\leq c(n+k+1)^v \xi_k \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

dır. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Psi}_{ni}^{(v)}(x) \right| &\leq c(n+1)^v, \quad \left| \tilde{H}_{ni,kj}(x) \right| \leq \frac{c\xi_k}{|n-k|+1} \\ \left| \tilde{H}_{ni,kj}^{(v+1)}(x) \right| &\leq c(n+k+1)^v \xi_k \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

ve aynı zamanda,

$$\left| \tilde{H}_{ni,kj}(x) - \tilde{H}_{ni,kj}(x_0) \right| \leq c|x - x_0| \xi_k, x, x_0 \in [0, \pi] \quad (3.1.29)$$

dır. Burada c ; x, x_0, n, i, j ve k ya bağlı değildir.

$$\|\alpha\|_m = \sup_{u \in V} |\alpha_u|$$

normu ile verilen sınırlı dizilerin Banach uzayı düşünölsün. (3.1.27) ve (3.1.28)'den fix edilmiş $\forall x \in [0, \pi]$ için (E birim operatör) m den m ye tanımlı $E + \tilde{H}(x)$ ve $E - H(x)$ sınırlı lineer operatörlerdir ve

$$\|H(x)\|, \|\tilde{H}(x)\| \leq c \sup_n \sum_k \frac{\xi_k}{|n - k| + 1} < \infty \quad (3.1.30)$$

dir.

Teorem 3.1.1 : Fix edilmiş $\forall x \in [0, \pi]$ için $\Psi(x) \in m$ vektörü, m Banach uzayında;

$$\tilde{\Psi}(x) = (E + \tilde{H}(x)) \Psi(x) \quad (3.1.31)$$

denklemini sağlar. Ayrıca $E + \tilde{H}(x)$ operatörü sınırlı bir terse sahiptir yani (3.1.31) denklemi tek olarak çözülebilir.

İspat: (3.1.19) denklemi;

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{n0}(x) - \tilde{\varphi}_{n1}(x) &= \varphi_{n0}(x) - \varphi_{n1}(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(\tilde{P}_{n0,k0}(x) - \tilde{P}_{n1,k0}(x) \right) (\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x)) \right. \\ &\left. + \left(\tilde{P}_{n0,k0}(x) - \tilde{P}_{n1,k0}(x) - \tilde{P}_{n0,k1}(x) + \tilde{P}_{n1,k1}(x) \right) \varphi_{k1}(x) \right\} \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_{n1}(x) = \varphi_{n1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \tilde{P}_{n1,k0}(x) (\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x)) + \left(\tilde{P}_{n1,k0}(x) - \tilde{P}_{n1,k1}(x) \right) \varphi_{k1}(x) \right\}$$

formunda yeniden yazılsın. Notasyonlar hesaba katılarak (3.1.31) denklemine denk;

$$\tilde{\Psi}_{ni}(x) = \Psi_{ni}(x) + \sum_{k,j} \tilde{H}_{ni,kj}(x) \Psi_{kj}(x), (n, i), (k, j) \in V \quad (3.1.32)$$

eşitliği elde edilir. (3.1.32) deki seriler $x \in [0, \pi]$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Benzer şekilde (3.1.20)'nin

$$H_{ni,kj}(x) - \tilde{H}_{ni,kj}(x) + \sum_{l,s} \tilde{H}_{ni,ls}(x) H_{ls,kj}(x) = 0, (n, i), (k, j), (l, s) \in V$$

yada

$$(E + \tilde{H}(x))(E - H(x)) = E$$

formu alınabilir. L ve \tilde{L} nin yerlerini birbirleriyle değiştirerek benzer şekilde;

$$\Psi(x) = (E - H(x))\tilde{\Psi}(x), (E - H(x))(E + \tilde{H}(x)) = E$$

elde edilir. Böylece $(E + \tilde{H}(x))^{-1}$ vardır ve sınırlı lineer bir operatördür. ■

(3.1.31) denklemini ters problemin 'esas denklem' i olarak adlandırılır. (3.1.31) denklemini çözmek için $\Psi(x)$ vektörü ve sonuç olarak $\varphi_{ni}(x)$ fonksiyonları bulunur. (2.1) denkleminin çözümleri $\varphi_{ni}(x) = \varphi(x, \lambda_{ni})$ olduğundan $q(x)$ fonksiyonu elde edilebilir.

Algoritma: $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ sayıları verilsin.

- (i) $d_n = \tilde{d}_n$ olacak şekilde \tilde{L} problemi seçilir ve $\tilde{\Psi}(x), \tilde{H}(x)$ elde edilir.
- (ii) (3.1.31) denkleminin çözümü yardımıyla $\Psi(x)$ bulunur.
- (iii) (3.1.21) ve (3.1.25) eşitliklerinden $q(x)$ hesaplanır.

KAYNAKLAR

- [1]. V.A. Ambartsumyan, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 (1929), 690-695.
- [2]. G.Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 (1945), 1-96.
- [3]. N. Levinson, 1949, The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., pp. 25-30.
- [4]. N.,Levinson, 1949, Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74, 17-20.
- [5]. J. Delsarte, 1938b, Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.
- [6]. J.,Delsarte, and J. Lions, 1957, Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.
- [7]. B. M. Levitan, 1964, Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.
- [8]. A. V. Povzner, 1948, On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.
- [9]. V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 (1950), 457-560.
- [10]. M.G. Krein, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 (1951), 21-24.
- [11]. M.G. Krein, On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95 (1954), 767-770.
- [12] A.N. Tikhonov, Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 1949, 797-800.
- [13]. I.M. Gelfand and B. M. Levitan, On the Determination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 15

(1951), 309-360.

[14]. M.G. Gasimov and B. M. Levitan, About Sturm-Liouville Differential Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3, (1964).

[15]. R. O. Hryniv and Ya. V. Mykytyuk, Inverse Spectral Problems for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials, Inverse Problems 19 (2003) 665-684.

[16]. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, 1999 Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials Mat. Zametki 66 897-912 (in Russian).

[17]. S. Albeverio , F. Gesztesy , R. Høegh-Krohn and H. Holden 1988, Solvable Models in Quantum Mechanics(New York:Springer)

[18]. S. Albeverio and P. Kurasov, 2000 Singular Perturbations of Differential Operators, Solvable Schrödinger Type Operators (Cambridge: Cambridge University Press)

[19]. A. M. Savchuk, 2001 On Eigenvalues and Eigenfunctions of Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials Mat. Zametki 69 277-85 (in Russian).

[20]. R. O. Hryniv and Ya V. Mykytyuk, 2003 Transformation Operators for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials Math. Phys. Anal. Geom.

[21]. J. Pöschel and E. Trubowitz, 1987 Inverse Spectral Theory(Pure Appl. Math. Vol 130)(Orlando, FL:Academic).

[22]. V. A. Marchenko 1950 Some Questions of the Theory of Second Order Differential Operators Dokl. Akad. Nauk SSSR 72 457-60.

[23]. I. M. Gelfand and B. M. Levitan, 1951 On Determination of a Differential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15 309-60 (in Russian).

[24]. M. G. Krein, 1951 Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem Dokl. Akad. Nauk SSSR 76 21-4 (in Russian).

[25]. O. Hald, 1984 Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem Commun. Pure Appl. Math. 37 539-77.

[26]. L. Andersson, 1988 Inverse Eigenvalue Problems for a Sturm-Liouville

Equation in Impedance Form Inverse Problems 4 929-71.

[27]. R. Carlson, 1994 Inverse Sturm-Liouville Problems with a Singularity at Zero Inverse Problems 10 851-64.

[28]. O. Hald and J. R. McLaughlin, 1998 Inverse Problems: Recovery of BV Coefficients From Nodes Inverse Problems 14 245-73.

[29]. V. A. Yurko, 2000 Inverse Problems for Differential Equations with Singularities Lying Inside the Interval J. Inverse III-Posed Probl. 8 89-103.

[30]. G. Freiling and V. Yurko, 2002 On the Determination of Differential Equations with Singularities and Turning Points Results Math. 41 275-90.

[31]. R. Kh. Amirov and V. A. Yurko, On Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval. Ukr. Math. Jour., 2001, v.53, No11, p. 1443-1458.

[32]. R. Kh Amirov, Direct and Inverse Problems for Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval Transactions of NAS Azerbaijan.

[33]. R. Kh Amirov, On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Conditions Inside an Interval J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 163-176.

[34]. V. F. Zhdanovich, Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135, No.8, 1046-1049 (1960).

[35]. Nilifer Topsakal, Sonlu Aralıkta Coulomb Potansiyele Sahip Sturm- Liouville Operatörü İçin Ters (Inverse) Problemler (2008)

[36]. M. A. Naimark, Elementary Theory Of Linear Differential Operators

[37]. M. G. Krein and B. Ya. Levin, On Entire Almost Periodic Functions of Exponential Type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64, No.3, 285-287 (1948).

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Sivas' ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Sivas' ta tamamladı. 2008 yılında, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2008 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Şu an aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaya devam etmekte.