DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN

BİR SINIFI İÇİN

SPEKTRAL PROBLEMLER

Emine ARACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN BİR SINIFI İÇİN SPEKTRAL PROBLEMLER

Emine ARACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Baki KESKİN

Yrd. Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Ünal YEŞİLGÜL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Baki KESKİN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2013

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Mustafa DEĞİRMENCİ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fenk Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

ÖZET

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN BİR SINIFI İÇİN SPEKTRAL PROBLEMLER

Emine ARACI
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Baki KESKİN
Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÖZKAN
2013, 44 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, incelenen diferansiyel denklemin belli başlangıç koşulları ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümlerinin varlığı incenmiş ve bu çözümler için integral denklemler elde edilmiştir. Ayrıca bu integral denklemler kullanılarak çözümlerin asimptotik ifadeleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, Wronskian determinantı ve özellikleri verilmiş, $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu tanımlanarak L probleminin özdeğerlerinin davranışları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Weyl fonksiyonuna göre ters problem için teklik teoremi verilmiştir

Anahtar Kelimeler: Ters Problem, Spektrum, Özdeğer, Özfonksiyon.

ABSTRACT

SPECTRAL PROBLEMS FOR A CLASS OF DİFFERENTIAL OPERATORS

Emine ARACI

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Ass. Prof. Dr. Baki KESKİN

Ass. Prof. Dr. A. Sinan ÖZKAN

2013, 44 pages

This thesis consisits of four parts.

In the first part, basic definitions and theorems which are used frequently in the spectral theory of differential operators, have been given

In the second part, existence of solution which satisfies initial conditions and discontinuity conditions of considers differential equation has been investigeted. Moreover the integral equations of the solutions of boundary value problem have been obtained and behaviours of eigenfunctions have been obtained by using these integral equations.

In the third part, the properties of Wronsky of the solutions and the characteristic function $\Delta(\lambda)$ have been investigated. By using the asymptotic's of this function, the behaviour of the eigenvalues of the problem L have been obtained.

In the last part, uniqueness theorem for the inverse problem according to the Weyl functions is given.

Keywords: Inverse Problem, Spectrum, Eigenvalue, Eigenfunction.

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyip, fikir ve tecrübeleri ile bana çok büyük destek sağlayan değerli hocalarım ve danışmanlarım Yrd. Doç. Dr. A.Sinan ÖZKAN' a ve Yrd. Doç. Dr. Baki KESKİN' e teşekkür ederim.

Emine ARACI

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bir takım uygulamalı bilimlerde özellikle de bazı fizik problemlerinde önemli bir yere sahip olan, diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, düz spektral problemler ve ters spektral problemler olarak iki ana kola ayrılır.

Düz spektral problemler, verilen operatörün spektrumunun ve özfonksiyonlarının aranması ve verilen bir fonksiyonun operatörün özfonksiyonlarına göre ayrışımının incelenmesinden ibarettir. Spektral analizin ters problemleri ise verilen belirli dizilere göre, spektral karakteristikleri bu diziler olan operatörün inşaası ile ilgilenmektedir. Bu konudaki bazı çalışmalarda, verilen spektral karakteristiklerin operatörü tek şekilde belirlediğini gösteren, ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri verilmiş; bazılarında ise verilen spektral karakteristiklere göre operatörün nasıl elde edilebileceği araştırılmış, yani algoritması verilmiştir.

Fizik, mekanik, jeofizik, elektronik ve metalurji gibi farklı bilim dallarında bir çok kez ters problemlerle karşılaşılmaktadır. Homojen olmayan telin, onun öz titreşimlerine göre yoğunluğunun hesaplanması; parçacıklar arasındaki etkileşim kuvvetlerinin, bu parçacıkların enerji seviyelerine göre belirlenmesi; kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması; jeofizikte yeraltı madenlerinin yeraltındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi problemlerinin herbiri spektral analizin ters problemlerine örnek teşkil eder.

Literatürde, ikinci mertebeden

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda w(x)y \tag{0.1}$$

diferansiyel denklemine Sturm-Liouville denklemi; bu denklem veya bu denklem ve farklı bir takım sınır koşulları tarafından üretilen operatörlere Sturm-Liouville operatörleri; bu operatörler için konulan spektral problemlere ise Sturm-Liouville problemleri denir. Diferansiyel operatörlerin düz ve ters spektral problemlerinde bu operatörler sınıfı önemli bir yere sahiptir. Zira, Sturm-Liouville problemleri daha fazla somut uygulama alanına sahiptir.

Örneğin, kuantum mekaniğindeki Schrödinger dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + V(x)u(x,t) = 0$$

şeklindedir. Burada $u(x,t)$ parçacığın dalga fonksiyonu, $V(x)$ potansiyel alan, m parçacığın kütlesi ve $\hbar$ Planck sabitidir. E, u'nun konumuna karşılık gelen enerji seviyesi olmak üzere yukarıdaki denklemde

$$u(x,t) = e^{it\sqrt{E}}y(x)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$-y'' + \frac{2m}{\hbar}V(x)y = \frac{2m}{\hbar}Ey$$

denklemi elde edilir ki bu, Sturm Liouville tipinde bir denklemdir.

Klasik fizikten bir başka örnek de telin titreşim denklemidir. $p(x)$ telin x noktasındaki gerilimini; $w(x)$ yoğunluğunu; $q(x)$ ise geri çağırıcı kuvvet katsayısını belirtmek üzere bu denklem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - q(x)u(x,t) = w(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Telin normal salınım yaptığı kabul edilerek, bu denklemin çözümü,

$$u(x,t) = y(x)\sin\sqrt{\lambda}t$$

şeklinde aranırsa, yeni aranan $y(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki klasik Sturm Liouville denklemini sağlayacağı kolayca görülür:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda w(x)y$$

Sturm Liouville operatörlerinin spektral teorisi ile ilgili ilk sonuçlar Bernoulli, D'Alembert, Euler, Liouville ve Sturm'a aittir. 1830'larda Sturm (1836) ve Liouville(1836), belirli koşullar altında (0.1) denklemini ve belli sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ fonksiyonlarının varlığına olanak veren λ sayılarının, yani özdeğerlerin, ayrık bir küme oluşturduğunu ispatlamışlardır.

20. yuzyılda farklı operatör sınıfları için spektral teori daha hızlı bir biçimde gelişmiştir. Bu dönemde, Birkhoff, Weyl, Hilbert, Neumann ve diğer birçok

matematikçi önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Sonlu aralıkta ikinci mertebeden diferansiyel ifadeler ve regüler sınır koşulları ile üretilen operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda, lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerden faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı kavramları kurulmuştur. Soyut H Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H'da lineer selfadjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. 19. ve 20. yüzyıllarda yaşamış birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normalleştirici sayılar, vs. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller elde edilmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer bazı matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm selfadjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından ele alınmıştır.

Diferansiyel operatörler için ters spektral problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan'a aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 0.1(Ambartsumyan, 1929): $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ sayıları

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \tag{0.2}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.3}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan'ın bu çalışması ilk bakışta, özdeğerlerin $q(x)$ fonksiyonunu tek şekilde belirleyebileceğini akla getirse de bunun genelde doğru olmadığı G. Borg' un 1945 yılındaki çalışmasında gösterilmiştir. Bu nedenle de, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisnai bir durum olarak düşünülmektedir. Borg, bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı spektrumları olduğunu farz ederek operatörü bu dizilerin yardımıyla belirlemektedir. Bu sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 0.2(Borg, 1945): h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılar olmak üzere, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (0.2) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.4}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.5}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (0.2) denklemi, (0.5) ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (h \neq h_1) \tag{0.6}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirler.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü belirlediğini N. Levinson(1949) ispatlamıştır. Ayrıca, N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli tek olarak belirlediğini de göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte(1938), J. Lions(1957) ve B. M. Levitan(1964) tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner(1948) incelemiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko tarafından kaydedilmiştir. 1950 yılında V.A. Marchenko ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (0.2) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(0, \lambda) = h, \tag{0.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \tag{0.8}$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n} \tag{0.9}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko, G. Borg' un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir(V.A. Marchenko, 1950). Ayrıca bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. V. A. Marchenko' nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein(1951, 1954), Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirlemek için etkili yöntem vermiştir.

I. M. Gelfand ve B. M. Levitan'ın 1951 yılında yayımlanan çalışmasında, klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirlenmesi için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.

Regüler Sturm-Liouville operatörünün iki spektruma göre belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov' un (1964) çalışmasında verilmiştir.

Aralığın iç noktasında süreksizlik koşullarına sahip Sturm-Liouville problemleri genel olarak aşağıdaki eşitlikler ve bunlara eklenen çeşitli sınır koşulları ile üretilir:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in (0, d) \cup (d, \pi) \tag{0.10}$$

$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) = \alpha^{-1} y'(d-0) + \beta y(d-0) \end{cases} \tag{0.11}$$

Burada $\alpha > 0$, $|\alpha - 1|^2 + \beta^2 \neq 0$, $d \in (0, \pi)$'dır.

Bu tür problemlerle ilgili ilk çalışma H. Hald'a aittir (Hald, O., 1984). Bu çalışmada Hald, klasik sınır koşulları altında düz ve ters spektral problemi incelemiş ve operatörün bir özdeğer dizisinin ve aralığın ilk yarısında $q(x)$ fonksiyonunun bilinmesi halinde operatörün tek olarak belirlenebileceğini göstermiştir.

R. Kh. Amirov (2006) çalışmasında benzer bir problemi ele almış ve verilen operatörün belli başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri için integral gösterim elde etmiştir. Ayrıca bu çalışmada operatörün spektral özellikleri ile bu spektral özelliklere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır. Diğer yandan R. Kh. Amirov 'un (2004, 2009) çalışmaları, farklı tipten süreksiz Sturm-Liouville ve Dirac operatörleri için düz ve ters spektral problemleri içermektedir. Bu çalışmalardaki ters problemler, Weyl fonksiyonuna göre, özdeğer ve normalleşirici sayı dizilerine göre ve iki spektruma göre ayrı ayrı ele alınmış ve teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Spektral parametreye bağlı sınır koşulları Sturm ve Liouville'in zamanından çok önce S. D. Poisson(1820) tarafından incelenmiştir. M. A. Naimark, "Linear Differential Operators"(1968) kitabında sınır koşullarının parametreye bağlı olduğu özdeğer problemlerini tanımlamış ve bu tür problemleri genelleştirilmiş özdeğer problemi olarak adlandırmıştır. Bu tip problemler genelde (0.4) ve (0.5) sınır koşullarının birinin veya her ikisinin katsayılarını λ parametesine bağlı seçmekle elde edilir. Örneğin, $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere, (0.5) koşulu

$$a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)y'(\pi) = 0 \tag{0.12}$$

şeklinde yazılırsa parametreye bağlı bir sınır koşulu elde edilir. Eğer $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonları λ'nın lineer (doğrusal) fonksiyonları ise sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlıdır denir. Böyle sınır koşullu Sturm-Liouville operatörü için spektral problem ilk olarak C. T. Fulton(1977, 1980) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada Fulton, probleme karşılık gelen teorik operatörü tanımlayarak bu ope- ratör yardımıyla, problemin özdeğerlerinin bazı önemli özelliklerini (örneğin reel ve cebirsel olarak basit olması gibi) elde etmiştir. N. J. Guliyev, (2005) çalışmasında bir sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlı Sturm-Liouville ters problemi için Gelfand-Levitan-Marchenko tipinde esas denklem elde ederek bu problemin tam çözümünü vermiştir. Ayrıca, O. Sh. Mukhtarov(1994), R. Kh. Amirov, B. Keskin ve A. S. Özkan(2009) ve benzeri bir takım çalışma, lineer koşullarla ilgili düz ve ters spektral problemleri içermektedir. Bu çalışmaların bazılarında parametreye bağlı sınır koşullarının yanısıra aralıkta süreksizlik koşulları da bulunmaktadır.

Son zamanlarda daha çok $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının λ'ya daha genel şekilde (polinom veya tam fonksiyon şeklinde) bağlı olduğu durum ele alınmaktadır. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$'nın keyfi birer polinom olduğu durum ilk olarak E. M. Russakovskii(1975) tarafından ele alınmıştır. Bu durumda problemin teorik operatör ifadesi ve özdeğerlerinin bazı önemli özellikleri bu çalışmada araştırılmıştır. Bu tür operatörler için düz problemler yaygın bir şekilde çalışılmış olmasına rağmen ters problemler ancak son yıllarda ilgi görmeye başlamıştır. P. A. Binding, P, J. Browne ve B. A. Watson, (2004) çalışmalarında,

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \lambda y \\ &y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 \\ &a(\lambda)y(1) + b(\lambda)y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{0.13}$$

problemini ele almış ve bu problem için, özdeğerlerin asimptotik ifadeleri, özfonksiyonların salınımı gibi bazı spektral özellikleri inceleyip, farklı bazı verilere göre ters problemin çözümü için teklik teoremlerini ispatlamışlardır.

2011 yılında Chernozukova ve Freiling (0.13) problemini aşağıdaki şekilde genelleştirmişlerdir

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \lambda y \\ &a(\lambda)y(1) + b(\lambda)y'(1) = 0 \\ &c(\lambda)y(1) + d(\lambda)y'(1) = 0 \end{aligned}$$

$a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının çeşitli durumlarına göre düz veya ters spektral problemler diğer bazı matematikçiler tarafından da çok yaygın bir şekilde çalışılmıştır. Zh. Ben Amara, A. M. Savchuk(1999), A. A. Shkalikov(1986), N. Yu. Kapustin(1999), N. B. Kerimov(2003), P. Binding, P. J. Browne, K. Seddighi(1993), ve P. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson(2000, 2001) bunların en önde gelenleridir.

Bu tezde, aşağıda verilen problem için yukarıda adı geçen bazı çalışmalardaki sonuçlar elde edilmiştir.

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,d) \cup (d,1) \tag{0.14}$$

$$U(y) \ : \ = a_0(\lambda)y(0) - b_0(\lambda)y'(0) = 0 \tag{0.15}$$

$$V(y) \ : \ = a_1(\lambda)y(1) - b_1(\lambda)y'(1) = 0 \tag{0.16}$$

$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) = \alpha^{-1} y'(d-0) \end{cases} \tag{0.17}$$

Burada, $\alpha_i(\lambda)$ ve $b_i(\lambda)$, $i = 0,1$ reel katsayılı polinomlar, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $d \in (0,1)$, $q(x) \in \mathcal{L}_2(0,1)$ uzayından reel değerli fonksiyonlar ve λ spektral parametredir.

Bu tezin birinci bölümünde, çalışmada kullanılan bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir. Bu bölüm hazırlanırken Tichmarsh(1932), Freiling ve Yurko(2001), Levitan ve Sargsyan(1988) ve M. A. Naimark(1968) kaynakları esas alınmıştır.

İkinci bölümde, öncelikle ele alınan denklemin belli başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri araştırılarak bu çözümlerin asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Daha sonra bu asimptotik formüller kullanılarak, problemin karakteristik fonksiyonu ve onun özellikleri öğrenilmiştir. Üçüncü bölümde ise Weyl fonksiyonlara göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1: Kompleks düzlemde bir z_0 noktası ve bu noktanın en az bir $\delta > 0$ komşuluğunda tanımlı olan bir $f(z)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.1}$$

limiti mevcut ve sonlu ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limitin değeri de $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi olarak adlandırılır, $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir W alt kümesindeki tüm noktalarda analitik ise $f(z)$'ye W'de analitik fonksiyon denir.

Tanım 1.3: Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir.

Tanım 1.4: $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $f(z)$'ye W'da sınırlı fonksiyon denir.

Teorem 1.5(Liouville): Komleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 1.6: $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 1.7: $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$'nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 1.8: z_0, bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii)

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \tag{1.2}$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası (kutup yeri) denir.

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$'nin esas aykırı noktası denir.

Teorem 1.9(Rouché): f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ, B bölgesinde bulunan ve f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada, Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g, B içinde analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ olur.

Tanım 1.10: $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \tag{1.3}$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{1.4}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir.

Tanım 1.11: $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho}) \tag{1.5}$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (1.4) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir. ve σ ile gösterilir.

Teorem 1.12(Hadamard): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \tag{1.6}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$'nin orijindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$'nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 1.13: f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde analitik fonksiyonlar ve $\{z_n\} \subset B$

$i)$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$

$ii)$ $z_0 \in B$

$iii)$ $\forall n$ için, $f(z_n) = g(z_n)$

koşullarını sağlayan bir dizi ise $\forall z \in B$ için $f(z) = g(z)$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 1.14: n. mertebeden bir lineer diferansiyel ifade

$$\ell(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları denir.

Tanım 1.15: a ve b sonlu sayılar olmak üzere $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse (Lebesgue anlamında) (1.7) diferansiyel ifadesine regüler diferansiyel ifade; aksi halde, yani a veya b sonsuz veya $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ fonksiyonlarından en az biri $[a,b]$ aralığında integrallenebilir değilse (1.7) diferansiyel ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

$C^n(a,b)$, (a,b) aralığında n. mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı olmak üzere bir $y \in C^n(a,b)$ fonksiyonunun ve $(n-1)$. mertebeye kadar olan türevlerinin belli bir lineer birleşimini $U(y)$ ile gösterelim:

$$U(y) = a_0 y(a) + a_1 y'(a) + ... + a_{n-1} y^{(n-1)}(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) + ... + b_{n-1} y^{(n-1)}(b) \tag{1.8}$$

Belli ki $U(y)$ ifadesi a_i, b_i katsayılarına bağlıdır. Buna göre bu katsayılar değiştirilerek farklı şekillerde $U_v(y)$, $\quad v = 1, 2, ..., m$ ifadeleri elde etmek mümkündür.

Tanım 1.16:

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m \tag{1.9}$$

eşitliklerine $y \in C^n(a, b)$ fonksiyonu için konulan sınır koşulları adı verilir.

Tanım 1.17: $D = \{y \in C^n(a, b) : \ U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m\}$ kümesi üzerinde $Ly = \ell(y)$ eşitliği ile bir lineer operatör tanımlanır. Bu operatöre $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.9) sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir.

Bu tanımdan anlaşıldığı gibi aynı diferansiyel ifade ile, sınır koşulları değiştirilerek, farklı operatörler tanımlamak mümkündür. Ayrıca (1.9) koşulları verilmeksizin de operatör tanımlanabilir ki bu, $C^n(a, b)$ üzerinde $\ell(y)$ ile üretilen tüm operatörlerin genişlemesi olur.

Teorem 1.18(Lagrange Formülü): $C^n(a, b)$ uzayındaki herhangi y ve z fonksiyonları için,

$$\int_a^b \ell(y)\,\overline{z}dx = P(\xi, \eta) + \int_a^b y\overline{\ell^*(z)}dx \tag{1.10}$$

eşitliği geçerlidir. Burada,

$\ell^*(z) = (-1)^n (\overline{p_0}z)^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{p_1}z)^{(n-1)} + (-1)^{n-2} (\overline{p_2}z)^{(n-2)} + ... + \overline{p_n}z$ ve $P(\xi, \eta)$,

$$\begin{aligned} \xi &= \big(y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)\big), \\ \eta &= \big(z(a), z'(a), ..., z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b), ..., z^{(n-1)}(b)\big) \end{aligned} \tag{1.11}$$

değişkenlerinin belirli bir lineer formudur.

Tanım 1.19: ℓ^* ifadesi ℓ'nin adjoint diferansiyel ifadesi olarak adlandırılır. Eğer $\ell^* = \ell$ eşitliği gerçeklenirse ℓ'ye self-adjoint (özeşlenik) diferansiyel ifade denir.

Teorem 1.20: Reel katsayılı herhangi bir self-adjoint diferansiyel ifade çift mertebelidir ve aşağıdaki şekildedir:

$$\ell(y) = \left(p_0 y^{(n)}\right)^{(n)} + \left(p_1 y^{(n-1)}\right)^{(n-1)} + ... + p_n y \tag{1.12}$$

Teorem 1.21: $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), ..., p_n(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığında ölçülebilir ve onun her bir $[\alpha,\beta]$ alt aralığında integrallenebilir ise, herhangi bir $x_0 \in (a,b)$ noktası ve $y_1, y_2, ...y_{2n-1}$ keyfi sabitleri için,

$$\left(p_0 y^{(n)}\right)^{(n)} + \left(p_1 y^{(n-1)}\right)^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

denkleminin

$$y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = \overline{0, 2n-1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $y(x)$ çözümü vardır. Burada, $y^{[k]}(x)$ ifadesi $y(x)$ fonksiyonunun k.mertebeden quasi-türevini gösterir ve

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = \overline{1, n-1} \\ y^{(n)} &= p_0 \frac{d^n y}{dx^n}, \\ y^{(n+k)} &= p_k \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}\left(y^{(n+k-1)}\right), \quad k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

seklinde tanımlanır.(Naimark, 1968)

Tanım 1.22: λ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\begin{cases} \ell(y) = \lambda y \\ U_v(y) = 0, \ v = \overline{1, m} \end{cases} \tag{1.13}$$

sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa λ'ya bu sınır değer probleminin bir özdeğeri; $y(x)$'e de λ'ya karşılık gelen özfonksiyonu denir. (1.13) sınır değer problemi çoğunlukla $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.9) sınır koşulları tarafından üretilen özdeğer problemi olarak adlandırılır.

Tanım 1.23: Tanım 1.22'de $n = m$ olsun. $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), ..., y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları,

$$\ell(y) = \lambda y$$

denkleminin

$$y_i^{(j-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ 1, & i = j \text{ ise} \end{cases}, \quad i,j = \overline{1,n}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

determinantına (1.13) probleminin veya ona karşılık gelen diferansiyel operatörün karakteristik fonksiyonu denir.

Teorem 1.24: (1.13) probleminin özdeğerleri ile $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları çakışır.

Tanım 1.25: Herhangi bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$'nın k-katlı sıfırı ise k'ya λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir; eğer özel olarak $k=1$ ise λ'ya cebirsel olarak basit özdeğer adı verilir.

Uyarı 1.26: (1.13) probleminde $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ya da $U_v(y)=0$ sınır koşullarının katsayıları λ parametresine bağlı seçilebilir. Bu durumda daha genel bir özdeğer problemi elde edilir.(Naimark ,1968)

Tanım 1.27: ρ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\ell(y) = -\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right) + Q(t)u = \rho w(t)u, \quad t \in (a,b) \tag{1.15}$$

diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} A_1 u(a) + B_1 u'(a) = 0 \\ A_2 u(b) + B_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine Sturm-Liouville sınır değer problemi denir. Burada A_1, B_1, A_2, B_2 reel sabitler olup $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca $p(t)$, $q(t)$ ve $w(t)$ reel değerli fonksiyonlardır.

Şimdi $p(t) > 0$, $w(t) > 0$ ve $\dfrac{dp(t)}{dt}$ ve $\dfrac{d^2(p(t)w(t))}{dt^2}$ fonksiyonlarının (a,b)'de sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$M = \int_a^b \sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds, \quad f(t) = \sqrt[4]{p(t)w(t)}$$

olmak üzere

$$x = \frac{1}{M}\int_a^t \sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds, \quad y = uf(t) \tag{1.17}$$

dönüşümü yapılırsa, (1.15) denklemi,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1) \tag{1.18}$$

denklemine; (1.16) sınır koşulları ise

$$\begin{cases} y'(0) + hy(0) = 0 \\ y'(1) + Hy(1) = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

koşullarına dönüşür. Burada, $q(x) = \dfrac{f''(x)}{f(x)} + M^2\dfrac{Q(x)}{w(x)}$, $\lambda = M^2\rho$ ve $h, H \in \mathbb{R}$ dir. (1.18)-(1.19) problemine Sturm-Liouville probleminin kanonik hali adı verilir.

$L_2(0,1)$ üzerinde, tanım kümesi

$D(L) = \{y(x) : y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları $(0,1)$ aralıklarında mutlak sürekli, $\ell y \in L_2(0,1)$, $y'(0) + hy(0) = 0$, $y'(1) + Hy(1) = 0\}$

olan L operatörü şu şekilde tanımlansın:

$$Ly = -y'' + q(x)y \tag{1.20}$$

L operatörü bir lineer diferansiyel operatördür. Ayrıca kolayca görülür ki, (1.18)-(1.19) problemini L operatörü için özdeğer probleminden başka bir şey değildir. Bu şekilde tanımlı operatöre Sturm-Liouville operatörü denir. Sturm-Liouville operatörlerinin sahip olduğu en temel özellikler aşağıdaki teoremde sıralanmıştır.

Teorem 1.28: *a)* L, $D(L)$ üzerinde kapalı, self-adjoint bir operatördür.

b) L sınır değer problemi, mutlak değerlerine göre sıralandığında sınırsız şekilde büyüyen, sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.

c) L'nin özdeğerleri reel sayılardır ve herhangi farklı iki özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir, yani $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerler ve $y(x,\lambda_1)$, $z(x,\lambda_2)$ onlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise,

$$\int_0^1 y(x,\lambda_1)\overline{z(x,\lambda_2)}dx = 0 \tag{1.21}$$

eşitliği geçerlidir.

d) Özdeğerler dizisini $\{\lambda_n\}$ ile gösterirsek, n'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik ifade geçerlidir:

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{c}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.22}$$

Burada, $c = h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 q(x)dx$ dir.

e) $u(x,\lambda)$ ve $v(x,\lambda)$ fonksiyonları (1.18) denkleminin, sırasıyla,

$$\begin{aligned} u(0,\lambda) &= 1, \quad u'(0,\lambda) = -h \\ v(1,\lambda) &= 1, \quad v'(1,\lambda) = -H \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, herhangi bir $f(x) \in L_2(0,1)$ fonksiyonu için

$$-y'' + \{q(x) - \lambda\}\, y = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1.23}$$

denkleminin çözümü

$$y(x,\lambda) = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) dt \tag{1.24}$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $G(x,t,\lambda)$, Green fonksiyonudur ve

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} u(x,\lambda)v(t,\lambda), & x \le t \\ u(t,\lambda)v(x,\lambda), & t \le x \end{cases}$$

şeklindedir. (1.24) ile tanımlanan operatöre L'nin resolvent operatörü adı verilir ve bu operatör L'nin özdeğerleri dışında tanımlıdır.

2. BÖLÜM

PROBLEMİN KONUMU VE ÇÖZÜMLERİN ÖZELLİKLERİ

Aşağıdaki L sınır değer problemini ele alalım;

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,d) \cup (d,1) \tag{2.1}$$

$$U(y) := a_0(\lambda)y(0) - b_0(\lambda)y'(0) = 0 \tag{2.2}$$

$$V(y) := a_1(\lambda)y(1) - b_1(\lambda)y'(1) = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ \\ y'(d+0) = \alpha^{-1} y'(d-0) \end{cases} \tag{2.4}$$

Burada, $\alpha_i(\lambda)$ ve $b_i(\lambda)$, $(i=0,1)$, reel katsayılı ortak sıfıra sahip olmayan polinomlar, $a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1}\lambda + a_{i2}\lambda^2 + ... + a_{im_i}\lambda^{m_i}$; $b_i(\lambda) = b_{i0} + b_{i1}\lambda + b_{i2}\lambda^2 + ... + b_{in_i}\lambda^{n_i}$; $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $d \in (0,1)$, $q(x) \in \mathcal{L}_2(0,\pi)$ uzayından reel değerli fonksiyon ve λ spektral parametredir. Burada $q(x)$ fonksiyonu sıklıkla potansiyel olarak adlandırılır. Bundan böyle , L sınır değer problemi denildiğinde (2.1)-(2.4) problemi anlaşılacaktır. Bundan böyle $n = max\{m_1, n_1\}$ ve $m =$der$(b_0(\lambda)) \geq$der$(a_0(\lambda))$ olduğu kabul edilecektir.

Şimdi (2.1) denkleminin $(0,d)$ ve $(d,1)$ aralıklarında

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \\ \varphi' \end{pmatrix}(0,\lambda) = \begin{pmatrix} b_0(\lambda) \\ \\ a_0(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \\ \psi' \end{pmatrix}(1,\lambda) = \begin{pmatrix} b_1(\lambda) \\ \\ a_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümleri $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ olsun. $y'' + \lambda y = 0$ homojen denkleminin iki lineer bağımsız çözümü:

$$\begin{pmatrix} y_1(x,k) \\ \\ y_2(x,k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ikx} \\ \\ e^{-ikx} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $k = \sqrt{\lambda}$' dır. Dolayısıyla bu denklemin genel çözümü

$y = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}$ veya

$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ şeklinde yazılabilir.

$y'' + \lambda y = q(x)y$ homojen olmayan diferansiyel denkleminin genel çözümünü,

$$y = c_1(x) \cos kx + c_2(x) \sin kx$$

şeklinde arayalım. Parametrelerin değişimi yöntemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos kx + c_2'(x) \sin kx &= 0 \\ -c_1'(x)\, k \sin kx + c_2'(x) \cos kx &= q(x)\, y \end{aligned}$$

sisteminden,

$$c_1(x) = -\frac{1}{k}\int_0^x \sin kt q(t)\, y(t)\, dt + c_1$$

$$c_2(x) = \frac{1}{k}\int_0^x \cos kt q(t)\, y(t)\, dt + c_2$$

eşitlikleri bulunur. Burada $c_1(x)$ ve $c_2(x)$' in ifadeleri denklemde yerine yazıldığı takdirde;

$$y(x) = c_1(x) \cos kx + c_2(x) \sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\, q(t)\, y(t,k)\, dt \tag{2.6}$$

integral denklemi elde edilir.

Teorem2.1:$\varphi(x,k)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemleri sağlar

$x < d$ için,

$$\varphi(x,k) = b_0(\lambda) \cos kx + \frac{a_0(\lambda)}{k} \sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t) q(t) \varphi(t,k) dt \tag{2.7}$$

$x > d$ için,

$$\begin{aligned}\varphi(x,k) &= b_0(\lambda)\alpha^+\cos kx + \alpha^-\cos k\,(2d-x) \\ &+\frac{1}{k}a_0(\lambda)\left[\alpha^+\sin kx + \alpha^-\sin k\,(2d-x)\right] \\ &+\frac{1}{k}\int\limits_0^d\left[\alpha^+\sin k\,(x-t)+\alpha^-\sin k\,(2d-x-t)\right]dt \qquad (2.8) \\ &+\frac{1}{k}\int\limits_d^x \sin k\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\,dt\end{aligned}$$

İspat: Öncelikle $(0,d)$ aralığında (2.1) denkleminin (2.5) başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü bulalım. (2.6) denkleminden

$$\varphi\,(x,k) = c_1\cos kx + c_2\sin kx + \frac{1}{k}\int\limits_0^x \sin k\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\,dt$$

$$\varphi'\,(x,k) = -c_1k\sin kx + c_2k\cos kx + \int\limits_0^x \cos k\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\,dt$$

şeklinde yazılır. Şimdi (2.5) başalangıç koşulları gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned} c_1 &= b_0(\lambda) \\ c_2 &= \frac{a_0(\lambda)}{k}\end{aligned}$$

değerleri bulunur. Bulunan bu değerler denklemde yerine yazılırsa,

$$\varphi(x,k) = b_0(\lambda)\cos kx + \frac{a_0(\lambda)}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int\limits_0^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)dt$$

denklemi elde edilir. O halde $x < d$ için

$$\varphi(x,k) = b_0(\lambda)\cos kx + \frac{a_0(\lambda)}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int\limits_0^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t.k)dt$$

integral denklemi elde edilmiş olur. (2.8) eşitliğini ispatlamak için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu $(d,1)$ aralığına (2.4) sıçrama koşullarını da sağlayacak şekilde devam ettirmek gerekir. Bunun için $\varphi(x,\lambda)$ çözümünün $(d,1)$ aralığında aşağıdaki şekilde arayalım,

$$\varphi(x,k) = A\left(k\right)\cos kx + B\left(k\right)\sin kx + \frac{1}{k}\int\limits_0^x \sin k\left(x-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt.$$

Türev alınırsa;

$$\varphi'(x,k) = -kA\left(k\right)\sin kx + kB\left(k\right)\cos kx + \int\limits_0^x \cos k\left(x-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

bulunur.

$x < d$ için bulunan $\varphi(x,k)$ nin türevi:

$$\varphi'(x,k) = a_0(\lambda)\cos kx - kb_0(\lambda)\sin kx + \int\limits_0^x \cos k\left(x-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

şeklinde olup,

$$\begin{aligned}\varphi\left(d+0,k\right) &= \alpha\varphi\left(d-0,k\right)\\ \varphi'\left(d+0,k\right) &= \alpha^{-1}\varphi'\left(d-0,k\right)\end{aligned}$$

sıçrama koşulları yardımıyla,

$$A\left(k\right)\cos kd + B\left(k\right)\sin kd + \frac{1}{k}\int\limits_0^d \sin k\left(d-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$= \alpha\frac{a_0(\lambda)}{k}\sin kd + \alpha b_0(\lambda)\cos kd + \frac{\alpha}{k}\int\limits_0^d \sin k\left(d-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

ve

$$-kA\left(k\right)\sin kd + kB\left(k\right)\cos kd + \int\limits_0^d \cos k\left(d-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$= \alpha^{-1}a_0(\lambda)\cos kd - \alpha^{-1}kb_0(\lambda)\sin kd + \alpha^{-1}\int\limits_0^d \cos k\left(d-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa çözülürse $A(k)$ ve $B(k)$ değerleri:

$$A(k) = +\alpha\frac{a_0(\lambda)}{k}\sin kd\cos kd - \frac{\alpha^{-1}}{k}a_0(\lambda)\cos kd\sin kd$$

$$+\alpha b_0(\lambda)\cos^2 kd + \alpha^{-1}b_0(\lambda)\sin^2 kd - \frac{1}{k}\int_0^d \sin k(d-t)\cos kdq(t)\varphi(t,k)\,dt$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_0^d \sin k(d-t)\cos kdq(t)y(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^d \cos k(d-t)\sin kdq(t)\varphi(t,k)\,dt$$

$$-\frac{\alpha^{-1}}{k}\int_0^d \cos k(d-t)\sin kdq(t)\varphi(t,k)\,dt$$

ve

$$B(k) = \alpha\frac{a_0(\lambda)}{k}\sin^2 kd + \frac{\alpha^{-1}}{k}a_0(\lambda)\cos^2 kd - \alpha^{-1}b_0(\lambda)\sin kd\cos kd$$

$$+\alpha b_0(\lambda)\cos kd\sin kd - \frac{1}{k}\int_0^d \sin k(d-t)\sin kdq(t)\varphi(t,k)\,dt$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^d \cos k(d-t)\cos kdq(t)\varphi(t,k)\,dt$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_0^d \sin k(d-t)\sin kdq(t)\varphi(t,k)\,dt$$

$$+\frac{\alpha^{-1}}{k}\int_0^d \cos k(d-t)\cos kdq(t)\varphi(t,k)\,dt$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu $A(k)$ ve $B(k)$ değerleri;

$$\varphi(x,k) = A(k)\cos kx + B(k)\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)q(t)\varphi(t,k)\,dt$$

denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\varphi(x,k)=\alpha\frac{a_0(k^2)}{k}\sin kd\cos kd\cos kx+\alpha b_0(k^2)\cos^2 kd\cos kx+\alpha\frac{a_0(k^2)}{k}\sin^2 kd\sin kx$$

$$+\alpha b_0(k^2)\cos kd\sin kd\sin kx+\frac{1}{\alpha k}a_0(k^2)\cos^2 kd\sin kx-\frac{1}{\alpha}b_0(k^2)\sin kd\cos kd\sin kx$$

$$-\frac{1}{\alpha k}a_0(k^2)\cos kd\sin kd\cos kx+\frac{1}{\alpha}b_0(k^2)\sin^2 kd\cos kx$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^d \sin k\left(d-t\right)\cos kd\cos kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^d \cos k\left(d-t\right)\sin kd\cos kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_0^d \sin k\left(d-t\right)\cos kd\cos kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_0^d \sin k(d-t)\sin kd\sin kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$-\frac{1}{\alpha k}\int_0^d \cos k\left(d-t\right)\sin kd\cos kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^d \sin k\left(d-t\right)\sin kd\sin kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^d \cos k\left(d-t\right)\cos kd\sin kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$+\frac{1}{\alpha k}\int_0^d \cos k\left(d-t\right)\cos kd\sin kx q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k\left(x-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,k\right)dt$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse;

$$\varphi(x,k)=\alpha b_0(k^2)\cos kd\cos k\left(x-d\right)+\frac{1}{\alpha}b_0(k^2)\sin kd\sin k\left(d-x\right)$$

$$+\frac{\alpha}{k}a_0(k^2)\sin kd\cos k\left(d-x\right)-\frac{1}{\alpha k}a_0(k^2)\cos kd\sin k\left(d-x\right)$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^d \sin k\,(d-t)\cos k\,(d-x)\,dt+\frac{1}{k}\int_0^d \cos k\,(d-t)\sin k\,(d-x)\,dt$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_0^d \sin k\,(d-t)\cos k\,(d-x)\,dt-\frac{1}{\alpha k}\int_0^d \cos k\,(d-t)\sin k\,(d-x)\,dt$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\,dt$$

$$\varphi(x,k)=\frac{\alpha}{2}b_0(k^2)\,[\cos kx+\cos k\,(2d-x)]+\frac{1}{2\alpha}b_0(k^2)\,[\cos kx-\cos k\,(2d-x)]$$

$$+\frac{\alpha}{2k}a_0(k^2)\,[\sin k\,(2d-x)+\sin kx]-\frac{1}{2\alpha k}a_0(k^2)\,[\sin k\,(2d-x)-\sin kx]$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^d \sin k\,(x-t)\,dt+\frac{\alpha}{2k}\int_0^d [\sin k\,(2d-x-t)+\sin k\,(x-t)]\,dt$$

$$-\frac{1}{2\alpha k}\int_0^d [\sin k\,(2d-x-t)-\sin k\,(x-t)]\,dt+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\,dt$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\,dt$$

$$=\frac{\alpha}{2}b_0(k^2)\cos kx+\frac{\alpha}{2}b_0(k^2)\cos k\,(2d-x)+\frac{1}{2\alpha}b_0(k^2)\cos kx$$

$$-\frac{1}{2\alpha}b_0(k^2)\cos k\,(2d-x)+\frac{\alpha}{2k}a_0(k^2)\sin k\,(2d-x)+\frac{\alpha}{2k}a_0(k^2)\sin kx$$

$$-\frac{1}{2\alpha}a_0(k^2)\sin k\,(2d-x)+\frac{1}{2\alpha k}a_0(k^2)\sin kx-\frac{1}{k}\int_0^d \sin k\,(x-t)\,dt$$

$$+\frac{\alpha}{2k}\int_0^d \sin k\,(2d-x-t)\,dt+\frac{\alpha}{2k}\int_0^d \sin k\,(x-t)\,dt-\frac{1}{2\alpha k}\int_0^d \sin k\,(2d-x-t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2\alpha k}\int_0^d \sin k\,(x-t)\,dt+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\,dt$$

elde edilir. O halde $x > d$ için;

$$\begin{aligned}
\varphi(x,k) &= b_0(k^2)\left[\alpha^+ \cos kx + \alpha^- \cos k\,(2d-x)\right] \\
&+\frac{1}{k}a_0(k^2)\left[\alpha^+ \sin kx + \alpha^- \sin k\,(2d-x)\right] \\
&+\frac{1}{k}\int\limits_0^d \left[\alpha^+ \sin k\,(x-t) + \alpha^- \sin k\,(2d-x-t)\right] dt \\
&+\frac{1}{k}\int\limits_d^x \sin k\,(x-t)\, q\,(t)\,\varphi\,(t,k)\, dt
\end{aligned}$$

integral denklemi elde edilmiş olur. Burada $\alpha^{\pm} = \dfrac{1}{2}\left(\alpha \pm \dfrac{1}{\alpha}\right)$ şeklindedir. Böylece (2.8) ispatlanmış olur.

Benzer şekilde $\psi(x,k)$ çözümü için integral denklemleri elde edilir.

Şimdi de $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun $|k|$' nın yeterince büyük değerlerindeki davranışlarını öğrenelim.

der$(b_0(\lambda))$ $\geq$der$(a_0(\lambda))$ olsun.

Teorem2.2: $\varphi(x,\lambda)$ $\psi(x,\lambda)$ ve fonksiyonu için ,$|\lambda| \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir;

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{cases} b_{0m}\lambda^m \cos\sqrt{\lambda}x + O\left(\lambda^{m-\frac{1}{2}} \exp|\tau|\, x\right), & x<d, \\ b_{0m}\lambda^m \left[\alpha^+ \cos\sqrt{\lambda}x + \alpha^- \cos\sqrt{\lambda}(2d-x)\right] & \\ \qquad + O\left(\lambda^{m-\frac{1}{2}} \exp|\tau|\, x\right), & x>d \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\psi(x,\lambda) = \begin{cases} O\left(\lambda^n \exp\tau\,(1-x)\right), & derb_1(\lambda) \geq dera_1(\lambda) \\ O\left(\lambda^{n-\frac{1}{2}} \exp\tau\,(1-x)\right), & dera_1(\lambda) > derb_1(\lambda) \end{cases}$$

Burada, $\tau = \operatorname{Im} k$

Teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma: $k = \sigma + i\tau$, $\sigma,\tau \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olsun.

i- $|\cos kx| \leq e^{|\tau| x}$

ii- $|\sin kx| \leq e^{|\tau|x}$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

i) $\tau \geq 0$ olsun.($\tau < 0$ için benzer işlemler yapılabilir)

$$\cos kx e^{-\tau x} = \cos kx e^{-\tau x} = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} e^{-\tau x}$$

$$|\cos kx e^{-\tau x}| = \left| \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} e^{-\tau x} \right| = \left| \frac{e^{i(\sigma+i\tau)x} + e^{-i(\sigma+i\tau)x}}{2} e^{-\tau x} \right|$$

$$\leq \frac{e^{-\tau x}}{2} \left[|e^{i\sigma x} e^{-\tau x}| + |e^{-i\sigma x} e^{\tau x}| \right]$$

$$= \frac{e^{-\tau x}}{2} \left[e^{-\tau x} + e^{\tau x} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-2\tau x} \right] \leq 1$$

olur. O halde $|\cos kx| \leq e^{|\tau|x}$ eşitsizliği elde edilmiş olur.

ii) $\tau \leq 0$ olsun ($\tau > 0$ için benzer şekilde yapılabilir)

$$|\sin kx e^{\tau x}| = \left| \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} e^{\tau x} \right|$$

$$= \frac{e^{\tau x}}{2} \left| e^{i(\sigma+i\tau)x} - e^{-i(\sigma+i\tau)x} \right| \leq \frac{e^{\tau x}}{2} \left[|e^{i\sigma x} e^{-\tau x}| + |e^{-i\sigma x} e^{\tau x}| \right]$$

$$= \frac{e^{\tau x}}{2} \left[e^{-\tau x} + e^{\tau x} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + e^{2\tau x} \right] \leq 1$$

olur. Burada $|\sin kx| \leq e^{|\tau|x}$ eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi teoremin ispatına geçelim.

İspat: $x < d$ için (2.7) denkleminden

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_0(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x + b_0(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} \left(x - t \right) q\left(t \right) \varphi\left(t, \lambda \right) dt$$

şeklindedir. Lemma'dan

$$\left| e^{-|\tau|x} \varphi(x,\lambda) \right| \leq |b_0(\lambda)| \, e^{-|\tau|x} e^{|\tau|x} + \frac{|a_0(\lambda)|}{\left| \sqrt{\lambda} \right|} e^{-|\tau|x} e^{|\tau|x} + \frac{1}{\left| \sqrt{\lambda} \right|} \int_0^x e^{-|\tau|x} e^{|\tau|(x-t)} \, |q(t)| \, |\varphi(t,\lambda)| \, dt$$

$$\left| e^{-|\tau|x} \varphi(x,\lambda) \right| \leq |b_0(\lambda)| + \frac{|a_0(\lambda)|}{\left| \sqrt{\lambda} \right|} + \frac{1}{\left| \sqrt{\lambda} \right|} \int_0^x \left| e^{-|\tau|t} \varphi(t,\lambda) \right| |q(t)| \, dt$$

Burada

$$h(\lambda) := \sup\left\{e^{-|\tau|x}\left|\varphi(t,\lambda)\right| : x\in(0,d)\right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda;

$$h(\lambda)\leq |b_0(\lambda)| + \frac{|a_0(\lambda)|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} + \frac{h(\lambda)}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\int\limits_0^1 |q\left(t\right)|\,dt$$

eşitsizliği geçerli olur.

$$q\left(t\right)\in\mathcal{L}_2(0,1) \text{ olduğundan} \int\limits_0^1 |q\left(t\right)|\,dt = C,\ C\in\mathbb{R} \text{ alınırsa}$$

$$|h(\lambda)|\leq |b_0(\lambda)| + \frac{|a_0(\lambda)|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} + \frac{h(\lambda)}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}C$$

olur. $|h(\lambda)|$ bu eşitsizlikte yalnız bırakılırsa,

$$|h(\lambda)|\leq \frac{|b_0(\lambda)| + \dfrac{|a_0(\lambda)|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}}{1-\dfrac{C}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}}$$

eşitsizliği geçerlidir.$\left|\sqrt{\lambda}\right|$'nın yeterince büyük değerlerinde $\dfrac{C}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}$ yeterince küçük olacağından, yani $1-\dfrac{C}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}$ ifadesi 1'e yaklaşacağından, $|h(\lambda)|\leq C_1\left|\lambda\right|^m$ eşitsizliği elde edilir.

Buradan ,

$$\left|e^{-|\tau|x}\varphi(x,k)\right|\leq C_1\left|\lambda\right|^m \tag{2.10}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Şimdi,

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}a_0(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x + b_0(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x \sin\sqrt{\lambda}\left(x-t\right)q\left(t\right)\varphi\left(t,\lambda\right)dt$$

integral denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki integral ele alınarak (2.10) ve $\int_0^1 |q(t)|\, dt =$ C ifadeleri kullanılırsa,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t)\, q(t)\, \varphi(t,\lambda)\, dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{|\tau|x} \int_0^1 \left| e^{-|\tau|t} \varphi(t,\lambda) \right| |q(t)|\, dt \leq C e^{|\tau|x} \left| \lambda^{m-\frac{1}{2}} \right|$$

elde edilir.Yani,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t)\, q(t)\, \varphi(t,\lambda)\, dt \right| = O\left(e^{|\tau|x} \left| \lambda^{m-\frac{1}{2}} \right| \right)$$

ifadesi doğrudur. Buradan $x < d$ için,

$$\varphi(x,\lambda) = b_{0m} \lambda^m \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\lambda^{m-\frac{1}{2}} \exp |\tau|\, x \right)$$

asimptotik ifadesi elde edilmiş olur.

Benzer şekilde $x > d$ için

$$\varphi(x,\lambda) = b_0(\lambda) \left[\alpha^+ \cos \sqrt{\lambda} x + \alpha^- \cos \sqrt{\lambda}(2d-x) \right]$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_0(\lambda) \left[\alpha^+ \sin \sqrt{\lambda} x + \alpha^- \sin \sqrt{\lambda}(2d-x) \right]$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^d \left[\alpha^+ \sin \sqrt{\lambda}(x-t) + \alpha^- \sin \sqrt{\lambda}(2d-x-t) \right] dt$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_d^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t)\, q(t)\, \varphi(t\ ,\lambda) dt$$

integral denkleminde $|2d-x| \leq x$ eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\left| e^{-|\tau|x} \varphi(x,\lambda) \right| \leq \left| e^{-|\tau|x} b_0(\lambda) \alpha^+ \cos \sqrt{\lambda} x \right| + \left| e^{-|\tau|x} b_0(\lambda) \alpha^- \cos \sqrt{\lambda}(2d-x) \right|$$
$$+ \frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} \left| e^{-|\tau|x} a_0(\lambda) \alpha^+ \sin \sqrt{\lambda} x \right| + \frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} \left| e^{-|\tau|x} a_0(\lambda) \alpha^- \sin \sqrt{\lambda}(2d-x) \right|$$
$$+ \frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} \int_0^d \left| e^{-|\tau|x} \alpha^+ \sin \sqrt{\lambda}(x-t) + e^{-|\tau|x} \alpha^- \sin \sqrt{\lambda}(2d-x-t) \right| dt$$

$$+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\int\limits_{d}^{x}\left|e^{-|\tau|x}\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)\,q\,(t)\,\varphi(t,\lambda)\right|dt$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left|e^{-|\tau|x}\varphi(x,\lambda)\right|\leq|b_0\alpha^+|+|b_0\alpha^-|+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}|a_0\alpha^+|+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}|a_0\alpha^-|$$

$$+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\int\limits_{0}^{d}\left|\alpha^+e^{-|\tau|t}+e^{-|\tau|t}\alpha^-\right||\varphi(t,\lambda)q\,(t)|\,dt+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\int\limits_{d}^{x}\left|e^{-|\tau|t}\varphi(t,\lambda)\right||q(t)|\,dt$$

$$\left|e^{-|\tau|x}\varphi(x,\lambda)\right|\leq|b_0(\lambda)\alpha^+|+|b_0(\lambda)\alpha^-|+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}|a_0(\lambda)\alpha^+|+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}|a_0(\lambda)\alpha^-|$$

$$+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\int\limits_{0}^{d}|\alpha^++\alpha^-|\,e^{-|\tau|t}\varphi(t,\lambda)\,|q\,(t)|\,dt+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\int\limits_{d}^{x}\left|e^{-|\tau|t}\varphi(t,\lambda)\right||q(t)|\,dt$$

$$\left|e^{-|\tau|x}\varphi(x,\lambda)\right|\leq(\alpha^++\alpha^-)\left[|b_0(\lambda)|+\frac{|a_0(\lambda)|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}(\alpha^++\alpha^-)\int\limits_{0}^{d}\left|e^{-|\tau|t}\varphi(t,\lambda)\right||q\,(t)|\,dt+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\int\limits_{d}^{x}\left|e^{-|\tau|t}\varphi(t,\lambda)\right||q(t)|\,dt$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$h(\lambda):=\sup\left\{e^{-|\tau|x}\,|\varphi(t,\lambda)|:x\in(d,1)\right\}$$

şeklinde tanımlanır ve (2.10) eşitsizliği kullanılırsa,

$$|h(\lambda)|\leq(\alpha^++\alpha^-)\left[|b_0(\lambda)|+\frac{|a_0(\lambda)|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]$$

$$+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}(\alpha^++\alpha^-)\,h(\lambda)\int\limits_{0}^{d}|q\,(t)|\,dt+\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}h(\lambda)\int\limits_{d}^{x}|q(t)|\,dt$$

elde edilir. $\int\limits_{0}^{1}|q\,(t)|\,dt=C$ eşitliğinden,

$$|h(\lambda)| \leq \frac{(\alpha^+ + \alpha^-)\left[|b_0(\lambda)| + \dfrac{|a_0(\lambda)|}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right]}{1 - [\alpha^+ + \alpha^- + 1]\dfrac{C}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}}$$

bulunur. $\left|\sqrt{\lambda}\right|$'nın yeterince büyük değerlerinde $\left(1 - [\alpha^+ + \alpha^- + 1]\dfrac{C}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\right)$ ifadesi 1'e yaklaşacağından

$|h(\lambda)| \leq C_1 e^{|\mathrm{Im}\, k|x} |\lambda^m|$ yazılabilir. O halde,

$$\left|e^{-|\mathrm{Im}\, k|x}\varphi(x,\lambda)\right| \leq C_1 |\lambda^m|$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Ayrıca yukarıdaki eşitsizliğin integralli ifadeleri ele alınıp (2.10) ve $\int\limits_0^1 |q(t)|\, dt = C$ eşitliği kullanılırsa,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^d \left[\alpha^+ \sin\sqrt{\lambda}\,(x-t) + \alpha^- \sin\sqrt{\lambda}\,(2d-x-t)\right] dt\right|$$

$$\leq (\alpha^+ + \alpha^-)\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{|\mathrm{Im}\, k|x} |\lambda^m| \int\limits_0^d |q(t)|\, dt \leq C e^{|\mathrm{Im}\, k|x}\left|\lambda^{m-\frac{1}{2}}\right|$$

elde edilir. Yani;

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^d \left[\alpha^+ \sin\sqrt{\lambda}\,(x-t) + \alpha^- \sin\sqrt{\lambda}\,(2d-x-t)\right] dt\right| = O\left(e^{|\mathrm{Im}\, k|x}\left|\lambda^{m-\frac{1}{2}}\right|\right)$$

ifadesi doğrudur. Buradan $x > d$ için ;

$$\varphi(x,\lambda) = b_{0m}\lambda^m \left[\alpha^+ \cos\sqrt{\lambda}x + \alpha^- \cos\sqrt{\lambda}\,(2d-x)\right] + O\left(e^{|\mathrm{Im}\, k|x}\left|\lambda^{m-\frac{1}{2}}\right|\right), \quad x > d$$

olarak bulunur. Böylece (2.9) ispatlanmış olur.

$\psi(x,\lambda)$ çözümü için verilen asimptotik ifade de benzer şekilde ispatlanır.

3. BÖLÜM

KARAKTERİSTİK FONKSİYON

Bu bölümde, sıfırları (2.1)-(2.4) sınır değer probleminin özdeğerleri olan bir fonksiyon tanımlanarak bu fonksiyonun bazı özellikleri incelenecektir. Açıktır ki,bu özellikler problemi belirleyen paremetrelere bağlıdır. Önecelikle lineer diferansiyel denklemlerin genel teorisinde de verilen ve burada da kullanılcak olan Wronskian determinantı kavramından bahsedelim.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (2.1) denkleminin herhangi iki çözümü olmak üzere ,

$$\begin{aligned} W[\varphi,\psi] &:= \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda) & \psi(x,\lambda) \\ \varphi'(x,\lambda) & \psi'(x,\lambda) \end{vmatrix} \\ &= \varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \end{aligned} \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlanan $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonuna $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının Wronskian determinantı denir. Genel teoride, 2. mertebeden lineer diferansiyel denklemin herhangi iki çözümünün lineer bağımlı olması için bu determinantın sıfıra özdeş olmasının gerekli ve yeterli olduğu ispatlanmıştır. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları için yazılan Wronskian determinantı bazı önemli özelliklere sahiptir. Şimdi bunları ispatlayalım.

Lemma-3.1: $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu $[0,1]\setminus\{d\}$ kümesinde x'e bağlı degil,sadece λ paremetresine bağlıdır.

İspat: (3.1) eşitliğinin her iki yanı $[0,d)$ ve $(d,1]$ aralıklarında x'e göre türevlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] &= \frac{d}{dx}\left[\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\right] \\ &= \varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda) - \varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) \\ &= \varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda) - \psi(x,\lambda)\varphi''(x,\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (2.1) denkleminin çözümleri olduğundan, son eşitlikten, $\forall x \in [0,d) \cup (d,1]$ için,

$$\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] = \varphi(x,\lambda)\left\{q(x)-\lambda\right\}\psi(x,\lambda) - \psi(x,\lambda)\left\{q(x)-\lambda\right\}\varphi(x,\lambda) \equiv 0$$

olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu, $[0,d)$ ve $(d,1]$ aralıklarında x değişkenine göre sabit fonksiyondur. Başka bir deyimle, $W[\varphi,\psi]$, $[0,1]$ aralığında, x'e göre parçalı sabit bir fonksiyondur. Diğer yandan, (2.4) sıçrama koşullarına göre

$$\begin{aligned}
&\varphi(d+0,\lambda)\psi'(d+0,\lambda) - \psi(d+0,\lambda)\varphi'(d+0,\lambda) \\
&= \alpha\varphi(d-0,\lambda)\alpha^{-1}\psi'(d-0,\lambda) - \alpha\psi(d-0,\lambda)\alpha^{-1}\varphi'(d-0,\lambda) \\
&= \varphi(d-0,\lambda\psi'(d-0,\lambda) - \varphi'(d-0,\lambda)\psi(d-0,\lambda)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{d+0} = W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{d-0}$$

eşitliği doğrudur. Yani Wronskian sıçrama koşulları altında x den bağımsızdır. O halde $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu $[0,1]\setminus\{d\}$ kümesinde sadece λ paremetresine bağlıdır.

$W[\varphi,\psi]$ fonksiyonuna L probleminin karakteristik fonksiyonu adı verilir ve bu fonksiyon sadece λ' ya bağlı olduğundan $\Delta(\lambda)$ ile gösterilebilir. O halde; $W[\varphi,\psi] \equiv W[\varphi,\psi]_{x=1} \equiv W[\varphi,\psi]_{x=0} = \Delta(\lambda)$ yazılabilir. Açıktır ki;

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{x=1} = \varphi(1,\lambda)\psi'(1,\lambda) - \varphi'(1,\lambda)\psi(1,\lambda) \\
&= a_1(\lambda)\varphi(1,\lambda) + b_1(\lambda)\varphi'(1,\lambda) = V(\varphi)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

veya

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{x=0} = b_0(\lambda)\psi'(0,\lambda) - a_0(\lambda)\psi(0,\lambda) \\
&= -U(\psi)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

yazılabilir.

Lemma-3.2:$|\lambda|$' nın yeterince büyük değerlerinde;

$$\Delta(\lambda)=\begin{cases} b_{1n}b_{0m}\lambda^{n+m+\frac{1}{2}}\left[-\alpha^{+}\sin\sqrt{\lambda}+\alpha^{-}\sin\sqrt{\lambda}\,(2d-1)\right] \\ +O(|\lambda|^{n+m}\exp|\tau|)\ , \qquad \operatorname{der} b_1(\lambda)\geq \operatorname{der} a_1(\lambda) \\ a_{1n}b_{0m}\lambda^{n+m}\left[\alpha^{+}\cos\sqrt{\lambda}+\alpha^{-}\cos\sqrt{\lambda}\,(2d-1)\right] \\ +O(|\lambda|^{n+m-\frac{1}{2}}\exp|\tau|), \qquad \operatorname{der} b_1(\lambda)<\operatorname{der} a_1(\lambda) \end{cases}$$

asimptotik ifadesi geçerlidir.

İspat:

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{cases} b_{0m}\lambda^{m}\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\left|\lambda^{m-\frac{1}{2}}\right|\exp|\tau|\,x\right), & x<d \\ b_{0m}\lambda^{m}\left[\alpha^{+}\cos\sqrt{\lambda}x+\alpha^{-}\cos\sqrt{\lambda}\,(2d-x)\right] & \\ +O\left(|\lambda|^{m-\frac{1}{2}}\exp|\tau|\,x\right)\ , & x>d \end{cases}$$

$$\varphi'(x,\lambda)=\begin{cases} -b_{0m}\lambda^{m+\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}x+\ O\left(|\lambda|^{m}\exp|\tau|\,x\right)\ , & x<d, \\ b_{0m}\lambda^{m}\left[-\alpha^{+}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+\alpha^{-}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,(2d-x)\right] & \\ +O\left(|\lambda|^{m}\exp|\tau|\,x\right), & x>d \end{cases}$$

asimptotik eşitlikleri ve

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix}(0,\lambda)=\begin{pmatrix}b_0(\lambda)\\ a_0(\lambda)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix}(1,\lambda)=\begin{pmatrix}b_1(\lambda)\\ a_1(\lambda)\end{pmatrix}$$

koşulları kullanılırsa;

$$\Delta(\lambda)=a_1(\lambda)\varphi(1,\lambda)-b_1(\lambda)\varphi'(1,\lambda)$$
$$=a_1(\lambda)b_{0m}\lambda^{m}\left[\alpha^{+}\cos\sqrt{\lambda}+\alpha^{-}\cos\sqrt{\lambda}\,(2d-1)\right]+O\left(\left|\lambda^{m+m_1-\frac{1}{2}}\right|\exp|\tau|\right)$$
$$-\,b_1(\lambda)b_{0m}\lambda^{m+\frac{1}{2}}\left[-\alpha^{+}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+\alpha^{-}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,(2d-1)\right]+O\left(\left|\lambda^{m+n_1}\right|\exp|\tau|\right)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\Delta(\lambda)=\begin{cases} b_{1n}b_{0m}\lambda^{n+m+\frac{1}{2}}\left[-\alpha^{+}\sin\sqrt{\lambda}+\alpha^{-}\sin\sqrt{\lambda}\,(2d-1)\right] \\ +O(|\lambda|^{n+m}\exp|\tau|)\ , \qquad \mathrm{der}b_1(\lambda)\geq \mathrm{der}a_1(\lambda) \\ a_{1n}b_{0m}\lambda^{n+m}\left[\alpha^{+}\cos\sqrt{\lambda}+\alpha^{-}\cos\sqrt{\lambda}\,(2d-1)\right] \\ +O(|\lambda|^{n+m-\frac{1}{2}}\exp|\tau|), \qquad \mathrm{der}b_1(\lambda)<\mathrm{der}a_1(\lambda) \end{cases} \tag{3.5}$$

elde edilir.

Lemma-3.3: $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ile L sınır değer probleminin özdeğerleri çakışır.

İspat: Kabul edelim ki λ_0, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırıdır. Bu durumda $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu, (2.1)-(2.4) koşullarını sağlayacağından, L nin bir özfonksiyonu olur. Dolayısıyla λ_0, L nin bir özdeğeridir.

Tersine, λ_0, L'nin bir özdeğeri, $y(x,\lambda_0)$ da ona karşılık gelen özfonksiyon olsun. $y(x,\lambda_0)$ ve $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarının Wronskian determinantını yazalım:

$$W[\varphi,y]\equiv W\left.[\varphi,y]\right|_{x=0}=y(0,\lambda_0)\varphi'(0,\lambda)-y'(0,\lambda_0)\varphi(0,\lambda) \tag{3.6}$$

$y(x,\lambda_0)$ bir özfonksiyon oldduğundan, (3.6) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşittir. Bu da $W[\varphi,y]$'nın sıfıra özdeş olduğunu gösterir. Buna göre,

$$W\left.[\varphi,y]\right|_{x=1}=\varphi(1,\lambda_0)y'(1,\lambda_0)-y(1,\lambda_0)\varphi'(1,\lambda_0)=0 \tag{3.7}$$

olur. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ polinomları ortak sıfıra sahip olmadıklarından $a(\lambda_0)$ ve $b(\lambda_0)$ aynı anda sıfır olamaz. $b_1(\lambda_0)\neq 0$ olsun. ($a(\lambda_0)\neq 0$ olduğunda da benzer işlem yapılabilir) (3.7) düzenlenir ve $y(x,\lambda_0)$'ın (2.3) sınır koşulunu sağladığı hatırlanırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(1,\lambda_0)\frac{a_1(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}y(1,\lambda_0)-y(1,\lambda_0)\varphi'(1,\lambda_0) \\ &= y(1,\lambda_0)\left\{\varphi(1,\lambda_0)\frac{a_1(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}-\varphi'(1,\lambda_0)\right\} \\ &= \frac{y(1,\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}\left\{a_1(\lambda_0)\varphi(1,\lambda_0)-b_1(\lambda_0)\varphi'(1,\lambda_0)\right\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. $b(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $y(1, \lambda_0) = 0$ olamaz. Çünkü bu durumda (2.3) sınır koşulundan $y'(1, \lambda_0) = 0$ olur. Bu ise (2.1) denkleminin çözümünün tekliğinden dolayı $y(x, \lambda_0) \equiv 0$ olması demektir. Oysa ki $y(x, \lambda_0)$ bir özfonksiyondur. Dolayısıyla (3.8)'den,

$$a_1(\lambda_0)\varphi(1, \lambda_0) - b_1(\lambda_0)\varphi'(1, \lambda_0) = 0$$

bulunur. Bu ise λ_0'ın $\Delta(\lambda)$'nın bir sıfırı olduğunu gösterir.

4. BÖLÜM

TERS PROBLEM

Şimdi de, Weyl fonksiyonunu tanımlayalım. Bunun için önce (2.1) denkleminin özel bir çözümünü belirleyelim. $S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ fonksiyonları, (2.1) denkleminin,

$$\begin{pmatrix} S(0,\lambda) \\ S'(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} C(0,\lambda) \\ C'(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

başlangıç koşullarını ve (2.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$$M(\lambda) := \frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanan $M(\lambda)$ fonksiyonuna L sınır değer probleminin *Weyl fonksiyonu* denir. Açıktır ki, bu fonksiyon, özdeğerler kümesi dışında analitik ve her bir özdeğer bir kutup noktası olan, meromorfik bir fonksiyondur.

Lemma 4.1:

$$\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{b_0(\lambda)}\left[S(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right] \tag{4.4}$$

eşitliği geçelidir.

İspat: $\Phi(x,\lambda) := b_0(\lambda)\psi(x,\lambda)$ ve $\Psi(x,\lambda) := \Delta(\lambda)\left[S(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right]$ olsun. $\Phi(0,\lambda) = b_0(\lambda)\psi(0,\lambda)$ ve $\Phi'(0,\lambda) = b_0(\lambda)\psi'(0,\lambda)$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Psi(0,\lambda) &= \Delta(\lambda)\left[S(0,\lambda) + M(\lambda)\varphi(0,\lambda)\right] \\ &= \psi(0,\lambda)\varphi(0,\lambda) = b_0(\lambda)\psi(0,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi'(0,\lambda) &= \Delta(\lambda)\left[S'(0,\lambda) + M(\lambda)\varphi'(0,\lambda)\right] \\ &= \Delta(\lambda) + \psi(0,\lambda)a_0(\lambda) \\ &= b_0(\lambda)\psi'(0,\lambda) - a_0(\lambda)\psi(0,\lambda) + \psi(0,\lambda)a_0(\lambda) \\ &= b_0(\lambda)\psi'(0,\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Φ ve Ψ fonksiyonları (2.1) denkleminin aynı başlangıç koşullarını sağlayan çözümleridir. Dolayısıyla çözümün tekliği gereği $\Phi(x,\lambda) = \Psi(x,\lambda)$ geçerlidir. Bu ise ispatı tamamlamak için yeterlidir.

$\widetilde{L}$ ile aşağıdaki sınır değer problemi belirtiliyor.

$$\begin{aligned}
&-y'' + \widetilde{q}(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\widetilde{d}) \cup (\widetilde{d},\pi) \\
&a_0(\lambda)y(0) + b_0(\lambda)y'(0) = 0 \\
&\widetilde{a}_1(\lambda)y(1) + \widetilde{b}_1(\lambda)y'(1) = 0 \\
&\begin{cases} y(\widetilde{d}+0) = \widetilde{\alpha}y(\widetilde{d}-0) \\ y'(\widetilde{d}+0) = \widetilde{\alpha}^{-1}y'(\widetilde{d}-0) \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Burada, $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{a}_1(\lambda)$, $\widetilde{b}_1(\lambda)$ ve $\widetilde{d}$ parametrelerinin (2.1)-(2.4)'deki koşulları sağladıkları kabul ediliyor.

Bu bölümün amacı, Weyl fonksiyonu yardımıyla L probleminin tek şekilde belirlenebildiğini; yani, L ve $\widetilde{L}$ problemleri, aynı Weyl fonksiyonuna sahip ise $L = \widetilde{L}$ olduğunu ispatlamaktır.

Teorem 4.2: $M(\lambda)$ fonksiyonu L'yi tek şekilde belirler, yani, $M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$ ise $(0,1)$'de hemen hemen her yerde $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $\dfrac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} \equiv \dfrac{\widetilde{a}_1(\lambda)}{\widetilde{b}_1(\lambda)}$, $(\alpha, d) = \left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{d}\right)$'dır.

İspat:

$$\begin{cases} P_1(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\dfrac{\widetilde{\psi}'(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} - \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ P_2(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \varphi(x,\lambda)\dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} \end{cases} \tag{4.6}$$

şeklinde $P_1(x,\lambda)$ ve $P_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

Öncelikle, $M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$ iken $P_1(x,\lambda)$ ve $P_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tam fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
P_1(x,\lambda) &= \varphi(x,\lambda)\frac{1}{\widetilde{b}_0(\lambda)}\left[\widetilde{S}(x,\lambda)+\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\right]' \\
&\quad -\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\frac{1}{b_0(\lambda)}\left[S(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right] \\
&= \varphi(x,\lambda)\frac{1}{b_0(\lambda)}\left[\widetilde{S}'(x,\lambda)+M(\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\right] \\
&\quad -\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\frac{1}{b_0(\lambda)}\left[S(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{b_0(\lambda)}\Big[\varphi(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) \qquad (4.7)\\
&\quad -\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)S(x,\lambda)+M(\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\Big] \\
&= \frac{1}{b_0(\lambda)}\left[\varphi(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda)-\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)S(x,\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{b_0(\lambda)}\Big[a_0(\lambda)S(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda)+b_0(\lambda)C(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda) \\
&\quad -a_0(\lambda)S(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda)-b_0(\lambda)S(x,\lambda)\widetilde{C'}(x,\lambda)\Big] \\
&= C(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda)-S(x,\lambda)\widetilde{C'}(x,\lambda)
\end{aligned}$$

$C(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$ tam fonksiyon olduğundan $P_1(x,\lambda)$ tam fonksiyondur.Benzer şekilde $P_2(x,\lambda)$ fonksiyonunun da tam fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
P_2(x,\lambda) &= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\varphi(x,\lambda)\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} \\
&= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{1}{b_0(\lambda)}\left[S(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right] \\
&\quad -\varphi(x,\lambda)\frac{1}{b_0(\lambda)}\left[\widetilde{S}(x,\lambda)+M(\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{b_0(\lambda)}\big[\widetilde{\varphi}(x,\lambda)S(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) \\
&\quad -\varphi(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)M(\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\Big] \qquad (4.8)\\
&= \frac{1}{b_0(\lambda)}\left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda)S(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)\right] \\
&= \frac{1}{b_0(\lambda)}\Big[a_0(\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)S(x,\lambda)+b_0(\lambda)\widetilde{C}(x,\lambda)S(x,\lambda) \\
&\quad -a_0(\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)S(x,\lambda)+b_0(\lambda)C(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)\Big] \\
&= \widetilde{C}(x,\lambda)S(x,\lambda)+C(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)
\end{aligned}$$

şeklindedir.O halde $P_2(x,\lambda)$ tam fonksiyondur. Diğer yandan (2.9) ve (3.4) den elde edilen

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\lambda) &= O(\lambda^m e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}),\\
\varphi'(x,\lambda) &= O(\lambda^{m+\frac{1}{2}} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}),\\
\psi(x,\lambda) &= \begin{cases} \lambda^n e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(1-x)} & , n=\operatorname{der}b_1(\lambda)\geq \operatorname{der}a_1(\lambda)\\ \lambda^{n-\frac{1}{2}} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(1-x)}, & n=\operatorname{der}a_1(\lambda) > \operatorname{der}b_1(\lambda)\end{cases}\\
\psi(x,\lambda) &= \begin{cases} \lambda^{n+\frac{1}{2}} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(1-x)} & , n=\operatorname{der}b_1(\lambda)\geq \operatorname{der}a_1(\lambda)\\ \lambda^{n} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(1-x)}, & n=\operatorname{der}a_1(\lambda) > \operatorname{der}b_1(\lambda)\end{cases}\\
|\Delta(\lambda)| &\geq \begin{cases} c_\delta e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|} \left|\lambda\right|^{n+m+\frac{1}{2}}, & n=\operatorname{der}b_1(\lambda)\geq \operatorname{der}a_1(\lambda)\\ c_\delta e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|} \left|\lambda\right|^{n+m}, & n=\operatorname{der}b_1(\lambda) < \operatorname{der}a_1(\lambda)\end{cases} \quad , \quad \lambda\in B_\delta
\end{aligned}$$

bağıntıları kullanılarak her bir x için $P_1(x,\lambda)=O(1)$ ve $P_2(x,\lambda)=O(\lambda^{-\frac{1}{2}})$ olduğunu elde ederiz. Burada $B_\delta := \left\{\lambda : \left|\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda_n}\right| > \delta\right\}$, $\delta>0$ yeterince küçük bir sayıdır. Bu ise $P_1(x\ ,\lambda)=A(x)$ ve $P_2(x\ ,\lambda)=0$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla (4.6) dan

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\lambda) &= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)A(x)\\
\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} &= \frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}A(x)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca kolayca gösterilebilir ki,

$$W\left[\varphi(x,\lambda),\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right] = A^2 W\left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}\right]=1$$

geçerlidir. Buradan $A(x)=1$, $d=\widetilde{d}$, $\alpha=\widetilde{\alpha}$ $\varphi(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ ve $\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}$ bulunur. Dolayısıyla, (2.1)'den $q(x)=\widetilde{q}(x)$, ve (2.3)'den $\dfrac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} \equiv \dfrac{\widetilde{a}_1(\lambda)}{\widetilde{b}_1(\lambda)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Ambartsumyan, V. A.(1929). Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53, 690-695.

Amirov, R. Kh.(2005). On a System of Dirac Differential Equations with Discontinuity Conditions Inside an Interval, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 57, No.5. 712-726.

Amirov, R. Kh.(2006). On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Conditions Inside an Interval J. Math. Anal. Appl. 317, 163-176.

Amirov, R. Kh., Ozkan, A. S., Keskin, B.(2009). Inverse Problems for Impulsive Sturm-Liouville Operator with Spectral Parameter Linearly Contained in Boundary Conditions, Integral Transforms and Special Functions, Vol. 20, No. 8, 607–618.

Andersson, L-E.(1988). Inverse eigenvalue problems with discontiuous coefficients, Inverse Problems, 4, 353-397.

Andersson, L-E.(1988). Inverse Eigenvalue Problems for a Sturm-Liouville Equation in Impedance Form, Inverse Problems 4, 929-971.

Ben Amara, Zh.(1996). Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem with a small parameter and a spectral parameter in the boundary condition Math. Notes 60 456–8.

Ben Amara, Zh. and Shkalikov, A. A.(1999). The Sturm-Liouville problem with physical and spectral parameters in the boundary condition Math. Notes 66 127–34.

Bennewitz, C.(2001). A proof of the local Borg-Marchenko theorem, Comm. Math. Phys. 218 131-132.

Binding, P. A., Browne, P. J., Seddighi, K.(1993). Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 37 57-72.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A.(2000). Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, J. London Math. Soc. 62 161-182.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A.(2001). Transformations between Sturm-Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions Bull. London Math. Soc. 33 749-57.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A.(2004). Equivalence of inverse Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, J. Math. Anal. Appl. 291 246-261.

Borg, G.(1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78, 1-96.

Carlson, R.(1994). An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with discontiuous coefficients, Proceed. Amer. Math. Soc. Volume: 120, No:2 475-484.

Chernozhukova A., Freiling G.(2009). A uniqueness theorem for the boundary value problems with non-linear dependence on the spectral parameter in the boundary conditions, Inverse Problems in Science and Engineering, Volume 17, Issue 6, 777-785.

Coleman, C. F. and McLaughlin, J. R.(1993). Solution of inverse spectral problems for an impedance with integrable derivative, I, II, Comm. Pure and Appl. Math. 46, 145-184, 185-212.

Delsarte, J.(1938). Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

Delsarte, J. and Lions, J.(1957). Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

Freiling, G. and Yurko, V. A.(2001). Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, Nova Science, New York.

Fulton, C. T.(1977). Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A77, 293-308.

Fulton, C. T.(1980). Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A87, 1-34.

Gasimov, M. G. and Levitan, B. M.(1964). About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3.

Gasymov, M. G. and Levitan, B. M.(1966). The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

Gasymov, M. G. and Dzhabiev, T. T.(1975). On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., 46-71.

Gelfand, I. M. and Levitan, B. M.(1951). On Determination of a Differential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15, 309-60 (in Russian).

Guliyev, N. J.(2005). Inverse eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions, Inverse Problems, 21, 1315-1330.

Hald, O. H.(1984). Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem Commun. Pure Appl. Math. 37 539-77.

Kapustin, N. Yu.(1999). Oscillation Properties of Solutions to a Nonselfadjoint Spectral Problem with Spectral Parameter in the Boundary Condition Differ. Eqns. 35 1031-4.

Kapustin, N. Yu. and Moiseev, E. I.(1997). Spectral problems with the spectral parameter in the boundary condition Differ. Eqns 33 116-20.

Kapustin, N. Yu. and Moiseev, E. I.(2001). A remark on the convergence problem for spectral expansions corresponding to a classical problem with spectral parameter in the boundary condition, Differ. Eqns 37. 1677-83.

Kerimov, N. B. and Mamedov, Kh. K.(1999). On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions, Sibirsk. Math. Zh. 40(2), 325–335. English translation: Siberian Math. J. 40(2) (1999), 281–290.

Kerimov, N. B. and Mirzoev, V. S.(2003). On the Basis Properties of one Spectral Problem with a Spectral Parameter in a Boundary Condition Siberian Math. J. 44 813-6.

Keskin, B., Ozkan, A. S. and Yalçın N. (2011). Inverse Spectral Problems For Discontinuous Sturm-Liouville Operator With Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1 Volume 60, Number 1, Pages 15–25.

Krein, M. G. and Levin, B. Ya.(1948). On Entire Almost Periodic Functions of Exponential Type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64,No.3, 285-287.

Krein, M. G.(1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76, 21-24.

Krein, M. G.(1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem Dokl. Akad. Nauk SSSR 76, 21-4 (in Russian).

Krein, M. G.(1954). On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95, 767-770.

Levin, B. Ya.(1971). Entire Functions, Moscow University, Moscow.

Levinson, N.(1949). The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., 25-30.

Levinson, N.(1949). Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74 17-20.

Levitan, B. M.(1964). Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S.(1970). Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S.(1988). Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.

Liouville, J.(1836). Memoire sur le developpment des fonctions ou parites de fonctions en series dont les divers terms sont assujettis a satisfaire a une meme equation differentielles du second ordre contenant un parametre variable, J. de

Mathematique, 1, 253-265.

Marchenko, V.A.(1950). Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72, 457-560.

Marchenko, V. A.(1977). Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev.

McLaughlin, J. R.(1986). Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, SIAM Rev. 28 53-72.

McNabb, A., Anderssen, R. and Lapwood, E.(1976). Asymptotic behaviour of the eigenvalues of a Sturm–Liouville system with discontiuous coefficients, J. Math. Anal. Appl. 54 741-751.

Mennicken, R., Schmid, H. and Shkalikov, A. A.(1998). On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter, Math. Nachr. 189, 157-170.

Meschanov, V. P. and Feldstein, A. L.(1980). Automatic Design of Directional Couplers, Sviaz, Moscow.

Mukhtarov, O. Sh.(1994). Discontinuous boundary-value problem with spectral parameter in boundary conditions, Turkish J. Math. 18, 183-192.

Naimark, M. A.(1968). Linear differential operators. Part I, II: Linear differential operators in Hilbert space. Frederick Ungar Publishing Co.

Ozkan, A.S. and Keskin, B. (2012). Spectral problems for Sturm–Liouville operator with boundary and jump conditions linearly dependent on the eigenparameter, Inverse Problems in Science and Engineering, Vol. 20, No. 6, 799–808.

Poisson, S. D.(1820). Memoire sur la maniere d'exprimer les functions par des series periodiques, J. Ecole Polytechnique 18 417-489.

Povzner, A. V.(1948). On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.

Pöschel, J. and Trubowitz, E.(1987). Inverse Spectral Theory, Pure Appl. Math. Vol 130, Orlando, FL:Academic.

Prüfer, H.(1926). Neue Herleitung der Sturm Liouvilleschen Reihenentwicklung Stetiger Funktionen, Math. Ann. 95 409-518.

Russakovskii, E. M.(1975). Operator treatment of boundary problems with spectral parameters entering via polynomials in the boundary conditions, Funct. Anal. Appl. 9 358-359.

Schmid, H. and Tretter, C.(2002). Singular Dirac Systems and Sturm–Liouville Problems Nonlinear in the Spectral Parameter, Journal of Differential Equations, Volume 181, Issue 2, Pages 511-542.

Shkalikov, A. A.(1986). Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. English transl. J. Soviet Math. (6) 33, 1311-1342.

Simon, B.(1999). A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism, Ann. of Math. 150 1029-1057.

Sturm, J. C.(1836). Sur Les Equations Differentielle Lineares du Second Ordre, J. de Mathematique, 1, 106-186.

Tikhonov, A. N.(1949). Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 797-800.

Titchmarsh, E. C.(1932). The Theory of Functions, Oxford at the clarendon press, London.

Weyl, H.(1910). Über gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 68 220-269.

Zhdanovich, V. F.(1960). Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135, No.8, 1046-1049.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Emine ARACI
Doğum Yeri ve Tarihi	Sivas, 21/12/1988
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Kadıburhanettin Mah.Demiryol-iş Sendika Sit.A Blok No:11
E-posta Adresi	kutupnoktasi@windowslive.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Kongre Lisesi,2005
Lisans	Erzincan Üniversitesi,2010
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2013