

TAKAGI – SUGENO BULANIK MODELİ  
TABANLI KONTROL SİSTEMİ İÇİN  
KARARLI ve GÜRBÜZ (ROBUST)  
DENETLEYİCİ TASARIMI

BURAK TEKGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ  
ANABİLİM DALI  
2012

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAKAGI – SUGENO BULANIK MODELİ TABANLI  
KONTROL SİSTEMİ İÇİN KARARLI ve GÜRBÜZ  
(ROBUST) DENETLEYİCİ TASARIMI

BURAK TEKGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ  
ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI  
DOÇ. DR. MANAFEDDİN NAMAZOV

SİVAS  
2012

Bu alışma Cumhuriyet Üniversitesi Fen/Sağlık Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmış ve jürimiz tarafından Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Doç. Dr. Rafael HÜSEYNOV

ye

Yrd. Doç. Dr. Ahmet Gürkan YÜKSEK

ye (Danışman)

Doç. Dr. Manafeddin NAMAZOV

ONAY

Bu tez çalışması, 13/07/2012 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulu tarafından belirlenen ve yukarıda imzaları bulunan jüri yeleri tarafından kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DEğİRMENCİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fen/Sağlık Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

## ÖZET

### TAKAGI – SUGENO BULANIK MODELİ TABANLI KONTROL SİSTEMİ İÇİN KARARLI ve GÜRBÜZ (ROBUST) DENETLEYİCİ TASARIMI

Burak TEKGÜN

Yüksek Lisans Tezi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Manafeddin NAMAZOV

2012, 124 sayfa

Günümüzde sanayide kullanılan kompleks sistemler nonlineer olduğundan onların lineerleştirilmesi ve tanımlanması zor, zaman alıcı ve hata değeri fazla olduğu için Takagi ve Sugeno tarafından sunulan multimodel yaklaşımı ile bu zorlukları kısmen de olsa aradan kaldırmak mümkündür. Bunun için de tezimizde nonlineer sistemler için Takagi-Sugeno Bulanık Modeli adı verilen yaklaşım kullanılmıştır.

Çalışmada bulanık mantığa giriş yapılmış ve bulanık denetleyicilerin sanayi nesnelere kullanılması nedenleri irdelenmiştir. Bununla beraber paralel dağılımlı kompanzasyon (PDC)'nin tasarlanma prosedürü ve özellikleri ele alınmıştır.

Model tabanlı bulanık mantık kontrol sistemlerinin en önemli problemleri de sistemin kararlılığı ve pratikte rastlanılabilecek sınırlandırmaların da dikkate alınmasıdır. Bunun için tezimizde giriş ve çıkışının sınırlandırılmasına, başlangıç koşulundan bağımsızlığa ve bozucu etkinin giderilmesine göre denetleyiciler tasarlanmış ve bir DC motor tarafından dişli takımı aracılığı ile kontrol edilen ters sarkacın modeli örneği ele alınarak Matlab/Simulink'te kurulmuş, uygun LMI kodları da yazılmış, sonuçları grafiksel olarak gösterilmiştir.

Kontrol nesnelere oluşan çok sayıda belirsizlik sistemin performans değerlerini kötü yönde etkilediğinden öyle bir denetleyici tasarlamamız gerekiyordu ki bu belirsizlikleri dikkate alsın. Bunun için tezde T-S bulanık-dayanıklı (fuzzy-robust) denetleyici tasarlanmış, parametrik belirsizlikler hesaba katılarak kontrol işlemi gerçekleştirilmiştir ve sunulan yöntemin doğruluğu durum değişkenlerinin grafiksel sonuçlarıyla ispatlanmıştır.

Elde edilen sonuçlar ve tasarlanmış yazılım sanayinin robotik, uçak sanayisi, sinyallerin filtrelenmesi, ekonometrinin bazı problemlerinde ve başka alanlarda kullanılabilir. Gelecek araştırmalarda bu yaklaşımların donanımsal uygulaması da planlanmaktadır (PLC, PIC Microcontroller ve FPGA gibi donanımlar).

Çalışmanın pratik sonucu olarak çeşitli algoritmaları içeren, tarafımızdan tasarlanmış Model Bazlı T-S Bulanık Mantık Modelleme Toolbox'unu gösterebiliriz.

Çalışmada bulanık mantık teorisi, otomatik kontrol teorisi, dayanıklı (robust) kontrol teorisi, Lyapunov'un kararlılık teorisi, matris teorisi metot ve yöntemleri kullanılmıştır.

Çalışmada elde edilen önemli sonuçlar uluslararası sempozyumlarda sunulmuştur (The Third Conference on Mathematical Sciences, Second International Symposium on Computing in Science and Engineering, International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications).

**Anahtar kelimeler:** Bulanık denetleyici, Takagi-Sugeno bulanık model, paralel dağılımlı kompanzasyon, lineer matris eşitsizlikleri, Lyapunov kararlılık teoremi, bulanık-dayanıklı (fuzzy-robust) kontrol

## ABSTRACT

### DESIGN OF STABLE AND ROBUST CONTROLLER FOR TAKAGI – SUGENO FUZZY MODEL BASED CONTROL SYSTEM

Burak TEKGÜN

Master of Science Thesis, Department of Electrical and Electronics Engineering

Advisor: Assoc. Prof. Manafeddin NAMAZOV

2012, 124 pages

Since the complex systems used in industry are highly nonlinear, they are difficult and time consuming to be linearized and identified, and involving model errors, it is partially possible to eliminate these challenges via the multimodel approach proposed by Takagi and Sugeno. Because of its advantages, T-S fuzzy model is used for nonlinear systems in this thesis.

In this study an introduction is provided and the reasons for the fuzzy controllers to be used in industry are analyzed. In addition, design procedure and properties of the parallel distributed compensation (PDC) scheme are discussed.

The most important problems of the model based fuzzy control systems are stability and consideration of the constraints in practical applications. Accordingly, controllers are designed considering the input/output constraints, initial state independence and disturbance rejection. Then, as an example, an inverted pendulum controlled by a DC motor via a gear train is modeled in Matlab/Simulink, LMI codes are written and results are provided graphically.

Since, the uncertainties present in controlled objects have an adverse effect on the performance indicators of the control system; such a controller had to be designed that takes these uncertainties into account. Therefore, in this study, a T-S fuzzy-robust controller is designed; control process is realized considering the parametric uncertainties, and the validity of the proposed method is shown by giving the graphical results of the state variables.

The results and software obtained in this thesis can be used in industrial robotics, aerospace industry, signal filtering, some problems of econometrics, etc. Future research may involve the hardware implementation of this study (PLC, PIC Microcontroller, and FPGA).

As a practical outcome of this study, the Model Based T-S Fuzzy Modeling Toolbox which is created in Matlab/Simulink can be shown.

Methods used in this thesis include the following: Fuzzy Logic Theory, Control Theory, Robust Control Theory, Lyapunov's Stability Theory, and Matrix Theory.

Some of the important results obtained in this thesis are presented at international symposiums (The Third Conference on Mathematical Sciences, Second International Symposium on Computing in Science and Engineering, International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications).

**Keywords:** Fuzzy controller, Takagi-Sugeno fuzzy model, parallel distributed compensation, linear matrix inequalities, Lyapunov stability theorem, fuzzy-robust control.



## TEŞEKKÜR

Çalıőmam boyunca bilgisini, desteğini ve emeğini esirgemeyen danıőmanım Doç. Dr. Manafeddin NAMAZOV'a katkılarından dolayı teőekkürü bir borç bilirim.

Proje süresinde yaptıkları yardımlardan dolayı başta Arő. Gör. İbrahim Emre ÇELİKKALE olmak üzere tüm Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü çalışanlarına ve manevi desteklerinden ötürü aileme teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	vi
TEŞEKKÜR .....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xiv
KISALTMALAR DİZİNİ .....	xv
SİMGELER DİZİNİ.....	xvi
1. GİRİŞ .....	1
2. BULANIK MANTIK.....	5
2.1    Bulanık Mantığa Giriş .....	5
2.2    Bulanık Küme Teorisi.....	7
2.1.1    Bulanık Küme İşlemleri .....	11
2.1.2    Bulanık Küme Özellikleri .....	14
2.3    Bulanık Mantık Denetleyiciler .....	14
2.3.1    Kural Bazlı Denetleyiciler.....	17
2.3.2    Model Bazlı Denetleyiciler .....	18
2.3.3    Kural Bazlı ve Model Bazlı Denetleyicilerin Karşılaştırması.....	20
3. MODEL BAZLI BULANIK DENETLEYİCİNİN TASARIMI.....	21
3.1    Takagi-Sugeno Bulanık Modelleme .....	21
3.1.1    Bulanık Modelin Oluşturulması .....	22
3.1.2    Doğrusal Olmayan Sektör .....	23
3.1.3    Yerel Yaklaşım.....	28
3.2    Paralel Dağılımlı Kompanzasyon (PDC).....	30
3.3    Takagi-Sugeno Bulanık Modeli Evrensel Yaklaşımı .....	31
3.3.1    Nonlineer Fonksiyonların Lineer T-S Sistemleri Kullanılarak Aproksimasyonu .....	33
3.3.1.1    Lineer T-S Bulanık Sistemler.....	33
3.3.1.2    T-S Bulanık Sistemlerin Kurulma Prosedürü.....	34

3.3.1.3	Analiz ve Yaklaşım .....	36
3.3.2	Nonlinear Sistemlerin Modellenmesi ve Kontrolü.....	42
3.3.2.1	Nonlinear Dinamik Sistemlerin Lineer Takagi-Sugeno Bulanık Modelleri Kullanılarak Aproximasyonu.....	42
3.3.2.2	Nonlinear Duruma Göre Geri Beslemeli Denetleyicinin PDC Denetleyici Kullanılarak Aproximasyonu.....	44
3.4	PDC'nin MATLAB / Simulink'te Gerçekleştirilmesi.....	44
3.5	Model Bazlı T-S Bulanık Kontrol Modelleme Toolbox.....	45
4.	BULANIK KONTROL SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI.....	51
4.1	Kontrol Sistemlerinin Lyapunov Kararlılık Analizi.....	51
4.2	Matematiksel Temeller .....	51
4.3	Lyapunov'un Direkt (İkinci) Yöntemi.....	53
4.4	Lyapunov'un Dolaylı (Birinci) Yöntemi .....	55
4.5	Bulanık Kontrol Sistemlerinin Lyapunov Kararlılık Analizi .....	56
4.6	Kural Tabanlı Bulanık Kontrol Sistemlerinin Kararlılık Analizinin Kural Tetiklenme Yörüngesi Yöntemiyle Araştırılması.....	58
4.7	Model Tabanlı Bulanık Kontrol Sistemlerinin Kararlılık Analizi.....	59
4.7.1	Bulanık Sistemlerin Lyapunov Kararlılık Analizinde Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI) Yaklaşımı .....	60
4.7.1.1	Kontrol Girişinin Sınırlanması .....	68
4.7.1.2	Kontrol Çıkışının Sınırlandırılması .....	71
4.7.1.3	Başlangıç Koşullarından Bağımsızlık .....	74
4.7.1.4	Bozucu Etkinin Giderilmesi .....	76
5.	TAKAGI SUGGENO BULANIK - DAYANIKLI (ROBUST) KONTROL	82
5.1	Dayanıklılık genel anlayış .....	82
5.2	Belirsizliğin türleri ve sınıflandırılması.....	84
5.2.1	Nesnedeki Belirsizlikler .....	84
5.3	Dayanıklı Kontrol Sisteminin Kararlılığı .....	87
5.4	Belirsizliğe Sahip T-S Bulanık Modeli.....	91
5.5	T-S Bulanık-Dayanıklı Kontrol Sistemlerinin Kararlılık Şartları .....	92
5.6	T-S Bulanık-Dayanıklı Kontrol Sisteminin Kararlılığı .....	98

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	102
KAYNAKLAR.....	104
EK-1 .....	108
EK-2 .....	122
ÖZGEÇMİŞ.....	124

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 İkilik mantık ile keskin sıcaklık değerlerinin gösterimi .....	5
Şekil 2.2 (a) Ferah hava aralığı ve (b) kesik çizgiler ile ferah olmayan sıcaklık aralığı.....	6
Şekil 2.3 Sıcaklığa göre giysi seçiminin bulanık mantığa göre açıklanması .....	7
Şekil 2.4 (a) Bir üyelik fonksiyonu örneği. (b)Başka bir üyelik fonksiyonu örneği	8
Şekil 2.5 Pozitif ve büyük reel sayılar için bir üyelik fonksiyonu .....	9
Şekil 2.6 Küçük bir aralıktaki reel sayılar için bir üyelik fonksiyonu .....	10
Şekil 2.7 Sıkça kullanılan farklı şekillerdeki üyelik fonksiyonları .....	10
Şekil 2.8 Reel sayı $s=0.1$ hem “pozitif büyük”, hem de “negatif küçük” tür. ....	11
Şekil 2.9 Bulanık kümelerin birleşimi .....	11
Şekil 2.10 Bulanık kümelerin kesişimi.....	11
Şekil 2.11 Bulanık kümenin tümleyeni. ....	12
Şekil 2.12. Çelişki yasası.....	12
Şekil 2.13 (a) Klasik kümeler ve (b) bulanık kümeler için hariç tutulmuş orta yasası .....	13
Şekil 2.14 Bulanık mantık kontrol sistemi .....	14
Şekil 2.15 Bulanık mantık sisteminin giriş verisinin adım ve yüzde ile gösterimi	15
Şekil 2.16 Bulanık mantık sisteminin çıkış verisinin adım ve yüzde ile gösterilmesi .....	15
Şekil 2.17 Giriş ve çıkış derecelerini birlikte gösteren bulanık mantık sistem grafiği .....	16
Şekil 2.18 Bir iki girişli, iki kurallı Mamdani bulanık çıkarımı ve gerçek çıkışlar .....	17
Şekil 2.19 Sugeno bulanık çıkarımında kural kısmı.....	19
Şekil 3.1 Model tabanlı bulanık denetleyici tasarımı .....	23
Şekil 3.2 Doğrusal olmayan global sektör yaklaşımı .....	24
Şekil 3.3 Doğrusal olmayan yerel sektör yaklaşımı .....	25
Şekil 3.4 Üyelik fonksiyonları.....	27
Şekil 3.5 Ters sarkaç modeli için üyelik fonksiyonları .....	29
Şekil 3.6 PDC'nin genel yapısı .....	30
Şekil 3.7 $D_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ 'nin $x_{i1} x_{i2}$ ' yüzeyinde izdüşümü .....	37
Şekil 3.8 Nonlineer fonksiyon $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 \sin(4x_1) + x_1^3 - 4x_1x_2$ .....	41
Şekil 3.9 Kurulan T-S Bulanık Modeli .....	41
Şekil 3.10 Nonlineer fonksiyonun aproksimasyon hatası .....	42
Şekil 3.11 Model Bazlı T-S Kontrol Modelleme Toolbox.....	47
Şekil 3.12 (a) Kontrolü olmayan kural bloğu ve (b) onun içeriği .....	47
Şekil 3.13 (a) Kontrolü olan kural bloğu ve (b) onun içeriği .....	48
Şekil 3.14 (a) Belirsizliği ve Kontrolü Olan Kural Tip 1 bloğu ve (b) içeriği .....	48
Şekil 3.15 (a)Belirsizliği ve Kontrolü Olan Kural Tip 2 bloğu ve (b) içeriği .....	49
Şekil 3.16 (a) 1 Giriş / 2 Çıkışlı Bulanık Operatör bloğu ve (b) içeriği .....	49
Şekil 3.17 (a) 1 Giriş / 4 Kurallı Bulanık Operatör bloğu ve (b) içeriği .....	50
Şekil 4.1 Bulanık bir kavram olarak kararlılık .....	58
Şekil 4.2 Kararlı bir sisteme ait tipik bir kural tetiklenme yörüngesi .....	58
Şekil 4.3 Kararlı bir sisteme ait tipik bir kural tetiklenme yörüngesi .....	59
Şekil 4.4 Kontrol edilen sistem. ....	64
Şekil 4.5 Armatür kontrollü DC motor. ....	64
Şekil 4.6 İki kurallı T-S bulanık kontrol sistemine ait Simulink modeli .....	66
Şekil 4.7 Bulanık işlemi gerçekleştiren blok olan “Fuzzy Operations” bloğu .....	67

Şekil 4.8 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti.....	67
Şekil 4.9 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti.....	70
Şekil 4.10 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti.....	73
Şekil 4.11 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti.....	75
Şekil 4.12 Sistemde bozucu etki olduğu durumda kullanılan Simulink modeli ...	80
Şekil 4.13 (a) $v(t)_{\max} = 1$ için ve (b) $v(t)_{\max} = 0.2$ için sistemin cevabı ve uygulanan bozucu sinyaller.....	80
Şekil 5.1 Nominal nesne transfer fonksiyonu .....	86
Şekil 5.2 Örnek 4.1'deki sistemin parametre belirsizliği halindeki Simulink modeli.....	101
Şekil 5.3 Örnek 5.1'deki sistemin çıkışı.....	101

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1 Dayanıklı sentezin gerçekleştirilmesinde kullanılan ana metotların avantaj ve dezavantajları .....	83
--	----

## KISALTMALAR DİZİNİ

FLC	Bulanık mantık denetleyicisi
LMI	Lineer matris eşitsizliği
PID	Oransal-türev-integral
DC	Doğru akım
ATW	Gelişmiş teknoloji uçağı
T-S	Takagi-Sugeno
PDC	Paralel dağılımlı kompanzasyon
LTI	Doğrusal, zamanla değişmeyen



## SİMGELER DİZİNİ

$V_a$	Armatür gerilimi, V
$R_a$	Armatür direnci, $\Omega$
$L_a$	Armatür endüktansı, H
$I_a$	Armatür akımı, A
$E_b$	Zıt emf, V
$w$	Açısal hız, rad/s
$T_m$	Motor torku, Nm
$\theta$	Rotor şaftının açısal konumu, rad
$J_m$	Rotor eylemsizliği, $\text{kgm}^2$
$B_m$	Viskoz sürtünme katsayısı, Nms/rad
$K_m$	Tork sabiti, Nm/A
$K_b$	Zıt emf sabiti, Vs/rad
$x_1(t)$	Sarkacın dikeyle yaptığı açı, rad
$x_2(t)$	Açısal hız, rad/s
$g$	Yerçekimi ivmesi, $9.8 \text{ m/s}^2$
$m$	Sarkacın kütlesi, kg
$2l$	Sarkacın uzunluğu, m
$\Delta R_a$	Armatür direnci pertürensüsü, $\Omega$
$\Delta K_m$	Tork sabiti pertürensüsü, Nm/A
$\Delta K_b$	Zıt emf sabiti pertürensüsü, Vs/rad
$A_i$	Kuralların sistem matrisleri
$B_i$	Kuralların kontrol matrisleri
$C_i$	Kuralların çıkış matrisleri
$D_{ai}$	Pertürbasyonun sistem matrisinde hangi parametreleri etkilediğini gösteren matris
$D_{bi}$	Pertürbasyonun kontrol matrisinde hangi parametreleri etkilediğini gösteren matris
$E_{ai}$	Birim matris
$E_{bi}$	Birim matris

## 1. GİRİŞ

Son on yıl içerisinde Bulanık mantık kontrol (FLC) hem akademik hem de endüstriyel topluluklarda büyük ilgi görmüştür. FLC'nin birçok endüstriyel uygulamada [1-8] PID kontrol tekniğinin kontrol teorisinde yararlı sonuçlarının ötesinde başarılı olduğuna tanıklık edilmiştir. Bunun ana sebebi, birçok fiziksel sistemin kesin modelinin elde edilmesinin zorluğudur. FLC'nin ardındaki temel düşüncesi, bir operatörün “uzman deneyimi” ni denetleyiciye dahil etmektir. Yani giriş-çıkış ilişkisini EĞER-O HALDE kuralları ve dilsel değişkenler ile tanımlamaktır. Bununla birlikte, deneye dayalı tasarım stiline bazı dezavantajları vardır. Bunlardan birincisi çok girişli ve çok çıkışlı kontrol problemlerine bulanık kontrol uygulamak çok zordur; ikincisi, sistematigi ve usule uygun ayarlama tekniği yoktur; üçüncüsü, sistemin kararlılığının, dayanıklılığının (robustness), performansının ve daha birçoğunun belirlenmesi pahalıdır ancak simülasyonlarla belirlenilebilir.

Nonlinear kontrol alanında lineerleştirme metodu nonlinear sistemin bölgesel kararlılığıyla alakalıdır. Bu, belli küçük aralıklarda nonlinear sistemin lineerleştirilmiş yaklaşımı ile benzer davranış göstermesi gerektiği sezgisidir. Bunu esas alarak model tabanlı bulanık kontrol tasarımı son on yılda baş göstermiştir ve bunlardan en bilineni Takagi-Sugeno (T-S) bulanık kontrol adı ile Takagi ve Sugeno [9] tarafından ortaya atılmıştır. T-S bulanık modelindeki temel fikir, nonlinear modelin her bir denge noktasında bölgesel lineer modelinin tanımlanması ve sonra EĞER-O Halde mantığını kullanarak dilsel olarak bu bölgesel modelleri alakalandırmaktır. T-S bulanık modelinin tanımları oluşturulurken nonlinear kontroldeki önemli birçok konuya da değinilmiştir. Kararlılık analizi [10], sistematik tasarım prosedürleri [11], performans özelliklerinin eklenmesi, dayanıklılık, optimallik, nümerik uygulamalar bu konulardan bazılarıdır.

T-S bulanık denetleyicinin gelişim aracı ise T-S bulanık modelinin bir penceresi olan Paralel Dağılımlı Kompanzasyondur (Parallel Distributed Compensation (PDC)) [12]. Bunun ana fikri, T-S bulanık modelin her bir kuralı için lineer kontrol tekniği kullanmaktır. PDC tabanlı denetleyici yapısında kararlılık analizi ve kontrolün sentezi [13-17] Lyapunov kararlılık kriterinden türetilmiştir.

Genel olarak, bu Lyapunov-tabanlı yaklaşımlar Lyapunov eşitsizliklerini sağlayan, “ortak  $P$  problemi” olarak adlandırılan pozitif tanımlı ortak bir  $P$  matrisi bulmalıdır. Bunun için birçok araştırmacı bu Lyapunov eşitsizliklerini çözmek için

Linear Matris Eşitsizliği (Linear Matrix Inequality (LMI)) optimizasyonunu[18, 19] kullanmaktadır. Bununla birlikte, toplam LMI sayısı fazla olduğunda ortak pozitif tanımlı matris  $P$ 'nin çözüm mümkün olmayabilir. LMI metoduna karşılık T-S bulanık denetleyicilerini çözmek için kovaryans kontrol tekniği kullanılarak geliştirilmiştir. Tasarım fikri denetleyicinin her bir kuralının geribesleme kazançlarını belli sınırlamaları sağlayacak şekilde elde edilebilir. Dolayısıyla yaklaşım, sadece ortak  $P$  problemini iyileştirmez, aynı zamanda her bir kuralının geribesleme kazançlarını elde etmeyi de kolaylaştırır. Yine de, birçok durumda geribesleme sentezinde çıkış geribeslemeli bulanık kontrol problemleri ile başa çıkmak çok zordur çünkü Lyapunov kararlılık şartları LMI'lere doğrudan dönüştürülemez. Bunları göz önüne alarak tez çalışmamızda çıkış geribeslemeli T-S bulanık denetleyicisinin tasarımında basit ve güçlü bir metot geliştirmek için çalıştık.

PDC-tabanlı kontrol yapısı çok popüler olsa bile bazı dezavantajları da yok değildir. Bulanık sistem birçok kural içerdiğinde, kural çıkarımı önemli şekilde etkilenecek çözümü mümkün olmayan sonuçlar elde edilebilir (toplam LMI sayısının hızla artması), donanım masrafı fazladır (bulanık denetleyicinin, durulaştırma işlemi için yüksek hızlı bir hesaplayıcıya ihtiyacı vardır). Yukarıda verilen tanımlar şunu göstermektedir: pek çok temel mesele çözülmemesine rağmen T-S bulanık kontrolün ilerlemesi başarılı bir şekilde devam etmektedir.

T-S bulanık sisteminin ilk örneği 1985'te ortaya çıkmıştır [9]. Orijinal fikir, bulanık sistemin çıkışının öncül değişkenlerinin bulanık harmanlanmasıdır. Tanaka ve Sugeno ilk olarak bu konsepti nonlinear kontrol alanında uyguladılar [10] ve aynı zamanda T-S bulanık sistemlerinin kararlılık analizini Lyapunov'un direkt metodunu kullanarak yapmışlardır. Bu tür yaklaşımlara model tabanlı bulanık kontrol tasarımı denilmiştir. Bundan beri T-S bulanık denetleyicisi ile denetlenen nonlinear sistemlerin çekiciliği, akademik ve endüstriyel camiada artmıştır.

Bazen nonlinear sistemlerin matematiksel modelleri belli olmasa bile elimizde giriş ve çıkış verileri varsa bu durumda bilinen birçok metodu kullanarak sistemin modeli kurulur. Bazı metodlar sistemin gerçek (crisp) modelini kurar, bazıları ise direkt olarak bulanık modelini kurar. Bulanık modelini kurmak için kullanılan yazılım 3.bölümde daha geniş olarak ele alınacaktır. Bununla beraber yapay zeka metotları kullanılarak da sistemin tanımlanması mümkündür. Örneğin, sistem tanımlama tekniği

ve adaptif sinir ağı yapılarını kombine eden ve ANFIS olarak adlandırılan (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System) [20] popüler bir metottur. Yine de T-S bulanık kontrol alanındaki popüler modelleme yaklaşımı, nonlinear modeli lineer olan parçalara ayırmak ve her birinin denge ve operasyon noktalarını belirlemektir [21-25]. Bu bölgesel lineer modeller doğrusallaştırma tekniği kullanılarak elde edilir.

Denetleyici tasarımında ise T-S bulanık kontrol PDC konseptinden [12] sonra büyük gelişme kaydetmiştir. PDC konseptinde T-S bulanık denetleyici, T-S bulanık modelin öncül parametreleri ile aynı bulanık kümeleri paylaşmaktadır. Bulanık denetleyicinin son çıkış değeri nonlineerdir çünkü bu değer her bir lineer geribesleme kazancının harmanlanmasından elde edilmiştir. Dolayısıyla birçok nonlinear kontrol problemi lineer kontrol tekniği ile çözülebilir.

T-S bulanık modeline ve PDC-tabanlı denetleyiciye giriş yaptıktan sonra şimdi kararlılık meselelerini ele alalım. Tanaka ve Sugeno Lyapunov'un direk metodundan yararlanarak elverişli bir kararlılık koşulu türetmişlerdir. Buna göre,  $\dot{V}(t) < 0$  sürekli zamanlı ve  $V(k+1) - V(k) < 0$  ayrık zamanlı fonksiyonu için eğer  $P > 0$  olan bir matris varsa T-S bulanık sistemi asimptotik kararlıdır. Burada  $V(x) = x^T P x$  Lyapunov'un standart aday fonksiyonudur. Ortak  $P$  probleminin anlamı, Lyapunov'un kararlılık kriterini sağlayan  $P > 0$ 'ın nasıl ayarlanacağıdır. Son on yıldan önce tasarımcılar Ortak  $P$  problemini çözmek için deneme yanılma yöntemlerine bel bağlıyorlardı. Aslında ortak  $P$  problemi, LMI'ler için konveks optimizasyon tekniklerinden önce de etkin biçimde çözülebilmekteydi. O zamandan beri kararlılık analizi veya kontrol sentezi LMI gibi konveks programlama tekniğine dayanıyor. Özellikle bulanık sistem birçok Eğer-O Halde kuralları içeriyorsa, Lyapunov eşitsizliklerini sağlayan  $P > 0$ 'ı bulmak sanıldığı kadar kolay olmayabilir. Bu dezavantajların üstesinden gelebilmek için birkaç bulanık denetleyici tasarımı parça-parça-sürekli Lyapunov fonksiyonları kullanılarak gerçekleştirildi [26-29]. Bu yaklaşımlar parça parça Lyapunov fonksiyonlarının orijinal tasarımdan daha rahatlatılmış olduğunu vurgulamaktadır çünkü ortak Lyapunov fonksiyonu parça-parça Lyapunov fonksiyonunun özel bir durumu olarak görülmektedir. Yine de bu tasarımlar her zaman büyük ölçüde yapılabilişliğini azaltan sınırlayıcı bir etkiye, bazı ekstra sınırlamalara veya varsayımlara ihtiyaç duymaktadır.

Pratik bakımdan tasarımcılar sadece donanım maliyetini azaltmazlar aynı zamanda sistem performansını da geliştirirler. Maalesef sadece birkaç araştırmacı Eğer-

O Halde kurallarının sayısını azaltmak için çaba gösteriyor [30]. Bu yaklaşım model belirsizliği olan bazı nonlinear elemanları göz önüne alır dolayısıyla T-S bulanık sisteminin bu alt sistemleri belirsiz sistemler olarak gösterilir. Birçok kaynakta bu tür T-S bulanık modele “belirsiz T-S bulanık model” denilir. Dolayısıyla dayanıklı kompanzasyon bulanık denetleyici tasarımına dahil olmalıdır. Ancak, belirsiz bulanık modelin sentezi genel halinden daha karmaşık ve zor hale gelebilir çünkü model belirsizlikleri de dikkate alınmalıdır. Neticede hala kural sayısının azaltılması metodunun geliştirilmesi gereklidir.

T-S bulanık kontrolün gelişimine ve birçok başarılı uygulamasına tanık olduk. Bu başarıya karşılık maliyet azaltılması, kuralların azaltılması ve tasarım prosedürünün basitleştirilmesi vs. gibi bazı temel ve önemli meselelerin gelişimi sürmektedir. Yani, T-S bulanık kontrolü alanındaki bilim adamlarının hala gidecek çok yolu olduğunu görmekteyiz.

Tez şu şekilde organize edilmiştir: 2. bölümde bulanık mantığa giriş, bulanık küme teorisi ve onun üzerindeki işlemler daha sonra ise bulanık mantık denetleyicilerin sınıflandırılması verilmiştir. Burada hem kural bazlı hem de model bazlı denetleyiciler ele alınmıştır. Genel olarak tezde model bazlı yani T-S bulanık mantık kontrol sistemlerinin özellikleri ele alınmıştır.

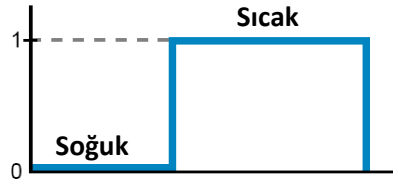
3. Bölümde T-S bulanık modelinin oluşturulması kontrol sisteminin modelinde oluşan rastgele oluşan nonlinear sektörlerin, paralel dağılımlı kompanzasyon (PDC), T-S bulanık modelinin evrensel yaklaşımının özellikleri, nonlinear dinamik sistemlerin T-S bulanık modeli temelinde aproksimasyonu, PDC'nin Matlab/Simulinkte gerçekleştirilmesi ve tarafımızdan tasarlanmış Model Bazlı T-S Bulanık Mantık Modelleme Toolbox'un açıklanması verilmiştir.

4. Bölümde model tabanlı bulanık mantık kontrol sistemlerinin kararlılık problemleri, bulanık sistemlerinin Lyapunov yöntemine göre kararlılık analizi, kontrol giriş ve çıkışının sınırlandırılmasına, başlangıç koşulundan bağımsızlığı ve bozucu etkinin giderilmesine göre kararlılık analizlerine ait teoremler verilmiş ve onların modelleri Matlab/Simulink'te kurulmuş ve uygun LMI kodları da yazılmıştır. Beşinci bölümde T-S bulanık dayanıklı (Robust) problemi ele alınmış ve burada aşağıdaki problemler incelenmiştir: Belirsizliğin türleri ve sınıflandırılması, belirsizliği olan sistemleri dayanıklı kontrolünün şartları ve karlılığı, belirsizliğe sahip olan T-S bulanık modelinin kararlılık şartı ve bu şartı sağlayan denetleyicinin tasarımı verilmiştir.

## 2. BULANIK MANTIK

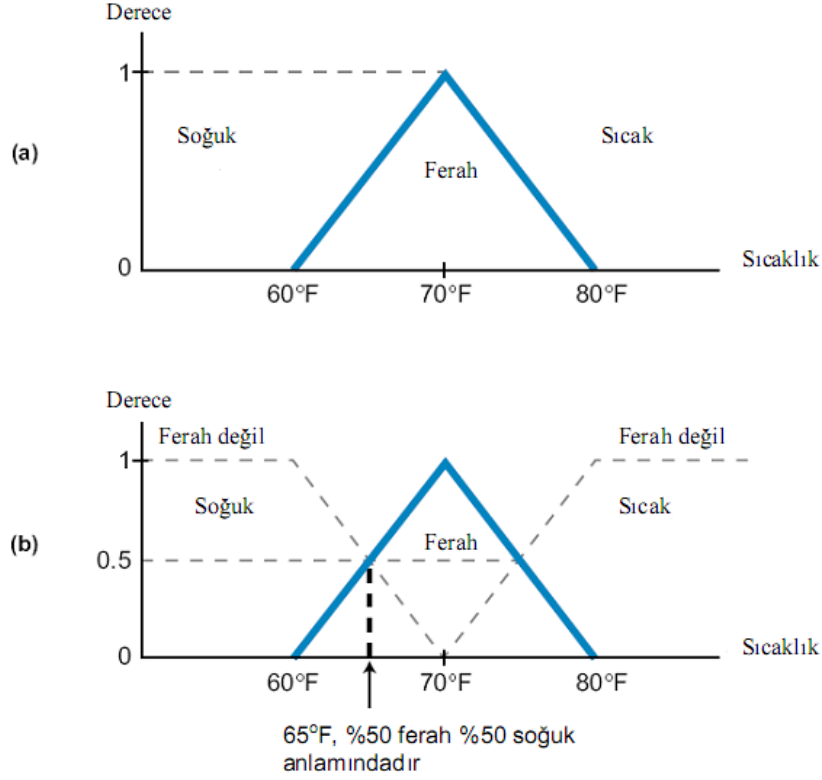
### 2.1 Bulanık Mantığa Giriş

Bulanık mantık, insanın düşünme özelliğini taklit ederek bir karar verme algoritması ile makinelere karar verme yetisi kazandırmayı amaçlayan yapay zeka biliminin bir dalıdır. Bu algoritmalar, proses verilerinin ikilik formda verilemeyen uygulamalarda kullanılır. Örneğin, “hava ferah” veya “o genç ” ifadeleri keskin ifadeler değildir. Havanın sıcaklığı veya kişinin yaşı keskin ifadelerle açıklanamaz. Bulanık mantık böyle belirsiz durumlarda bir algılama mantığı kullanır. Soğuk hava durumunda, bulanık mantık özelliği olan bir PLC soğuk ve sıcak arasında kesin olmayan bir şekilde ilişkilendirir. İkilik mantığa göre “sıcak” keskin bir değerle ifade edilir (ör. lojik 1) ve “soğuk” diğer değerle ifade edilir (lojik 0) (Şekil 2.1)



**Şekil 2.1:** İkilik mantık ile keskin sıcaklık değerlerinin gösterimi.

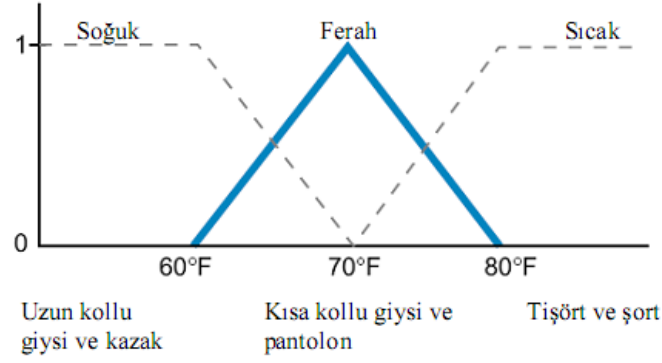
İkilik mantığın tersine bulanık veri değerleri arasından özel bir sonuç üreten mantık ile düşünür. Bulanık mantık dereceyi veya seviyeyi maksimum 1 minimum 0 gibi bir veri aralığı ile ilişkilendirir. Örneğin şekil 2.2a’da ferah hava sıcaklık aralığını açıklamaktadır, 70°F havanın tam ferah olduğunu göstermektedir(veri değeri 1). 80°F’ın üzerindeki herhangi bir derece sıcak ve 60°F’ın altındaki değerler soğuk sayılmaktadır. Böylece 80°F’dan yüksek ve 60°F’dan düşük sıcaklıkların ferahlık derecesi 0’dır, bunun anlamı, da buradaki hiçbir değer ferah anlamı taşımamaktadır. Şekil 2.2b ferah hava sıcaklığının diğer bir gösterimidir, burada kesik çizgi ferah olmayan sıcak ve soğuk havayı göstermektedir. 65°F’da bulanık mantık algoritması sıcaklığı %50 ferah %50 soğuk olarak değerlendirecek ve değeri az ferah olarak verecektir. Algoritma 60°F’ın altındaki değerleri soğuk sayacaktır.



**Şekil 2.2 (a)** Ferah hava aralığı ve **(b)** kesik çizgiler ile ferah olmayan sıcaklık aralığı

Gerçek hayatta, bulanık mantık sıcaklık algoritması sizin yılın değişik zamanlarında ne giyeceğinize karar vermenizle benzerdir. Giyeceğiniz giysinin türü sıcaklığa bağlıdır (giriş), ve bu sıcaklık göstergesidir. Şekil 2.3 de görüldüğü gibi, 70°F’da sadece kısa kollu tişört ve pantolona ihtiyaç duyarsınız. Fakat sıcaklık 65°F’a düştüğünde kısa kollu yerine uzun kollu bir tişörte ihtiyaç duyarsınız. Hatta eğer giriş %25 ferah ve %75 soğuk ise (62.5°F) sıcaklığa ve soğukluğun derecesine göre üzerinize ceket gibi bir giysi daha almaya karar verirsiniz. Daha sonra açıklayacağımız üzere bulanık sistem çıkışı sadece bir değil birkaç girişe bağlı olabilir. Bu durumda çıkış bulanık mantık grafiğinde gösterilen bilgi tabanı kullanılarak karar verilir.

Bulanık mantık sebebine göre bilgiye ihtiyaç duyar. Bu bilgiler, o proseste uzman olan birinden sağlanır ve bulanık sistemde toplanır. Örneğin sıcaklık regüleli bir yığın (batch) sisteminde sıcaklık artarsa, uzman buhar vanasının saat yönünde “biraz” çevrilmesini söyler. Bir bulanık sistem bu ifadeyi 10 derece saat yönünde mevcut valf açıklığını %5 kapatmak üzere çevir şeklinde yorumlar. Biraz sözcüğü bulanık bir ifadedir ve herhangi bir kesinlik belirtmez [31].



EĞER sıcaklık 70 °F (derecesi 1-%100 ferah),  
O HALDE kısa kollu giysi ve pantolon giy

EĞER sıcaklık 65 °F (%50 soğuk-%50 ferah),  
O HALDE uzun kollu giysi ve pantolon giy

EĞER sıcaklık 62.5 °F (%25 ferah-%75 soğuk ),  
O HALDE uzun kollu giysi, kazak ve pantolon giy

**Şekil 2.3** Sıcaklığa göre giysi seçiminin bulanık mantığa göre açıklanması

Klasik küme teorisi her bir elamanın üye olup olmaması üzerine kurulmuştur. Bu teoride üye olmak ve olmamak arasında keskin, katı ve belirli bir ayırım vardır ve elemanın kümeye aitliğini gösterir açık şekilde tanımlanmış bir sınır vardır. Diğer bir deyişle “Bu eleman kümenin bir elemanı mıdır?” diye sorduğumuzda cevap ya evet ya da hayırdır. Olasılık ve istatistikte “Bu elemanın kümenin üyesi olma olasılığı nedir?” gibi bir soru sorulabilir, bu durumda aynı “Bu elemanın kümenin üyesi olma olasılığı %90’dır” gibi bir cevap verilebilir buna göre de sonuç yine üyesidir veya değildir gibi net bir ifadedir. Doğru tahminde bulunma şansı %90’dır ama bu %90 üyesidir, %10 üye değildir anlamına gelmez. Kısacası klasik küme teorisinde bir eleman aynı zamanda hem o kümenin içinde ve hem de kümenin dışında olamaz. Dolayısıyla gerçekteki uygulamalarda klasik küme teorisi kullanılarak problemler tanımlanamaz ve çözümlenemez. Buna karşın bulanık küme teorisi kısmi üyeliği kabul eder dolayısıyla bir anlamda klasik küme teorisini geliştirir [32].

## 2.2 Bulanık Küme Teorisi

$X_A$ 'nın  $A$ 'nın bir elemanı olup olmadığını tanımlayan karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibidir.



$$X_A = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A, \end{cases}$$

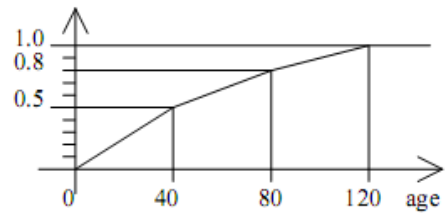
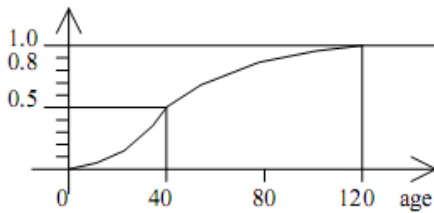
Bu durumda bir eleman kümenin sadece bir kısmına aittir, bizim ihtiyacımız olan ise elemanın kümedeki üyelik derecesini tanımlayan genelleştirilmiş bir karakteristik fonksiyonudur. Değerler büyüdükçe üyeliğin derecesi de büyür.

Örneğin S insanlığı temsil eden evrensel küme olsun, ve

$$S_f = \{s \in S \mid s \text{ yaşlı}\} \text{ olsun.}$$

Burada  $S_f$  bir "bulanık alt küme" dir çünkü "yaşlı" özelliği daha önceden tanımlanmamıştır ve kesin olarak ölçülemez yani 40 yaşındaki bir kişinin  $S_f$  kümesine ait olduğunu söyleyemeyiz. Dolayısıyla  $S_f$ 'i önceden tanımlanmış bir küme yapmak "yaşlı" kavramının miktarını kesin bir şekilde belirlemeliyiz.

Farz edelim ki "yaşlı" kavramı Şekil 2.4'deki eğri ile tanımlansın. Burada kesinlikle yaşlı denilebilecek insanlar 120 ve üzeri yaşı olanlardır ve kesinlikle genç denilebilecek olanlar ise sadece yeni doğanlardır. Bu arada diğer insanlar gerçek yaşlarına göre yaşlı oldukları kadar gençtirler de. Mesela 40 yaşındaki bir kişinin kullandığımız eğriye göre "0.5 derece" "yaşlı" olduğu ve aynı zamanda "0.5 derece" "genç" olduğu düşünülmüştür. Bu kişinin  $S_f$  kümesinin tamamen dışında veya içinde olduğunu söyleyemeyiz. Böylece Şekil 2.4'deki eğri insanların yaşlılığının matematiksel bir ölçütüdür ve buradan herhangi bir insanı  $S_f$  alt kümesi ile ilişkilendirebiliriz.



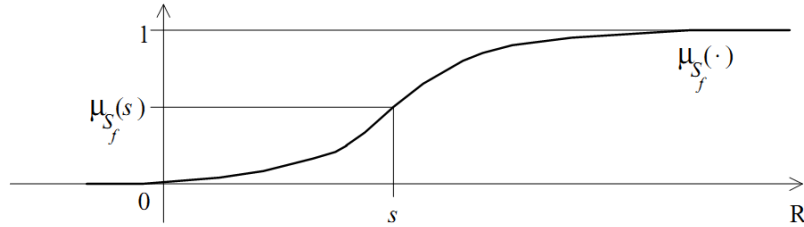
**Şekil 2.4 (a)** Bir üyelik fonksiyonu örneği. **(b)** Başka bir üyelik fonksiyonu örneği

Şekil 2.4b aynı yaşlılık kavramını aynı alt küme  $S_f$  ile parça parça lineer üyelik fonksiyonları ile tanımlamıştır. Burada  $S_f$  gibi farklı şekilde birçok üyelik fonksiyonu öne sürülebilir. Halihazırda belirli bir "bulanık alt küme" nin üyelik fonksiyonlarını seçmek için sabitlenmiş, tek ve evrensel bir kural veya kriter yoktur, doğru ve iyi bir

üyelik fonksiyonu kullanıcı tarafından bilimsel bilgiye, deneysel verilere ve belirli bir uygulamaya göre belirlenir.

Örnek: Farz edelim ki S bütün reel sayılardan oluşan evrensel kümedir ve

$$S_f = \{s \in S \mid s \text{ pozitif ve büyük}\}$$



Şekil 2.5 Pozitif ve büyük reel sayılar için bir üyelik fonksiyonu

Bu alt küme, klasik küme teorisinde daha önceden tanımlanmamıştır çünkü “s pozitifdir” kesin bir ifade iken “s büyüktür” muğlak bir ifadedir. Ancak, “büyük” ifadesini karakterize eden üyelik fonksiyonunun anlamlı ve kabul edilebilir olması için Şekil 2.5 deki gibi bir eğri verebiliriz ve bunu aşağıdaki fonksiyonla ifade edebiliriz.

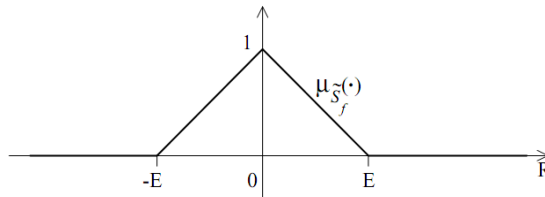
$$\mu_{S_f}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \leq 0, \\ 0 & \text{if } s > 0, \end{cases}$$

Daha sonra bulanık küme  $S_f$ ,  $\mu_{S_f}(s)$  üyelik fonksiyonu ile ilgili olarak önceden tanımlanmıştır.

Benzer şekilde, alt küme için bir üyelik fonksiyonu

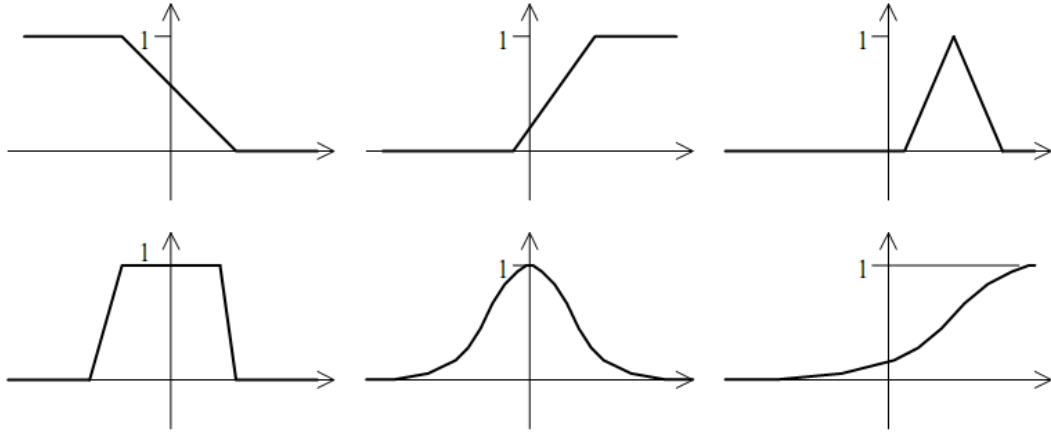
$$\tilde{S} = \{s \in S \mid |s| \text{ küçüktür}\}$$

Şekil 2.6'daki gibi seçilebilir, burada uç noktası olan E, kullanıcı tarafından uygulamanın esasına uygun olarak tanımlanmıştır



Şekil 2.6 Küçük bir aralıktaki reel sayılar için bir üyelik fonksiyonu

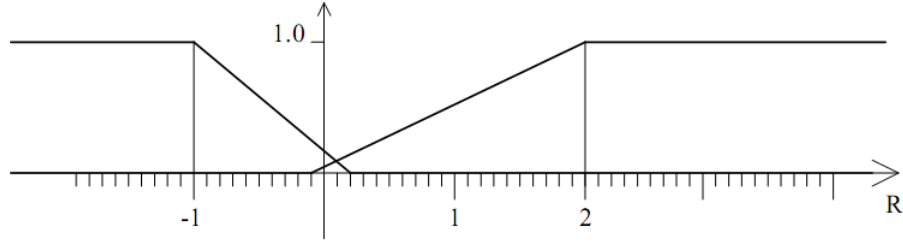
Bulanık kümeler için yaygın olarak kullanılan ve çeşitli uygulamalar için elverişli olan bir diğer üyelik fonksiyonları da şekil 2.7 te gösterilmiştir.



**Şekil 2.7** Sıkça kullanılan farklı şekillerdeki üyelik fonksiyonları

Burada bu üyelik fonksiyonlarının maksimum değerlerini, genel olarak, normalize edilmiştir,  $1 = 100\%$  tam üyeliği tanımlar ve kullanımı pratiktir.

Bir üyelik fonksiyonunun, olasılık yoğunluğu fonksiyonunu aksine üyelik fonksiyonu eğrisinin altında kalan alanın bütünlüğe eşit olması gerekmediği için negatif değerli olamayacağı açıktır [33] ( aslında  $0$  ve  $\infty$  arasında,  $0$  ve  $\infty$  dâhil, herhangi bir değer alabilir ). Bulanık küme teorisi ve klasik küme teorisi arasındaki diğer bir fark da (aslında, klasik bütün matematik teorisi ) bulanık kümenin bir elamanı klasik kümelerdekini aksine iki veya daha fazla üyelik fonksiyonuna dâhil olabilir. Örneğin eğer “pozitif ve büyük”lüğü ve “negatif ve küçük”lüğü ölçmek için şekil 2.8’deki üyelik fonksiyonlarını kullanırsak, sırasıyla  $s=0.1$ , ilk üyelik fonksiyonundan  $0.095$  ve ikincisinden  $0.08$ ’dir.  $s$  pozitiftir ve aynı zamanda negatiftir de, böyle bir durum klasik matematiğin kabul etmediği, birisinin hem genç hem de yaşlı olması durumu gibidir. Bir bulanık kümenin belirsiz ve çelişkili tanımlanması bulanık matematik için kabul edilebilirdir, bununla birlikte gerçek hayattaki birçok uygulama için de çok kullanışlıdır [32]. Daha önemlisi çelişen üyelik fonksiyonlarının kullanımı sonuçta mantıksal ve matematiksel problemlere neden olmaz ve doğru bir yaklaşım sağlar.



Şekil 2.8 Reel sayı  $s=0.1$  hem “pozitif büyük”, hem de “negatif küçük” tür.

### 2.1.1 Bulanık Küme İşlemleri

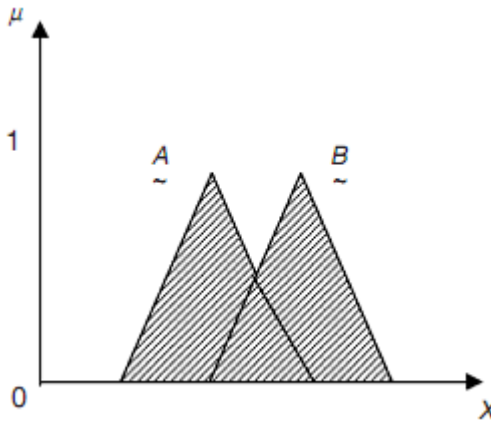
Farz edelim ki  $\tilde{A}, \tilde{B}$  ve  $\tilde{C}$ ,  $X$  uzayındaki üç bulanık küme olsun. Bu uzayın bir elemanı olan  $x$  için birleşme, kesişme ve tümlenme işlemleri aşağıdaki gibi olur.

Birleşme:  $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$

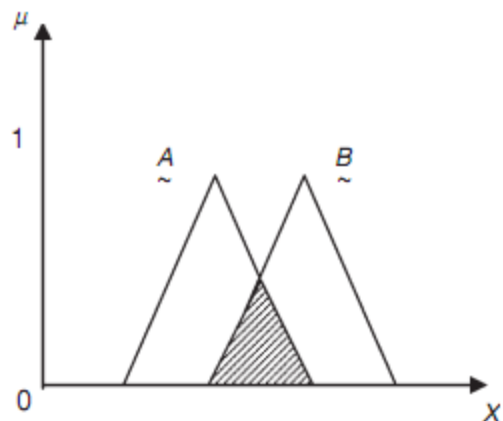
Kesişme:  $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$

Tümlenme:  $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$

Bu işlemlerin venn şeması ile gösterimi Şekil 2.9 ve 2.10 da verilmiştir.



Şekil 2.9 Bulanık kümelerin birleşimi

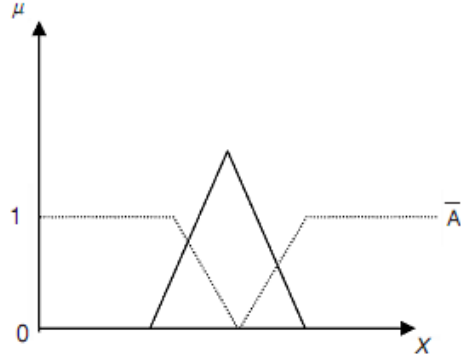


Şekil 2.10 Bulanık kümelerin kesişimi

$x$ , herhangi bir bulanık küme olarak bir uzayda tanımlanmış  $\tilde{A}$ 'nın bir alt kümesidir.  $x$  elemanının üyelik derecesi, boş küme için ( $\emptyset$ ) 0 ve tam küme için 1'dir. Bu durum klasik kümelerde ve aynı zamanda bulanık kümelerde yer alan De Morgan'ın yasasının aşağıdaki ifadeleriyle belirtilir.

$$\overline{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B},$$

$$\overline{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}.$$



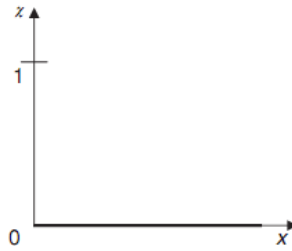
**Şekil 2.11** Bulanık kümenin tümleyeni.

Bazı işlemler dışında klasik kümelerdeki işlemler bulanık kümelerde de yapılır. Örneğin aşağıdaki iki yasa bulanık kümelere uygun değildir. Bulanık kümeler birbiri ile çakışabilir yani bir küme ile o kümenin tümleyeni çakışabilir.

$$\widetilde{A} \cup \overline{\widetilde{A}} \neq X$$

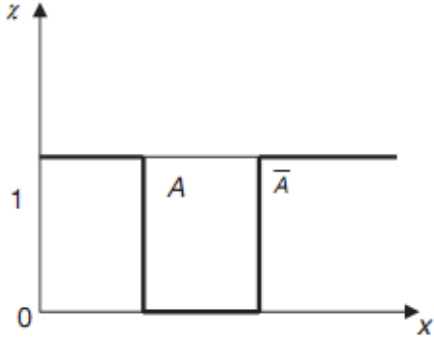
$$\widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{A}} \neq \emptyset$$

Klasik kümeler ve bulanık kümelerin hariç tutulmuş orta yasalar (Law of excluded middle ) için karşılaştırması Şekil 2.13(a) ve 2.13(b)'de verilmiştir.

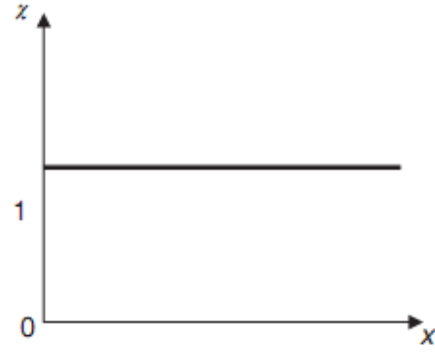


$$A \cap \overline{A} = \emptyset \text{ Çelişki yasası}$$

**Şekil 2.12** Çelişki yasası.

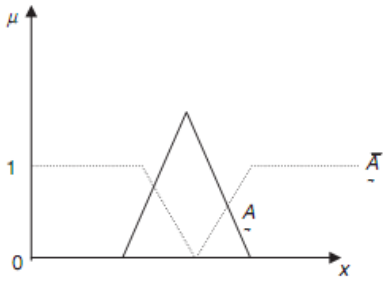


A kümesi ve onun tümleyeni

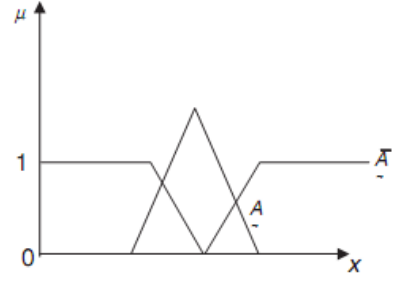


$A \cup \bar{A} = X$  (hariç tutulmuş orta yasası)

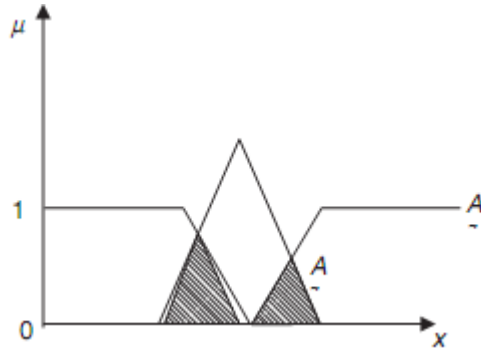
(a)



$\tilde{A}$  bulanık kümesi ve onun tümleyeni



Bulanık  $\tilde{A} \cup \tilde{\bar{A}} \neq x$  (hariç tutulmuş orta yasası)



Bulanık  $\tilde{A} \cup \tilde{\bar{A}} \neq \phi$

(b)

Şekil 2.13 (a) Klasik kümeler ve (b) bulanık kümeler için hariç tutulmuş orta yasası

### 2.1.2 Bulanık Küme Özellikleri

Klasik kümenin özellikleri aynı zamanda bulanık kümelerin özellikleriyle de örtüşür. Bulanık kümelerin önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

Değişme	$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$ $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$
Birleşme	$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{C}$ $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{C}$
Dağılma	$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$ $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$
Denkgüçlülük	$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A},$ $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}.$
Birim eleman	$\tilde{A} \cup \emptyset = \tilde{A}$ ve $\tilde{A} \cup X = \tilde{A},$ $\tilde{A} \cap \emptyset = \emptyset$ ve $\tilde{A} \cap X = X.$
Envolüsyon	$\overline{\overline{\tilde{A}}} = \tilde{A}$

### 2.3 Bulanık Mantık Denetleyiciler

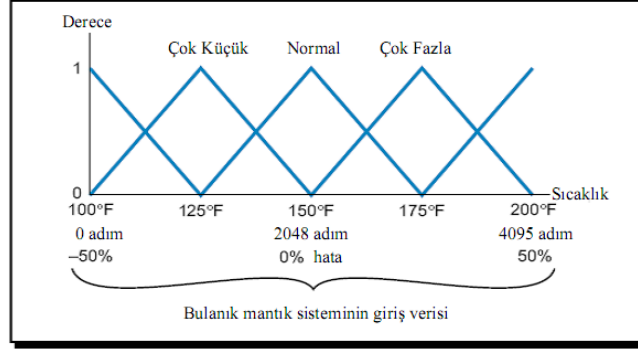
Şekil 2.14 bir bulanık mantık kontrol sistemini göstermektedir. Bulanık istemin girişi giriş ara yüzü aracılığıyla sisteme dahil olan proses çıkışıdır. Örneğin bir sıcaklık kontrol uygulamasında giriş verisi analog giriş ünitesi ile sisteme dahil edilir.



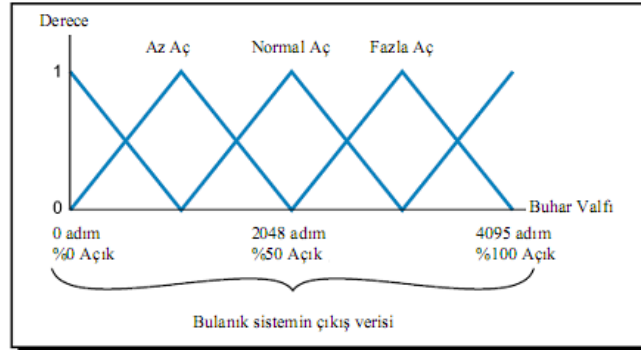
Şekil 2.14 Bulanık mantık kontrol sistemi

Bu giriş verisi bulanık mantık prosesine gider, burada işlemci veri tabanını analiz ederek çıkış verisini belirler. Bulanık proses giriş durumlarını baz alan EĞER...O HALDE kurallarının yerine getirilmesinden oluşur. Girişin derecesi hangi alt kümeye ve

hangi derece ait olduğunu belirtir.(Çok küçük, normal, çok fazla.) Şekil 2.15’deki giriş verisine dikkat edersek, 0’dan 4095’e kadar sayım değeri (count value) veya yüzde olarak hata sapması olarak verilebilir. Eğer bulanık mantık sisteminde sayma aralığı 0’dan 4095’e kadar olan bir analog giriş modülü kullanılırsa, girişler 0-4095 aralığı ile ifade edilecektir. Ayrıca analog giriş bilgisi (0-4095 adım) -%50’den +%50’ye hata aralığı olarak da gösterilebilir.



**Şekil 2.15** Bulanık mantık sisteminin giriş verisinin adım ve yüzde ile gösterimi

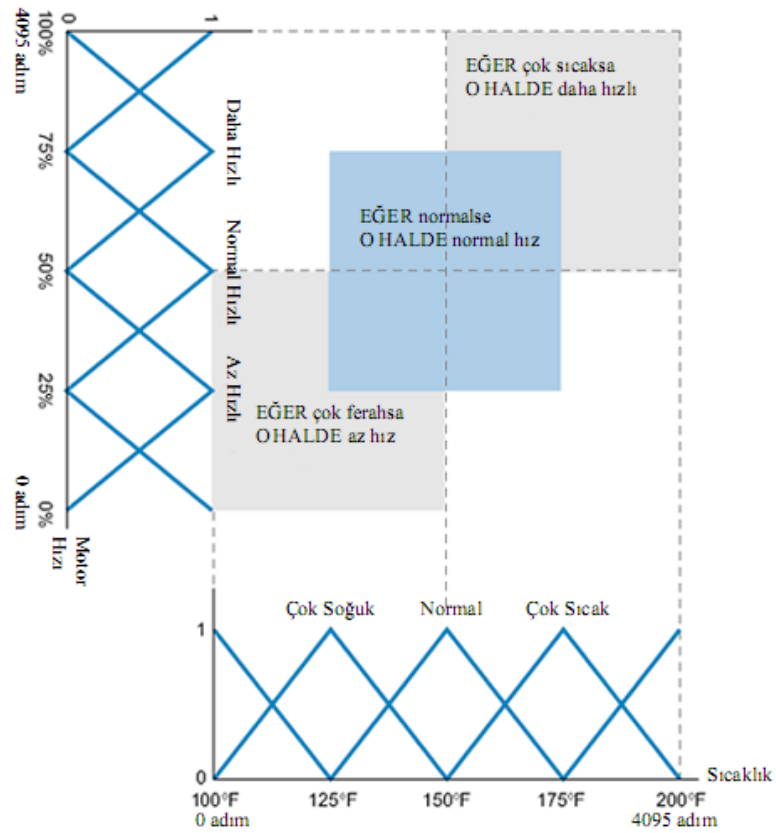


**Şekil 2.16** Bulanık mantık sisteminin çıkış verisinin adım ve yüzde ile gösterilmesi

Bulanık kontrolörün çıkışı da kontrol elemanının belirtilen uygun çıkış değerleri derecelerine göre tanımlanmıştır. Şekil 2.16’da bulanık sistemin çıkış grafiğinin derecesine göre açılıp kapanan buhar valfini kontrol eden çıkışı görülmektedir. Şekil 2.17 giriş ve çıkış derecelerini aynı anda gösteren bulanık mantık soğutma sistemini göstermektedir. Yatay eksen giriş durumunu (sıcaklık), dikey eksen ise çıkış durumunu (klima motor hızı) göstermektedir. Bu çizimde bir giriş birçok çıkış durumunu tetiklemektedir. Örneğin, eğer giriş sıcaklığı 137.5 °F ise sıcaklık iki giriş eğrisinin parçasıdır. %50 çok ferah ve %50 normal. Netice olarak giriş iki çıkışı tetiklemiştir. Çok soğuk giriş durumu düşük hız çıkışını tetiklerken, normal giriş normal hız çıkış



durumunu tetiklemiştir. Asıl çıkış değerinin bulunması ise daha sonra açıklanacak olan durulaştırma (defuzzification) adı verilen işlem ile sağlanacaktır.



**Şekil 2.17** Giriş ve çıkış derecelerini birlikte gösteren bulanık mantık sistem grafiği

Bulanık mantık kontrol sistemindeki yürütme ve işletme, modüllerin girişleri okuyup bilgiyi işleyip çıkış ürettiği akıllı ara yüzler kullanan PID kontrol uygulamasının basit halidir [31].

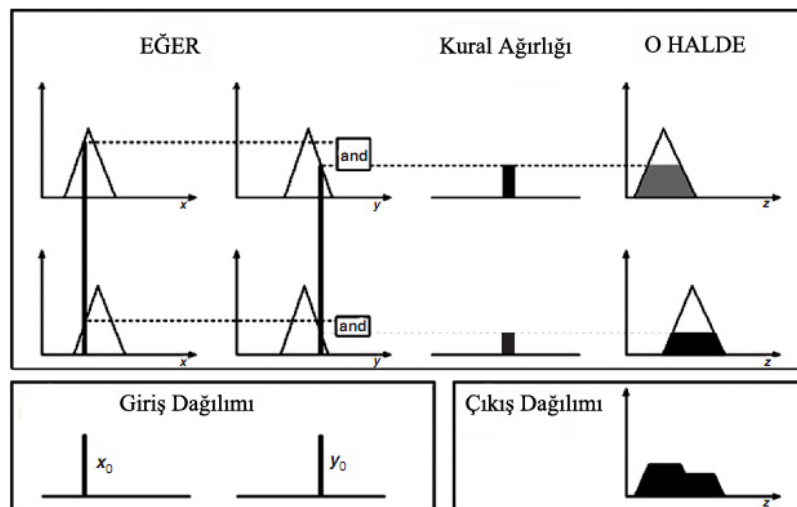
En önemli iki bulanık çıkarım metotları, kural bazlı Mamdani bulanık çıkarım metodu ve Takagi-Sugeno Bulanık çıkarım metodudur. Mamdani metodu en çok karşılaşılan metottur, bu metot Mamdani ve Asilian tarafından 1975'te ortaya çıkarılmıştır. Diğer iyi bilinen metot ise Sugeno veya Takagi-Sugeno-Kang metodudur, bu metoda ayrıca T-S bulanık metodu da denir ve 1985 yılında Sugeno tarafından ortaya atılmıştır. Bu iki metot arasındaki fark EĞER-O HALDE kurallarının ikinci kısmındadır. Mamdani bulanık sistemleri kuralın son kısmında bulanık kümeleri kullanırken T-S bulanık sistemler giriş değişkenlerinin lineer fonksiyonlarını kullanır [34].

### 2.3.1 Kural Bazlı Denetleyiciler

Mamdani'nin bulanık çıkarım metodu en çok karşılaşılan bulanık metodolojidir. Mamdani'nin metodu bulanık kümeler kullanılarak oluşturulan ilk kontrol sistemlerinin arasındadır. Mamdani 1975 [35] yılında bir buhar motoru ve kazanı kombinasyonunu kontrol etmek için deneyimli operatörlerden dilsel kontrol kurallarını belirleyerek kontrol sistemini tasarlanmıştır. Mamdani, Zadeh'in 1973'deki [36] karmaşık sistemler ve karar prosesleri için bulanık algoritmalar üzerine makalesinden esinlenmiştir.

Mamdani tipi çıkarım bulanık kümelerden oluşan çıkış üyelik fonksiyonlarını gerektirir. Toplama işleminden sonra, her bir çıkış değişkeni için durulaştırılması (defuzzification) gerektiren bir bulanık küme bulunur. Çıkış üyelik fonksiyonunun dağıtılmış bulanık kümelerden ziyade ayrık çivi şeklindeki bulanık kümelerden oluşması çoğu uygulamada daha verimlidir. Bu bazen ayrık (singleton) çıkış üyelik fonksiyonu olarak da bilinir ve ön- durulaştırılmış (pre-defuzzified) bulanık küme olarak da düşünülebilir. Bu durulaştırma işleminin verimliliğini artırır çünkü iki boyutlu fonksiyonun ağırlık merkezini bularak Mamdani metodunun genel gerekliliği olan hesaplamaları azaltır. İki boyutlu fonksiyonun kesişmesi ile integrali almaktansa birkaç veri noktasının ağırlık merkezi bulunur. T-S tipi sistemler de bu model şeklini destekler. Genel olarak, T-S tipi sistemler, çıkış üyelik fonksiyonu sabit veya lineer değişen olan her modelde kullanılabilir.

Mamdani çıkarım sistemine göre hazırlanmış bir örnek **Şekil 2.18** deki gibidir. Bu çıkarıma göre çıkış değerinin hesaplanması aşağıdaki altı basamaktan oluşmuştur:



**Şekil 2.18** Bir iki girişli, iki kurallı Mamdani bulanık çıkarımı ve gerçek çıkışlar.

- Bulanık kurallar kümesinin belirlenmesi
- Giriş üyelik fonksiyonları ile girişin bulanıklaştırılması
- Bulanık girişlerin bulanık kurallara göre kural ağırlığının bulunup birleştirilmesi
- Kuralın ağırlığı ve çıkış üyelik fonksiyonlarının birleştirilmesi ile sonucun bulunması
- Sonucun çıkıştaki dağılımının bulunması
- Bulunan dağılımın durulaştırılması (gerçek çıkış değerinin hesaplanması)

### 2.3.2 Model Bazlı Denetleyiciler

T-S bulanık modeli Takagi, Sugeno ve Kang tarafından, bulanık kuralları giriş ve çıkış veri kümesine göre oluşturmak için bir sistem yaklaşımı biçimlendirme gayretleriyle ortaya atılmıştır [9]. Aynı zamanda Sugeno modeli olarak da bilinir. Bu modelde tipik kural formatı şu şekildedir:

$$EĞER x = A \text{ ve } y = B \text{ ise, O HALDE } z = f(x, y)$$

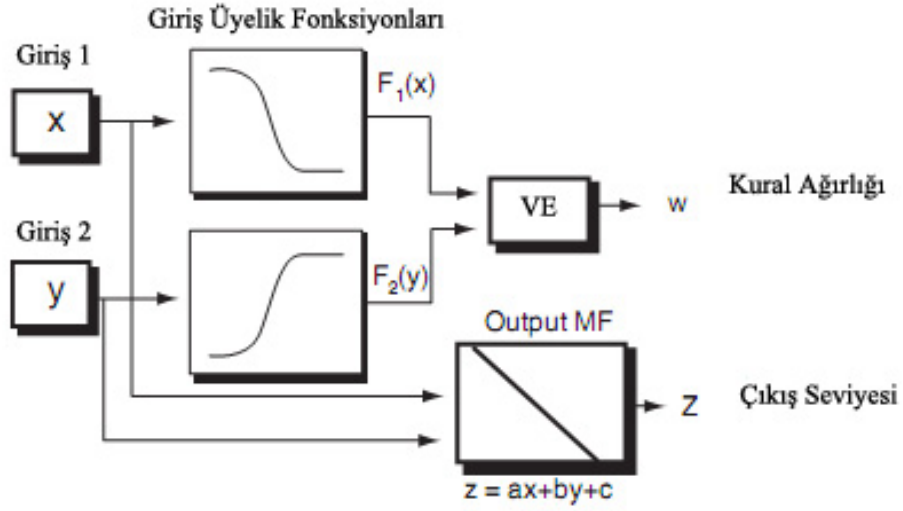
Burada  $A, B$  önceki bulanık kümelerdir;  $Z=f(x,y)$  sonuçtaki gerçek (crisp) fonksiyondur. Genellikle  $f(x,y)$  giriş değişkenleri olan  $x$  ve  $y$ 'nin bir polinomudur fakat daha önceki kurallarda belirtildiği gibi de sistem çıkışını tanımlayan fonksiyonlar da olabilir.  $f(x,y)$  birinci dereceden polinom olduğunda birinci dereceden T-S bulanık modelimiz olur.  $f$  sabit olduğunda, Mamdani çıkarımının özel bir şekli olan her bir kurala karşılık gelen ayrık (çivi, singleton) sıfırcı dereceden T-S bulanık modeli olur.

Bulanık çıkarım mekanizmasının ilk iki adımı, girişlerin bulanıklaştırılması ve bulanık operatörün uygulanması, Mamdani modeli ile aynıdır. T-S ve Mamdani arasındaki temel fark T-S'deki çıkış üyelik fonksiyonlarının lineer, lineer olmayan (nonlinear) veya sabit olmasıdır. T-S modelindeki tipik bir kural aşağıdaki gibidir.

$$EĞER Giriş1 = x \text{ VE } Giriş2 = y \text{ ise, O HALDE Çıkış } z = ax + by + c$$

Sıfırcı dereceden T-S modeli için çıkış seviyesi  $z$  sabittir ( $a=b=0$ ). Her bir kural için çıkış seviyesi  $z_i$  ağırlığı vardır. Örneğin  $F_{1,2}$  giriş 1 ve 2'nin üyelik fonksiyonları olsun. Son çıkış değeri bütün kural çıkışlarının ortalama ağırlığındadır, bu metoda ortalama ağırlık metodu (Center of Gravity) denir [37] ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{Son çıkış değeri} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i z_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$



**Şekil 2.19** Sugeno bulanık çıkarımında kural kısmı

Bir T-S kuralı Şekil 2.19 daki gibidir.

Sistemin giriş değişkenlerinin her bir kurala lineer bağımlılığı olduğu için, T-S metodu, bir dinamik sistemin farklı çalışma koşullarında, her biri ayrı olarak, çoklu lineer kontrolörden oluşan, bilinen sınırlar içinde veri tahmini yapan bir yönetici gibidir. Örneğin, bir uçağın performansı, irtifası ve mak sayısı (Bir cismin, içinde bulunduğu ortamdaki ses hızına oranı) dramatik bir biçimde değişebilir. Lineer kontrolörler, verilen uçuş koşullarına en uygun değerleri kolayca hesaplıyor olsa da, devamlı ve sarsıntısız olarak uçuş aracının durumunu güncellemelidir. Bir T-S çıkarım sistemi (FIS) girişe uygulanacak olan lineer kazançların en uygun ara değerini bulmaya son derece uygundur; doğal ve etkili bir kazanç düzenleyicisidir. Benzer şekilde bir T-S sistemi nonlineer sistemlerin lineer modellerle birleştirilmesi içinde uygundur.

Mamdani sistemine göre daha kompakt ve hesaba dayalı olarak daha faydalı olduğu için T-S sistemi, bulanık modelin kurulması için uyarlamalı (adaptif) tekniklerin kullanılmasına uygundur. Bu uyarlamalı teknikler bulanık sistemin en iyi şekilde kurulması için üyelik fonksiyonlarının ihtiyaca göre düzenlenmesinde kullanılabilir.

### 2.3.3 Kural Bazlı ve Model Bazlı Denetleyicilerin Karşılaştırması

Mamdani ve T-S arasındaki temel fark, T-S çıkış üyelik fonksiyonlarının lineer veya sabit olmasıdır. Diğer bir fark ise bulanık kuralların sonuçlarına bağlıdır, nitekim bunların toplamı ve durulaştırma prosedürleri farklıdır. Giriş üyelik fonksiyonlarının sayısı ve bulanık kuralları, yaklaşımı yapılan fonksiyonun ekstremum noktalarının sayısına ve yerine bağlıdır. T-S metodunda periyodik veya yüksek salınımlı fonksiyonlara yaklaşımda çok fazla sayıda bulanık kuralları kullanılmalıdır. T-S bulanık sisteminin minimal konfigürasyonu daha küçültülebilir ve üçgen veya yamuk olmayan giriş üyelik fonksiyonları kullanılırsa Mamdani bulanık sisteminden daha küçük hale getirilebilir. T-S kontrolörler genellikle kurallara bağlı olarak daha ayarlanabilir parametrelere sahiptir ve parametrelerin sayısı giriş değişkenlerinin sayısına bağlı olarak üstel olarak artar. Özellikle kontrol sisteminin kararlılığında, T-S bulanık kontrolörlerinde Mamdani'ye göre daha çok matematiksel sonuç vardır. Dolayısıyla Mamdani T-S'e göre daha kolay bir metottur. İki metodun da avantajları aşağıda verilmiştir.

T-S modelin avantajları:

- Sayısal olarak verimli,
- Lineer tekniklerde iyi sonuçlar (ör. PID kontrol),
- Optimizasyon ve uyarlamalı tekniklerde iyi sonuçlar,
- Çıkış yüzeyindeki süreklilik vardır
- Matematiksel analize uygundur

Mamdani modelinin avantajları:

- Sezgiseldir
- Geniş ölçüde kabul görür
- Sistem - insan ara yüzü için kullanışlıdır.

### 3. MODEL BAZLI BULANIK DENETLEYİCİNİN TASARIMI

Bu başlıkta T-S bulanık modellemesine bakılmış, burada doğrusal olmayan dinamik sistemleri yerel doğrusal giriş çıkış bağlantılarıyla ifade edilen dizilerle aproksimasyonun yapılması incelenmiştir. Her bir kural durum değişkenleri denklemini ifade edilir ve her bir kuralın kendi denetleyicisi olur. Bu denetleyicilerin katsayıları belli kriterlere ve yöntemlere göre hesaplanabilir.

Bulanık modelin oluşturulmasında çeşitli yöntemler verilmiş ve sınıflandırılmıştır. Bulanık modellerin oluşturulmasında doğrusal olmayan sektör ve yerel yaklaşım yöntemleri incelenmiştir.

T-S model ile ifade edilen, doğrusal olmayan bir sistemin kontrolü için Paralel dağılımlı kompanzasyon (Paralled Distributed Compensation, PDC) yöntemi ile bulanık denetleyicilerin tasarımı incelenmiştir.

Başlığın 3.3 kısmında T-S bulanık modelinin evrensel bir yaklaşım olduğu gösterilmiş ve lineer ve nonlinear modeller için kullanılmasının avantajları gösterilmiştir.

#### 3.1 Takagi-Sugeno Bulanık Modelleme

Dinamik bir T-S bulanık modeli, önerme kısmında bulanık kümeler, ardıl kısmında ise doğrusal, zamanla değişmeyen (LTI) dinamik sistemler barındıran ve doğrusal olmayan sistemin, yerel doğrusal giriş-çıkış bağıntıları ile ifade edilmesini sağlayan bir dizi “EĞER-O HALDE” bulanık kuralından meydana gelir.

Buna göre bir T-S bulanık modelin  $i$ . kuralı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{EĞER } z_1(t) = M_{i1} \dots \text{ ve } z_n(t) = M_{in} \text{ ise O HALDE } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} \quad (3.1)$$

Burada

$z_1(t), \dots, z_n(t)$  önerme değişkenleri

$\mathbf{x} \in R^{n \times 1}$  durum vektörü,

$r$  kuralların sayısı,

$M_{ij}$  giriş bulanık kümeleri,

$\mathbf{u} \in R^{m \times 1}$  giriş,

$\mathbf{A}_i \in R^{n \times n}$  durum matrisi,

$\mathbf{B}_i \in R^{n \times m}$  giriş matrisidir.

$z_1(t), \dots, z_n(t)$  önerme değişkenleri, durum değişkenlerine, zamana ve/veya dış bozucu sinyallere bağlı fonksiyonlar şeklinde tanımlanabilir.

Singleton bulanıklaştırma, max-çarpım çıkarım ve ağırlık merkezi durulaştırma yöntemleri kullanıldığında birleştirilmiş bulanık model aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z})(\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u})}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z})} \quad (3.2)$$

Burada

$$\mathbf{z} = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)]$$

$$w_i(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(z_j) \quad (3.3)$$

$M_{ij}$ ,  $i$ . kuraldaki  $j$ . bulanık değişkenin üyelik fonksiyonudur. Kolaylık olması açısından aşağıdaki gibi bir  $\alpha_i(\mathbf{z})$  katsayısı tanımlayalım:

$$\alpha_i(\mathbf{z}) = \frac{w_i(\mathbf{z})}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z})} \quad (3.4)$$

Bu durumda (3.2) no.lu denklem şu şekilde ifade edilebilir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z})(\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}) \quad (3.5)$$

Burada  $\alpha_i(\mathbf{z}) > 0$  ve  $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}) = 1$

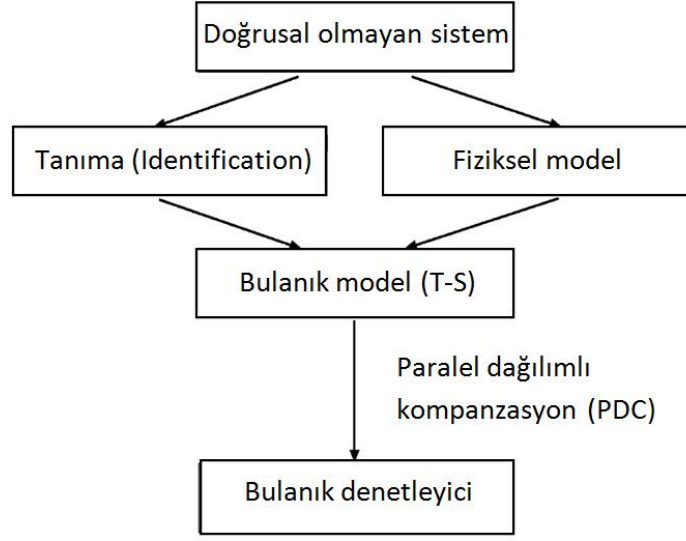
### 3.1.1 Bulanık Modelin Oluşturulması

Doğrusal olmayan bir sistemin kontrolünde kullanılacak bir bulanık denetleyici tasarlayabilmek için sistemi ifade eden bir Takagi-Sugeno bulanık modelinin oluşturulması gerekir.

Bulanık modellerin oluşturulmasında genellikle iki farklı yaklaşım vardır [37]:

- 1) Giriş-çıkış verilerini kullanarak sistem tanıma (identification)
- 2) Doğrusal olmayan sistem denklemlerinden model türetme

Şekil 3.1’de model tabanlı bulanık denetleyici tasarım prosedürü gösterilmektedir.



Şekil 3.1 Model tabanlı bulanık denetleyici tasarımı

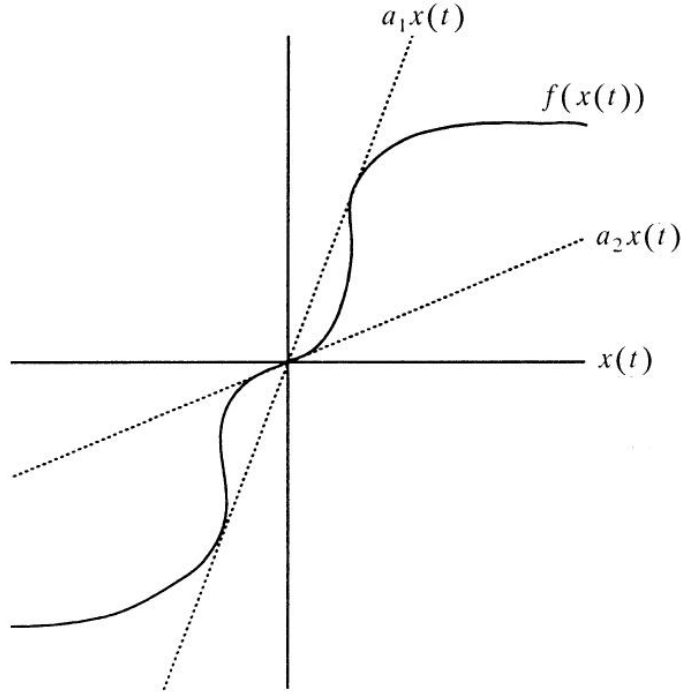
Sistem tanıma, genellikle analitik ve/veya fiziksel modellerle ifade edilmesi çok zor veya imkansız olan sistemler için uygun bir yaklaşımdır. Diğer taraftan mekanik sistemler için doğrusal olmayan dinamik modeller bazı yöntemlerle (örneğin Lagrange ve Newton-Euler yöntemleri) elde edilebilir. Bu gibi durumlarda ikinci yaklaşımın kullanılması daha uygundur. Bu yaklaşım bulanık modelleri oluşturabilmek için “doğrusal olmayan sektör (sector nonlinearity)”, “yerel yaklaşım (local approximation)” veya bunların kombinasyonunu kullanır.

### 3.1.2 Doğrusal Olmayan Sektör

Doğrusal olmayan sektör yaklaşımı şu düşünceye dayanır. Doğrusal olmayan  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  sistemini ele alalım. Öyle ki  $f(0) = 0$  olsun. Bu yaklaşımdaki amaç  $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [\alpha_1 \ \alpha_2]x(t)$  olan global sektörün bulunmasıdır (Şekil 3.2). Bu

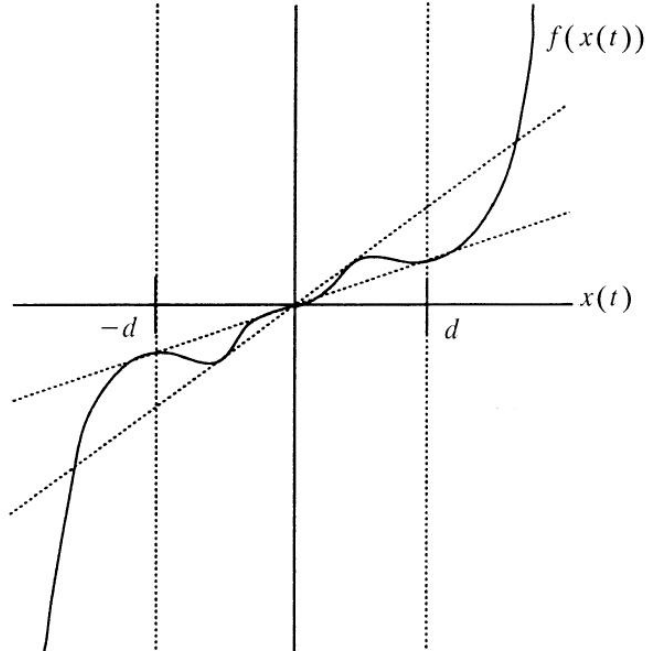


yaklaşım sistem dinamiklerini tam olarak ifade eden bir bulanık modelin oluşturulmasını garantiler.



**Şekil 3.2** Doğrusal olmayan global sektör yaklaşımı

Ancak fiziksel sistemlerde değişkenler sınırlı olduğu için bu sistemlerde global sektörlerin bulunması zordur. Bu durumda doğrusal olmayan yerel sektör yaklaşımı dikkate alınabilir (Şekil 3.3). Burada  $-d < x(t) < d$  aralığındaki iki doğru yerel sektörleri ifade etmektedir. Bulanık model, doğrusal olmayan sistemi  $-d < x(t) < d$  aralığındaki “yerel bölgede” tam olarak ifade etmektedir.



Şekil 3.3 Doğrusal olmayan yerel sektör yaklaşımı

Örnek: Aşağıdaki doğrusal olmayan sistemi ele alalım:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + x_1(t)x_2^3(t) \\ -x_2(t) + (3 + x_2(t))x_1^3(t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Basit olması açısından  $x_1(t) \in [-1,1]$  ve  $x_2(t) \in [-1,1]$  olduğunu varsayalım ve (3.6) no.lu denklemi şu şekilde düzenleyelim:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t)x_2^2(t) \\ (3 + x_2(t))x_1^2(t) & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3.7)$$

Burada  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ ,  $x_1(t)x_2^2(t)$  ve  $(3 + x_2(t))x_1^2(t)$  terimleri ise doğrusal olmayan terimlerdir. Doğrusal olmayan terimleri  $z_1(t) \equiv x_1(t)x_2^2(t)$  ve  $z_2(t) \equiv (3 + x_2(t))x_1^2(t)$  şeklinde tanımlarsak (3.7) no.lu denklem şu hali alır:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & z_1(t) \\ z_2(t) & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Daha sonra  $z_1(t)$  ve  $z_2(t)$ 'nin maksimum ve minimum değerleri hesaplanır. Buna göre

$$\begin{aligned} \max_{x_1(t), x_2(t)} z_1(t) &= 1, & \min_{x_1(t), x_2(t)} z_1(t) &= -1 \\ \max_{x_1(t), x_2(t)} z_2(t) &= 4, & \min_{x_1(t), x_2(t)} z_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Maksimum ve minimum değerler kullanılarak  $z_1(t)$  ve  $z_2(t)$  şu şekilde ifade edilebilir:

$$z_1(t) = x_1(t)x_2^2(t) = M_1(z_1(t)).1 + M_2(z_1(t)).(-1)$$

$$z_2(t) = (3 + x_2(t))x_1^2(t) = N_1(z_2(t)).4 + N_2(z_2(t)).0$$

Burada

$$M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) = 1$$

$$N_1(z_2(t)) + N_2(z_2(t)) = 1$$

Buna göre üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$M_1(z_1(t)) = \frac{z_1(t) + 1}{2}, \quad M_2(z_1(t)) = \frac{1 - z_1(t)}{2}$$

$$N_1(z_2(t)) = \frac{z_2(t)}{4}, \quad N_2(z_2(t)) = \frac{4 - z_2(t)}{4}$$

yelik fonksiyonlarını sırasıyla ‘‘Pozitif’’, ‘‘Negatif’’, ‘‘Büyük’’ ve ‘‘Küçük’’ olarak isimlendirelim (şekil 5.4). Bu durumda doğrusal olmayan sistem aşağıdaki bulanık model ile ifade edilir:

Model Kuralı 1:

$$E\check{G}ER \ z_1(t) = \text{Pozitif ve } z_2(t) = \text{Büyük ise } O \text{ HALDE } \dot{x}(t) = A_1x(t)$$

Model Kuralı 2:

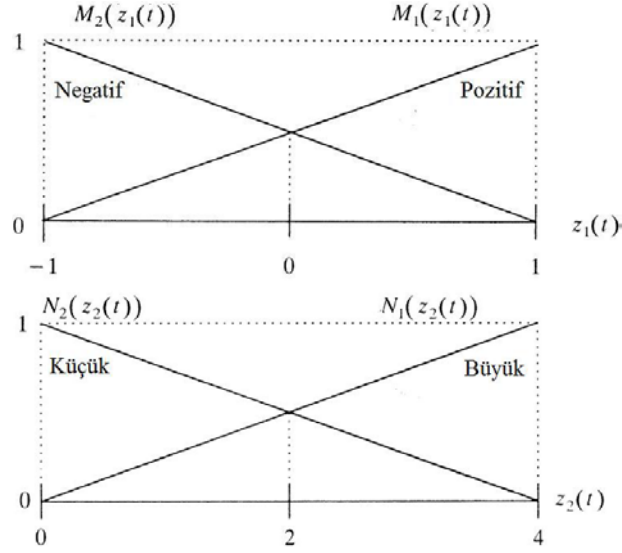
$$E\check{G}ER \ z_1(t) = \text{Pozitif ve } z_2(t) = \text{Küçük ise } O \text{ HALDE } \dot{x}(t) = A_2x(t)$$

Model Kuralı 3:

$$E\check{G}ER \ z_1(t) = \text{Negatif ve } z_2(t) = \text{Büyük ise } O \text{ HALDE } \dot{x}(t) = A_3x(t)$$

Model Kuralı 4:

$$E\check{G}ER \ z_1(t) = \text{Negatif ve } z_2(t) = \text{Küçük ise } O \text{ HALDE } \dot{x}(t) = A_4x(t)$$



Şekil 3.4 Üyelik fonksiyonları

Burada

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Durulaştırma işlemi şu şekilde gerçekleştirilir:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(z(t)) A_i x(t)$$

Burada

$$\alpha_1(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_1(z_2(t))$$

$$\alpha_2(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_2(z_2(t))$$

$$\alpha_3(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_1(z_2(t))$$

$$\alpha_4(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_2(z_2(t))$$

Oluşturulan bulanık model, doğrusal olmayan sistemi  $x_1 - x_2$  düzleminde  $[-1,1] \times [-1,1]$  bölgesinde tam olarak ifade eder.

Bir ters sarkaç sistemi doğrusal olmayan sektör yöntemi ile  $(-\pi/2, \pi/2)$  aralığında 16 kuraldan meydana gelen bir T-S bulanık modelle ifade edilir [37].

### 3.1.3 Yerel Yaklaşım

T-S bulanık modelleri elde etmenin bir diğer yolu bulanık bölümlenmeler uzaylarında yerel yaklaşım yöntemidir. Bu yöntemde doğrusal olmayan terimler mantıklı bir şekilde seçilen doğrusal terimlerle değiştirilir. Bu prosedür model kurallarının önemli ölçüde azaltılmasını sağlar. Örneğin doğrusal olmayan sektör yöntemi ile 16 kuralla ifade edilen ters sarkaç sistemi yerel yaklaşım yöntemi ile 2 kuralla ifade edilebilir.

Örnek: Bir ters sarkaç sistemi için hareket denklemleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t))/2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml\cos^2(x_1(t))}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Burada

$x_1(t)$  = sarkacın dikeyle yaptığı açı(rad)

$x_2(t)$  = açısal hız(rad/s)

$g$  = 9.8 m/s<sup>2</sup>

$m$  = sarkacın kütlesi(kg)

$M$  = aracın kütlesi(kg)

$2l$  = sarkacın uzunluğu(m)

$u$  = araca uygulanan kuvvet(N)

$a$  = 1/( $m + M$ )

$x_1(t)$  sıfır civarında iken, (3.8) ile ifade edilen denklemler aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{gx_1(t) - au(t)}{4l/3 - aml}\end{aligned}\quad (3.9)$$

$x_1(t) \pm \pi/2$  ( $|x_1(t)| < \pi/2$ ) civarındayken, (3.8) ile ifade edilen denklemler aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{2gx_1(t)/\pi - a\beta u(t)}{4l/3 - aml\beta^2}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Burada  $\beta = \cos(88^\circ)$

Bu durumda (3.9)-(3.10) nolu denklemler kullanılarak doğrusal olmayan ters sarkaç sistemi 4 kurallı bir T-S bulanık modeli ile ifade edilebilir.

*Model Kuralı 1:*

*EĞER*  $x_1(t)$  0 civarında ise *O HALDE*  $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

*Model Kuralı 2:*

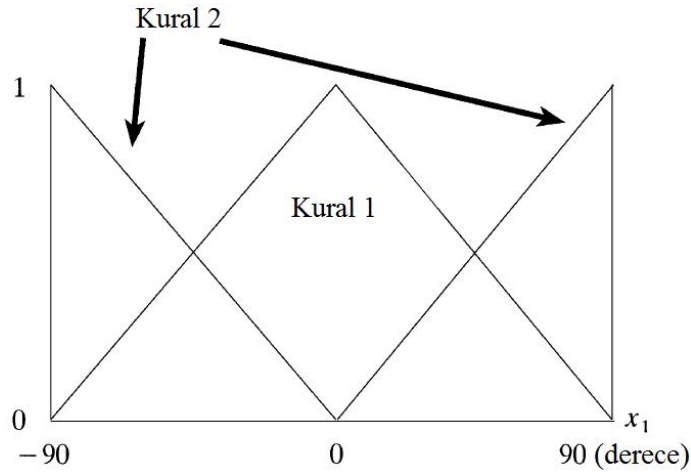
*EĞER*  $x_1(t) \pm \frac{\pi}{2}$  ( $|x_1(t)| < \pi/2$ ) civarında ise *O HALDE*  $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$

Burada

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4l}{3} - aml & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{\frac{4l}{3} - aml} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

2 kurallı bulanık model için üyelik fonksiyonları Şekil 3.5'te gösterilmektedir.



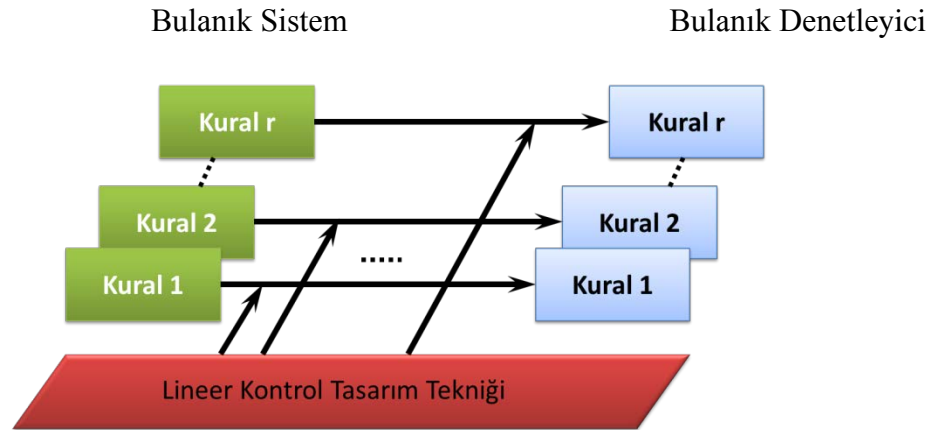
**Şekil 3.5** Ters sarkaç modeli için üyelik fonksiyonları

### 3.2 Paralel Dağılımlı Kompanzasyon (PDC)

Paralel dağılımlı kompanzasyon (PDC) yöntemi, bir T-S model ile ifade edilen, doğrusal olmayan bir sistemin kontrolü için bulanık denetleyici tasarımında kullanılır.

Daha önceden de değinildiği gibi lokal aproksimasyon tekniği bulanık model için kural sayısının azalmasına neden olur. Bununla birlikte aproksimasyonu yapılmış bulanık modeline göre tasarlanan kontrol kanunları gerçekteki nonlinear sistemin kararlılığını sağlamayabilir. Bu konu daha sonra kararlılık ve dayanıklılık (Robustness) kısımlarında ele alınacaktır.

Paralel dağılımlı kompanzasyonun hikayesi model tabanlı dizayn prosedürünün Kang ve Sugeno tarafından ortaya atılmasıyla [38] başlar. Ancak kontrol sisteminin kararlılığı tasarım prosedüründe ele alınmamıştır. Dizayn prosedürünün geliştirilmesi ve kontrol sisteminin kararlılığı [10]'da analiz edilmiştir. Bu dizayn prosedürüne paralel dağıtılmış kompanzasyon (Paralleled Distributed Compensation, PDC) denilmiştir [12].



Şekil 3.6 PDC'nin genel yapısı

PDC [10, 12, 39] verilen bir T-S bulanık modeline bulanık kontrolör tasarlamak için bir prosedür sunar. PDC'yi gerçekleştirmek için kontrol edilecek nesnenin (nonlinear sistem) T-S bulanık modelini oluşturmak gereklidir. Birçok gerçek sistem, örneğin mekanik ve kaotik (karmaşık ve düzensiz) T-S bulanık modeli ile ifade edilebilir.

PDC tasarımında her bir kontrol kuralı ona uygun T-S bulanık modeline göre tasarlanır. Tasarlanan bulanık denetleyici bulanık modelin önceden belirlenen

kısımlarının bulanık kümelerini kullanır. (3.1) ve (3.2)'deki bulanık modeller için PDC ile aşağıdaki gibi bir denetleyici tasarlayabiliriz.

$$EĞER z_1(t) = M_{i1} \dots ve z_n(t) = M_{in} ise O HALDE u = -K_i x, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.11)$$

Bulanık kontrol kurallarının ardıl kısımları lineer denetleyicilerden oluşur (bu durumda, duruma göre geri besleme kanunları). Aynı zamanda duruma göre geri beslemeli denetleyici yerine çıkış geri beslemeli veya dinamik çıkış geri beslemeli denetleyicide kullanabiliriz.

Genel bulanık denetleyici aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$u = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) K_i x}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z) K_i x \quad (3.12)$$

Bulanık denetleyici tasarımı, ardıl kısmındaki lokal geri besleme kazançları olan  $K_i$ 'lerin hesaplanması ile yapılır. PDC ile nonlinear kontrol sistemleri ile başa çıkmada basit ve doğal bir prosedüre sahip oluruz. Diğer nonlinear kontrol teknikleri özel ve daha karmaşık bilgi gerektirmektedir.

### 3.3 Takagi-Sugeno Bulanık Modeli Evrensel Yaklaşımı

Bu kısımda bulanık modelleme ve nonlinear sistemlerin kontrolü ile ilgili iki sonuç vereceğiz. İlk olarak, doğrusal kurallı T-S bulanık modelleri ile pürüzsüz (smooth) nonlinear kontrol sistemi aproksimasyonunun yapılabileceğini ispatlayacağız. Daha sonra, herhangi bir pürüzsüz nonlinear duruma göre geri beslemeli kontrolörün PDC ile aproksimasyonu yapılacaktır.

Çeşitli bulanık modelleme temaları arasında Takagi-Sugeno modeli en popüler modelleme pencereleri arasındadır [9]. Genel bir T-S model her kurala karşılık gelen ve ardıl kısmında (consequent) sabit bir terim bulunduran affine modellerden oluşmuştur. Bu affine T-S model diye de bilinir. Bu çalışmamızda biz, T-S bulanık modelinin, lineer modelle ifade edilmiş (sabit terimi olmayan) sonuçlu kurallardan oluşmuş, özel bir tipine odaklanacağız. Biz bu modeli lineer kurallı T-S bulanık modeli veya basitçe lineer T-S model diye adlandıracacağız. Bu çalışma süresince açık olarak anlaşılacağı üzere, lineer kural ardıl kısmına sahip T-S modelinin cazibesi, Lyapunov tabanlı sistem analizi ve tasarım tekniklerine doğal olarak olanak sağlamasıdır. Genel kanı, lineer



kural sonuçlu T-S modelin bir nonlinear sistemi ifade etmekte affine T-S bulanık modeline göre sınırlı yeteneğe sahip olduğudur [40].

Bir önceki bölümde PDC kontrolör yapısı ile ilgili bilgi verilmiştir [12, 41]. Bu yapı, birleştirilmiş lineer kural sonucuna sahip olan T-S modelinin yansıması olarak bir bulanık duruma göre geri beslemeli kontrolör olarak kullanılır [42-44].

Bu bölümde lineer kural sonuçlu (consequent) ve PDC'li T-S bulanık modellerin temel yeteneklerini araştıracağız. Bunun sonucunda, iki sonuç elde edeceğiz. İlk sonuç, bir lineer T-S bulanık modeli, pürüzsüz nonlinear kontrol sisteminin evrensel yaklaşımının yapılabileceğidir. Nonlinear dinamik sistemlerin yaklaşımının bulanık kural sonuçları olarak affine T-S modellerle yaklaşımının yapılabileceği biliniyor [45, 46]. Buna rağmen, T-S modellerin birçok kararlılık analizi ve kontrolör tasarımı lineer kural sonuçlu model tabanıdadır. Bu durumda şöyle bir soru akla geliyor: herhangi bir pürüzsüz nonlinear sisteme lineer sonuçlu T-S model ile yaklaşım mümkün müdür? Referans [47] bu soruya bir boyutta basitçe cevap veriyor. Bu kısımda bu soruyu n-boyutlu nonlinear dinamik sistem için T-S modelini kurarak cevaplamaya çalışacağız. Cevap evettir. Yani eğer yeterli sayıda bulanık kural kullanılırsa orijinal vektör alanı artı onun hızı kesin olarak tahmin edilebilir.

İkinci sonuç ise PDC kontrolörün herhangi bir nonlinear duruma göre geri beslemeli kontrol sistemi için evrensel yaklaşımının yapılmasıdır. Böylece, modelleme ve nonlinear kontrol sistemlerinin kontrolünde, lineer T-S model ve PDC kontrolör birlikte evrensel bir pencere sunmuş oluyolar.

Bu bölümde, reel vektörlerin n-boyutlu vektör uzayında göstermek için  $\mathbb{R}^n$ 'i kullanacağız: tanımlanmış bölgede m'inci türevi sürekli olan n-boyutlu fonksiyonların kümesini göstermek için  $C_n^m$ 'i kullanacağız;  $x_i$ ,  $x$ 'in i'inci bileşeni olarak ve  $\| \cdot \|$  standart matris veya vektör normunu göstermek için kullanılmıştır;  $O(x)$ , y sayılarının  $|y/x| < M$ , gibi bir kümesidir, burada M sabittir ve  $\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  ise  $j_1, j_2, \dots, j_n$ 'in bütün muhtemel kombinasyonların toplamını göstermek için kullanılmıştır. Biz  $x$ 'ten ziyade  $h_i$ 'yi kullanacağız fakat  $h_i$ 'lerin  $x$ 'e bağlı birer fonksiyon olduğu akıldan çıkarılmamalıdır.

### 3.3.1 Nonlinear Fonksiyonların Linear T-S Sistemleri Kullanılarak Aproksimasyonu

Bu başlıkta ise linear T-S bulanık sistemleri incelenmiş, bu sistemlerin kurulma prosedürü verilmiştir.

#### 3.3.1.1 Linear T-S Bulanık Sistemler

Linear Takagi-Sugeno bulanık sisteminin temel özelliği, her bir bulanık kuralın yerel özelliklerini linear bir fonksiyonla ifade etmesidir. Tüm bulanık sistem, bu bulanık kuralların “harmanlanma”sı (blending) ile meydana gelir. Linear Takagi-Sugeno bulanık sistemi aşağıdaki gibi gösterilir:

*Kural i*

$$\begin{aligned} &Eğer \ x_1 = M_{i1} \ \dots \ ve \ x_n = M_{in} \ ise, \\ &O \ halde \ y = a_i x, \end{aligned}$$

Burada  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  linear fonksiyon değişkenleri;  $i = 1, 2, \dots, r$  ve  $r$  EĞER-O HALDE kurallarının sayısı; ve  $M_{ij}$  bulanık kümelerdir. Linear fonksiyon  $y = a_i x$  EĞER-O HALDE kurallarının sonuç, yani O HALDE kısmından sonrasındır, burada  $a_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  'dir.

$i$ 'inci kuralın tetiklenme ihtimali,  $i$ 'inci kuralla ilişkili bütün üyelik fonksiyonlarının çarpımı şeklinde gösterilir.

$$h_i(x) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j)$$

Biz  $h_i$  nin her zaman normalize edilmesi gerektiğini farz ediyoruz, yani  $h_i(x) \geq 0$  ve  $\sum_{i=1}^r h_i(x) = 1$ . Daha sonra durulaştırma için ağırlık merkezi metodunu kullanarak T-S sistemi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$y = \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) a_i x \quad (3.13)$$

Toplama işlemi, (3.13) deki sistemin durulaştırılması ile ilgilidir, bu aynı zamanda  $a_i x$  fonksiyonları arasında  $x$  parametresine bağlı olarak ara değer bulunması (interpolasyon) gibi görülebilir.

### 3.3.1.2 T-S Bulanık Sistemlerin Kurulma Prosedürü

Farz edelim ki nonlinear fonksiyon  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde, küçük bir  $D \subset \mathbb{R}^n$  bölgesinde, aşağıdaki varsayımlarla tanımlanmış olsun.

$$f(0) = 0,$$

$f \in C_1^2$ . Dolayısıyla  $f, \partial f / \partial x$  ve  $\partial^2 f / \partial x^2$   $D$  ile sınırlanmış bölgede süreklidir.

Şimdi de  $f(x)$ 'e yaklaşmak için  $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) a_i x$  T-S sistemini kuracağız.

Amaç, yaklaşım hatası  $e(x) = f(x) - \hat{f}(x)$  ve onun türevinin  $\partial e / \partial x$  bütün  $x \in D$  için küçültmektir. Şimdi ise T-S bulanık modelin kurulum algoritmasını ele alalım.

#### Kurulum Algoritması:

1. Adım:  $D_0 = \{x \mid |x_i| < \varepsilon_0\}$  bölgesinde,  $\varepsilon_0$  pozitif seçilmiş bir sayıdır ve seçilen  $a_0 = \partial f / \partial x|_{x=0}$  şeklindedir.
2. Adım: tasarım operatörü  $P|_x$ 'i,  $\mathbb{R}^n$ 'den  $n-1$  boyutlu alt uzay  $\mathbb{R}^n / x$ 'e aşağıdaki gibi eşleme yapıyoruz.

$$P|_x y = y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x$$

$D \setminus D_0$  bölgesinde,  $x_{j_1, j_2, \dots, j_n}, [j_1 \varepsilon j_2 \varepsilon \dots j_n \varepsilon]^T$  şeklinde seçilir, burada  $\varepsilon$  bir pozitif sayı ve  $j_i$ 'ler tamsayıdır. Lineer modelin  $a_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  kurulması aşağıdaki lineer eşitliklerin çözümlenmesi ile yapılır.

$$a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_{j_1, j_2, \dots, j_n} = f(x_{j_1, j_2, \dots, j_n}), \quad (3.14)$$

$$x_{j_1, j_2, \dots, j_n} P|_{x_{j_1, j_2, \dots, j_n}} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{j_1, j_2, \dots, j_n}} P|_{x_{j_1, j_2, \dots, j_n}}. \quad (3.15)$$

Sabitlenmiş  $x_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  için, (3.14) - (3.15) değişkenleri  $a_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  olan  $n$  tane lineer eşitliktir. Eşitlik (3.14), aynı değere sahip  $x_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  noktalarındaki  $f$  ve  $\hat{f}$ 'i içerir. Eşitlik (3.15)  $n-1$  boyutlu  $\mathbb{R}^n / x_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  uzayında  $\partial f / \partial x$ 'e uygun gelen  $a_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ 'leri içerir.  $P$  ve  $x$  birbirinden bağımsız olmadığı sürece bu eşitlikler her zaman çözümlenebilir, yani,  $[x_{j_1, j_2, \dots, j_n} P |_{x_{j_1, j_2, \dots, j_n}}]$  matrisleri her zaman tersi alınabilir.

3. Adım: Bulanık kurallar aşağıdaki gibi seçilir:

*Kural 0*

*EĞER*  $x_1, 0$  civarında...ve  $x_n, 0$  civarında ise

$$O HALDE \hat{f}(x) = a_0 x$$

*Kural*  $j_1, j_2, \dots, j_n$

*EĞER*  $x_1, j_1 \in$  civarında...ve  $x_n, j_n \in$  civarında ise

$$O HALDE \hat{f}(x) = a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x$$

Kural 0 için, tetiklenme ihtimali  $h_0(x)$ 'i  $D_0$ 'ın içinde 1 ve dışında 0 olarak seçilir.  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 'inci kuralların tetiklenme ihtimali ise  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 'inci kurallarla ilişkili bütün üyelik fonksiyonlarının çarpımı ile verilir.

$$h_{j_1, j_2, \dots, j_n}(x) = \prod_{i=1}^n M_{j_i}(x_i), \quad (3.16)$$

Burada  $x_i$ 'nin üyelik fonksiyonları şu şekilde verilir:

$$M_{j_i}(x_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_i - j_i \varepsilon|}{\varepsilon}, & |x_i - j_i \varepsilon| < \varepsilon, \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Unutulmamalıdır ki  $h_{j_1, j_2, \dots, j_n}(x)$  her zaman normalize edilmiştir, yani,  $h_{j_1, j_2, \dots, j_n}(x) \geq 0$  ve

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n}(x) = 1 \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla,  $\hat{f}(x)$ 'i tekrar aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\hat{f}(x) = h_0 a_0 x + \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x \quad (3.18)$$

Burada işaret edilen, daha önce kurulmuş olan belli bir üyelik fonksiyonuna sadece, nonlinear fonksiyon ve onun türevine yaklaşım yapmak istiyorsak ihtiyaç duyduğumuzdur. Bu da bize, fonksiyonun kendisine yaklaşım yapma özgürlüğü verir.

### 3.3.1.3 Analiz ve Yaklaşım

Bu alt başlıkta, daha önceki alt başlıkta taslağı çizilen varsayımları sağlayan herhangi bir akıcı nonlinear fonksiyonun, herhangi bir kesinlik derecesiyle, daha önce kurulan T-S bulanık sistemiyle yaklaşımının yapılabileceği ispat edilecektir. Bu olgu, iki ifadenin de temellerini şekillendirecektir.

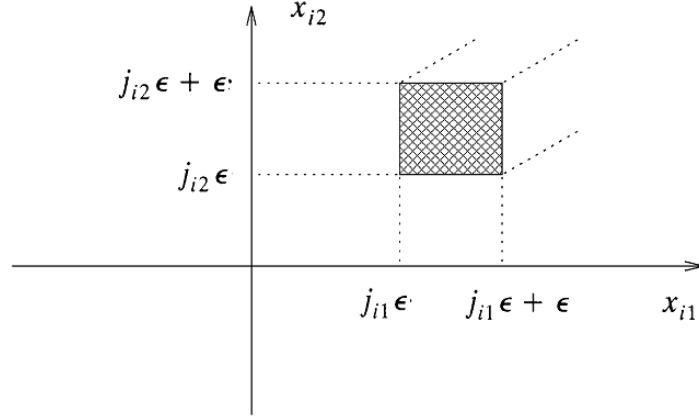
İlk olarak  $D \setminus D_0$  bölgesini birçok küçük bölgelere böleriz:

$$D_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \{x \mid x \in D, j_i \varepsilon \leq x_i \leq (j_i + 1) \varepsilon \forall i\}$$

Şimdi,  $x \in D_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  olduğunu farz ederek Şekil 3.7 'de gösterilen  $(D_{j_1, j_2, \dots, j_n})$  bölgesine odaklanacağız. Daha önce belirtilen kurulum algoritmasına dayanarak, sadece  $D_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  'nin köşelerinde merkezlenmiş bulanık kuralların  $x$ 'te aktifleştirilebildiğini biliyoruz. Yani, sadece  $x_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ ,  $D_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  'in köşelerinden biri olursa  $h_{j_1, j_2, \dots, j_n}(x) \neq 0$  olur.

Farz edelim ki  $e(x)$ ,  $f(x)$  ve  $\hat{f}(x)$  arasındaki yaklaşım hatası olsun:

$$\begin{aligned} \|e(x)\| &= \|f(x) - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x\| \\ &= \|f(x) - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_{j_1, j_2, \dots, j_n} \\ &\quad - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n})\| \end{aligned}$$



Şekil 3.7  $D_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ 'nin  $x_{i1}$   $x_{i2}$ ' yüzeyinde izdüşümü

$$\begin{aligned}
&= \| f(x) - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} f_{j_1, j_2, \dots, j_n} \\
&\quad - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \| \\
&\leq \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} \| f(x) - f(x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \| \\
&\quad + \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} \| a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \|
\end{aligned}$$

$$\leq \max_{l_1, l_2, \dots, l_n} \| f(x) - f(x_{l_1, l_2, \dots, l_n}) \| + \max_{l_1, l_2, \dots, l_n} \| a_{l_1, l_2, \dots, l_n} (x - x_{l_1, l_2, \dots, l_n}) \|$$

Aynı zamanda aşağıdakileri de dikkate alıyoruz.

$$\begin{aligned}
a_{l_1, l_2, \dots, l_n} (x - x_{l_1, l_2, \dots, l_n}) &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{l_1, l_2, \dots, l_n}} \left( (x - x_{l_1, l_2, \dots, l_n}) - \frac{\langle (x - x_{l_1, l_2, \dots, l_n}), x_{l_1, l_2, \dots, l_n} \rangle}{\| x_{l_1, l_2, \dots, l_n} \|^2} x_{l_1, l_2, \dots, l_n} \right) \\
&\quad + \frac{\langle (x - x_{l_1, l_2, \dots, l_n}), x_{l_1, l_2, \dots, l_n} \rangle}{\| x_{l_1, l_2, \dots, l_n} \|^2} f(x_{l_1, l_2, \dots, l_n})
\end{aligned}$$

$x \in D_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  olduğu için  $x$  ile herhangi bir  $D_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  köşe noktasının arasındaki mesafe  $\sqrt{n}\epsilon$ 'dan küçüktür, yani  $\|x - x_{l_1, l_2, \dots, l_n}\| \leq \sqrt{n}\epsilon$ 'dir, dolayısıyla sadece  $\epsilon$ 'u küçülterek  $e(x)$ 'i keyfi olarak küçültebiliriz.

Şimdi  $\partial f / \partial x$ 'in yaklaşımını göz önüne alalım, ama bunlardan önce üyelik fonksiyonları için aşağıdaki üç unsuru incelemeliyiz.

**Lemma 1 [37]:** Tanım

$$\frac{\partial h_{j_1, j_2 \dots j_n}}{\partial x} \Big|_x = \left[ \frac{\partial h_{j_1, j_2 \dots j_n}}{\partial x_1} \Big|_x \frac{\partial h_{j_1, j_2 \dots j_n}}{\partial x_2} \Big|_x \dots \frac{\partial h_{j_1, j_2 \dots j_n}}{\partial x_n} \Big|_x \right]$$

Var ise; o halde

$$\sum_{j_1, j_2 \dots j_n} \frac{\partial h_{j_1, j_2 \dots j_n}}{\partial x} \Big|_x = 0 \quad (3.19)$$

İspat:  $\sum_{j_1, j_2 \dots j_n} h_{j_1, j_2 \dots j_n}$  türevlerini alalım.  $\sum_{j_1, j_2 \dots j_n} h_{j_1, j_2 \dots j_n} = 1$  olduğu için, bunun  $x_i$ 'ye göre türevi 0 olacaktır.

**Lemma 2 [37]:**

$$\sum_{j_1, j_2 \dots j_n} (x - x_{j_1, j_2 \dots j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2 \dots j_n}}{\partial x} \Big|_x = -I$$

İspat:  $x_{j_1, j_2 \dots j_n} \in D_{j_1, j_2 \dots j_n}$ 'ın tepe noktası için,  $\bar{l}_i = 2j_i + 1 - l_i$  şeklinde tanımlanır;

$$(x - x_{l_1, l_2 \dots \bar{l}_i \dots l_n})_i \frac{\partial h_{l_1, l_2 \dots \bar{l}_i \dots l_n}}{\partial x_i} \Big|_x + (x - x_{l_1, l_2 \dots l_n})_i \frac{\partial h_{l_1, l_2 \dots l_n}}{\partial x_i} \Big|_x = -(h_{l_1, l_2 \dots l_n} + h_{l_1, l_2 \dots \bar{l}_i \dots l_n}),$$

$$(x - x_{l_1, l_2 \dots \bar{l}_i \dots l_n})_i \frac{\partial h_{l_1, l_2 \dots \bar{l}_i \dots l_n}}{\partial x_j} \Big|_x + (x - x_{l_1, l_2 \dots l_n})_i \frac{\partial h_{l_1, l_2 \dots l_n}}{\partial x_j} \Big|_x = 0,$$

$i \neq j$ .

Bu eşitliklerin,  $D_{j_1, j_2 \dots j_n}$  bölgesinde geçerli olan bütün kurallar  $l_1, l_2 \dots l_n$  için, toplaması yapılırsa LEMMA ispat edilmiş olur.

**Lemma 3 [37]:**

$a_x$ 'i aşağıdaki lineer eşitliklerin çözümü olarak tanımlayalım:

$$a_x x = f(x), \quad (3.20)$$

$$a_x P|_x = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x P. \quad (3.21)$$

Daha sonra  $\forall \delta, \exists \varepsilon \left\| a_x - a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| \leq \delta$ , eger  $\left\| x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| \leq \varepsilon \ll 1$ .

**İspat:**  $a_x$  (3.20) ve (3.21) eşitliklerinin çözümü olduğu için ve  $(f(x), \partial f / \partial x, P|_x)$  eşitlikleri  $x$ 'in sürekli fonksiyonları olduğu için,  $a_x$   $x$ 'e bağlı olarak sürekli olacaktır. Sonuç olarak,  $\left\| a_x - a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\|$ ,  $\varepsilon$ 'un yeterince küçük seçilmesi durumunda isteğe göre küçültülebilecektir.

Şimdi, farz edelim ki  $\partial e / \partial x$ ,  $\partial f / \partial x$  ile  $\partial \bar{f} / \partial x$  arasındaki fark olsun.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial e}{\partial x} \right\| &= \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial (\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x)}{\partial x} \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x) a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_{j_1, j_2, \dots, j_n} \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x) a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} f(x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x) a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \left( f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x (x_{j_1, j_2, \dots, j_n} - x) + O(\varepsilon^2) \right) \frac{h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x) a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| \end{aligned}$$



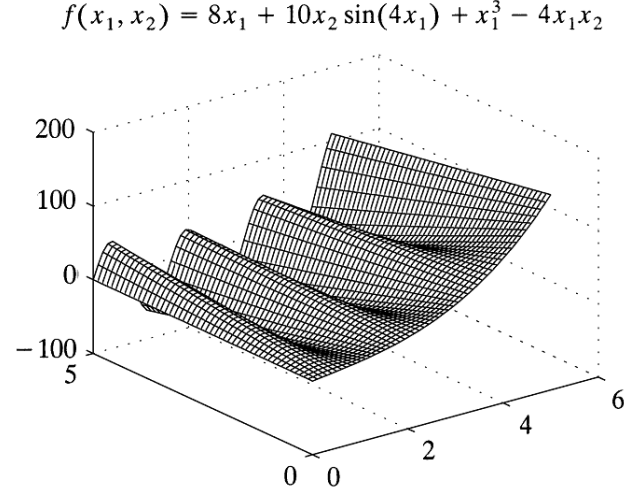
$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right. \\
&\quad - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x (x_{j_1, j_2, \dots, j_n} - x) \frac{h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \\
&\quad \left. - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x) a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| + O(\varepsilon) \\
&= \left\| - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x) a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \right\| + O(\varepsilon) \\
&= \left\| \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x + a_x \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} - \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x) a_x \right\| + O(\varepsilon) \\
&\leq \left\| \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (a_{j_1, j_2, \dots, j_n} - a_x) (x - x_{j_1, j_2, \dots, j_n}) \frac{\partial h_{j_1, j_2, \dots, j_n}}{\partial x} \Big|_x \right\| \\
&\quad + \left\| \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} h_{j_1, j_2, \dots, j_n} (a_{j_1, j_2, \dots, j_n} - a_x) \right\| + O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$\varepsilon$  'u küçülterek  $\partial e / \partial x$  'in keyfi olarak küçültülebileceğini biliyoruz.

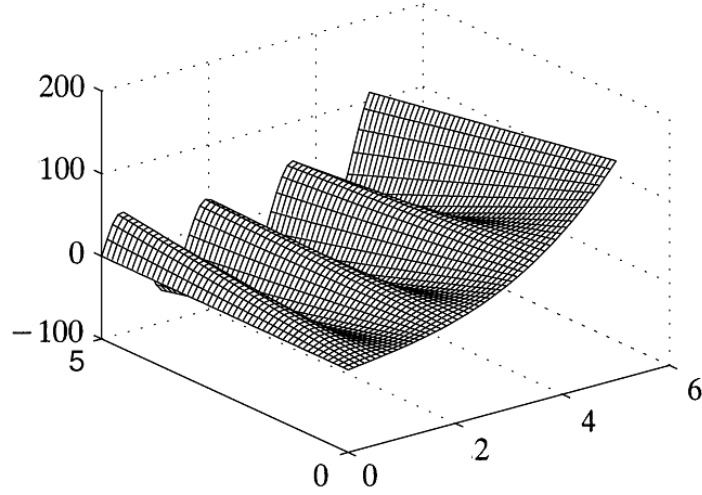
Ele alınacak sıradaki bölge  $D_0$ .  $D_0$  bölgesinde, Taylor serisine göre  $e(x)$  ve  $\partial e / \partial x$  'in  $\varepsilon$  'u küçülterek keyfi olarak küçültülebileceğini biliyoruz. Dolayısıyla daha önce belirttiklerimizi aşağıdaki teoremle özetleyebiliriz.

**Teorem 1** [37]: Herhangi bir akıcı nonlinear fonksiyon için  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $f(0) = 0$  ve  $f \in C_n^2$  'i sağlayan bir bölge tanımlanmıştır, T-S Bulanık sistemleri hem fonksiyonun hem de türevinin yaklaşımı, herhangi bir doğruluk derecesi için, yapılabilir.

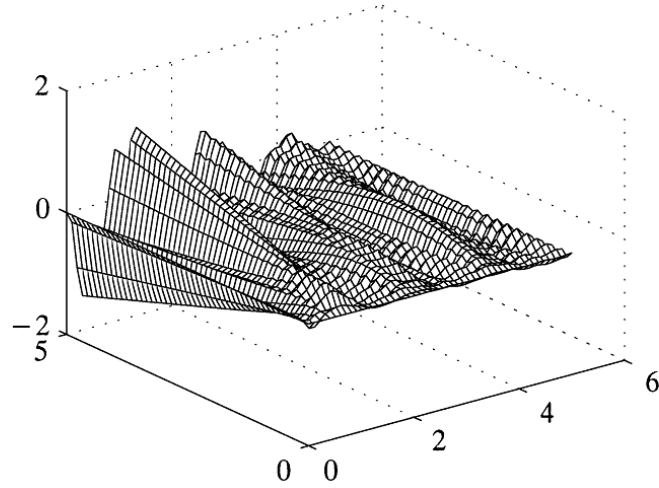
**Örnek:** Farz edelim ki aproksimasyonunu yapacağımız fonksiyon iki boyutlu nonlinear fonksiyon  $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 \sin(4x_1) + x_1^3 - 4x_1x_2$  Şekil 3.8'deki gibidir. Kurulan T-S bulanık modeli Şekil 3.9'daki gibidir. A  $25 \times 40$  grafik kullanılmıştır. Maksimum yaklaşım hatası 1.38'dir. Biz aynı zamanda yaklaşım hatasının da grafiğini çizdirdik Şekil 3.10. Burada dikkat edilmesi gereken, daha fazla kural kullanıldığında yaklaşım hatasının azalmasıdır.



**Şekil 3.8** Nonlinear fonksiyon  $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 \sin(4x_1) + x_1^3 - 4x_1x_2$



**Şekil 3.9** Kurulan T-S Bulanık Modeli



**Şekil 3.10** Nonlinear fonksiyonun aproksimasyon hatası

### 3.3.2 Nonlinear Sistemlerin Modellenmesi ve Kontrolü

Bu başlıkta da nonlinear dinamik sistemlerin linear Takagi-Sugeno bulanık modelleri kullanılarak aproksimasyonu incelenmiştir ve nonlinear modelde duruma göre geri beslemeli denetleyicinin PDC denetleyici kullanılarak aproksimasyonu yapılmıştır.

#### 3.3.2.1 Nonlinear Dinamik Sistemlerin Linear Takagi-Sugeno Bulanık Modelleri Kullanılarak Aproksimasyonu

Aşağıdaki dinamik linear Takagi-Sugeno bulanık modeli dinamik sistemlerin modellemek için kullanılır.

*Kural i*

$$\begin{aligned} & \text{Eğer } x_1(t) = M_{i1} \dots \text{ ve } x_n(t) = M_{in} \text{ ise,} \\ & \text{O halde } \dot{x} = A_i x(t), \end{aligned}$$

Burada  $x^T = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  sistemin durumları;  $i = 1, 2, \dots, r$  Eğer-O halde kurallarının sayısı;  $M_{ij}$  bulanık kümeler; ve  $\dot{x} = A_i x(t)$  i'inci Eğer - O halde kuralın ardıl (consequent part) kısmıdır.

Durulaştırma (defuzzification) için Ağırlık merkezi metodunu kullanarak T-S modelini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$\dot{x} = \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) A_i x, \quad (3.22)$$

Burada  $h_i(x)$  i'inci kuralın tetiklenme olasılığıdır.

Farz edelim ki nonlinear sistem

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.23)$$

olsun. Burada  $f(x)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  alanında tanımlanmış ve aşağıdaki varsayımlara sahip vektör alandır.

1.  $f(0)=0$ , yani orijin denge noktasıdır.
2.  $f \in C_n^2$ , dolayısıyla,  $f$ ,  $\partial f / \partial x$ , ve  $\partial^2 f / \partial^2 x$  süreklidir ve  $D$  tarafından sınırlanmıştır.

Var sayalım ki  $f(x)$ ,  $[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$  şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımla kastedilen,  $\|f(x) - \hat{f}(x)\|$  farkı küçük olan bir T-S bulanık modeli bulmaktır.  $\|f(x) - \hat{f}(x)\|$  küçük olduğunda, eğer her bir bileşeni (nonlinear fonksiyon olan) küçük olursa, sonra Teorem 1 uygulanarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

**Sonuç 1:** Her pürüzsüz nonlinear sistem (3.23) daha önce belirtilen varsayımları sağlıyorsa, herhangi bir kesinlik derecesi ile T-S bulanık modeli tarafından yaklaşımı yapılabilir.

Benzer olarak, bir pürüzsüz nonlinear sistem  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  T-S bulanık modeli tarafından yaklaşımı yapılabilir.  $u$  sistem ile alakası olmayan bir durum gibi davranarak, aynı zamanda pürüzsüz nonlinear kontrol sisteminin de  $\dot{x} = f(x, u)$  yaklaşımı yapılabilir. Bu durumda bulanık kural aşağıdaki gibi olur.

*Kural i*

$$\begin{aligned} & \text{Eğer } x_1(t) M_{i1}, \dots, x_n(t) M_{in}, u_1(t) N_{i1}, \dots, \text{ve } u_m(t) N_{im}, \\ & \text{O Halde } \dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t), \end{aligned}$$

Burada  $x^T = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  sistemin durumları ve  $u^T = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]$  sistem girişleri:  $i = 1, 2, \dots, r$  r sayıdaki eğer-o halde kuralları;  $M_{ij}, N_{ij}$  bulanık kümeler ve  $\dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t)$  eğer- O halde kurallarının ardıl kısmıdır ve

$$\hat{h}_i(x, u) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t)) \prod_{k=1}^m N_{ik}(u_k(t))$$

$i$ 'inci kuralın tetiklenme olasılığıdır.

### 3.3.2.2 Nonlineer Duruma Göre Geri Beslemeli Denetleyicinin PDC Denetleyici Kullanılarak Aproksimasyonu

Bu kısımda, bulanık denetleyicinin özel bir çeşidi olan Paralel Dağıtılmış Kompanzasyon (PDC) [41] üzerinde duracağız. PDC denetleyicinin yapısı aşağıda gösterilen bulanık kurallardan ibarettir:

*Eğer*  $x_1(t) = M_{j_1}, \dots, \text{ve } x_n(t) = M_{j_n}$  ise,  
*O halde*  $u(t) = K_j x(t)$ ,

Burada  $j=1, 2, \dots, s$ . PDC denetleyicinin çıkışı

$$u = \sum_{j=1}^s h_j(x) K_j x. \quad (3.24)$$

Bundan önceki kısımda bahsedilmiş olan argümanla benzer olarak aşağıdaki teoremi elde ediyoruz.

**Teorem 2:** Pürüzsüz bir nonlineer duruma göre geri beslemeli denetleyici için, ( $u(0)=0$ ) olan küçük bir bölgede tanımlanmış  $u=K(x)$ 'in aproksimasyonu herhangi bir kesinlik derecesi ile PDC denetleyici tarafından yapılabilir(3.24).

### 3.4 PDC'nin MATLAB / Simulink'te Gerçekleştirilmesi

PDC'nin Matlab/Simulink'de gerçekleştirilmesi pratik açıdan çok önemlidir. PDC denetleyicilerini tasarlamak için eğer sistemin giriş ve çıkış verileri var ise Matlab'da bu

işlemleri yapacak bir toolbox mevcuttur [48] ama karmaşık matematiksel nesnelerin modellenmesi veya kontrol algoritmasının tasarlanması için grafiksel programlama diline sahip olan toolbox'un olmaması tarafımızdan böyle bir toolbox'un oluşturulmasına neden olmuştur. Bu toolbox araştırmacılara basit bir kullanım sunulmaktadır. Tezde bu toolbox'un ilk versiyonu verilmiştir. 3.5 bölümünde bu toolbox'a ait bloklar tanımlanmıştır.

### **3.5 Model Bazlı T-S Bulanık Kontrol Modelleme Toolbox**

Son zamanlarda araştırmacılar bulanık modelin nümerik veriler kullanılarak kurulması ve güncellenmesi metotlarının geliştirilmesi konusuna odaklanmışlardır. Bulanık modeli ölçümlerden otomatik olarak oluşturabilmek için kapsamlı bir metodoloji Fuzzy Modeling and Identification (Bulanık Modelleme ve Tanımlama) toolbox'ta gerçekleştirilmiştir [48]. Bulanık kümeleme tekniğini kullanarak elde edilen verileri alt kümelere ayırarak lineer olarak karakterize eder. Elde edilen bu bulanık bölümlerden çok değişkenli T-S modeli kurulur.

Bulanık tanımlama terimi genellikle bulanık modellerin verilerden yola çıkarak kurulmasını işaret eder. Bilgi ve verilerin entegrasyonunda iki ana yaklaşım bulunmaktadır. Bunlardan birincisinde dilsel olarak alınan uzman bilgisi Eğer-O Halde kurallarına dönüştürülür. Bu yolda kesin model yapısı oluşturulmuş olur. Bu yapıdaki parametreler giriş çıkış değişkenleri kullanılarak daha iyi ayarlanır. Belirli ayarlama algoritmaları aslında bilgisayar ortamındadır, bir bulanık model yapay sinir ağları gibi katmanlı bir yapı olarak görülür (ağ). Bu yaklaşıma genellikle bulanık sinir ağı (neuro-fuzzy) modelleme denir. İkinci yaklaşım ise şöyledir: kuralları formülize etmek için sistem hakkında herhangi bir bilgiye sahip değilken sadece nümerik verilerden bulanık modelin kurulmasıdır. Bulunan kuralların ve üyelik fonksiyonlarının sistemin davranışını anlamlandırması beklenilir. Bir uzman kendi bilgisi ile bu bilgileri karşılaştırarak kuralları modifiye edebilir, yenilerini ekleyebilir ve gerekli bilgileri edinebilmesi için ilave deneyler yapabilir [49].

Fuzzy Modeling and Identification (Bulanık Modelleme ve Tanımlama) toolbox'ın komutları aşağıdaki gibidir.

**fmclust:** Bu fonksiyon giriş çıkış verisinden çok değişkenli T-S bulanık modeli kurar. Veri dizileri ve diğer veri-ilişkili bilgiler Dat yapısı içerisinde verilir. Bunlar aşağıdaki gibidir.

Dat.U matris içeren giriş verisi

Dat.Y matris içeren çıkış verisi

Dat.Ts örnekleme zamanı (opsiyonlu, varsayılan 1)

Dat.N yığın başına veri noktası sayısı

**fmsim:** Bu fonksiyon ise giriş verisine göre bulanık modeli simüle eder ve simüle edilen çıkış değerini gerçek çıkış değeri ile karşılaştırır.

**fmstruct:** Bulanık modelin yapısını belirtir. Bu parametreler Matlab 5 yapısında depolanmaktadır.

**fm2tex:** Bulanık modeli LaTeX yapısına dönüştürür. Oluşturulan bu dosya model ve yapı hakkında bilgiler içermektedir.

**plotmfs:** Üyelik fonksiyonlarını çizdirir.

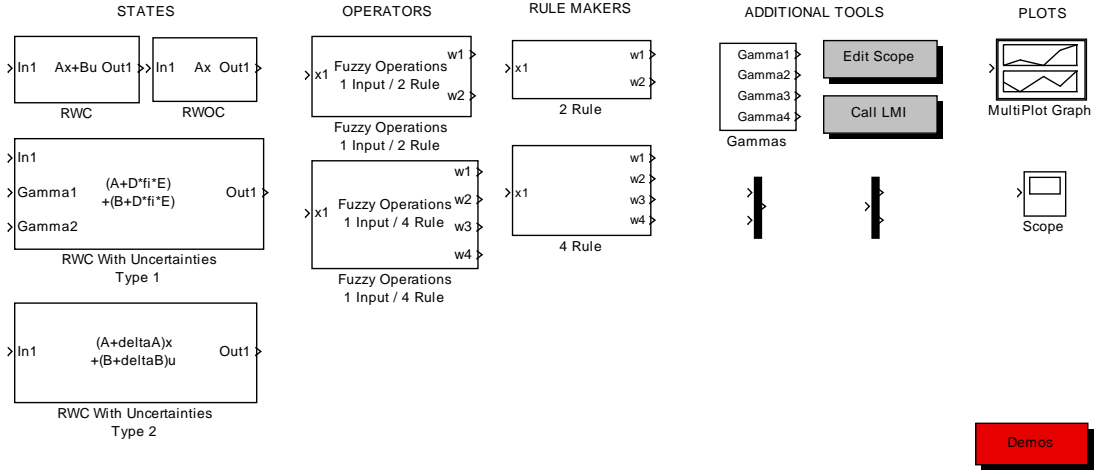
**rms:** İki işaret arasındaki hatanın etkin değerini verir

**vaf:** İki sinyal arasındaki yüzdesel dağılımı hesaplar

Çalışma sırasında mevcut olan yazılımların avantaj ve dezavantajlarını inceleyerek model bazlı bulanık kontrol sistemlerinin simüle edilmesi için geçerli bir yazılım olmadığını tespit ettik [48].

Bu tür bulanık kontrol sistemlerini simüle edilmesi için tarafımızdan Model Bazlı T-S Kontrol Modelleme (Modelling Model Based T-S Fuzzy Control Toolbox) Toolbox'u oluşturulmuştur. Bu toolbox'un kütüphanesi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

MODELLING TAKAGI SUGENO FUZZY CONTROL TOOLBOX



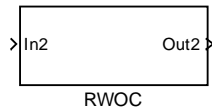
Modelling Takagi Sugeno Fuzzy Control Toolbox 1.0 alfa BlockLibrary  
 Copyright (c) 2011 Cumhuriyet University  
 Written by Manafeddin Namazov, Burak Tekgun and I. Emre Celikkale,  
 Department of Electrical & Electronics Engineering, Cumhuriyet University, Turkey  
 Please direct questions and bug reports to: btekgun@cumhuriyet.edu.tr

Şekil 3.11 Model Bazlı T-S Kontrol Modelleme Toolbox

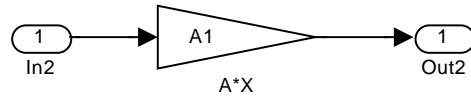
Bu toolbox, durumlar (States), operetörler (Operators), kural oluşturucular (Rule Makers) ve ilave araçlardan (Additional Tools) ibaret olmak üzere dört ana gruptan oluşur. Bununla birlikte sistemin LMI kodlarının çalıştırılması için uygun m fonksiyonunun çağırılması için de (Call LMI) bir blok bulunmaktadır.

**Durumlar Blok Grubu:**

**Kontrolü Olmayan Kural (Rule without Control):**



(a)



(b)

Şekil 3.12 (a) Kontrolü olmayan kural bloğu ve (b) onun içeriği

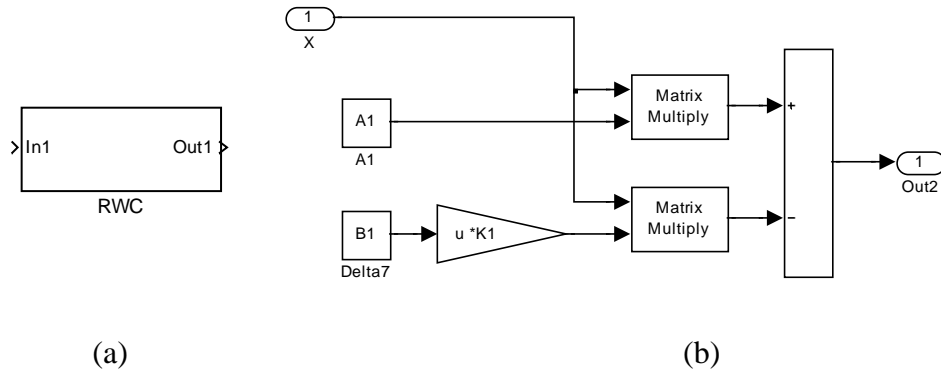
Bu blok, kontrolü olmayan T-S bulanık modelini aşağıdaki gibi oluşturur:

$$EĞER z_1(t) = M_{i1} \dots ve z_n(t) = M_{in} ise O HALDE \dot{x} = A_i x$$

Bu ifadede olan parametrelerin açıklanması 33. sayfada daha ayrıntılı açıklanmıştır.



### Kontrolü Olan Kural (Rule with Control):



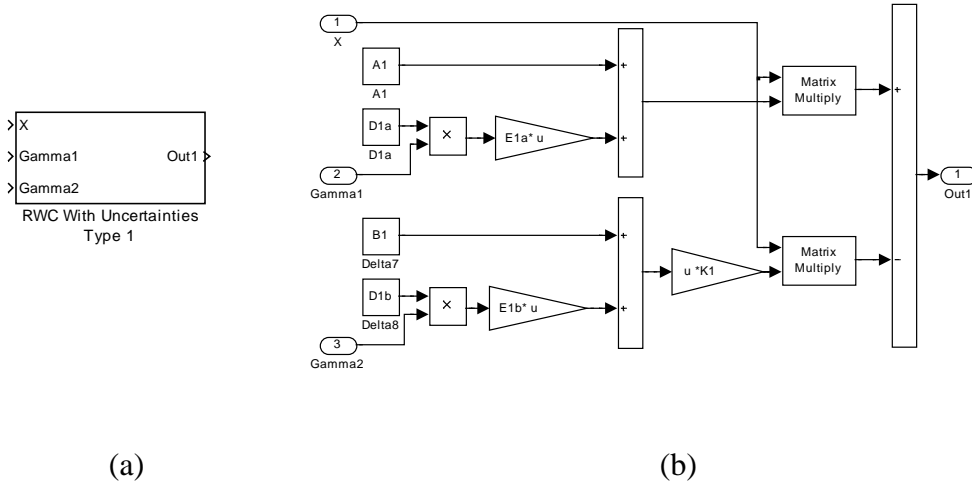
Şekil 3.13 (a) Kontrolü olan kural bloğu ve (b) içeriği

Bu blok, kontrolü olan T-S bulanık modelini aşağıdaki gibi oluşturur:

$$\text{EĞER } z_1(t) = M_{i1} \dots \text{ ve } z_n(t) = M_{in} \text{ ise O HALDE } \dot{x} = A_i x + B_i u$$

Bu ifadeye olan parametrelerin açıklanması 21. sayfada daha ayrıntılı açıklanmıştır.

### Belirsizliği ve Kontrolü Olan Kural Tip 1 (Rule with Control and Uncertainties Tpye1):



Şekil 3.14 (a) Belirsizliği ve Kontrolü Olan Kural Tip 1 bloğu ve (b) içeriği

Bu blok, belirsizliği ve kontrolü olan T-S bulanık modelini aşağıdaki gibi oluşturur:

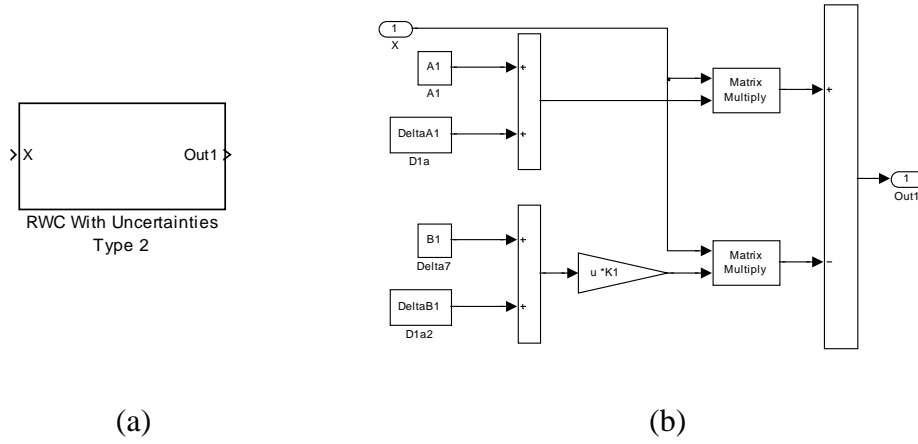
*Kural i*

*Eğer  $z_1 M_{i1}$  ise ve  $\dots z_p M_{ip}$  ise*

$$\text{O Halde } \dot{x} = (A_i + D_{ai} \phi_{ai}(t) E_{ai}) x(t) + (B_i + D_{bi} \phi_{bi}(t) E_{bi}) u(t), \quad i = 1, \dots, r.$$

## Belirsizliği ve Kontrolü Olan Kural Tip 2 (Rule with Control and Uncertainties

Typ2):



Şekil 3.15 (a) Belirsizliği ve Kontrolü Olan Kural Tip 2 bloğu ve (b) içeriği

Bu blok, belirsizliği ve kontrolü olan T-S bulanık modelini aşağıdaki gibi oluşturur:

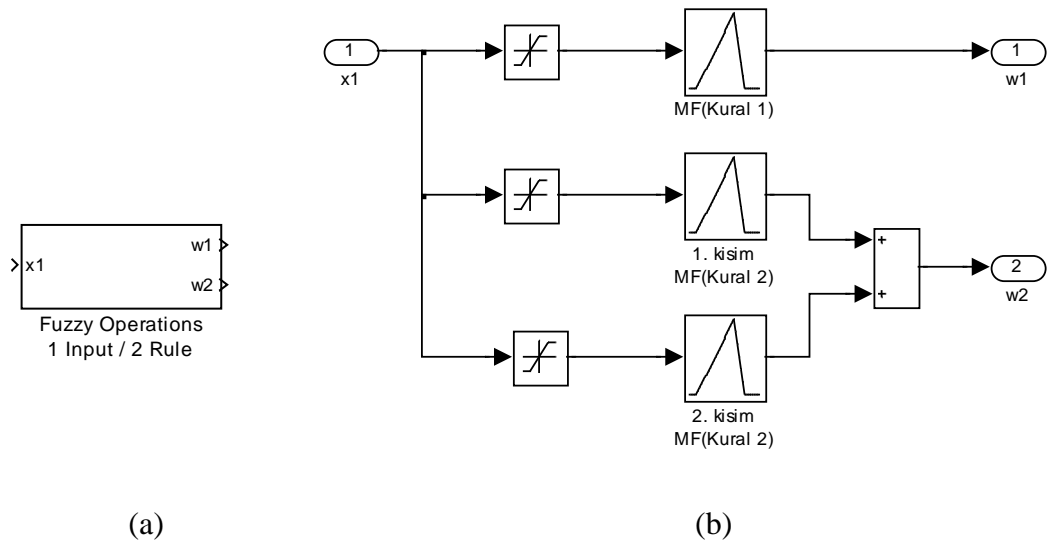
*Kural i*

*Eğer  $z_1 M_{i1}$  ise ve...  $z_p M_{ip}$  ise*

*O Halde  $\dot{x} = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .*

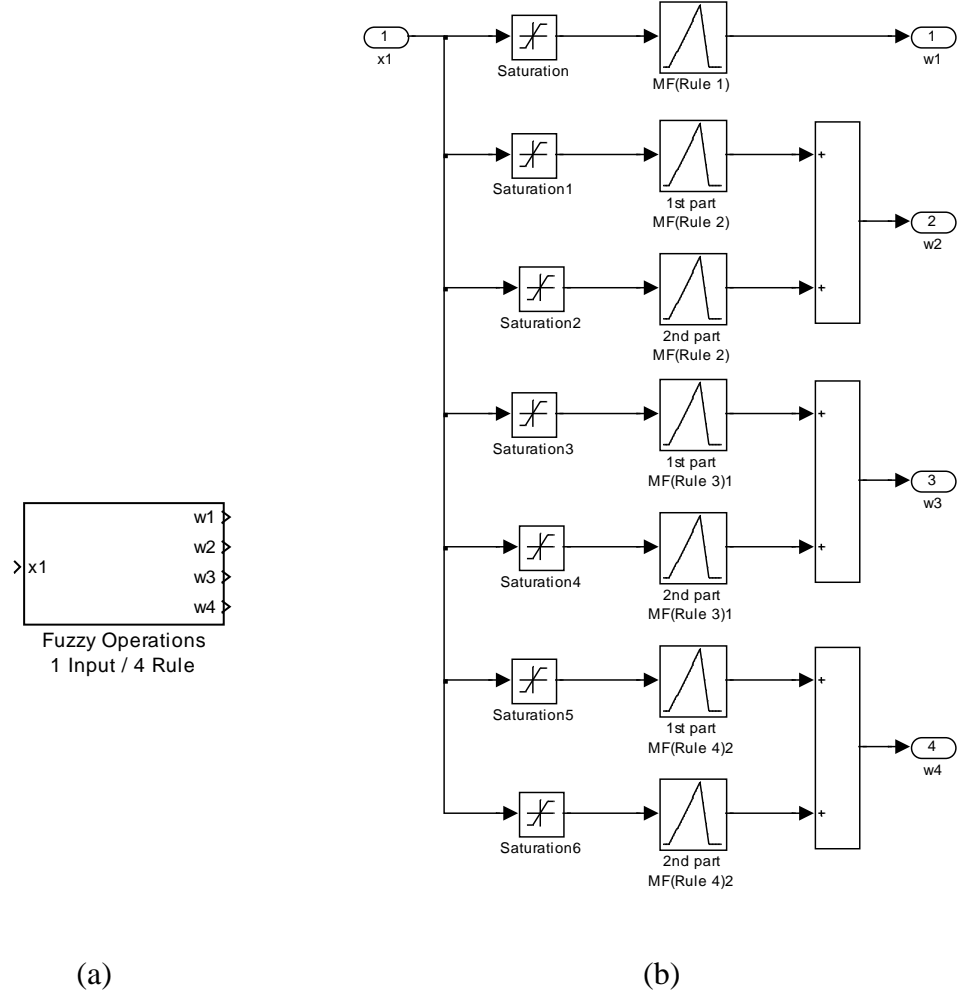
**Operatörler Blok Grubu:**

**1 Giriş / 2 Kurallı Bulanık Operatör:**



Şekil 3.16 (a) 1 Giriş / 2 Çıkışlı Bulanık Operatör bloğu ve (b) içeriği

## 1 Giriş / 4 Kurallı Bulanık Operatör:



Şekil 3.17 (a) 1 Giriş / 4 Kurallı Bulanık Operatör bloğu ve (b) içeriği

Tasarladığımız bu toolbox'ta ayrıca kullanıcıların kendi kurallarını oluşturabileceği kural oluşturma grubu (Rule Makers), bozucu işaretleri sisteme dahil etmek için kullanılacak bloklar (Gammas), çizdirilen grafikler üzerinde oynama yapabilme imkanı sağlayan blok (Edit Plot), yazılan LMI kodunu Simulink içerisinde çağırmaya yarayan blok (Call LMI) ve Matlab/Simulink kütüphanesinde var olan ve sık sık kullanılan elemanlar olan Multiplexer ve Demultiplexer elemanları ile Robust Toolbox içerisinde yer alan Multiplot Graph'da toolbox'ımızın ana sayfası içerisinde yer almaktadır. Ayrıca demolar kısmında da bu toolbox kullanılarak tarafımızdan yapılan örneklerden birkaçı da bulunmaktadır.

## 4. BULANIK KONTROL SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

### 4.1 Kontrol Sistemlerinin Lyapunov Kararlılık Analizi

Kontrol sistemlerinin tasarımında genellikle tasarımcının ilk olarak ele aldığı konu tasarlanan kontrol sisteminin kararlılığının incelenmesidir. Çünkü sistem kararsız olduğunda diğer performans kriterlerinin sağlanması da imkansızdır. Bu nedenle bu bölümde ilk olarak kararlılık ile ilgili bazı temel kavramlardan bahsedilecek, daha sonra kararlılık analizlerinde Lyapunov'un direkt ve dolaylı yöntemleri basit örneklerle incelenecektir [50].

### 4.2 Matematiksel Temeller

Bir dinamik sistemin aşağıdaki gibi tanımlandığını varsayalım:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (4.1)$$

Burada

$$x \in R^n, n \text{ boyutlu bir vektör ve } f: D \rightarrow R^n$$

$$D = R^n \text{ veya } \exists h > 0 \text{ için } D = B(h)$$

Burada

$B(h) = \{x \in R^n : |x| < h\}$ , merkezi orijin, yarıçapı  $h$  olan bir çemberdir.  $| \cdot |$  ise  $R^n$  üzerinde bir normdur (örneğin  $|x| = \sqrt{x^T x}$ ). Eğer  $D = R^n$  ise sistem dinamikleri global tanımlı,  $D = B(h)$  ise sistem dinamikleri yerel tanımlıdır denir. Her  $x_0$  için aşağıdaki başlangıç değer probleminin  $x_0$ 'a bağlı tek bir  $\phi(t, x_0)$  çözümü olduğunu varsayalım.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (4.2)$$

(4.1) no. lu denklemde, her  $t \geq 0$  için  $f(x_e) = 0$  koşulunu sağlayan  $x_e \in R^n$  noktası “denge noktası” olarak adlandırılır. Eğer aşağıdaki gibi ifade edilen  $x_e$  civarındaki çemberde,  $x_e$  dışında başka bir denge noktası içermeyecek şekilde bir  $h' > 0$  varsa bu durumda  $x_e$  “izole denge noktası” olarak adlandırılır.

$$B(x_e, h') = \{x \in R^n : |x - x_e| < h'\} \quad (4.3)$$

Standart olarak ele alacağımız denge noktasının  $R^n$  üzerinde orijinde yer alan izole bir denge noktası olduğunu varsayalım. Bu varsayım genellemeyi bozmaz çünkü eğer  $x_e \neq 0$ , (4.2) no.lu denklemin denge noktası ise ve  $\bar{x}(t) = x(t) - x_e$  olmak üzere  $\bar{x} = 0$  aşağıdaki dönüştürülmüş sistemin denge noktasıdır.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) = f(\bar{x}(t) + x_e)$$

Her  $\epsilon > 0$  için,  $|x_0| < \delta(\epsilon)$  olduğunda  $|\phi(t, x_0)| < \epsilon$  (her  $t \geq 0$  için) koşulunu sağlayan bir  $\delta(\epsilon) > 0$  varsa, (4.2) no.lu denklemdeki  $x_e = 0$  denge noktası Lyapunov anlayışına göre kararlıdır (yani sistem denge noktasına yaklaştığında bu noktaya yakın kalıyorsa kararlıdır).

Eğer (4.2) no.lu denklemde  $x_e = 0$  denge noktası kararlıysa ve  $|x_0| < \eta$  olduğunda  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = 0$  olacak şekilde bir  $\eta > 0$  varsa bu durumda  $x_e = 0$  denge noktası “asimptotik kararlı” olarak adlandırılır (yani sistem denge noktasına yaklaştığında bu noktaya yakınsa asimptotik olarak kararlıdır).

$t \rightarrow \infty$  iken  $\phi(t, x_0) \rightarrow 0$  durumunu sağlayan bütün  $x_0 \in R^n$  noktalarının kümesi  $X_d \cap R^n$ , (4.2) no.lu denklemin denge noktası  $x_e = 0$ 'ın “çekim bölgesi” olarak adlandırılır. Eğer  $X_d = R^n$  ise (yani sistem nereden başlarsa başlasın, durumu asimptotik olarak denge noktasına yaklaşıyorsa) denge noktası  $x_e = 0$  “global asimptotik kararlıdır” denir.

Örnek olarak (4.3) denkleminle aynı formda olan aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\dot{x}(t) = -2x(t)$$

Bu sistem için  $D = R^1$  olsun (yani sistem dinamikleri sadece sıfır civarındaki bir bölgede değil, bütün reel doğrudaki tanımlı olsun).  $0 = -2x_e$  eşitliğinde  $x_e = 0$  bu sistemin bir denge noktası olarak belirlenir. Herhangi bir  $x_0$  için,  $t \rightarrow \infty$  iken

$$\phi(t, x_0) = x_0 e^{-2t} \rightarrow 0$$

çözümü,  $x_e = 0$  denge noktasını kararlı yapar çünkü herhangi bir  $\epsilon > 0$  için,  $|x_0| < \delta$  olduğunda  $\phi(t, x_0) \leq \epsilon$  koşulunu sağlayan bir  $\delta > 0$  vardır. Belirlenen herhangi bir  $\epsilon > 0$  için  $\delta = \epsilon$  seçerek bu durumu daha da basit bir biçimde görebiliriz. Ayrıca bütün  $x_0 \in R^n$  için  $\phi(t, x_0) \rightarrow 0$  olduğundan sistem global asimptotik kararlıdır.

Bu sistem basit olduğu için, belli başlı kararlılık kriterlerini sağlayıp sağlamadığını belirlemek oldukça kolaydır ancak karmaşık yapıli sistemlerde bu durum aynı derecede kolay olmayacaktır. Bunun nedenlerinden biri, doğrusal olmayan karmaşık yapıli sistemler için adi diferansiyel denklemleri çözenin (yani bütün  $t$  ve  $x_0$  için  $\phi(t, x_0)$ 'ı bulmak) bile zor olmasıdır. Ancak Lyapunov'un direkt ve dolaylı yöntemleri ile adi diferansiyel denklemleri çözmeye gerek kalmadan sistemin kararlılık özellikleri belirlenebilir.

### 4.3 Lyapunov'un Direkt (İkinci) Yöntemi

(4.2) no.lu denklemin denge noktası  $x_e = 0$  için belirlenen kararlılık sonuçları,  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlanan uygun bir Lyapunov fonksiyonunun varlığına bağlıdır. Burada global sonuçlar için  $D = \mathbb{R}^n$  (örneğin global asimptotik kararlılık) yerel sonuçlar için ise  $\exists h > 0$  için  $D = B(h)$  (örneğin Lyapunov kararlılık anlayışı veya asimptotik kararlılık) olur. Eğer  $V$ , argümanlarına bağlı olarak sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise bu durumda  $V$ 'nin  $t$ 'ye bağlı türevi, (4.2) denkleminin çözümleri ile birlikte şu şekilde ifade edilir:

$$\dot{V}_{(4.4)}(x(t)) = \nabla V(x(t))^T f(x(t)) \quad (4.4)$$

Burada

$$\nabla V(x(t)) = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T \quad (4.5)$$

$V$ 'nin  $x$ 'e göre gradyanıdır.  $V$ 'nin  $x$ 'e göre gradyanıdır.

Lyapunov'un direk metodu aşağıdaki gibi tanımlanır:

1)  $x_e = 0$  (4.2) no.lu denklem için bir denge noktası olsun.  $V: B(h) \rightarrow \mathbb{R}$  ise,  $B(h)$  üzerinde sürekli türevlenebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

- a)  $V(0) = 0$
- b)  $V(x) > 0, B(h) - \{0\}$
- c)  $\dot{V}_{(1)}(x) \leq 0, B(h)$

Bu durumda  $x_e = 0$  kararlıdır. Ayrıca  $x \neq 0$  için  $\dot{V}_{(4.4)}(x) < 0$  ise bu durumda  $x_e = 0$  asimptotik kararlıdır.

2)  $x_e = 0$  (4.2) no.lu denklem için bir denge noktası olsun.  $V: R^n \rightarrow R$  ise sürekli türevlenebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

- a)  $V(0) = 0$
- b)  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- c)  $|x| \rightarrow \infty$  iken  $V(x) \rightarrow \infty$
- d)  $\dot{V}_{(1)}(x) < 0, \forall x \neq 0$

Bu durumda  $x_e = 0$  global asimptotik kararlıdır.

Örnek olarak  $\dot{x}(t) = -2x^3$  sistemini ele alalım:

Bu sistemin denge noktası  $x_e = 0$ 'dır. Lyapunov denklemini  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  olarak seçelim.

Bu durumda

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = x\dot{x} = -2x^4$$

Açıkça görülüyor ki  $x \neq 0$  için  $-2x^4 < 0$ 'dır. Böylece Lyapunov'un direk yöntemine göre  $x_e = 0$  asimptotik kararlıdır. Hatta  $x_e = 0$  global asimptotik kararlıdır.

Lyapunov'un direkt yöntemi geleneksel kontrol teorisinde geniş bir uygulama alanına sahiptir ancak sistemin kararlı olmasını garanti edebilecek ve yukarıda belirtilen özellikleri taşıyacak bir Lyapunov fonksiyonunun bulunması her zaman kolay değildir.

#### 4.4 Lyapunov'un Dolaylı (Birinci) Yöntemi

$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$ ,  $n \times n$  boyutlu bir Jacobiyen matrisini ifade etsin. Bir sonraki sonuç için  $D \cap R^n$  olmak üzere  $f: D \rightarrow R^n$ ,  $x_e \in D$  olduğunu ve  $f$ 'nin sürekli türevlenebilir olduğunu varsayalım.

Lyapunov'un dolaylı metodu şu şekilde tanımlanabilir:

$x_e = 0$ , (4.2) no.lu denklem için bir denge noktası ve

$$\bar{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Big|_{x=x_e=0} \quad (4.6)$$

$n \times n$  boyutlu matris olmak üzere

- 1)  $\bar{A}$  matrisinin bütün  $\lambda_i$  özdeğerleri için  $Re[\lambda_i] < 0$  ( $\lambda_i$ 'nin reel kısmı) ise  $x_e = 0$  asimptotik karardır.
- 2)  $\bar{A}$  matrisinin bir veya daha fazla özdeğeri için  $Re[\lambda_i] > 0$  ise  $x_e = 0$  kararsızdır.
- 3) Eğer herhangi bir özdeğer için  $Re[\lambda_i] = 0$  ise  $x_e = 0$  noktasının kararlılığı hakkında hiçbir şey söylenemez.

Örnek olarak  $\dot{x} = -x^2$  sistemini ele alalım.

Bu sistemin denge noktası  $x_e = 0$ 'dır. Bu durumda

$$\bar{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Big|_{x=x_e=0} = -2x = 0$$

Bu nedenle kararlılık hakkında hiçbir fikir yürütemeyiz.

Sonuç olarak, bulanık kontrol sistemlerinin Lyapunov teoremlerine göre kararlılığını incelemek için aşağıdaki prosedür izlenir:

Adım 1: Lyapunov fonksiyonunun seçimi

Adım 2: Lyapunov fonksiyonunun hesaplanması

Adım 3: Lyapunov fonksiyonunun türevinin bulunması



Adım 4: Lyapunov fonksiyonunun türevine göre kararlılığın incelenmesi

- a)  $\forall x \in R^n$  için  $\dot{V}(x) \leq 0$  ise  $x_e$  noktası kararlıdır.
- b)  $\forall x \in R^n$  için  $\dot{V}(x) < 0$  ise  $x_e$  noktası asimptotik kararlıdır
- c)  $\forall x \in R^n$  için  $\dot{V}(x) > 0$  ise  $x_e$  noktası kararsızdır

#### 4.5 Bulanık Kontrol Sistemlerinin Lyapunov Kararlılık Analizi

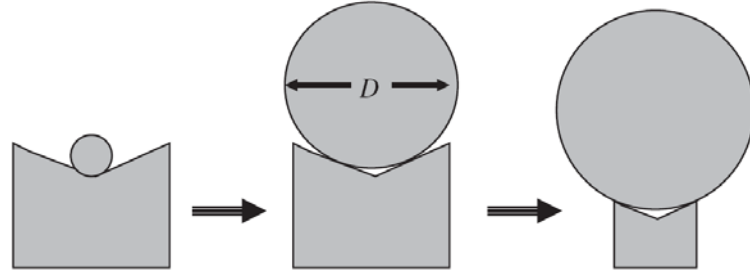
Bulanık kontrol, doğrusal olmayan ve karmaşık yapıya sahip birçok sistemin kontrolünde başarılı bir şekilde uygulanmasına rağmen, ilk uygulamalarda geleneksel kontrol yöntemlerinde var olan kararlılık ve dayanıklılık (robustness) analizi gibi analiz yöntemlerinden yoksundu. Bu durum bulanık kontrolün yüksek güvenlik gerektiren uygulamalarda kullanımını kısıtlıyordu. Bu nedenle son yıllarda bulanık kontrol sistemlerinin kararlılık analizleri üzerindeki çalışmalar hız kazandı.

Rockwell International'da çalışan Chand ve Hansen, Rockwell International'ın Gelişmiş Teknoloji Uçağı (ATW) adı verilen ve gerçek bir savaş uçağının 1/6 oranında ölçeklendirilmiş bir versiyonu olan uçağın, basitleştirilmiş sürekli zamanlı modeli ile uçağın alçalma-yükselme hızının kontrolü için tasarlanan ayırık zamanlı bulanık denetleyiciyi kombine etmiş ve Lyapunov teorisi ile enerji tabanlı bir yaklaşım kullanarak sistemin kararlılık analizini gerçekleştirmişlerdir [51]. Bu yaklaşıma göre bir sistemin toplam enerjisi, denge durumu sağlanıncaya kadar monoton olarak azalıyor, sistem kararlıdır. Langari ve Tomizuka bulanık kontrol sistemlerinin kararlılık analizinde Lyapunov'un direkt yöntemini kullanarak sistemin global kararlı olmasını sağlayan yeterli koşulları belirlemişlerdir [52]. Bunun için bulanık denetleyicinin giriş ve çıkış değişkenlerindeki bulanık kümeleri parametrize ederek, bu kümelerin basitleştirilmiş analitik fonksiyonlarla ifade edilmesini sağlamışlardır. Cao vd. kontrol edilecek sistemi, Takagi ve Sugeno tarafından ortaya atılan bulanık model (T-S modeli) yöntemini [9] kullanarak, bir dizi doğrusal durum uzayı modeli ile modellemiş ve her bir yerel durum uzayı modeli için bir duruma göre geri beslemeli denetleyici kuralı elde etmişlerdir [53]. Daha sonra kapalı çevrim sistemin global kararlılığını sağlayacak kararlılık koşulunu belirsiz doğrusal sistem teorisini kullanarak belirlemişlerdir. Tanaka ve Sano, Lyapunov kararlılık anlayışına göre kararlı bulanık sistemler elde etmek için gerekli koşulları, önerme parametre belirsizliğine sahip ve

önerme parametre belirsizliğine sahip olmayan sistemler için elde etmiş ve kararsız, doğrusal olmayan bir kamyon römork yükleme problemi için kontrol sistemi tasarlamışlardır [42]. Wang vd. doğrusal olmayan ters sarkaç sistemini T-S bulanık model yaklaşımı ile modelleyerek, “paralel dağıtılmış kompanzasyon (PDC)” yöntemiyle sistemin kontrolü için bir denetleyici tasarlamışlar ve kararlılık analizinde kuadratik Lyapunov fonksiyonunu kullanarak sistemin kuadratik ve asimptotik olarak kararlı olmasını sağlayacak koşulları belirlemişlerdir [41]. Ayrıca kararlılık analizini ve tasarım problemlerini doğrusal matris eşitsizliklerine (LMI) indirgeyerek, problemin çözümünü kolaylaştırmışlardır. Abonyi vd. bir polistiren reaktörünün kontrolünde T-S bulanık kontrol yaklaşımını kullanmış ve oluşturulan bulanık denetleyicinin sistemin kararlılığını sağlayacak biçimde online olarak ayarlanmasını sağlayacak bir yöntem geliştirmişlerdir [54]. Mannani ve Talebi, bir makro-mikro manipülatör için herhangi bir proses modeli kullanmadan, Lyapunov fonksiyonu tabanlı bir denetleyici oluşturmuşlar, bunun için öncelikle bir Lyapunov fonksiyonu seçerek, sistem dinamiklerinin yapısal özelliklerine bağlı olarak Lyapunov fonksiyonunun türevini negatif tanımlı yapmaya çalışmışlardır [55]. Mannani ve Talebi daha sonra bu konu üzerinde deneysel olarak da çalışmış ve sonuçlarını sunmuşlardır [56]. T-S modelleme ve bulanık sistemlerin kararlılık koşullarının belirlenmesi gibi konular üzerinde birçok çalışma olduğunu ancak kararlılığa ek olarak performans konusunun da ele alınması gerektiğini düşünen Khaber vd. kuadratik bir performans kriteri belirlemiş ve bu kriterin beklenen değerini minimize etmeye çalışmışlardır [57]. Daha sonra Zadeh kararlılık kavramına yeni bir anlam kazandırmış ve aslında kararlılığın kendisinin de bulanık bir kavram olduğunu ifade etmiştir [58]. Li vd. kontrol edilecek olan prosese ait bilgi çok az olsa bile, Lyapunov kararlılık kriterlerine bağlı olarak kontrol kurallarını kendi kendine üretebilen yeni bir bulanık denetleyici geliştirmişlerdir [59].

Kararlılık kavramı klasik bir kavram olarak kontrol sistemlerinin en önemli özelliğidir. Yukarıda kaydettiğimiz gibi Lyapunov kararlılık analizi klasik bir yöntem olarak kontrol sistemlerinin kararlılığının analizinde kullanılmaktadır. Zadeh, son çalışmalarından birinde [58], bilimde artık iki değerli (bivalence) mantıktan vazgeçilerek, bulanık mantığa geçilmesi gerektiğini ima etmiş ve kararlılık kavramının da aslında bulanık bir kavram olduğunu, Lyapunov kararlılık tanımından yola çıkarak ifade etmiştir.

Ağız genişliği  $d$  olan bir kutunun üzerine çapı  $D$  olan bir topun yerleştirildiğini düşünelim (Şekil 4.1).  $D$ ,  $d$ 'den az biraz büyük olduğu durumda sistem kararlı olacaktır.  $D$  arttıkça sistemin kararlılığı giderek azalacaktır. Ancak Lyapunov'un kararlılık tanımına göre,  $D > d$  koşulunu sağlayan bütün  $D$  değerleri için sistem kararlıdır. Buradaki problem, Lyapunov'un iki değerli kararlılık tanımına göre sistemin kararlı ya da kararsız olması, kararlılığın derecelendirilmemesidir.[60]



Şekil 4.1 Bulanık bir kavram olarak kararlılık

#### 4.6 Kural Tabanlı Bulanık Kontrol Sistemlerinin Kararlılık Analizinin Kural Tetiklenme Yörüngesi Yöntemiyle Araştırılması

Sistemin kararlılığının tahmin edilebilmesi için diğer bir yöntem de hangi kuralların tetiklendiğinin gözlemlenmesidir. Eğer tetiklenen kuralları kural tablosu üzerinde bir eğri ile gösterirsek, kararlı bir sistemin Şekildeki 4.2'deki eğriyi takip edeceğini görürüz, her bir kural tetiklendiğinde hata ve hatanın değişimi gitgide azalacaktır. Yani yörüngeyi takip ederek tablonun dışından merkezine doğru grup numarası Grup 4'ten Grup 0'a gelecektir.

$e/\Delta e$	PB	PM	PS	Z	NS	NM	NB
PB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	Z
PM	NB	NB	NB	NM	NS	Z	PS
PS	NB	NB	NM	NS	Z	PS	PM
Z	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NS	NM	NS	Z	PS	PM	PB	PB
NM	NS	Z	PS	PM	PB	PB	PB
NB	Z	PS	PM	PB	PB	PB	PB

	Gr. 0
	Gr. 1
	Gr. 2
	Gr. 3
	Gr. 4

Şekil 4.2 Kararlı bir sisteme ait tipik bir kural tetiklenme yörüngesi

Kararsız bir sistem için tersi bir eğilim vardır veya bu eğilim olması gerektiği gibi değildir (Şekil 4.3). Burada dikkat edilmesi gereken şey bunların sadece bir örnek olarak ele alındığıdır. Bu şekiller eğilimleri örneklerle açıklamaktadır, yani bunlar kesin olarak takip edilmesi gereken yörüngeler değildir.

$e/\Delta e$	PB	PM	PS	Z	NS	NM	NB
PB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	Z
PM	NB	NB	NB	NM	NS	Z	PS
PS	NB	NB	NM	NS	Z	PS	PM
Z	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NS	NM	NS	Z	PS	PM	PB	PB
NM	NS	Z	PS	PM	PB	PB	PB
NB	Z	PS	PM	PB	PB	PB	PB

	Gr. 0
	Gr. 1
	Gr. 2
	Gr. 3
	Gr. 4

**Şekil 4.3** Kararsız bir sisteme ait tipik bir kural tetiklenme yörüngesi

O zaman sistemi kararlı yapmak için daha önceden belirlenen parametreler için uygun değerleri sağlamalıyız. Bunu gerçekleştirmenin farklı yolları vardır. İlk ve en açık olanı bulanık denetleyici tasarlarken hata yapmaktan kaçınmaktır. Kuralların veya üyelik fonksiyonlarının yanlış seçimi (aralık ve/veya derecelendirme hatası) sistemin kararsız olmasına neden olabilir. İlk yapılması gereken şey kural tablosunun incelenmesidir. Yeni başlayanların en çok yaptığı hata girişlerden birinin veya çıkışın yanlış işaretli olmasıdır. Bu tür bir hatanın düzeltilmesi gayet kolaydır. Diğer bir hata ise muhtemel giriş ve çıkış değer aralıklarının yanlış seçimidir [61].

Burada verilmiş kararlılık analizi yöntemi pratik bir yöntem olarak kural bazlı bulanık sistemlerin analizinde kullanılabilir. Bu bizim tarafımızdan oluşturulan çeşitli simülasyon modellerinde uygulanmış.

#### 4.7 Model Tabanlı Bulanık Kontrol Sistemlerinin Kararlılık Analizi

Bu başlıkta model tabanlı bulanık kontrolün kararlılık analizi için mevcut olan yaklaşımlardan biri olan lineer matris eşitsizliklerinin (LMI) kullanılması incelenmiştir. Daha önceden LMI'lerin pratikte kullanılması çok zor olduğu için pek tercih edilmemiştir ancak son zamanlarda Matlab program paketi ile uyumlu toolbox

oluşturulduktan ve Nemirovsky'nin bu konudaki çalışmalarından sonra kullanımı daha pratik hale gelmiştir [19]. Burada LMI toolbox'ının temel komutları ve LMI kodlarının oluşturulmasının özellikleri verilmiştir.

#### **4.7.1 Bulanık Sistemlerin Lyapunov Kararlılık Analizinde Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI) Yaklaşımı**

Lineer matris eşitsizlikleri (LMIs) ve LMI teknikleri kontrol mühendisliğinden sistem tanımlama ve yapısal tasarıma kadar geniş bir aralıkta güçlü bir tasarım aracı olarak ortaya çıkmıştır [62]. LMI tekniklerini çekici hale getiren üç faktör vardır.

- Tasarım belirtileri ve sınırlamalar LMI'ler ile ifade edilebilir.
- Bir problem bir kere LMI şeklinde formülize edildikten sonra etkili konveks optimizasyon algoritmalarıyla kesin olarak çözülebilir (LMI çözümlenirleri ile).
- Matris olarak ifade edilmiş, birçok sınırlaması olan problemler veya analitik çözümü olmayan nesnelere genellikle LMI yapısı içerisinde kontrol edilebilir.

LMI Lab, genel LMI problemlerini çözmek için kullanılan yüksek performanslı bir yazılım paketidir. LMI'lerin tanımlanması ve yönlendirilmesinde birçok basit aracı harmanlar ve LMI çözümlenirleri ile genel LMI problemlerini çözer. Burada LMI'nin tanımlanması için kullanılan komutlar şu şekildedir[19].

- **setlmis ve getlmis komutları**

Bir LMI sisteminin tanımlanması setlmis komutuyla başlamalı ve getlmis komutuyla sonlanmalıdır. setlmis fonksiyonu bir LMI sisteminin tanımlanmasını başlatan adımdır. Yeni bir sistem tanımlanırken,

```
setlmis([])
```

yazılır. Dahili gösterimi LMISO olan bir LMI eklemek için,

```
setlmis(LMISO)
```

yazılır. LMI sistemi tamamıyla tamamlandıktan sonra

```
LMISYS =getlmis
```

yazılır.

- **Imivar komutu**

Matris değişkenleri birer birer Imivar komutu ile tanımlanır ve yapıları karakterize edilir. Bu yapının tanımlanmasını kolaylaştırmak için genel olarak kullanılan üç yapı tipi vardır.

Tip 1: Simetrik blok köşegen yapı. Bu matris, her bir köşegen bloğu kare olan bir sıfır, tamsimetrik veya skaler matristir.

$$X = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_r \end{bmatrix}$$

$$D_j = d \times I, \quad d \in \mathbb{R}$$

Tip 2: Dörtgen yapı. Herhangi bir belirli yapısı olmayan keyfi üçgen matrislere karşılık gelir.

Tip 3: Genel yapı. Bu tip çok daha karmaşık yapıları veya matris değişkenleri arasındaki bağintıyı tanımlamada kullanılır.

Örneğin:

Imivar(1,[6 1]) % X

Imivar(1,[2 0;2 1]) % S

- X matris değişkeni için, Tip 1'dir, iki sütundur ve X'deki diyagonal blok sayısı kadar satır vardır diyebiliriz.

- (1) Tam simetrik blok
- (0) Skaler blok
- (-1) Sıfır blok

İkinci komuttaki [2 0;2 1] anlamı: S, iki köşegen bloğun birincisi 2x2 skaler blok, ikincisi 2x2 tam simetrik blok olan bir matristir.

- Örneğin Tip 2 olan, 3x5'lik bir dörtgen matris şu şekilde tanımlanır:

Imivar(2,[3 5])

kolaylık için Imivar bir etikete de atanabilir.

X=Imivar(1,[6 1])

- **lmiterm Komutu**

lmivar ile matris değişkenlerini ifade ettikten sonra LMI içindeki her bir terimi tanımlamalıyız. LMI terimleri üç kategoriye ayrılır:

- Sabit terimler. Örneğin sabit matris (I gibi)
- Değişken terimler. Matris değişkeni gibi.
- Harici faktörler.

Örnek: Aşağıdaki LMI sistemini MATLAB ortamında yazalım.

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA + C^T S C & X B \\ B^T X & -S \end{pmatrix} < 0$$

```
setlmis([]);
X=lmivar(1,[6 1]);
S=lmivar(1,[2 0;2 1]);
BRL = newlmi
lmiterm([BRL 1 1 X],1,A,'s');
lmiterm([BRL 1 1 S],C',C);
lmiterm([BRL 1 2 X],1,B);
lmiterm([BRL 2 2 S],1,1);
Xpos = newlmi
lmiterm([-Xpos 1 1 X],1,1);
Slmi = newlmi
lmiterm([-Slmi 1 1 S],1,1);
lmiterm([Slmi 1 1 0],1);
LMISYS = getlmis
```

LMI toolbox hakkında ve LMI'lerin yazımı hakkında kısa bir bilgi verdikten sonra sistemin kararlılık analizini irdeleyebiliriz. (4.8) ile ifade edilen bulanık denetleyicinin kontrol sinyalini (4.7) no.lu denklemde yerine koyduğumuzda, kapalı çevrim sistem için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z)(A_i x + B_i u) \quad (4.7)$$

$$u = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) K_i x}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z) K_i x \quad (4.8)$$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z) \alpha_j(z) (A_i - B_i K_j) x \quad (4.9)$$

**Teorem 3** [37]: Lyapunov kararlılık anlayışına göre, aşağıdaki Lyapunov eşitsizliklerini sağlayan pozitif tanımlı bir  $P$  matrisi varsa, (4.9) ile ifade edilen kapalı çevrimli sistem global asimptotik kararlıdır:

$$\begin{cases} (A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i) < 0, i = 1, 2, \dots, r \\ G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0, i < j \leq r \end{cases} \quad (4.10)$$

Burada

$$G_{ij} = (A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i), \quad (4.11)$$

(4.10) no.lu denklemdeki eşitsizliklerin her iki tarafını baştan ve sondan  $P^{-1}$  ile çarpalım ve aşağıdaki değişken dönüşümlerini gerçekleştirelim:

$$\begin{cases} Y = P^{-1} \\ X_i = K_i Y \end{cases} \quad (4.12)$$

Bu durumda aşağıdaki doğrusal matris eşitsizliklerini (LMI) elde ederiz:

$$\begin{cases} Y A_i^T + A_i Y - B_i K_i - X_i^T B_i^T < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ Y(A_i + A_j)^T + (A_i + A_j)Y - (B_i X_j + B_j X_i) - (B_i X_j + B_j X_i)^T < 0, \quad i < j \leq r \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} N_i &= Y A_i^T + A_i Y - B_i X_i - X_i^T B_i^T < 0 \\ O_{ij} &= Y(A_i + A_j)^T + (A_i + A_j)Y - L_{ij} - L_{ij}^T < 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

burada  $L_{ij} = B_i X_j + B_j X_i$

Temel LMI Lemma'sına göre (4.14) denkleminin eşdeğer lineer matris eşitsizliğini Schur tümleyeni prosedürü ile aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} O_{ij} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

Yukarıdaki doğrusal matris eşitsizliklerinin pozitif tanımlı ortak bir çözümü varsa, kararlılık garantilenir. EK-1'de doğrusal matris eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerin



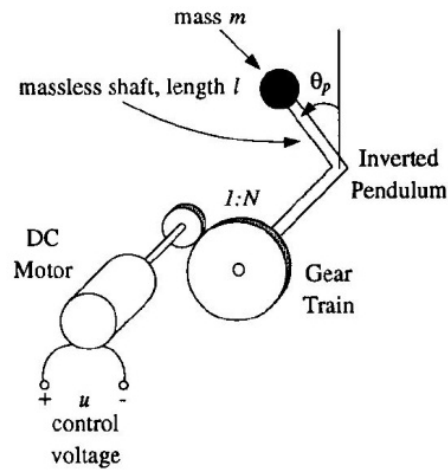
çözümü için kullanılan LMI Control Toolbox [19] ile ilgili özet bilgi verilmektedir. Konu ile ilgili daha ayrıntılı bilgi edinmek isteyenler [62]'yi inceleyebilir.

(4.13)'te belirtilen koşullar kararlı bir sistem oluşturmak için yeterlidir ancak kontrol uygulamalarında kararlılık dışında dikkate alınması gereken başka hususlar da vardır. Bunların başında denetleyicinin performans kriteri ve giriş değişkeninin, çıkış değişkeninin sınırlandırılması, başlangıç koşullarından bağımsızlığı ve bozucu etkinin giderilmesi ve daha başka koşullar da dikkate alınmalıdır [63, 64].

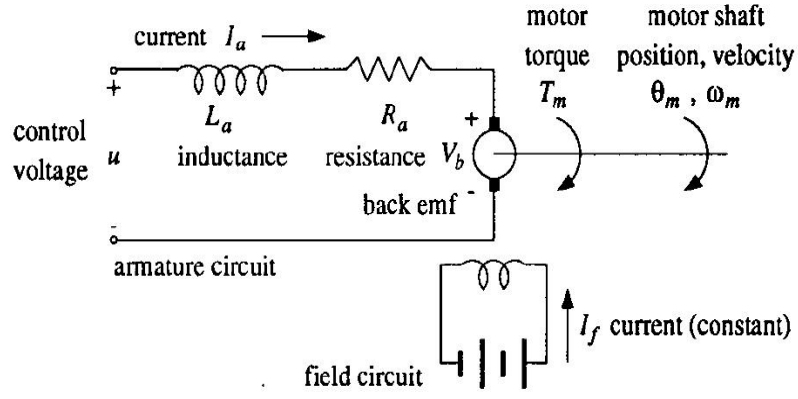
Denetleyicinin belli performans kriterlerine göre tasarlanması [65] incelendiğinden tezimizde bu konu ele alınmamıştır.

#### Örnek 4.1:

Bir DC motor tarafından dişli takımı aracılığı ile kontrol edilen ters sarkacın dengelenmesi problemini ele alalım. Şekil 4.4'de gösterilen [66]'daki modelin şemasıdır, Şekil 4.5'de ise armatür kontrollü DC motor verilmiştir.



Şekil 4.4 Kontrol edilen sistem.



Şekil 4.5 Armatür kontrollü DC motor.

Durum değişkenleri ve sistem çıkışı aşağıdaki gibidir.

$$x_1 = \theta_p, x_2 = \frac{d\theta_p}{dt} = w_p, x_3 = I_a, y = x_1$$

Sistemi tanımlayan durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{NK_m}{ml^2} x_3 \\ -\frac{K_b N}{L_a} x_2 - \frac{R_a}{L_a} x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u$$

Burada  $K_m$  motor tork sabiti,  $K_b$  ters emk (elektro motor kuvveti) sabiti ve  $N$  dişli oranıdır. Kabul edilebilir sistem parametreleri,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $N = 10$ ,  $K_m = 0.1 \text{ Nm/A}$ ,  $K_b = 0.1 \text{ Vs/rad}$ ,  $R_a = 1 \Omega$  ve  $L_a = 100 \text{ mH}$  şeklindedir.

Bu değerler yerine yazıldığında,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 9.8 \sin x_1 + x_3 \\ -10x_2 - 10x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Sistemin T-S bulanık modeli ise aşağıdaki gibidir.

$$\text{Kural1: EGER } x_1(t), M_1 \text{ ise O HALDE } \begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u \\ y = C_1x \end{cases}$$

$$\text{Kural2: EGER } x_2(t), M_2 \text{ ise O HALDE } \begin{cases} \dot{x} = A_2x + B_2u \\ y = C_2x \end{cases}$$

Burada,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9.8 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1 \ 0 \ 0]$$

şeklindedir.

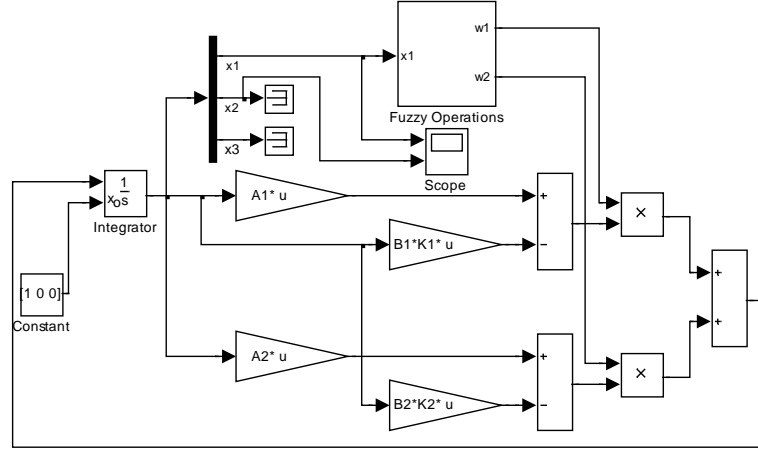
$M_1$  ve  $M_2$  üyelik fonksiyonları ise şu şekilde tanımlanmıştır.

$$M_1(x_1(t)) = \begin{cases} \frac{\sin x_1(t)}{x_1(t)}, & x_1(t) \neq 0 \\ 1, & x_1(t) = 0 \end{cases}$$

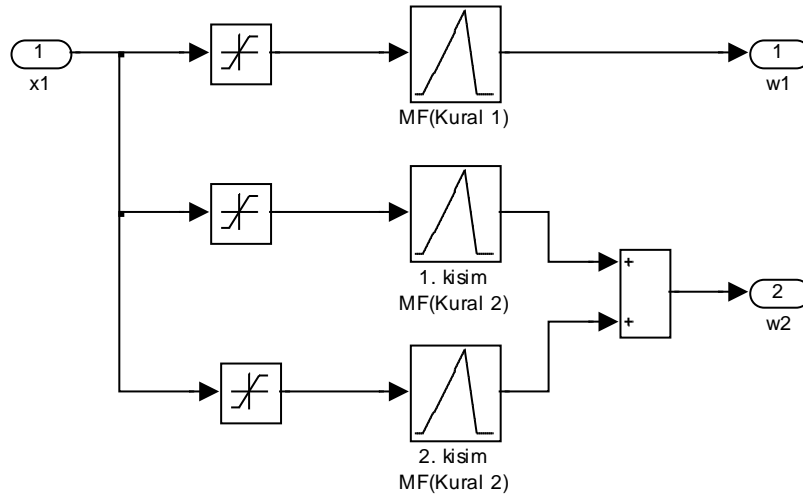
$$M_2(x_1(t)) = 1 - M_1(x_1(t))$$

Nonlinear dinamik sistemin bulanık modeli  $-\pi \leq x_1(t) \leq \pi$  koşulları altında tanımlanmıştır.

Şekil 4.6'te kapalı çevrim kontrol sisteminin Matlab/Simulink'te oluşturulmuş simülasyonu görülmektedir. Buradaki bulanık işlemi gerçekleştiren blok olan "Fuzzy Operations" bloğu ise Şekil 4.7'te verilmiştir.



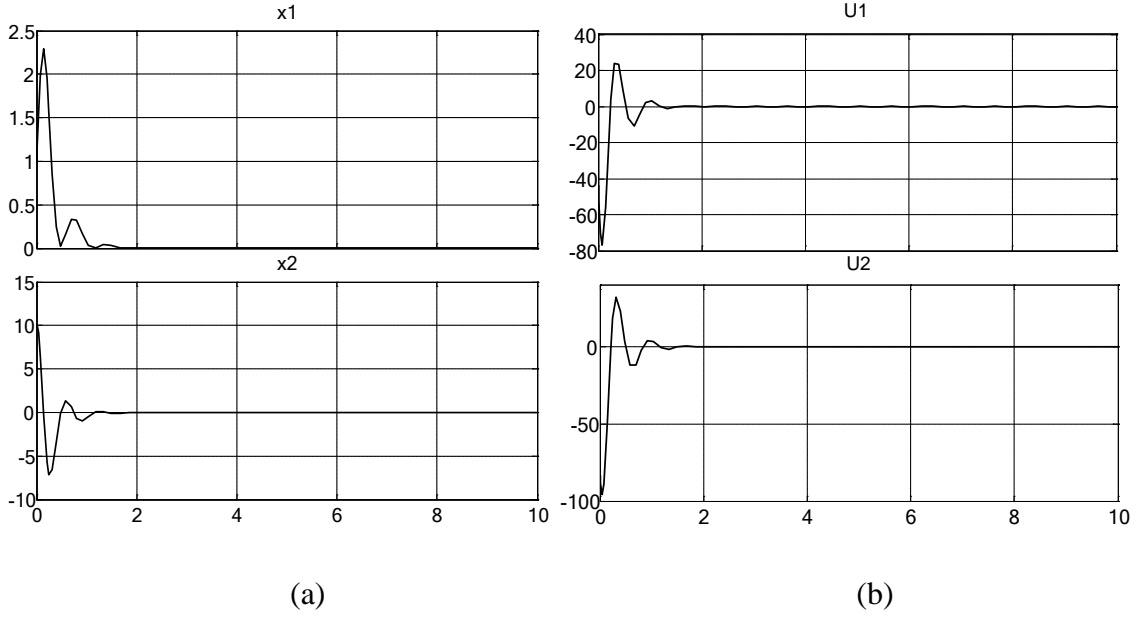
Şekil 4.6 İki kurallı T-S bulanık kontrol sistemine ait Simulink modeli



Şekil 4.7 Bulanık işlemi gerçekleştiren blok olan “Fuzzy Operations” bloğu

Kontrol kuralının sabitleri Matlab’ın LMI Toolbox’ı [19] kullanılarak hesaplanmıştır. Sistemin  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$  ve  $x_3 = 0$  başlangıç koşullarına göre hesaplanan  $K_1$  ve  $K_2$  katsayıları ve sistemin cevabı aşağıdaki gibidir.

$$K_1 = [10.7187 \quad 3.7892 \quad -0.4872], K_2 = [17.6073 \quad 6.7583 \quad -0.1643]$$



Şekil 4.8 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti

#### 4.7.1.1 Kontrol Girişinin Sınırlanması

Kontrol yasası teorik olarak hesaplanırsa da gerçek uygulamalarda geri besleme işaretinin seviyesi denetleyicinin girişine uygulanamayacak kadar büyük olabilir. Dolayısıyla kontrol işaretini sınırlamamız kontrol yasasının uygun saturasyonla hesaplanması için gereklidir. Bu sınırlama teorem 4 de verilmiştir.

**Teorem 4** [37]: Başlangıç koşulu  $x(0)$  biliniyor farz edelim. Sınırlama  $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ ,  $t \geq 0$  olduğu tüm durumlarda girişe uygulanıyorsa aşağıdaki LMI geçerlidir.

$$\begin{bmatrix} -1 & -x(0)^T \\ -x(0) & -Y \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} -Y & -X_i^T \\ -X_i & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

**İspat:**

$$Y = P^{-1}$$

Farz edelim ki  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$  bir Lyapunov fonksiyonudur ve

$$x^T(t)Px(t) \leq 1$$

Sonra

$$1 - x^T(t)Px(t) \geq 0 \quad (4.16)$$

$$\|u(t)\|_2 \leq \mu$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t)$$

$$u^T(t)u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)K_i^T K_j x(t) \leq \mu^2 \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)K_i^T K_j x(t) \leq 1 \quad (4.18)$$

$t > 0$  için  $x^T(t)Y^{-1}x(t) < x^T(0)Y^{-1}x(0) \leq 1$  ise, eğer

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)K_i^T K_j x(t) \leq x^T(t)Y^{-1}x(t) \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)K_i^T K_j x(t) - x^T(t)Y^{-1}x(t) \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t) \left( \frac{1}{\mu^2} K_i^T K_j - Y^{-1} \right) x(t) \leq 0 \quad (4.20)$$

$K_i$  ve  $K_j$  simetrik matrislerdir, bu durumda  $K_i^T K_j = K_j^T K_i$  olur,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t) \left( \frac{1}{\mu^2} K_i^T K_j + \frac{1}{\mu^2} K_j^T K_i - 2Y^{-1} \right) x(t) \quad (4.21)$$

$\frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_i + K_j^T K_j)$ ,  $\frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_j + K_j^T K_i)$  ifadesine eklenip çıkarılırsa, o halde:

$$\frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_j + K_j^T K_i) = \frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_i + K_j^T K_j) + \frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_j + K_j^T K_i - K_i^T K_i - K_j^T K_j)$$

$$= \frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_i + K_j^T K_j) - \frac{1}{\mu^2} (K_i^T (K_i - K_j) + K_j^T (K_j - K_i))$$

$$= \frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_i + K_j^T K_j) + \frac{1}{\mu^2} (K_i^T - K_j^T)(K_i - K_j)$$

Şimdi eşitlik (4.21) aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \times \left( \frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_i + K_j^T K_j) + \frac{1}{\mu^2} (K_i^T - K_j^T)(K_i - K_j) - 2Y^{-1} \right) x(t) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \left( \frac{1}{\mu^2} (K_i^T K_i + K_j^T K_j) - 2Y^{-1} \right) x(t) \quad (4.22) \\ & = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) x^T(t) \frac{1}{\mu^2} \left( (K_i^T K_i) - Y^{-1} \right) x(t) \end{aligned}$$

Eğer

$$\frac{1}{\mu^2} \left( (K_i^T K_i) - Y^{-1} \right) \leq 0 \text{ sağlanıyorsa} \quad (4.23)$$

(4.23) için  $M_i = K_i Y$  şeklinde tanımlanarak aşağıdaki hale getirilir.

$$\frac{1}{\mu^2} M_i^T M_i - Y \leq 0$$

Schur tümleyeni [67] prosedürüne göre:

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} Y^{-1} & K_i^T \\ K_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

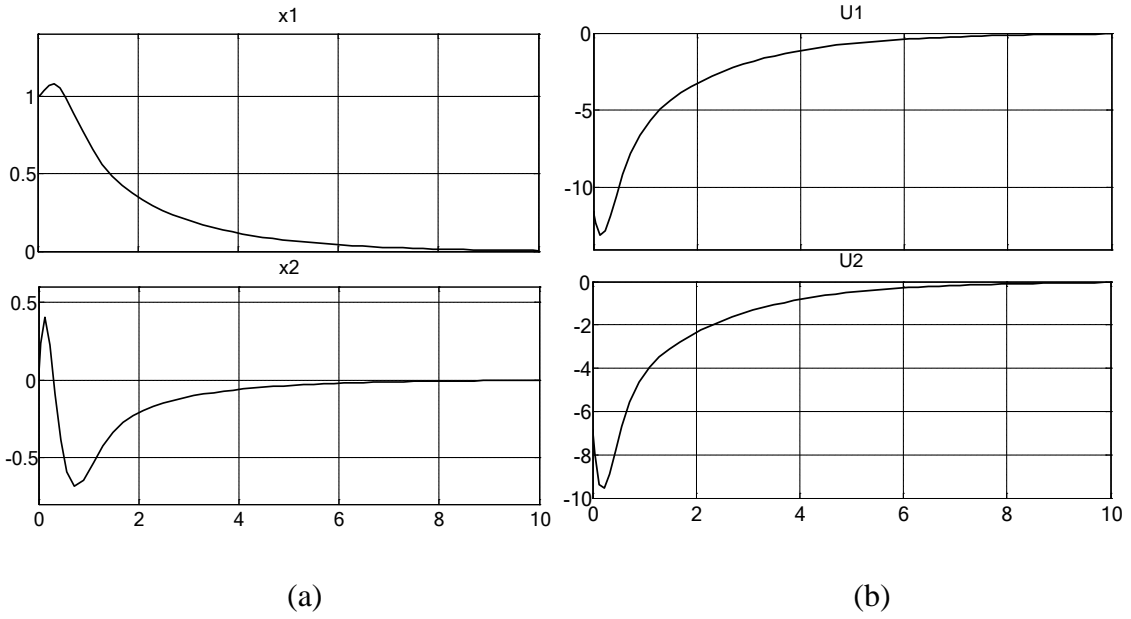
Eşitsizliğin her iki tarafını  $[Y \quad I]$  ile çarparak

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} Y & YK_i^T \\ K_i Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.15) \text{ koşuluna uygun ifadeyi elde ederiz.}$$

#### Örnek 4.2:

Örnek 4.1'deki sistemin kontrol girişini sınırlayarak tekrar kontrolünü yaparsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$K_1 = [11.5212 \quad 3.3496 \quad 0.0254], \quad K_2 = [6.7893 \quad 2.4732 \quad -0.1539]$$



Şekil 4.9 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti

#### 4.7.1.2 Kontrol Çıkışının Sınırlandırılması

Kontrol yasası teorik olarak hesaplanırsa da gerçek uygulamalarda denetleyicinin ürettiği bu kontrol işareti tahrik elemanlarının giriş işaret seviyesi aşılabılır. Gerçekte de zaten tahrik elemanlarının doğal bir sınırlaması vardır, dolayısıyla bizim de kontrol işaretini sınırlamamız kontrol yasasının uygun saturasyonla hesaplanması için gereklidir. Bu sınırlama teorem 5 de verilmiştir.

**Teorem 5** [37]: Başlangıç koşulu  $x(0)$  biliniyor farz edelim. Sınırlama  $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$ ,  $t \geq 0$  olduğu tüm durumlarda girişe uygulanıyorsa aşağıdaki LMI geçerlidir.

$$\begin{bmatrix} -1 & -x(0)^T \\ -x(0) & -Y \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -Y & -YC_i^T \\ -C_i Y & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24)$$

**İspat:**

$$Y = P^{-1}$$

Farz edelim ki  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$  bir Lyapunov fonksiyonudur ve



$$x^T(t)Px(t) \leq 1$$

Sonra

$$1 - x^T(t)Px(t) \geq 0 \quad (4.25)$$

$$\|y(t)\|_2 \leq \lambda$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t)$$

$$y^T(t)y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)C_i^T C_j x(t) \leq \lambda^2 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)C_i^T C_j x(t) \leq 1 \quad (4.27)$$

$t > 0$  için  $x^T(t)Y^{-1}x(t) < x^T(0)Y^{-1}x(0) \leq 1$  ise, eğer

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)C_i^T C_j x(t) \leq x^T(t)Y^{-1}x(t) \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)C_i^T C_j x(t) - x^T(t)Y^{-1}x(t) \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t) \left( \frac{1}{\lambda^2} C_i^T C_j - Y^{-1} \right) x(t) \leq 0 \quad (4.29)$$

$C_i$  ve  $C_j$  simetrik matrislerdir, bu durumda  $C_i^T C_j = C_j^T C_i$  olur,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t) \left( \frac{1}{\lambda^2} C_i^T C_j + \frac{1}{\lambda^2} C_j^T C_i - 2Y^{-1} \right) x(t) \quad (4.30)$$

$\frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_i + C_j^T C_j)$ ,  $\frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_j + C_j^T C_i)$  ifadesine eklenip çıkarılırsa, o halde:

$$\frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_j + C_j^T C_i) = \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_i + C_j^T C_j) + \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_j + C_j^T C_i - C_i^T C_i - C_j^T C_j)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_i + C_j^T C_j) - \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T (C_i - C_j) + C_j^T (C_j - C_i))$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_i + C_j^T C_j) + \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T - C_j^T)(C_i - C_j)$$

Şimdi eşitlik (4.30) aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \times \left( \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_i + C_j^T C_j) + \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T - C_j^T)(C_i - C_j) - 2Y^{-1} \right) x(t) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \left( \frac{1}{\lambda^2} (C_i^T C_i + C_j^T C_j) - 2Y^{-1} \right) x(t) \quad (4.31) \\ & = \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) x^T(t) \frac{1}{\lambda^2} ((C_i^T C_i) - Y^{-1}) x(t) \end{aligned}$$

Eğer

$$\frac{1}{\lambda^2} ((C_i^T C_i) - Y^{-1}) \leq 0 \text{ sağlanıyorsa} \quad (4.32)$$

(4.32) için  $D_i = C_i Y$  şeklinde tanımlanarak aşağıdaki hale getirilir.

$$\frac{1}{\lambda^2} D_i^T D_i - Y \leq 0$$

Schur tümleyeni [67] prosedürüne göre:

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} Y^{-1} & C_i^T \\ C_i & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

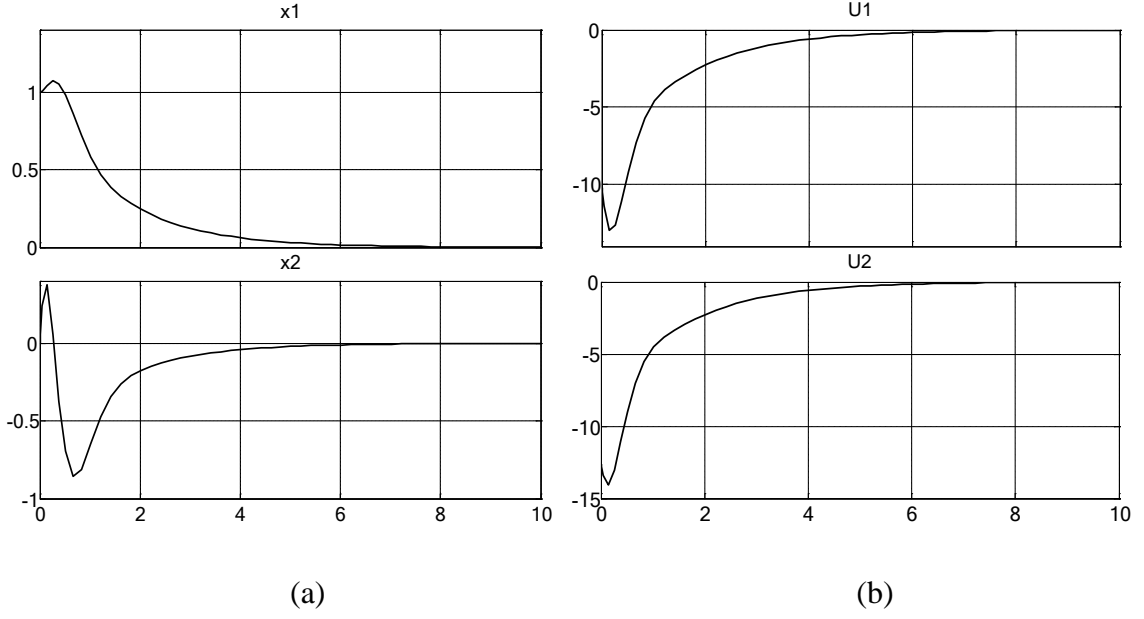
Eşitsizliğin her iki tarafını  $[Y \quad I]$  ile çarparak

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} Y & Y C_i^T \\ C_i Y & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.24) \text{ koşuluna uygun ifadeyi elde ederiz.}$$

### Örnek 4.3:

Örnek 4.1'deki sistemin kontrol çıkışını sınırlayarak tekrar kontrolünü yaparsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$K_1 = [10.198 \quad 1.9442 \quad -0.1253], \quad K_2 = [12.6210 \quad 4.0168 \quad 0.0593]$$



Şekil 4.10 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti

#### 4.7.1.3 Başlangıç Koşullarından Bağımsızlık

Daha önce değindiğimiz giriş ve çıkış sınırlamaları için LMI tasarım koşulları sistemin başlangıç durumlarına bağlı idi. Yani duruma göre geri besleme katsayıları  $K_i$ 'ler başlangıç durumu olan  $x(0)$ değiştiğinde değişeceği için tekrardan belirlenmelidir. Bu, LMI'lerin kontrol giriş ve çıkışında kullanılmasının bir dezavantajıdır. Kontrol giriş ve çıkışındaki LMI sınırlamalarını modifiye ederek bu dezavantajı ortadan kaldırebiliriz. Buna göre  $x(0)$  bilinmiyor fakat  $\|x(0)\|$ 'un üst sınırı  $\phi$  biliniyor, yani  $\|x(0)\| \leq \phi$  olur. Büyük boyutlu bir başlangıç durumu kümesi için  $\phi$ 'yi büyük bir değer olarak belirlemeliyiz. Tabii ki büyük seçilmiş bir  $\phi$  değeri konservatif tasarımlara yol açmaktadır.

Değiştirilmiş LMI aşağıdaki gibidir.

**Teorem 6** [37]: Farz edelim ki  $\|x(0)\| \leq \phi$  olsun ve burada  $x(0)$  bilinmiyor fakat üst sınır olan  $\phi$  biliniyor ise. O halde,

$$x^T(0)Y^{-1}x(0) \leq 1 \quad (4.33)$$

Eğer

$$\phi^2 I \leq Y \quad (4.34)$$

Burada  $Y = P^{-1}$  'dir.

**İspat:**

(4.34)'dan,

$$Y^{-1} \leq \frac{1}{\phi^2} I$$

Dolayısıyla,

$$x^T(0)Y^{-1}x(0) \leq \frac{1}{\phi^2} x^T(0)x(0) \leq 1$$

Olur ve Schur tümleyenini kullanarak aşağıdaki LMI yazılabilir.

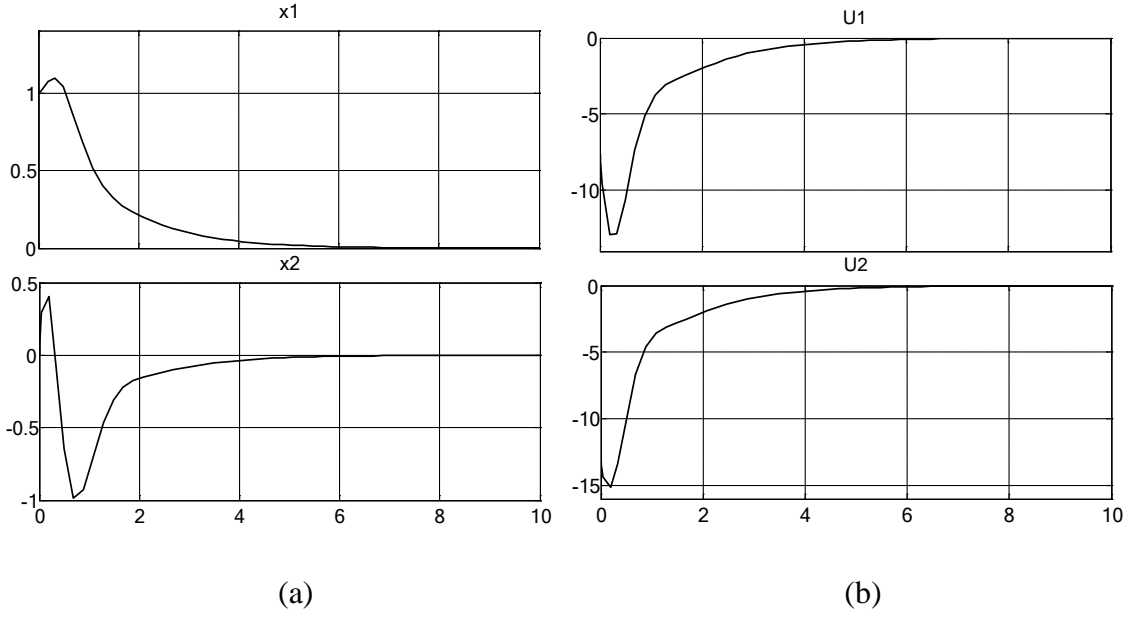
$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & \phi^2 I \end{bmatrix} \leq 0$$

(4.34) koşulu (4.33) yerine kullanılabilir.

#### Örnek 4.4

Örnek 4.1'deki sistemin kontrol girişi ve çıkışı sınırlayarak ve başlangıç koşulundan bağımsızlık koşulunu sağlayarak tekrar kontrolünü yaparsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$K_1 = [7.6078 \quad 2.1572 \quad -0.3621], \quad K_2 = [13.2030 \quad 4.3229 \quad 0.0680]$$



Şekil 4.11 (a) Sistem cevabı ve (b) uygulanan kontrol işareti

#### 4.7.1.4 Bozucu Etkinin Giderilmesi

Sürekli zamanlı bulanık sistem (CFS) bozucu etki ile aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t) + E_i v(t)\} \quad (4.35)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z_i(t)) C_i x(t) \quad (4.36)$$

Burada  $v(t)$  bozucu etkidir. Bozucu etkinin giderilmesi  $\gamma$ 'nin aşağıdaki ifadeye bağlı olarak minimize etmekle gerçekleştirilebilir.

$$\sup_{\|v(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|v(t)\|_2} \leq \gamma \quad (4.37)$$

**Teorem 7** [37]: Bulanık modeli kararlı yapan ve  $\gamma$ 'yi minimize eden duruma göre geri besleme kazançları  $K_i$ 'ler aşağıdaki LMI tabanlı minimizasyon probleminin çözülmesi ile elde edilebilir.

Aşağıdaki eşitsizliğe maruz kalan,

minimize  $\gamma^2$   
 $x, X_1, \dots, X_r$

$Y > 0$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} YA_i^T - X_j^T B_i^T + A_i Y - B_i X_j \\ +YA_j^T - X_i^T B_j^T + A_j Y - B_j X_i \end{array} \right\} & -\frac{1}{2}(E_i - E_j) & \frac{1}{2}Y(C_i - C_j)^T \\ -\frac{1}{2}(E_i - E_j)^T & \gamma^2 I & 0 \\ \frac{1}{2}(C_i - C_j)Y & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.38)$$

$$i \leq j \text{ s.t. } \alpha_i(z(t)) \cap \alpha_j(z(t)) \neq \phi \quad (4.39)$$

Burada

$$X_i = K_i Y$$

**İspat:**

Farz edelim ki bir kuadratik fonksiyon  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ ,  $P > 0$  ve  $\gamma > 0$ , öyle ki bütün  $t$ 'ler için:

$$\dot{V}(x(t)) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) \leq 0 \quad (4.40)$$

(4.35) ve (4.36) için. (4.40)'yi 0'dan T'ye kadar integre edersek:

$$\int_0^T (\dot{V}(x(t)) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt \leq 0$$

Başlangıç koşulunun  $x(0) = 0$  olduğu farz edilerek

$$V(x(T)) + \int_0^T (y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt \leq 0 \quad (4.41)$$

$V(x(t)) \geq 0$ , bu şu anlama gelmektedir:

$$\frac{\|y(t)\|_2}{\|v(t)\|_2} \leq \gamma$$

Dolayısıyla, eğer (4.40) varsa bulanık modelin  $L_2$  kazancı  $\gamma$ 'dan daha küçük olacaktır. (4.40)'den LMI koşulunu türetirsek:

$$\begin{aligned}
& \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\
& + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))x^T(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) \\
& = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))x^T(t)(A_i - B_i K_j)^T Px(t) \\
& + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))x^T(t)P(A_i - B_i K_j)x(t) \\
& + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))x^T(t)C_i^T C_i x(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) \\
& + \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))v(t)E_i^T Px(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))x^T(t)PE_i^T v(t) \\
& = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \\
& \times [x^T(t) \quad v^T(t)] \times \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P \\ +P(A_i - B_i K_j) + C_i^T C_i \\ E_i^T P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PE_i \\ -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \leq 0 \tag{4.42}
\end{aligned}$$

(4.42)'den aşağıdaki koşulları elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} \left( -\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))\{(A_i - B_i K_j)^T P\} \right. & -P \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))E_i \\ \left. +P(A_i - B_i K_j) + C_i^T C_i \right) & \\ & -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))E_i^T P & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.43}$$

(4.43)'in sol tarafını aşağıdaki gibi düzenlersek:

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{c} -\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{ (A_i - B_i K_j)^T P \\ + P(A_i - B_i K_j) \} \end{array} \right) & -P \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) E_i \\ -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) E_i^T P & \gamma^2 I \end{array} \right] \\
& - \left[ \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) C_i^T C_i & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\
& \left[ \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{c} -\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{ (A_i - B_i K_j)^T P \\ + P(A_i - B_i K_j) \} \end{array} \right) & -P \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) E_i \\ -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) E_i^T P & \gamma^2 I \end{array} \right] \quad (4.44) \\
& - \left[ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i^T \\ 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i & 0 \end{array} \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Eşitsizlik (4.44) aşağıdaki eşitsizliğe eşit olur

$$\left[ \begin{array}{ccc} \left( \begin{array}{c} -\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \\ \times \{ (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) \} \end{array} \right) & -P \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) E_i & \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i^T \\ -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) E_i^T P & \gamma^2 I & 0 \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i & 0 & I \end{array} \right] \geq 0 \quad (4.45)$$

Eşitsizlik (4.45) tekrar şu şekilde yazılabilir



$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \times \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \{ (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) \\ + (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) \} \end{array} \right) & -\frac{1}{2} P(E_i + E_j) & \frac{1}{2} (C_i + C_j)^T \\ -\frac{1}{2} (E_i + E_j)^T P & \gamma^2 I & 0 \\ \frac{1}{2} (C_i + C_j) & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

Dolayısıyla,

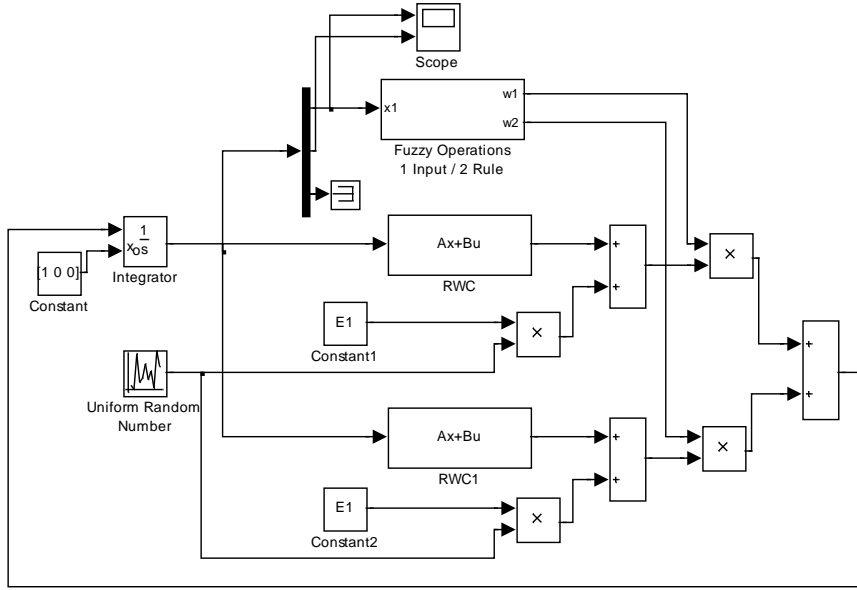
$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \{ (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) \\ + (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) \} \end{array} \right) & -\frac{1}{2} P(E_i + E_j) & \frac{1}{2} (C_i + C_j)^T \\ -\frac{1}{2} (E_i + E_j)^T P & \gamma^2 I & 0 \\ \frac{1}{2} (C_i + C_j) & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.46)$$

(4.46)'in her iki yanını  $[Y \quad I \quad I]$  ile çarparsak, (4.39) elde edilmiş olur.

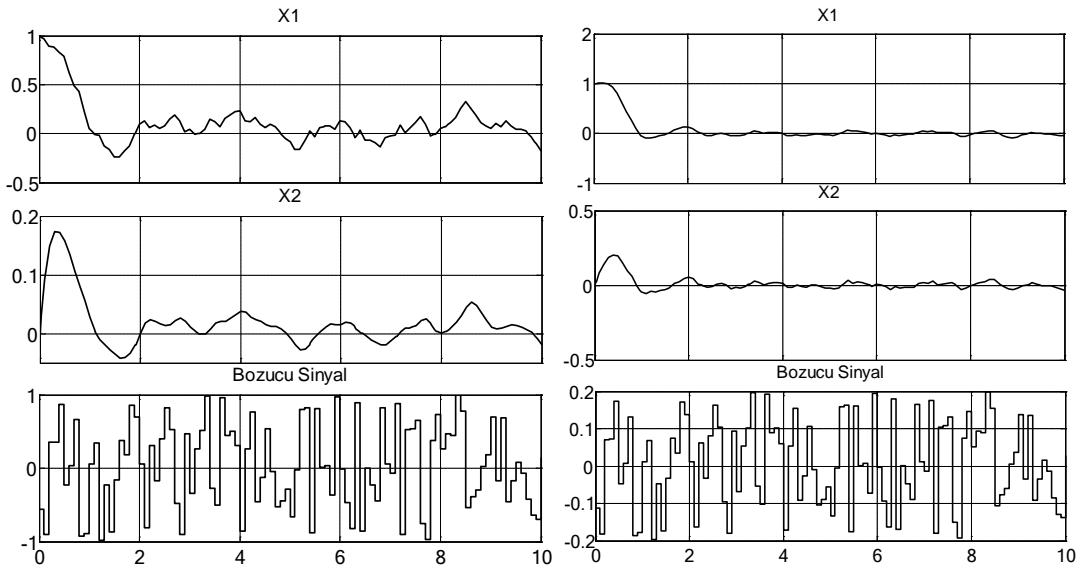
#### Örnek 4.5:

Örnek 4.1'deki sistemde bozucu etki olduğu durumda kullanılacak Simulink modeli Şekil 4.12'da gösterilmiştir. Sistem, bozucu giriş değeri rasgele değişen bir işaret olarak verildiğinde bu bozucu etkiyi makul düzeye ( $\gamma=1000$  için, yaklaşık %80 düşüş gözlenmiştir. Yani  $v(t)=0.2$  değerini sistem çıkışında 0.04'e kadar indirmiştir.) indirmiştir. Bu sistem için hesaplanan kontrol kazançları ve sistemin cevabı aşağıdaki gibidir:

$$K_1 = [15.5839 \quad 4.1540 \quad -0.1311], \quad K_2 = [15.5839 \quad 4.1540 \quad -0.1311]$$



Şekil 4.12 Sistemde bozucu etki olduğu durumda kullanılan Simulink modeli



(a)

(b)

Şekil 4.13 (a)  $v(t)_{\max} = 1$  için ve (b)  $v(t)_{\max} = 0.2$  için sistemin cevabı ve uygulanan bozucu sinyaller.

## 5. TAKAGI SUGGENO BULANIK - DAYANIKLI (ROBUST) KONTROL

### 5.1 Dayanıklılık genel anlayış

Gürbüz ya da dayanıklı kontrol olarak da adlandırılan robust kontrol, kontrol teorisinin belirsizlik içeren sistemlerin kontrolüyle uğraşan bir alt dalıdır. Kısaca dayanıklılık, kontrol edilen nesnenin parametrelerinin küçük değişimine, kapalı çevrim kontrol sisteminin çıkışının küçük değişiminin karşılık gelmesine denir. Dayanıklılık özelliği olan sistemlere robust (dayanıklı, kaba, gürbüz) sistemler denir. Bu tür nesnelere kontrol etmek için tasarlanan denetleyicilere robust denetleyiciler ya da dayanıklı denetleyiciler denir. Dayanıklı denetleyiciler matematik modeli belli olmayan ya da kısmen belli olan veya modelinde belirsizlik bulunan nesnelere için kullanılır. Dayanıklı kontrol sistemlerinin tasarlanmasında çeşitli optimal ve dayanıklı sentez metotları kullanılır. Örneğin,  $H_\infty$  ve  $H_2$  uzaylarında denetleyici sentezi, LMI-denetleyiciler,  $\mu$ -denetleyiciler sayılabilir.

#### Dayanıklı kontrolün esas problemi:

Dayanıklı kontrol sistemlerinin sentezinin esas problemi, kontrol devresinde belirsizlik bulunan sistemlerde öyle bir kontrol yasasını bulmaktır ki, sistemin çıkış durum değişkenlerini ve hata sinyallerini önceden verilmiş belli bir sınırdaki tutabilsin. Belirsizlikler çeşitli şekillerde olabilir. Örneğin, sistemde oluşan gürültüler (noise), kontrol edilen nesnenin transfer fonksiyonundaki nonlineerlikler ve transfer fonksiyonunun kurulmasına dair bilgilerdeki eksiklik olması verilebilir.

Dayanıklı kontrolün iki ana meselesi vardır: dayanıklı analiz ve dayanıklı sentez. Dayanıklı analizin esas amacı, sistemi kararsız yapan bir belirsizlik alanı bulmaktır. Bunun için aşağıdaki iki alt problem çözülür:

1. Belirsizlik modellerinin belirlenmesi
2. Sistemin yapısal şemasında, yapısal olarak nominal sistem ile belirsizlik yapan kısmın birbirinden ayrılması

Dayanıklı sentezin amacı ise, önceden verilmiş dayanıklılık kriterlerini sağlayan bir denetleyici tasarlamaktır. Geçtiğimiz yüzyılın ortasından başlayarak geliştirilen

çeşitli metot ve algoritmaların yardımıyla dayanıklı sentez problemi çözülebilir. Aşağıdaki tabloda dayanıklı sentezin gerçekleştirilmesinde kullanılan ana metotların avantaj ve dezavantajları verilmiştir [68].

**Çizelge 5.1:** Dayanıklı sentezin gerçekleştirilmesinde kullanılan ana metotların avantaj ve dezavantajları.

Metot	Avantajları	Dezavantajları
H-inf sentez	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sistemin hem kararlılığıyla hem de hassasiyetiyle çalışabilmesi,</li> <li>Kapalı devrenin her zaman kararlı olması,</li> <li>Sentez algoritmasının direkt olması, yani bir iterasyondan oluşması.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Kontrol edilen nesnenin parametrik dayanıklılığına dikkat edilmesinin gerekmesi.</li> </ul>
H-2 sentez	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sistemin hem kararlılığıyla hem de hassasiyetiyle çalışabilmesi.</li> <li>Kapalı devrenin her zaman kararlı olması.</li> <li>Denetleyicinin transfer fonksiyonunun kesin olarak bulunabilmesi.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>İterasyon sayısının çok olması.</li> </ul>
LQG (Lineer Kuadratik Gaussian) sentez	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gürültülerle ilgili bilginin denetleyici sentezinde kullanılması.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Kararlılık payının garanti edilememesi,</li> <li>Kontrol edilen nesnenin modelinin kesin olarak bilinmesinin gerekmesi.</li> <li>İterasyon sayısının çok olması.</li> </ul>
LQR (Lineer Kuadratik Regülatör) sentez	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dayanıklı kararlılığın sağlanmasının garanti edilmesi,</li> <li>Regülatör ya da denetleyicinin ataletsiz olması.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Durum değişkenlerinin tümüne göre geri besleme gerekmesi,</li> <li>Nesnenin kesin modelinin bilinmesinin gerekmesi,</li> <li>İterasyon sayısının çok olması.</li> </ul>
MÜ sentez	<ul style="list-style-type: none"> <li>Çok geniş bir belirsizlik sınıfıyla çalışabilmesi.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Denetleyicinin derecesinin yüksek olması.</li> </ul>

## 5.2 Belirsizliğin türleri ve sınıflandırılması

Hiç bir matematiksel ifade, fiziki bir sistemi tam olarak modelleyemez. Bu nedenle modelleme hatalarının kontrol sisteminin performansını olumsuz etkileyebileceğinin farkında olunmalıdır. Bu bölümde öncelikle kontrol edilen nesnede var olan çeşitli belirsizlik modelleri incelenecek; ardından küçük-kazanç teoremi kullanılarak dayanıklı kararlılık konusuna değinilecek ve son olarak da nesne belirsizliklerine karşı dayanıklı performans konusu ele alınacaktır.

### 5.2.1 Nesnedeki Belirsizlikler

Buradaki esas teknik nesneyi bir  $P$  kümesine ait elemanlar şeklinde modellemektir. Bu tür bir küme *yapılandırılmış* veya *yapılandırılmamış* olabilir. Yapılandırılmış bir kümeyi örneklemek için aşağıdaki nesne modeline bakalım:

$$\frac{1}{s^2 + as + 1}$$

Bu standart ikinci mertebeden bir transfer fonksiyonu olup kütle-yay-sönüm düzeneğini veya R-L-C devresini ifade etmektedir. Farz edelim ki,  $a$  sabitinin bir  $[a_{\min}, a_{\max}]$  aralığında olduğu bilinmektedir. Bu durumda nesne aşağıdaki yapılandırılmış kümeye dâhildir:

$$P = \left\{ \frac{1}{s^2 + as + 1} : a_{\min} \leq a \leq a_{\max} \right\}$$

Bu şekilde yapılandırılmış bir küme, sınırlı sayıda (burada bir adet, 'a') skaler parametreyle parametrize edilmiş oldu. Diğer bir tür yapılandırılmış belirsizlik ise ayrık (discrete) nesne kümesidir ve bu kümenin açıkça parametrize edilmiş olması gerekmez.

Yapılandırılmamış kümeler iki sebepten dolayı daha önemlidir: Birincisi, tüm modellerin özellikle yüksek frekanslardaki modellenmemiş dinamiklerinden kaynaklanan bir yapılandırılmamış belirsizliğe sahip olmaları gerektiğine inanılması; ikincisi olarak, yapılandırılmamış belirsizliğin özel bir türü olan disk belirsizliği için basit ve genel analiz metotları geliştirilebilir. Bu nedenle başlangıçta diske benzer bir belirsizlik seçilerek yapılandırılmamış küme oluşturulur. Daha ayrıntılı çalışmalar için

çarpımsal disk belirsizliği seçilebilir. Bu, yapılandırılmamış pertürbasyonun sadece bir türüdür. Buradaki önemli nokta, daha karmaşık bir tanımlama yerine disk belirsizliğinin kullanılmasıdır. Bunun nedeni analizi büyük oranda sadeleştirilmesi ve nispeten net sonuçlar elde etmemizi sağlamasıdır. Ödenen bedel korunumluluktan fedakarlık yapılmasıdır [69].

### Çarpımsal Pertürbasyon

Farz edelim ki nominal transfer fonksiyonu  $P$ 'dir ve pertürbe edilmiş transfer fonksiyonu  $\tilde{P} = (I + \Delta W_2)P$  formundadır. Burada  $W_2$  sabit ve kararlı bir transfer fonksiyonu olan ağırlık,  $\Delta$  ise  $\|\Delta\|_\infty < 1$  şartını sağlayan değişken ve kararlı bir transfer fonksiyonudur. Ayrıca,  $\tilde{P}$ 'nin oluşturulması esnasında  $P$ 'nin hiçbir kararsız kutbunun sadeleştirilmediği kabul edilir (Böylece  $P$  ve  $\tilde{P}$  aynı kararsız kutuplara sahiptir). Bu tür bir  $\Delta$  pertürbasyonuna *müsaade edilebilir* denir.

Bu belirsizlik modelinin altında yatan fikir,  $\Delta W_2$  'nin normalize edilmiş nesne pertürbasyonunun 1'den farkına eşit olmasıdır:

$$\frac{\tilde{P}}{P} - 1 = \Delta W_2$$

Bu nedenle,  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$  olursa,

$$\left| \frac{\tilde{P}(j\omega)}{P(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|, \quad \forall \omega,$$

olur ve böylece  $|W_2(j\omega)|$  belirsizlik profilini verir. Bu eşitsizlik kompleks düzlemde bir diski ifade eder: Her bir frekansta  $\tilde{P}/P$  noktası, disk üzerinde merkez 1'e eşit ve yarıçap  $|W_2|$  olacak şekilde bulunur.  $|W_2(j\omega)|$  fonksiyonu tipik olarak  $\omega$ 'nın (kabaca) artan bir fonksiyonudur: belirsizlik frekansla doğru orantılı olarak artar.  $\Delta$ 'nın esas amacı, faz belirsizliğini hesaba katmak ve pertürbasyonun büyüklüğü için bir ölçek faktörü olarak kullanmaktır ( $|\Delta|$  0'la 1 arasında değişmektedir).

Böylece, bu belirsizlik modeli, nominal  $P$  nesnesi ile birlikte bir ağırlık fonksiyonu olan  $W_2$  ile karakterize edilir.  $W_2$  'nin pratikte nasıl elde edileceği aşağıdaki örnekte incelenmiştir.

### Örnek 5.1

Farz edelim ki kontrol edilen nesne kararlıdır ve transfer fonksiyonu, frekans-cevabı deneyleriyle elde edilmiştir: Genlik ve faz belirli sayıda frekansta ölçülmüştür ( $\omega_i, i=1, \dots, m$ ) ve bu ölçümler  $n$  defa tekrarlanmıştır.  $\omega_i$  frekansı ve  $k$  deneyi için genlik-faz ölçümleri ( $M_{ik}, \phi_{ik}$ ) ile gösterilsin. Eldeki bu veriler ışığında her bir frekans için nominal genlik-faz çiftleri ( $M_i, \phi_i$ ) seçilir ve nominal bir transfer fonksiyonu  $P(s)$  bu verilere uygun olarak alınır. Ardından, aşağıdaki şartı sağlayan bir  $W_2(s)$  ağırlık fonksiyonu bulunur:

$$\left| \frac{M_{ik} e^{j\phi_{ik}}}{M_i e^{j\phi_i}} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega_i)|, \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n.$$

### Diğer Pertürbasyon Türleri

Aşağıdaki örnek, çarpımsal pertürbasyonun yanı sıra kullanılacak diğer pertürbasyonlara bir örnek sunmaktadır.

### Örnek 5.2

Başlangıçta bahsedildiği gibi bir nesne transfer fonksiyonları ailesi ele alınsın.

$$\frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad 0.4 \leq a \leq 0.8.$$

Burada

$$a = 0.6 + 0.2\Delta, \quad -1 \leq \Delta \leq 1,$$

olduğundan transfer fonksiyonları ailesi şu şekilde ifade edilebilir:

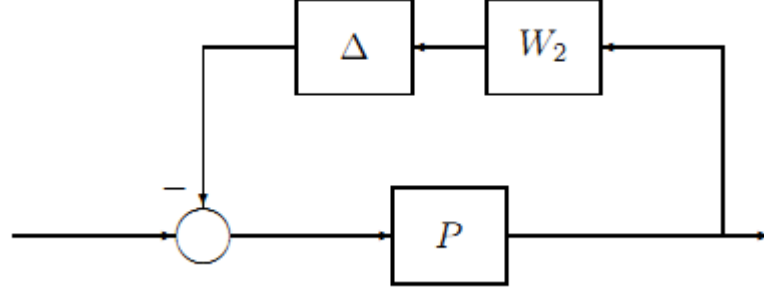
$$\frac{P(s)}{1 + \Delta W_2(s)P(s)}, \quad -1 \leq \Delta \leq 1,$$

Burada

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}, \quad W_2(s) := 0.2s.$$

şeklindedir.

Unutulmamalıdır ki,  $P$ , aralığın orta noktası olan  $a = 0.6$  değerindeki nominal nesne transfer fonksiyonudur. Nesnenin bu tür gösterimine karşılık gelen blok diyagramı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



**Şekil 5.1** Nominal nesne transfer fonksiyonu

Böylece orijinal nesne, nominal nesne etrafında bir geri besleme belirsizliği şeklinde gösterilmiştir. Aşağıdaki liste yaygın olarak kullanılan belirsizlik modellerini özetlemektedir:

$$(1 + \Delta W_2)P$$

$$P + \Delta W_2$$

$$P / (1 + \Delta W_2 P)$$

$$P / (1 + \Delta W_2)$$

Her bir durum için  $\Delta$  ve  $W_2$  hakkında uygun kabuller yapılabilir. Tipik olarak,  $\Delta$ 'nın kararlı olduğu kabulünü gevşetebiliriz, fakat bu defa da takip eden teoremlerin ispatlanması zorlaşacaktır.

### 5.3 Dayanıklı Kontrol Sisteminin Kararlılığı

Dayanıklılık kavramı şu şekilde açıklanabilir: Farz edelim ki nesne transfer fonksiyonu  $P$ , bir  $\mathcal{P}$  kümesine mensuptur. Geri besleme sisteminin içten kararlılık gibi bir karakteristiği olduğunu düşünelim. Bir  $C$  denetleyicinin robust olarak adlandırılması için bu karakteristiğin  $\mathcal{P}$  kümesine mensup tüm nesnelere için geçerli olması gerekmektedir. Bu nedenle dayanıklılık kavramı; bir denetleyici, bir nesnelere kümesi ve sisteme ait herhangi bir karakteristiğin var olmasını gerektirmektedir. Bu çalışmada,



dayanıklılık (robustness) kavramının en önemli iki varyasyonu dayanıklı kararlılık ve dayanıklı performanstır.

Bir C denetleyicinin dayanıklı kararlılık sağlaması için P'deki tüm nesnelere için kararlı yapması gerekir. Dayanıklı kararlılık için C ve P'yi içeren bir test yapmak istenebilir veya P'nin boyutu biliniyorsa, C'nin P'yi tamamen kararlı yaptığı maksimum boyut, kararlılık marjini için kullanışlı bir kavram olabilir.

Nyquist diyagramı, kararlılık marjini hakkında bilgi verir. Unutulmamalıdır ki, kritik nokta olan -1'den, L'nin Nyquist eğrisinin en yakın noktasına olan mesafe  $1/\|S\|_\infty$ 'ye eşittir:

$$\begin{aligned} -1 \text{ 'den Nyquist egrisine uzaklik} &= \inf_{\omega} |-1 - L(j\omega)| \\ &= \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| \\ &= \left[ \sup_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \right]^{-1} \\ &= \|S\|_\infty^{-1}. \end{aligned}$$

Bu durumda, eğer  $\|S\|_\infty \gg 1$  ise, Nyquist eğrisi kritik noktaya çok yaklaşır ve geri besleme sistemi neredeyse kararsızdır. Bununla beraber, bu mesafe, kararlılık marjini için bir ölçüm aracı olarak yetersizdir, çünkü frekansla ilgili hiçbir bilgi içermez. Daha net bir ifadeyle, eğer nominal nesne P, kararsız kutuplarının sayısı aynı kalacak ve aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde P'ye pertürbe edilirse;

$$\left| \tilde{P}(j\omega)C(j\omega) - P(j\omega)C(j\omega) \right| < \|S\|_\infty^{-1}, \quad \forall \omega,$$

o zaman içten kararlılık korunmuş olur (kritik noktanın Nyquist eğrisi tarafından daire içine alınma sayısı değişmez). Fakat bu durum genelde oldukça korunumludur, örneğin  $P(j\omega)C(j\omega)$ 'nin kritik noktadan çok uzak olduğu frekanslarda daha büyük pertürbasyonlara müsaade edilebilir.

Açıkça frekansa bağlı olan pertürbasyon modelleri kullanılarak daha iyi kararlılık marjinleri elde edilebilir; örneğin çarpımsal pertürbasyon modeli olan  $\tilde{P} = (I + \Delta W_2)P$ .  $\beta$  pozitif sayısını sabitleyelim ve aşağıdaki nesne ailesini ele alalım:

$$\{\tilde{P} : \Delta \text{ kararlıdır ve } \|\Delta\|_\infty \leq \beta\}.$$

Bu durumda, nominal nesne  $P$  için içten kararlılığı sağlayan bir  $C$  denetleyici,  $\beta$ 'nin yeterince küçük olması halinde tüm aileyi kararlı yapar.  $\beta$ 'nin, tüm aile için içten kararlılığı sağlayan en düşük üst sınırını  $\beta_{\text{sup}}$  olarak göstereyim. Böylece  $\beta_{\text{sup}}$  (belirsizlik modeline göre) bir kararlılık marjini olur. Diğer belirsizlik modelleri için de benzer şekilde kararlılık marjinleri tanımlanabilir.

Şimdi de kararlılık marjininin iki klasik göstergesine, kazanç ve faz marjinlerine bakalım. Farzedelim ki geribesleme sistemi  $P$  nesnesi ve  $C$  denetleyici için içten kararlıdır. Şimdi nesneyi  $k$  pozitif gerçel sayısıyla  $kP$ 'ye pertürbe edelim.  $k_{\text{max}}$  ile gösterilen üst kazanç marjini,  $k$ 'nin 1'den büyük ve geribesleme sistemini içten kararsız yapan ilk değeridir. Bir başka deyişle,  $1 \leq k < k_{\text{max}}$  için içten kararlılığın sağlandığı maksimum sayıdır. Eğer böyle bir sayı bulunamıyorsa,  $k_{\text{max}} := \infty$  olarak alınır. Benzer şekilde, alt kazanç marjini olan  $k_{\text{min}}$  de  $k_{\text{min}} < k \leq 1$  için içten kararlılığın sağlandığı en küçük negatif olmayan sayıdır. Bu iki sayı  $L$ 'nin Nyquist diyagramından okunabilir. Örneğin;  $-1/k_{\text{max}}$ , Nyquist eğrisinin reel eksenin  $(-1, 0)$  segmentini kestiği ve eğer birden fazla sayıda kesişme varsa bunlardan  $-1$ 'e en yakın olan noktadır.

Şimdi ise nesneyi,  $\phi$  pozitif gerçel sayı olmak üzere,  $e^{j\phi}P$  'ye pertürbe edelim. Faz marjini olan  $\phi_{\text{max}}$ ,  $0 \leq \phi < \phi_{\text{max}}$  için içten kararlılığın sağlandığı en büyük sayıdır (derece cinsinden). Görüleceği üzere,  $\phi_{\text{max}}$ , Nyquist eğrisinin kritik noktayı  $(-1)$  kesmesi için döndürülmesi gereken açıdır. Radyan cinsinden ise, Nyquist eğrisinden kritik noktaya kadar çizilen birim çember boyunca yay uzunluğudur.

Buradan anlaşılacağı üzere kazanç ve faz marjinleri, kritik nokta ile Nyquist eğrisi arasındaki mesafeyi belli özel doğrultularda ölçer. Kazanç ve faz marjinleri geleneksel olarak kararlılığın dayanıklı olup olmadığının önemli ölçüleridir. Eğer ikisinden biri küçükse, sistem kararsızlığa yakındır. Yine de unutulmamalıdır ki, kazanç ve faz marjinleri nispeten büyük olabilir ve bununla beraber  $L$ 'nin Nyquist eğrisi kritik noktanın yakınından geçebilir. Bunun anlamı, kazanç ve fazdaki eşzamanlı küçük değişimlerin içten kararsızlığa yol açabildiğidir.

Şimdi de çarpımsal pertürbasyon modeli için tipik bir dayanıklı kararlılık testine bakalım. Farz edelim ki nominal geri besleme sistemi ( $\Delta=0$ ),  $C$  denetleyici için içten kararlıdır. Bunun için tümleyen hassasiyet fonksiyonunu ele alalım:

$$T = 1 - S = \frac{L}{1 + L} = \frac{PC}{1 + PC}.$$

**Teorem 8** [69]: (Çarpımsal belirsizlik modeli)  $C$  denetleyici yalnız ve yalnız  $\|W_2T\|_\infty < 1$  durumunda dayanıklı kararlılık sağlar.

*İspat.*  $\|W_2T\|_\infty < 1$  olduğunu farzedelim. Sanal eksen üzerindeki kutuplar etrafında  $D$  kadar sola doğru boşluk bırakarak  $L$ 'nin Nyquist eğrisini çizelim Nominal geri besleme sisteminin içten kararlı olduğunu bildiğimizden, Nyquist kriteri gereği şunu biliriz ki;  $L$ 'nin Nyquist eğrisi  $-1$ 'den geçmez ve saatin dönme yönüne ters yöndeki yuvarlanmaların (ya da yuvarlak içine almaların) sayısı  $Res \geq 0$ 'daki  $P$ 'nin kutuplarının sayısı ile  $Res \geq 0$ 'daki  $C$ 'nin kutuplarının sayısının toplamına eşittir.

Kabul edilebilir bir  $\Delta$  belirleyelim.  $\dot{P}C = (I + \Delta W_2)L$  için Nyquist eğrisini oluşturalım.  $\Delta W_2$  sanal eksen üzerinde herhangi bir ek kutup oluşturmadığından ek bir indentasyona gerek yoktur.  $(I + \Delta W_2)L$ 'nin Nyquist eğrisinin  $-1$ 'den geçmediğini ve saatin dönme yönünün tersindeki yuvarlak içine alma sayısının  $Res \geq 0$ 'daki  $(I + \Delta W_2)P$ 'nin kutuplarının sayısı ile  $Res \geq 0$ 'daki  $C$ 'nin kutuplarının sayısının toplamına eşit olduğunu göstermemiz gerekir. Buna eşdeğer olarak,  $(I + \Delta W_2)L$ 'nin Nyquist eğrisi  $-1$ 'den geçmez ve  $L$ 'nin Nyquist eğrisiyle tam olarak eşit sayıda yuvarlak içine alır. Diğer bir ifadeyle, pertürbasyonun yuvarlak içine alma sayısını değiştirmedini göstermemiz gerekir.

Buradaki en önemli denklem

$$1 + (1 + \Delta W_2)L = (1 + L)(1 + \Delta W_2T). \quad (5.1)$$

denklemdir.

$$\|\Delta W_2T\|_\infty \leq \|W_2T\|_\infty < 1,$$

olduğundan,  $(I + \Delta W_2 T)$  noktası,  $D$  üzerindeki tüm  $s$  noktaları için merkezi 1, yarıçapı 1'den küçük kapalı bir disk içinde bulunur. Bu nedenle (4.1) denkleminde,  $s$ ,  $D$ 'nin etrafını bir kez dolaştığında,  $1 + (I + \Delta W_2)L$ 'nin açısındaki net değişim,  $1 + L$ 'nin açısındaki net değişime eşittir. Bu da aradığımız sonucu verir.

## 5.4 Belirsizliğe Sahip T-S Bulanık Modeli

Bulanık kontrol sistemlerinin dayanıklılığından bahsedebilmek için ilk adım bir bulanık sistemler sınıfını belirsizlik ile birlikte ifade etmek gereklidir. Bu amaçla Takagi Sugeno bulanık modelinin belirsizlik bloklarını aşağıdaki gibi türetiyoruz.

Farz edelim ki kontrol edilen nesnenin bulanık modeli sürekli T-S şeklinde gösterilebilir. Burada nesne kuralları aşağıdaki gibi ifade olunur.  $z_1(t), \dots, z_n(t)$  önerme değişkenleri,  $x \in R^{n \times 1}$  durum vektörü,  $r$  kuralların sayısı,  $M_{ij}$  giriş bulanık kümeleri,  $u \in R^{m \times 1}$  giriş,  $A_i \in R^{n \times n}$  durum matrisi,  $B_i \in R^{n \times m}$  giriş matrisidir. Şimdi ise Belirsizliği olan bulanık modele bakalım. Bu modelin durum uzayı denklemi aşağıdaki gibi ifade olur.  $\phi_{ai}(t)$  ve  $\phi_{bi}(t)$  belirsizliklerden kaynaklanan bloklardır.  $D_{ai}$ ,  $D_{bi}$  A ve B'deki parametrelerinin belirsizliklerini ifade eden matrislerdir.  $E_{ai}$ ,  $E_{bi}$  uygun boyutlu birim matrislerdir.

*Kural i*

*Eğer  $z_1 M_{i1}$  ise ve ...  $z_p M_{ip}$  ise*

$$O \text{ Halde } \dot{x} = (A_i + D_{ai}\phi_{ai}(t)E_{ai})x(t) + (B_i + D_{bi}\phi_{bi}(t)E_{bi})u(t), \quad i = 1, \dots, r. \quad (5.1)$$

Burada belirsizlik blokları şu şartları sağlamalıdır:

$$\|\phi_{ai}(t)\| \leq \frac{1}{\gamma_{ai}} \quad (5.2)$$

$$\phi_{ai}(t) = \phi_{ai}^T(t) \quad (5.3)$$

$$\|\phi_{bi}(t)\| \leq \frac{1}{\gamma_{bi}} \quad (5.4)$$

$$\phi_{bi}(t) = \phi_{bi}^T(t) \quad (5.5)$$

Bulanık model şu şekilde ifade edilir:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + D_{ai}\phi_{ai}(t)E_{ai})x(t) + (B_i + D_{bi}\phi_{bi}(t)E_{bi})u(t) \}. \quad (5.6)$$

(5.6)'daki bulanık modelde ardıl kısmında belirsizlik vardır. Premise kısımdaki belirsizliğe ilk kez [70] ve [42]'de değinilmiştir. Biz burada sadece ardıl kısmındaki belirsizliğe odaklanacağız.

Bulanık modellerde oluşan belirsizlikler bu bölümde ele alınacaktır. Bu belirsizlikler iki durum için söz konusu olabilir [42].

- 1 Öncül parametrede olan belirsizlik (Premise Parameter Uncertainty)
- 2 Ardıl parametrede olan belirsizlik (Consequent Parameter Uncertainty)

PPU olduğu zaman  $w$  öncül parametresinde oluşan belirsizliktir, bunu da  $\Delta w$  ile işaret edelim. Daha sonra CPU ise kontrol nesnesini ifade eden matrislerde oluşan belirsizliktir. Bu belirsizlikleri ifade etmek için uygun olarak  $\Delta A$  ve  $\Delta B$  veya  $D_{ai}$  ve  $D_{bi}$  matrisleri kullanılmaktadır. Bu matrisleri kullanmakla nesnelerin CPU durumunda Eğer-O Halde kuralları sonraki bölümlerde ele alınacaktır.

Öncül parametrede oluşan belirsizlikler (PPU) aşağıdaki formül ile ifade edilir.

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^r (w_i(t) + \Delta w_i(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r (w_i(t) + \Delta w_i(t))}$$

Burada  $\Delta w_i(t)$  bilinmeyen PPU'dur.  $\Delta w_i(t)$  şöyle bir değerdir:

$$\begin{aligned} -1 &\leq w_i(t) \leq 1, \\ w_i(t) + \Delta w_i(t) &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^r (w_i(t) + \Delta w_i(t)) &> 0 \end{aligned}$$

Bütün  $t$ 'ler için yukarıdaki eşitlik,  $\Delta w_i(t) = 0$  için (3.1)'e indirgenebilir.

## 5.5 T-S Bulanık-Dayanımlı Kontrol Sistemlerinin Kararlılık Şartları

Başlangıç olarak, bu bölümde (5.1)'deki belirsiz bulanık model için bir kararlılık şartı sunulacaktır. PDC denetleyici (3.12) (5.6)'da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{(A_i + D_{ai}\phi_{ai}E_{ai})x(t) + (B_i + D_{bi}\phi_{bi}E_{bi})K_jx(t)\} \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left\{ A_i + B_iK_j + [D_{ai} \quad D_{bi}] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi}K_j \end{bmatrix} \right\} x(t) \\
&= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \left\{ A_i + B_iK_i + [D_{ai} \quad D_{bi}] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi}K_i \end{bmatrix} \right\} x(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t))h_j(z(t)) \left\{ \begin{array}{l} A_i - B_iK_j + A_j - B_jK_i + [D_{ai} \quad D_{bi}] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi}K_j \end{bmatrix} + [D_{aj} \quad D_{bj}] \begin{bmatrix} \phi_{aj} & 0 \\ 0 & \phi_{bj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aj} \\ -E_{bj}K_i \end{bmatrix} \end{array} \right\} x(t) \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Aşağıdaki teorem, verilen bir PDC denetleyiciye (3.12) sahip olan bulanık model (5.1) için robust kararlılık şartlarını sunmaktadır. Bu teorem, bir sonraki kısımda incelenecek olan robust kararlılaştırma problemi için de bir temel oluşturacaktır.

**Teorem 9** [37]: Eğer aşağıdaki şartları sağlayan ortak bir pozitif tanımlı  $P$  matrisi ve pozitif yarı-tanımlı  $Q_0$  matrisi mevcutsa, bulanık sistem (5.1) PDC denetleyici (3.12) ile kararlı hale getirilebilir.

$$S_{ii} + (s+1)Q_1 < 0, \quad (5.8)$$

$$T_{ij} - 2Q_2 < 0, \quad i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \emptyset \quad (5.9)$$

burada  $s > 1$ ,

$$S_{ii} = \begin{bmatrix} (A_i - B_iK_i)^T P & PD_{ai} & PD_{bi} & E_{ai}^T & -K_i^T E_{bi}^T \\ D_{ai}^T P & -I & 0 & 0 & 0 \\ D_{bi}^T P & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{ai} & 0 & 0 & -\gamma_{ai}^2 & 0 \\ -E_{bi}K_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 \end{bmatrix},$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P \\ + P(A_i - B_i K_j) \\ + (A_j - B_j K_i)^T P \\ + P(A_j - B_j K_i) \end{pmatrix} & PD_{ai} & PD_{bi} & PD_{aj} & PD_{bj} & E_{ai}^T & -K_j^T E_{bi}^T & E_{bi}^T & -K_i^T E_{bj}^T \\ D_{ai}^T P & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bi}^T P & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{aj}^T P & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bj}^T P & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{aj}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ -E_{bi} K_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 I & 0 & 0 \\ E_{aj} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{aj}^2 I & 0 \\ -E_{bj} K_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bj}^2 I \end{bmatrix}$$

$Q_1 = \text{blok diyagonal}(Q_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,

$Q_2 = \text{blok diyagonal}(Q_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ .

**İspat.**  $\phi_{ai}(t)$  ve  $\phi_{bi}(t)$ 'nin aşağıdaki şartları sağlayan belirsizlik blokları olduğu belirsizliğe sahip T-S bulanık kontrol sistemini (5.1) ele alalım.

$$\|\phi_{ai}(t)\| \leq \frac{1}{\gamma_{ai}}, \quad \phi_{ai}(t) = \phi_{ai}^T(t),$$

$$\|\phi_{bi}(t)\| \leq \frac{1}{\gamma_{bi}}, \quad \phi_{bi}(t) = \phi_{bi}^T(t).$$

Lyapunov fonksiyonlarına aday olarak  $x^T(t)Px(t)$ 'yi ele alalım. Buradan,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} x^T(t)Px(t) \\ &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) \left\{ \begin{aligned} & \left( A_i + B_i K_i + [D_{ai} \ D_{bi}] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right)^T P \\ & + P \left( A_i + B_i K_i + [D_{ai} \ D_{bi}] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & \left( A_i - B_i K_j + [D_{ai} \quad D_{bi}] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_j \end{bmatrix} \right)^T P \\ & + P \left( A_i - B_i K_j + [D_{ai} \quad D_{bi}] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_j \end{bmatrix} \right) \\ & + \left( A_j - B_j K_i + [D_{aj} \quad D_{bj}] \begin{bmatrix} \phi_{aj} & 0 \\ 0 & \phi_{bj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aj} \\ -E_{bj} K_i \end{bmatrix} \right)^T P \\ & + P \left( A_j - B_j K_i + [D_{aj} \quad D_{bj}] \begin{bmatrix} \phi_{aj} & 0 \\ 0 & \phi_{bj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aj} \\ -E_{bj} K_i \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} x(t) \\
& = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) \left\{ \begin{aligned} & (A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) + P [D_{ai} \quad D_{bi}] \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P \\ & + [E_{ai}^T - (E_{bi} K_i)^T] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \\ & - \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right)^T \\ & \times \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} x(t) \\
& + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + P [D_{ai} \quad D_{bi}] \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P \\ & + [E_{ai}^T - (E_{bi} K_j)^T] \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_j \end{bmatrix} \\ & - \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_j \end{bmatrix} \right)^T \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_j \end{bmatrix} \right) \\ & + (A_j - B_j K_i)^T P + P(A_j - B_j K_i) + P [D_{aj} \quad D_{bj}] \begin{bmatrix} D_{aj}^T \\ D_{bj}^T \end{bmatrix} P \\ & + [E_{aj}^T - (E_{bj} K_i)^T] \begin{bmatrix} \phi_{aj} & 0 \\ 0 & \phi_{bj} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{aj} & 0 \\ 0 & \phi_{bj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aj} \\ -E_{bj} K_i \end{bmatrix} \\ & - \left( \begin{bmatrix} D_{aj}^T \\ D_{bj}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{aj} & 0 \\ 0 & \phi_{bj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aj} \\ -E_{bj} K_i \end{bmatrix} \right)^T \left( \begin{bmatrix} D_{aj}^T \\ D_{bj}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{aj} & 0 \\ 0 & \phi_{bj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aj} \\ -E_{bj} K_i \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} x(t) \tag{5.10}
\end{aligned}$$



Eğer

$$\begin{aligned}
& (A_i + B_i K_j)^T P + P(A_i + B_i K_j) + P \begin{bmatrix} D_{ai} & D_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P \\
& + \begin{bmatrix} E_{ai}^T - (E_{bi} K_j)^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{ai}^2} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{bi}^2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_j \end{bmatrix} \\
& (A_j + B_j K_i)^T P + P(A_j + B_j K_i) + P \begin{bmatrix} D_{aj} & D_{bj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{aj}^T \\ D_{bj}^T \end{bmatrix} P \\
& + \begin{bmatrix} E_{aj}^T - (E_{bj} K_i)^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{aj}^2} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{bj}^2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aj} \\ -E_{bj} K_i \end{bmatrix} - 2Q_0 < 0,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} x^T(t) P x(t) & < \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) \\
& \times \left\{ \begin{aligned}
& \left( (A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) + P \begin{bmatrix} D_{ai} & D_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P \right. \\
& + \begin{bmatrix} E_{ai}^T - (E_{bi} K_i)^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \\
& - \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right)^T \\
& \left. \times \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right) \right\} x(t) \\
& + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) Q_0 x^T(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) \\
&\quad \times \left\{ \begin{aligned} &(A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) + P \begin{bmatrix} D_{ai} & D_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P \\ &+ \begin{bmatrix} E_{ai}^T - (E_{bi} K_i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \\ &- \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right)^T \\ &\times \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} x(t) \\
&\quad + (s+1) \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) Q_0 x(t) \\
&\leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) \\
&\quad \times \left\{ \begin{aligned} &(A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) + (s-1)Q_0 + P \begin{bmatrix} D_{ai} & D_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P \\ &+ \begin{bmatrix} E_{ai}^T - (E_{bi} K_i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \\ &- \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right)^T \\ &\times \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} x(t)
\end{aligned}$$

Eğer

$$\begin{aligned}
&(A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) + (s-1)Q_0 + P \begin{bmatrix} D_{ai} & D_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P \\
&+ \begin{bmatrix} E_{ai}^T - (E_{bi} K_i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{ai}^2} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{bi}^2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} < 0, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

ise, o zaman  $x(t) \neq 0$ 'da

$$\frac{d}{dt} x^T(t) P x(t) < 0$$

olur. Çünkü

$$\begin{aligned} \phi_{ai}^T(t) \phi_{ai}(t) &\leq \frac{1}{\gamma_{ai}^2} I, & \phi_{bi}^T(t) \phi_{bi}(t) &\leq \frac{1}{\gamma_{bi}^2} I, \\ -\left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right)^T & \left( \begin{bmatrix} D_{ai}^T \\ D_{bi}^T \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} \phi_{ai} & 0 \\ 0 & \phi_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ai} \\ -E_{bi} K_i \end{bmatrix} \right) &\leq 0. \end{aligned}$$

Schur Tümleniyeni ile, (5.12) ve (5.11), sırasıyla (5.8) ve (5.9) şeklinde yeniden yazılabilir.

$Q_1 = 0$  ve  $Q_2 = 0$  olduğunda (ki bu durumda  $Q_0 = 0$  olur), gevşetilmiş dayanıklı kararlılık şartları, yalnızca dayanıklılık şartlarına indirgenebilir:

$$P > 0, \quad S_{ii} < 0, \quad T_{ij} < 0, \quad i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \emptyset.$$

Sonuç olarak, gevşetilmiş kararlılık şartları kullanıldığında, dayanıklı kararlılık analizi ile daha az korunumlu sonuçlar elde edilebilir.

## 5.6 T-S Bulanık-Dayanıklı Kontrol Sisteminin Kararlılığı

Dayanıklı kararlılık şartlarını sağlayan PDC denetleyici ailesine mensup bir PDC bulanık denetleyici seçmek, belirsizlik bloklarının normunu maksimize etmek ya da buna eşdeğer olarak  $\gamma_{ai}$  ve  $\gamma_{bi}$ 'yi minimize etmek (5.7) için bir dayanıklı kararlılaştırma problemi tanımlayacağız. Aşağıdaki teorem dayanıklı kararlılaştırma problemi için bir çözüm sunmaktadır.

**Teorem 10** [37]: Bulanık modeli kararlı hale getiren ve belirsizlik bloklarının normunu maksimize eden  $K_i$  geri besleme kazançları,  $\alpha_i, \beta_i > 0$ 'ın tasarım parametreleri olarak kullanıldığı aşağıdaki LMI'ler çözümlenerek bulunabilir:

$$\text{minimize}_{\gamma_{ai}^2, \gamma_{bi}^2, X, M_1, \dots, M_r, Y_0} \sum_{i=1}^r \{ \alpha_i \gamma_{ai}^2 + \beta \gamma_{bi}^2 \}$$

ki bu ifade aşağıdaki şartlara maruzdur;

$$Y > 0, \quad N_0 \geq 0, \quad \hat{S}_{ii} + (s-1)N_1 < 0, \quad (5.13)$$

$$\hat{T}_{ij} - 2N_2 < 0, \quad i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \emptyset, \quad (5.14)$$

burada  $s > 1$ ,

$$\hat{S}_{ii} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} YA_i^T + A_i Y \\ -B_i M_i - M_i^T B_i^T \end{array} \right) & * & * & * & * \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ai}^T & 0 & -I & 0 & 0 \\ D_{bi}^T & 0 & 0 & -\gamma_{ai}^2 & 0 \\ E_{ai} Y & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 \\ -E_{bi} M_i & & & & \end{bmatrix}$$

$$\hat{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} YA_i^T + A_i Y \\ -B_i M_j - M_j^T B_i^T \\ +YA_j^T + A_j Y \\ -B_j M_i - M_i^T B_j^T \end{array} \right) & D_{ai} & D_{bi} & D_{aj} & D_{bj} & YE_{ai}^T & -M_j^T E_{bi}^T & YE_{bi}^T & -M_i^T E_{bj}^T \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ai}^T & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bi}^T & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{aj}^T & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bj}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{aj}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 I & 0 & 0 \\ -E_{bi} M_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{aj}^2 I & 0 \\ E_{aj} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bj}^2 I \\ -E_{bj} M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bj}^2 I \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \text{blok diyagonal}(N_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

$$N_2 = \text{blok diyagonal}(N_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

burada,

$$N_0 = YQ_0 Y$$

şeklindedir ve buradaki yıldız simgeleri simetrik konumlar için transpoze edilmiş elemanları (matrisleri) ifade etmektedir.

**İspat.** Buradaki ana fikir, Teorem 7'deki şartların aşağıdaki LMI'lere dönüştürülmesidir:

{blok diyagonal[Y I I I I]}{S<sub>ii</sub> + (s-1)Q<sub>1</sub>}{blok diyagonal[Y I I I I]}

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} YA_i^T + A_i Y \\ -B_i M_i - M_i^T B_i^T \end{pmatrix} & * & * & * & * \\ D_{ai}^T & -I & 0 & 0 & 0 \\ D_{bi}^T & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{ai} Y & 0 & 0 & -\gamma_{ai}^2 & 0 \\ -E_{bi} M_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 \end{bmatrix}$$

+(s-1)blok diyagonal[YQ<sub>0</sub>Y 0 0 0 0]

$$= \hat{S}_{ii} + (s-1)N_1, \quad (5.15)$$

{blok diyagonal[Y I I I I I I I I]}{T<sub>ij</sub> - 2Q<sub>2</sub>}  
 ×{blok diyagonal[Y I I I I I I I I]}

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} YA_i^T + A_i Y \\ -B_i M_j - M_j^T B_i^T \\ +YA_j^T + A_j Y \\ -B_j M_i - M_i^T B_j^T \end{pmatrix} & D_{ai} & D_{bi} & D_{aj} & D_{bj} & YE_{ai}^T & -M_j^T E_{bi}^T & YE_{bi}^T & -M_i^T E_{bj}^T \\ D_{ai}^T & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bi}^T & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{aj}^T & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bj}^T & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{aj}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ -E_{bi} M_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 I & 0 & 0 \\ E_{aj} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{aj}^2 I & 0 \\ -E_{bj} M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bj}^2 I \end{bmatrix}$$

-2blok diyagonal(YQ<sub>0</sub>Y 0 0 0 0 0 0 0 0)

$$= \hat{T}_{ij} - 2N_2, \quad (5.16)$$

burada tüm *i*'ler için;

$$Y = P^{-1}, \quad M_i = K_i P^{-1}$$

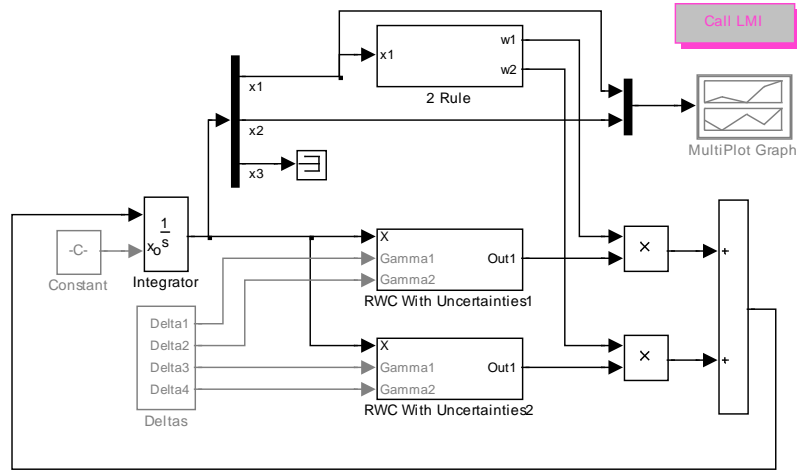
şeklindedir.

Geri besleme kazançları, yukarıdaki LMI'lerin *Y* ve *M<sub>i</sub>* çözümlerinden aşağıdaki gibi bulunur:

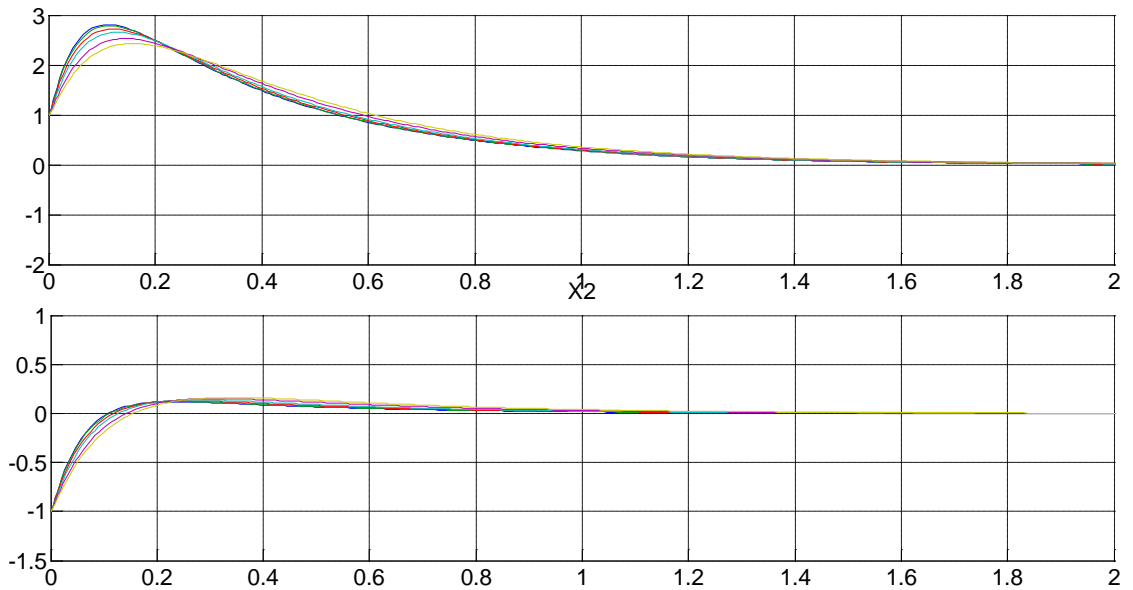
$$K_i = M_i Y^{-1}$$

**Örnek 5.1:** Yukarıda verilen yöntem ile örnek 4.1’de verilen sistemdeki  $R_a$ ,  $K_m$  ve  $K_b$  parametrelerinde oluşan belirsizlik için bulanık-dayanıklı (fuzzy-robust) denetleyici tasarlanmış, sistemin Matlab/Simulink modeli Şekil 5.2’deki gibi oluşturulmuş ve LMI kodları EK-1’de verilmiştir. Sistemin Durum değişkenlerinin grafikleri ise Şekil 5.3’te verilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı gibi  $\Delta R_a, \Delta K_m$  ve  $\Delta K_b$  belirsizliğini içeren sistemin kararlılığı sağlanmıştır. Dolayısıyla tasarlanan bulanık-dayanıklı denetleyicinin pratik olarak doğru çalıştığını ispatlamaktadır. Daha kompleks bir örnek için [71]’e bakılabilir.

$$K_1 = [2.6215e+03 \quad 906.3073 \quad 45.6639], K_2 = [2.6215e+03 \quad 906.3022 \quad 45.6637]$$



Şekil 5.2 Örnek 4.1’deki sistemin parametre belirsizliği halindeki Simulink modeli



Şekil 5.3 Örnek 5.1’deki sistemin çıkışı

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezimizde ele alınan konu güncel bir konu olarak değerlendirilmiştir. Günümüzde sanayide kullanılan kompleks sistemler lineerleştirme ve tanımlama teknolojileri kullanılarak modellerinin kurulması zor bir işlem olduğu için Takagi ve Sugeno tarafından sunulan multimodel yaklaşım bu zorlukları kısmen de olsa aradan kaldırmıştır. Bu tür multimodelleme işlemine Takagi Sugeno bulanık modeli adı verilir. Tezimizde aşağıdaki konular ele alınmıştır:

2. bölümde bulanık mantığa giriş, bulanık küme teorisi ve onun üzerindeki işlemler daha sonra ise bulanık mantık denetleyicilerin sınıflandırılması ve bu denetleyicilerin sanayi nesnelere kullanılması nedenleri verilmiştir. Genel olarak tezimizde yalnız model bazlı denetleyiciler ele alındığından T-S modeli kullanılarak denetleyicilerin tasarlanması irdelenmiştir.

3. bölümde T-S bulanık modelinin oluşturulması kontrol sisteminin modelinde rastgele oluşan nonlinear sektörlerin, paralel dağılımlı kompanzasyon (PDC), T-S bulanık modelinin evrensel yaklaşımının özellikleri, nonlinear dinamik sistemlerin T-S bulanık modeli temelinde aproksimasyonu verilmiştir. Tezimizin pratik sonucu olarak PDC'nin Matlab/Simulinkte gerçekleştirilmesi gösterilmiş ve tarafımızdan tasarlanmış Model Bazlı T-S Bulanık Mantık Modelleme Toolbox verilmiştir.

4. Bölümde model tabanlı bulanık mantık kontrol sistemlerinin kararlılık problemleri büyük önem taşıdığı için kararlılığın azı problemleri ile ilgili gereken teoremler ve ispatları verilmiştir. Genel olarak model tabanlı bulanık kontrol sistemlerinin kararlılığı Lyapunov yöntemine göre kararlılık analizi yapılmaktadır. Bu analizde bazı sinyallere pratikte karşılaşılan giriş ve çıkışının sınırlandırılmasına, başlangıç koşulundan bağımsızlığa ve bozucu etkinin giderilmesine göre kararlılık analizlerine ait teoremler ve ispatları verilmiş, bir DC motor tarafından dişli takımı aracılığı ile kontrol edilen ters sarkacın modeli Matlab/Simulink'te kurulmuş ve uygun LMI kodları da yazılmıştır. Alınan grafiksel sonuçlara göre aşağıdakileri söyleyebiliriz:

- Tasarlanan sistem  $v(t)_{\max} = 0.2$  değerini sistem çıkışında 0.04'e kadar indirerek bozucu girişin çıkıştaki etkisini yaklaşık %80 söndürmüştür.
- Bozucu giriş olarak  $v(t)_{\max} = 1$  sisteme uygulandığında ise çıkışta 0.3'e indiği ve bozucu girişin çıkıştaki etkisinin yaklaşık %70 söndürdüğü gözlenmiştir.

- Tasarlanan sistem bozucu girişlerin değerini sönümlerken aynı zamanda da kararlılığını korumuştur.

5. Bölümde T-S bulanık dayanıklılık problemi ele alınmış ve burada dayanıklılığın genel anlayışı, belirsizliklerin türleri ve sınıflandırılması, klasik dayanıklı kontrol sistemlerinin kararlılık anlayışı, belirsizliğe sahip olan T-S bulanık sistemlerinin kararlılık şartları ve kararlılığını temin eden teoremler ve ispatları verilmiştir. Bu teoremlerin gerçekliği bir DC motor tarafından dişli takımı aracılığı ile kontrol edilen ters sarkaç örneğinde gösterilmiş, nesnenin modeli Matlab/Simulink'te kurulmuş ve uygun LMI kodları da yazılmıştır. Alınan grafiksel sonuçlara göre aşağıdakileri söyleyebiliriz:

- $\Delta R_a, \Delta K_m$  ve  $\Delta K_b$  parametrelerinde belirsizlik olması durumuna göre tasarlanan sistem bu parametrelerin nominal değerlerinden  $\Delta R_a, \Delta K_m$  ve  $\Delta K_b$  değerindeki pertürbasyonların olması durumuna karşı dayanıklılık göstererek kararlılığını korumuştur.
- $R_a$ 'nın nominal değerinden %300 sapmasının,  $K_m$ 'in nominal değerinden %300 sapmasının ve  $K_b$ 'nin nominal değerinden %400 sapmasının tasarlanan sistemin kararlılığını etkilemediği grafiksel sonuçlarla ispatlanmıştır.

Pratik bakımdan tasarımcılar sadece donanım maliyetini azaltmazlar aynı zamanda sistem performansını da geliştirirler. Tezde sunulan yöntemler ve elde edilen durum değişkenlerinin grafiklerine göre şunu söyleyebiliriz: T-S bulanık kontrol yaklaşımı gereken kararlılığı sağlamıştır.

Elde edilen sonuçlar ve tasarlanmış yazılım sanayinin robotik kısmında, uçak sanayisinde, sinyallerin filtrelenmesinde, ekonometrinin bazı problemlerinde ve benzer başka alanlarda kullanılabilir. Gelecek araştırmalarda bu yaklaşımların donanımsal uygulaması da planlanmaktadır (PLC, PIC Microcontroller ve FPGA gibi donanımlar).

T-S bulanık kontrolün gelişimine ve birçok başarılı uygulamasına tanık olduk. Konuyla ilgili iki adet bilimsel yayın yapılmıştır [63, 64]. Bu başarıya karşılık bazı temel meselelerin, maliyet azaltılması, kuralların azaltılması ve tasarım prosedürünün basitleştirilmesi vs. gibi önemli meselelerin gelişimi sürmekte.



## KAYNAKLAR

- [1] Chiu S., Chand, S., Moore, D. and Chaudhary, A. (1991). Fuzzy logic for control of roll and moment for a flexible wing aircraft, *Control Systems, IEEE*, 11, pp. 42-48.
- [2] J. M. Jou P. Y. C., and S. F. Yang (2000). An Adaptive Fuzzy Logic Controller: Its VLSI Architecture and Applications, *IEEE Trans. VLSI Syst.*, 8, pp. 52-60.
- [3] Kickert W. J. M. and Lemke, H. R. V. N. (1976). Application of a Fuzzy Control in a Warm Water Plant, *Automatica*, 12, pp. 301-308.
- [4] LaMeres B. J. and Nehrir, M. H. (1999). Fuzzy logic based voltage controller for a synchronous generator, *Computer Applications in Power, IEEE*, 12, pp. 46-49.
- [5] Nguyen D. and Widrow, B. (1989). The truck backer-upper: an example of self-learning in neural networks, Vol. pp. 357-363 vol.2.
- [6] Prade D. D. a. H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, FL: Academic Press, Inc., Orlando.
- [7] Wang L. X. (1994). *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc.,
- [8] Y. Bai H. Z., and Z. S. Roth (2005). Fuzzy Logic Control to Suppress Noises and Coupling Effects in a Laser Tracking System, *IEEE Transaction Contr. Sys. Tech.*, 13, pp. 113-121.
- [9] Takagi T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics*, 15, pp. 116-156.
- [10] Tanaka T. and Sugeno, M. (1992). Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, *Fuzzy Sets & Systems*, 45, pp. 135-156.
- [11] Tanaka K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 6, pp. 250-265.
- [12] Wang H. O., Tanaka, K. and Griffin, M. (1995). Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi and Sugeno's Fuzzy Model, *Proceeding of FUZ-IEEE'95*, pp. 531-538.
- [13] Bor-Sen C., Chung-Shi, T. and Huey-Jian, U. (2000). Mixed  $H_2/H_\infty$  fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: an LMI approach, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8, pp. 249-265.
- [14] Chang W. J. (2001). Model-Based Fuzzy Controller-Design with Common Observability Gramian Assignment, *ASEM J. Dynam. Syst. Meas. & Contr*, 125, pp. 113-116.
- [15] Chang W. J. (2003). Fuzzy Controller-Design via the Inverse Solution of Lyapunov Equations, *ASEM J. Dynam. Syst. Meas. & Contr*, 125, pp. 42-47.
- [16] Doo Jin C. and PooGyeon, P. (2004). Guaranteed cost controller design for discrete-time switching fuzzy systems, *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 34, pp. 110-119.
- [17] Kiriakidis K., Grivas, A. and Tzes, A. (1998). Quadratic Stability Analysis of the Takagi-Sugeno Fuzzy Model, *Fuzzy Sets & Syst.*, 98, pp. 1-14.
- [18] Boyd S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- [19] Gahinet P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox*, The Math Work Inc.,
- [20] M. F. Azeem M. H., N. Ahmad (2000). Generalization of Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems, *IEEE Trans. Neural Networks*, 11, pp. 1332-1346.

- [21] Cao S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1996). Stability Analysis and Design for a Class of Continuous-Time Fuzzy Control-Systems, *Int. J. Contr.*, 64, pp. 1069-1087.
- [22] Tanaka K., Hori, S. and Wang, H. O. (2002). Multiobjective control of a vehicle with triple trailers, *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 7, pp. 357-368.
- [23] Tanaka K. and Kosaki, T. (1997). Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle, *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 27, pp. 552-558.
- [24] Tanaka K., Kosaki, T. and Wang, H. O. (1998). Backing control problem of a mobile robot with multiple trailers: fuzzy modeling and LMI-based design, *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, 28, pp. 329-337.
- [25] Tanaka K. and Sano, M. (1995). Trajectory Stabilization of a Model Car via Fuzzy Control, *Fuzzy Sets & Systems*, 70, pp. 155-170.
- [26] Gang F. (2004).  $H_\infty$  controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions, *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 34, pp. 283-292.
- [27] Gang F. and Dong, S. (2002). Generalized  $H_2$  controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions, *Vol. 1*, pp. 215-220.
- [28] Tanaka K., Hori, T. and Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 11, pp. 582-589.
- [29] Wang W. J. and Chung-Hsun, S. (2004). A relaxed stability criterion for T-S fuzzy discrete system, *Vol. 2*, pp. 937-942 *Vol.2*.
- [30] Taniguchi T., Tanaka, K., Ohtake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 9, pp. 525-538.
- [31] Bryan L. A. and Bryan, E. A. (1997). *Programmable Controllers: Theory and Implementation*, An Industrial Text Company Publication, Atlanta, Georgia, USA.
- [32] Chen G. and Pham, T. T. (2001). *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*, CRC Press, Washington, D.C.
- [33] G. J. Klir U. H. S. C., and B. Yuan (1997). *Fuzzy Set Theory: Foundations and Applications.*, Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.
- [34] S. N. Sivanandam S. S. a. S. N. D. (2007). *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*, Springer Berlin Heidelberg, New York.
- [35] Mamdani E. H. and Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, *International Journal of Man-Machine Studies*, 7, pp. 1-13.
- [36] Zadeh L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics*, 3, pp. 28-44.
- [37] Tanaka K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [38] Sugeno M. and Kang, G. T. (1986). Fuzzy Modeling and Control of Multilayer Incinerator, *Fuzzy Sets & Systems*, 18, pp. 329-346.
- [39] Wang H. O., Tanaka, K. and Griffin, M. F. (1995). An Analytical Framework of Fuzzy Modeling and Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, *Proc. 1995 American Control Conference*, Seattle, pp. 2272-2276.
- [40] Kang G., Lee, W. and Sugeno, M. (1998). Design of TSK fuzzy controller based on TSK fuzzy model using pole placement, *Vol. 1*, pp. 246-251 *vol.1*.

- [41] Wang H. O., Tanaka, K. and Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 4, pp. 14-23.
- [42] Tanaka K. and Sano, M. (1994). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 2, pp. 119-134.
- [43] Li J., Niemann, D. and Wang, H. O. (1998). Robust Tracking for High-Rise/High-Speed Elevators, *Proc. 1998 American Control Conference*, pp. 3445-3449.
- [44] Sung-Kyung H. (1998). Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed optimal  $H_\infty$  performance, *Vol. 1*, pp. 422-427 vol.1.
- [45] Cao S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1996). Fuzzy control of nonlinear continuous-time systems, *Vol. 1*, pp. 592-597 vol.1.
- [46] Hao Y. (1998). Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent, *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, 28, pp. 515-520.
- [47] Fantuzzi C. and Rovatti, R. (1996). On the approximation capabilities of the homogeneous Takagi-Sugeno model, *Vol. 2*, pp. 1067-1072 vol.2.
- [48] Babuska R. (1998). *Fuzzy Modeling and Identification Toolbox User's Guide*, Mathworks Inc.,
- [49] Babuska R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [50] Passino K. M. and Yurkovich, S. (1997). *Fuzzy Control*, Addison Wesley Longman, Inc., California.
- [51] Chand S. and Hansen, S. (1989). Energy Based Stability Analysis of a Fuzzy Roll Controller Design for a Flexible Aircraft Wing, *IEEE Proc. 28th Conf. Decision and Control, Florida*, pp. 705-709.
- [52] Langari G. and Tomizuka, M. (1990). Stability of Fuzzy Linguistic Control Systems, *IEEE Proc. 29th Conf. Decision and Control, Hawaii*, pp. 2185-2190.
- [53] Cao S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1994). Stability Analysis of Fuzzy Control Systems, *Proc. of 2nd Australian and New Zealand Conf. Int. Info. Syst., Australia*, pp. 219-223.
- [54] Abonyi J., Nagy, L. and Szeifert, F. (1997). Takagi-Sugeno fuzzy control of batch polymerization reactors, *Vol. pp. 251-255*.
- [55] Mannani A. and Talebi, H. A. (2003). A fuzzy Lyapunov-based control strategy for a macro-micro manipulator, *Vol. 1*, pp. 368-373 vol.1.
- [56] Mannani A. and Talebi, H. A. (2007). A Fuzzy Lyapunov-Based Control Strategy for a Macro&ndash;Micro Manipulator: Experimental Results, *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 15, pp. 375-383.
- [57] Khaber F., Zehar, K. and Hamzaoui, A. (2006). State Feedback Controller Design via Takagi-Sugeno Fuzzy Model: LMI Approach, *Int. J. Comp. Int.*, pp. 148-153.
- [58] Zadeh L. A. (2006). *Generalized Theory of Uncertainty (GTU) – Principal Concepts and Ideas*, *Comp. Stat. & Data Analysis*, pp.
- [59] Li J., Li, T. S. and Chen, C. Y. (2007). Design of Lyapunov Function Based Fuzzy Logic Controller for a Class of Discrete-Time Systems, *Int. Fuzzy Syst.*, pp. 1-7.
- [60] Basturk O. (2009). Lyapunov fonksiyonu tabanlı bulanık denetleyici tasarımı, *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi Sivas*, p. 104.
- [61] Reznik L. (1997). *Fuzzy Controllers*, Reed Educational and Professional Publishing Ltd, Oxford.

- [62] Boyd S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, Philadelphia.
- [63] Namazov M., Tekgun, B. and Celikkale, I. E. (2011). Design of Stable Takagi-Sugeno Fuzzy Control System via LMIs with Constraint on the Output, The Third Conference on Mathematical Sciences, Jordan, pp. 1989-1995.
- [64] Namazov M., Tekgun, B. and Celikkale, I. E. (2011). Design of a Stable Takagi-Sugeno Fuzzy Control System via LMIs with Constraint on the Input/Output & Initial State Independence, Second International Symposium on Computing in Science and Engineering, Kuşadası, Turkey, pp.
- [65] Namazov M. and Basturk, O. (2010). Computer Simulation of a Stable Takagi-Sugeno Fuzzy Control System Designed via Linear Matrix Inequalities, International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications, pp. 244-249.
- [66] Kuschewski J. G., Hui, S. and Zak, S. H. (1993). Application of Feedforward Neural Networks to Dynamical System Identification and Control, IEEE Trans. Cont. Sys. Tech., 1, pp.
- [67] Bellman R. (1997). Introduction to matrix analysis (2nd ed.), SIAM, Philadelphia.
- [68] Zhou K. (1999). Essentials of Robust Control, Prentice Hall,
- [69] Doyle J., Francis, B. and Tannenbaum, A. (1990). Feedback Control Theory, Macmillan Publishing Co.,
- [70] Tanaka K. and Sano, M. (1993). Concept of stability margin for fuzzy systems and design of robust fuzzy controllers, Vol. pp. 29-34 vol.1.
- [71] Song B., Ma, G. and Li, C. (2006). Robust fuzzy controller design for a rigid spacecraft attitude regulation system, Systems and Control in Aerospace and Astronautics, 2006. ISSCAA 2006. 1st International Symposium on, pp. 6 pp. - 429
- [72] Zhang F. (2005). The Schur Complement and Its Applications, Springer Science & Business Media, Inc., New York.
- [73] Haynsworth E. V. (1968). On the Schur Complement, Basel Mathematical Notes (University of Basel), University of Basel, Basel.

EK-1  
DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ  
MATLAB KODLARI

## DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ MATLAB KODLARI

Örnek 4.1 LMI kodu. Kararlılık şartlarını yerine getiren kontrol (Teorem 3).

```
% Model parametreleri
A1=[0 1 0;9.8 0 1;0 -10 -10]; B1=[0;0;10];
A2=[0 1 0;0 0 1;0 -10 -10]; B2=[0;0;10];
A3=A1+A2;
X0=[1;0;0];
% P, K1 ve K2'nin hesaplanması
setlmis([]);
X1=lmivar(2,[1 3]);
X2=lmivar(2,[1 3]);
Y=lmivar(1,[3 1]);
lmiterm([1 1 1 Y],A1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 X1],B1,-1,'s');
lmiterm([1 2 1 0],0);
lmiterm([1 2 2 0],-1);
lmiterm([2 1 1 Y],A3,1,'s');
lmiterm([2 1 1 X2],B1,-1,'s');
lmiterm([2 1 1 X1],B2,-1,'s');
lmiterm([2 2 1 0],0);
lmiterm([2 2 2 0],-1);
lmiterm([3 1 1 0],-1);
lmiterm([3 2 1 0],-X0);
lmiterm([3 2 2 Y],-1,1);
lmiterm([-4 1 1 Y],1,1);
lmis=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(lmis);
x1=dec2mat(lmis,xfeas,X1);
x2=dec2mat(lmis,xfeas,X2);
y=dec2mat(lmis,xfeas,Y);
P=inv(y);
K1=x1*P;
K2=x2*P;
```

Örnek 4.2 LMI kodu. Giriş değişkenine uygulanan sınırlandırma.(2 ve 4 kurallı model için) (Teorem 4)

```
%2 Kurallı model için
% Model parametreleri
A1=[0 1 0;9.8 0 1;0 -10 -10]; B1=[0;0;10];
A2=[0 1 0;0 0 1;0 -10 -10]; B2=[0;0;10];
A3=A1+A2;
X0=[1;0;0];
% P, K1 ve K2'nin hesaplanması
setlmis([]);
X1=lmivar(2,[1 3]);
X2=lmivar(2,[1 3]);
Y=lmivar(1,[3 1]);
lmiterm([1 1 1 Y],A1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 X1],B1,-1,'s');
lmiterm([1 2 1 0],0);
lmiterm([1 2 2 0],-1);
lmiterm([2 1 1 Y],A3,1,'s');
lmiterm([2 1 1 X2],B1,-1,'s');
lmiterm([2 1 1 X1],B2,-1,'s');
lmiterm([2 2 1 0],0);
lmiterm([2 2 2 0],-1);
lmiterm([3 1 1 0],-1);
lmiterm([3 2 1 0],-X0);
lmiterm([3 2 2 Y],-1,1);
lmiterm([4 1 1 Y],-1,1);
lmiterm([4 2 1 X1],-1,1);
lmiterm([4 2 2 0],-50*50);
lmiterm([5 1 1 Y],-1,1);
lmiterm([5 2 1 X2],-1,1);
lmiterm([5 2 2 0],-50*50);
lmiterm([-6 1 1 Y],1,1);
lmis=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(lmis);
x1=dec2mat(lmis,xfeas,X1);
x2=dec2mat(lmis,xfeas,X2);
y=dec2mat(lmis,xfeas,Y);
```

```

P=inv(y);
K1=x1*P;
K2=x2*P;

%4 Kurallı model, aynı zamanda kuadratik optimallık şartı için
% Model parametreleri
A1=[0 1;17.3 0]; B1=[0;-0.177];
A2=[0 1;9.36 0]; B2=[0;-0.005];
A3=[0 1;9.36 0]; B3=[0;0.005];
A4=[0 1;0 0]; B4=[0;0.177];
A12=A1+A2;
A34=A3+A4;
Q=[3 0;0 0]; SQ=sqrt(Q);
R=2; SR=sqrt(R);
% P, K1,K2, K3 ve K4'ün hesaplanması
setlmis([]);
X1=lmivar(2,[1 2]);
X2=lmivar(2,[1 2]);
X3=lmivar(2,[1 2]);
X4=lmivar(2,[1 2]);
Y=lmivar(1,[2 1]);
Z=lmivar(1,[2 1]);
lmiterm([1 1 1 Y],1,A1','s');
lmiterm([1 1 1 X1],B1,-1,'s');
lmiterm([1 2 1 Y],SQ,1);
lmiterm([1 2 2 0],-1);
lmiterm([1 3 1 X1],SR,1);
lmiterm([1 3 3 0],-1);
lmiterm([1 4 1 X2],SR,1);
lmiterm([1 4 4 0],-1);
lmiterm([1 5 1 X3],SR,1);
lmiterm([1 5 5 0],-1);
lmiterm([1 6 1 X4],SR,1);
lmiterm([1 6 6 0],-1);
lmiterm([2 1 1 Y],1,A2','s');
lmiterm([2 1 1 X2],B2,-1,'s');
lmiterm([2 2 1 Y],SQ,1);

```



```

lmiterm([2 2 2 0],-1);
lmiterm([2 3 1 X1],SR,1);
lmiterm([2 3 3 0],-1);
lmiterm([2 4 1 X2],SR,1);
lmiterm([2 4 4 0],-1);
lmiterm([2 5 1 X3],SR,1);
lmiterm([2 5 5 0],-1);
lmiterm([2 6 1 X4],SR,1);
lmiterm([2 6 6 0],-1);
lmiterm([3 1 1 Y],1,A3','s');
lmiterm([3 1 1 X3],B3,-1,'s');
lmiterm([3 2 1 Y],SQ,1);
lmiterm([3 2 2 0],-1);
lmiterm([3 3 1 X1],SR,1);
lmiterm([3 3 3 0],-1);
lmiterm([3 4 1 X2],SR,1);
lmiterm([3 4 4 0],-1);
lmiterm([3 5 1 X3],SR,1);
lmiterm([3 5 5 0],-1);
lmiterm([3 6 1 X4],SR,1);
lmiterm([3 6 6 0],-1);
lmiterm([4 1 1 Y],1,A4','s');
lmiterm([4 1 1 X4],B4,-1,'s');
lmiterm([4 2 1 Y],SQ,1);
lmiterm([4 2 2 0],-1);
lmiterm([4 3 1 X1],SR,1);
lmiterm([4 3 3 0],-1);
lmiterm([4 4 1 X2],SR,1);
lmiterm([4 4 4 0],-1);
lmiterm([4 5 1 X3],SR,1);
lmiterm([4 5 5 0],-1);
lmiterm([4 6 1 X4],SR,1);
lmiterm([4 6 6 0],-1);
lmiterm([5 1 1 Y],1,A12','s');
lmiterm([5 1 1 X1],B2,-1,'s');
lmiterm([5 1 1 X2],B1,-1,'s');
lmiterm([5 2 1 Y],SQ,1);

```

```

lmiterm([5 2 2 0],-1);
lmiterm([5 3 1 X1],SR,1);
lmiterm([5 3 3 0],-1);
lmiterm([5 4 1 X2],SR,1);
lmiterm([5 4 4 0],-1);
lmiterm([5 5 1 X3],SR,1);
lmiterm([5 5 5 0],-1);
lmiterm([5 6 1 X4],SR,1);
lmiterm([5 6 6 0],-1);
lmiterm([6 1 1 Y],1,A34','s');
lmiterm([6 1 1 X3],B4,-1,'s');
lmiterm([6 1 1 X4],B3,-1,'s');
lmiterm([6 2 1 Y],SQ,1);
lmiterm([6 2 2 0],-1);
lmiterm([6 3 1 X1],SR,1);
lmiterm([6 3 3 0],-1);
lmiterm([6 4 1 X2],SR,1);
lmiterm([6 4 4 0],-1);
lmiterm([6 5 1 X3],SR,1);
lmiterm([6 5 5 0],-1);
lmiterm([6 6 1 X4],SR,1);
lmiterm([6 6 6 0],-1);
lmiterm([-7 1 1 Z],1,1);
lmiterm([-7 2 1 0],1);
lmiterm([-7 2 2 Y],1,1);
lmiterm([-8 1 1 Y],1,1);
lmis=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(lmis);
x1=dec2mat(lmis,xfeas,X1);
x2=dec2mat(lmis,xfeas,X2);
x3=dec2mat(lmis,xfeas,X3);
x4=dec2mat(lmis,xfeas,X4);
y=dec2mat(lmis,xfeas,Y);
z=dec2mat(lmis,xfeas,Z);
P=inv(y);
K1=x1*P;
K2=x2*P;

```

```
K3=x3*P;  
K4=x4*P;
```

Örnek 4.3 LMI kodu. Çıkış değişkenine uygulanan sınırlandırma. (Teorem 5)

```
% Model parametreleri  
A1=[0 1 0;9.8 0 1;0 -10 -10]; B1=[0;0;10];  
A2=[0 1 0;0 0 1;0 -10 -10]; B2=[0;0;10];  
A3=A1+A2;  
X0=[1;0;0];  
Lambda=25;  
% P, K1 ve K2'nin hesaplanması  
setlmis([]);  
X1=lmivar(2,[1 3]);  
X2=lmivar(2,[1 3]);  
Y=lmivar(1,[3 1]);  
lmiterm([1 1 1 Y],A1,1,'s');  
lmiterm([1 1 1 X1],B1,-1,'s');  
lmiterm([1 2 1 0],0);  
lmiterm([1 2 2 0],-1);  
lmiterm([2 1 1 Y],A3,1,'s');  
lmiterm([2 1 1 X2],B1,-1,'s');  
lmiterm([2 1 1 X1],B2,-1,'s');  
lmiterm([2 2 1 0],0);  
lmiterm([2 2 2 0],-1);  
% Çıkışa uygulanan sınırlama  
lmiterm([3 1 1 0],-1);  
lmiterm([3 2 1 0],-X0);  
lmiterm([3 2 2 Y],-1,1);  
lmiterm([4 1 1 Y],-1,1);  
lmiterm([4 2 1 X1],1,1,'s');  
lmiterm([4 2 2 0],-Lambda^2)  
%Y>0 sarti  
lmiterm([-6 1 1 Y],1,1);  
lmis=getlmis;  
[tmin,xfeas]=feasp(lmis);  
x1=dec2mat(lmis,xfeas,X1);
```

```

x2=dec2mat(lmis,xfeas,X2);
y=dec2mat(lmis,xfeas,Y);
P=inv(y);
K1=x1*P;
K2=x2*P;

```

Örnek 4.4 LMI kodu. Giriş ve çıkışta sınırlandırma olan ve başlangıç koşulundan bağımsız olan sistem. (Teorem 6)

```

clc
clear all
% Model parametreleri
A1=[0 1 0;9.8 0 1;0 -10 -10]; B1=[0;0;10];
A2=[0 1 0;0 0 1;0 -10 -10]; B2=[0;0;10];
A3=A1+A2;
C1=[1 0 0];
C2=[1 0 0];
X0=[1;0;0];
Lambda=50;%
Mu=50;
Fi=10;
% P, K1 ve K2'nin hesaplanması
setlmis([]);
X1=lmivar(2,[1 3]);
X2=lmivar(2,[1 3]);
Y=lmivar(1,[3 1]);
lmiterm([1 1 1 Y],A1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 X1],B1,-1,'s');
lmiterm([1 1 2 0],0);
lmiterm([1 2 2 0],-1);
lmiterm([2 1 1 Y],A2,1,'s');
lmiterm([2 1 1 X2],B2,-1,'s');
lmiterm([2 1 2 0],0);
lmiterm([2 2 2 0],-1);
lmiterm([3 1 1 Y],A3,1,'s');
lmiterm([3 1 1 X1],B2,-1,'s');
lmiterm([3 1 1 X2],B1,-1,'s');

```

```

lmiterm([3 1 2 0],0)
lmiterm([3 2 2 0],-1);
% Çıkışa uygulanan sınırlama
lmiterm([4 1 1 0],-1);
lmiterm([4 2 1 0],-X0);
lmiterm([4 2 2 Y],-1,1);
lmiterm([5 1 1 Y],-1,1);
lmiterm([5 2 1 Y],-C1,1);
lmiterm([5 2 2 0],-Lambda^2)
lmiterm([11 1 1 Y],-1,1);
lmiterm([11 2 1 Y],-C2,1);
lmiterm([11 2 2 0],-Lambda^2)
% Girişe uygulanan sınırlama
lmiterm([6 1 1 0],-1);
lmiterm([6 2 1 0],-X0);
lmiterm([6 2 2 Y],-1,1);
lmiterm([7 1 1 Y],-1,1);
lmiterm([7 2 1 X1],-1,1);
lmiterm([7 2 2 0],-Mu*Mu);
lmiterm([8 1 1 Y],-1,1);
lmiterm([8 2 1 X2],-1,1);
lmiterm([8 2 2 0],-Mu*Mu);
%Başlangıç durumundan bağımsızlık şartı
lmiterm([9 1 1 0],-1);
lmiterm([9 2 1 0],-X0);
lmiterm([9 2 2 0],-Fi*Fi);
% Y>0 Şartı
lmiterm([-10 1 1 Y],1,1);
lmis=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(lmis);
x1=dec2mat(lmis,xfeas,X1);
x2=dec2mat(lmis,xfeas,X2);
y=dec2mat(lmis,xfeas,Y);
P=inv(y);
K1=x1*P;
K2=x2*P;

```

#### Örnek 4.5 LMI kodu. Bozucu etkilerin giderilmesi. (Teorem 7)

```
clc
clear all
% Model parametreleri
A1=[0 1 0;9.8 0 1;0 -10 -10]; B1=[0;0;10];
A2=[0 1 0;0 0 1;0 -10 -10]; B2=[0;0;10];
A3=A1+A2;
X0=[1;0;0];
C1=[1 0 0];C2=[1 0 0];
E1=[1; 0; 0];
E2=[0; 1; 0];
I=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
Gamma=1000;
% P, K1 ve K2'nin hesaplanması
setlmiis([]);
X1=lmivar(2,[1 3]);
X2=lmivar(2,[1 3]);
Y=lmivar(1,[3 1]);
lmiterm([1 1 1 Y],(1/2)*A1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 X2],(-1/2)*B1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 Y],(1/2)*A1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 X1],(-1/2)*B2,1,'s');
lmiterm([1 1 2 0],(1/2)*(E1-E2));
lmiterm([1 1 3 Y],(1/2),(C1-C2)');
lmiterm([1 2 1 0],(1/2)*(E1-E2)');
lmiterm([1 2 2 0],Gamma^2);
lmiterm([1 2 3 0],0);
lmiterm([1 3 1 Y],(1/2)*(C1-C2),1);
lmiterm([1 3 2 0],0);
lmiterm([1 3 3 0],I);
% Y>0 Şartı
lmiterm([-2 1 1 Y],1,1);
lmiis=getlmiis;
[tmin,xffeas]=feasp(lmiis);
x1=dec2mat(lmiis,xffeas,X1);
x2=dec2mat(lmiis,xffeas,X2);
y=dec2mat(lmiis,xffeas,Y);
```

```

P=inv(y);
K1=x1*P;
K2=x2*P;

```

Örnek 5.1 LMI kodu. Bulanık-Dayanıklılık şartının yerine getirilmesi. (Teorem 10)

```

clear
clc
% Model parametreleri
A1=[0 1 0;9.8 0 1;0 -10 -10]; B1=[0;0;10];
A2=[0 1 0;0 0 1;0 -10 -10]; B2=[0;0;10];
X0=[1;0;0];
D1a=[0 0 0;0 0 -0.4;0 -0.6 4];
D1b=[0;0;0];
D2a=[0 0 0;0 0 -0.4;0 -0.8 4];
D2b=[0;0;0];
E1a=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
E1b=[1];
E2a=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
E2b=[1];
s=2;
gamma1a=0.5;
gamma1b=0.5;
gamma2a=0.5;
gamma2b=0.5;
z=zeros(3);
setlmiis([]);
X1=lmivar(2,[1 3]);
X2=lmivar(2,[1 3]);
Y=lmivar(1,[3 1]);
N0=lmivar(1,[3 1]);
% Sii+(s+1)N1<0 hesaplanması
lmiterm([1 1 1 Y],A1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 X1],-B1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 N0],(s-1),1);
lmiterm([1 1 2 0],D1a);
lmiterm([1 1 3 0],D1b);

```

```

lmiterm([1 1 4 Y],1,E1a');
lmiterm([1 1 5 -X1],-1,E1b');
lmiterm([1 2 2 0],-eye(3));
lmiterm([1 2 3 0],z);
lmiterm([1 2 4 0],z);
lmiterm([1 2 5 0],z);
lmiterm([1 3 3 0],-1);
lmiterm([1 3 4 0],z);
lmiterm([1 3 5 0],z);
lmiterm([1 4 4 0],-gamma1a^2);
lmiterm([1 4 5 0],z);
lmiterm([1 5 5 0],-gamma1b^2);
lmiterm([2 1 1 Y],A2,1,'s');
lmiterm([2 1 1 X2],-B2,1,'s');
lmiterm([2 1 1 N0],(s-1),1);
lmiterm([2 1 2 0],D2a);
lmiterm([2 1 3 0],D2b);
lmiterm([2 1 4 Y],1,E2a');
lmiterm([2 1 5 -X2],-1,E2b');
lmiterm([2 2 2 0],-eye(3));
lmiterm([2 2 3 0],z);
lmiterm([2 2 4 0],z);
lmiterm([2 2 5 0],z);
lmiterm([2 3 3 0],-1);
lmiterm([2 3 4 0],z);
lmiterm([2 3 5 0],z);
lmiterm([2 4 4 0],-gamma2a^2);
lmiterm([2 4 5 0],z);
lmiterm([2 5 5 0],-gamma2b^2);
% Tij-2N2<0 hesaplanması
lmiterm([3 1 1 Y],A1,1,'s');
lmiterm([3 1 1 Y],A2,1,'s');
lmiterm([3 1 1 X2],-B1,1,'s');
lmiterm([3 1 1 X1],-B2,1,'s');
lmiterm([3 1 1 N0],-2*(s-1),1,'s');
lmiterm([3 1 2 0],D1a);
lmiterm([3 1 3 0],D1b);

```



```

lmiterm([3 1 4 0],D2a);
lmiterm([3 1 5 0],D2b);
lmiterm([3 1 6 Y],1,E1a');
lmiterm([3 1 7 -X2],-1,E1b');
lmiterm([3 1 8 Y],1,E1b');
lmiterm([3 1 9 -X1],-1,E2b');
lmiterm([3 2 2 0],-eye(3));
lmiterm([3 2 3 0],z);
lmiterm([3 2 4 0],z);
lmiterm([3 2 5 0],z);
lmiterm([3 2 6 0],z);
lmiterm([3 2 7 0],z);
lmiterm([3 2 8 0],z);
lmiterm([3 2 9 0],z);
lmiterm([3 3 3 0],-1);
lmiterm([3 3 4 0],z);
lmiterm([3 3 5 0],z);
lmiterm([3 3 6 0],z);
lmiterm([3 3 7 0],z);
lmiterm([3 3 8 0],z);
lmiterm([3 3 9 0],z);
lmiterm([3 4 4 0],-eye(3));
lmiterm([3 4 5 0],z);
lmiterm([3 4 6 0],z);
lmiterm([3 4 7 0],z);
lmiterm([3 4 8 0],z);
lmiterm([3 4 9 0],z);
lmiterm([3 5 5 0],-1);
lmiterm([3 5 6 0],z);
lmiterm([3 5 7 0],z);
lmiterm([3 5 8 0],z);
lmiterm([3 5 9 0],z);
lmiterm([3 6 6 0],-gamma2a^2*eye(3));
lmiterm([3 6 7 0],z);
lmiterm([3 6 8 0],z);
lmiterm([3 6 9 0],z);
lmiterm([3 7 7 0],-gamma1b^2);

```

```

lmiterm([3 7 8 0],z);
lmiterm([3 7 9 0],z);
lmiterm([3 8 8 0],[-gamma2a^2*eye(3)]);
lmiterm([3 8 9 0],z);
lmiterm([3 9 9 0],[-gamma2b^2]);
%Y>0
lmiterm([-4 1 1 Y],1,1);
%N0>=0
lmiterm([-5 1 1 N0],1,1);
lmis=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(lmis);
x1=dec2mat(lmis,xfeas,X1);
x2=dec2mat(lmis,xfeas,X2);
y=dec2mat(lmis,xfeas,Y);
n0=dec2mat(lmis,xfeas,N0);
P=inv(y);
% Q0=P*n0*P;
K1=x1*P;
K2=x2*P;

```

EK-2  
SCHUR TÜMLEYENİ

## SCHUR TÜMLEYENİ

Bu tamamen sayısal analizdeki Schur tümleyeni ile ilgili değildir. Lineer cebirde ve matris teorisinde, bir matris bloğunun Schur tümleyeni (yani büyük bir matrisin alt matrisi) aşağıdaki gibi tanımlanır [67].  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $D$  sırasıyla  $p \times p$ ,  $p \times q$ ,  $q \times p$  ve  $q \times q$  matrislerdir ve  $D$  terslenebilirdir.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla  $M$   $(p+q) \times (p+q)$  matristir.

O halde  $M$  matrisinin  $D$  bloğunun Schur tümleyeni  $p \times p$  matristir.

$$A - BD^{-1}C$$

Issai Schur, Schur Lemma'sını ispatladıktan sonra bu isimle anıldı, ancak bu söylem daha önce de kullanılmıştır [72]. Emilie Haynsworth Schur tümleyeni ifadesini kullanan ilk isimdir [73].

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Burak TEKGÜN
Doğum Yeri ve Tarihi	Sivas, 01/08/1985
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik- Elektronik Mühendisliği Bölümü, 58140-Sivas
E-posta Adresi	<a href="mailto:btekgun@cumhuriyet.edu.tr">btekgun@cumhuriyet.edu.tr</a>

### Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Sivas Cumhuriyet Anadolu Lisesi, 2003
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2008

### İş Tecrübesi

Cumhuriyet Üniversitesi Araştırma görevlisi, 2010-