T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU SASAKI UZAYDA SONLU TİPTEN EĞRİLER

Arzu AKTAŞ
Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **20/01/2012**

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

ARZU AKTAŞ tarafından **YRD. DOÇ. DR. ÇETİN CAMCI** yönetiminde hazırlanan "**ÜÇ BOYUTLU SASAKI UZAYDA SONLU TİPTEN EĞRİLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

Danışman

Prof. Dr. İhsan YILMAZ

Jüri Üyesi

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 20/01/2012

Prof. Dr. İsmet KAYA

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Arzu AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen değerli eşim Can AKTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Arzu AKTAŞ

ÖZET

ÜÇ BOYUTLU SASAKI UZAYDA SONLU TİPTEN EĞRİLER

Arzu AKTAŞ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

20/01/2012, 59

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, 3 – boyutlu Sasaki uzayda silindirdeki sonlu tipten eğrileri incelemektir. Birinci bölümde giriş kısmı verilip, konuyla ilgili literatür özeti yapılmıştır. İkinci bölümde konuyla ilgili temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, pozitif tanımlı (işareti (+, +, +)) olan metrikten elde ettiğimiz ve $\phi -$kesitesel eğriliği (– 3) olan $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayda $N^2(c)$ ve $N^2(a,b)$ silindirlerindeki sonlu tipten eğriler incelenmiştir. Bölüm dörtte ise $\mathbb{R}^3$ deki metrikler için (işareti (–, –, +), (+, +, –) ve (+, –, +) olan) $N^2(c)$, $N^2(a,b)$, $N_1^2(c)$ ve $N_1^2(a,b)$ silindirlerindeki sonlu tipten eğriler incelenmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar sözcükler: Hemen hemen kontak manifold, kontak manifold, kontak metrik manifold, Sasaki manifold.

ABSTRACT

FINITE TYPE CURVES IN 3 - DIMENSIONAL SASAKI SPACE

Arzu AKTAŞ
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of
Natural and Applied Science
Mathematics Division, Master of Science
Advisor : Assist. Prof. Dr. Çetin CAMCI
20/01/2012, 59

The purpose of this study was composed of five parts cylinder, 3 – dimensional space, the underlying finite Sasaki investigated types of curves. In the first chapter, the introduction has been given and summary of the literature on the subject were made. Basic definitions and concepts have been given in the second chapter. In the third chapter, in $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki space which has positive definite metric where signature is (+, +, +), and ϕ –sectional curvature is equal to – 3. We have studied finite type curve which lies in cylinders $N^2(c)$ and $N^2(a,b)$. In the fourth chapter, for indefinite metric in $\mathbb{R}^3$ (i.e. signature (-, -, +), (+, +, -) and (+, -, +)) we have studied finite type curve which lies in $N^2(c)$, $N^2(a,b)$, $N_1^2(c)$ and $N_1^2(a,b)$. The obtained results are discussed in the last chapater.

Keywords: Almost contact manifold, contact manifold, contact metric manifold, Sasaki manifold.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Baikoussis ve Blair (1991, 1994) $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ ün integral alt manifoldlar özellikle de bir boyutlu integral alt manifold (Legendre eğriler) çalışmışlardır. Baikoussis ve Blair 1994 deki çalışmada $N^2(c)$ silindirindeki sabit eğrilikli Legendre eğrisinin 1-tip olduğunu gerek ve yeter koşul olarak göstermiştir. Baikoussis ve Blair aynı makalelerinde keyfi eğriler için bu problemi açık problem olarak bırakmışlardır. Camcı ve Hacısaligoğlu (2010) çalışmasında Baikoussis ve Blair (1991) in "bir $N^2(c)$ silindirindeki bir sonlu tip eğri, $\mathbb{R}^3(-3)$ deki metrikte sabit eğriliktedir" konjektürünü ispatlamışlardır. $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayındaki metriğin *xOy* düzlemine izdüşümü Öklid metriğidir. $N^2(c)$ silindirinin *xOy* düzlemini ile arakesiti olan eğir çemberdir ve kompaktır. Camcı ve Aktaş, $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında taban eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki sonlu tip eğri çalışmışlardır.

Bu tez çalışmasında ikinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bölüm 3.1 de $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirindeki eğriler incelenmiştir. Bu kısımda Baikoussis ve Blair (1991, 1994), Camcı ve Hacısaligoğlu (2010)'nun çalışmalarından bahsedilmiştir. Bölüm 3.1 de $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında dayanak eğrisi elips olan $N^2(a,b)$ silindirindeki sonlu tipten eğriler çalışılmıştır. Bölüm 3.3 de ise dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki sonlu tipten eğrilerin varlığı araştırılmıştır. Burada görülmüştür ki sonlu tipten eğrinin silindir üzerinde olması için silindirin $N^2(a,b)$ olması gerektiği gerek ve yeter koşul olarak gösterilmiştir. Bölüm dörtte, bölüm üçteki kısım 3.2 ve 3.3 ün karşılığı işareti (+, +, –), (–, –, +) ve (+, –, +) durumunda irdelenmiştir. Bölüm dörtte ise işareti (–, –, +), (+, +, –), (+, –, +) olan metrikler için bölüm üçte bulunan sonuçların karşılıkları incelenmiştir. Özellikle metriğin işareti (+, –, +) durumunda farklı sonuçlar ile karşılaşılmıştır.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tanım 2.1 (Kontak Manifold): Bir $2n+1$ boyutlu C^∞ differansiyellenebilir M manifoldu verilsin. M manifoldu üzerinde verilen η 1-formu M nin her noktasında,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

oluyorsa, η ya **kontak form**, (M,η) ya da **kontak manifold** denir (Blair, 1976; Camcı, 2007).

Tanım 2.2 (Hemen Hemen Kontak Manifold): M bir $2n+1$ boyutlu manifold ve ϕ,ξ,η da M üzerinde sırasıyla (1,1), (1,0), (0,1) tipinde tensör alanları olsun. Eğer ϕ,ξ,η için, $\forall X \in \chi(M)$ olmak üzere;

(i) $\eta(\xi) = 1$

(ii) $\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$

özellikleri sağlanıyorsa (ϕ,ξ,η) üçlüsüne M üzerinde **hemen hemen kontak yapı** ve

(M,ϕ,ξ,η) dörtlüsüne **hemen hemen kontak manifold** denir (Blair, 1976; Camcı, 2007).

Tanım 2.3 (Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold): (M,ϕ,ξ,η), $(2n+1)$boyutlu hemen hemen kontak manifold olsun ve 'g' Riemannian metrik iken

$$g(\xi,\xi) = 1$$

olarak tanımlansın. Şayet $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi(X),\phi(Y)) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

koşulu sağlanıyorsa (ϕ,ξ,η,g) yapısına **hemen hemen kontak metrik yapı** ve (M,ϕ,ξ,η,g) manifolduna da **hemen hemen kontak metrik manifold** denir (Blair, 1976; Camcı 2007).

Tanım 2.4 (Kontak Metrik Manifold): M, $(2n+1)$ boyutlu manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin. Eğer

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi(Y))$$

oluyorsa (M, ϕ, ξ, η, g) ye **kontak metrik manifold,** (ϕ, ξ, η, g) yapısına da M' de **kontak metrik yapı** denir (Blair, 1976; Camcı, 2007).

Tanım 2.5 (İntegral Alt Manifoldu): (N, η) kontak manifoldu için;

$$D = \{X \in \chi(N): \eta(X) = 0\}$$

kümesi $\chi(N)$ nin 2n-boyutlu kontak dağılımıdır. M- boyutlu M manifoldu (N^{2n+1}, η) kontak manifoldunun alt manifoldu olmak üzere eğer her $X \in \chi(M)$ için $\eta(X) = 0$ oluyorsa M manifolduna N^{2n+1} kontak manifoldunun **integral alt manifoldu** denir (Baikousiss ve Blair, 1994; Camcı, 2007).

Tanım 2.6: $\eta(T) = sbt$ ise eğriye **slant eğri** denir. Kontak uzayda 1- boyutlu integral alt manifoldlara **Legendre eğri** denir (Baikousiss ve Blair, 1994; Camcı, 2007). Eğrinin Legendre olması $\eta(T) = 0$ (T eğrinin teğeti) olmasını gerektirir. Dolayısıyla Legendre eğriler özel slant eğrilerdir.

Tanım 2.7 (SasakiManifold): $2n+1$- boyutlu M manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ normal kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda M manifolduna **Sasaki manifold** ve $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ yapısına da **Sasaki yapı** denir (Blair, 1976; Camcı, 2007).

Aşağıdaki teorem Sasaki manifoldlar için karakteristik teoremdir.

Teorem 2.1: (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak manifoldu Sasaki manifoldtur ancak ve ancak her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

dir (Blair, 1976).

Örnek: $\mathbb{R}^3$de *(x, y, z)* koordinat sistemiyle verilsin. Burada

$$g := \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) + \eta \otimes \eta$$

veya matris formunda aşağıdaki şekildedir.

$$g := \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi := 2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\eta := \frac{1}{2}(dz - ydx)$$

olarak verildiğinde, bu uzay ϕ-kesitsel eğriliği (-3) olan bir Sasaki uzaydır. Bu nedenle bu uzaya $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayı denir. Bu uzayda $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ kümesi bir tabandır fakat bir ortonormal bir taban değildir. Bu uzayın ortonormal tabanı,

$$e_1 = e = 2\frac{\partial}{\partial y},\; e_2 = \phi e = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right), e_3 = \xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde tanımlanan $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ kümesidir (Baikousiss ve Blair, 1991, 1994).

Tanım 2.8 (Sonlu Tipte Alt Manifold): M manifoldu kompakt C^∞ Riemanian manifold olsun. M deki smooth(düzgün) fonksiyonların kümesi $C^\infty(M)$ olsun.$C^\infty(M)$ üzerinde eliptik self-adjoint diferansiyel operatör olan Δ Laplace operatörünün karakteristik değerlerinin kümesi

$$spec(M) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \uparrow \infty\}$$

olsun. Δ Laplace operatörünün k -inci karakteristik değeri olan λ_k ya karşılık gelen karakteristik uzay

$$V_k = \{f \in C^\infty(M) : \Delta f = \lambda_k f\}$$

olur. Burada V_k sonlu boyutludur. dV hacim elementi olmak üzere $C^\infty(M)$ de iç çarpımı

$$(f, g) = \int_M fgdV$$

olarak tanımlayabiliriz. Böylece $\forall f \in C^\infty(M)$ için bu fonksiyonun spektral ayrışımı

$$f = \sum_{t\geq 0} f_t, \quad \Delta f_t = \lambda_t f_t$$

olarak düşünebiliriz. Bunu bir izometrik immersiyon uygularsak

$$x : M \longrightarrow E^m$$

bir izometrik immersiyon olsun. Burada x in koordinat fonksiyonları $A = 1, \ldots, m$ için x_A ise $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ olarak yazabiliriz. Burada

$$x_A - (x_A)_0 = \sum_{t=p_A}^{q_A} (x_A)_t \tag{2.1}$$

olmak üzere $p_A = \{inft : (x_A)_t \neq 0\}$ ve $q_A = \{supt : (x_A)_t \neq 0\}$ olarak tanımlanıyor. Eğer $p = \inf\{p_A\}$, $q = \sup\{q_A\}$, x_0 sabit bir vektör ve

$$x_t : M \longrightarrow E^m$$

dönüşümleri de sabit olmayan smooth (düzgün) dönüşümler iken (2.1) denkleminin spektral ayrışımı

$$x - x_0 = \sum_{t=p}^{q} (x)_t\,,\ \Delta x_t = \lambda_t x_t \tag{2.2}$$

olur. Burada q sonlu ise E^m de M ye sonlu tipte alt manifold denir. (2.2) denklemindeki spektral ayrışımda x_t lerden k tane varsa E^m de M ye k-tipte alt manifold denir (Chen, 1984).

Tanım 2.9: $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında silindir,

$$N^2(c) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3(-3): g(x - x_0, x - x_0) - \eta(x - x_0) = r^2\}$$

veya

$$N^2(c) = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3(-3): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (2r)^2\}$$

şeklinde tanımlanır (Baikousis ve Blair, 1994).

Tanım 2.10: $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında ${N_1}^2(c)$ silindiri,

$${N_1}^2(c) = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3(-3): a^2(x - x_0)^2 - b^2(y - y_0)^2 = 4a^2b^2\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.11: $\mathbb{R}^3(-3)$ de regüler eğrisi $(I,\ \gamma)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. Burada

$$\phi^2(\gamma - \gamma_0) = \phi^2\gamma_1 + \cdots + \phi^2\gamma_k$$

olmak üzere

$$\Delta g(\gamma_i, e_j) = \lambda_i g(\gamma_i, e_j), \qquad i = 1, \dots, k \quad ve\ j = 1,2$$

koşulu sağlanıyorsa γ eğrisine k-tipli eğri denir (Baikousiss ve Blair, 1991, 1994).

Baikoussis ve Blair Legendre eğrileri için,

“Legendre eğri sonlu tip bir eğridir ancak ve ancak eğri sabit eğriliklidir ” (Baikoussis ve Blair, 1994) teoremini ispatlayıp **“Bir $\boldsymbol{N^2(c)}$ silindirindeki bir sonlu tip eğri, $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}(\mathbf{-3})$ deki metrikte sabit eğriliktedir ”** (Baikoussis ve Blair, 1994) problemini de açık problem olarak vermişlerdir. Baikoussis ve Blair (1994), $N^2(c)$ silindirindeki Legendre eğrinin 1 - tip olması için eğriliğin sabit olması gerektiğini gerek ve yeter koşul olarak vermiştir. Fakat bu teoremin herhangi eğri için doğru olabileceğini açık problem olarak bırakmışlardır. Camcı doktora tezinde (2007) bu teoremin herhangi eğri için doğru olduğunu ispatlamışlardır.

Tanım 2.12: $g|_W$ negatif tanımlı olmak üzere V’nin en geniş W alt uzayının boyutuna V üzerinde g’nin ‘’**indeksi** ‘’denir ve $ind\ V = q$ ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996) .

Örnek: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**’** de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$g(x, y) = -x_1y_1 - x_2y_2 - \cdots - x_qy_q + x_{q+1}y_{q+1} + \cdots + x_ny_n$$

$$= -\sum_{i=1}^{q} x_iy_i + \sum_{j=q+1}^{n} x_jy_j$$

ve $W = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_q, 0, \dots, 0) \middle| x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,2, \dots, q\}\right\} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ olsun.

Bu durumda $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_q}, 0,0, \dots, 0)$, $\bar{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \dots, \overline{y_q}, 0,0, \dots, 0)$ olmak üzere

$$\bar{g} = g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \to \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}).$$

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{x}) = -\overline{x_1}^2 - \overline{x_2}^2 - \cdots - \overline{x_q}^2 < 0$$

olup $\bar{g}$ negatif tanımlıdır. Boyutu daha geniş olanV nin bir W alt uzayı yoktur. O halde $ind\ \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = q$ dur. Burada $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, g) = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{q}}$ ile gösterilir (Duggal ve Bejancu,1996).

BÖLÜM 3
SİLİNDİRDEKİ SONLU TİP EĞRİLER

3.1. $\mathbb{R}^3(-3)$ ün $N^2(r)$ Silindirindeki Sonlu Tip Eğriler

γ, $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğri $N^2(r)$ de şöyle tanımlansın.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

Bu durumda;

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4r^2$$

vardır. Bu nedenle; $x(s) = 2r\cos\theta(s) + x_0,\ \ y(s) = 2r\sin\theta(s) + y_0$ yazılabilir.

Buradan;

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2r\cos\theta(s)\,, 2r\sin\theta(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = r\sin\theta e + r\cos\theta\phi e + \sigma\xi \qquad (3.1.1)$$

yazılabilir ki burada $\gamma_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ dır.

Lemma 3.1.1: γ, $N^2(r)$ silindirindeki eğri olsun.

Eğri 1-tiptir ancak ve ancak θ' sabittir (Camcı, 2007; Camcı ve Hacısalihoğlu, 2010).

İspat: Kabul edelim ki eğri 1-tip olsun. Eğri 1-tip ise spektral ayrışımdan

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_i) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_i),\ i = 1, 2$$

yazılabilir. İyi bilinir ki eğrinin Laplace;

$$\Delta f = -X_1 X_1 f = -f'' \qquad (3.1.2)$$

dır. Burada $X_1 = \gamma'$ eğrinin tek tanjant vektörüdür. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerinden;

$$-r\theta'' cos\theta + r(\theta')^2 \sin\theta = \lambda r \sin\theta$$

ve

$$r\theta'' \sin\theta + r(\theta')^2 \cos\theta = \lambda r \cos\theta$$

elde edilir. Yukarıdaki bu iki denklem birlikte çözüldüğünde θ' = sbt elde edilir.

Tersine $\theta' = c$ yani sabit olsun**.** Bu durumda $\theta(s) = cs + c_1$yazılabilir. (3.1.1) eşitliğinden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = r\sin\theta \ \text{ ve } g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = r\cos\theta$$

elde edilir. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerinden de;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = c^2 g(\gamma - \gamma_0, e)$$

ve

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = c^2 g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$$

elde edilir. Buradan da eğrinin 1-tip olduğunu görürüz.

Teorem 3.1.1: γ, $N^2(r)$ silindirindeki ve $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu verilen bir eğri olsun. Eğer eğri 1- tip ise eğri bir sabit eğriliğe sahiptir (Camcı, 2007; Camcı ve Hacısalihoğlu, 2010).

İspat:

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2r\cos\theta(s), 2r\sin\theta(s), z(s) - z_0)$$

eşitliğinde γ boyunca türev alırsak;

$$t = \gamma'(s) = \big(-2r\,\theta'(s)\sin\theta(s), 2r\theta'(s)\cos\theta(s), z'(s)\big)$$

burada $x' = -2r\,\theta'\sin\theta$, $y' = 2r\theta'\cos\theta$ dır. Dahası;

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(\phi e - y\xi),\ \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{e}{2},\ \ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\xi}{2}$$

olduğundan dolayı;

$$t = -2r\,\theta'(s)\sin\theta(s)\frac{\partial}{\partial x} + 2r\theta'(s)\cos\theta(s)\frac{\partial}{\partial y} + z'(s)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$t = r\theta'\cos\theta\, e - r\theta'\sin\theta\,\phi e + (r\theta'\sin\theta\, y + \frac{z'}{2})\xi$$

$$t = \tfrac{1}{2}(y'e + x'\phi e) + \sigma\xi \tag{3.1.3}$$

ve

$$1 = r^2(\theta')^2 + \sigma^2 \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Buradan;

$$\nabla_t t = \left(\tfrac{1}{2}y'' + \sigma x'\right)e + \left(\tfrac{1}{2}x'' - \sigma y'\right)\phi e + \sigma'\xi \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Burada $\kappa = \| \nabla_t t \|$ olduğundan

$$\kappa^2 = \left(\frac{1}{2}y'' + \sigma x'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x'' - \sigma y'\right)^2 + (\sigma')^2$$

ve

$$\kappa^2 = \tfrac{1}{4}((x'')^2 + (y'')^2) + \sigma(y''x' - x''y') + \sigma^2((x')^2 + (y')^2) + (\sigma')^2 \tag{3.1.6}$$

elde edilir. Ayrıca

$$x' = -2r\theta'\sin\theta, \qquad x'' = -2r\theta''\sin\theta - 2r(\theta')^2\cos\theta \tag{3.1.7}$$

ve

$$y' = 2r\theta'\cos\theta, \qquad y'' = 2r\theta''\cos\theta - 2r(\theta')^2\sin\theta \tag{3.1.8}$$

dır. (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) eşitliklerinden;

$$\kappa^2 = r^2(\theta')^4 + 4r^2(\theta')^3\sqrt{1-r^2(\theta')^2} + 4r^2(\theta')^2(1-r^2(\theta')^2) + \frac{r^4(\theta')^2(\theta'')^2}{1-r^2(\theta')^2}$$

Kabul edelim ki eğri 1-tip olsun. Lemma 3.1.1 den biliyoruz ki eğri 1-tip ise θ' sabittir. θ'sabit olduğundan κ da sabit olur. O halde eğrinin eğriliği sabittir.

Not 3.1.1: Yukarıdaki teoremde eğrinin 1-tip olması durumunda eğrinin eğriliğinin sabit olduğu ispatlandı. Fakat bu teoremin tersi doğru değildir. Yani eğrinin eğriliği sabit iken θ' sabit olmayabiliyor (Camcı, 2007; Camcı ve Hacısalihoğlu, 2010). Eğer F fonksiyonunu $\left(0,\ \frac{1}{r}\right)$ açık aralığından $\left(0,\ \frac{1}{r}\right)$ açık aralığına

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ru\,du}{\sqrt{1-r^2u^2}\sqrt{\frac{k^2}{r^2} + (4r^2-1)u^4 - 4u^3\sqrt{1-r^2u^2} - 4u^2}}$$

olarak tanımlayacak olursak

$$F'(y) = \frac{ry}{\sqrt{1-r^2y^2}\sqrt{\frac{k^2}{r^2} + (4r^2-1)y^4 - 4y^3\sqrt{1-r^2y^2} - 4y^2}}$$

olur. Burada k bir sabit ve $y, y_0 \in \left(0,\ \frac{1}{r}\right)$ dır. $F'(y) > 0$ olduğundan F fonksiyonun tersi vardır. $\theta(s)$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} F^{-1}(h)dh$$

Bu durumda κ, k ya eşit olur. Bu da θ' sabit olmadığından eğrinin 1-tip olmadığını gösterir (Camcı, 2007; Camcı ve Hacısalihoğlu, 2010).

Sonuç 3.1.1: γ, $\mathbb{R}^3(-3)$ deki $N^2(r)$ silindirindeki bir eğri olsun. (3.1.4) denkleminden; eğrinin slant eğri olması için (θ') nün sabit olması gerek ve yeter koşul olduğu kolayca görülür (Camcı, 2007; Camcı ve Hacısalihoğlu, 2010).

Teorem 3.1.2: γ, $\mathbb{R}^3(-3)$ deki $N^2(r)$ silindirindeki bir eğri olsun.

Eğri sonlu tiptir ancak ve ancak eğri 1-tiptir (Camcı, 2007; Camcı ve Hacısalihoğlu, 2010).

İspat: $\gamma, (I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri k-tip ise,

$$\phi^2(\gamma-\gamma_0)=\phi^2\gamma_1+\phi^2\gamma_2+\cdots+\phi^2\gamma_k$$

ve

$$\Delta g(\gamma_i, e_j) = \lambda_i g(\gamma_i, e_j)$$

dır. Burada $i=1,2,\dots,k \ \ ve \ \ j=1,2$ dır. Yukarıdaki denklem ve (3.1.2) denkleminden,

$$f''+\lambda_i f=0$$

elde edilir. Burada $f=g(\gamma_i, e_j)$ dır. Yukarıda elde edilen eşitlik integre edilirse

$$\gamma_i(s)=\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\,s)\right)e+\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\,s)\right)\phi e \\ +\ \mu\xi$$

Bu durumda;

$$g(\gamma-\gamma_0, e)=\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\,s)\right) \tag{3.1.9}$$

ve

$$g(\gamma-\gamma_0, \phi e)=\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\,s)\right) \tag{3.1.10}$$

elde edilir. (3.1.1), (3.1.9) ve (3.1.10) denklemlerinden,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\,s)\right)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\,s)\right)\right)^2$$
$$=r^2$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitliğin türevini alırsak,

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\sqrt{\lambda_i}(A_{i1}A_{i2}+B_{i1}B_{i2})\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)+\frac{1}{2}(A^2{}_{i2}+B^2{}_{i2}-A^2{}_{i1}-B^2{}_{i1})\sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)\right)+$$

$$\sum_{i\neq j}^{k}\left(\left(-\sqrt{\lambda_j}\left(A_{i1}A_{j1}+B_{i1}B_{j1}\right)+\sqrt{\lambda_i}\left(A_{i2}A_{j2}+B_{i2}B_{j2}\right)\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)+$$

$$\sum_{i\neq j}^{k}\left(\left(\sqrt{\lambda_j}\left(A_{i1}A_{j2}+B_{i1}B_{j2}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)-$$

$$\sum_{i\neq j}^{k}\left(\left(\sqrt{\lambda_j}\left(A_{i2}A_{j1}+B_{i2}B_{j1}\right)\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)=0$$

elde edilir. Burada

$\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)$, $\sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)$, $\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}\,s\right)$, $\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}\,s\right)$, $\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan;

$$A^2{}_{i2}+B^2{}_{i2}=A^2{}_{i1}+B^2{}_{i1}\,, \tag{3.1.11}$$

$$A_{i1}A_{i2}+B_{i1}B_{i2}=0, \tag{3.1.12}$$

$$\sqrt{\lambda_j}\left(A_{i1}A_{j1}+B_{i1}B_{j1}\right)=\sqrt{\lambda_i}\left(A_{i2}A_{j2}+B_{i2}B_{j2}\right), \tag{3.1.13}$$

$$A_{i1}A_{j2}+B_{i1}B_{j2}=0, \tag{3.1.14}$$

dır. Burada $i,j=1,2,\dots,k$ ve $i\neq j$ dir. Kabul edelim ki $A_{i1}\neq 0$ olsun ve (3.1.12) denklemini kullanarak,

$$A_{i2}=-\frac{B_{i1}B_{i2}}{A_{i1}} \tag{3.1.15}$$

(3.1.11) ve (3.1.15) denklemlerinden,

$$\frac{B^2{}_{i2}}{A^2{}_{i1}}(A^2{}_{i1} + B^2{}_{i1}) = A^2{}_{i1} + B^2{}_{i1}$$

ve

$$|B_{i2}| = |A_{i1}|, \qquad |B_{i1}| = |A_{i2}|$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın;

$$B_{i2} = A_{i1}, \quad B_{i1} = -A_{i2} \tag{3.1.16}$$

olduğunu kabul edelim. (3.1.13) ve (3.1.16) denklemlerinden,

$$\left(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right)\left(A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2}\right) = 0$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $\sqrt{\lambda_j} \neq \sqrt{\lambda_i}$ olduğundan,

$$A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} = 0 \tag{3.1.17}$$

elde edilir. (3.1.14) ve (3.1.16) denklemlerinden,

$$A_{i1}A_{j2} - A_{i2}A_{j1} = 0 \tag{3.1.18}$$

olur. $A_{i1} \neq 0$ olduğundan (3.1.17) ve (3.1.18) denklemlerinden

$$A^2{}_{j1} + A^2{}_{j2} = 0 \tag{3.1.19}$$

elde edilir. Buradan; $A_{j1} = A_{j2} = 0,\ j = 1, 2, \dots, k$ için olur ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla eğri 1-tiptir.

Teorem 3.1.3: γ, $\mathbb{R}^3(-3)$ deki $N^2(r)$ silindirindeki bir eğri olsun.

Eğri silindirde geodeziktir (minimal) ancak ve ancak θ'sabittir (Camcı ve Hacısalihoğlu 2010).

Sonuç 3.1.2: γ, $\mathbb{R}^3(-3)$ deki $N^2(r)$ silindirindeki bir eğri olsun. Teorem 3.1.1, Sonuç 3.1.1 ve Teorem 3.1.3 ün sonucu olarak aşağıdaki önermeler denktir (Camcı ve Hacısalihoğlu 2010).

(i)Eğri sonlu tiptir.

(ii) Eğri 1-tiptir.

(iii)Eğri slant eğridir.

(iv)θ' sabittir.

(v)Eğri silindirde minimaldir (geodeziktir).

3.2. $N^2(a, b)$ Silindirindeki Sonlu Tip Eğri

γ, $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve *s* eğri için yay parametresi olsun. $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi $N^2(a, b)$ silindirinde bir eğri ise

$$a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 = 4a^2b^2$$

dir. Böylece

$$x(s) = 2a\cos\alpha(s) + x_0,\ \ y(s) = 2b\sin\alpha(s) + y_0$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2a\cos\alpha(s)\,, 2b\sin\alpha(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = b\sin\alpha e + a\cos\alpha\phi e + \sigma\xi \qquad (3.2.1)$$

elde edilir. Burada $\gamma_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ dır.

Lemma 3.2.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri olsun. Eğri 1- tiptir ancak ve ancak α' sabittir (Camcı ve Aktaş).

İspat: Eğri 1-tip olsun. Eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_A) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_A),$$

vardır ve burada $A = 1, 2$ dir. İyi bilinir ki eğrinin Laplace;

$$\Delta f = -XX(f) = -f'' \tag{3.2.2}$$

dir. Burada $X_1 = \gamma'$dır. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerinden;

$A = 1$ ise $\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e)$ olur. Buradan;

$$-\alpha'' cos\alpha + (\alpha')^2 \sin\alpha = \lambda \sin\alpha \tag{3.2.3}$$

elde edilir.

$A = 2$ ise $\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$ olur. Buradan;

$$\alpha'' sin\alpha + (\alpha')^2 \cos\alpha = \lambda \cos\alpha \tag{3.2.4}$$

elde edilir. (3.2.3) ve (3.2.4) denklemlerinden; $(\alpha')^2 = \lambda$ elde edilir. Bu da α' nün sabit olduğunu gösterir. Tersine kabul edelim ki $\alpha' = c$ yani sabit olsun**.** Bu durumda;

$$\alpha(s) = cs + c_0$$

yazılabilir. (3.2.1) eşitliğinden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = b\sin\alpha \text{ ve } g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = a\cos\alpha$$

elde edilir. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerinden de;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = c^2 g(\gamma - \gamma_0, e)$$

ve

$$\Delta g(\gamma - \gamma\,_0, \phi e) = c^2 g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$$

elde edilir. Böylece eğrinin 1-tip olduğunu görülür.

Teorem 3.2.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri olsun. Bu durumda eğri sonlu tiptir ancak ve ancak eğri 1-tiptir (Camcı ve Aktaş).

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri k-tip ise,

$$\phi^2(\gamma - \gamma_0) = \phi^2\gamma_1 + \phi^2\gamma_2 + \cdots + \phi^2\gamma_n \qquad (3.2.5)$$

ve

$$\Delta g(\gamma_i, e_k) = \lambda_i g(\gamma_i, e_k)$$

dır. Burada $i = 1, 2, \dots, n \ \ ve \ \ k = 1, 2$dır. Yukarıdaki denklem ve (3.2.2) denkleminden,

$$f_{ik}'' + \lambda_i f_{ik} = 0$$

elde edilir. Burada $f_{ik} = g(\gamma_i, e_k)$ dır. Yukarıda elde edilen eşitlik integre edilirse

$$\gamma_i(s) = \left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s))e + \ \left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s))\phi e \ + \sigma\xi \qquad (3.2.6)$$

Bu durumda (3.2.5) denkleminden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = \textstyle\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)) \qquad (3.2.7)$$

ve

$$g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = \textstyle\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)) \qquad (3.2.8)$$

elde edilir. (3.2.1), (3.2.7) ve (3.2.8) denklemlerinden,

$$a^2\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s) + A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)\right)\right)^2 + b^2\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s) + \right.\right.$$
$$Bi2\sin(\lambda is)2{=}4a2b2 \qquad (3.2.9)$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitliğin türevini alırsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i}(a^2A_{i1}A_{i2} + b^2B_{i1}B_{i2})\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(a^2A^2{}_{i2}+b^2B^2{}_{i2}-a^2A^2{}_{i1}-b^2B^2{}_{i1})\sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(-\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i}\left(a^2A_{i2}A_{j2}+b^2B_{i2}B_{j2}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j2}+b^2B_{i1}B_{j2}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(-\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i2}A_{j1}+b^2B_{i2}B_{j1}\right)\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)=0$$

elde ederiz. Burada

$\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)$, $\sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)$, $\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\,\mathrm{csin}\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$, $\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$,

$\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan;

$$a^2A^2{}_{i2}+b^2B^2{}_{i2}=a^2A^2{}_{i1}+b^2B^2{}_{i1}\quad, \tag{3.2.10}$$

$$a^2A_{i1}A_{i2}+b^2B_{i1}B_{i2}=0 \tag{3.2.11}$$

$$\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}\right)=\sqrt{\lambda_i}\left(a^2A_{i2}A_{j2}+b^2B_{i2}B_{j2}\right), \tag{3.2.12}$$

$$a^2A_{i1}A_{j2}+b^2B_{i1}B_{j2}=0, \tag{3.2.13}$$

dır. Burada $i,j=1,2,\dots,n$ ve $i\neq j$ dir. Kabul edelim ki $A_{i1}\neq 0$ olsun ve (3.2.11) denklemini kullanarak,

$$A_{i2}=\frac{\boldsymbol{b^2}B_{i1}B_{i2}}{A_{i1}} \tag{3.2.14}$$

(3.2.10) ve (3.2.14) denklemlerinden,

$$\frac{B^2{}_{i2}}{A^2{}_{i1}}(a^2A^2{}_{i1} + b^2B^2{}_{i1}) = a^2A^2{}_{i1} + b^2B^2{}_{i1}$$

ve

$$|bB_{i2}| = |aA_{i1}|, \qquad |B_{bi1}| = |aA_{i2}|$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın;

$$bB_{i2} = aA_{i1}, \quad bB_{i1} = -aA_{i2} \tag{3.2.15}$$

olduğunu kabul edelim. (3.2.12) ve (3.2.15) denklemlerinden,

$$2a^2\left(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right)\left(A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2}\right) = 0$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $\sqrt{\lambda_j} \neq \sqrt{\lambda_i}$ olduğundan,

$$A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} = 0 \tag{3.2.16}$$

elde edilir. (3.2.13) ve (3.2.15) denklemlerinden,

$$A_{i1}A_{j2} - A_{i2}A_{j1} = 0 \tag{3.2.17}$$

olur. $A_{i1} \neq 0$ olduğundan (3.2.16) ve (3.2.17) denklemlerinden

$$A^2{}_{j1} + A^2{}_{j2} = 0 \tag{3.2.18}$$

elde edilir. Buradan; $A_{j1} = A_{j2} = 0,\ j = 1, 2, \dots, n$ için olur ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla eğri 1-tiptir.

Teorem 3.2.2: Eğer $a \neq b$ ise $N^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır (Camcı ve Aktaş).

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri sonlu tip ise Lemma 3.2.1 den $\alpha' = c$ dir. Eğer γ boyunca türev alırsak;

$$t = \gamma'(s) = \left(-2a\,\alpha'(\mathrm{s}) \sin \alpha(s)\,, 2b\alpha'(\mathrm{s}) \cos \alpha(\mathrm{s})\,, z'(s)\right)$$

elde edilir. Burada $x' = -2a\,\alpha' \sin \alpha$, $y' = 2b\alpha' \cos \alpha$ dır. Dahası;

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(\phi e - y\xi),\ \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{e}{2},\ \ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\xi}{2}$$

olduğundan dolayı;

$$t = \gamma' = \frac{1}{2}(y'e\ + x'\phi e) +\ \sigma\xi$$

olur. $\gamma(s) = \left(x(s), y(s), z(s)\right)$ birim hızlı eğrisi için $g(t,t) = 1$ olur.

$$g(t,t) = 1 = \frac{1}{4}((y')^2 + (x')^2) +\ \sigma^2$$

olur. Yukarıda ki denklemde x' ve y' değerleri yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$1 = c^2(b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) + \sigma^2$$

olur. Böylece

$$\frac{1-\sigma^2}{c^2} - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\alpha$$

elde edilir. Bu durumda $\sigma = c\ sbt$ ancak ve ancak *a=b* olduğu durumda sabittir. O halde $a \neq b$ ise $N^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır.

3.3. Dayanak Eğrisi *xOy* Düzleminde Kompakt Olan Silindirdeki Sonlu Tip Eğriler

$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Bu eğri dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğridir. Eğer eğri kutupsal koordinatlarla yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x = 2\rho(s)\cos\theta(s) + x_0$$

$$y = 2\rho(s)\sin\theta(s) + y_0$$

Böylece eğri

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2\rho(s)\cos\theta(s)\,, 2\rho(s)\sin\theta(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = \rho(s)\sin\theta(s)\,e + \rho(s)\cos\theta(s)\phi e + \sigma\xi$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\gamma_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dir. Eğer eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_i) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_i)$$

ve

$$(\rho'\theta' + (\rho\theta')')\cos\theta + (\rho'' - \rho(\theta')^2 + \lambda\rho)\sin\theta = 0$$

$$-(\rho'' - \rho(\theta')^2 + \lambda\rho)\cos\theta + (\rho'\theta' + (\rho\theta')')\sin\theta = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki bu iki denklem çözüldüğünde;

$$\rho'' - \rho(\theta')^2 + \lambda\rho = 0 \tag{3.3.1}$$

$$\rho'\theta' + (\rho\theta')' = 0 \tag{3.3.2}$$

elde edilir. (3.3.2) eşitliğinden;

$$2\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\theta''}{\theta'} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitliği integre edersek;

$$\rho^2\theta' = c \tag{3.3.3}$$

elde edilir. (3.3.1) ve (3.3.3) eşitliklerinden;

$$\rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

elde edilir. Eğer $y = \frac{d\rho}{ds}$ ise $\rho'' = y\frac{dy}{d\rho}$ olur. Bu ifadeyi yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$y\frac{dy}{d\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

ve

$$ydy - \left(\frac{c^2}{\rho^3} - \lambda\rho\right)d\rho = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi integre edersek

$$y^2\rho^2 = k\rho^2 - c^2 - \lambda\rho^4$$

elde edilir. $y = \frac{d\rho}{ds}$ olduğundan $ds = \frac{\rho d\rho}{y\rho}$ olur. Bu eşitliği integre edersek

$$\varepsilon(s+m) = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{k\rho^2 - c^2 - \lambda\rho^4}}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ tır. Eğer yukarıdaki eşitliği integre edersek

$$\rho^2 = \frac{\sqrt{k^2 - 4\lambda c^2}}{2\lambda}\sin\left(2\varepsilon\sqrt{\lambda}(s+m)\right) + \frac{k}{2\lambda} \qquad (3.3.4)$$

elde edilir. (3.3.3) ve (3.3.4) eşitliklerinden

$$\tan(\varepsilon(\theta - \theta_0)) = \frac{k\,tan\left(\varepsilon\sqrt{\lambda}(s+m)\right) + \sqrt{k^2 - 4\lambda c^2}}{2\sqrt{\lambda}c} \qquad (3.3.5)$$

elde edilir (Camcı ve Aktaş).

Lemma 3.3.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğri olsun.

(i) $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri 1-tiptir ve *(b>a)* dır ancak ve ancak

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta-\theta_0) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{b^2-a^2}{2ab}$$

sağlanır. Burada $\alpha = \sqrt{\lambda}(s+m)+\frac{\pi}{4}, \tan\theta_0 = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ ve $\varepsilon = 1$ dir.

(ii) $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri 1-tiptir ve *(a>b)* dır ancak ve ancak

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta_0-\theta) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{a^2-b^2}{2ab}$$

sağlanır. Burada $\alpha = -\sqrt{\lambda}(s+m)+\frac{\pi}{4}, \tan\theta_0 = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ ve $\varepsilon = -1$ dir

(Camcı ve Aktaş).

İspat: Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. Dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri $N^2(a,b)$ silindirinde ise;

$$x = 2\rho(s)\cos\theta(s) = 2acos\alpha(s)$$

$$y = 2\rho(s)\sin\theta(s) = 2bsin\,\alpha(s)$$

vardır. Yukarıdaki bu iki eşitlikten

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{a^2+b^2}{2} \tag{3.3.6}$$

ve $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ elde edilir. Eğer eğri 1-tip ise (3.3.3) eşitliğinden $\alpha = \frac{c}{ab}s + m_1$ vardır. Ayrıca (3.3.4) ve (3.3.6) eşitliklerinden de

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2b^2},\ \ k = \frac{(a^2+b^2)c^2}{a^2b^2}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\sqrt{k^2-4\lambda c^2}}{2\lambda}=\frac{b^2-a^2}{2},\ \frac{k}{2\lambda}=\frac{a^2+b^2}{2}$$

ve

$$2\alpha-\frac{\pi}{2}=2\sqrt{\lambda}(s+m)$$

dır. Böylece $\alpha=\sqrt{\lambda}(s+m)+\frac{\pi}{4}$ eşitliği ve ayrıca

$$\tan(\theta-\theta_0)=\frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{b^2-a^2}{2ab}$$

eşitliği elde edilir. Aksine, $\tan\theta=\frac{b}{a}\tan\alpha$ dan dolayı

$$x=2\rho(s)\cos\theta(s)=2af(s)cos\alpha(s)$$

$$y=2\rho(s)\sin\theta(s)=2bf(s)sin\,\alpha(s)$$

ve

$$\rho^2=f^2(s)\left(\frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

vardır. Böylece $f(s)=1$ bulunur. α'sabit olduğu için eğri 1-tiptir.

Teorem 3.3.1: $\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))$ birim hızlı eğrisi dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğri olsun. Eğer eğri 1-tip ise eğri $N^2(a,b)$ silindiri üzerindedir (Camcı ve Aktaş).

İspat: Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. Eğer eğri 1-tip ise (3.3.4) ve (3.3.6) eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$\lambda=\frac{c^2}{a^2b^2},\ k=\frac{(a^2+b^2)c^2}{a^2b^2}$$

ve

$$\alpha - \frac{\pi}{4} = \sqrt{\lambda}(s+m)$$

eşitliklerini tanımlanabilir. Bu nedenle

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta-\theta_0) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{b^2-a^2}{2ab}$$

vardır ve burada $\alpha = \sqrt{\lambda}(s+m) + \frac{\pi}{4}$, $\tan\theta_0 = \frac{a}{b}$ ve $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ dır.

Lemma (3.3.1) den eğri $N^2(a,b)$ silindirinde bir eğridir.

BÖLÜM 4

$\mathbb{R}^3$ DE SASAKI UZAYDA SONLU TİPTEN EĞRİLER

4.1. İşareti (–, –, +) Olan Metrik

İşareti (–, –, +) iken $\mathbb{R}^3$ deki Sasaki metriği

$$ds^2 = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) + \eta \otimes \eta$$

dir.

4.1.1. $N^2(a, b)$ Silindirindeki Sonlu Tipten Eğriler

γ, $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğri $N^2(a, b)$ de şöyle tanımlansın.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

Bu durumda;

$$a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 = 4a^2b^2$$

ve

$$x(s) = 2a\cos\alpha(s) + x_0,\ \ y(s) = 2b\sin\alpha(s) + y_0$$

vardır. Buradan;

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2a\cos\alpha(s)\,, 2b\sin\alpha(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = b\sin\alpha e + a\cos\alpha\phi e + \sigma\xi \qquad (4.1.1)$$

yazılabilir ki burada $\gamma_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ dır.

Lemma 4.1.1.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri olsun. Eğri 1-tiptir ancak ve ancak α' sabittir.

İspat: Eğri 1-tip olsun. Eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_A) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_A),$$

vardır ve burada $A = 1,2$ dir. İyi bilinir ki eğrinin Laplace;

$$\Delta f = -XX(f) = -f'' \tag{4.1.2}$$

dir. Burada $X_1 = \gamma'$dır. (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerinden;

$A = 1$ ise $\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e)$ olur. Buradan;

$$\alpha'' cos\alpha - (\alpha')^2 \sin\alpha = -\lambda \sin\alpha \tag{4.1.3}$$

elde edilir.

$A = 2$ ise $\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$ olur. Buradan;

$$\alpha'' sin\alpha + (\alpha')^2 \cos\alpha = \lambda \cos\alpha \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.4) denklemlerinden;

$$(\alpha')^2 = \lambda$$

elde edilir. Bu da α' nün sabit olduğunu gösterir.

Tersine kabul edelim ki $\alpha' = c$ yani sabit olsun**.** Bu durumda;

$$\alpha(s) = cs + c_0$$

yazılabilir. (4.1.1) eşitliğinden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = -b\sin\alpha \text{ ve } g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = -a\cos\alpha$$

elde edilir. (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerinden de;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = c^2 g(\gamma - \gamma_0, e)$$

ve

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = c^2 g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$$

elde edilir. Buradansa eğrinin 1-tip olduğunu görülür.

Teorem 4.1.1.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri olsun. Eğri sonlu tiptir ancak ve ancak eğri 1-tiptir.

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri k-tip ise,

$$\phi^2(\gamma - \gamma_0) = \phi^2\gamma_1 + \phi^2\gamma_2 + \cdots + \phi^2\gamma_n \tag{4.1.5}$$

ve

$$\Delta g(\gamma_i, e_k) = \lambda_i g(\gamma_i, e_k)$$

dır. Burada $i = 1, 2, \ldots, n\ \ ve\ \ k = 1, 2$ dır. Yukarıdaki denklem ve (4.1.2) denkleminden,

$$f_{ik}'' + \lambda_i f_{ik} = 0$$

elde edilir. Burada $f_{ik} = g(\gamma_i, e_k)$ dır. Yukarıda elde edilen eşitlik integre edilirse

$$\gamma_i(s) = \left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s) + A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)\right)e + \left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s) + B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)\right)\phi e + \sigma\xi \tag{4.1.6}$$

Bu durumda (4.1.5) denkleminden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = \sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s) + A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)\right) \tag{4.1.7}$$

ve

$$g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = \sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s) + B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)\right) \tag{4.1.8}$$

elde edilir. (4.1.1), (4.1.7) ve (4.1.8) denklemlerinden,

$a^2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\,s)\right)\right)^2+b^2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\,s)+\right.\right.$

*Bi2*sin*(λis)2=4a2b2* (4.1.9)

elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitliğin türevini alırsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i}(a^2A_{i1}A_{i2}+b^2B_{i1}B_{i2})\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(a^2A^2{}_{i2}+b^2B^2{}_{i2}-a^2A^2{}_{i1}-b^2B^2{}_{i1})\sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(-\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i}\left(a^2A_{i2}A_{j2}+b^2B_{i2}B_{j2}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j2}+b^2B_{i1}B_{j2}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(-\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i2}A_{j1}+b^2B_{i2}B_{j1}\right)\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)=0$$

elde edilir. Burada

$\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right), \sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right), \cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\,\mathrm{csin}\left(\sqrt{\lambda_j}s\right), \cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right),$

$\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan;

$$a^2A^2{}_{i2}+b^2B^2{}_{i2}=a^2A^2{}_{i1}+b^2B^2{}_{i1}\ , \tag{4.1.10}$$

$$a^2A_{i1}A_{i2}+b^2B_{i1}B_{i2}=0, \tag{4.1.11}$$

$$\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}\right)=\sqrt{\lambda_i}\left(a^2A_{i2}A_{j2}+b^2B_{i2}B_{j2}\right), \tag{4.1.12}$$

$$a^2A_{i1}A_{j2}+b^2B_{i1}B_{j2}=0, \tag{4.1.13}$$

dır. Burada $i, j = 1, 2, \dots, n$ ve $i \neq j$ dir. Kabul edelim ki $A_{i1} \neq 0$ olsun ve (4.1.11) denklemini kullanarak,

$$A_{i2} = -\frac{\boldsymbol{b^2} B_{i1} B_{i2}}{A_{i1}} \tag{4.1.14}$$

(4.1.10) ve (4.1.14) denklemlerinden,

$$\frac{B^2{}_{i2}}{A^2{}_{i1}}(a^2 A^2{}_{i1} + b^2 B^2{}_{i1}) = a^2 A^2{}_{i1} + b^2 B^2{}_{i1}$$

ve

$$|bB_{i2}| = |aA_{i1}|, \qquad |B_{bi1}| = |aA_{i2}|$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın;

$$bB_{i2} = aA_{i1}, \quad bB_{i1} = -aA_{i2} \tag{4.1.15}$$

olduğunu kabul edelim. (4.1.12) ve (4.1.15) denklemlerinden,

$$2a^2\left(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right)\left(A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2}\right) = 0$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $\sqrt{\lambda_j} \neq \sqrt{\lambda_i}$ olduğundan,

$$A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} = 0 \tag{4.1.16}$$

elde edilir. (4.1.13) ve (4.1.15) denklemlerinden,

$$A_{i1}A_{j2} - A_{i2}A_{j1} = 0 \tag{4.1.17}$$

olur. $A_{i1} \neq 0$ olduğundan (4.1.16) ve (4.1.17) denklemlerinden

$$A^2{}_{j1} + A^2{}_{j2} = 0 \tag{4.1.18}$$

elde edilir. Buradan; $A_{j1} = A_{j2} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ için olur ki bu da bir çelişkidir.

Dolayısıyla eğri 1-tiptir.

Teorem 4.1.1.2: Eğer $a \neq b$ ise $N^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır.

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi$(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri sonlu tip ise Lemma 4.1.1.1 den $\alpha' = c$ dir. Eğer γ boyunca türev alırsak;

$$t = \gamma'(s) = \left(-2a\,\alpha'(\mathrm{s}) \sin\alpha(s)\,, 2b\alpha'(\mathrm{s}) \cos\alpha(\mathrm{s})\,, z'(s)\right)$$

elde edilir. Burada $x' = -2a\,\alpha' \sin\alpha$, $y' = 2b\alpha' \cos\alpha$ dır.

Dahası; $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(\phi e - y\xi)$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{e}{2}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\xi}{2}$ olduğundan dolayı;

$$t = \gamma' = \frac{1}{2}(y'e + x'\phi e) + \sigma\xi$$

olur. Eğer $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi time ise; $g(t,t) = -1$ olur.

$$g(t,t) = -1 = \frac{1}{4}(-(y')^2 - (x')^2) + \sigma^2$$

olur. Yukarıda ki denklemde x' ve y' değerleri yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$-1 = -c^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) + \sigma^2$$

olur. Böylece

$$\frac{1+\sigma^2}{c^2} - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\alpha$$

elde edilir. Eğer $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi space ise; $g(t,t) = 1$ olur.

$$g(t,t) = 1 = \frac{1}{4}(-(y')^2 - (x')^2) + \sigma^2$$

olur. Yukarıda ki denklemde x' ve y' değerleri yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$1 = -c^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) + \sigma^2$$

olur. Böylece

$$\frac{\sigma^2 - 1}{c^2} - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} \cos 2\alpha$$

elde edilir. Bu son eşitlikten σ nın sabit olması için *a=b* olması gerek ve yeter koşul olduğu görülür. O halde $a \neq b$ ise $N^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır.

4.1.2. Dayanak Eğrisi *xOy* Düzleminde Kompakt Olan Silindirdeki Sonlu Tip Eğriler

$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi taban eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğridir. Eğer eğri kutupsal koordinatlarla yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x = 2\rho(s)\cos\theta(s) + x_0$$

$$y = 2\rho(s)\sin\theta(s) + y_0$$

Böylece eğri

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2\rho(s)\cos\theta(s)\,, 2\rho(s)\sin\theta(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = \rho(s)\sin\theta(s)\,e + \rho(s)\cos\theta(s)\phi e + \sigma\xi$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\gamma_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dir. Eğer eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_i) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_i)$$

ve

$$(\rho'\theta' + (\rho\theta')')\cos\theta + (\rho'' - \rho(\theta')^2 + \lambda\rho)\sin\theta = 0$$

$$-(\rho'' - \rho(\theta')^2 + \lambda\rho)\cos\theta + (\rho'\theta' + (\rho\theta')')\sin\theta = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki bu iki denklem çözüldüğünde;

$$\rho'' - \rho(\theta')^2 + \lambda\rho = 0 \tag{4.1.19}$$

$$\rho'\theta' + (\rho\theta')' = 0 \tag{4.1.20}$$

elde edilir. (4.1.20) eşitliğinden;

$$2\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\theta''}{\theta'} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitliği integre edersek;

$$\rho^2\theta' = c \tag{4.1.21}$$

elde edilir. (4.1.19) ve (4.1.21) eşitliklerinden;

$$\rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

elde edilir. Eğer $y = \frac{d\rho}{ds}$ ise $\rho'' = y\frac{dy}{d\rho}$ olur. Bu ifadeyi yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$y\frac{dy}{d\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

ve

$$ydy - \left(\frac{c^2}{\rho^3} - \lambda\rho\right)d\rho = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi integre edersek;

$$y^2\rho^2 = k\rho^2 - c^2 - \lambda\rho^4$$

elde edilir. $y = \frac{d\rho}{ds}$ olduğundan $ds = \frac{\rho d\rho}{y\rho}$ olur. Bu eşitliği integre edersek

$$\varepsilon(s+m) = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{k\rho^2 - c^2 - \lambda\rho^4}}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ dır. Eğer yukarıdaki eşitliği integre edersek

$$\rho^2 = \frac{\sqrt{k^2-4\lambda c^2}}{2\lambda}\sin\left(2\varepsilon\sqrt{\lambda}(s+m)\right) + \frac{k}{2\lambda} \tag{4.1.22}$$

elde edilir. (4.1.21) ve (4.1.22) eşitliklerinden

$$\tan(\varepsilon(\theta-\theta_0)) = \frac{k\,tan\left(\varepsilon\sqrt{\lambda}(s+m)\right)+\sqrt{k^2-4\lambda c^2}}{2\sqrt{\lambda}c} \tag{4.1.23}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi, dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğri olsun.

(i) $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri 1-tiptir ve *(b>a)* dır ancak ve ancak

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) + \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta-\theta_0) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{b^2-a^2}{2ab}$$

sağlanır. Burada $\alpha = \sqrt{\lambda}(s+m) + \frac{\pi}{4}, \tan\theta_0 = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ ve $\varepsilon = 1$ dir.

(ii) $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri 1-tiptir ve *(a>b)* dır ancak ve ancak

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) + \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta_0-\theta) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + \frac{a^2-b^2}{2ab}$$

sağlanır. Burada $\alpha = -\sqrt{\lambda}(s+m) + \frac{\pi}{4}, \tan\theta_0 = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ ve $\varepsilon = -1$ dir.

İspat: Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğri olsun. Eğer eğri $N^2(a,b)$ silindirinde ise;

$$x = 2\rho(s)\cos\theta(s) = 2acos\alpha(s)$$

$$y = 2\rho(s)\sin\theta(s) = 2bsin\,\alpha(s)$$

vardır. Yukarıdaki bu iki eşitlikten

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{a^2+b^2}{2} \qquad (4.1.24)$$

ve $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ elde edilir. Eğer eğri 1-tip ise (4.1.21) eşitliğinden

$$\alpha = \frac{c}{ab}s + m_1$$

vardır. Ayrıca (4.1.22) ve (4.1.24) eşitliklerinden de

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2b^2}, \quad k = \frac{(a^2+b^2)c^2}{a^2b^2}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\sqrt{k^2 - 4\lambda c^2}}{2\lambda} = \frac{b^2-a^2}{2}, \quad \frac{k}{2\lambda} = \frac{a^2+b^2}{2}$$

ve $2\alpha - \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{\lambda}(s+m)$ dır. Böylece

$$\alpha = \sqrt{\lambda}(s+m) + \frac{\pi}{4}$$

eşitliği ve ayrıca

$$\tan(\theta - \theta_0) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{b^2-a^2}{2ab}$$

eşitliği elde edilir. Aksine, $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ dan dolayı

$$x = 2\rho(s)\cos\theta(s) = 2af(s)cos\alpha(s)$$

$$y = 2\rho(s)\sin\theta(s) = 2bf(s)sin\,\alpha(s)$$

ve

$$\rho^2 = f^2(s)\left(\frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

vardır. Böylece $f(s) = 1$ bulunur. α'sabit olduğu için eğri 1-tiptir.

Teorem 4.1.2.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi taban eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğri olsun. Eğer eğri 1-tip ise eğri $N^2(a,b)$ silindirindedir.

İspat: Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. Eğer eğri 1-tip ise (4.1.22) ve (4.1.24) eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2b^2},\ \ k = \frac{(a^2+b^2)c^2}{a^2b^2}$$

ve

$$\alpha - \frac{\pi}{4} = \sqrt{\lambda}(s+m)$$

eşitliklerini tanımlanabilir. Bu nedenle

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta-\theta_0) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{b^2-a^2}{2ab}$$

vardır ve burada $\alpha = \sqrt{\lambda}(s+m)+\frac{\pi}{4}$, $\tan\theta_0 = \frac{a}{b}$ve $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$dır.

Lemma (4.1.2.1) den eğri $N^2(a,b)$ silindirindedir.

4.2. İşareti (+ , +, –) Olan Metrik

İşareti (+, +, –) iken $\mathbb{R}^3$ deki Sasaki metriği

$$ds^2 = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) - \eta \otimes \eta$$

dir.

4.2.1. $N^2(a, b)$ Silindirindeki Sonlu Tip Eğri

γ, $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğri $N^2(a, b)$ de şöyle tanımlansın.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

Bu durumda;

$$a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 = 4a^2b^2$$

ve

$$x(s) = 2a\cos\alpha(s) + x_0, \quad y(s) = 2b\sin\alpha(s) + y_0$$

vardır. Buradan;

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2a\cos\alpha(s)\,, 2b\sin\alpha(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = b\sin\alpha e + a\cos\alpha\phi e + \sigma\xi \qquad (4.2.1)$$

yazılabilir ki burada $\gamma_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ dır.

Lemma 4.2.1.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $N^2(a, b)$ silindirindeki eğri olsun. Eğri 1-tiptir ancak ve ancak α' sabittir.

İspat: Kabul edelim ki Eğri 1-tip olsun. Eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma-\gamma_0,e_A)=\lambda g(\gamma-\gamma_0,e_A),$$

vardır ve burada $A=1,2$ dir. İyi bilinir ki eğrinin Laplace;

$$\Delta f=-XX(f)=-f'' \qquad (4.2.2)$$

dir. Burada $X_1=\gamma'$dır.

(4.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerinden;

$A=1$ ise $\Delta g(\gamma-\gamma_0,e)=\lambda g(\gamma-\gamma_0,e)$olur. Buradan;

$$-\alpha'' cos\alpha+(\alpha')^2\sin\alpha=\lambda\sin\alpha \qquad (4.2.3)$$

elde edilir.

$A=2$ ise $\Delta g(\gamma-\gamma_0,\phi e)=\lambda g(\gamma-\gamma_0,\phi e)$olur. Buradan;

$$\alpha'' sin\alpha+(\alpha')^2\cos\alpha=\lambda\cos\alpha \qquad (4.2.4)$$

elde edilir. (4.2.3) ve (4.2.4) denklemlerinden;

$$(\alpha')^2=\lambda$$

elde edilir. Bu da α' nün sabit olduğunu gösterir.

Tersine $\alpha'=c$ yani sabit olsun**.** Bu durumda;

$$\alpha(s)=cs+c_0$$

yazılabilir. (4.2.1) eşitliğinden;

$$g(\gamma-\gamma_0,e)=b\sin\alpha \text{ ve } g(\gamma-\gamma_0,\phi e)=a\cos\alpha$$

elde edilir. (4.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerinden de;

$$\Delta g(\gamma-\gamma_0,e)=c^2g(\gamma-\gamma_0,e)$$

ve

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = c^2 g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$$

elde edilir. Buradansa eğrinin 1-tip olduğunu görülür.

Teorem 4.2.1.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri olsun. Eğri sonlu tiptir ancak ve ancak eğri 1-tiptir.

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri k-tip ise,

$$\phi^2(\gamma - \gamma_0) = \phi^2\gamma_1 + \phi^2\gamma_2 + \cdots + \phi^2\gamma_n \tag{4.2.5}$$

ve

$$\Delta g(\gamma_i, e_k) = \lambda_i g(\gamma_i, e_k)$$

dır. Burada $i = 1, 2, \ldots, n \quad ve \quad k = 1, 2$dır. Yukarıdaki denklem ve (4.2.2) denkleminden,

$$f_{ik}'' + \lambda_i f_{ik} = 0$$

elde edilir. Burada $f_{ik} = g(\gamma_i, e_k)$ dır. Yukarıda elde edilen eşitlik integre edilirse

$$\gamma_i(s) = \left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s))e + \ \left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s))\phi e\ + \sigma\xi \tag{4.2.6}$$

Bu durumda (4.2.5) denkleminden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = -\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)) \tag{4.2.7}$$

ve

$$g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = -\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s\right) + B_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)) \tag{4.2.8}$$

elde edilir. (4.2.1), (4.2.7) ve (4.2.8) denklemlerinden,

$$a^2\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s)+A_{i2}\sin(\sqrt{\lambda_i}\, s)\right)\right)^2+b^2\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}\cos(\sqrt{\lambda_i}\, s)+\right.\right.$$

$$Bi2\sin(\lambda is)2=4a2b2 \qquad (4.2.9)$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitliğin türevini alırsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i}(a^2A_{i1}A_{i2}+b^2B_{i1}B_{i2})\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(a^2A^2{}_{i2}+b^2B^2{}_{i2}-a^2A^2{}_{i1}-b^2B^2{}_{i1})\sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(-\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i}\left(a^2A_{i2}A_{j2}+b^2B_{i2}B_{j2}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j2}+b^2B_{i1}B_{j2}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(-\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i2}A_{j1}+b^2B_{i2}B_{j1}\right)\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)\right)=0$$

elde edilir. Burada

$\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right), \sin\left(2\sqrt{\lambda_i}s\right), \cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\, \mathrm{csin}\left(\sqrt{\lambda_j}s\right), \cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}s\right),$
$\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_j}s\right)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan;

$$a^2A^2{}_{i2}+b^2B^2{}_{i2}=a^2A^2{}_{i1}+b^2B^2{}_{i1}\,, \qquad (4.2.10)$$

$$a^2A_{i1}A_{i2}+b^2B_{i1}B_{i2}=0, \qquad (4.2.11)$$

$$\sqrt{\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}\right)=\sqrt{\lambda_i}\left(a^2A_{i2}A_{j2}+b^2B_{i2}B_{j2}\right), \qquad (4.2.12)$$

$$a^2A_{i1}A_{j2}+b^2B_{i1}B_{j2}=0, \qquad (4.2.13)$$

dır. Burada $i, j = 1, 2, \dots, n$ ve $i \neq j$ dir.

Kabul edelim ki $A_{i1} \neq 0$ olsun ve (4.2.11) denklemini kullanarak,

$$A_{i2} = -\frac{b^2 B_{i1} B_{i2}}{A_{i1}} \tag{4.2.14}$$

(4.2.10) ve (4.2.14) denklemlerinden,

$$\frac{B^2{}_{i2}}{A^2{}_{i1}}(a^2 A^2{}_{i1} + b^2 B^2{}_{i1}) = a^2 A^2{}_{i1} + b^2 B^2{}_{i1}$$

ve

$$|bB_{i2}| = |aA_{i1}|, \qquad |B_{bi1}| = |aA_{i2}|$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın;

$$bB_{i2} = aA_{i1}, \quad bB_{i1} = -aA_{i2} \tag{4.2.15}$$

olduğunu kabul edelim. (4.2.12) ve (4.2.15) denklemlerinden,

$$2a^2\left(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right)\left(A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2}\right) = 0$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $\sqrt{\lambda_j} \neq \sqrt{\lambda_i}$ olduğundan,

$$A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} = 0 \tag{4.2.16}$$

elde edilir. (4.2.13) ve (4.2.15) denklemlerinden,

$$A_{i1}A_{j2} - A_{i2}A_{j1} = 0 \tag{4.2.17}$$

olur. $A_{i1} \neq 0$ olduğundan (4.2.16) ve (4.2.17) denklemlerinden

$$A^2{}_{j1} + A^2{}_{j2} = 0 \tag{4.2.19}$$

elde edilir.

Buradan; $A_{j1} = A_{j2} = 0,\ \ j = 1, 2, \dots, n$ için olur ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla eğri 1-tiptir.

Teorem 4.2.1.2: Eğer $a \neq b$ ise $N^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır.

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri sonlu tip ise Lemma 4.2.1.1 den $\alpha' = c$ dir. Eğer γ boyunca türev alırsak;

$$t = \gamma'(s) = \left(-2a\,\alpha'(\mathrm{s})\sin\alpha(s)\,, 2b\alpha'(\mathrm{s})\cos\alpha(\mathrm{s})\,, z'(s)\right)$$

elde edilir. Burada $x' = -2a\,\alpha' \sin\alpha$, $y' = 2b\alpha' \cos\alpha$ dır.

Dahası; $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(\phi e - y\xi)$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{e}{2}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\xi}{2}$ olduğundan dolayı;

$$t = \gamma' = \frac{1}{2}(y'e + x'\phi e) + \sigma\xi$$

olur. Eğer $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi time ise; $g(t,t) = -1$ olur.

$$g(t,t) = -1 = \frac{1}{4}((y')^2 + (x')^2) - \sigma^2$$

olur. Yukarıda ki denklemde x' ve y' değerleri yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$-1 = c^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) - \sigma^2$$

olur. Böylece

$$\frac{\sigma^2 - 1}{c^2} - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}\cos 2\alpha$$

elde edilir. Eğer $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi space ise; $g(t,t) = 1$ olur.

$$g(t,t) = 1 = \frac{1}{4}((y')^2 + (x')^2) - \sigma^2$$

olur. Yukarıda ki denklemde x' ve y' değerleri yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$1 = c^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) - \sigma^2$$

olur. Böylece

$$\frac{1+\sigma^2}{c^2}-\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\alpha$$

elde edilir. Her iki durumda da σ ancak ve ancak *a=b* olduğu durumda sabittir. O halde $a \neq b$ ise $N^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır.

4.2.2. Dayanak Eğrisi *xOy* Düzleminde Kompakt Olan Silindirdeki Sonlu Tip Eğriler

$\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Bu eğri dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğridir.

Eğer eğri kutupsal koordinatlarla yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x=2\rho(s)\cos\theta(s)+x_0$$

$$y=2\rho(s)\sin\theta(s)+y_0$$

Böylece eğri

$$\gamma(s)-\gamma_0=(2\rho(s)\cos\theta(s)\,,2\rho(s)\sin\theta(s)\,,z(s)-z_0)$$

ve

$$\gamma(s)-\gamma_0=\rho(s)\sin\theta(s)\,e+\rho(s)\cos\theta(s)\phi e+\sigma\xi$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\gamma_0=(x_0,y_0,z_0)$ dir.

Eğer eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma-\gamma_0,e_i)=\ \lambda g(\gamma-\gamma_0,e_i)$$

ve

$$(\rho'\theta'+(\rho\theta')')\cos\theta+(\rho''-\rho(\theta')^2+\lambda\rho)\sin\theta=0$$

$$-(\rho''-\rho(\theta')^2+\lambda\rho)\cos\theta+(\rho'\theta'+(\rho\theta')')\sin\theta=0$$

elde edilir. Yukarıdaki bu iki denklem çözüldüğünde;

$$\rho'' - \rho(\theta')^2 + \lambda\rho = 0 \tag{4.2.20}$$

$$\rho'\theta' + (\rho\theta')' = 0 \tag{4.2.21}$$

elde edilir. (4.2.21) eşitliğinden;

$$2\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\theta''}{\theta'} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitliği integre edersek;

$$\rho^2\theta' = c \tag{4.2.22}$$

elde edilir. (4.2.20) ve (4.2.22) eşitliklerinden;

$$\rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

elde edilir. Eğer $y = \frac{d\rho}{ds}$ ise $\rho'' = y\frac{dy}{d\rho}$ olur. Bu ifadeyi yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$y\frac{dy}{d\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

ve

$$ydy - \left(\frac{c^2}{\rho^3} - \lambda\rho\right)d\rho = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi integre edersek;

$$y^2\rho^2 = k\rho^2 - c^2 - \lambda\rho^4$$

elde edilir. $y = \frac{d\rho}{ds}$ olduğundan $ds = \frac{\rho d\rho}{y\rho}$ olur. Bu eşitliği integre edersek

$$\varepsilon(s + m) = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{k\rho^2 - c^2 - \lambda\rho^4}}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm$ dır. Eğer yukarıdaki eşitliği integre edersek

$$\rho^2 = \frac{\sqrt{k^2-4\lambda c^2}}{2\lambda}\sin\left(2\varepsilon\sqrt{\lambda}(s+m)\right) + \frac{k}{2\lambda} \tag{4.2.23}$$

elde edilir. (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerinden

$$\tan(\varepsilon(\theta-\theta_0)) = \frac{k\tan\left(\varepsilon\sqrt{\lambda}(s+m)\right)+\sqrt{k^2-4\lambda c^2}}{2\sqrt{\lambda}c} \tag{4.2.24}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.2.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi, dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğri olsun.

(i) $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri 1-tiptir ve *(b>a)* dır ancak ve ancak

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) + \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta-\theta_0) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{b^2-a^2}{2ab}$$

sağlanır. Burada $\alpha = \sqrt{\lambda}(s+m) + \frac{\pi}{4}, \tan\theta_0 = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ ve $\varepsilon = 1$ dir.

(ii) $N^2(a,b)$ silindirindeki eğri 1-tiptir ve *(a>b)* dır ancak ve ancak

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) + \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tan(\theta_0-\theta) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + \frac{a^2-b^2}{2ab}$$

sağlanır. Burada $\alpha = -\sqrt{\lambda}(s+m) + \frac{\pi}{4}, \tan\theta_0 = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ ve $\varepsilon = -1$ dir.

İspat: Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. Dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri $N^2(a,b)$ silindirinde ise;

$$x = 2\rho(s)\cos\theta(s) = 2acos\alpha(s)$$

$$y = 2\rho(s)\sin\theta(s) = 2bsin\,\alpha(s)$$

vardır. Yukarıdaki bu iki eşitlikten

$$\rho^2 = \frac{a^2-b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{a^2+b^2}{2} \tag{4.2.25}$$

ve $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ elde edilir. Eğer eğri 1-tip ise (4.2.22) eşitliğinden

$$\alpha = \frac{c}{ab}s + m_1$$

vardır. Ayrıca (4.2.23) ve (4.2.25) eşitliklerinden de

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2b^2},\ \ k = \frac{(a^2+b^2)c^2}{a^2b^2}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\sqrt{k^2-4\lambda c^2}}{2\lambda} = \frac{b^2-a^2}{2},\ \ \frac{k}{2\lambda} = \frac{a^2+b^2}{2}$$

ve

$$2\alpha - \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{\lambda}(s+m)$$

dır. Böylece

$$\alpha = \sqrt{\lambda}(s+m) + \frac{\pi}{4}$$

eşitliği ve ayrıca

$$\tan(\theta-\theta_0) = \frac{a^2+b^2}{2ab}\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{b^2-a^2}{2ab}$$

eşitliği elde edilir. Aksine, $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ dan dolayı

$$x = 2\rho(s)\cos\theta(s) = 2af(s)cos\alpha(s)$$

$$y = 2\rho(s)\sin\theta(s) = 2bf(s)sin\,\alpha(s)$$

ve

$$\rho^2 = f^2(s)\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{a^2 + b^2}{2}\right)$$

vardır. Böylece $f(s) = 1$ bulunur. α'sabit olduğu için eğri 1-tiptir.

Teorem 4.2.2.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi dayanak eğrisi *xOy* düzleminde kompakt olan silindirdeki eğri olsun. Eğer eğri 1-tip ise eğri $N^2(a, b)$ silindirindedir.

İspat: Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. Eğer eğri 1-tip ise (4.2.23) ve (4.2.25) eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2b^2},\;\; k = \frac{(a^2 + b^2)c^2}{a^2b^2}$$

ve

$$\alpha - \frac{\pi}{4} = \sqrt{\lambda}(s + m)$$

eşitliklerini tanımlanabilir. Bu nedenle

$$\rho^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\tan(\theta - \theta_0) = \frac{a^2 + b^2}{2ab}\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{b^2 - a^2}{2ab}$$

vardır ve burada $\alpha = \sqrt{\lambda}(s + m) + \frac{\pi}{4}, \tan\theta_0 = \frac{a}{b}$ ve $\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\alpha$ dır.

Lemma (4.2.2.1) den eğri $N^2(a, b)$ silindirindedir.

4.3. İşareti (+ , –, +) Olan Metrik

İşareti (+, –, +) iken $\mathbb{R}^3$ deki Sasaki metriği

$$ds^2 = \frac{1}{4}(dx^2 - dy^2) + \eta \otimes \eta$$

dir.

4.3.1. $N_1{}^2(a, b)$ Silindirindeki Sonlu Tip Eğri

γ, $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğri $N_1{}^2(a, b)$ de şöyle tanımlansın.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

Bu durumda;

$$a^2(x - x_0)^2 - b^2(y - y_0)^2 = 4a^2b^2$$

ve

$$x(s) = 2b\cosh\alpha(s) + x_0,\ \ y(s) = 2a\sinh\alpha(s) + y_0$$

vardır. Buradan;

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2b\cosh\alpha(s)\,, 2a\sinh\alpha(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = a\sinh\alpha e + b\cosh\alpha\phi e + \sigma\xi \qquad (4.3.1)$$

yazılabilir ki burada $\gamma_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ dır.

Lemma 4.3.1.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $N_1{}^2(a, b)$ silindirindeki eğri olsun. Eğri 1-tiptir ancak ve ancak α' sabittir.

İspat: Kabul edelim ki eğri 1-tip olsun. Eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_A) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_A),$$

vardır ve burada $A = 1, 2$ dir. İyi bilinir ki eğrinin Laplace;

$$\Delta f = -XX(f) = -f'' \tag{4.3.2}$$

dir. Burada $X_1 = \gamma'$dır. (4.3.1) ve (4.3.2) eşitliklerinden;

$A = 1$ ise $\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e)$olur. Buradan;

$$-\alpha'' cosh\alpha - (\alpha')^2 \sinh\alpha = \lambda \sinh\alpha \tag{4.3.3}$$

elde edilir.

$A = 2$ ise $\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$olur. Buradan;

$$-\alpha'' sinh\alpha - (\alpha')^2 \cosh\alpha = \lambda \cosh\alpha \tag{4.3.4}$$

elde edilir.(4.3.3) ve (4.3.4) denklemlerinden;

$$(\alpha')^2 = -\lambda$$

elde edilir. Bu da α' nün sabit olduğunu gösterir.

Tersine $\alpha' = c$ yani sabit olsun**.** Bu durumda;

$$\alpha(s) = cs + c_0$$

yazılabilir. (4.3.1) eşitliğinden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = -a \sinh\alpha \text{ ve } g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = b \cosh\alpha$$

elde edilir. (4.3.1) ve (4.3.2) eşitliklerinden de;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = -c^2 g(\gamma - \gamma_0, e)$$

ve

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = -c^2 g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$$

elde edilir. Buradansa eğrinin 1-tip olduğunu görülür.

Teorem 4.3.1.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi ${N_1}^2(a,b)$ silindirindeki eğri olsun. Eğri sonlu tiptir ancak ve ancak eğri 1-tiptir.

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$,eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri k-tip ise,

$$\phi^2(\gamma - \gamma_0) = \phi^2\gamma_1 + \phi^2\gamma_2 + \cdots + \phi^2\gamma_n \tag{4.3.5}$$

ve

$$\Delta g(\gamma_i, e_k) = \lambda_i g(\gamma_i, e_k)$$

dır. Burada $i = 1, 2, \ldots, n \ \ ve \ \ k = 1, 2$ dır. Yukarıdaki denklem ve (4.3.2) denkleminden,

$$f_{ik}{}'' + \lambda_i f_{ik} = 0$$

elde edilir. Burada $f_{ik} = g(\gamma_i, e_k)$dır. Yukarıda elde edilen eşitlik integre edilirse

$$\gamma_i(s) = \left(A_{i1}e^{-\sqrt{-\lambda_i}s} + A_{i2}e^{\sqrt{-\lambda_i}s}\right)e + \left(B_{i1}e^{-\sqrt{-\lambda_i}s} + B_{i2}e^{\sqrt{-\lambda_i}s}\right)\phi e + \sigma\xi \tag{4.3.6}$$

Bu durumda (4.3.5) denkleminden;

$$g(\gamma - \gamma_0, e) = -\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(A_{i1}e^{-\sqrt{-\lambda_i}s} + A_{i2}e^{\sqrt{-\lambda_i}s}\right) \tag{4.3.7}$$

ve

$$g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(B_{i1}e^{-\sqrt{-\lambda_i}s} + B_{i2}e^{\sqrt{-\lambda_i}s}\right) \tag{4.3.8}$$

elde edilir. (4.3.1), (4.3.7) ve (4.3.8) denklemlerinden,

$$a^2\left[-\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i1}e^{-\sqrt{-\lambda_i}s} + A_{i2}e^{\sqrt{-\lambda_i}s}\right)\right]^2 - b^2\left[\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i1}e^{-\sqrt{-\lambda_i}s} + B_{i2}e^{\sqrt{-\lambda_i}s}\right)\right]^2 = 4a^2b^2 \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitliğin türevini alırsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{-\lambda_i}(-a^2A^2{}_{i1}+b^2B^2{}_{i1})e^{-2\sqrt{-\lambda_i}s}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{-\lambda_i}(a^2A^2{}_{i2}-b^2B^2{}_{i2})e^{2\sqrt{-\lambda_i}s}\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\sqrt{-\lambda_j}\left(-a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}\right)e^{-\left(\sqrt{-\lambda_i}+\sqrt{-\lambda_j}\right)s}\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\sqrt{-\lambda_j}\left(a^2A_{i1}A_{j2}-b^2B_{i1}B_{j2}\right)e^{\left(-\sqrt{-\lambda_i}+\sqrt{-\lambda_j}\right)s}\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\left(\sqrt{-\lambda_j}\left(a^2A_{i2}A_{j1}-b^2B_{i2}B_{j1}\right)e^{\left(\sqrt{-\lambda_i}-\sqrt{-\lambda_j}\right)s}\right)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{n}\sqrt{-\lambda_j}\left(a^2A_{i2}A_{j2}-b^2B_{i2}B_{j2}\right)e^{\left(\sqrt{-\lambda_i}+\sqrt{-\lambda_j}\right)s}=0$$

$$e^{-2\sqrt{-\lambda_i}s}, e^{2\sqrt{-\lambda_i}s}, e^{-\left(\sqrt{-\lambda_i}+\sqrt{-\lambda_j}\right)s}, e^{\left(\sqrt{-\lambda_i}+\sqrt{-\lambda_j}\right)s}, e^{\left(-\sqrt{-\lambda_i}+\sqrt{-\lambda_j}\right)s}, e^{\left(\sqrt{-\lambda_i}-\sqrt{-\lambda_j}\right)s}$$

fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan;

$$-a^2A^2{}_{i1}+b^2B^2{}_{i1}=0, \tag{4.3.10}$$

$$a^2A^2{}_{i2}-b^2B^2{}_{i2}=0\ , \tag{4.3.11}$$

$$-a^2A_{i1}A_{j1}+b^2B_{i1}B_{j1}=0, \tag{4.3.12}$$

$$a^2A_{i1}A_{j2}-b^2B_{i1}B_{j2}=0, \tag{4.3.13}$$

$$a^2A_{i2}A_{j1}-b^2B_{i2}B_{j1}=0, \tag{4.3.14}$$

$$a^2A_{i2}A_{j2}-b^2B_{i2}B_{j2}=0, \tag{4.3.15}$$

dır. Burada $i,j=1,2,\dots,n$ ve $i\neq j$ dir. (4.3.10) denkleminden,

$$bB_{i1} = \varepsilon a A_{i1}, \qquad \varepsilon = \mp 1 \tag{4.3.16}$$

dir. Kabul edelim ki $A_{j1} \neq 0$ olsun. (4.3.12) ve (4.3.14) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{bmatrix} -a^2 A_{i1} & b^2 B_{i1} \\ a^2 A_{i2} & -b^2 B_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ B_{j1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

$$D = \begin{bmatrix} -a^2 A_{i1} & b^2 B_{i1} \\ a^2 A_{i2} & -b^2 B_{i2} \end{bmatrix}$$

olsun. Burada $A_{j1} \neq 0$ olduğundan D matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Yani;

$$detD = a^2 b^2 (A_{i1} B_{i2} - A_{i2} B_{i1}) = 0$$

dır. Buradan;

$$(A_{i1} B_{i2} - A_{i2} B_{i1}) = 0 \tag{4.3.17}$$

olur. (4.3.16) ve (4.3.17) denklemlerinden

$$bB_{i2} = \varepsilon a A_{i2}, \qquad \varepsilon = \mp 1 \tag{4.3.18}$$

elde edilir.(4.3.9) denkleminden

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \left(aA_{i1} e^{-\sqrt{-\lambda_i} s} + aA_{i2} e^{\sqrt{-\lambda_i} s}\right)\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} \left(bB_{i1} e^{-\sqrt{-\lambda_i} s} + bB_{i2} e^{\sqrt{-\lambda_i} s}\right)\right]^2 = 4a^2 b^2 \tag{4.3.19}$$

yazılabilir.(4.3.16) ve (4.3.18) denklemlerinde $\varepsilon = 1$ alınırsa

$$bB_{i1} = aA_{i1}, \qquad bB_{i2} = aA_{i2}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (4.3.19) denkleminde yerine yazıldığında bir çelişki elde ediliyor.

Benzer biçimde (4.3.16) ve (4.3.18) denklemlerinde $\varepsilon = -1$ alınırsa

$$bB_{i1} = -aA_{i1}, \qquad bB_{i2} = -aA_{i2}$$

olur. Bu eşitlikler (4.3.19) denkleminde yerine yazıldığında yine bir çelişki elde ediliyor. Dolayısıyla eğri 1-tiptir.

Teorem 4.3.1.2: Eğer $a \neq b$ ise ${N_1}^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır.

İspat: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri sonlu tip ise Lemma4.3.1.1 den $\alpha' = c$ dir. Eğer γ boyunca türev alırsak;

$$t = \gamma'(s) = \big(2b\,\alpha'(\mathrm{s})\sinh\alpha(s)\,, 2a\alpha'(\mathrm{s})\cosh\alpha(\mathrm{s})\,, z'(s)\big)$$

elde edilir. Burada $x' = 2b\,\alpha' \sinh \alpha$, $y' = 2a\alpha' \cosh \alpha$ dır.

Dahası; $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(\phi e - y\xi)$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{e}{2}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\xi}{2}$ olduğundan dolayı;

$$t = \gamma' = c(a\cosh\alpha(\mathrm{s})\,e + b\sinh\alpha(\mathrm{s})\,\phi e) + \sigma\xi$$

olur. Eğer $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi time ise; $g(t,t) = -1$ve space ise; $g(t,t) = 1$olur. O halde $\varepsilon = \mp 1$ için $g(t,t) = \varepsilon$ olsun. Bu durumda,

$$g(t,t) = \varepsilon = c^2(-a^2\cosh^2\alpha(\mathrm{s}) + b^2\sinh^2\alpha(\mathrm{s})) + \sigma^2$$

olur. Yukarıda ki denklemden

$$\frac{\varepsilon - \sigma^2}{c^2} + \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}\cosh 2\alpha$$

elde edilir. Bu durumda σ ancak ve ancak *a=b* olduğu durumda sabittir. O halde $a \neq b$ ise ${N_1}^2(a,b)$ silindirinde sonlu tip slant eğri bulunmamaktadır.

4.3.2.Ekseni *Oz*-Eksenine Paralel Olan Silindirler Üzerindeki Sonlu Tip Eğriler

$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, eğrisi$(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Bu eğri ekseni *Oz*-eksenine paralel olan silindir üzerindeki eğri olsun. Eğer eğri kutupsal koordinatlarla yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x = 2\rho(s)\cosh\theta(s) + x_0$$

$$y = 2\rho(s)\sinh\theta(s) + y_0$$

Böylece eğri

$$\gamma(s) - \gamma_0 = (2\rho(s)\cosh\theta(s)\,, 2\rho(s)\sinh\theta(s)\,, z(s) - z_0)$$

ve

$$\gamma(s) - \gamma_0 = \rho(s)\sinh\theta(s)\,e + \rho(s)\cosh\theta(s)\phi e + \sigma\xi$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\gamma_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dir.

Eğer eğri 1-tip ise;

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_i) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_i)$$

ve

$$(\rho'\theta' + (\rho\theta')')\cos h\theta + (\rho'' + \rho(\theta')^2 + \lambda\rho)\sinh\theta = 0$$

$$(\rho'' + \rho(\theta')^2 + \lambda\rho)\cosh\theta + (\rho'\theta' + (\rho\theta')')\sinh\theta = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki bu iki denklem çözüldüğünde;

$$\rho'' + \rho(\theta')^2 + \lambda\rho = 0 \qquad (4.3.20)$$

$$\rho'\theta' + (\rho\theta')' = 0 \qquad (4.3.21)$$

elde edilir. (4.3.21) eşitliğinden;

$$2\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\theta''}{\theta'} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitliği integre edersek;

$$\rho^2\theta' = c \tag{4.3.22}$$

elde edilir. (4.3.20) ve (4.3.22) eşitliklerinden;

$$\rho'' + \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

elde edilir. Eğer $y = \frac{d\rho}{ds}$ ise $\rho'' = y\frac{dy}{d\rho}$ olur. Bu ifadeyi yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$y\frac{dy}{d\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho = 0$$

ve

$$ydy + \left(\frac{c^2}{\rho^3} + \lambda\rho\right)d\rho = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi integre edersek;

$$y^2\rho^2 = k\rho^2 + c^2 - \lambda\rho^4$$

elde edilir. $y = \frac{d\rho}{ds}$ olduğundan $ds = \frac{\rho d\rho}{y\rho}$ olur. Bu eşitliği integre edersek

$$\varepsilon(s+m) = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{k\rho^2 + c^2 - \lambda\rho^4}}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm$ dır. Eğer yukarıdaki eşitliği integre edersek

$$\rho^2 = -\frac{\sqrt{k^2+4\lambda c^2}}{2\lambda}\cosh\left(2\varepsilon\sqrt{-\lambda}(s+m)\right) + \frac{k}{2\lambda} \tag{4.3.23}$$

elde edilir.(4.3.22) ve (4.3.23) eşitliklerinden

$$\tanh(\varepsilon(\theta-\theta_0)) = \frac{tanh\left(\varepsilon\sqrt{-\lambda}(s+m)\right)(\sqrt{k^2+4\lambda c^2}+k)}{2\sqrt{-\lambda}c} \tag{4.3.24}$$

elde edilir.

Lemma 4.3.2.1: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi, ekseni *Oz*-eksenine paralel olan silindir üzerindeki eğri olsun.

(i) ${N_1}^2(a, b)$ silindirindeki eğri 1-tiptir ve *(b>a)* ancak ve ancak

$$\rho^2 = \frac{b^2 - a^2}{2}\cosh 2\alpha + \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\tanh(\varepsilon(\theta - \theta_0)) = -\frac{a}{b}\tanh \alpha$$

sağlanır. Burada $\alpha = \varepsilon\sqrt{-\lambda}(s + m)$, $\tanh\theta = \frac{a}{b}\tanh \alpha$, $\theta_0 = 0$, $\varepsilon = -1$ dir.

(ii) ${N_1}^2(a, b)$ silindirinde *(a>b)* ve $\varepsilon = 1$ durumunda sonlu tip eğri bulunmamaktadır.

İspat: *(i)* Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. Ekseni *Oz*-eksenine paralel olan silindir üzerindeki $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $(I,\ \gamma)$ birim koordinat komşuluğu ile verilsin ve s eğri için yay parametresi olsun. Eğer eğri ${N_1}^2(a, b)$ silindirinde ise;

$$x = 2\rho(s)\cosh\theta(s) = 2b cosh\alpha(s)$$

$$y = 2\rho(s)\sinh\theta(s) = 2\text{asinh}\alpha(s)$$

vardır. Yukarıdaki bu iki eşitlikten

$$\rho^2 = \frac{b^2-a^2}{2}\cosh 2\alpha + \frac{a^2+b^2}{2} \tag{4.3.25}$$

ve $\tanh\theta = \frac{a}{b}\tanh\alpha$ elde edilir. Eğer eğri 1-tip ise (4.3.22) eşitliğinden

$$\alpha = \frac{c}{ab}s + m_1$$

vardır. Ayrıca (4.3.23) ve (4.3.25) eşitliklerinden de

$$\lambda = -\frac{c^2}{a^2b^2},\ \ k = -\frac{(a^2 + b^2)c^2}{a^2b^2}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\sqrt{k^2+4\lambda c^2}}{2\lambda}=\frac{a^2-b^2}{2},\ \ \frac{k}{2\lambda}=\frac{a^2+b^2}{2}$$

ve

$$2\alpha=2\varepsilon\sqrt{-\lambda}(s+m)$$

dır. Böylece

$$\alpha=\varepsilon\sqrt{-\lambda}(s+m)$$

eşitliği ve ayrıca

$$\tanh(\varepsilon(\theta-\theta_0))=-\frac{a}{b}\tanh\alpha$$

eşitliği elde edilir. $\tanh\theta=\frac{a}{b}\tanh\alpha$ dan dolayı $\theta_0=0,\ \varepsilon=-1$ olması gerektiği açıkça görülür.

Aksine; $\tanh\theta=\frac{a}{b}\tanh\alpha$ dan dolayı

$$x=2\rho(s)\cosh\theta(s)=2bf(s)cosh\alpha(s)$$

$$y=2\rho(s)\sinh\theta(s)=2af(s)sinh\,\alpha(s)$$

ve

$$\rho^2=f^2(s)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\cosh 2\alpha+\frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

vardır. Böylece $f(s)=1$ bulunur. α'sabit olduğu için eğri 1-tiptir.

(ii) Kabul edelim ki *(a>b)* ve $\varepsilon=1$ olsun. *a>b* olduğu için

$$\frac{\sqrt{k^2+4\lambda c^2}}{2\lambda}=\frac{b^2-a^2}{2},\ \ \frac{k}{2\lambda}=\frac{a^2+b^2}{2}$$

ve

$$\cosh 2\alpha = -\cosh\left(2\varepsilon\sqrt{-\lambda}(s+m)\right)$$

olur. Buradan bir çelişki elde edilir. O halde *a>b* durumunda ${N_1}^2(a,b)$ sonlu tip eğri bulunmamaktadır.

Teorem 4.3.2.1: $\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))$ eğrisi ekseni *Oz*-eksenine paralel olan silindir üzerindeki eğri olsun. Eğer eğri 1-tip ise eğri ${N_1}^2(a,b)$ silindirindedir.

İspat: Kabul edelim ki *(b>a)* olsun. Eğer eğri 1-tip ise (4.3.23) ve (4.3.25) eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$\lambda=-\frac{c^2}{a^2b^2},\ \ k=-\frac{(a^2+b^2)c^2}{a^2b^2}$$

ve

$$\alpha=\varepsilon\sqrt{-\lambda}(s+m)$$

eşitliklerini tanımlanabilir. Bu nedenle

$$\rho^2=\frac{b^2-a^2}{2}\cosh 2\alpha+\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\tanh(\varepsilon(\theta-\theta_0))=-\frac{a}{b}\tanh\alpha$$

vardır ve burada $\alpha=-\sqrt{-\lambda}(s+m)$, $\theta_0=0$ ve $\tanh\theta=\frac{a}{b}\tanh\alpha$ dır.

Lemma (4.3.2.1) den eğri ${N_1}^2(a,b)$ silindirindedir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

$\mathbb{R}^3(-3)$ Saski uzayında, dayanak eğrisi xOy düzleminde kompakt olan silindirlerde sonlu tipten eğrilerin olması için gerek ve yeter koşulun silindirin $N^2(a,b)$ olması gerektiği gösterilmiştir. Burada $N^2(a,b)$ silindirinin dayanak eğrisi elipstir. Ayrıca, $N^2(a,b)$ silindir ailesinde slant eğrilerin bulunması için gerek ve yeter koşulun $a=b=c$ olması gerektiği ispatlanmıştır. Benzer sonuçlar metriğin işareti (–, –, +), (+, +, –) ve (+, –, +) olduğunda da gösterilmiştir. Metriğin işareti (+, –, +) alındığında ise bazı ilginç farklılıklar görülmüştür.

KAYNAKLAR

Baikoussis C. ve Blair D.E., 1991. Finite Type Integral Submanifolds of The Contact Manifold $R^{2n+1}(-3)$, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 19 No. 4, 327–350.

Baikoussis C. ve Blair D.E., 1994. On Legendre Curves in Contact 3-Manifolds, *Geometriae Dedicata*, 49; 135–142.

Blair D. E., 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry, *LectureNotes in Math.*Vol. 509, Springer-Verlag

Camcı Ç., 2007. Kontak Geometride Eğriler Teorisi, Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara

Camcı Ç. ve Hacısalihoğlu H.H., 2010. Finite Type Curve in 3–Dimensional SasakianManifold, *Bull. Korean Mathematical Society*, 47; 1163–1170.

Camcı Ç. ve Aktaş A. On a Finite Type Curve That Lies in a Cylinder Whose Based Curve is Compact in xOy Plane Over $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasakian Space, *Turkish Journal Of Mathematics*(Gönderildi)

Chen B. Y., 1984. Total Mean Curvature and Submanifolds of FiniteType, *World Scientific*, Signapure.

Duggal K. L. ve Bejancu A., 1996. *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers.: 1-18*

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER:

Adı Soyadı : Arzu AKTAŞ

Doğum Yeri : TOKAT

Doğum Tarihi : 25.11.1982

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

A) Kitap ve Dergilerde Bölüm Yazarlığı

• ALES Temel Kitap, Nobel Yayın Dağıtım, Şubat - 2009

• DGS Temel Kitap, Nobel Yayın Dağıtım, Nisan - 2009

• ALES Dergisi (12 sayı), Nobel Yayın Dağıtım, 2008

• ALES 5 Deneme Sınavı, Kriter Yayınları, 2008

• DGS Türkiye Geneli 2 Deneme Sınavı, Nobel Yayın Dağıtım, 2008

• DGS 10+2 Deneme Adlı Eserin +2 Denemesi, Nobel Yayın Dağıtım, 2008

İŞDENEYİMİ

2003 – 2004: Özel dershanede stajyer öğretmenlik

2004 – 2008: Özel dershanede uzman öğretmenlik

2008 – 2011: Özel dershanede uzman öğretmenlik ve Matematik Zümre Başkanlığı

İLETİŞİM

E-posta Adresi : aktas_arzu@hotmail.com