T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

f(R) GRAVİTASYON TEORİSİNDE MADDE-GEOMETRİ İLİŞKİLERİ

Doğukan TAŞER

Fizik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **28/06/2013**

Tez Danışmanı:

Yrd. Doç. Dr. Melis ULU DOĞRU

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

DOĞUKAN TAŞER tarafından **YRD. DOÇ. DR. MELİS ULU DOĞRU** yönetiminde hazırlanan "***f(R)*** **GRAVİTASYON TEORİSİNDE MADDE-GEOMETRİ İLİŞKİLERİ**'' başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Melis ULU DOĞRU

Danışman

Prof. Dr. İsmail TARHAN

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Hüsnü BAYSAL

Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 28/06/2013

Doç. Dr. Zeki KARACA

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Doğukan TAŞER

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen ve değerli vaktini ayıran saygı değer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Melis ULU DOĞRU'ya, Polonya'da kaldığım süre boyunca çalışmalarımı ve beni destekleyen sayın Dr. Tomasz Dobrowolski'ye ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli AİLEME sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doğukan TAŞER

SİMGELER VE KISALTMALAR

"∂" veya ","	Kısmi türev
L	Lagrangian
R	Ricci skaleri
R_{ik}	Ricci tensörü
G_{ik}	Einstein tensörü
Λ	Kozmolojik sabit
χ	$\frac{8\pi G}{c^4}$ değerindeki çiftlenim sabiti
$T_{ik}^{(m)}$	Madde formunun enerji-momentum tensörü
$T_{ik}^{(eff)}$	Etkin enerji-momentum tensörü
$T_{ik}^{(c)}$	Eğrilik enerji-momentum tensörü
∇_i	Kovaryant türev
$\Box$	d'Alambert operatörü
ϕ_i	Monopollerin skaler alanı
$V(\phi)$	Monopollerin potansiyel enerjisi
u^i	4-lü hız
x^a	Koordinatlar
$\dot{A}$	Herhangi bir *A* fonksiyonunun *r*'ye göre türevi
ΛCDM	Kozmolojik sabit ile ifade edilen soğuk karanlık madde modeli

ÖZET

f(R) GRAVİTASYON TEORİSİNDE MADDE-GEOMETRİ İLİŞKİLERİ

Doğukan TAŞER

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Melis ULU DOĞRU

28/06/2013, 42

Bu tez çalışmasında, yeni bir gravitasyon teorisi olan *f(R)* gravitasyon teorisinde, monopollü statik küresel simetrik uzay-zamanlar ve ideal akışkanlı statik silindirik simetrik Gödel evreni incelenmiştir. Statik küresel simetrik uzay-zamanın monopol varlığında izin verdiği *f(R)* fonksiyonu, *f(R)* gravitasyon teorisinin alan denklemlerinin tam çözümlerinden elde edilmiş ve monopolün statik küresel simetrik uzay-zamanda sebep olduğu eğrilik çeşitli grafiklerle gösterilmiştir. Diğer yandan, karanlık enerji, hayalet enerji, toz madde, kozmik sicim, stiff madde, ışınım ve domain wall maddelerinin statik silindirik simetrik Gödel evrenine kazandırdığı eğrilik, *f(R)* gravitasyon teorisinin alan denklemlerinin çözümlerinden belirlenmiştir. Bu Gödel modeli için, teorinin *f(R)* fonksiyonu ve geçilebilirlik koşulları elde edilmiştir. Sonuç olarak, çözümlerin fiziksel ve geometrik özellikleri tartışılmıştır.

Anahtar sözcükler: *f(R)* Gravitasyon Teorisi, Monopol, İdeal Akışkan, Statik Küresel Simetrik Uzay-Zaman, Gödel Evreni.

ABSTRACT

RELATION OF MATTER AND GEOMETRY IN *f(R)* GRAVITATION THEORY

Doğukan TAŞER
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversity
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Physics Science, Thesis Master of Science
Advisor: Yrd. Doç. Dr. Melis ULU DOĞRU
28/06/2013, 42

In this thesis, in *f(R)* gravitational theory that is a new gravitational theory, static spherically symmetric space-times with monopole and static cylindirical symmetric Gödel universe with perfect fluid have been investigated. *f(R)* function that static spherically symmetric space-time permits in presence of monopole, was obtained from exact solutions of field equations of *f(R)* gravitational theory and curvature that monopole give rise to in static spherically symmetric space-time has been shown with various graphics. On the other hand, curvature that matters with dark energy, phantom, dust matter, cosmic string, stiff matter, radiation and domain walls bring to Gödel universe, has been determined from solutions of field equations of *f(R)* gravitational theory. For this Gödel model, *f(R)* function of theory and causality conditions have been gained. As a result, physical and geometrical properties of solutions have been discussed.

Keywords: *f(R)* Gravitational Theory, Monopole, Perfect Fluid, Spherically Symmetric Space-Time, Static Gödel Universe.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Tarihte ilk gravitasyon algısı Yunan filozof Aristoteles'e kadar uzanmaktadır. Aristoteles'e göre *"Gravitasyon doğal bir olgudur. Maddelerin düşmesine ve yükselmesine (gazlar için) neden olur. Ağır maddeler hızlı düşer."* Fakat matematiksel açıdan gravitasyonu en iyi şekilde ifade eden ilk teori Newton' un gravitasyon teorisidir (Özemre, 1982). Newton teorisi yeryüzündeki hareketlerin incelenmesinde, gezegenlerin ve diğer gök cisimlerinin yörüngelerini belirlemede çok başarılı olmasına rağmen birçok konuyu açıklamakta yetersiz kalmıştır. Daha sonra Michelson-Morley deneyinde ışık hızının sonlu bir hız olduğunun anlaşılmasıyla, fizik kurallarının tüm referans sistemlerinde aynı kalabilmesi için, koordinatlar arasında Galileo dönüşümleri yerine Lorentz dönüşümleri kullanılmıştır (Serway ve Beicher, 1999). Bununla birlikte Lorentz invaryanslı gravitasyon teorileri de üretilmiştir. Lorentz invaryanslı gravitasyon teorilerini dört gruba ayırmak mümkündür. Bunlar Poincaré tipi teoriler, skaler teoriler, vektörel teoriler ve tensörel teorilerdir. Bu dört grup altında birçok gravitasyon teorisi önerilmiştir (Özemre, 1982). Bu teoriler arasında en tutarlı olanı Einstein genel relativite teorisidir. Einstein genel relativite teorisi gezegenlerin perihelinin ilerlemesi, ışığın gravitasyonel alanda sapması ve kırmızıya kayma olayı gibi testleri de sağlayan, bilinen en geçerli gravitasyon teorisidir (Serway ve Beicher, 1999).

Bildiğimiz üzere $t_1 - t_2$ zaman aralığında etki integrali;

$$S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{1.1}$$

şeklinde olmaktadır (Landau ve Lifshitz, 1976). Burada S etki fonksiyonu ve L Lagrange fonksiyonudur. Aynı zamanda bu etki Einstein gravitasyon teorisinde geometriden ve maddeden kaynaklanan olmak üzere iki kısımda ifade edilmektedir.

$$S = S_g + S_m \tag{1.2}$$

Burada S_g uzayın geometrik kısmının etki fonksiyonu ve S_m ise madde kısmının etki fonksiyonudur. Einstein geometriden kaynaklanan etki fonksiyonunun Lagrange fonksiyonunu skaler eğriliğin (R) lineer bir fonksiyonu olacak şekilde aşağıdaki gibi önermiştir (Stephani, 1985).

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g} d^4 x + \int L_m \sqrt{-g} d^4 x \tag{1.3}$$

Burada L_g geometrik kısmın Lagrange fonksiyonu, c ışık hızı, G ise evrensel çekim yasasının çiftlenim sabitidir. Böylece (1.3) denklemi ile verilen etkinin varyasyonundan faydalanılarak Einstein alan denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \chi T_{ik}^{(m)} \tag{1.4}$$

Burada G_{ik} Einstein tensörü, R_{ik} Ricci eğrilir tensörü, g_{ik} metrik potansiyelleri, R Ricci eğrilik skaleri, $T_{ik}^{(m)}$ enerji momentum tensörü ve $\chi = 8\pi G/c^4$ değerindeki sabiti göstermektedir. Einstein, (1.4) denklemini elde ettiği zaman evrenin durağan yani statik olduğunu düşünüyordu. Ancak, (1.4) ile verilen alan denklemlerinin statik bir evrene karşılık gelmediğini fark etti. (1.4) denklemi, kendi içine çöken yani zamanla daralan bir evren modelini gösteriyordu. Einstein statik bir model oluşturabilmek için, çökmeye karşı koyacak bir ek terimin alan denklemlerinde olması gerektiğini öngörerek, adına kozmolojik sabit dediği Λ'lı terimi eklemiştir. Böylece kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} = \chi T_{ik}^{(m)} \tag{1.5}$$

olarak tanımlamıştır.

Hubble tarafından galaksilerden gelen ışık ışınları ile ilgili yapılan gözlemler sonucu elektromanyetik ışımanın kırmızıya kaydığının anlaşılması ile evrenin statik olmadığı ortaya çıkmıştır. Bu gelişme ile Einstein statik yani durağan evren modelleri için önermiş olduğu alan denklemleri fikrini terk etmiştir. Daha sonra, Hubble teleskopu ile yapılan gözlemler sonucunda, elektromanyetik ışımadaki kırmızıya kaymanın genişleyen bir evreni gösterdiği ve hatta kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerinin bu genişlemeyi açıklayabildiği, kozmolojik sabitli terimin evrenin genişlemesinden sorumlu tutulan karanlık enerjiyi temsil ettiği fikri ile (1.5) ile verilen alan denklemleri tekrar büyük önem kazanmıştır. Daha sonrasında ise evrenin genişlemesini ifade edebilen başka gravitasyon teorileri de birçok bilim insanı tarafından geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları;

- Teleparallel Teori
- Brans-Dicke Teori
- Lyra Geometri
- Sicim Teori
- Brane Teori
- M-Teori
- *f(R)* Gravitasyon Teori

gibi teorilerdir.

Diğer taraftan, büyük patlama teorisine göre evrenin evrimi sırasındaki genişleme ışınım baskın olan erken dönemdeki "birden genişleme evresi" ve madde baskın dönemdeki "ikincil evre" olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (Felice ve Tsujikawa, 2010). Bu evrelerden ilki olan birden genişleme dönemindeki madde-geometri ilişkilerinin doğru ve tam olarak açıklanabilmesi için ayrıca "şişme veya enflasyon (inflation) teorisi" denilen ek bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur (Felice ve Tsujikawa, 2010). Son yıllarda elde edilen gözlemsel veriler şuanki evrenin genişleme hızının arttığına işaret etmektedir (Sebastiani ve Zerbini, 2012). Bu gözlemsel verilerden evrenin genişlemesinden sorumlu olduğu düşünülen kümelenmemiş negatif basınçlı bir akışkan olan, karanlık enerji fikri ortaya çıkmıştır (Sharif ve Kausar, 2011a). Karanlık enerjiyi tanımlamanın en kolay yollarından biri ΛCDM modeli olarak adlandırılan, Einstein gravitasyon teorisi çerçevesinde küçük değerli pozitif bir kozmolojik sabitin tanımlanmasıdır (Sebastiani ve Zerbini, 2012). Fakat ΛCDM modeli kozmolojik sabit değerinin parçacık fiziğine göre vakum enerjisine nazaran çok küçük olması gerektiğini açıklamakta başarısız olmuştur (Sharif ve Kausar, 2011a). Bu sorunu çözmek için, bilim adamları çeşitli hayalet maddelere karşılık gelen skaler alanlar ile kozmolojik sabitin yerini değiştirmeyi denemişlerdir. Şuanki evrende bulunan karanlık enerjiyi açıklamak için ayrıca durum denkleminin etkili parametresi ω da kullanılmıştır (Sharif ve Kausar, 2011a). Birçok gravitasyon teorisinde etkin olarak kullanılmasına rağmen, hala karanlık enerjinin kaynağı hakkında tatmin edici bir açıklama bulunmamaktadır (Sharif ve Kausar, 2011b).

Evrenin genişlemesini açıklayabilmek için önerilen alternatif teorilerden bir tanesi de tensörel teori olan *f(R)* gravitasyon teorisidir. Bildiğimiz gibi Einstein gravitasyon teorisinde etki fonksiyonundaki Lagrange fonksiyonu Ricci skaler eğriliğinin bir fonksiyonu olarak ifade edilmektedir (*L(R)* gibi). *f(R)* gravitasyon teorisinde ise Lagrange fonksiyonu daha genel olarak Ricci skaler eğriliğinin bir fonksiyonu olan *f(R)* fonksiyonuna bağlı şekilde tanımlanmaktadır (*L(f(R))* gibi). Alan denklemlerinde evrenin genişlemesinden sorumlu tutulan karanlık enerjiye karşılık gelen terimler, Einstein gravitasyon teorisinde elle eklenmesine karşın, *f(R)* gravitasyon teorisinde etkinin varyasyonundan kendiliğinden gelmektedir (Sharif ve Shamir, 2010). Bu özelliği ile *f(R)* teori diğer gravitasyon teorilerinin aksine ne ekstra uzaysal bir boyuta ne de karanlık enerji bileşenine ihtiyaç duymaksızın kozmik ivmelenmeyi açıklamak için alternatif bir yol sağlar (Santos ve ark., 2010). Ayrıca farklı *f(R)* fonksiyonlarının kullanılabilmesi sebebiyle güneş sisteminin deneysel testleri de bu gravitasyon teorisi çerçevesinde başarı ile sağlanmaktadır. *f(R)* gravitasyon teorisi hem erken zaman şişmesinin hem de son zaman ivmelenmesinin birlikte tek bir teoride açıklanmasına izin verir (Sharif ve Kausar, 2011b). Ek olarak, bu teori evrenin evrimi sırasında geçiş evrelerinde meydana gelen yavaşlamayı, son dönemdeki ivmelenmeye doğru tanımlayabilmektedir (Sharif ve Shamir, 2009). Ayrıca *f(R)* gravitasyon teorisinin tekillik, Newton limiti ve kozmik mikrodalga fon ışınımını gibi bazı özellikleri kapsamlı bir biçimde araştırılmaktadır (Rebouças ve Santos, 2009). Bu teori yüksek enerji fiziğindeki hiyerarşi problemini açıklamak içinde kullanılabilmektedir (Sharif ve Shamir, 2009).

f(R) gravitasyon teorisinin etki fonksiyonu sırasıyla Weyl (1919) ve Eddington (1922) tarafından çalışılmıştır. Fakat Buchdahl (1970) tekil olmayan salınımlı kozmolojiler bağlamında bu etkiyi öne sürmüştür (Sharif ve Shamir, 2009). Starobinsky (1980) ve Strominger (1984) Lagrange fonksiyonunun bağlı olduğu Ricci skalerinin bazı keyfi yüksek mertebeden terimler içeren Ricci fonksiyonları ile yer değiştirebileceğini önermiştir (Rador, 2007). *f(R)* fonksiyonu belirli koşulları sağlaması şartıyla keyfi bir fonksiyon olarak seçilebilir (Starobinsky, 2007). Böylece seçilecek her bir keyfi *f(R)* fonksiyonu ile bu gravitasyon teorisi altında yeni bir model de önerilmiş olur. Kullanılan keyfi *f(R)* fonksiyonlarının analitik olması ve herhangi bir nokta yakınında Taylor serisine açılabiliyor olması gerekir (Pun ve ark., 2008). Ayrıca, seçilen keyfi *f(R)* fonksiyonları için oluşturulacak olan model nükleosentez, radyasyon ve madde baskın dönemlerin evrimini de açıklamak zorundadır (Pun ve ark., 2008). $f(R) = R^{-n}$ ve $f(R) = R - aR^{-n}$ fonksiyonları bu teorinin en basit modellerindendir (Brookfield ve ark., 2006). Bu iki basit model belirli şartlar altında diğer bir skaler tensör teori olan Brans-Dicke teorisine karşılık gelmektedir (Brookfield ve ark., 2006). Diğer taraftan, $f(R) = R - 2\Lambda$ modeli ise kozmolojik sabitli Einstein gravitasyon teorisine indirgenebilmektedir (Starobinsky, 2007). Bu sebeple $f(R) = R - 2\Lambda$ modeli özel olarak ΛCDM modeli olarak adlandırılır (Starobinsky, 2007). Starobinsky (1980; 1981; 1983) ve Vilenkin (1985), *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde ikinci dereceden terimler içeren modelleri ilk kez dikkate almışlardır. Bu gelişmenin ardından günümüze dek birçok *f(R)* modeli çalışılmakta ve bu modellerin özellikleri geniş kapsamda araştırılmaktadır (Nojiri ve Odintsov, 2003; Nojiri ve Odintsov, 2004; Hu ve Sawicki, 2007, Appleby ve Battye, 2008).

Bu tez çalışmasında, öncelikle Einstein gravitasyon teorisi ve bu teoriye alternatif diğer gravitasyon teorileri ile ilgili kısaca bilgi verilmiş, bunlardan *f(R)* gravitasyon teorisi, alan denklemleri, teorinin *f(R)* fonksiyonuna göre önerilen çeşitli kozmolojik modeller özetlenmiştir. Bölüm 2'de *f(R)* gravitasyon teorisindeki alan denklemi uygulamaları ve bu tez çalışmasında kullanılan madde formları olan monopol ve ideal akışkan ile ilgili önceki çalışmalar sunulmuştur. Bölüm 3'de bu çalışma kapsamında kullanılan materyal ve yöntemler, Bölüm 4'de ise *f(R)* gravitasyon teorisi kapsamında küresel simetrik monopoller ve ideal akışkanlı silindirik simetrik Gödel evrenine ait çözümler verilerek, son olarak elde edilen modeller için sonuç ve öneriler tartışılmıştır.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tensörel bir teori olan *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde madde ve geometri arasındaki ilişkiyi veren alan denklemlerinin pek çok uygulaması yapılmış ve çözümlerinden farklı evren modelleri ile madde formlarının birbirleri üzerine etkileri incelenmiştir.

f(R) gravitasyon teorisi çerçevesinde alan denklemi uygulamalarından ilki 2006 yılında Multamäki ve Vilja tarafından önerilmiştir. Multamäki ve Vilja (2006) vakum durumunda küresel simetrik uzay-zamanı incelemişlerdir. Skaler eğriliğin ve metrik potansiyellerin çarpımlarının sabit olduğu durumda alan denklemlerinin çözümlerini elde etmişlerdir. Bu çözümlerin bazı uygulanabilir *f(R)* modelleri için Schwarzschild-de Sitter evreni alan denklemi tam çözümlerine uyumlu olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca güneş sistemi sabitlerini kullanarak, *f(R)* teorinin önemini tartışmışlardır.

Azadi ve ark. (2008) statik silindirik simetrik uzay-zamanın vakum çözümlerini *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde araştırmışlardır. Ricci skalerinin sıfır ve sabit olduğu iki durum için alan denklemlerini çözmüşlerdir. Ricci skalerinin sıfır olduğu durumda kozmik sicim içeren konik bir uzay-zamanın genelleştirilmiş formunu elde etmişlerdir.

Sharif ve Shamir (2009) Bianchi tip-*I* ve *V* evren modellerinin vakum çözümlerini *f(R)* gravitasyon teorisi bağlamında incelemişlerdir. Hubble parametresinden ve varyasyon yasasından faydalanarak her bir evren modeline karşılık gelen tekil ve tekil olmayan tam çözümler elde etmişlerdir. Çözümlerde üstel *f(R)* fonksiyonu kullanmışlardır. Ayrıca, iki uzay-zaman için elde edilen çözümlerin genel relativitedeki ideal akışkan çözümü ile uyum içinde olduğunu göstermişlerdir.

Shamir (2010), Bianchi tip-*I*, *III* ve Kantowski-Sachs evren modellerinin vakum çözümlerini araştırmıştır. Her bir evren modeli için Hubble parametresi, genişleme skaleri ve shear skaleri elde edilmiştir. Ayrıca çözümler evrenin sıfır hacimden genişlediğini, zamanla hacmin arttığını ve sonraki zamanlarda genişlemenin tamamen durup evrenin izotropi kazanacağını işaret etmektedir.

f(R) gravitasyon teorisi çerçevesinde yapılan alan denklemi uygulamalarında sıkça karşımıza çıkan madde dağılımlarından bazıları da ideal akışkan ve anizotropik akışkandır.

Lobo ve Oliveira (2009) *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde anizotropik akışkan bulunan küresel simetrik uzay-zamanı incelemişlerdir. Alan denklemlerinin bazı kabuller altında özel çözümlerini elde etmişler ve bu çözümlerin kurt deliği geometrisine karşılık geldiğini göstermişlerdir. Elde edilen sonuçlar ile daha önce Brans-Dicke teorisi kapsamında elde edilen kurt deliği sonuçlarını karşılaştırmışlardır.

Sharif ve Shamir (2010), ideal akışkanlı Bianchi tip-*I* ve *V* uzay-zamanlarının alan denklemlerini *f(R)* teori çerçevesinde incelemişlerdir. Her bir evren modeli için iki farklı tam çözüm elde etmişler ve bu çözümlerle uyumlu *f(R)* fonksiyonları önermişlerdir. Her bir uzay-zaman için Hubble parametresi, anizotropi parametresi, genişleme parametresi ve shear skaleri verilmiş ve sonuçlar tartışılmıştır.

Sharif ve Kausar (2011c), Bianchi tip-VI_0 evreninin *f(R)* alan denklemlerini hem ideal akışkan hem de anizotropik akışkan madde dağılımları için incelemişlerdir. Bazı fiziksel yaklaşımlar kullanarak her iki madde dağılımı için çözüm elde etmişlerdir. Kinematik nicelikleri hesaplayarak evrenin ilk zamanki ve son zamanki hareketlerini yorumlamışlardır.

Sharif ve Kausar (2011a), anizotropik akışkanlı Bianchi tip-*III* evren modelinin alan denklemlerini *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde ele almışlardır. Üstel genişlemeyi ve kuvvet fonksiyonu şeklinde genişlemeyi dikkate alarak evrenin evrimini yorumlamışlardır. Bianchi tip-*III* evren modeli genel relativitede ilerleyen zamanlar için izotropik olurken, bu çalışmaya göre *f(R)* gravitasyon teorisinde anizotropik kaldığı gösterilmiştir.

f(R) gravitasyon teorisi kapsamında incelenen bir diğer madde formu ise elektromanyetik alan dağılımıdır. Aghamohammadi ve ark. (2010), yüklü bir karadelik için *f(R)* gravitasyon teorisinde küresel simetrik çözümleri incelemişlerdir. Bazı uygulanabilir *f(R)* modellerinde zayıf alan yaklaşımını kullanarak bu modeller için Reissner-Nordström karadeliğinden genelleştirilmiş uzay-zaman metriklerini önermişlerdir.

Mazharimousavi ve ark. (2011), *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde elektromanyetik alanla birleştirilmiş küresel simetrik uzay-zamanı incelemişlerdir. Lineer ve lineer olmayan elektromanyetik alan için bu uzay-zamanın termodinamik özelliklerini incelemişlerdir. Lineer olmayan elektromanyetik alanın özel bir durumu ve lineer elektromanyetik alanın kendisinin karadelik geometrisine izin verdiğini göstermişlerdir. Elde edilen çözümlerin çeşitli limit durumlarında *f(R)* gravitasyon teorisindeki küresel monopol çözümüne indirgendiğini göstermişlerdir.

f(R) gravitasyon teorisi kapsamında toz madde, monopol, quark madde, mezonik skaler alan ve karanlık enerji de incelenmiştir. Örneğin, Sharif ve Kausar (2011b), toz maddeli küresel simetrik uzay-zamanı ele almıştır. Sabit eğrilik yaklaşımı kulanarak çözümler elde etmişler ve toz maddenin yoğunluğunun sabit olduğunu göstermişlerdir. Bu çözümün basıncın göz ardı edildiği ve yoğunluğun sabit olduğu Tolman-Oppenheimer-Volkoff uzay-zamanına karşılık geldiğini de göstermişlerdir. Ayrıca, genelleştirilmiş Landau-Lifshitz enerji-momentum tanımını kullanarak enerji-momentum dağılımını tartışmışlardır.

Caramês ve ark. (2012), *f(R)* gravitasyon teori kapsamında küresel monopol bulunan küresel simetrik uzay-zamanın alan denklemlerini ele almışlardır. Zayıf gravitasyonel alan yaklaşımı kullanarak, önerilen *f(R)* fonksiyonları için elde edilen sonuçları genel relativite ve Brans-Dicke teorilerinde elde edilen benzer sonuçlar ile karşılaştırmışlardır.

Yılmaz ve ark. (2012), *f(R)* gravitasyon teorisinde kuark ve tuhaf kuark madde dağılımlı Bianchi tip-*I* ve *V* evren modellerinin alan denklemlerini incelemişlerdir ve tam çözümlerini elde etmişlerdir. Kuark maddenin hayalet enerji gibi davrandığını ve evrenin ilk zamanlarındaki ivmelenmeye katkısı olabileceğini göstermişlerdir. Her bir evren modeli çözümüne karşılık gelen *f(R)* fonksiyonlarını önermişlerdir.

Aktaş ve ark. (2012), Marder evreninde mezonik skaler alan ve karanlık enerjili madde dağılımının fiziksel davranışını *f(R)* gravitasyon teorisi aracılığıyla incelemişlerdir. Elde edilen modelde karanlık enerjinin hayalet tipi dağılıma sahip olduğu ve mezonik skaler alanın zaman içinde başka madde formlarına dönüşebileceğini göstermişlerdir. Ayrıca iki evren modelinin fiziksel ve kinematik niceliklerini de incelemişlerdir.

BÖLÜM 3
MATERYAL VE YÖNTEM

Einstein gravitasyon teorisinde evrenin ivmelenmesinden sorumlu tutulan karanlık enerjiyi açıklamak için alan denklemlerine sonradan elle eklenen kozmolojik sabit kullanılmaktadır. Diğer taraftan, *f(R)* gravitasyon teorisinde etki fonksiyonu birçok bilim adamı tarafından çalışılmış, fakat bilinen haliyle *f(R)* gravitasyon teorisi etki fonksiyonu ve alan denklemleri 1970 yılında Buchdahl tarafından önerilmiştir (Buchdahl, 1970). Einstein gravitasyon teorisinden farklı olarak Hilbert-etkisinde Lagrange fonksiyonu skaler eğriliğin bir fonksiyonu olan *f(R)*' e bağlı olarak tanımlanır (Buchdahl, 1970). Bu etki fonksiyonu

$$S = \int \sqrt{-g}\left(\frac{1}{16\pi G} f(R) + L_m\right) d^4x \qquad \textbf{(3.1)}$$

şeklindedir ve burada daha önce söylediğimiz gibi L_m maddenin Lagrange fonksiyonudur. (3.1) eşitliğinin varyasyonundan *f(R)* gravitasyon teorisinin madde-geometri ilişkisini gösteren alan denklemleri

$$F(R)R_{ik} - \frac{1}{2} f(R) g_{ik} - \nabla_i \nabla_k F(R) + g_{ik} \Box F(R) = \chi T_{ik}^{(m)} \qquad \textbf{(3.2)}$$

şeklinde elde edilir (Buchdahl, 1970). Burada $F(R) = df(R)/\ dR$, ∇_i kovaryant türev ve $\Box = \nabla_i \nabla^i$ şeklindeki d'Alambert operatörüdür. (3.2) denkleminin izi alındığında;

$$F(R)R - 2f(R) + 3\Box F(R) = \chi T \qquad \textbf{(3.3)}$$

olmaktadır. Burada T enerji-momentum tensörünün izidir. (3.3) denklemi ile verilen iz alan denklemlerini kolaylaştırmak için ve ayrıca kısıtlama denklemi olarak da kullanılmaktadır. Böylece, (3.2) ve (3.3) denklemleri birlikte ele alınırsa alan denklemleri

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(eff)} \qquad \textbf{(3.4)}$$

formunu alır. Burada etkin enerji-momentum tensörü olarak adlandırılan $T_{\mu\nu}^{(eff)} = T_{\mu\nu}^{(c)} + T_{\mu\nu}^{(\hat{m})}$ ile verilir (Buchdahl, 1970; Lobo ve Oliveira, 2009). $T_{\mu\nu}^{(\hat{m})}$ terimi madde dağılımının enerji-momentum tensörüne bağlı olarak

$$T_{\mu\nu}^{(\hat{m})} = T_{\mu\nu}^{(m)} / F \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilir (Buchdahl, 1970; Lobo ve Oliveira, 2009). Ayrıca, eğrilik enerji-momentum tensörü olarak adlandırılan $T_{\mu\nu}^{(c)}$ terimi ise

$$T_{\mu\nu}^{(c)} = \frac{1}{F}\left[\nabla_\mu \nabla_\nu F - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (RF + \Box F + T)\right] \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır (Buchdahl, 1970; Lobo ve Oliveira, 2009).

$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ şeklindeki Bianchi eşitliği yardımıyla *f(R)* gravitasyon teorisi kapsamında enerji-momentum korunum denklemi

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(c)} = \frac{1}{F^2} T_{\mu\nu}^{(m)} \nabla^\mu F \tag{3.7}$$

olarak tanımlanmaktadır (Lobo ve Oliveira, 2009).

Diğer taraftan, büyük patlama teorisine göre başlangıçta homojen olmayan evren ve geometrisi, hızla enerji kaybetmesi ve soğuması nedeniyle meydana gelen birçok simetri kırılması ile yapısını değiştirmiştir. Bu simetri kırılmalarından yerel ve global simetrilerin kırılması sonucunda topolojik hatalardan biri olan monopollerin oluştuğu düşünülmektedir. Küresel monopolleri skaler alanlarına bağlı olarak tanımlayan Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi^i - \frac{\lambda}{4}(\phi^i \phi_i - \eta^2)^2 = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi^i - V(\phi) \tag{3.8}$$

şeklindedir (Vilenkin ve Shellard, 1994). Burada ϕ^i monopollerin skaler alanı, $V(\phi)$ potansiyel enerjisi ve η monopolleri oluşturan simetri kırılmasının bir ölçütüdür *(i = 1, 2, 3)*. Ayrıca, monopoller bir topolojik yük yardımıyla

$$N = \frac{1}{8\pi} \oint dS^{ij} \left|\phi\right|^{-3} \in_{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c \quad \textbf{(3.9)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada N belirli bir hacimdeki toplam monopol sayısını ve $\in_{abc}$ tam antisimetrik birim tensörü göstermektedir. δN manyetik yük miktarındaki kararsızlığı ifade eder. (3.9) eşitliğinin en basit çözümlerinden biri olan $N=1$ durumu küresel simetrik duruma karşılık gelir. Küresel simetrik durumda monopolün skaler alanı

$$\phi^a = \eta h(r) \frac{x^a}{r} \quad \textbf{(3.10)}$$

şeklindedir *(a = 1, 2, 3)*. (3.10) eşitliğinde *h(r)* fonksiyonu *r = 0*' da sıfır olur ve $r >> \delta$ 'da bire yaklaşır. Ayrıca $\delta \sim (\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}$ değerinde monopol çekirdeğinin büyüklüğünü gösteren bir sabittir (Vilenkin ve Shellard, 1994). (3.10) eşitliği ile verilen skaler alan bileşenleri ve karesi küresel simetrik modeller için

$$\phi^i = \phi(r) \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.11)}$$

ve

$$\phi^i \phi_i = r^2 \phi^2 (r) \quad \textbf{(3.12)}$$

olarak tanımlanır. Küresel monopoller için enerji-momentum tensörü (3.8) ve (3.10) eşitliklerinin de dikkate alınmasıyla

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu \phi_i \partial^\nu \phi^i - L\delta_\mu{}^\nu \quad \textbf{(3.13)}$$

şeklinde tanımlanır (Vilenkin ve Shellard, 1994).

Bir diğer madde formu olan ideal akışkan için enerji-momentum tensörü ise

$$T_\mu{}^\nu = (p(r) + \rho(r))u_\mu u^\nu - p(r)\delta_\mu{}^\nu \quad \textbf{(3.14)}$$

şeklindedir. Burada u_μ 4-lü hız vektörü, p ideal akışkanın basıncı ve ρ ideal akışkanın yoğunluğudur (Brikhoff, 1944). Ayrıca, ideal akışkanın basıncı ve yoğunluğu

$$p = \omega\rho \tag{3.15}$$

durum denklemi ile birbirine bağımlıdır. Burada ω basınç ile yoğunluk arasındaki orantı katsayısını gösteren sabittir (Ha ve ark., 2012).

(3.15) denkleminde $\omega \geq -1/3$ şartı sağlanıyor ve $\rho > 0$ oluyor ise madde dağılımı zayıf, kuvvetli ve baskın enerji şartlarını sağlar. Ayrıca bu tür madde dağılımları normal madde olarak adlandırılır (Hawking ve Ellis, 1973).

(3.15) denkleminde $\omega < -1/3$ olduğu zaman, akışkan kuvvetli enerji şartını sağlamaz ve evrenin ivmelenmesine pozitif bir katkıda bulunur. Bu madde formu karanlık enerji olarak adlandırılır (Ha ve ark., 2012).

(3.15) denkleminde $\omega = -1$ olduğunda alan denklemlerindeki ideal akışkan kozmolojik sabit rolü almaktadır (Ha ve ark., 2012).

(3.15) denkleminde $\omega < -1$ olduğunda üç enerji şartı da sağlanmaz. Bu durumda akışkan hayalet enerji olarak adlandırılır (Nemiroff ve Patla, 2008).

(3.15) denkleminde $\omega = 0$ iken akışkan, basıncı sıfır, yoğunluğu sıfırdan farklı olan ve toz madde olarak adlandırılan madde formudur (Dodelson, 2003).

(3.15) denkleminde $\omega = -1/3$ olduğunda akışkan, sicim gazı olarak isimlendirilir (Kamenshchik ve Khalatnikov, 2011).

(3.15) denkleminde $\omega = 1$ olduğunda akışkan, homojen evrende bazı anizotropilerin varlığını açıklayan, basınç ve yoğunluğu birbirine eşit olan stiff madde olarak adlandırılır (Belinsky ve Khalatnikov, 1973;Khalatnikov ve Kamenshchik, 2003).

(3.15) denkleminde $\omega = 1/3$ olursa, akışkan ışınım olarak adlandırılır (Nemiroff ve Patla, 2008).

(3.15) denkleminde $\omega = -2/3$ olduğunda akışkan domain wall olarak adlandırılır (Nemiroff ve Patla, 2008).

BÖLÜM 4

ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. *f (R)* Gravitasyon Teorisinde Küresel Simetrik Monopoller

Küresel simetrik uzay-zamanın yay elemanı

$$ds^2 = e^{\mu(r)}dt^2 - e^{\nu(r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \quad \textbf{(4.1)}$$

şeklindedir. Burada $\mu(r)$ ve $\nu(r)$ radyal koordinata bağlı fonksiyonlardır. (4.1) eşitliği kullanılarak küresel simetrik uzay-zamanın Ricci skaleri

$$R = e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\mu}^2}{2} + \frac{2\dot{\nu}}{r} + \frac{2\dot{\mu}}{r} - \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{2} + \frac{2}{r^2} - \frac{2e^{\nu}}{r^2} + \ddot{\mu}\right) \quad \textbf{(4.2)}$$

olarak elde edilir. Burada “.” işareti radyal koordinata göre türevi ifade eder. (4.1) ile verilen statik küresel simetrik uzay-zaman için küresel monopol enerji momentum tensörünün bileşenleri (3.8) ve (3.10)-(3.13) denklemleri kullanılarak

$$T_r^r = T_t^t = \frac{\eta^2}{r^2} + V(\phi), \quad T_\phi^\phi = T_\theta^\theta = V(\phi) \quad \textbf{(4.3)}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.8)-(3.12) eşitlikleri yardımıyla küresel monopolün $V(\phi)$ potansiyel enerjisi

$$V(\phi) = 0 \quad \textbf{(4.4)}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.3) ve (4.4) denklemlerinden küresel simetrik monopoller için enereji-momentum tensörü bileşenleri

$$T_r^r = T_t^t = \frac{\eta^2}{r^2}, \quad T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = 0 \quad \textbf{(4.5)}$$

olarak elde edilir. (3.2)-(3.6), (4.1) ve (4.5) denklemlerini kullanarak *f(R)* gravitasyon teorisinde küresel simetrik monopollerin alan denklemleri

$$e^{-\nu}\left(\frac{e^{\nu}}{2r^2}-\frac{1}{2r^2}-\frac{\dot{\mu}}{2r}+\frac{\dot{\mu}^2}{8}+\frac{\ddot{\mu}}{4}-\frac{\dot{\nu}}{2r}-\frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{8}-\frac{3\dot{\nu}\dot{F}}{8F}-\frac{\dot{\mu}\dot{F}}{8F}\right.$$
$$\left.-\frac{\dot{F}}{2Fr}+\frac{3\ddot{F}}{4F}-\frac{\chi\eta^2 e^{\nu}}{2Fr^2}\right)=0, \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$e^{-\nu}\left(-\frac{e^{\nu}}{2r^2}+\frac{1}{2r^2}-\frac{\dot{\mu}^2}{8}-\frac{\ddot{\mu}}{4}+\frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{8}+\frac{\dot{\nu}\dot{F}}{8F}-\frac{\dot{\mu}\dot{F}}{8F}+\frac{\dot{F}}{2Fr}\right.$$
$$\left.-\frac{\ddot{F}}{4F}+\frac{\chi\eta^2 e^{\nu}}{2Fr^2}\right)=0, \qquad \textbf{(4.7)}$$

$$e^{-\nu}\left(\frac{e^{\nu}}{2r^2}-\frac{1}{2r^2}+\frac{\dot{\mu}}{2r}+\frac{\dot{\mu}^2}{8}+\frac{\ddot{\mu}}{4}+\frac{\dot{\nu}}{2r}-\frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{8}+\frac{\dot{\nu}\dot{F}}{8F}+\frac{3\dot{\mu}\dot{F}}{8F}\right.$$
$$\left.-\frac{\dot{F}}{2Fr}-\frac{\ddot{F}}{4F}-\frac{\chi\eta^2 e^{\nu}}{2Fr^2}\right)=0 \qquad \textbf{(4.8)}$$

şeklinde elde edilir. (4.6)-(4.8) eşitliklerinin birlikte kullanılmasıyla $\mu(r)$ ve $\nu(r)$ fonksiyonları doğrudan

$$\mu(r)=\ln\left(\frac{c_1}{r}+c_2 r^2\right) \qquad \textbf{(4.9)}$$

ve

$$\nu(r)=\ln\left(\frac{c_3}{\frac{c_1}{r}+c_2 r^2}\right)=\ln c_3-\mu(r) \qquad \textbf{(4.10)}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2 ve c_3 çözümlerden gelen keyfi sabitlerdir ve dolayısıyla (4.9) ve (4.10) denklemleri yardımıyla küresel simetrik uzay-zamanın metrik potansiyelleri

$$e^{\mu(r)}=\frac{c_1}{r}+c_2 r^2 \qquad \textbf{(4.11)}$$

ve

$$e^{\nu(r)} = \frac{c_3}{\frac{c_1}{r} + c_2 r^2} \tag{4.12}$$

şeklinde elde edilir. Böylece *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde statik küresel simetrik monopoller için uzay-zamanın geometrisi (4.1), (4.11) ve (4.12) denklemleri yardımıyla

$$ds^2 = \left(\frac{c_1}{r} + c_2 r^2\right)dt^2 - \left(\frac{c_3}{\frac{c_1}{r} + c_2 r^2}\right)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.13}$$

yay elemanı ile ifade edilir. Aynı zamanda, (4.6)-(4.8) alan denklemlerinin tam çözümlerinden, *f(R)* gravitasyon teorisi kapsamındaki statik küresel simetrik monopoller için *F(r)* fonksiyonu

$$F(r) = \chi\eta^2 \tag{4.14}$$

olur.

4.2. *f(R)* Gravitasyon Teorisinde İdeal Akışkanlı Gödel Evreni

Gödel evreni genel relativitede alan denklemlerinin ilk dönen evren çözümüdür (Gödel, 1949). Gödel evreninin en önemli özelliği kapalı zamansal eğrilere izin vermesidir (Gödel, 1949). Statik Gödel evreni için yay elemanı silindirik koordinatlarda

$$ds^2 = [dt + H(r)d\phi]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \tag{4.15}$$

olarak tanımlanır (Gödel, 1949; Rebouças ve Tiomno, 1983). Burada *H(r)* ve *D(r)* radyal koordinata bağlı metrik potansiyelleridir ve 4-lü hızlar $u^i = (0,0,0,1)$, $u^i u_i = 1$ şeklindedir. (4.15) denklemi ile verilen statik silindirik simetrik Gödel evreninin Ricci skaleri

$$R = \frac{2\ddot{D}}{D} - \frac{\dot{H}^2}{2D^2} \tag{4.16}$$

şeklindedir. (3.2)-(3.6), (3.14) ve (4.15) denklemlerinden *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde ideal akışkanlı Gödel evreni alan denklemleri

$$\frac{1}{8}\left(-\frac{3\dot{H}^2}{D^2} + \frac{4\ddot{D}}{D} + \frac{6\ddot{F}}{F} - \frac{2\dot{F}\dot{D}}{FD} + \frac{2\chi\, p(r)}{F} + \frac{2\chi\,\rho(r)}{F}\right) = 0, \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{8}\left(-\frac{3\dot{H}^2}{D^2} + \frac{4\ddot{D}}{D} - \frac{2\ddot{F}}{F} - \frac{4H\ddot{H}}{D^2} + \frac{6\dot{F}\dot{D}}{FD} - \frac{4H\dot{H}\dot{F}}{FD^2} + \frac{4H\dot{H}\dot{D}}{D^3} + \frac{2\chi\, p(r)}{F} + \frac{2\chi\,\rho(r)}{F}\right) = 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\dot{H}^2}{D^2} - \frac{4\ddot{D}}{D} - \frac{2\ddot{F}}{F} - \frac{2\dot{F}\dot{D}}{FD} + \frac{2\chi\, p(r)}{F} + \frac{2\chi\,\rho(r)}{F}\right) = 0, \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{5\dot{H}^2}{D^2} - \frac{4\ddot{D}}{D} - \frac{2\ddot{F}}{F} + \frac{4H\ddot{H}}{D^2} - \frac{2\dot{F}\dot{D}}{FD} + \frac{4H\dot{H}\dot{F}}{FD^2} - \frac{4H\dot{H}\dot{D}}{D^3} - \frac{6\chi\, p(r)}{F} - \frac{6\chi\,\rho(r)}{F}\right) = 0, \tag{4.20}$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\ddot{H}}{D^2} + \frac{\dot{D}\dot{H}}{D^3} - \frac{\dot{H}\dot{F}}{D^2 F}\right) = 0, \tag{4.21}$$

$$\frac{1}{2}\left(\ddot{H} - \frac{\dot{D}\dot{H}}{D} + \frac{H^2\dot{F}\dot{H}}{D^2 F} - \frac{2H\ddot{D}}{D} + \frac{H^2\ddot{H}}{D^2} + \frac{2H\dot{H}^2}{D^2} + \frac{\dot{H}\dot{F}}{F} - \frac{2\chi H p(r)}{F} - \frac{2\chi H\rho(r)}{F}\right) = 0 \tag{4.22}$$

olarak elde edilir.

(4.17)-(4.22) denklem sistemi, ikinci mertebeden lineer olmayan bir sistem olduğundan, çözümlemek oldukça güçtür. İdeal akışkan madde dağılımı ve uzay-zamana kazandırdığı geometrinin belirlenebilmesi için (4.17)-(4.22) denklemlerini sağlayan ve aşağıda verilen bazı özel çözümleri önermek mümkündür.

(i) $F(r) = a_1$ **durumu:**

Bu durum, *f(R)* gravitasyon teorisindeki en temel modellerden birisi olan ΛCDM modeline karşılık gelmektedir. (4.17)-(4.22) eşitliklerinden

$$F(r) = a_1 \tag{4.23}$$

sabit fonksiyonu dikkate alındığında *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde ideal akışkanlı Gödel evreni için

$$H(r) = \pm\frac{1}{2}a_2^2 e^{\frac{r+a_4}{a_2}} \pm \frac{1}{2}a_2^2 a_3 e^{-\frac{r+a_4}{a_2}} + a_5 \tag{4.24}$$

ve

$$D(r) = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}a_2^2 (e^{\frac{r+a_4}{a_2}} - a_3 e^{-\frac{r+a_4}{a_2}}) \tag{4.25}$$

olarak elde edilir. Burada $a_1, a_2, ..., a_5$'ler keyfi sabitlerdir. Ayrıca, (4.17)-(4.22) alan denklemlerinin (4.23) ile birlikte kullanılmasından, *f(R)* gravitasyon teorisi kapsamındaki ideal akışkanlı Gödel evreni için madde yoğunluğu ve basıncı arasında

$$\rho(r) + p(r) = \frac{a_1}{a_2^2\,\chi} \tag{4.26}$$

bağıntısı elde edilir.

(ii) $F(r) = a_6\, r + a_7$ **durumu:**

(4.17)-(4.22) eşitliklerinde

$$F(r) = a_6\, r + a_7 \tag{4.27}$$

fonksiyonu dikkate alındığında *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde ideal akışkanlı Gödel evreni için

$$H(r) = a_8 \tag{4.28}$$

ve

$$D(r) = a_9 \tag{4.29}$$

elde edilir. Burada $a_6,...,a_9$'lar keyfi sabitlerdir. Ayrıca bu durumda, (4.17)-(4.22) alan denklemlerinin (4.27) ile kullanılmasından, *f(R)* gravitasyon teorisi kapsamındaki ideal akışkanlı Gödel evreni için madde yoğunluğu ve basıncı arasında

$$p(r) + \rho(r) = 0 \tag{4.30}$$

olur.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 *f(R)* Gravitasyon Teorisinde Küresel Simetrik Modeller ile İlgili Sonuç ve Öneriler

(4.11) ve (4.12) denklemleri (4.2) denkleminde yerine yazıldığında *f(R)* gravitasyon teorisinde küresel simetrik monopoller için Ricci skaleri

$$R(r) = \frac{12c_2}{c_3} - \frac{2}{r^2} \tag{5.1}$$

olarak elde edilir. r yarıçap büyüklüğü (5.1) eşitliği yardımıyla Ricci skalerine bağlı olarak

$$r(R) = \pm\left(\frac{2c_3}{12c_2 - Rc_3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda (4.6)-(4.8) eşitlikleri ile verilen alan denklemlerinde $F(R) = df(R)/dR$ olduğundan *f(R)* fonksiyonunun

$$f(R) = \int F(R)\,dR \tag{5.3}$$

olarak hesaplanabileceği açıkça görülmektedir. Diğer yandan Bölüm 4'de elde edildiği gibi küresel simetrik monopoller için *F(r)* fonksiyonu $F(r) = \chi\eta^2$ şeklindedir. Dolayısıyla, (4.14) ve (5.3) eşitliklerinin birlikte kullanılmasından *f(R)* fonksiyonu

$$f(R) = \chi\eta^2 R + c_4 \tag{5.4}$$

olarak elde edilir. Burada c_4 keyfi sabittir. Ayrıca (3.3) denklemi kullanılarak da *f(R)* fonksiyonu elde edilebilir. (3.3), (3.5), (4.14) ve (5.2) denklemlerinin birlikte ele alınmasından

$$f(R) = \chi\eta^2\left(R - \frac{6c_2}{c_3}\right) \tag{5.5}$$

olur.

Genel olarak, Einstein-Hilbert etkisinde skaler eğriliğin yerine dikkate alınabilecek *f(R)* fonksiyonu bir kuvvet serisi şeklinde olabilir (Sotiriou ve Liberati, 2007). Bu kuvvet serisi en genel formunda

$$f(R) = \ldots + \frac{\alpha_i}{R^i} + \ldots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} + \ldots + \frac{R^j}{\beta_j} + \ldots \qquad \textbf{(5.6)}$$

şeklinde skaler eğriliğin pozitif ve negatif kuvvetlerini içerebilir (Sotiriou ve Liberati, 2007). Burada α_i ve β_j etkiye göre değer alabilen katsayılardır.

f(R) gravitasyon teorisinde küresel simetrik monopollerin alan denklemi çözümleri dikkate alındığında, (5.4)-(5.6) denklemlerinden *f(R)* fonksiyonunun kuvvet serisine uygun şekilde elde edildiği açıkça görülmektedir. (5.4)-(5.6) denklemlerinin birlikte kullanılmasından küresel simetrik monopollerin izin verdiği *f(R)* fonksiyonu katsayıları

$$\alpha_i = 0 \qquad \textbf{(5.7)}$$

ve

$$\frac{1}{\beta_j} = 0 \qquad \textbf{(5.8)}$$

şeklindedir. (5.4) ve (5.5) denklemleri aynı *f(R)* fonksiyonunu işaret etmektedir. Dolayısıyla bu iki eşitliği karşılaştırdığımızda, monopol simetri kırılma ölçütü sabiti için

$$\chi\eta^2 = -\frac{c_3 c_4}{6 c_2} \qquad \textbf{(5.9)}$$

eşitliği elde edilir. (5.9) denkleminden $\frac{c_3 c_4}{c_2} < 0$ olması gerektiği açıktır. Ayrıca $f(r) = \chi\eta^2$ yani sabit elde edilmiş olması (5.4)-(5.6) eşitliklerinden de açıkça görüldüğü üzere *f(R)* fonksiyonunun kuvvet serisi formunu

$$f(R) = \chi\eta^2 \left(R - \frac{6c_2}{c_3} \right) = \chi\eta^2 R + c_4 = R - 2\Lambda \tag{5.10}$$

fonksiyonuna indirgemektedir. Bu durum *f(R)* gravitasyon teorisindeki en temel modellerden birisi olan ΛCDM modeline karşılık gelmektedir. *f(R)* gravitasyon teorisinde dikkate alınan ΛCDM modeli aynı zamanda bu teoriyi Einstein genel relativitesine indirgeyen modeldir. Dolayısıyla *f(R)* gravitasyon teorisinde *F(R)* $\rightarrow$ *sabit* olması durumunda, bu teorinin alan denklemlerinden elde edilen sonuçlar ile Einstein genel relativitesinden elde edilen sonuçlar çakışmalıdır. Einstein tarafından Λ-kozmolojik sabitine yüklenen evrenin genişleme rolü, *f(R)* gravitasyon teorisinin ΛCDM modelinde evrenin yaklaşık olarak %23'ünü oluşturduğu öngörülen karanlık maddenin bir çeşidi olan "soğuk karanlık madde (Cold Dark Matter)" ye yüklenmektedir. Ayrıca, (5.4)-(5.6) denklemlerinden keyfi sabitler ve monopol simetri kırılma ölçütü için

$$\chi\eta^2 = 1 \tag{5.11}$$

ve

$$\frac{3c_2}{c_3} = \Lambda \tag{5.12}$$

elde edilir.

Aynı zamanda bu tez çalışmasında elde edilen küresel simetrik monopol modeli $c_1 = 0$ koşulu altında, Benson ve Cho (2001) tarafından Einstein gravitasyon teorisinde araştırılmış olan kozmolojik sabitli küresel simetrik monopol çözümü ile uyuşmaktadır. Bu sonuç, bu tez çalışmasında elde edilen küresel simetrik monopol modelinin tutarlılığını ve *f(R)* gravitasyon teorisinin (5.10) denklemi ile verilen koşul altında Einstein gravitasyon teorisine indirgendiğini desteklemektedir.

(5.11) ve (5.12) denklemlerinden görüldüğü gibi $c_2 = 0$ durumunda *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde incelenen küresel simetrik monopoller, Barriola ve Vilenkin (1989) tarafından verilmiş olan Einstein gravitasyon teorisindeki kozmolojik sabitsiz küresel simetrik monopol çözümü ile ve ayrıca Barros ve Romero (1997) tarafından verilmiş olan Brans-Dicke gravitasyon teorisindeki küresel simetrik monopol çözümü ile uyuşmaktadır.

(5.1) eşitliğinden görüldüğü üzere $r \to \infty$ sınırında skaler eğrilik $R \to \frac{12c_2}{c_3}$ sabitine yaklaşmaktadır. Yani *f(R)* gravitasyon teorisine göre monopol kaynağından uzak komşuluklarda uzay-zamanın eğriliği koordinatlardan ve maddeden bağımsız bir sabit olmaktadır.

f(R) gravitasyon teorisinde küresel simetrik monopol modelinin geometrik özelliklerini açık bir şekilde görebilmenin bir yolu da elde edilen yay elemanının “embed” diyagramını incelemektir. Bilindiği gibi, küresel simetrik uzay-zamanın yay elamanı (4.1) eşitliği ile verilmektedir. (4.1) eşitliğiyle verilen küresel simetrik uzay-zaman, herhangi bir $t = t_0$ anında ve $\theta = \pi/2$ düzleminde

$$d\ell^2 = -e^{\nu(r)}dr^2 - r^2 d\phi^2 \tag{5.13}$$

olarak silindirik koordinatlara indirgenir. Silindirik koordinatlarda Minkowski uzayı yay elemanı

$$d\sigma^2 = -dz^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \tag{5.14}$$

şeklindedir. (5.13) ve (5.14) eşitlikleri kullanılarak koordinat diferansiyelleri arasında

$$\int dz = \int \sqrt{e^{\nu(r)} - 1}\, dr \tag{5.15}$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir. (4.12) ve (5.15) denklemleri kullanılarak

$$\int dz = \int \sqrt{\frac{c_3 r - c_1 - c_2 r^3}{c_1 + c_2 r^3}}\, dr \tag{5.16}$$

ifadesi elde edilir. (5.16) eşitliğinde $c_1 = 0$ seçilirse integralin sonucu

$$z(r) = 1 - \frac{\ln\left(\dfrac{2(c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2\, c_3\, r^2})}{c_2\, r}\right) c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_2\, c_3\, r^2}} \tag{5.17}$$

veya (5.16) eşitliğinde $c_2 = 0$ seçilirse integralin sonucu

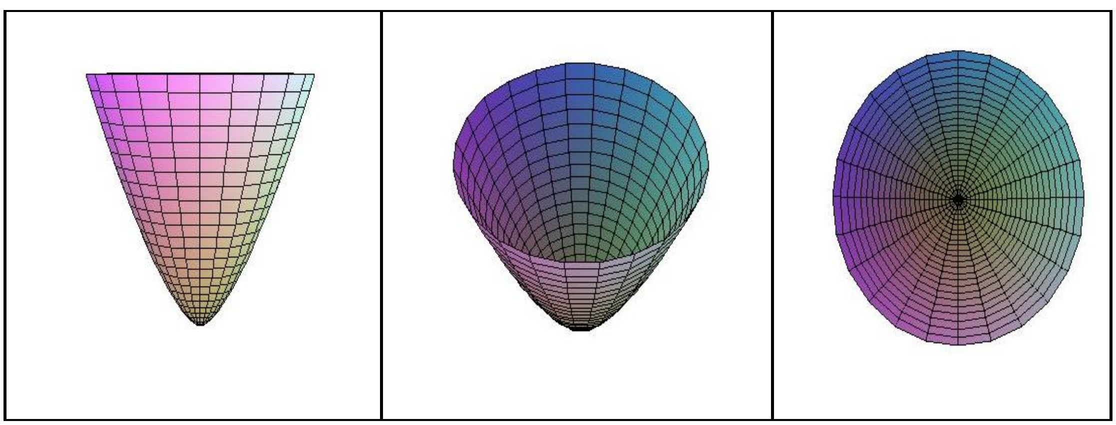
$$z(r) = -\frac{2(c_1 - c_3 r)\sqrt{-(c_1 - c_3 r)}}{3 c_3 \sqrt{c_1}} \tag{5.18}$$

olarak elde edilir. (5.17) ve (5.18) eşitliklerinde verilen z dik eksenindeki radyal değişimi kullandığımızda *f(R)* gravitasyon teorisinde küresel simetrik monopol modelinin "embed" diyagramlarını Şekil.1 ve Şekil.2'de verildiği gibi elde ederiz.

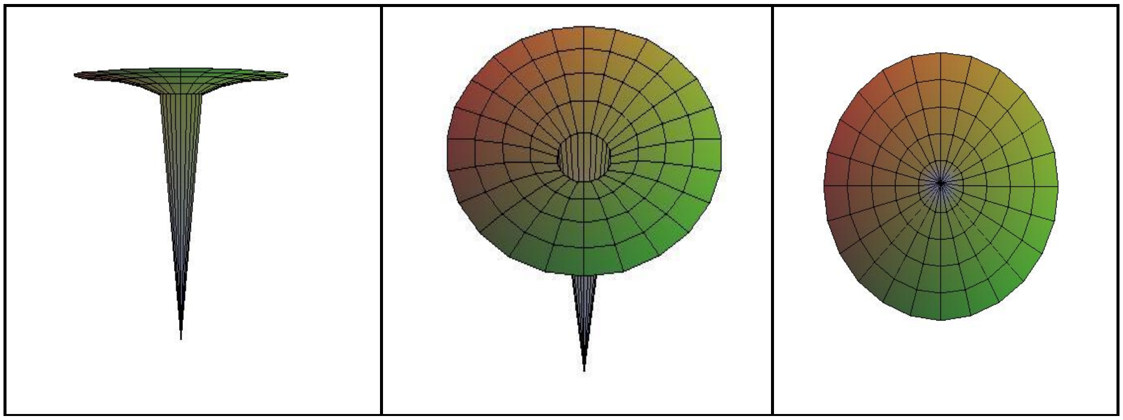
Şekil.1 ve Şekil.2'den görüldüğü gibi uzay-zaman geometrisi monopol varlığında *f(R)* gravitasyon teorisine göre statik küresel simetrik bir karadeliği anımsatmaktadır. (4.11) ve (4.12) denklemleri ile verilen metrik potansiyelleri arasında $c_3 = 1$ koşulu altında

$$e^{\mu(r)} = e^{-\nu(r)} \tag{5.19}$$

bağıntısı elde edilir.



Şekil 1. *f(R)* gravitasyon teorisinde monopollü küresel simetrik uzay-zaman geometrisi ($c_1 = 1, c_2 = 0,\ c_3 = 1$ ve $\theta = \pi/2$ durumu).



Şekil 2. *f(R)* gravitasyon teorisinde monopollü küresel simetrik uzay-zaman geometrisi ($c_1 = 0$, $c_2 = 20$, $c_3 = 1$ ve $\theta = \pi/2$ durumu).

Bilindiği üzere, karadelikler için yay elemanı genel olarak

$$ds^2 = E^2(r)dt^2 - \frac{1}{E^2(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad \textbf{(5.20)}$$

şeklinde ifade edilmektedir (Landau ve Lifshitz, 1976; Kodama, 2009). (5.19) ve (5.20) denklemlerinden açıkça görüldüğü gibi *f(R)* gravitasyon teorisine göre, $c_3 = 1$ durumunda küresel simetrik monopoller, bir çeşit karadelik oluşturmaktadır. (4.13) eşitliği bu bağlamda incelenirse, *f(R)* gravitasyon teorisinde monopol kaynağının neden olduğu küresel simetrik karadelik çeşidi için

$$r_h = -\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \textbf{(5.21)}$$

olur. Burada, r_h söz konusu karadeliğin olay ufkudur ve $c_1/c_2 < 0$'dır. (5.19)-(5.21) ve Şekil 2'de tanımlanan bu karadelik çeşidi geometrik özellikleri açısından BTZ-tipi karadeliği işaret etmektedir ve $c_2 \neq 0$ olmalıdır (Bañados ve ark., 1992; Kodama, 2009). $c_1 = 0$ ve $c_3 = 1$ durumunda ise küresel simetrik monopol modeli, Şekil.2'de verilen geometriye sahip olacaktır. Bu durumda metrik potansiyellerin

$e^{\mu(r)} \cong e^{-\nu(r)} \cong \left(1-\chi\eta^2+\frac{c_1}{r}\right)$ formuna uygun olacağına dikkat çekmek gerekir. Bu durum $c_1=-2M$ alınması koşulu ile monopol varlığı terk edildiğinde sınır şartlarından Schwarzschild karadeliğine indirgenir.

Ayrıca, bu çalışma kapsamında elde edilmiş olan *f(R)* gravitasyon teorisi küresel simetrik monopol modeli, Carames ve ark. (2012) tarafından daha önce verilmiş küresel monopol çözümleriyle uyuşmaktadır. Carames ve ark. (2012), *f(R)* gravitasyon teorisinde monopollü küresel simetrik uzay-zamanı zayıf alan yaklaşıklığı altında ve çeşitli *f(R)* fonksiyonu seçimleri altında incelemişlerdir. Bu tez çalışmasında ise *f(R)* gravitasyon teorisinde küresel simetrik monopollerin kabulsüz tam çözümleri elde edilmiş olup, söz konusu teorinin *f(R)* fonksiyonu için sadece $f(R)=\chi\eta^2\left(R-\frac{6c_2}{c_3}\right)$ formunda olabileceği gösterilmiştir.

5.2 *f(R)* Gravitasyon Teorisinde İdeal Akışkanlı Gödel Evreni ile İlgili Sonuç ve Öneriler

Bu bölümde *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde alan denklemlerini ve çözümlerini elde etmiş olduğumuz ideal akışkanlı statik silindirik simetrik Gödel evrenine dair geometrik ve fiziksel özellikler tartışılacaktır. Öncelikle $F(r)=a_1$ durumu için elde edilen sonuçlar ve fiziksel anlamlarını yorumlayalım. (3.15) eşitliği ile verildiği gibi ideal akışkan, basıncı ve yoğunluğu arasında ω orantı sabiti olmak üzere bir doğru orantı bulunmaktadır. (3.15) eşitliği ile verilen bu orantı, alan denklemi sonuçlarından biri olan (4.26) eşitliği ile birlikte kullanılırsa, ideal akışkanın yoğunluğu

$$\rho=\frac{a_1}{a_2^2(\omega+1)\chi} \tag{5.22}$$

ve dolayısıyla basıncı

$$p=\frac{a_1\,\omega}{a_2^2(\omega+1)\chi} \tag{5.23}$$

şeklinde elde edilir. ω sabitinin aldığı değerlere göre ideal akışkan formundaki madde formu değişim gösterirken, bu maddenin basınç ve yoğunlukları da belirlenebilir.

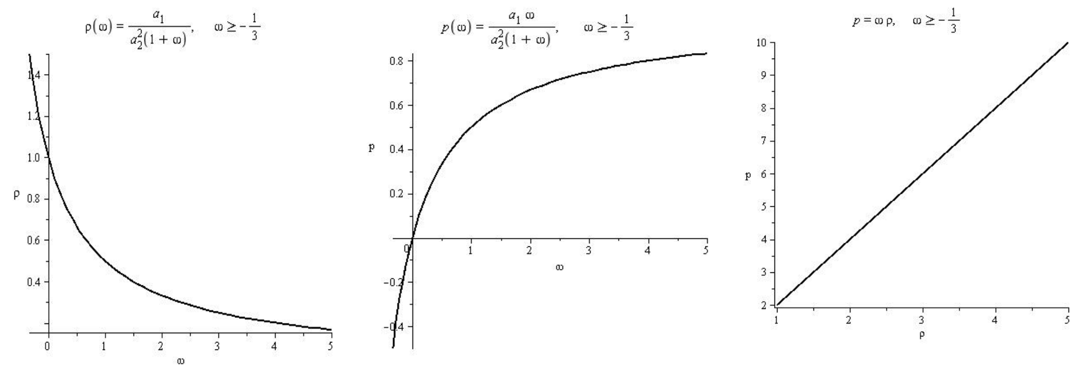
İdeal akışkan formundaki çeşitli kozmolojik maddeler uzay-zaman geometrisini ve maddenin karakteristik özelliklerine göre çeşitli enerji şartlarını sağlayabilirler. Zayıf, null, kuvvetli ve baskın enerji şartları olarak adlandırılan bu özel durumlar, ideal akışkan için Çizelge 1'de özetlendiği şekilde, ideal akışkanın basınç ve yoğunluğuyla ilgili koşullardır.

Çizelge 1. İdeal akışkan için enerji koşulları (Hawking ve Ellis, 1973)

Zayıf Enerji Koşulu	$\rho \geq 0, \quad \rho + p \geq 0$
Güçlü Enerji Koşulu	$\rho + p \geq 0, \quad \rho + 3p \geq 0$
Baskın Enerji Koşulu	$\rho \geq \lvert p \rvert$
Null Enerji Koşulu	$\rho + p \geq 0$

(i) *f(R)* gravitasyon teorisinde ideal akışkanlı statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

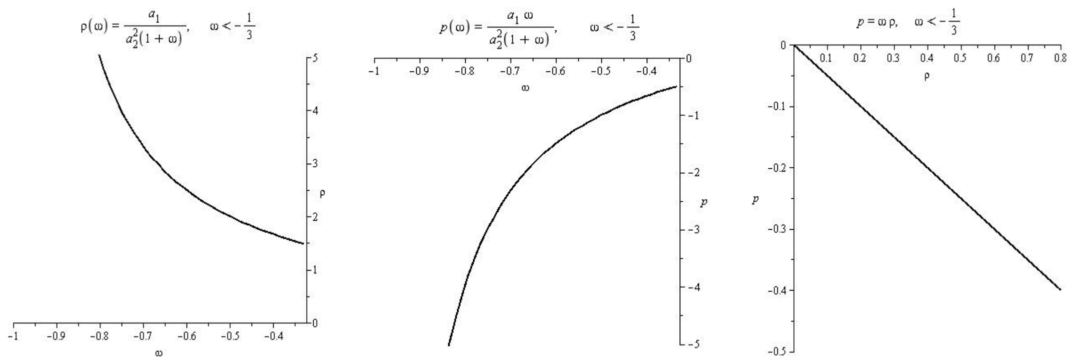
Bir kozmik madde çeşidinin ideal akışkan olarak adlandırılabilmesi için öncelikle $\rho \geq 0$ koşulunu sağlaması ve bunun yanında enerji şartlarından zayıf, kuvvetli ve baskın enerji koşullarını da sağlıyor olması gerekir. Söz konusu koşulların sağlanabilmesi için (5.22) ve (5.23) eşitlikleri Tablo 1'de verilen zayıf, kuvvetli ve baskın enerji koşulları ile birlikte düşünülürse $a_1 \geq 0$ ve $\omega \geq -\frac{1}{3}$ olması gerekir. *f(R)* gravitasyon teorisine göre ideal akışkanlı statik silindirik simetrik Gödel evreni için, madde yoğunluğu ve basıncı Şekil 3'deki gibi değişir.



Şekil 3. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki ideal akışkanın basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$).

(ii) *f(R)* gravitasyon teorisinde karanlık enerjili statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

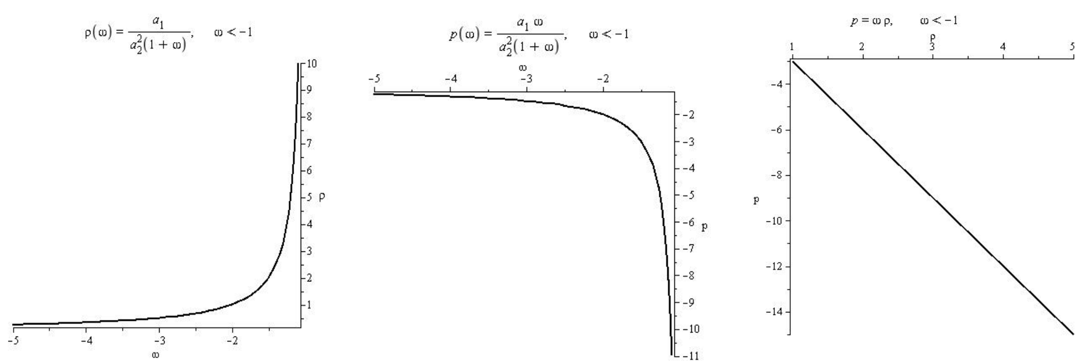
İdeal akışkan formundaki maddenin karanlık enerji olarak adlandırılabilmesi için kuvvetli enerji şartını ihlal etmesi gerekir. Söz konusu koşulun ihlal edilmesi için, (5.22) ve (5.23) eşitlikleri Tablo 1'de verilen kuvvetli enerji koşulu ile birlikte düşünülürse, $\omega < -\dfrac{1}{3}$ olması gerekir. *f(R)* gravitasyon teorisine göre karanlık enerjili statik silindirik simetrik Gödel evreni için, karanlık enerjinin yoğunluğu ve basıncı Şekil 4'deki gibi değişir. (5.22), (5.23) eşitlikleri ve Şekil 4 'de dikkat etmek gerekir ki, *f(R)* gravitasyon teorisi, $\omega = -1$ değerinde karanlık enerjili silindirik simetrik Gödel modeline izin vermemektedir. $\omega = -1$ değerinde madde, karanlık enerjinin özel bir durumudur ve kozmolojik sabit rolü üstlenmektedir. Dolayısıyla, *f(R)* gravitasyon teorisi, kozmolojik sabitli silindirik simetrik Gödel modeline izin vermemektedir.



Şekil 4. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki karanlık enerjinin basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$).

(iii) *f(R)* gravitasyon teorisinde hayalet enerjili statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

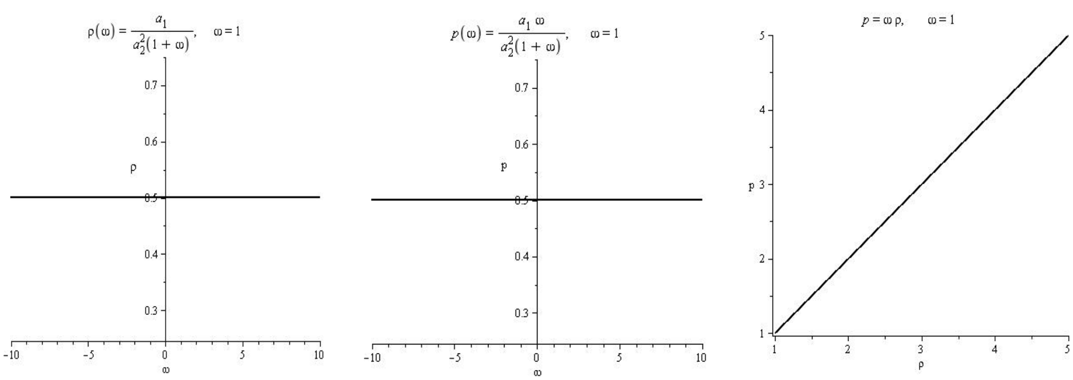
İdeal akışkan formundaki maddenin hayalet enerji olarak adlandırılabilmesi için tüm enerji şartlarını ihlal etmesi gerekir. Söz konusu koşulların ihlal edilmesi için, (5.22) ve (5.23) eşitlikleri Tablo 1'de verilen zayıf, kuvvetli, baskın enerji koşulları ile birlikte düşünülürse, $\omega < -1$ olması gerekir. *f(R)* gravitasyon teorisine göre hayalet enerjili statik silindirik simetrik Gödel evreninde hayalet enerjinin yoğunluğu ve basıncı Şekil 5'deki gibi değişir.



Şekil 5. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki hayalet enerjinin basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = -1$ ve $a_2 = 1$).

(iv) *f(R)* gravitasyon teorisinde stiff maddeli statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

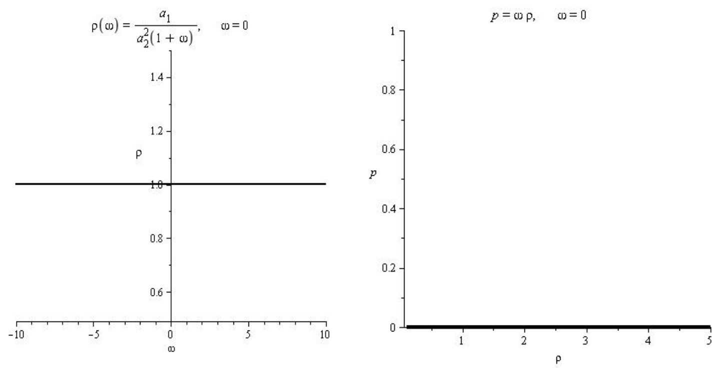
İdeal akışkan $\omega = 1$ durumunda, basıncı ve yoğunluğu birbirine eşit olan stiff madde formuna sahip olur. (5.22) ve (5.23) eşitlikleri bu koşul altında dikkate alınırsa, *f(R)* gravitasyon teorisine göre stiff maddeli statik silindirik simetrik Gödel evreninde stiff maddenin yoğunluğu ve basıncı Şekil 6'deki gibi değişir.



Şekil 6. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki stiff maddenin basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$).

(v) *f(R)* gravitasyon teorisinde toz maddeli statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

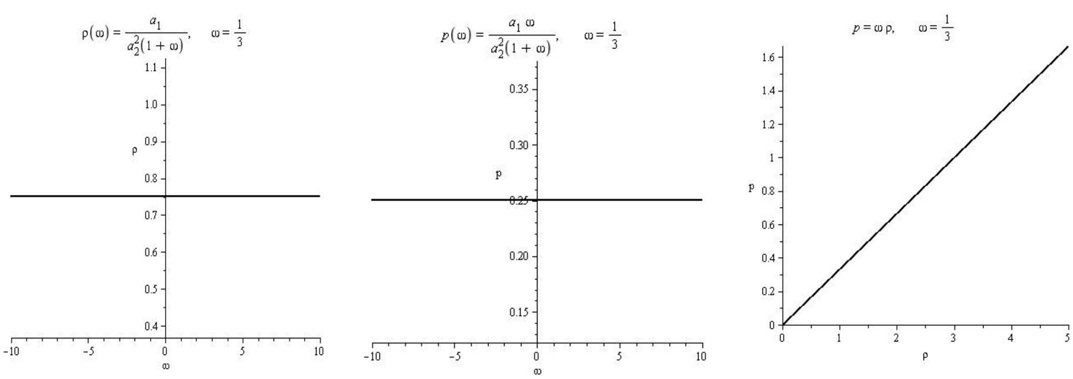
İdeal akışkan $\omega = 0$ durumunda, basınçsız bir madde çeşidi olan toz madde formuna sahip olur. (5.22) ve (5.23) eşitlikleri bu koşul altında dikkate alınırsa, *f(R)* gravitasyon teorisine göre toz maddeli statik silindirik simetrik Gödel evreninde toz maddenin yoğunluğu ve basıncı Şekil 7'deki gibi değişir.



Şekil 7. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki toz maddenin basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$).

(vi) *f(R)* gravitasyon teorisinde saf ışınım alanlı statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

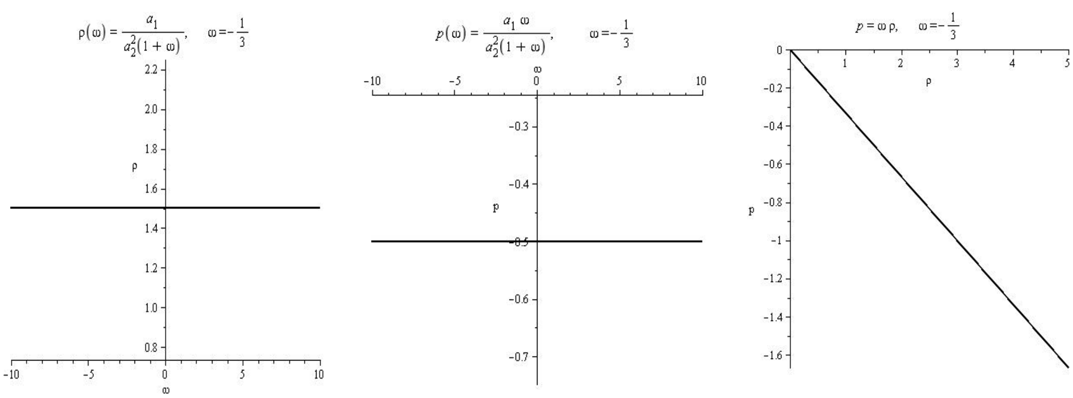
İdeal akışkan $\omega = \frac{1}{3}$ durumunda, evrenin ilk evrelerinde baskın olarak var olduğu bilinen saf ışınım alanı formuna sahip olur. (5.22) ve (5.23) eşitlikleri bu koşul altında dikkate alınırsa, *f(R)* gravitasyon teorisine göre saf ışınım alanlı statik silindirik simetrik Gödel evreninde ışınımın yoğunluğu ve basıncı Şekil 8'deki gibi değişir.



Şekil 8. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki saf ışınım alanın basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$).

(vii) *f(R)* gravitasyon teorisinde sicim gazlı statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

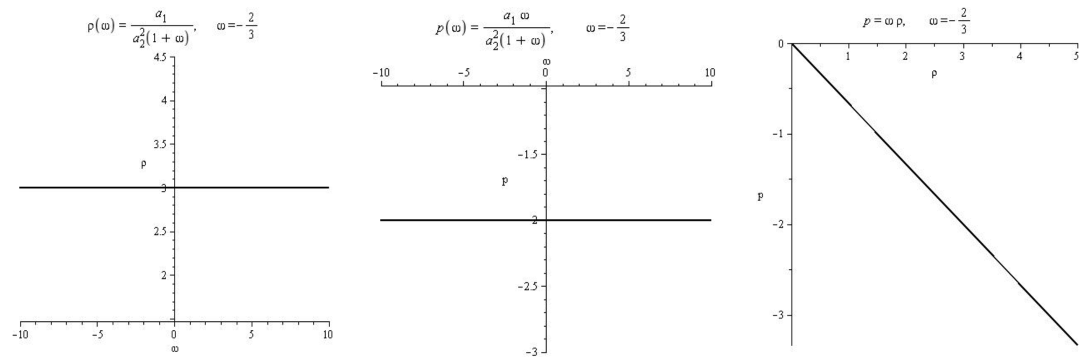
İdeal akışkan $\omega = -\frac{1}{3}$ durumunda, evrene uzaysal bir eğrilik kazandıran sicim gaz formunu alır (Kamenshchik ve Khalatnikov, 2011). (5.22) ve (5.23) eşitlikleri bu koşul altında dikkate alınırsa, *f(R)* gravitasyon teorisine göre sicim gazlı statik silindirik simetrik Gödel evreninde sicim gazın yoğunluğu ve basıncı Şekil 9'deki gibi değişir.



Şekil 9. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki sicim gazın basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$).

(viii) *f(R)* gravitasyon teorisinde domain walllu statik silindirik simetrik Gödel evren modeli:

İdeal akışkan $\omega = -\frac{2}{3}$ durumunda, egzotik madde çeşitlerinden biri olan domain wall formuna sahip olur. (5.22) ve (5.23) eşitlikleri bu koşul altında dikkate alınırsa, *f(R)* gravitasyon teorisine göre domain walllu statik silindirik simetrik Gödel evreninde domain wallun yoğunluğu ve basıncı Şekil 10'deki gibi değişir.



Şekil 10. *f(R)* gravitasyon teorisine göre Gödel evrenindeki domain wallun basınç ve yoğunluk değişim grafikleri ($a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$).

f(R) gravitasyon teorisine göre statik silindirik simetrik Gödel evreninde ideal akışkan formundaki tüm maddelerin basınç ve yoğunlukları sabit olmaktadır. Diğer yandan, bu çözümlerin geometrik özellikleri de aşağıda verildiği şekilde irdelenebilir.

Homojen ve dönen bir model olan Gödel evreninin, homojenlik koşulu metrik potansiyeller yardımıyla belirlenmektedir (Rebouças ve Tiomno, 1983). Silindirik simetrik Gödel evrenine ait ve (4.15) eşitliği ile verilen yay elemanı dikkate alınırsa, bu modelin homojen olabilmesi için

$$\frac{\ddot{D}}{D} \equiv sabit \qquad \textbf{(5.24)}$$

şartının sağlanması gerekir. Bu tez çalışması kapsamında, *f(R)* gravitasyon teorisinde ideal akışkanlı silindirik simetrik Gödel evreni için, (4.25) denklemi ile verilen metrik potansiyel (5.24) eşitliğindeki koşulda kullanılırsa

$$\frac{\ddot{D}}{D} = \frac{1}{a_2^2} \qquad \textbf{(5.25)}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (5.25) eşitliğinden görüldüğü gibi, *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde de, ideal akışkanlı silindirik simetrik Gödel uzay-zamanı homojen bir uzay-zamandır. Aynı zamanda, (5.25) eşitliği *D(r)* metrik potansiyelinin hesaplanmasına olanak sağlayan bir diferansiyel denklemdir. (5.25) eşitliğine göre *D(r)* metrik potansiyeli

$$D(r) = b_1 e^{\frac{r}{a_2}} + b_2 e^{-\frac{r}{a_2}} \tag{5.26}$$

olur. Burada b_1 ve b_2 çözümden gelen keyfi sabitlerdir. (4.25) ve (5.26) eşitlikleri karşılaştırıldığında a_4 keyfi sabitinin ancak

$$a_4 = 0 \tag{5.27}$$

değerini alabileceği görülmektedir. Böylece homojenlik koşuluna göre (4.24), (4.25) ve (5.27) eşitliklerinden metrik potansiyeller

$$H(r) = \frac{1}{2} a_2^2 e^{\frac{r}{a_2}} + \frac{1}{2} a_2^2 a_3 e^{-\frac{r}{a_2}} + a_5 \tag{5.28}$$

ve

$$D(r) = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} c_2^2 (e^{\frac{r}{a_2}} - a_3 e^{-\frac{r}{a_2}}) \tag{5.29}$$

formuna indirgenir. (4.15) denklemi ile verilen yay elemanında $d\phi^2$ koordinat diferansiyelinin katsayısı $G(r) = D^2(r) - H^2(r)$ şeklindeki fonksiyondur. Bu fonksiyon, (5.28) ve (5.29) denklemleri kullanılarak

$$G(r) = -\frac{1}{8} a_2^4 (e^{\frac{2r}{a_2}} + a_3^2 e^{-\frac{2r}{a_2}}) - a_2^2 a_5 (e^{\frac{r}{a_2}} + a_3 e^{-\frac{r}{a_2}}) - \frac{3}{4} a_2^4 a_3 - a_5^2 \tag{5.30}$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözümlerdeki keyfi sabitler $a_3 = 1$, $a_2 = \frac{1}{m} = \sqrt{2} = -a_5$ seçildiğinde (5.28)-(5.30) eşitliklerinde verilen fonksiyonlar

$$H(r) = \frac{2\sqrt{2}}{m} \sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right), \tag{5.31}$$

$$D(r) = \frac{2}{m}\sinh\left(\frac{mr}{2}\right)\cosh\left(\frac{mr}{2}\right) \qquad \textbf{(5.32)}$$

ve

$$G(r) = \frac{4}{m^2}\sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right)\left(1-\sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right)\right) \qquad \textbf{(5.33)}$$

olur. (5.31)-(5.33) denklemleri aynı zamanda orijinal Gödel evreninin metrik potansiyelleridir (Gödel,1949; Rebuoças ve Tiomno, 1983). Orijinal Gödel evreni sabit bileşenli bir rotasyon vektörüne sahiptir (Yılmaz, 2005). Bu vektörün sıfırdan farklı bileşeni metrik potansiyelleri cinsinden

$$\Omega = \frac{\dot{H}}{2D} \qquad \textbf{(5.34)}$$

olarak tanımlanır (Rebuoças ve Tiomno, 1983). (5.31), (5.32) ve (5.34) denklemlerinden

$$m^2 = 2\Omega^2 \qquad \textbf{(5.35)}$$

elde edilir. (5.35) eşitliği *f(R)* gravitasyon teorisinde ideal akışkanlı statik küresel simetrik Gödel modelinin orijinal Gödel çözümü ile eşdeğer özelliklere sahip olduğunu göstermektir. Bu fonksiyon aynı zamanda Gödel evrenindeki “causal’’ ve “acausal’’ özelliğini belirleyen fonksiyondur (Gödel, 1949). (5.30) eşitliğinde $a_3 = 1$ ve $a_5 = -a_2^2$ yazılırsa

$$G(r) = -\frac{1}{8}a_2^4\left(e^{\frac{2r}{a_2}} + e^{-\frac{2r}{a_2}} - 8e^{\frac{r}{a_2}} - 8e^{-\frac{r}{a_2}} + 14\right) \qquad \textbf{(5.36)}$$

olarak elde edilir. (5.36) eşitliğinin sıfıra eşit olması durumunda

$$r_c = a_2 \ln(3 \pm 2\sqrt{2}) \qquad \textbf{(5.37)}$$

olarak elde edilir.

(5.28) ve (5.29) denklemleri ile verilen metrik potansiyeller (4.16) eşitliğinde yerine yazılırsa *f(R)* gravitasyon teorisi için ideal akışkanlı statik silindirik simetrik Gödel evreninin eğrilik skaleri

$$R = \frac{1}{a_2^2} \tag{5.38}$$

olarak elde edilir. Bu durumda (4.23) eşitliğinden $F(R) = \dfrac{df(R)}{dR}$ bağıntısı yardımıyla

$$f(R) = a_1 R + a_{10} \tag{5.39}$$

olarak elde edilir. Diğer yandan (3.3) dikkate alındığında

$$f(R) = \frac{1}{2}(1+3\chi)a_1 R - 2\chi\rho \tag{5.40}$$

elde edilir.

Ayrıca, (4.15), (5.28) ve (5.29) denklemlerinden ideal akışkanlı statik Gödel evreninin yay elemanı

$$ds^2 = \left[dt + \left(\pm\frac{1}{2}a_2^2 e^{\frac{r}{a_2}} + \frac{1}{2}a_2^2 a_3 e^{-\frac{r}{a_2}} + a_5\right)d\phi\right]^2 - \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}c_2^2(e^{\frac{r}{a_2}} - a_3 e^{-\frac{r}{a_2}})\right)^2 d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \tag{5.41}$$

şeklindedir. (5.39) ve (5.40) denklemlerinden görüldüğü üzere, *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde ideal akışkanlı Gödel evreni için birbirinden farklı olarak iki *f(R)* fonksiyonu elde edilmiştir. Ancak her iki fonksiyonunda $f(R) = R - 2\Lambda$ formuna uygun olduğuna dikkat etmek gerekir. (5.39) denkleminde $a_1 = 1$ ve $a_{10} = -2\Lambda$ olarak kabul edilirse *f(R)* fonksiyonu

$$f(R) = R - 2\Lambda \tag{5.42}$$

olarak elde edilir. (5.42) denklemi bilindiği üzere ΛCDM modeli için geçerli fonksiyona karşılık gelmektedir ve klasik Einstein genel relativitesinden elde edilen çözümlerle uyuşmaktadır (Yılmaz, 2005; Dunn, 1989).

Diğer yandan (4.27) denklemi ile verilen diğer bir *F(r)* fonksiyonu için ideal akışkanlı statik Gödel evreninin, (4.28) ve (4.29) denklemlerine göre, *f(R)* gravitasyon teorisi çerçevesinde metrik potansiyelleri sabitlere indirgenmektedir. Dolayısıyla, bu durum altında sabit ve uniform bir geometri karşımıza çıkmaktadır. Bu geometrik yapı, Gödel evrenini tam olarak yansıtmayacağından önemini yitirmektedir.

KAYNAKLAR

Aghamohammadi A., Saaidi K., Abolhasani M. R. ve Vajdi A., 2010. Spherical Symmetric Solution in *f(R)* Model Around Charged Black Hole, *Int. J. Theor. Phys.*, 49 (4): 709-716.

Aktaş C., Aygün S. ve Yılmaz I., 2012. Behaviors of Dark Energy and Masonic Scalar Field for Anisotropic Universe in a Modified Gravity, *Phys. Lett. B*, 707 (2): 237-242.

Appleby S. A. ve Battye R. A., 2008. Aspects of Cosmological Expansion in *F(R)* Gravity Models, *Journ. Cosm. Astro. Phy.*, 0805: 019.

Azadi A., Momeni D. ve Nouri-Zonoz M., 2008. Cylindrical Solutions in Metric *f(R)* gravity, *Phys. Lett. B*, 670 (3): 210-214.

Bañados M., Teitelboim C. ve Zanelli J., 1992. The Black Hole in Three Dimensional Space Time, *Phys. Rev. Lett.*, 69 (13): 1849-1851.

Barriola M. ve Vilenkin A., 1989. Gravitational Field of A Global Monopole, *Phys. Rev. Lett.*, 63 (4): 341-343.

Barros A. ve Romero C., 1997. Global Monopoles in Brans-Dicke Theory of Gravity, *Phys. Rev. D*, 56 (10): 6688-6691.

Belinsky V. A. ve Khalatnikov I. M., 1973. Effect of Scalar and Vector Fields on the Nature of Cosmological Singularity, *Sov. Journ. Exp. Theor. Phys.*, 36:591.

Benson K. ve Cho I., 2001. A Universe in a Global Monopole, *Phys. Rev. D*, 64 (6): 065026.

Brikhoff G. D., 1944. Flat Space-Time and Gravitation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 30 (10): 324-334.

Brookfield A. W., Bruck C. V. D. ve Lisa M. H. H., 2006. Viability of *f(R)* Theories with Additional Powers of Curvature, *Phys. Rev. D*, 74 (6): 064028.

Buchdahl H. A., 1970. Non-linear Lagrangians and Cosmological Theory, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 150: 1-8.

Caramês T. R. P., Mello E. R. B. D. ve Guimarâes M. E. X., 2012. On the Motion of a Test Particle Around a Global Monopole in a Modified Gravity, *Mod. Phys. Lett. A*, 27 (30): 1250177.

Dodelson S., 2003. *Modern Cosmology*, Academic Pres, New York.

Dunn K., 1989. Two-Fluid Cosmological Models in Gödel-Type Spacetimes, *Gen. Rel. Grav.*, 21 (2): 137-147.

Eddington A. S., 1923. *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge.

Felice A. D. ve Tsujikawa S., 2010. *f(R)* Theories, *Living Rev. Rel.*, 13: 3.

Gödel K., 1949. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation, *Rev. Mod. Phys.*, 21 (3): 447-450.

Ha T., Huang Y., Ma Q., Pechan K. D., Renner T. J., Wu Z., Benesh G. A. ve Wang A., 2012. Classification of the FRW Universe with a Cosmological Constant and a Perfect Fluid of the Equation of State $p = \omega\rho$, *General Relativity and Gravitation*, 44 (6): 1433-1458.

Hawking S. W. ve Ellis G. F. R., 1973. *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge. 88-96.

Hu S. ve Sawicki I., 2007. A Parameterized Post-Friedmann Framework for Modified Gravity, *Phys. Rev. D*, 76 (10): 104043.

Kamenshchik A. Y. ve Khalatnikov I. M., 2011. Some Properties of the “String gas” with the Equation of State $p = -\frac{1}{3}\rho$, eprint arXiv:1109.0201.

Khalatnikov I. M. ve Kamenshchik A. Y., 2003. A Generalisation of Heckmann-Schucking Cosmological Solution, *Phys. Lett. B*, 553 (3-4): 119-125.

Kodama H., 2009. Perturbations and Stability of Higher-Dimensional Black Holes, *Lect. Notes Phys.*, 769: 427-470.

Landau L. D. ve Lifshitz E. M., 1976. *Mechanics*. U.S.S.R Academy of Sciences Volume I of Course of Theoretical Physics, Institute of Physical Problems.

Lobo F. S. N. ve Oliveira M. A., 2009. Wormhole Geometries in *f(R)* Gravity Theories of Gravity, *Phys. Rev. D*, 80 (10): 104012.

Mazharimousavi S. B., Halilsoy M. ve Tahamtan T., 2012. Solutions for *f(R)* Gravity Coupled with Electromagnetic Field, *Eur. Phys. Journ. C.*, 72: 1851.

Multamäki T. ve Vilja I., 2006. Spherically Symmetric Solutions of Modified Field Equations in *f(R)* Theories of Gravity, *Phys. Rev. D*, 74 (6): 064022.

Nemiroff R. J. ve Patla B., 2008. Adventures in Friedmann Cosmology: An Educationally Detailed Expansion of the Cosmological Friedmann Equations, *Am. Journ. Phys.*, 76 (3): 265-276.

Nojiri S. ve Odintsov D., 2003. Modified Gravity with Negative and Positive Powers of the Curvature: Unification of the Inflation and of the Cosmic Acceleration, *Phys. Rev. D*, 68 (12): 123512.

Nojiri S. ve Odintsov D., 2004. Modified Gravity with *ln R* Terms and Cosmic Acceleration, *Gen. Rel. Grav.*, 36 (8): 1765-1780.

Özemre A. Y., 1982. *Teorik Fizik Dersleri Cild:VII-Gravitasyonun Rölativist Teorileri*. İ. Ü. Fen Fak., İstanbul.

Pun C. S. J., Kovács Z. ve Harko T., 2008. Thin Accretion Disks in *f(R)* Modified Gravity Models, *Phys. Rev. D*, 78 (2): 024043.

Rador T., 2007. Acceleration of the Universe via *f(R)* Gravities and The Stability of Extra Dimensions, *Phys. Rev. D*, 75 (6): 064033.

Rebouças M. ve Tiomno J., 1983. Homogeneity of Riemannian Space-times of Gödel Type, *Phys. Rev. D*, 28 (6): 1251-1264.

Rebouças M. J. ve Santos J., 2009. Gödel-Type Universes in *f(R)* Gravity, *Phys. Rev. D*, 80 (6): 063009.

Santos J., Rebouças M. J. ve Oliveira T. B. R. F., 2010. Gödel-Type Universes in Palatini *f(R)* Gravity, *Phys. Rev. D*, 81 (23): 123017.

Sebastiani L. ve Zerbini S., 2011. Static Spherically Symmetric Solutions in *F(R)* Gravity, eprint arXiv:1012.5230v3.

Serway R. A. ve Beichner R. J., 1999. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics.* Sounder College Publishing.

Shamir M. F., 2010, Some Bianchi Type Cosmological Models in *f(R)* Gravity, *Astrophys. Space Sci.*, 330 (1): 183-189.

Sharif H. ve Kausar H. R., 2011a. Anisotropic Fluid and Bianchi III Model in *f(R)* Gravity, *Phys. Lett*. B, 697 (1): 1-6.

Sharif H. ve Kausar H. R., 2011b. Dust Static Spherically Symmetric Solution in *f(R)* Gravity, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 80, 044004.

Sharif M. ve Kausar H. R., 2011c. Non-Vacuum Solutions of Bianchi Type VI_0 Universe in *f(R)* Gravity, *Astrophys. Space Sci*, 332 (2): 463-471.

Sharif H. ve Shamir M. F., 2009. Exact Solutions of Bianchi I and V Spacetimes in *f(R)* Theory of Gravity, *Class. Quantum Grav.*, 26: 235020.

Sharif H. ve Shamir M. F., 2010. Non-vacuum Bianchi Types I and V in *f(R)* Gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 42 (11): 2643-2655.

Sotiriou P. T. ve Liberati S., 2007. Metric-Affine *f(R)* Theories of Gravity, *Annals Phys.*, 322 (4): 935-966.

Starobinsky A. A., 1980. A New Type of Isotropic Cosmological Models without Singularity, *Phys. Lett. B*, 91 (1): 99-102.

Starobinsky A. A., 1981. Evolution of Small Perturbations of Isotropic Cosmological Models with One-Loop Quantum Gravitational Corrections, *Journ. Exp. Theor. Phys. Lett.*, 34 (8): 438-441.

Starobinsky A. A., 1983. The Perturbation Spectrum Evolving from a Nonsingular, Initially de Sitter Cosmology, and the Microwave Background Anisotropy, Sov. Astron. Lett., 9 (5): 302-304.

Starobinsky A. A., 2007. Disappearing Cosmological Constant in *f(R)* Gravity, *Journ. Exp. Theor. Phys. Lett.*, 86 (3): 157-163.

Stephani H., 1985. *An Introduction to The Theory of The Gravitational Field.* CambridgeUniversity Press.

Strominger A., 1984. Positive-Energy Theorem $R+R^2$ Gravity, *Phys. Rev. D*, 30 (10): 2257-2259.

Vilenkin A., 1985. Classical And Quantum Cosmology Of The Starobinsky Inflationary Model, *Phys. Rev. D*, 32 (10): 2511-2521.

Vilenkin A. ve Shellard E.P.S., 1994. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, Cambridge.

Weyl H., 1919. Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Ann. Phys.,* 364 (10): 101-133.

Yılmaz İ., 2005. Domain Wall Solutions in the Nonstatic and Stationary Gödel Universes with Cosmological Constant, *Phys. Rev D*, 71: 103503.

Yılmaz İ., Baysal H. ve Aktaş C., 2012. Quark and Strange Quark Matter in *f(R)* Gravity for Bianchi Type I and V Space-Times, *General Relativity and Gravitation*, 44 (9): 2313-2328.

ÇİZELGELER **Sayfa No**

ŞEKİLLER **Sayfa No**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER:

Adı Soyadı: Doğukan TAŞER

Doğum Yeri: İstanbul

Doğum Tarihi: 30.05.1988

EĞİTİM DURUMU:

İlköğretim Öğrenimi: İskender Paşa İlköğretim Okulu-1999-İstanbul ve Çapa Atatürk İlköğretim Okulu-2002-İstanbul

Lise Öğrenimi: Şehremini Lisesi-2005-İstanbul

Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü-2010

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce (ÜDS: 70)

BİLİMSEL FAALİYETLERİ:

a) SCI tarafından taranan dergilerde yapılan yayınlar

1. Ulu Doğru, M., Varlıklı, N., Baykal, D., Kıy, G., Taşer, D., Çağlar, H., Gündüz, E., 2011. Energy and Momentum of Higher Dimensional Black Holes, *Int. J. Theor. Phys.*, 51 (5), 1545-1554 .
2. Ulu Doğru, M., Baykal, D., Kıy, G., Taşer, D., Çağlar, H. ve Varlıklı N., 2012. Energy-Momentum Distributions of Five-Dimensional Homogeneous-Anisotropic Universe, *Int. Jour. of Mod. Phs D*, 21 (10), 1250078.

b) SCI dışındaki indeksler tarafından taranan hakemli dergilerde yapılan yayınlar

1. Baykal, D., Ulu Doğru, M., Kıy, G., Taşer, D., Çağlar, H. ve Varlıklı, N., 2012. Total Energy and Momentum of Five Dimesional Kaluza-Klein Space-Time, *Balkan Physics Letter,* 20, 201030, 255-268.
2. Taşer D., Ulu Doğru M., Çağlar H., Varlıklı N., Baykal D. ve Kıy G., 2012. Total Energy and Momentum of Five Dimensional Kaluza-Klein Space-time, *Balkan Physics Letter,* 20, 201021, 181-193.

c) Katıldığı Konferanslar, Workshop ve Seminerler

1. Winter Kindergarten of Theoretical Physics, 10-16 February 2013, Lądek Zdrȏj, POLAND.

2. Turkish Physical Society 28^{th} Internatinol Physics Congress, 6-9 September 2011, Bodrum Municipality Nurol Culture Center Bodrum,TURKEY.
3. Genç Fizikçiler Kongresi, 13-15 Haziran 2012, Ege Üniversitesi,İZMİR.
4. Turkish Physical Society 29th International Physics Congress, 5-8 September 2012, Bodrum Municipality Nurol Culture Center ,TURKEY.

İLETİŞİM:

Adres: Barbaros Mahallesi, Boğaz Sokak, No:13 Daire:6, Merkez/ÇANAKKALE

Tel: 0507-2714633

Email: dogukantaser@gmail.com