T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ZAYIF I_{rg}-KAPALILAR AİLESİ VE I_g-AÇIKLAR AİLESİ ÜZERİNE

Sena ÖZEN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **23/05/2012**

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

SENA ÖZEN tarafından **DOÇ. DR. ERDAL EKİCİ** yönetiminde hazırlanan "**ZAYIF I_{rg}-KAPALILAR AİLESİ VE I_g-AÇIKLAR AİLESİ ÜZERİNE"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ
Danışman

Prof. Dr. Ahmet ERDEM Jüri Üyesi	Prof. Dr. Yakup HACI Jüri Üyesi
Doç. Dr. Oya ÖZBAKIR Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. İlhan HACIOĞLU Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 23/05/2012

Prof. Dr. İsmet KAYA
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Sena ÖZEN

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun destek ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Sn. Doç. Dr. Erdal EKİCİ' ye, değerli hocalarım Sn. Prof. Dr. Ahmet ERDEM ve Sn. Yrd. Doç. Dr. İlhan HACIOĞLU' na ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sena ÖZEN

ÖZET

ZAYIF I_{rg}-KAPALILAR AİLESİ VE I_g-AÇIKLAR AİLESİ ÜZERİNE

Sena ÖZEN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman : Doç. Dr. Erdal EKİCİ
23/05/2012, 83

Bu tezde, ideal topolojik uzaylarda zayıf I_{rg}-açık kümeler olarak adlandırılan τ^* dan daha genel bir sınıf sunulmuş ve ideal topolojik uzaylarda zayıf I_{rg}-kapalı kümeler kavramı çalışılmıştır. Zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin ilişkileri ve çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

Bu tezdeki ana amaçlardan biri de ideal topolojik uzaylarda I_g-kapalı kümelere ilişkili olarak yakın kapalılık ve yakın süreklilik kavramlarının sunulması ve çalışılmasıdır. Yakın kapalılık ile I_g-kapalı kümeler arasındaki ilişkiler, yakın süreklilik ile I_g-kapalı kümeler arasındaki ilişkiler ve üstelik yakın kapalılık ve yakın sürekliliğin çeşitli özellikleri araştırılmıştır. I_g-süreklilik ve yakın kapalılık altında herhangi bir I_g-kapalı kümenin ters görüntüsünün I_g-kapalı olduğu ve yakın süreklilik ve $\star$-kapalılık altında herhangi bir I_g-kapalı kümenin görüntüsünün I_g-kapalı olduğu gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler : zayıf I_{rg}-kapalı küme, I_g-kapalı küme, ön$_I^*$-kapalı küme, zayıf I_{rg}-açık küme, I_g-açık küme.

ABSTRACT

ON THE FAMILY OF WEAKLY I_{rg}-CLOSED SETS AND THE FAMILY OF I_g-OPEN SETS

Sena ÖZEN
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School
Mathematics Dissertation, Ph. D.
Advisor : Assoc. Prof. Dr. Erdal EKİCİ
23/05/2012, 83

In this thesis, a generalized class of τ^* called weakly I_{rg}-open sets in ideal topological spaces is introduced and the notion of weakly I_{rg}-closed sets in ideal topological spaces is studied. The relationships of weakly I_{rg}-closed sets and various properties of weakly I_{rg}-closed sets are investigated.

Another aim of this thesis is to introduce and study the notions of rough closedness and rough continuity with related to I_g-closed sets in ideal topological spaces. The relationships between rough closedness, I_g-closed sets and between rough continuity, I_g-closed sets and also various properties of rough closedness and rough continuity are investigated. It is shown in the present thesis that the inverse image of any I_g-closed set under I_g-continuity and rough closedness is I_g-closed and the image of any I_g-closed set under rough continuity and ★-closedness is I_g-closed.

Keywords : weakly I_{rg}-closed set, I_g-closed set, pre_I^*-closed set, weakly I_{rg}-open set, I_g-open set.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İdeal topolojik uzaylar üzerine birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları Hamlett ve Rose (1990); Janković ve Hamlett (1992); Navaneethakrishnan ve Sivaraj (2010); Vaidyanathaswamy (1945); Mukherjee ve ark. (2007) v.b. dir.

Dontchev ve arkadaşları 1999 yılında ideal topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalılık kavramını çalışmışlardır ve ideal topolojik uzaylarda I_g-kapalı kümeleri sunmuşlardır.

2008 yılında Navaneethakrishnan ve Joseph, ideal topolojik uzaylarda I_g-kapalı kümelerin özelliklerini çalışmışlardır. Aynı zamanda I_g-açık kümeler aracılığıyla normal uzayların bazı karakterizasyonlarını çalışmışlardır.

2009 yılında Navaneethakrishnan ve arkadaşları mildly normal uzayların bazı yeni karakterizasyonlarını elde etmek için I_{rg}-açık kümeleri sunmuşlardır.

Açıkgöz ve Yüksel de 2007 yılında ideal topolojik uzaylarda $I-R$ kapalı küme kavramını sunmuşlardır.

Bu kümeler arasındaki ilişkiye bakıldığında her $I-R$ kapalı kümenin $\star$-kapalı bir küme olduğu, her $\star$-kapalı kümenin I_g-kapalı bir küme olduğu ve üstelik her I_g-kapalı kümenin de I_{rg}-kapalı bir küme olduğu literatürde yer almaktadır.

Bu tezdeki ana amaçlardan biri ideal topolojik uzaylarda zayıf I_{rg}-açık kümeler olarak adlandırılan τ^* ın bir genelleştirilmiş sınıfını sunmak ve ideal topolojik uzaylarda zayıf I_{rg}-kapalı kümeler kavramını çalışmaktır.

Üstelik τ^* ın bu genelleştirilmiş sınıfı I_g-açık kümeleri, I_{rg}-açık kümeleri ve ön$_I^*$-açık kümelerini genelleştirir. Ayrıca zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin ilişkileri ve çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

Bu tezdeki ana amaçlardan bir diğeri ise ideal topolojik uzaylarda I_g-kapalı kümelere ilişkili olarak yakın kapalılık ve yakın süreklilik kavramlarının sunulması ve çalışılmasıdır.

Yakın kapalılık ile I_g-kapalı kümeler arasındaki ilişkiler, yakın süreklilik ile I_g-kapalı kümeler arasındaki ilişkiler ve üstelik yakın kapalılık ve yakın sürekliliğin çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

İlk bölümde tezimizle ilgili ön bilgiler sunulmaktadır.

2. Bölümde tezimiz içinde gerekli olan ve kullanılacak olan temel tanım ve teoremler sunulmaktadır.

3. Bölümde ideal topolojik uzaylarda zayıf I_{rg}-kapalı küme kavramı sunulmuş ve bu kümelerin bazı karakterizasyonları verilmiştir. Zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin diğer kümelerle olan ilişkileri araştırılmıştır.

Her $I-R$ kapalı küme $\star$-kapalı bir kümedir. Ancak tersinin doğru olmadığı literatürde mevcuttur.

$\star$-kapalı kümeler ile 1999 yılında Dontchev ve arkadaşları tarafından sunulan I_g-kapalı kümeler karşılaştırıldığında her $\star$-kapalı kümenin I_g-kapalı bir küme olduğu ve bu ifadenin de tersinin doğru olmadığı literatürde yer almaktadır.

Navaneethakrishnan ve arkadaşları tarafından 2009 yılında ideal topolojik uzaylarda I_{rg}-kapalı küme kavramı tanımlanmıştır. Her I_g-kapalı küme I_{rg}-kapalı bir kümedir. Ancak bu ifadenin de tersinin doğru olmadığı literatürde yer almaktadır.

Diğer yandan bu tez çalışmamızda her I_{rg}-kapalı bir kümenin zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olduğu elde edilmektedir. Ancak bu ifadenin tersinin doğru olmadığı bir örnek ile gösterilmektedir.

2011 yılında Ekici tarafından ideal topolojik uzaylarda ön$^*_I$-kapalı küme kavramı sunulmuştur. Tez çalışmamızda her ön$^*_I$-kapalı bir kümenin zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olduğu elde edilmiş ancak bu ifadenin de tersinin doğru olmadığı gösterilmiştir.

Öte yandan bir ideal topolojik uzayda düzenli açık ve zayıf I_{rg}-kapalı bir kümenin $\star$-kapalı küme olduğu elde edilmiştir.

Bir ideal topolojik uzayda alınan zayıf I_{rg}-kapalı bir G kümesi için $(Int(G))^* \setminus G$ kümesinin boş kümeden farklı düzenli kapalı küme kapsamadığı gösterilmiştir.

Üstelik ideal topolojik uzaydaki zayıf I_{rg}-kapalı bir G kümesi için $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesinin de boş kümeden farklı düzenli kapalı küme kapsamadığı elde edilmiş ve bunun tersinin doğru olmadığı bir örnek ile gösterilmiştir.

İdeal topolojik uzayda alınan bir G kümesi için $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesinin boş kümeden farklı $\star$-kapalı küme kapsamaması durumunda bu G kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olduğu ispatlanmıştır.

Aynı zamanda ideal topolojik uzaydaki bir G zayıf I_{rg}-kapalı kümesi için $G \cup (X \setminus (Int(G))^*)$ kümesinin de bu ideal topolojik uzayda zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olduğu gösterilmiştir.

Buradan ideal topolojik uzayın herhangi bir G alt kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olması durumunda $(Int(G))^* \setminus G$ kümesinin bu uzayda zayıf I_{rg}-açık küme olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

4. Bölümde zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin önemli özellikleri araştırılmış ve sunulmuştur.

İdeal topolojik uzayda alınan bir G zayıf I_{rg}-kapalı kümesi için $G \subset H \subset Cl^*(Int(G))$ koşulunu sağlayan H kümesinin de bir zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğu elde edilmiştir.

Buradan zayıf I_{rg}-kapalı ve açık bir G kümesi için $Cl^*(G)$ kümesinin de zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Öte yandan bir ideal topolojik uzaydaki hiçbir yerde yoğun olmayan kümenin zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğu ispatlanmış ancak tersinin doğru olmadığı bir örnek ile gösterilmiştir.

Ayrıca ideal topolojik uzaydaki iki zayıf I_{rg}-kapalı kümenin arakesitlerinin ve iki zayıf I_{rg}-kapalı kümenin birleşimlerinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olmadıkları örneklerle gösterilmiştir.

5. Bölümde ideal topolojik uzaylarda zayıf I_{rg}-açık kümelerin bazı karakterizasyonları verilmiş ve bu kümelerin özellikleri araştırılmıştır.

İki zayıf I_{rg}-açık kümenin arakesitlerinin ve iki zayıf I_{rg}-açık kümenin birleşimlerinin zayıf I_{rg}-açık küme olmadıkları birer örnek ile gösterilmiştir.

Bir ideal topolojik uzayın herhangi bir G alt kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olması durumunda $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesinin bu uzayda zayıf I_{rg}-açık küme olduğu gösterilmiştir.

Bir ideal topolojik uzaydaki zayıf I_{rg}-açık bir G alt kümesi için $Int^*(Cl(G)) \subset H \subset G$ koşulunu sağlayan H kümesinin de bir zayıf I_{rg}-açık küme olduğu gösterilmiştir.

Buradan zayıf I_{rg}-açık ve kapalı bir G kümesi için $Int^*(G)$ kümesinin de zayıf I_{rg}-açık küme olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

6. Bölümde ideal topolojik uzaylarda yakın kapalılık kavramı sunulmuş ve yakın kapalılığın çeşitli karakterizasyonları verilmiştir. I_g-süreklilik ve yakın kapalılık altında herhangi bir I_g-kapalı kümenin ters görüntüsünün I_g-kapalı olduğu gösterilmiştir.

Buradan I_g-süreklilik ve yakın kapalılık altında herhangi bir I_g-açık kümenin ters görüntüsünün I_g-açık olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Aynı zamanda I_g-süreklilik ve kapalılık altında herhangi bir I_g-kapalı kümenin ters görüntüsünün I_g-kapalı olduğu ve yine buradan I_g-süreklilik ve kapalılık altında herhangi bir I_g-açık kümenin ters görüntüsünün I_g-açık olduğu elde edilmiştir.

Öte yandan bir ideal topolojik uzaydaki herhangi bir kapalı kümenin bir f fonksiyonu altındaki görüntüsünün $\star$-açık olması durumunda bu f fonksiyonunun yakın kapalı bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir.

İki yakın kapalı fonksiyonun bileşkesinin yakın kapalı bir fonksiyon olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Devamında kapalı bir fonksiyon ile yakın kapalı bir fonksiyonun bileşkesinin yakın kapalı bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir.

Bununla birlikte $\star$-açık fonksiyon ve I_g-kararsız fonksiyon kavramları verilip, yakın kapalı bir fonksiyon ile $\star$-açık ve I_g-kararsız bir fonksiyonun bileşkesinin yakın kapalı bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca yakın kapalı bir fonksiyonun herhangi bir kısıtlanmışının yakın kapalı bir fonksiyon olmadığı bir örnekle gösterilmiş olup yakın kapalı bir fonksiyonun herhangi bir kapalı kümeye kısıtlanmışının yakın kapalı bir fonksiyon olduğu elde edilmiştir.

Son bölümde ise ideal topolojik uzaylarda yakın süreklilik kavramı sunulmuştur. Yakın sürekliliğin çeşitli karakterizasyonları araştırılmıştır.

Aynı zamanda yakın süreklilik ve $\star$-kapalılık altında herhangi bir I_g -kapalı kümenin görüntüsünün I_g -kapalı olduğu gösterilmiştir.

Buradan süreklilik ve $\star$-kapalılık altında herhangi bir I_g -kapalı kümenin görüntüsünün I_g -kapalı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Diğer yandan bir ideal topolojik uzaydaki herhangi bir açık kümenin ters görüntüsünün $\star$-kapalı olması durumunda bu fonksiyonun yakın sürekli bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra iki yakın sürekli fonksiyonun bileşkesinin yakın sürekli bir fonksiyon olmadığı bir örnekle gösterilmiştir. Devamında yakın sürekli bir fonksiyon ile sürekli bir fonksiyonun bileşkesinin yakın sürekli bir fonksiyon olduğu elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tez boyunca (X,τ) ile topolojik uzay ve bu uzay da ayırma aksiyomlarının kabul edilmediği uzay olarak ifade edilecektir.

Bir (X,τ) topolojik uzayının bir U alt kümesi için $Cl(U)$ ve $Int(U)$ ile sırasıyla (X,τ) uzayında U kümesinin kapanışı ve içi gösterilecektir.

Tanım 2.1. (X,τ) topolojik uzay olsun. X kümesinin alt kümelerinin boştan farklı ailesi olan I aşağıdaki koşulları sağlıyorsa I ailesine X üzerinde bir ideal denir

(1) $U \in I$ ve $V \subset U$ ise $V \in I$,

(2) $U \in I$ ve $V \in I$ ise $U \cup V \in I$

(Kuratowski, 1966).

Tanım 2.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve I ailesi de bu uzay üzerinde bir ideal olsun. $P(X)$, X' in tüm alt kümelerinin kümesi olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanan

$$(.)^* : P(X) \rightarrow P(X)$$

küme operatörüne U kümesinin τ topolojisi ve I idealine göre yerel fonksiyonu denir (Kuratowski, 1966).

$U \subset X$ alalım.

$$U^*(I,\tau) = \{\, x \in X : \ \forall \ V \in \tau(x) \text{ için } V \cap U \notin I \,\}$$

olarak tanımlanır.

Burada

$$\tau(x) = \{V \in \tau : x \in V\}$$

dir.

Kısaca $U^*(I,\tau)$ yerine U^* yazacağız. (Kuratowski, 1966).

Tanım 2.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve I ailesi de bu uzay üzerinde bir ideal olsun. τ topolojisinden daha ince olan ve ★-topoloji olarak adlandırılan $\tau^*(I,\tau)$ topolojisi için $Cl^*(.)$ Kuratowski kapanış operatörü

$$Cl^*(U) = U \cup U^*(I,\tau)$$

olarak tanımlanır (Janković ve Hamlett, 1990).

Kısaca $\tau^*(I,\tau)$ yerine τ^* yazacağız.

I, X üzerinde bir ideal ise bu durumda (X,τ,I) uzayına ideal topolojik uzay denir (Janković ve Hamlett, 1990).

Tanım 2.4. Bir (X,τ) topolojik uzayının bir V alt kümesi verilsin. G kümesi (X,τ) uzayında açık küme olmak üzere $V \subset G$ olduğunda $Cl(V) \subset G$ oluyorsa V kümesine g-kapalı küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.5. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $U \subset X$ olsun. V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında açık küme olmak üzere $U \subset V$ olduğunda $U^* \subset V$ oluyorsa U kümesine I_g-kapalı küme denir (Dontchev ve ark., 1999).

Tanım 2.6. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $U \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus U$ kümesi I_g-kapalı ise U kümesine I_g-açık küme denir (Dontchev ve ark., 1999).

Teorem 2.7. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $U \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) U kümesi I_g -kapalıdır.

(2) V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında açık küme olmak üzere $U \subset V$ olduğunda $Cl^*(U) \subset V$ dir (Navaneethakrishnan ve Joseph, 2008).

Teorem 2.8. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $U \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) U kümesi I_g -açıktır.

(2) K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı küme olmak üzere $K \subset U$ olduğunda $K \subset Int^*(U)$ dır

(Navaneethakrishnan ve Joseph, 2008).

Tanım 2.9. (X,τ) bir topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer

$$S = Int(Cl(S))$$

ise S kümesine düzenli açık küme denir (Stone, 1937).

Tanım 2.10. (X,τ) bir topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer

$$S = Cl(Int(S))$$

ise S kümesine düzenli kapalı küme denir (Stone, 1937).

Tanım 2.11. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. T kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında düzenli açık küme olmak üzere $S \subset T$ olduğunda $S^* \subset T$ oluyorsa S kümesine I_{rg}-kapalı küme denir (Navaneethakrishnan ve ark., 2009).

Tanım 2.12. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus S$

kümesi I_{rg} -kapalı ise S kümesine I_{rg} -açık küme denir

(Navaneethakrishnan ve ark., 2009).

Teorem 2.13. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) S kümesi I_{rg} -açıktır.

(2) T kümesi düzenli kapalı küme olmak üzere $T \subset S$ olduğunda $T \subset Int^*(S)$ dir.

(Navaneethakrishnan ve ark., 2009)

Tanım 2.14. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyon olsun. (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her S ★-açık kümesi için $f^{-1}(S)$ ★-açık küme ise $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonuna ★-süreklidir denir (Hamlett ve Rose, 1990).

Uyarı 2.15. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. τ_S topolojisi S üzerindeki alt uzay topolojisi ve

$$I_S = \{S \cap I' : I' \in I\}$$

olmak üzere

$$(S,\tau_S,I_S)$$

ideal topolojik uzaydır (Janković ve Hamlett, 1990).

Tanım 2.16. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer

$$A \subset Int^*(Cl(A))$$

ise A kümesine ön$_I^*$-açık küme denir (Ekici, 2011 a).

Tanım 2.17. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer $X\setminus A$ ön$_I^*$-açık küme ise A kümesine ön$_I^*$-kapalı küme denir (Ekici, 2011 a).

Tanım 2.18. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer

$$A=Cl^*(Int(A))$$

ise A kümesine $I-R$ kapalı küme denir (Açıkgöz ve Yüksel, 2007).

BÖLÜM 3

ZAYIF I_{rg}-KAPALI KÜMELER

Bu bölümde ideal topolojik uzaylarda zayıf I_{rg}-kapalı küme olarak adlandırılan bir küme kavramı sunulmuş ve çalışılmıştır. Bu kümelerin çeşitli karakterizasyonları verilmiştir. Zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin bazı özellikleri ve diğer kümelerle olan ilişkileri incelenmiştir.

Bir ideal topolojik uzayda düzenli açık ve zayıf I_{rg}-kapalı bir kümenin ★-kapalı küme olduğu gösterilmiştir.

Herhangi bir ideal topolojik uzayın zayıf I_{rg}-kapalı bir G alt kümesi için $(Int(G))^* \setminus G$ kümesinin boş kümeden farklı düzenli kapalı küme kapsamadığı elde edilmiştir.

Üstelik bir ideal topolojik uzayın zayıf I_{rg}-kapalı bir G alt kümesi için $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesinin de boş kümeden farklı düzenli kapalı küme kapsamadığı elde edilmiş ve bunun tersinin doğru olmadığı bir örnek ile gösterilmiştir.

Tanım 3.1. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. H kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında düzenli açık küme olmak üzere $G \subset H$ olduğunda $(Int(G))^* \subset H$ oluyorsa G kümesine zayıf I_{rg}-kapalı küme denir.

Tanım 3.2. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. $X \setminus G$ zayıf I_{rg}-kapalı küme ise G kümesine zayıf I_{rg}-açık küme denir.

Uyarı 3.3. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay olsun. Bu durumda bir $G \subset X$ için aşağıdaki diyagram geçerlidir:

$$
\begin{array}{c}
\text{ön}_I^*\text{-kapalı} \\
\Downarrow \\
\text{zayıf } I_{rg}\text{-kapalı} \\
\Uparrow \\
I_{rg}\text{-kapalı} \\
\Uparrow \\
I_g\text{-kapalı} \\
\Uparrow \\
\star\text{-kapalı} \\
\Uparrow \\
I-R \text{ kapalı}
\end{array}
$$

Uyarı 3.4. Aşağıdaki örnekte ve Açıkgöz ve Yüksel (2007); Dontchev ve ark. (1999); Navaneethakrishnan ve ark. (2009) nın çalışmalarında görüldüğü üzere Uyarı 3.3' teki gerektirmeler tersinir değildir.

Örnek 3.5. $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{X,\emptyset,\{c\},\{d\},\{a,c\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ ve

$$I=\{\emptyset,\{b\}\}$$

olsun.

$A=\{a,c,d\}$ kümesini alalım.

Bu durumda A kümesi I_{rg}-kapalıdır ancak ön$_I^*$-kapalı bir küme değildir.

$B=\{a\}$ kümesini alalım.

Bu durumda B kümesi ön$_I^*$-kapalı ve zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir ancak bu küme I_{rg}-kapalı bir küme değildir.

Teorem 3.6. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G\subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi zayıf I_{rg}**-**kapalı bir kümedir.

(2) $G\subset H$ ve H kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında düzenli açık küme olduğunda $Cl^*(Int(G))\subset H$ dir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$**(2) :** G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}**-**kapalı bir küme olsun.

Kabul edelim ki $G\subset H$ ve H kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında düzenli açık küme olsun. Bu durumda

$$(Int(G))^*\subset H$$

dir.

$$Int(G)\subset G\subset H$$

olduğundan

$$(Int(G))^*\cup Int(G)\subset H$$

elde edilir.

O halde $Cl^*(Int(G))\subset H$ olur.

(2)$\Rightarrow$**(1) :** $G\subset H$ ve H kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında düzenli açık küme olduğunda $Cl^*(Int(G))\subset H$ olsun.

$$(Int(G))^*\cup Int(G)\subset H$$

olduğundan $G \subset H$ ve H kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında düzenli açık küme iken

$$(Int(G))^* \subset H$$

elde edilir.

Teorem 3.7. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. G kümesi düzenli açık ve zayıf I_{rg} -kapalı bir küme ise G, $\star$-kapalı bir kümedir.

İspat:

G kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında düzenli açık ve zayıf I_{rg} -kapalı bir küme olsun.

G kümesi düzenli açık ve zayıf I_{rg} -kapalı bir küme olduğundan

$$Cl^*(G) = Cl^*(Int(G))$$

$$\subset G$$

dir.

O halde G kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında $\star$-kapalı bir kümedir.

Sonuç 3.8. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $A \subset X$ düzenli açık küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) A kümesi zayıf I_{rg} -kapalı bir kümedir.

(2) A kümesi I_{rg} -kapalı bir kümedir.

(3) A kümesi I_g -kapalı bir kümedir.

(4) A kümesi $\star$-kapalı bir kümedir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$(2) : Kabul edelim ki A kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olsun.

$A \subset B$ olacak şekilde B düzenli açık kümesini alalım.

A kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olduğundan

$$(Int(A))^{*} \subset B$$

dir.

Aynı zamanda A kümesi düzenli açık bir küme olduğundan $A^{*} \subset B$ elde edilir.

O halde A kümesi I_{rg}-kapalı bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(3) : A kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_{rg}-kapalı bir küme olsun.

$A \subset B$ olmak üzere B açık kümesini alalım. A kümesi I_{rg}-kapalı bir küme olduğundan $A^{*} \subset A \subset B$ elde edilir.

Buradan $A^{*} \subset B$ olacaktır.

O halde A kümesi I_{g}-kapalı bir kümedir.

(3)$\Rightarrow$(4) : A kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_{g}-kapalı bir küme olsun. $A \subset A$ ve A açık bir kümedir.

A kümesi I_{g}-kapalı bir küme olduğundan $A^{*} \subset A$ elde edilir.

O halde A kümesi $\star$-kapalı bir kümedir.

(4)$\Rightarrow$(1) : A kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında ★-kapalı bir küme olsun.

Kabul edelim ki B kümesi düzenli açık küme olmak üzere $A \subset B$ olsun.

A kümesi ★-kapalı bir küme olduğundan

$$A^* \subset A \subset B$$

dir.

Öte yandan A kümesi düzenli açık küme olduğundan

$$\begin{aligned}(Int(A))^* &= A^* \\ &\subset B\end{aligned}$$

olup

$$(Int(A))^* \subset B$$

olduğu elde edilir.

O halde A kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

Teorem 3.9. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme ise bu durumda $(Int(G))^* \setminus G$ boştan farklı düzenli kapalı küme kapsamaz.

İspat :

G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olsun. Kabul edelim ki $H \subset (Int(G))^* \setminus G$ olacak şekilde H düzenli kapalı küme olsun.

G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı küme, $X \setminus H$ düzenli açık küme ve

$$G \subset X \setminus H$$

olduğundan

$$(Int(G))^* \subset X \setminus H$$

dir.

Buradan

$$H \subset X \setminus (Int(G))^*$$

dır.

Dolayısıyla

$$H \subset (Int(G))^* \cap X \setminus (Int(G))^*$$

$$= \emptyset$$

olduğu elde edilir.

Buradan $H = \emptyset$ olduğu çıkar.

O halde $(Int(G))^* \setminus G$ kümesi boştan farklı düzenli kapalı küme kapsamaz.

Teorem 3.10. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme ise bu durumda $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ boştan farklı düzenli kapalı küme kapsamaz.

İspat :

G kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}**-kapalı** bir küme olsun.

Kabul edelim ki

$$H \subset Cl^*(Int(G)) \setminus G$$

olacak şekilde H düzenli kapalı küme olsun.

Buradan

$$H \subset Cl^*(Int(G)) \setminus G$$

$$= ((Int(G))^* \cup Int(G)) \setminus G$$

$$= ((Int(G))^* \setminus G) \cup ((Int(G)) \setminus G)$$

olup

$$H \subset (Int(G))^* \setminus G$$

elde edilir.

Teorem 3.9' da bir G kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olması durumunda $(Int(G))^* \setminus G$ kümesinin boştan farklı düzenli kapalı küme kapsamadığını göstermiştik.

Buradan $H = \emptyset$ olduğu çıkar.

O halde buradan $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesinin boş kümeden farklı düzenli kapalı küme kapsamadığı elde edilir.

Uyarı 3.11. Aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere Teorem 3.10' un tersi genelde doğru değildir.

Örnek 3.12. $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{c\}, \{d\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$ ve

$$I = \{\emptyset, \{b\}\}$$

olsun.

$A = \{c\}$ kümesini alalım.

Bu durumda $Cl^*(Int(A)) \setminus A$ kümesi boştan farklı düzenli kapalı küme içermez. Ancak A kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme değildir.

Teorem 3.13. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her G zayıf I_{rg}-kapalı kümesi için G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

(2) (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her $\{x\}$ tek nokta kümesi bir düzenli kapalı kümedir veya $\{x\}$ ön$_I^*$-açık bir kümedir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$(2) : (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her G zayıf I_{rg}-kapalı kümesi için G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir küme ve $x \in X$ olsun.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her G zayıf I_{rg}-kapalı kümesi için

$$Cl^*(Int(G)) \subset G$$

dir.

Kabul edelim ki $\{x\}$ tek nokta kümesi düzenli kapalı küme olmasın. Bu durumda X, $X\setminus\{x\}$ kümesini içeren tek düzenli açık kümedir.

$X\setminus\{x\}$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı kümedir. Dolayısıyla

$$Cl^*(Int(X\setminus\{x\})) \subset X\setminus\{x\}$$

ve böylece

$$\{x\} \subset Int^*(Cl(\{x\}))$$

dir.

Sonuç olarak $\{x\}$ tek nokta kümesi ön$_I^*$-açık bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}**-**kapalı bir küme olsun. $x \in Cl^*(Int(G))$ olsun.

Kabul edelim ki $\{x\}$ kümesi ön$_I^*$-açık küme olsun. Buradan

$$\{x\} \subset Int^*(Cl(\{x\}))$$

dir. $x \in Cl^*(Int(G))$ olduğundan

$$Int^*(Cl(\{x\})) \cap Int(G) \neq \varnothing$$

dır. Buradan

$$Cl(\{x\}) \cap Int(G) \neq \varnothing$$

dır.

$$Cl(\{x\} \cap Int(G)) \neq \varnothing$$

ve dolayısıyla

$$\{x\} \cap Int(G) \neq \varnothing$$

dir.

Buradan $x \in Int(G)$ dir.

O halde $x \in G$ dir.

Kabul edelim ki $\{x\}$ düzenli kapalı küme olsun. Teorem 3.10' dan

$$Cl^*(Int(G)) \setminus G$$

kümesi $\{x\}$ kümesini içermez.

$x \in Cl^*(Int(G))$ olduğundan $x \in G$ dir.

Sonuç olarak $x \in G$ dir. Böylece

$$Cl^*(Int(G)) \subset G$$

ve dolayısıyla G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

Teorem 3.14. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Eğer $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesi boştan farklı $\star$-kapalı bir küme içermiyorsa bu durumda G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

İspat :

Kabul edelim ki (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesi boştan farklı $\star$-kapalı küme içermesin.

$G \subset H$ ve H kümesi düzenli açık bir küme olsun. Kabul edelim ki $Cl^*(Int(G))$ kümesi H de kapsanmasın.

Bu durumda

$$Cl^*(Int(G)) \cap (X \setminus H)$$

kümesi $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesinin boştan farklı $\star$-kapalı bir alt kümesidir. Bu ise bir çelişkidir.

O halde G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

Teorem 3.15. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Eğer G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme ise bu durumda H kümesi $I-R$ kapalı küme ve K kümesi boştan farklı düzenli kapalı küme içermeyen bir küme olmak üzere

$$Int(G) = H \setminus K$$

dır.

İspat :

G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg} **-**kapalı küme olsun.

$$K=(Int(G))^{*}\setminus G$$

olsun. Bu durumda Teorem 3.9' dan K kümesi boştan farklı düzenli kapalı küme içermez.

$H=Cl^{*}(Int(G))$ alalım. Bu durumda

$$H=Cl^{*}(Int(H))$$

dir.

Üstelik

$$H\setminus K=((Int(G))^{*}\cup Int(G))\setminus((Int(G))^{*}\setminus G)$$

$$=((Int(G))^{*}\cup Int(G))\cap(X\setminus(Int(G))^{*}\cup G)$$

$$=Int(G)$$

dir.

Teorem 3.16. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G\subset X$ olsun. Kabul edelim ki G kümesi zayıf I_{rg} **-**kapalı bir küme olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

(2) $Cl^{*}(Int(G))\setminus G$ kümesi düzenli kapalı bir kümedir.

İspat :

(1) $\Rightarrow$ **(2) :** G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir küme olsun.

Bu durumda

$$Cl^*(Int(G)) \subset G$$

dir.

Buradan

$$Cl^*(Int(G)) \setminus G = \varnothing$$

dir.

Böylece

$$Cl^*(Int(G)) \setminus G$$

kümesi düzenli kapalı bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesi düzenli kapalı bir küme olsun. G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğundan Teorem 3.10' dan

$$Cl^*(Int(G)) \setminus G = \varnothing$$

dir.

Dolayısıyla

$$Cl^*(Int(G)) \subset G$$

dir.

O halde G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

Teorem 3.17. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Kabul edelim ki G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

(2) $(Int(G))^* \setminus G$ kümesi düzenli kapalı bir kümedir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$(2) : G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir küme olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} Cl^*(Int(G)) &= (Int(G))^* \cup Int(G) \\ &\subset G \end{aligned}$$

dir.

Buradan

$$\begin{aligned} ((Int(G))^* \cup Int(G)) \setminus G &= ((Int(G))^* \setminus G) \cup ((Int(G)) \setminus G) \\ &= (Int(G))^* \setminus G \\ &\subset \varnothing \end{aligned}$$

dir.

Buradan $(Int(G))^* \setminus G = \varnothing$ elde edilir.

O halde $(Int(G))^* \setminus G$ kümesi düzenli kapalı bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : $(Int(G))^* \setminus G$ kümesi düzenli kapalı bir küme olsun.

G kümesi zayıf I_{rg} **-**kapalı küme olduğundan Teorem 3.9' dan

$$(Int(G))^* \setminus G = \varnothing$$

dir.

Buradan

$$(Int(G))^* \subset G$$

olur.

Aynı zamanda

$$(Int(G)) \subset G$$

olduğundan

$$(Int(G))^* \cup Int(G) = Cl^*(Int(G))$$

$$\subset G$$

elde edilir.

O halde G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

Sonuç 3.18. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ zayıf I_{rg}-kapalı küme olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

(2) $Cl^*(Int(G)) \setminus G$ kümesi düzenli kapalı bir kümedir.

(3) $(Int(G))^* \setminus G$ kümesi düzenli kapalı bir kümedir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$**(2) :** Teorem 3.16' dan elde edilir.

(2)$\Rightarrow$**(1) :** Teorem 3.16' dan elde edilir.

(1)$\Rightarrow$(3) : Teorem 3.17' den elde edilir.

(3)$\Rightarrow$(1) : Teorem 3.17' den elde edilir.

Teorem 3.19. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G\subset X$ zayıf I_{rg}-kapalı küme olsun.

Bu durumda

$$G\cup(X\setminus(Int(G))^{*})$$

kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı kümedir.

İspat :

G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı küme olsun. Kabul edelim ki H kümesi

$$G\cup(X\setminus(Int(G))^{*})\subset H$$

olacak şekilde bir düzenli açık küme olsun.

Buradan

$$X\setminus H\subset X\setminus(G\cup(X\setminus(Int(G))^{*}))$$

$$=(X\setminus G)\cap(Int(G))^{*}$$

$$=(Int(G))^{*}\setminus G$$

olur.

$X\setminus H$ kümesi düzenli kapalı bir küme ve G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğundan Teorem 3.9' dan

$$X\setminus H=\varnothing$$

dir.

Böylece $X = H$ dir.

Dolayısıyla *X*,

$$G \cup (X \setminus (Int(G))^{*})$$

kümesini kapsayan tek düzenli açık kümedir.

Sonuç olarak $G \cup (X \setminus (Int(G))^{*})$ kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

Sonuç 3.20. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olsun. Bu durumda

$$(Int(G))^{*} \setminus G$$

kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-açık kümedir.

İspat :

(X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olsun.

Kabul edelim ki *H* kümesi

$$X \setminus ((Int(G))^{*} \setminus G) \subset H$$

olacak şekilde düzenli açık bir küme olsun.

Buradan

$$X \setminus ((Int(G))^{*} \setminus G) = G \cup (X \setminus (Int(G))^{*})$$

$$\subset H$$

olup

$$X \setminus H \subset (Int(G))^* \setminus G$$

dir.

Teorem 3.19' da (X,τ,I) ideal topolojik uzayında bir $G \subset X$ kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olması durumunda $G \cup (X \setminus (Int(G))^*)$ kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olduğunu göstermiştik.

Buradan

$$G \cup (X \setminus (Int(G))^*) = X \setminus ((Int(G))^* \setminus G)$$

olduğundan $X \setminus ((Int(G))^* \setminus G)$ kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

O halde

$$(Int(G))^* \setminus G$$

kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-açık bir kümedir.

Teorem 3.21. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi ★-kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

(2) G kümesi $I-R$ kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

İspat :

(1) $\Rightarrow$ **(2) :** Kabul edelim ki G kümesi ★-kapalı ve düzenli açık bir küme olsun.

G kümesi ★-kapalı ve düzenli açık bir küme olduğundan

$$G = Cl^*(G) = Cl^*(Int(G))$$

dir.

O halde G kümesi $I-R$ kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : G kümesi $I-R$ kapalı ve düzenli açık bir küme olsun.

Bu durumda Uyarı 3.3' ü kullanarak

$$G = Cl^*(Int(G)) = Cl^*(G)$$

olduğundan G kümesi $\star$-kapalı ve düzenli açık bir küme olacaktır.

Teorem 3.22. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi $I-R$ kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

(2) G kümesi zayıf I_{rg} **-**kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$(2) : G kümesi $I-R$ kapalı ve düzenli açık bir küme olsun. Uyarı 3.3' ten elde edebileceğimiz gibi aşağıdaki şekilde de gösterebiliriz.

Kabul edelim ki $G \subset H$ ve H düzenli açık küme olsun.

G kümesi $I-R$ kapalı küme olduğundan

$$G = Cl^*(Int(G))$$

dir. Dolayısıyla

$$Cl^*(Int(G)) \subset H$$

olur.

O halde G kümesi zayıf I_{rg} **-**kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı ve düzenli açık bir küme olsun.

G kümesi zayıf I_{rg} -kapalı bir küme olduğundan $G \subset G$ ve G düzenli açık bir küme iken

$$(Int(G))^* \subset G$$

dir.

Aynı zamanda $(Int(G)) \subset G$ olduğundan

$$(Int(G)) \cup (Int(G))^* \subset G$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$Cl^*(Int(G)) \subset G$$

dir.

Diğer yandan

$$G \subset Cl^*(G) = Cl^*(Int(G))$$

dir.

O halde $G = Cl^*(Int(G))$ olup G kümesi $I-R$ kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

Sonuç 3.23. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi $\star$-kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

(2) G kümesi $I-R$ kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

(3) G kümesi zayıf I_{rg} -kapalı ve düzenli açık bir kümedir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$(2) : Teorem 3.21' den elde edilir.

(2)$\Rightarrow$(3) : Teorem 3.22' den elde edilir.

(3)$\Rightarrow$(1) : Teorem 3.21 ve Teorem 3.22' den elde edilir.

BÖLÜM 4

ZAYIF I_{rg}-KAPALI KÜMELERİN

ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin önemli özellikleri araştırılmış ve elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Bir ideal topolojik uzayın hiçbir yerde yoğun olmayan bir alt kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğu ispatlanmış ve tersinin doğru olmadığı bir örnek ile gösterilmiştir.

İdeal topolojik uzaydaki iki zayıf I_{rg}-kapalı kümenin arakesitlerinin ve iki zayıf I_{rg}-kapalı kümenin birleşimlerinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olmadıklarını gösteren örnekler verilmiştir.

Teorem 4.1. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir :

(1) (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her alt kümesi zayıf I_{rg}-kapalı kümedir.

(2) (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her G düzenli açık kümesi için G ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$(2) : Kabul edelim ki (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her alt kümesi zayıf I_{rg}-kapalı küme olsun. G kümesi düzenli açık küme olsun.

G kümesi zayıf I_{rg} -kapalı küme olduğundan

$$Cl^*(Int(G)) \subset G$$

dir.

O halde G kümesi ön$_I^*$-kapalı bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayının bir alt kümesi ve H kümesi de $G \subset H$ olacak şekilde bir düzenli açık küme olsun.

(2) den

$$Cl^*(Int(G)) \subset Cl^*(Int(H))$$

$$\subset H$$

dir.

Dolayısıyla G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg} -kapalı bir kümedir.

Teorem 4.2. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay olsun. G kümesi zayıf I_{rg} -kapalı bir küme ve

$$G \subset H \subset Cl^*(Int(G))$$

ise bu durumda H kümesi zayıf I_{rg} -kapalı bir kümedir.

İspat :

$H \subset K$ ve K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında düzenli açık küme olsun. $G \subset K$ ve G kümesi zayıf I_{rg} -kapalı küme olduğundan

$$Cl^*(Int(G)) \subset K$$

dır.

$$H \subset Cl^*(Int(G))$$

olduğundan

$$Cl^*(Int(H)) \subset Cl^*(Int(G))$$

$$\subset K$$

dır. Dolayısıyla

$$Cl^*(Int(H)) \subset K$$

olup H kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

Sonuç 4.3. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay olsun. G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı ve açık bir küme ise bu durumda $Cl^*(G)$ zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

İspat :

G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı ve açık bir küme olsun. Bu durumda

$$G \subset Cl^*(G)$$

$$\subset Cl^*(G)$$

$$= Cl^*(Int(G))$$

dir.

Dolayısıyla Teorem 4.2' den $Cl^*(G)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

Teorem 4.4. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. G kümesi hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme ise zayıf I_{rg}-kapalıdır.

İspat :

G kümesi X uzayında hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olsun.

$$Int(G) \subset Int(Cl(G))$$

olduğundan

$$Int(G) = \varnothing$$

dir. Dolayısıyla

$$Cl^{*}(Int(G)) = \varnothing$$

dir.

O halde G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

Uyarı 4.5. Aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere Teorem 4.4' ün tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.6. $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{X,\varnothing,\{c\},\{d\},\{a,c\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ ve

$$I = \{\varnothing,\{b\}\}$$

olsun.

$A = \{a,c,d\}$ kümesini alalım.

Bu durumda A kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir ancak bu küme hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme değildir.

Uyarı 4.7. Bir ideal topolojik uzayda iki zayıf I_{rg}-kapalı kümenin arakesitinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olması gerekmez.

Örnek 4.8. $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{c\}, \{d\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$ ve

$$I = \{\varnothing, \{b\}\}$$

olsun.

$$A = \{a,b,c\} \text{ ve } B = \{a,c,d\}$$

kümelerini alalım.

A ve B kümeleri zayıf I_{rg}-kapalı kümelerdir ancak $A \cap B$ kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme değildir.

Uyarı 4.9. Bir ideal topolojik uzayda iki zayıf I_{rg}-kapalı kümenin birleşiminin zayıf I_{rg}-kapalı küme olması gerekmez.

Örnek 4.10. $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ ve

$$I = \{\varnothing, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}\}$$

olsun.

$$A = \{b\} \text{ ve } B = \{c\}$$

kümelerini alalım.

A ve B kümeleri zayıf I_{rg}-kapalı kümelerdir ancak $A \cup B$ kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme değildir.

Teorem 4.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve A kümesi de bu uzayın bir açık alt kümesi olsun.

Eğer G kümesi X topolojik uzayında düzenli açık bir küme ise bu durumda $G \cap A$ kümesi de (A, τ_A) alt uzayında düzenli açık kümedir (Long ve Herrington, 1978).

Teorem 4.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve A kümesi de bu uzayın bir açık alt kümesi olsun.

$B(\subset A)$ kümesi (A, τ_A) alt uzayında düzenli açık küme ise bu durumda (X, τ) uzayında $B = G \cap A$ olacak şekilde G düzenli açık kümesi vardır
(Long ve Herrington, 1978).

Teorem 4.13. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $H \subset G \subset X$ olsun. Eğer G kümesi X uzayında açık küme ve H kümesi G de zayıf I_{rg} -kapalı küme ise bu durumda H kümesi X uzayında zayıf I_{rg} -kapalı bir kümedir.

İspat :

K kümesi X uzayında düzenli açık küme ve $H \subset K$ olsun. $H \subset K \cap G$ dir. Teorem 4.11' den $K \cap G$ kümesi G de düzenli açık kümedir.

H kümesi G de zayıf I_{rg} -kapalı küme olduğundan

$$Cl_G^*(Int_G(H)) \subset K \cap G$$

dir.

Üstelik

$$\begin{aligned} Cl^*(Int(H)) &\subset Cl_G^*(Int(H)) \\ &= Cl_G^*(Int_G(H)) \\ &\subset K \cap G \\ &\subset K \end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla

$$Cl^*(Int(H)) \subset K$$

dır.

O halde H kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

Teorem 4.14. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $H \subset G \subset X$ olsun. Eğer G kümesi X uzayında düzenli açık küme ve H kümesi X uzayında zayıf I_{rg}-kapalı küme ise bu durumda H kümesi G de zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

İspat :

$H \subset K$ ve K kümesi G de düzenli açık küme olsun. Teorem 4.12' den

$$K = L \cap G$$

olacak şekilde X uzayında bir L düzenli açık kümesi vardır.

H kümesi X uzayında zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğundan

$$Cl^*(Int(H)) \subset K$$

dır.

Üstelik

$$\begin{aligned} Cl_G^*(Int_G(H)) &= Cl_G^*(Int(H)) \\ &= Cl^*(Int(H)) \cap G \\ &\subset K \cap G \end{aligned}$$

$$= K$$

dır.

Dolayısıyla

$$Cl_G^*(Int_G(H)) \subset K$$

dır.

O halde H kümesi G de zayıf I_{rg}-kapalı bir kümedir.

BÖLÜM 5

ZAYIF I_{rg}-AÇIK KÜMELERİN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ideal topolojik uzaylarda τ^* dan daha genel bir sınıf olan zayıf I_{rg}-açık kümelerin bazı karakterizasyonları verilmiş ve bu kümelerin özellikleri araştırılmıştır.

İdeal topolojik uzaydaki iki zayıf I_{rg}-açık kümenin arakesitlerinin ve iki zayıf I_{rg}-açık kümenin birleşimlerinin zayıf I_{rg}-açık küme olmadıkları birer örnek ile gösterilmiştir.

Öte yandan bir ideal topolojik uzayın herhangi bir G alt kümesinin zayıf I_{rg}-kapalı küme olması durumunda $Cl^*(Int(G))\backslash G$ kümesinin bu uzayda zayıf I_{rg}-açık küme olduğu gösterilmiştir.

Teorem 5.1. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G\subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) G kümesi zayıf I_{rg}-açık kümedir.

(2) $H\subset G$ ve H düzenli kapalı küme olduğunda $H\subset Int^*(Cl(G))$ dir.

İspat :

(1)$\Rightarrow$(2) : H kümesi X uzayında düzenli kapalı küme ve $H\subset G$ olsun.

$X\setminus H$ düzenli açık kümedir ve

$$X \setminus G \subset X \setminus H$$

dir.

$X \setminus G$ zayıf I_{rg} -kapalı küme olduğundan

$$Cl^*(Int\,(X \setminus G)) \subset X \setminus H$$

dir.

Buradan

$$X \setminus \; Int^*(Cl(G)) \subset X \setminus H$$

dir.

Dolayısıyla $H \subset Int^*(Cl(G))$ dir.

(2)$\Rightarrow$(1) : K kümesi X uzayında düzenli açık küme ve $X \setminus G \subset K$ olsun.

$X \setminus K$ kümesi, $X \setminus K \subset G$ olacak şekilde bir düzenli kapalı küme olduğundan

$$X \setminus K \subset Int^*(Cl(G))$$

dir.

$$X \setminus Int^*(Cl(G)) = Cl^*(Int(X \setminus \mathrm{G}))$$

$$\subset K$$

dır.

Dolayısıyla $X \setminus G$ kümesi zayıf I_{rg} -kapalı kümedir.

O halde G kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg} -açık kümedir.

Uyarı 5.2. Bir ideal topolojik uzayda iki zayıf I_{rg}-açık kümenin birleşiminin zayıf I_{rg}-açık küme olması gerekmez.

Örnek 5.3. $X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere

$$\tau = \{X, \varnothing, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

ve

$$I = \{\varnothing, \{b\}\}$$

olsun.

$$A = \{d\} \text{ ve } B = \{b\}$$

kümelerini alalım.

A ve B kümeleri zayıf I_{rg}-açık kümelerdir ancak $A \cup B$ kümesi zayıf I_{rg}-açık bir küme değildir.

Uyarı 5.4. Bir ideal topolojik uzayda iki zayıf I_{rg}-açık kümenin arakesitinin zayıf I_{rg}-açık küme olması gerekmez.

Örnek 5.5. $X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ve

$$I = \{\varnothing, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}\}$$

olsun.

$$A = \{a, c, d\} \text{ ve } B = \{a, b, d\}$$

kümelerini alalım.

A ve B kümeleri zayıf I_{rg}-açık kümelerdir ancak $A \cap B$ kümesi zayıf I_{rg}-açık bir küme değildir.

Teorem 5.6. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı küme ise $Cl^*(Int(G))\backslash G$ kümesi de (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-açık kümedir.

İspat :

G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-kapalı küme olsun.

Kabul edelim ki

$$H \subset Cl^*(Int(G))\backslash G$$

olacak şekilde H bir düzenli kapalı küme olsun. G kümesi zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğundan Teorem 3.10' dan $H = \varnothing$ dir.

Dolayısıyla

$$H \subset Int^*(Cl(Cl^*(Int(G))\backslash G))$$

dir.

Buradan Teorem 5.1' den

$$Cl^*(Int(G))\backslash G$$

kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-açık kümedir.

Teorem 5.7. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. G kümesi zayıf I_{rg}-açık küme ise bu durumda H düzenli açık bir küme ve

$$Int^*(Cl(G)) \cup (X \backslash G) \subset H$$

olduğunda $H = X$ dir.

İspat :

H kümesi X uzayında düzenli açık bir küme ve

$$Int^*(Cl(G)) \cup (X \setminus G) \subset H$$

olsun.

$$X \setminus H \subset (X \setminus Int^*(Cl(G))) \cap G$$

$$= Cl^*(Int(X \setminus G)) \setminus (X \setminus G)$$

dir.

$X \setminus H$ kümesi düzenli kapalı küme ve $X \setminus G$ kümesi zayıf I_{rg}-kapalı küme olduğundan Teorem 3.10' dan

$$X \setminus H = \emptyset$$

dir.

O halde $H = X$ dir.

Teorem 5.8. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Eğer G kümesi zayıf I_{rg}-açık küme ve

$$Int^*(Cl(G)) \subset H \subset G$$

ise H kümesi zayıf I_{rg}-açık kümedir.

İspat :

G kümesi zayıf I_{rg}-açık küme ve

$$Int^*(Cl(G)) \subset H \subset G$$

olsun.

$$\begin{aligned} Int^*(Cl(G)) &\subset H \\ &\subset G \end{aligned}$$

olduğundan

$$Int^*(Cl(G)) = Int^*(Cl(H))$$

dir.

K kümesi düzenli kapalı bir küme ve $K \subset H$ olsun. Bu durumda $K \subset G$ dir.

G kümesi zayıf I_{rg} **-**açık küme olduğundan Teorem 5.1’ den

$$\begin{aligned} K &\subset Int^*(Cl(G)) \\ &= Int^*(Cl(H)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla Teorem 5.1’ den *H* kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg} **-**açık kümedir.

Sonuç 5.9. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. *G* kümesi zayıf I_{rg} **-**açık ve kapalı bir küme ise bu durumda $Int^*(G)$ kümesi de zayıf I_{rg} **-** açık kümedir.

İspat :

G kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg} **-**açık ve kapalı bir küme olsun.

Bu durumda

$$Int^*(Cl(G)) = Int^*(G)$$

$$\subset Int^*(G)$$

$$\subset G$$

dir.

O halde Teorem 5.8' den $Int^*(G)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında zayıf I_{rg}-açık kümedir.

BÖLÜM 6

YAKIN KAPALILIK

VE

I_g-KAPALI KÜMELER

Bu bölümde ideal topolojik uzaylarda yakın kapalılık kavramı sunulmuş ve çalışılmıştır. Yakın kapalılığın çeşitli karakterizasyonları verilmiştir.

I_g-süreklilik ve yakın kapalılık altında herhangi bir I_g-kapalı kümenin ters görüntüsünün I_g-kapalı olduğu gösterilmiştir.

İki yakın kapalı fonksiyonun bileşkesinin yakın kapalı bir fonksiyon olmadığı bir örnek ile gösterilmiştir.

Bununla birlikte yakın kapalı bir fonksiyonun herhangi bir kısıtlanmışının da yakın kapalı fonksiyon olmadığı bir örnek ile gösterilmiştir.

Tanım 6.1. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı bir küme ve U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-açık bir küme olmak üzere $f(K)\subset U$ olduğunda $f(K)\subset Int^*(U)$ oluyorsa $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonuna yakın kapalı fonksiyon denir.

Uyarı 6.2. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu verilsin.

Bu durumda $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu kapalı bir fonksiyon ise yakın kapalıdır.

Uyarı 6.3. Yukarıda verilen uyarının tersi aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere genelde doğru değildir.

Örnek 6.4. $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ ve

$$I=\{\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\}\}$$

olsun.

Bu durumda

$$f(a)=a,\ f(b)=c,\ f(c)=b,\ f(d)=a$$

şeklinde tanımlanan

$$f:(X,\tau,I)\to(X,\tau,I)$$

fonksiyonu yakın kapalıdır.

Ancak bu fonksiyon kapalı bir fonksiyon değildir.

Tanım 6.5. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

(Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her K $\star$-kapalı alt kümesi için $f^{-1}(K)$ kümesi I_g-kapalı ise $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonuna I_g-süreklidir denir.

Teorem 6.6. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g-sürekli ve yakın kapalı bir fonksiyon ise bu durumda (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U I_g-kapalı kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalıdır.

İspat :

U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g -kapalı küme olsun.

Kabul edelim ki (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki bir V açık kümesi için $f^{-1}(U)\subset V$ olsun.

Bu durumda

$$X\setminus V\subset f^{-1}(Y\setminus U)$$

ve buradan

$$f(X\setminus V)\subset Y\setminus U$$

elde edilir.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı olduğundan

$$f(X\setminus V)\subset Int^{*}(\ Y\setminus U\ )$$

$$=Y\setminus Cl^{*}(U)$$

dır.

Buradan

$$X\setminus V\subset X\setminus f^{-1}(Cl^{*}(U))$$

olup

$$f^{-1}(Cl^{*}(U))\subset V$$

elde edilir.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g -sürekli olduğundan $f^{-1}(Cl^{*}(U))$ kümesi I_g -kapalıdır.

Sonuç olarak

$$Cl^*(f^{-1}(U)) \subset Cl^*(f^{-1}(Cl^*(U)))$$

$$\subset V$$

elde edilir.

Dolayısıyla $Cl^*(f^{-1}(U)) \subset V$ olup $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g -kapalıdır.

Sonuç 6.7. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g -sürekli ve yakın kapalı bir fonksiyon ise bu durumda (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U I_g -açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g -açıktır.

İspat:

U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g -açık bir küme olsun.

Kabul edelim ki (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki bir K kapalı kümesi için

$$K \subset f^{-1}(U)$$

olsun.

Bu durumda

$$f(K) \subset U$$

olur.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı bir fonksiyon olduğundan

$$f(K) \subset Int^*(U)$$

dır.

Buradan

$$K \subset f^{-1}(Int^*(U))$$

olur.

$f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g-sürekli olduğundan $f^{-1}(Int^*(U))$ kümesi I_g-açık bir kümedir.

Böylece

$$K \subset Int^*(f^{-1}(Int^*(U)))$$

$$\subset Int^*(f^{-1}(U))$$

elde edilir.

Dolayısıyla $K \subset Int^*(f^{-1}(U))$ olup $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-açık bir kümedir.

Teorem 6.6 kullanılarak ta elde edilebilir.

Sonuç 6.8. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

Eğer $f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g-sürekli ve kapalı bir fonksiyon ise bu durumda (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U I_g-kapalı kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalıdır.

İspat:

$f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g-sürekli ve kapalı bir fonksiyon ve U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme olsun.

Kabul edelim ki (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki bir V açık kümesi için $f^{-1}(U)\subset V$ olsun.

Bu durumda

$$X\setminus V\subset f^{-1}(Y\setminus U)$$

ve buradan

$$f(X\setminus V)\subset Y\setminus U$$

elde edilir.

$f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu kapalı bir fonksiyon olduğundan Uyarı 6.2' den yakın kapalıdır.

Teorem 6.6' da $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonunun I_g-sürekli ve yakın kapalı bir fonksiyon olması durumunda (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U I_g-kapalı kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesinin (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı bir küme olduğunu göstermiştik.

O halde buradan $Cl^*(f^{-1}(U))\subset V$ olup $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı bir kümedir.

Sonuç 6.9. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

Eğer $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g-sürekli ve kapalı bir fonksiyon ise bu durumda (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U I_g-açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-açıktır.

İspat:

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu I_g-sürekli ve kapalı bir fonksiyon ve U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-açık bir küme olsun.

Kabul edelim ki (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki bir K kapalı kümesi için $K\subset f^{-1}(U)$ olsun.

Bu durumda

$$f(K)\subset U$$

olur.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu kapalı bir fonksiyon olduğundan Uyarı 6.2' den yakın kapalıdır.

Sonuç 6.7' de $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonunun I_g-sürekli ve yakın kapalı bir fonksiyon olması durumunda (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U I_g-açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesinin (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-açık bir küme olduğunu göstermiştik.

Dolayısıyla buradan $K\subset Int^*(f^{-1}(U))$ olup $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-açık bir kümedir.

Teorem 6.10. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her K kapalı kümesi için $f(K)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında $\star$-açık ise $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı fonksiyondur.

İspat:

Kabul edelim ki (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her K kapalı kümesi için $f(K)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında ★-açık küme olsun.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayında bir V kapalı kümesi ve (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında bir U I_g -açık kümesi için $f(V)\subset U$ olsun.

Buradan

$$Int^*(f(V))\subset Int^*(U)$$

olur.

$f(V)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında ★-açık küme olduğundan

$$f(V)\subset Int^*(U)$$

olur.

O halde $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Uyarı 6.11. Aşağıdaki örnek Teorem 6.10' un tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 6.12. $X=\{a,b,c,d\}$ olmak üzere

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

ve

$$I=\{\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\}\}$$

olsun.

Bu durumda $i:(X,\tau,I)\to(X,\tau,I)$ birim fonksiyonu yakın kapalıdır.

Ancak $i(\{a,d\})=\{a,d\}$ kümesi ★-açık bir küme değildir.

Tanım 6.13. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay olsun. (X,τ,I) uzayında her I_g-kapalı küme $\star$-kapalı ise bu uzaya T_I-ideal uzay denir (Dontchev ve ark., 1999).

Teorem 6.14. (Y,σ,J) bir ideal topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

(1) Her (X,τ,I) ideal topolojik uzayı için her $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

(2) (Y,σ,J) uzayı T_I-ideal uzaydır.

İspat:

(1)$\Rightarrow$(2) : $U\neq\varnothing$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme olsun.

Kabul edelim ki

$$X=Y\,,\ I=J$$

ve

$$\tau=\{X,\varnothing,U\}$$

olmak üzere (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ birim fonksiyon olsun.

Bu durumda $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır. $Y\setminus U$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-açık küme, $X\setminus U$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı küme ve

$$f(X\setminus U)\subset Y\setminus U$$

olduğundan

$$f(X \setminus U) \subset Int^*(Y \setminus U)$$

olur.

$$\begin{aligned} f(X \setminus U) &= Y \setminus U \\ &\subset Int^*(Y \setminus U) \\ &= Y \setminus Cl^*(U) \end{aligned}$$

olduğundan $Cl^*(U) \subset U$ elde edilir.

Dolayısıyla U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında ★-kapalı kümedir.

O halde (Y,σ,J) uzayı bir T_I-ideal uzaydır.

(2)⇒(1) : V kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-açık küme ve K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı küme olmak üzere $f(K) \subset V$ olsun. (Y,σ,J) uzayı T_I-ideal uzay olduğundan V kümesi ★-açık kümedir.

Bu durumda $f(K) \subset Int^*(V)$ dir.

O halde $f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Teorem 6.15. (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her alt kümesi I_g-kapalıdır.

(2) (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her açık kümesi ★-kapalıdır.

(Navaneethakrishnan ve Joseph, 2008).

Teorem 6.16. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay olsun. (Y,σ,J) ideal topolojik uzayının tüm $\star$-kapalı kümelerinin ailesi η ve $\sigma=\eta$ olmak üzere bir $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu verilsin.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

(2) (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her *K* kapalı kümesi için $f(K)$ kümesi $\star$-açıktır.

İspat:

(1)$\Rightarrow$(2) : $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı olsun.

Kabul edelim ki *K* kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı olsun.

Bu durumda Teorem 6.15' ten $f(K)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g -açıktır. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı olduğundan

$$f(K)\subset Int^*(f(K))$$

elde edilir.

Sonuç olarak $f(K)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında $\star$-açık kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her *K* kapalı kümesi için $f(K)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında $\star$-açık küme olsun.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her *U* kapalı kümesi için $f(U)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında $\star$-açık küme olduğundan Teorem 6.10' dan dolayı $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Sonuç olarak $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonunun yakın kapalı bir fonksiyon olduğunu elde ederiz.

Uyarı 6.17. Aşağıdaki örnekte iki yakın kapalı fonksiyonun bileşkesinin yakın kapalı fonksiyon olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 6.18. $X=Y=\{a,b,c,d\}$ olmak üzere

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\}\},$$

$$I=J=\{\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\}\}$$

ve

$$\sigma=\{Y,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

olsun.

$$f(a)=d,\ f(b)=a,\ f(c)=c,\ f(d)=d$$

olarak tanımlı $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu ve

$$g(a)=a, g(b)=c, g(c)=b, g(d)=a$$

olarak tanımlı $g:(Y,\sigma,J)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu için $g\circ f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı değildir.

Ancak $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ ve $g:(Y,\sigma,J)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonları yakın kapalı fonksiyonlardır.

Teorem 6.19. (X,τ,I), (Y,σ,J) ve (Z,η,l) ideal topolojik uzayları verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ ve $g:(Y,\sigma,J)\to(Z,\eta,l)$ iki fonksiyon olsun.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu kapalı fonksiyon ve $g:(Y,\sigma,J)\to(Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın kapalı fonksiyon ise $g\circ f:(X,\tau,I)\to(Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

İspat:

K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı bir küme ve U kümesi (Z,η,l) ideal topolojik uzayında I_g-açık küme olmak üzere $(g\circ f)(K)\subset U$ olsun.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu kapalı fonksiyon olduğundan $f(K)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında kapalı bir kümedir. $g:(Y,\sigma,J)\to(Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın kapalı fonksiyon olduğundan

$$g(f(K))\subset Int^*(U)$$

dur.

Dolayısıyla

$$(g\circ f)(K)\subset Int^*(U)$$

olup $g\circ f:(X,\tau,I)\to(Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Tanım 6.20. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her K $\star$-açık alt kümesi için $f(K)$ kümesi $\star$-açık bir küme ise $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonuna $\star$-açık fonksiyon denir.

Tanım 6.21. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

(Y,σ,J) ideal topolojik uzayının her K I_g-kapalı alt kümesi için $f^{-1}(K)$ kümesi I_g-kapalı bir küme ise $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonuna I_g-kararsız fonksiyon denir.

Teorem 6.22. (X,τ,I), (Y,σ,J) ve (Z,η,l) ideal topolojik uzayları verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ ve $g:(Y,\sigma,J)\to(Z,\eta,l)$ iki fonksiyon olsun.

$f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı fonksiyon, $g:(Y,\sigma,J)\rightarrow(Z,\eta,l)$ fonksiyonu ★-açık ve I_g-kararsız bir fonksiyon ise bu durumda $g\circ f:(X,\tau,I)\rightarrow(Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

İspat:

K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı bir küme ve U kümesi (Z,η,l) ideal topolojik uzayında I_g-açık bir küme olmak üzere $(g\circ f)(K)\subset U$ olsun.

Bu durumda

$$f(K)\subset g^{-1}(U)$$

olur.

$g^{-1}(U)$ kümesi I_g-açık bir küme ve $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı fonksiyon olduğundan

$$f(K)\subset Int^*(g^{-1}(U))$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}(g\circ f)(K)&=g(f(K))\\&\subset g(Int^*(g^{-1}(U)))\end{aligned}$$

olur.

$$Int^*(g^{-1}(U))\subset g^{-1}(U)$$

olduğundan

$$g(Int^*(g^{-1}(U)))\subset g(g^{-1}(U))$$

$$\subset U$$

elde edilir.

$g:(Y,\sigma,J)\to(Z,\eta,l)$ fonksiyonu ★-açık fonksiyon olduğundan

$$g(Int^*(g^{-1}(U)))\subset Int^*(U)$$

olur.

Dolayısıyla

$$(g\circ f)(K)\subset Int^*(U)$$

olup $g\circ f:(X,\tau,I)\to(Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Uyarı 6.23. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $V\subset X$ için τ_V topolojisi V üzerindeki alt uzay topolojisi ve

$$I_V=\{V\cap J : J\in I\}$$

olmak üzere

$$(V,\tau_V,I_V)$$

ideal topolojik uzaydır (Janković ve Hamlett, 1990).

Teorem 6.24. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı bir fonksiyon ve V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı bir küme ise bu durumda $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonunun V kümesine kısıtlanmışı olan

$$f|_V:(V,\tau_V,I_V)\to(Y,\sigma,J)$$

fonksiyonu yakın kapalıdır.

İspat:

U kümesi (V,τ_V,I_V) ideal topolojik uzayında kapalı bir küme ve G kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g -açık bir küme olmak üzere

$$f|_V(U)\subset G$$

olsun.

Bu durumda U kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalıdır ve

$$\begin{aligned} f|_V(U) &= f(U) \\ &\subset G \end{aligned}$$

dir.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} f|_V(U) &= f(U) \\ &\subset Int^*(G) \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $f|_V:(V,\tau_V,I_V)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Uyarı 6.25. Aşağıdaki örnekte yakın kapalı bir fonksiyonun herhangi bir kısıtlanmışının yakın kapalı olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 6.26. $X=Y=\{a,b,c,d\}$ olmak üzere

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\}\},$$

$$I=J=\{\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\}\}$$

ve

$$\sigma = \{Y, \varnothing, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

olsun.

Bu durumda

$$f(a) = c,\ f(b) = d,\ f(c) = a,\ f(d) = d$$

şeklinde tanımlanan $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ fonksiyonu ve

$$A = \{a, c, d\}$$

kümesi için $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Ancak

$$f\big|_A : (A, \tau_A, I_A) \to (Y, \sigma, J)$$

fonksiyonu yakın kapalı değildir.

BÖLÜM 7

YAKIN SÜREKLİLİK

VE

I_g -KAPALI KÜMELER

Bu bölümde ideal topolojik uzaylarda yakın süreklilik kavramı sunulmuş ve yakın sürekliliğin çeşitli karakterizasyonları araştırılmıştır.

Yakın süreklilik ve $\star$-kapalılık altında herhangi bir I_g-kapalı kümenin görüntüsünün I_g-kapalı olduğu gösterilmiştir.

Buradan süreklilik ve $\star$-kapalılık altında herhangi bir I_g-kapalı kümenin görüntüsünün I_g-kapalı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ayrıca iki yakın sürekli fonksiyonun bileşkesinin yakın sürekli bir fonksiyon olmadığı bir örnek ile gösterilmiştir.

Tanım 7.1. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun. U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık bir küme ve V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı bir küme olmak üzere $V\subset f^{-1}(U)$ olduğunda $V^*\subset f^{-1}(U)$ oluyorsa $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonuna yakın sürekli fonksiyon denir.

Teorem 7.2. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

(2) U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme ve V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme olmak üzere $V\subset f^{-1}(U)$ olduğunda

$$Cl^*(V)\subset f^{-1}(U)$$

dur.

İspat:

(1)$\Rightarrow$(2) : Kabul edelim ki $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli olsun.

U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme ve V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme olmak üzere

$$V\subset f^{-1}(U)$$

olsun.

(1) den dolayı

$$V^*\subset f^{-1}(U)$$

dur.

O halde buradan

$$\begin{aligned} V^*\cup V &= Cl^*(V) \\ &\subset f^{-1}(U) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2)$\Rightarrow$(1) : U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme ve V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme olmak üzere $V\subset f^{-1}(U)$ olsun.

(2) den dolayı

$$Cl^*(V)\subset f^{-1}(U)$$

olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} Cl^*(V) &= V^*\cup V \\ &\subset f^{-1}(U) \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $V^*\subset f^{-1}(U)$ olup $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

Uyarı 7.3. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

Bu durumda $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ise yakın süreklidir.

Uyarı 7.4. Aşağıdaki örnekte yukarıda verilen uyarının tersinin genelde doğru olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 7.5. $X=\{a,b,c,d\}$ olmak üzere

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\},$$

$$I=\{\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\}\}$$

olsun.

Bu durumda

$$f(a)=d,\ f(b)=c,\ f(c)=b,\ f(d)=a$$

şeklinde tanımlanan

$$f:(X,\tau,I)\to(X,\tau,I)$$

fonksiyonu yakın süreklidir.

Ancak bu fonksiyon sürekli değildir.

Teorem 7.6. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ birebir örten fonksiyon olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f yakın kapalıdır.

(2) f^{-1} yakın süreklidir.

İspat:

(1)$\Rightarrow$(2) : Kabul edelim ki $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı olsun.

U kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında açık küme ve V kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g -kapalı küme olmak üzere $V\subset f(U)$ olsun.

Bu durumda $X\setminus U$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı küme, $Y\setminus V$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g -açık küme ve

$$Y\setminus f(U)=f(X\setminus U)$$

$$\subset Y\setminus V$$

dir.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalı olduğundan

$$f(X\setminus U)\subset Int^*(Y\setminus V)$$

olur.

Buradan

$$f(X\setminus U)=Y\setminus f(U)$$

$$\subset Y\setminus Cl^*(V)$$

olup $Cl^*(V)\subset f(U)$ elde edilir.

O halde f^{-1} yakın sürekli fonksiyondur.

(2)$\Rightarrow$(1) : Kabul edelim ki f^{-1} yakın sürekli fonksiyon olsun.

K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında kapalı bir küme ve U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-açık bir küme olmak üzere $f(K)\subset U$ olsun.

Bu durumda $X\setminus K$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında açık küme ve $Y\setminus U$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve

$$K\subset f^{-1}(U)$$

dır.

Buradan

$$X\setminus f^{-1}(U)=f^{-1}(Y\setminus U)$$

$$\subset X\setminus K$$

olur.

Bu durumda

$$Y \setminus U \subset f(X \setminus K)$$

olur.

f^{-1} yakın sürekli fonksiyon olduğundan

$$Cl^{*}(Y \setminus U) \subset f(X \setminus K)$$

elde edilir.

Buradan

$$Y \setminus Int^{*}(U) \subset Y \setminus f(K)$$

olup

$$f(K) \subset Int^{*}(U)$$

elde edilir.

O halde $f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın kapalıdır.

Tanım 7.7. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun. (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her K $\star$-kapalı alt kümesi için $f(K)$ kümesi $\star$-kapalı ise $f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonuna $\star$-kapalı fonksiyon denir (Ekici, 2011 b).

Teorem 7.8. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli ve ★-kapalı bir fonksiyon ise bu durumda (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her V I_g-kapalı kümesi için $f(V)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalıdır.

İspat:

V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme olmak üzere $f(V)\subset U$ olsun.

Buradan $V\subset f^{-1}(U)$ olur.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli olduğundan

$$Cl^*(V)\subset f^{-1}(U)$$

olur. Dolayısıyla $f(Cl^*(V))\subset U$ elde edilir.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu ★-kapalı fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} Cl^*(f(V)) &\subset Cl^*(f(Cl^*(V))) \\ &= f(Cl^*(V)) \\ &\subset U \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$Cl^*(f(V))\subset U$$

olur.

O halde $f(V)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalıdır.

Sonuç 7.9. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu sürekli ve $\star$-kapalı ise bu durumda (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her V I_g-kapalı kümesi için $f(V)$ kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalıdır.

İspat:

V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme olmak üzere $f(V)\subset U$ olsun.

Buradan $V\subset f^{-1}(U)$ olur.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu sürekli olduğundan Uyarı 7.3' ten yakın süreklidir.

Teorem 7.8' de $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonunun yakın sürekli ve $\star$-kapalı bir fonksiyon olması durumunda (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki her V I_g-kapalı kümesi için $f(V)$ kümesinin (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı bir küme olduğunu göstermiştik.

Dolayısıyla buradan $f(V)$ kümesinin (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı bir küme olduğu elde edilir.

Teorem 7.10. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

(Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi de (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\star$-kapalı ise $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

İspat:

U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme, K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve $K \subset f^{-1}(U)$ olsun.

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
Cl^*(K) &\subset Cl^*(f^{-1}(U)) \\
&= f^{-1}(U)
\end{aligned}
$$

olur.

O halde $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

Uyarı 7.11. Teorem 7.10' un tersi aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere genelde doğru değildir.

Örnek 7.12. $X=\{a,b,c,d\}$ olmak üzere

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

ve

$$I=\{\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\}\}$$

olsun.

Bu durumda

$$i:(X,\tau,I)\to(X,\tau,I)$$

birim fonksiyonu yakın süreklidir.

Ancak $i^{-1}(\{a,b,c\})=\{a,b,c\}$ kümesi $\star$-kapalı bir küme değildir.

Sonuç 7.13. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun.

(Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U kapalı kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\star$-açık ise $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

İspat:

U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında kapalı küme ve V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g -açık küme olmak üzere

$$X\setminus V\subset f^{-1}(Y\setminus U)$$

olsun.

Bu durumda $f^{-1}(U)\subset V$ dir.

Buradan

$$\begin{aligned} Int^*(f^{-1}(U)) &= f^{-1}(U) \\ &\subset Int^*(V) \end{aligned}$$

olur.

Böylece

$$X\setminus Int^*(V)\subset X\setminus f^{-1}(U)$$

olup buradan

$$Cl^*(X\setminus V)\subset f^{-1}(Y\setminus U)$$

elde edilir.

O halde $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

Teorem 7.10 kullanılarak ta elde edilebilir.

Teorem 7.14. (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ve $R \subset S \subset X$ olsun. R kümesi S ye göre I_g-kapalı küme ve S kümesi (X,τ^*) topolojik uzayına göre g-kapalı küme ise bu durumda R kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayına göre I_g-kapalı bir kümedir.

İspat:

R kümesi S ye göre I_g-kapalı küme ve S kümesi (X,τ^*) topolojik uzayına göre g-kapalı küme olsun.

S kümesi (X,τ^*) topolojik uzayına göre g-kapalı olduğundan S kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalıdır.

Dolayısıyla Dontchev ve ark. (1999) nın makalesinde Teorem 2.8' den R kümesinin (X,τ,I) ideal topolojik uzayına göre I_g-kapalı olduğu elde edilir.

Teorem 7.15. (X,τ,I) ve (Y,σ,J) iki ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ bir fonksiyon olsun. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli fonksiyon ve R kümesi (X,τ^*) topolojik uzayına göre g-kapalı küme ise

$$f|_R:(R,\tau_R,I_R)\to(Y,\sigma,J)$$

fonksiyonu yakın süreklidir.

İspat:

S kümesi (R,τ_R,I_R) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme olmak üzere

$$S \subset \left(f|_R\right)^{-1}(U)$$

olsun.

Buradan $S \subset f^{-1}(U) \cap R$ olur. S kümesi Teorem 7.14' ten (X,τ,I) ideal topolojik uzayına göre I_g-kapalı küme olduğundan ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli olduğundan

$$Cl^*(S) \subset f^{-1}(U)$$

olur.

Buradan

$$Cl^*(S) \cap R \subset f^{-1}(U) \cap R$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$Cl_R^* S \subset \left(f\big|_R\right)^{-1}(U)$$

olup $f\big|_R : (R,\tau_R,I_R) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

Teorem 7.16. (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:

(1) Her (Y,σ,J) ideal topolojik uzayı için her $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

(2) (X,τ,I) uzayı T_I-ideal uzaydır.

İspat:

(1)$\Rightarrow$(2) : U kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında boştan farklı I_g-kapalı küme olsun.

Kabul edelim ki

$$Y = X \;,\; I = J$$

ve

$$\sigma = \{Y, \emptyset, U\}$$

ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ birim fonksiyon olsun.

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli fonksiyon, U kümesi $U\subset f^{-1}(U)$ olacak şekilde (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme olduğundan

$$Cl^*(U)\subset f^{-1}(U)$$

$$=U$$

olur.

Sonuç olarak U kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\star$-kapalı kümedir.

O halde (X,τ,I) uzayı bir T_I-ideal uzaydır.

(2)$\Rightarrow$(1) : K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve V kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme olmak üzere $K\subset f^{-1}(V)$ olsun.

(X,τ,I) uzayı T_I-ideal uzay olduğundan K kümesi $\star$-kapalı kümedir.

Dolayısıyla $Cl^*(K)\subset f^{-1}(V)$ olup $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

Teorem 7.17. (X,τ,I) uzayı, (X,τ,I) uzayının $\star$-kapalı kümelerinin ailesi ile τ ailesi aynı olacak şekilde bir ideal topolojik uzay olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

(2) (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi ★-kapalıdır.

İspat:

(1)⇒(2) : $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli olsun.

U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme olsun. Teorem 6.15' ten $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalıdır. $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli olduğundan

$$Cl^*(f^{-1}(U))\subset f^{-1}(U)$$

olur.

O halde $f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında ★-kapalıdır.

(2)⇒(1) : (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi ★-kapalı olsun.

V kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında açık küme, K kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve $K\subset f^{-1}(V)$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned}Cl^*(K) &\subset Cl^*(f^{-1}(V))\\ &= f^{-1}(V)\end{aligned}$$

olur.

O halde $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

Sonuç 7.18. (X,τ,I) uzayı, (X,τ,I) uzayının ★-kapalı kümelerinin ailesi ile τ ailesi aynı olacak şekilde bir ideal topolojik uzay olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

(2) (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U kapalı kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi $\star$-açık bir kümedir.

İspat:

(1)$\Rightarrow$(2) : $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli olsun.

U kümesi (Y,σ,J) ideal topolojik uzayında kapalı küme olsun. Dolayısıyla $Y\setminus U$ kümesi açık bir küme olup Teorem 7.17' den $f^{-1}(Y\setminus U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\star$-kapalıdır.

$$f^{-1}(Y\setminus U)=X\setminus f^{-1}(U)$$

olduğundan $X\setminus f^{-1}(U)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\star$-kapalıdır.

O halde $f^{-1}(U)$ kümesi $\star$-açık bir kümedir.

(2)$\Rightarrow$(1) : (Y,σ,J) ideal topolojik uzayındaki her U kapalı kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi $\star$-açık bir küme olsun.

Bu durumda Sonuç 7.13' ten $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma,J)$ fonksiyonunun yakın sürekli olduğu görülür.

Uyarı 7.19. Aşağıdaki örnekte iki yakın sürekli fonksiyonun bileşkesinin yakın sürekli fonksiyon olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 7.20. $X=Y=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$,

$$I=J=\{\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\}\}$$

ve

$$\sigma = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

olsun.

Bu durumda

$$f(a) = d,\ f(b) = b,\ f(c) = c,\ f(d) = a$$

şeklinde tanımlı

$$f : (X,\tau,I) \to (X,\tau,I)$$

fonksiyonu ve

$$g(a) = a, g(b) = a, g(c) = b, g(d) = b$$

şeklinde tanımlı

$$g : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$$

fonksiyonu için $g \circ f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli değildir.

Ancak $f : (X,\tau,I) \to (X,\tau,I)$ ve $g : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonları yakın sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 7.21. (X,τ,I), (Y,σ,J) ve (Z,η,l) ideal topolojik uzayları verilsin. $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli ve $g : (Y,\sigma,J) \to (Z,\eta,l)$ fonksiyonu sürekli ise bu durumda $g \circ f : (X,\tau,I) \to (Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

İspat:

V kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında I_g-kapalı küme ve U kümesi (Z,η,l) ideal topolojik uzayında açık küme olmak üzere

$$V \subset (g \circ f)^{-1}(U)$$

olsun.

$g:(Y,\sigma,J)\rightarrow(Z,\eta,l)$ fonksiyonu sürekli fonksiyon olduğundan $g^{-1}(U)$ açık bir kümedir.

$f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ fonksiyonu yakın sürekli olduğundan

$$Cl^{*}(V)\subset f^{-1}(g^{-1}(U))$$

$$=(g\circ f)^{-1}(U)$$

olur.

Dolayısıyla

$$Cl^{*}(V)\subset(g\circ f)^{-1}(U)$$

olup $g\circ f:(X,\tau,I)\rightarrow(Z,\eta,l)$ fonksiyonu yakın süreklidir.

KAYNAKLAR

Açıkgöz A. ve Yüksel Ş., 2007. Some New Sets and Decompositions of A_{I-R}-continuity, α-*I*-continuity, Continuity via Idealization. *Acta Math. Hungar.* 114 (1-2): 79-89.

Dontchev J., Ganster M. ve Noiri T., 1999. Unified Operation Approach of Generalized Closed Sets via Topological Ideals. *Math. Japonica.* 49: 395–401.

Ekici E., 2011 (a). On AC_I-sets, BC_I-sets, β_I^*-open sets and Decompositions of Continuity in Ideal Topological Spaces. *Creat. Math. Inform.* 20 (1): 47-54.

Ekici E., 2011 (b). On I-Alexandroff and I_g-Alexandroff Ideal Topological Spaces. *Filomat* . 25:4 : 99-108.

Hamlett T.R. ve Rose D., 1990. $*$-topological Properties. *Internat. J. Math. Math. Sci.* 13 (3): 507-512.

Janković D. ve Hamlett T. R., 1990. New Topologies from Old via Ideals. *Amer. Math. Monthly*. 97: 295-310.

Janković D. ve Hamlett T. R., 1992. Compatible Extensions of Ideals. *Boll. Un. Mat. Ital.* (7) 6-B: 453-465.

Kuratowski K., 1966. *Topology, Vol. I.* Academic Press, New York.

Levine N., 1970. Generalized Closed Sets in Topology. *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 19 (2): 89-96.

Long P. E. ve Herrington L. L., 1978. Basic Properties of Regular-Closed Functions. *Rend . Circ. Mat. Palermo (2).* 27 (1): 20-28.

Mukherjee M. N., Roy B. ve Sen R., 2007. On Extensions of Topological Spaces in terms of Ideals. *Topology and its Appl.* 154: 3167-3172.

Navaneethakrishnan M. ve Joseph J. P., 2008. g-closed Sets in Ideal Topological Spaces. *Acta Math. Hungar.* 119 (4): 365-371.

Navaneethakrishnan M., Joseph J. P. ve Sivaraj D., 2009. I_g-normal and I_g-regular Spaces. *Acta Math. Hungar.* 125 (4): 327-340.

Navaneethakrishnan M. ve Sivaraj D., 2010. Regular Generalized Closed Sets in Ideal Topological Spaces. *J. Advanced Research in Pure Math.* 2 (3): 24-33.

Stone M. H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS.* 41: 375-381.

Vaidyanathaswamy R., 1945. The Localisation Theory in Set Topology. *Proc. Indian Acad. Sci.* 20: 51-61.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER:

Adı Soyadı : Sena ÖZEN

Doğum Yeri : Çanakkale

Doğum Tarihi : 12.05.1984

EĞİTİM DURUMU:

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce (82.500 / ÜDS 2010)

BİLİMSEL FAALİYETLERİ:

Tezler

(1) Sena ÖZEN, 2009. “$g\delta pr^{*}$-Kapalı ve $g\delta pr^{**}$-Kapalı Kümeler Üzerine”. ÇOMÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.

Projeler

(1) Destekleyen Kuruluş : Lisansüstü Tez Projesi, ÇOMÜ BAP-2009/03
Proje Adı : $g\delta pr^{*}$-Kapalı ve $g\delta pr^{**}$-Kapalı Kümeler Üzerine
Bitirme Tarihi: 17.06.2009

İŞ DENEYİMİ:

İLETİŞİM: senaozen@yahoo.com