

**T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**KARIŞIK GECİKMELİ BİR SINIR AĞI MODELİ
İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK
ANALİZİ**

Yüksek Lisans Tezi

GÜLŞAH ÇEBİ

İSTANBUL, 2014

**T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK**

**KARIŞIK GECİKMELİ BİR SİNİR AĞI MODELİ
İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK
ANALİZİ**

Yüksek Lisans Tezi

GÜLŞAH ÇEBİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. CANAN ÇELİK KARAASLANLI

İSTANBUL, 2014

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK

Tezin Adı: KARIŞIK GECİKMELİ BİR SİNİR AĞI MODELİ İÇİN HOPF
ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ

Öğrencinin Adı Soyadı: Gülşah ÇEBİ

Tez Savunma Tarihi: 11.04.2014

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç. Dr. Tunç BOZBURA
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
Program Koordinatörü

Bu tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri _____

İmzalar

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI

Üye
Doç. Dr. Davut UĞURLU

Üye
Yrd. Doç. Dr. Süreyya ÖZÖĞÜR AKYÜZ

TEŐEKKÜR

Bu zorlu süreçte yanında çalışmaktan onur duyduğum, benden yardımlarını esirgemeyen, bugüne gelmemde büyük pay sahibi olan değerli hocam sayın Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI'ya, hayatımın her alanında olduğu gibi eğitim hayatımda da benden desteğini esirgemeyen, bana her anlamda güç veren, maddi ve manevi her zaman yanımda olan dedem Adil ÇEBİ'ye, bugünlere gelmemde en büyük desteğim annem Lütfiye ÇEBİ'ye, tüm aileme ve dostlarıma, eğitimimde ve çalışmalarımnda yardımlarıyla beni destekleyen Bahçeşehir Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına, teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İstanbul, 2014

Gülşah ÇEBİ

ÖZET

KARIŞIK GECİKMELİ BİR SİNİR AĞI MODELİ İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ

Gülşah Çebi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

Nisan 2014, 48 sayfa

Bu tezde karışık gecikmeli iki sinir hücrelerinin hareketini ifade eden bir sistem incelenmiş ve τ gecikme parametresi, çatallanma parametresi olarak seçilerek kararlılık ve Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır. Ayrıca normal form teoremi ve Center Manifold teoremi kullanılarak kritik τ değerinde çatallanan periyodik çözümün yönü, kararlılığı ve periyodu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Karışık gecikmeli diferansiyel denklem, Hopf çatallanma, Kararlılık, Periyodik çözüm.

ABSTRACT

HOPF BIFURCATION AND STABILITY FOR A NEURAL NETWORK MODEL WITH MIXED DELAYS

Gülşah Çebi

Graduate School of Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Supervisor: Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

April 2014, 48 pages

In this thesis, a neural network model with mixed delays is investigated and by choosing time delay τ as bifurcating parameter, the stability and Hopf bifurcation analysis are studied. Moreover, by using normal form theory and center manifold theorem, the direction, stability and the period of the bifurcating periodic solution at critical values τ are obtained.

Keywords: Mixed delay, Hopf bifurcation, Stability, Periodic solution.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER.....	viii
SEMBOLLER.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
1.1 GECİKMELİ SİSTEMLERE GENEL BAKIŞ.....	1
1.2 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER.....	3
1.3 BİYOLOJİK SINIR AĞI MODELİ	6
1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI	7
2. ÇATALLANMA ve HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ	9
2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ	9
2.1.1 Çatallanma Türleri.....	9
2.1.1.1 Lokal Çatallanma	9
2.1.1.2 Global Çatallanma.....	9
2.1.2 Ayrık Zamanlı Sistemlerde Lokal Çatallanma ve Türleri	9
2.1.2.1 Fold Çatallanma	10
2.1.2.2 Tırmık Çatallanma	10
2.1.2.3 Transkritik Çatallanma	11
2.1.2.4 Flip Çatallanma	12
2.1.2.5 Hopf Çatallanma	12
2.2 HOPF ÇATALLANMA	13
2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi	13
2.2.2 Teorem (Hopf Çatallanma Teoremi)	13
2.2.3 Hopf Çatallanma Türleri	14
2.2.3.1 Süperkritik Hopf Çatallanma	14
2.2.3.2 Subkritik Hopf Çatallanma	14
2.2.4 Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma	14
2.2.5 Adi Diferansiyel Denklemler İçin μ_2, β_2, T_2 Katsayılarının Hesaplanması	15
2.2.6 Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma Analizi.....	19

2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ.....	25
3.SONUÇ	26
3.1 KARARLILIK ANALİZİ ve HOPF ÇATALLANMA	26
3.2 HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ VE KARARLILIĞI	33
KAYNAKÇA.....	49

ŞEKİLLER

Şekil 2.1: Fold çatallanma	10
Şekil 2.2: Süperkritik tırmık çatallanma	11
Şekil 2.3: Transkritik çatallanma.....	11
Şekil 2.4: Flip çatallanma	12

SEMBOLLER

n-boyutlu reel Öklid uzayı	:	R^n
Çatallanma değerindeki öz değerın reel kısmı	:	$\alpha(\tau_c)$
Çatallanma değerindeki öz değerın sanal kısmı	:	$w(\tau_c)$
Sistemin çatallanma parametresine bağlı olan Jakobian matrisi	:	$A(\tau)$
$a = 0$ değerine karşılık gelen operatör	:	$A(0)$
Lyapunov katsayısı	:	$c_1(0)$
Nöronların hareketi	:	x_1, x_2
Sinaptik gecikme	:	τ_1
Nöronların hareket fonksiyonu	:	f_{ij}
Gecikme ve çatallanma parametresi	:	τ
Çatallanma değerindeki öz değer	:	$\lambda(\tau_k)$
Çatallanma değeri	:	τ_k
Denge noktası	:	E_0^*
Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen parametre	:	μ_2
Çatallanmanın periyodik çözümünün kararlılığını belirleyen parametre	:	β_2
Çatallanmanın periyodik çözümünün periyodunu belirleyen parametre	:	T_2

1.GİRİŞ

1.1 GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE GENEL BİR BAKIŞ

Gecikmeli diferansiyel denklem sistemleri, bilimin birçok alanında önemli bir yere sahiptir. Belirli bir uyarıya biyolojik sistemin cevabı genellikle hemen olmaz, biraz gecikmeli olur. Zaman gecikmesi neredeyse her durumda karşımıza çıkmaktadır. Biyoloji, tıp, kimya, fizik, matematik, mühendislik ve ekonomi gibi hem doğal hem de insan eli ile oluşturulmuş birçok süreç, zaman gecikmesi içerdiğinden, gecikmeli diferansiyel denklem teorisi gündeme gelmiştir. Zaman gecikmesine doğadan verilebilecek en güzel örnek ormanlık alanların ağaçlandırılmasıdır. Bir ağaç kesildikten sonra yerine dikilenin olgunluğa erişmesi yirmi yıl gibi bir sürede gerçekleşmektedir. Bu süreci inceleyen bir matematiksel model zaman gecikmesi içermek zorundadır.

Matematik, mühendislik, fizik v.b. uygulamalı bilim dallarının pek çoğunda ele alınan problemin matematiksel modellenmesine bir diferansiyel denklem karşılık gelir. Ayrıca pek çok fiziksel olayda bir sistemin mevcut andaki durumu geçmiş durumuna bağlı kalınarak da ifade edilebilir. Söz konusu sistemin hareketi hakkında yorum yapabilmek için onu temsil eden diferansiyel denklem ve denklemin çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak gerekir. Aşağıdaki denklemler gecikmeli diferansiyel denklemler için birer örnektir:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)); \tau(t) > 0,$$

$$x'(t) = f(t, x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)); \tau_1, \tau_2 > 0,$$

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t), x(t - \tau(t)), x'(t - \tau(t))).$$

Yukarıdaki örneklere bakıldığında gecikmeli diferansiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri (en yüksek türevleri hariç) t ve t anından önceki anlara bağlı olarak ortaya çıkan diferansiyel denklemlerdir.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin bir uygulaması popülasyon dinamiğidir. İzole edilmiş bir ortamda, bir hayvan kolonisinin herhangi bir t anındaki popülasyonu y(t) ile gösterilirse, popülasyonun büyümesi matematiksel olarak aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha \cdot y(t) & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü, $y(t) = y_0 \cdot e^{\alpha t}$ şeklindedir ve popülasyonun üstel sınırsız artış sağladığı açıkça görülmektedir. Bundan dolayı, belli bir zaman sonra aşırı artan popülasyon sonucu kıtlık oluşacak ve kolonide ani ölümler görülecektir. Bu popülasyon modellemesinin sadece doğumlarla ilgili olduğu düşünülmektedir. Ancak kolonideki ölümlerin popülasyon dinamiğini etkileyeceği düşünülmelidir. Bu nedenle sistemi,

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha \left[1 - \frac{y(t)}{p} \right] y(t) & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

biçiminde modellemek daha doğru olacaktır. Bu başlangıç değer probleminde α ve p değerleri pozitif sabittir.

Adi diferansiyel denklemler kullanılarak, modelleme yapılması istenen sistemlerde mevcut gecikmeler daima göz ardı edilir, ancak sistemdeki çok küçük gecikme miktarları bile, sistemin mevcut durumda çok büyük değişiklikler görülmesine neden olabilir. Bu nedenle karşılaşılan problemlerin birçoğunun modellemesi yapılırken, gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanılması daha gerçekçidir.

Nüfus artışını belirlemek için yaptığımız önceki modellemede, grubun sadece o anki mevcut nüfusla orantılı olduğunu kabul ettik. Ancak çoğu zaman sistemin daha önceki bir zamandaki durumu, sistemin gelecekteki durumunu büyük ölçüde etkiler. Sistemlerin geçmişteki durumlarını belirtmek için, gecikme miktarlarını kullanırız ve böylece modelleme yaparken sistemlerin geçmişe olan bağımlılıklarını da hesaba katmış oluruz.

Şimdi topluluktaki nüfus değişiminin o andaki nüfus ile değil de, belirli bir süre (τ) önceki nüfus ile orantılı olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıda verilen gecikmeli diferansiyel denklem elde edilir:

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) \left[1 - \frac{y(t-\tau)}{p} \right] & t \geq t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t) & \varphi_0 > 0. \end{cases}$$

Bu denklem literatürde sıkça geçmektedir. Wright denklemi olarak da adlandırılır.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin bir başka uygulaması ise elektrodinamik problemlerde karşımıza çıkmaktadır. Sadece bir diğerinin oluşturduğu alanın etkisi ile hareket eden iki yüklü parçacık içeren bir sistemde gecikme, elektromanyetik etkinin bir parçacıktan diğerine ulaşması sırasında geçen zamanı temsil etmektedir.

Dinamik sistemlerde kendini tekrar eden süreçler söz konusudur. Böyle bir durumda sistem periyodik çözümlere sahiptir. Periyodik çözümlerin varlığını inceleyen teoriler arasında en önemlilerinden biri E. Hopf tarafından geliştirilmiştir. Hopf, parametreye bağlı bir diferansiyel denklemin hangi koşullar altında periyodik çözümlere sahip olduğunu incelemiş ve Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen teoremi öne sürmüştür.

1.2 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER

Bu saha ile ilgili matematik literatürüne bakıldığında 1960'lerden bu yana gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık durumlarını ele alan değişik çalışmalar yapılmıştır.

1973'te May,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t-\tau) - a_{12}y(t)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t)] \end{aligned}$$

gecikmeli av-avcı sistemini ortaya koymuş ve incelemiştir. Burada $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla av ve avcının t anındaki popülasyonlarını ifade eder. $\tau \geq 0$ gecikme parametresidir. Burada $r_1 > 0$ av popülasyonundaki büyüme oranı, $r_2 > 0$ ise avcının ölüm oranını vermektedir ($a_{ij} > 0, i, j=1,2$).

2008’de Çelik,

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t) N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t-\tau)}{N(t)} \right)\end{aligned}$$

sürekli ve gecikmeli diferansiyel denklemini incelemiştir. Burada $N(t)$ ve $P(t)$ sırasıyla av ve avcının t anındaki popülasyon yoğunluklarını ifade eder. $r_1 > 0$ av popülasyonunun, $r_2 > 0$ avcı popülasyonunun büyüme oranı, τ ise gecikme parametresidir.

2011’de Çelik,

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t) N(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left[r_2 - \frac{\theta}{N(t-\tau)} \int_{-\infty}^t F(t-\tau) P(\tau) d\tau \right]\end{aligned}$$

dağılımlı gecikmeli av-avcı sistemini incelemiştir. Burada $F(s)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında negatif olmayan sınırlı gecikme çekirdeğini göstermektedir.

Son 20 yıldır sinir ağı modeli çalışmalarında ilginç bir artış vardır. 1984’te Hopfield geniş ağların dinamiklerini anlayabilmek için iki nöron arasındaki iletişimi incelemiştir. Hopfield’den beri de geniş ağların dinamiklerini anlayabilmek için ilk olarak iki nöron arasındaki iletişim ağı incelenmektedir. Bu incelemelere örnek olarak 1991’de Marcus, Waugh ve Westervelt tarafından gerçekleştirilen gecikmeli sinir ağı modeli üzerindeki çalışma ve 1994’te Baldi ve Atiya tarafından ortaya koyulan gecikmenin sinir dinamikleri üzerindeki etkileri konusunda yapılan incelemeler verilebilir.

Sinir ağlarında, nöronlar arasındaki sinyal aktarımlarında gecikmeler ortaya çıkar. Bu gecikmeler sinir ağlarını daha kullanışlı ve çok yönlü hale getirir. Bu nedenle ayrık ya da sürekli gecikmeler içeren sinir ağı modelleri için lokal ve global kararlılık hakkında birçok sonuç vardır (Campbell, Ruan ve Wei, 1999; Cao, 1999; Cao ve Wang, 2004; Chen ve Wu, 2001; Faria, 2000).

Gecikmeli sinir ağı modellerinde kararlılık, periyot ve çatallanma gibi diğer dinamik davranışlar 2003'de Guo ve Huang, 2001'de Huang ve Wu, 1999'da Liao, Wu ve Yu, 2003'de Guo ve Huang tarafından incelenmiştir.

1999'da Liao, Wu ve Yu, 2003'de Guo ve Huang, 2005'de Wei ve Yuan, 2007'de Cao ve Xiao, 2006'da Cheng ve Cao gecikmeli sinir ağı modellerinde Hopf çatallanma yoluyla periyodik çözümlerin varlığını araştırmışlardır.

Son yıllarda ayırık ya da sürekli gecikme içeren iki nöronun iletişim ağının çatallanma ve lokal kararlılığı üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. 1997'de Olien ve Belair τ_1 ve τ_2 gecikmelerini içeren gecikmeli sinir ağı modellerini incelemişlerdir (burada $\tau_1 = \tau_2 = \tau$).

1999'da Wei ve Ruan basit bir sinir ağı modelini iki ayırık gecikme ile analiz etmişlerdir. Wei ve Ruan iki gecikmenin toplamı kritik bir noktadan geçtiğinde Hopf çatallanmanın meydana geldiğini bulmuşlardır. Aynı zamanda Hopf çatallanmanın yönü ve kararlılığını da belirlemişlerdir.

2000'de Shayer ve Campbell üç gecikme içeren diferansiyel denklemler üzerinde çalışmışlardır. Üç farklı τ_1, τ_2, τ_s gecikmeleri için $\tau_1 + \tau_2 = 2\tau_s$ olarak kabul etmişlerdir.

Daha sonra 2007'de C. Huang, He, L. Huang ve Yuan ile 2004'de Guo, L. Huang ve Wang, üç gecikmeli iki sinir ağı sistemi üzerinde çalışmışlardır. Burada gecikmeler τ_1, τ_2, τ 'dir. Yine üç farklı gecikme için, $\tau_1 + \tau_2 = 2\tau$ olduğu varsayılmıştır.

1987'de Tank ve Hopfield dağılımlı gecikme içeren sinir ağı modellerini incelemişlerdir.

2001'de Liao, Wong, Wu dağılımlı gecikme içeren sinir ağı modelinin çatallanma analizini yapmışlardır.

2004'de Ruan ve Filfil ayrık ve dağılımlı gecikme içeren iki sinir ağı modelinin dinamiğini inceleyen bir çalışma gerçekleştirmişlerdir.

Daha sonraları 2009'da Zhou ayrık ve dağılımlı gecikme içeren sinir ağı modelinin kararlılık ve Hopf çatallanma analizini yapmışlardır.

1.3 BİYOLOJİK SİNİR AĞI MODELİ

İnsan beyninin nasıl çalıştığı henüz tam olarak anlaşılabilmiş değildir. Ancak bu konuda beyni oluşturan milyarlarca sinir hücresinin önemli rol oynadıkları bilinmektedir. Beynin çalışması genel olarak 3 aşamadan oluşur:

- a) Bilgi girişi,
- b) Sentezleme ve karşılaştırma,
- c) Bilgi çıkışı ve eylem.

Beynin bu işlevlerini yerine getirebilmesini sağlayan ise temel yapı elemanı olan sinir hücreleri yani nöronlardır. Sinir hücreleri birbirleri ile ilişki halindedirler. Bu sıkı ilişki, sinirsel işlevin temelini oluşturan bilgi akışını sağlar.

Biyolojik sinir ağını oluşturan insan beyindeki nöronlar 3 temel bölgeden oluşur:

- i. *Çekirdek ve Soma (Hücre Gövdesi):* Hücrenin gövde kısmında bulunan çekirdek hücrenin temel işlevlerini belirleyen ve DNA molekülü üzerinde kodlanmış halde bulunan genetik bilgiyi içerir. DNA üzerindeki bilgi, hücrenin bulunduğu ortama, ortamdaki değişimlere ve hücrenin iç çevresine bağlı olarak deşifre edilerek, hücre içi olayların meydana gelmesini sağlar. Hücre etkinliklerine ilişkin yapım/yıkım faaliyetlerinin büyük bir çoğunluğu ise hücre gövdesinde yürütülür.
- ii. *Dendritler ve Akson:* Hücre gövdesinden çıkan uzantılardır. Kısa ağaç dalları biçiminde ve genellikle çok sayıda olan yapılar dendrit adını alır. Diğer hücrelerin aksonlarıyla gelen sinir sinyallerini alarak ait oldukları hücre

gövdesine taşırlar. Akson ise uzun ve tek olup, uç kısımlarından genellikle dallanmalar gösterir. Hücre gövdesinde üretilen sinyalleri diğer nöronların dendritlerine taşımakla yükümlüdür.

iii. Sinapslar: Akson ve dendritlerin veri iletişimi amacıyla bir araya geldikleri birleşim yerlerine sinaps adı verilir. Sinapslar bir hücrede üretilen sinyalleri, yapısına ve biyofiziksel özelliklerine bağlı olarak sonraki hücreye iletirler. Genel olarak bir sinir hücresi, gövde ve dendritleri aracılığıyla sinyalleri alır. Bu sinyaller akson vasıtasıyla, hücre içindeki genel duruma ve gelen tüm sinyallerin toplam etkisine göre diğer bir hücreye aktarılır.

Kısacası nöronlar kendi aralarında bağlantılar kurarak, elektrik devrelerine benzer yollarla iletişim sağlayıp, beyin işlevlerinin ortaya çıkmasını sağlayan ana elemanlardır. Bu sistem bir bütün olarak, bir sinir bilimcinin bile hayal edebileceğinin çok ötesinde bir karmaşıklığa sahiptir.

Biyolojik sistemlerde öğrenme nöronlar arasındaki sinaptik bağlantılar ile olur. İnsan beyni doğumdan itibaren sürekli bir öğrenme süreci içindedir. Beyin sürekli bir gelişme gösterir. Bu gelişim sadece yeni beyin hücrelerinin oluşumuyla değil, özellikle nöronlar arasındaki bağlantı ya da diğer bir ifadeyle sinaps sayısının artmasıyla meydana gelir. Nöronlar arasındaki bağlantılar arttıkça, beyin daha ayrıntılı işlemler yapabilir ve daha çok öğrenmiş olur.

1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI

Bu çalışmada karışık gecikmeli iki sinir hücresinin hareketini ifade eden (1) sistemi incelenmiştir.

Burada dağılımlı gecikmeler sinirsel geri bildirimleri ve ayrık gecikmeler sinirsel etkileşim geçmişini tanımlar.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu x_1(t) + a_{11}f_{11}(x_1(t - \tau_1)) + a_{12}f_{12}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s - \tau_1)ds\right)$$

(1)

$$\frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2(t) + a_{21}f_{21}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s - \tau_1)ds\right) + a_{22}f_{22}(x_2(t - \tau_1))$$

Bu tezin amacı, (1) sisteminin dinamiğini ve τ gecikme parametresi değişirken bu değişimin sisteme olan etkilerini incelemektir. İlk önce sistemin kararlılığını ve Hopf çatallanmanın varlığını incelemek için, pozitif denge noktası bulunarak, bu denge noktası etrafında sistem lineerleştirilmiştir. Elde edilen lineer sistemin kararlılık kriterleri bulunmuştur. Daha sonra τ gecikme parametresi çatallanma parametresi olarak seçilerek, pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma meydana geldiği gözlenmiştir. Ayrıca 1981’de Hassard ve Kazarinoff tarafından analiz edilen Center Manifold Teoreminden yararlanılarak, (1) sisteminin Hopf çatallanma özelliklerini tanımlayan çatallanma sabitleri elde edilmiştir. Bu sabitler yardımıyla Hopf çatallanmanın kararlılığı, yönü, türü ve belirli koşullar altında çatallanan periyodik çözümlerin periyodu tespit edilmiştir.

Yapılan bu çalışmada sırasıyla;

- i. Birinci bölümde, problem hakkında genel bilgiler verilmiş, gecikmeli sistemler genel olarak incelenmiş, literatürdeki gecikmeli sistemler hakkında açıklama yapılmış ve tez çalışmasının amacından bahsedilmiştir.
- ii. İkinci bölümde, Hopf çatallanma teorisi incelenmiştir ve Center Manifold Teoremi açıklanmıştır.
- iii. Üçüncü bölümde, sistemin kararlılık analizi ve Hopf çatallanması incelenmiştir.
- iv. Son bölümde ise, Center Manifold Teoremi kullanılarak bu modelde Hopf çatallanmanın görülmesi için gerekli koşullar verilmiş, çatallanmanın kararlılığı, türü, yönü ve periyodu belirlenmiştir.

BÖLÜM 2

2. ÇATALLANMA VE HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ

Çatallanma teorisi, diferansiyel denklemlerin çözümler ailesinin niteliksel ya da topolojik yapısında meydana gelen değişimlerin incelenmesidir. Çatallanma, bir sistemde sistemin pozitif denge noktası etrafında seçilen çatallanma parametresindeki küçük değişikliğin, sistemin davranışındaki topolojik değişikliğe neden olmasıyla meydana gelir. Çözümün davranışındaki değişim, parametre denge noktasının kararlılığını değiştirdiğinde oluşur.

Tanım 2.1: Parametre değişimi altında topolojik olarak denk olmayan faz portrelerinin ortaya çıkmasına çatallanma denir.

Çatallanma analizi sürekli ve kesikli denklemler ile modellenen sistemler için incelenir.

2.1.1 Çatallanma Türleri

Lokal ve global olmak üzere iki tür çatallanma vardır:

2.1.1.1 Lokal Çatallanma: Sistemdeki parametrelerin değişimiyle denge noktasının, periyodik yörüngelerin veya invaryant kümelerin özelliklerindeki değişimler analiz edilir.

2.1.1.2 Global Çatallanma: Sistemin invaryant kümelerinin birbirleriyle veya sistemin denge noktasıyla çakışması durumunda ortaya çıkar. Bu çatallanma türü, sistemin denge noktasının kararlılık analiziyle tamamen tespit edilemez.

2.1.2 Ayrık Zamanlı Sistemlerde Lokal Çatallanma ve Türleri

Parametrede oluşan değişimin, denge noktasının kararlılığını değiştirmesiyle lokal çatallanma ortaya çıkar. Burada $x_{t+1} = f(x_t)$ birinci mertebeden fark denklemlerinin τ parametresine olan bağılılığı,

$$x_{t+1} = f(x_t, \tau) \quad (2.1)$$

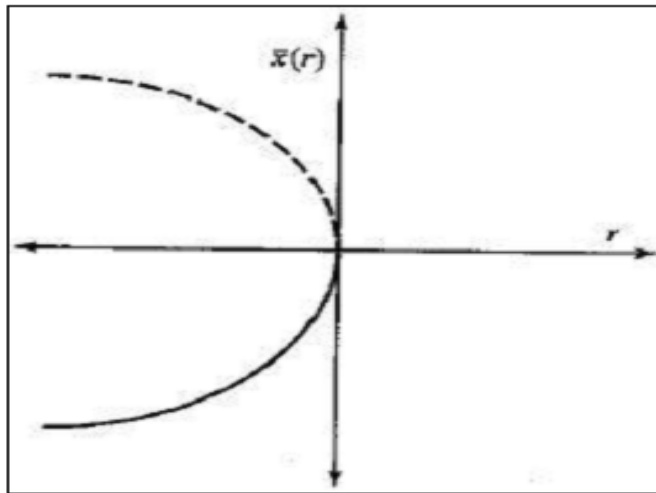
ile gösterilecek ve bu fark denkleminin dinamiği göz önüne alınacaktır. Denge noktalarının τ bağılılığı ise $\bar{x}(\tau)$ ile ifade edilecektir. Fark denklemlerinin davranışı τ değiştikçe değişmektedir. Davranışın değiştiği bu τ değerleri **çatallanma parametresi** ve bu $(\tau, \bar{x}(\tau))$ noktaları ise **çatallanma noktaları** olarak adlandırılır.

(2.1) ile verilen fark denklemi için oluşabilecek çatallanma tipleri $f'(\bar{x}(\bar{\tau})) = \pm 1$ denklemi ile belirlenmektedir. Lokal çatallanma türleri aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

- a) Fold (saddle node, tangant) çatallanma
- b) Tırmık (pitchfork) çatallanma
- c) Transkritik (transcritical) çatallanma
- d) Flip (period-doubling) çatallanma
- e) Hopf çatallanma.

2.1.2.1 Fold Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki denge noktası kaybolur.

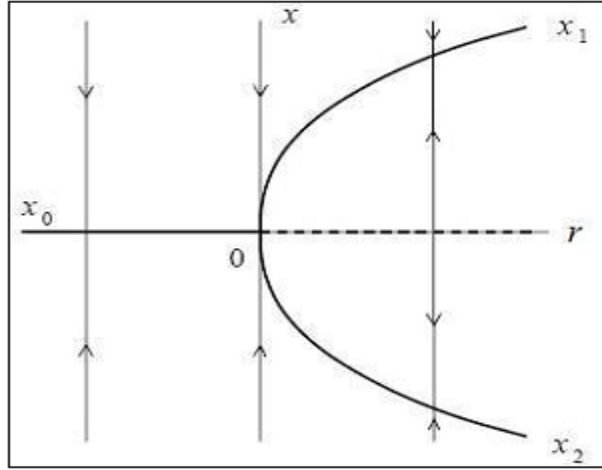
Şekil 2.1: Fold çatallanma



2.1.2.2 Tırmık Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken, bir kararsız denge noktası tarafından ayrılan iki kararlı denge noktası olmak üzere üç denge noktası

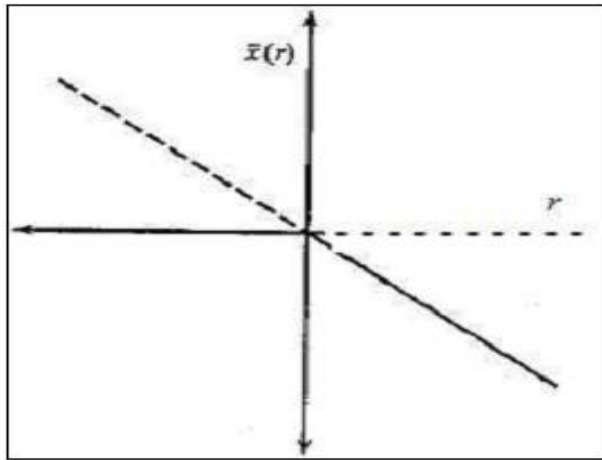
meydana gelir. Bu tip çatallanmaya "süperkritik tırmık çatallanma" denir. Bunun tam tersine, yani bir kararlı denge noktası tarafından ayrılan iki kararsız denge noktası meydana geliyor ise bu tip çatallanmaya da "subkritik tırmık çatallanma" denir.

Şekil 2.2: Tırmık çatallanma



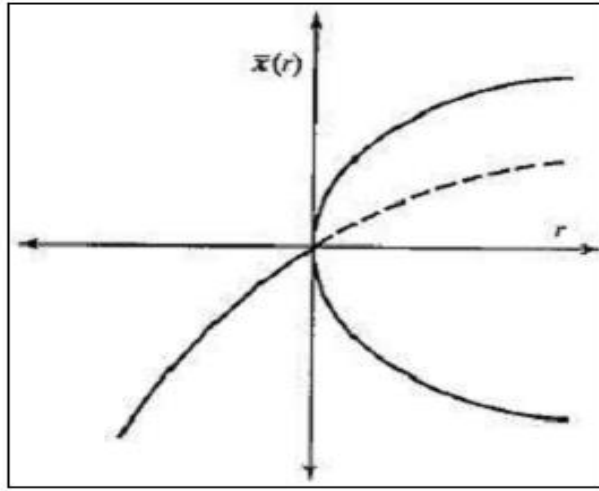
2.1.2.3 Transkritik Çatallanma: Bu çatallanma türünde bir kararlı bir kararsız iki denge noktası, çatallanma parametresi geçilirken kararlılık yapılarını değiştirirler. Yani, kararlı olan kararsız, kararsız olan kararlı hale gelir.

Şekil 2.3: Transkritik çatallanma



2.1.2.4 Flip Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken, kararlı denge noktası kararsız olur ve kararlı 2-devir ortaya çıkar. Bu tipine "süperkritik flip çatallanma" denir. Tam tersine ise yani ortaya çıkan 2-devir kararsız ise de "subkritik flip çatallanma" adını alır.

Şekil 2.4: Flip çatallanma



2.1.2.5 Hopf Çatallanma: İki veya daha fazla birinci mertebeden diferansiyel denklem içeren sistemlerde meydana gelen çatallanma türüne "Hopf Çatallanma" denir. Aynı zamanda, Fransız matematikçi Jules Henri Poincare (1854-1912), Rus matematikçi Alexander A. Andrnov (1901-1952) ve Alman matematikçi Heinz Hopf (1894-1971)'un bu teoriyi geliştirmek için yaptıkları katkılardan dolayı Poincare-Andronov-Hopf çatallanma olarak da anılır.

2.2 HOPF ÇATALLANMA

2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi

Hopf çatallanma oluşması için en az 2x2'lik bir sistem gerekir.

f ve g , τ çatallanma parametresine bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, \tau), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, \tau)\end{aligned}\tag{2.3}$$

diferansiyel denklem sistemi ele alınsın. Burada $(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$, (2.3) sisteminin denge noktası ve $\alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$, bu denge noktasında hesaplanan Jakobian matrisin özdeğerleri olsun. $f(x, y, \tau) = 0$ ve $g(x, y, \tau) = 0$ eşitliklerinin çözümü parametrenin sürekli türevlenebilir fonksiyonu olarak $(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$ denge noktasını verir. $\alpha(\tau^*) = 0$ olmak üzere kararlılık yapısındaki değişim $\tau = \tau^*$ değerinde meydana gelsin. (2.3) diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını sağlayabilmesi için ilk önce sırf sanal özdeğere sahip olacak şekilde denge noktası orijin ve τ parametresi $\tau^* = 0$ olacak şekilde değişken değiştirmeleri yapılarak

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}(\tau)x + a_{12}(\tau)y + f_1(x, y, \tau), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(\tau)x + a_{22}(\tau)y + g_1(x, y, \tau)\end{aligned}\tag{2.4}$$

sistemine dönüştürülür. Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen bu teorem, (2.3) diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki gibi verilir:

Teorem 2.2.2: (Hopf Çatallanma Teoremi)

(2.4) sistemindeki f_1 ve g_1 fonksiyonları x ve y değişkenlerine göre üçüncü mertebeden sürekli türevlere sahip olmak üzere yeteri kadar küçük $|\tau|$ 'lar için (2.4) denkleminin bir denge noktası ve

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ a_{21}(\tau) & a_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

matrisinin sistemin Jakobian matrisi olduğu kabul edilsin. Ayrıca $\alpha(0)=0$, $w(0) \neq 0$ ve $\frac{d\alpha}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \neq 0$ olmak üzere $\alpha(\tau) \pm iw(\tau)$, $J(\tau)$ Jakobian matrisinin özdeğerleri olsun. Bu takdirde \mathbb{R}^2 uzayında orijini kapsayan herhangi U açık kümesinde $\tau_0 > 0$ için $|\tau_k| < \tau_0$ değeri vardır öyle ki (2.4) diferansiyel denklemi $\tau = \tau_k$ için U'da periyodik çözümlere sahiptir (periyot yaklaşık olarak $T \approx \frac{2\pi}{w(0)}$).

2.2.3 Hopf Çatallanma Türleri

Hopf Çatallanma Teoremi $\tau = \tau_k$ için periyodik çözümlerin varlığı için yeterli koşulları vermektedir. τ çatallanma parametresi, τ_k ise çatallanma değeridir. Sistemin parametresinin değeri değişirken sistemin dinamiği kararlı spiralden merkeze, merkezden de kararsız spirale dönüşür. Buna göre iki tür Hopf çatallanma görülür:

2.2.3.1 Süperkritik Hopf Çatallanma: Sistemin kararlı denge noktası asimptotik olarak kararlı bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya **süperkritik Hopf çatallanma** denir.

2.2.3.2 Subkritik Hopf Çatallanma: Sistemin kararlı denge noktası kararsız bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya **subkritik Hopf çatallanma** denir.

2.2.4 Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma

$x \in \mathbb{R}^n$ ve τ sistemin reel değerli çatallanma parametresi olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau) \quad (2.5)$$

otonom adi diferansiyel denklem sistemi incelenecektir. $x = x_*(\tau)$, (2.5) sisteminin ayrık denge noktası ve

$$A(\tau) = D_x f(x_*(\tau), \tau) = \left(\frac{df}{dx_j}(x_*(\tau), \tau); i, j=1, \dots, n \right)$$

Jakobian matrisi $\tau = \tau_c$ için

$$w(\tau_c) = w_0 > 0, \quad \alpha(\tau_c) = 0 \text{ ve } \alpha'(\tau_c) \neq 0 \quad (2.6)$$

koşullarını sağlayan $\lambda_1(\tau) = \bar{\lambda}_2(\tau) = \alpha(\tau) + iw(\tau)$ kompleks eşlenik özdeğerlere sahip olsun (τ_c, τ değerinin kritik değeridir). (2.6) koşulu sistemin parametresi değişirken denge noktasında kararlılık yapısının değiştiğini ifade etmektedir. Bazı ek koşullar altında da yeterince küçük ε_0 ve $\max_t \|p_\varepsilon(t) - x_*(\tau_c)\|$ genliğini veren $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ için (2.5) sistemi $x = p_\varepsilon(t)$ periyodik çözüm ailesine sahiptir.

2.2.5 Adi Diferansiyel Denklemler İçin μ_2, β_2, T_2 Katsayılarının Hesaplanması

f düzgün bir fonksiyon, τ çatallanma parametresi ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\dot{x} = f(x, \tau) \quad (2.7)$$

otonom adi diferansiyel denklem sistemi ele alınsın. Bu bölümde (2.7) gecikmeli sistemi için Hopf çatallanmanın hangi koşullar altında ortaya çıktığı, çatallanmanın yönü, periyodik çözümlerinin periyodu ve bu çözümlerin kararlılık yapısının incelenmesi için gerekli olan adımlar kısaca açıklanacaktır.

i) $x_*(\tau)$, (2.7) sisteminin denge noktası olsun. Sistemin bu denge noktasındaki Jakobian matrisi

$$A(\tau) = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_*(\tau), \tau); i, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ile ifade edilir. Bu matrisle karşılık gelen özdeğerleri hesaplanırsa, bu özdeğerler; $\text{Re } \lambda_1 \geq \text{Re } \lambda_2 \geq \dots \geq \text{Re } \lambda_n$ olacak şekilde sıralansın (sistem n-boyutlu olduğundan sistemin en fazla n tane ayrık özdeğere sahip olması beklenir).

ii) $\text{Re } \lambda_1(\tau_c) = 0$ olacak şekilde τ_c değeri bulunmalıdır.

* λ_1 ve λ_2 kompleks eşlenik çift

* $\text{Re } \lambda_1'(\tau_c) \neq 0$

* $\text{Im } \lambda_1(\tau_c) \neq 0$

* $\text{Re } \lambda_j(\tau_c) < 0, \quad (j = 3, \dots, n)$

şartlarını sağlamalıdır.

(1) ve (2) koşulları sağlandığında $x_*(\tau)$ denge noktasında Hopf çatallanma görülür.

Bundan sonraki adımlar $\mu_2, \beta_2,$ ve τ_2 değerlerinin hesaplanması için gerekli olan adımlardır.

iii) $w_0 = \text{Im } \lambda_1(\tau_c) > 0$ olmak üzere sistemin Jakobian matrisi

$$A(\tau_c) = \begin{bmatrix} 0 & -w_0 & 0 \\ w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

Şeklinde olduğundan sistemde değişken değiştirmesi yapılması gerekmez. Dolayısı ile bu aşama atlanabilir. Aksi takdirde $q, \lambda_1(\tau_c) = iw_0$ özdeğerine karşılık gelen özvektör ve $\{k_1, \dots, k_n\}$ ise $\tau = \tau_c$ de $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri için özvektör uzayını geren reel n-2 vektörün herhangi bir kümesi olmak üzere

$$P = (\text{Re } q, -\text{Im } q, k_3, \dots, k_n)$$

alınır ve q vektörünü sıfırdan farklı ilk bileşeni bir olacak şekilde normalleştirilir.

iv) Jakobian matris istenilen yapıda değilse P matrisi yardımı ile $x = x_*(\tau_c) + Py$ değişken değiştirmesi yapılır ve sistem y değişkeni cinsinden $\dot{y} = F(y)$ şeklinde yeniden yazılır. Elde edilen yeni sistemin Jakobian matrisi olan

$$\frac{\partial F(0)}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & -w_0 & 0 \\ w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

reel kanonik yapıdadır.

v) Center Manifold Teoremi kullanılarak n-boyutlu sistem iki boyutlu sisteme indirgenir. Bu indirgeme işlemi sırasında verilen sistemin Poincaré Normal Formunun

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z})$$

şeklinde olduğu görülür. Hopf çatallanma teoremini uygulamak için $\tau = \tau_c, y = 0$ olmak üzere g_{ij} katsayıları hesaplanmalıdır. Bunun için,

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \\ g_{02} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right] \\ g_{20} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right] \\ g_{21} &= \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_2^3} + i \left(\frac{\partial^3 F^2}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_1 \partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{\partial^3 F^1}{\partial y_2^3} \right) \right] \end{aligned}$$

formüllerinden yararlanılır.

$n=2$ ise $g_{21} = G_{21}$ alınır ve $c_1(0), \mu_2, \beta_2$ değerlerinin formüller ile hesaplanmasına geçilir. $n>2$ ise ek olarak aşağıdaki katsayıların da hesaplanması gerekmektedir.

$$h_{11}^{k-2} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^k}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^k}{\partial y_2^2} \right], \quad (k = 3, \dots, n)$$

$$h_{20}^{k-2} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^k}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^k}{\partial y_2^2} - 2i \frac{\partial^2 F^k}{\partial y_1 \partial y_2} \right] \quad (k = 3, \dots, n)$$

olsun. D , $(n-2) \times (n-2)$ tipinde $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerini veren matris olmak üzere $(n-2)$ -boyutlu w_{11}, w_{20} vektörleri için

$$\begin{aligned} Dw_{11} &= -h_{11} \\ (D - 2iw_0 I)w_{20} &= -h_{20} \end{aligned}$$

lineer sistemleri çözülür. Bu çözümlerden elde edilen

$$G_{110}^{k-2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_k} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2 \partial y_k} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2 \partial y_k} \right) \right]$$

$$G_{101}^{k-2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_k} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2 \partial y_k} + i \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2 \partial y_k} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_k} \right) \right]$$

değerleri yardımı ile

$$g_{21} = G_{21} + \sum_{k=1}^{n-2} (G_{110}^k w_{11}^k + G_{101}^k w_{20}^k)$$

şeklinde elde edilir.

vi) $\alpha'(0) = \text{Re } \lambda_1'(\tau_c)$ ve $w'(0) = \text{Im } \lambda_1'(\tau_c)$ olmak üzere sırası ile Lyapunov katsayısı, periyodik çözümlerin yönü, periyodu ve kararlılığı

$$c_1(0) = \frac{i}{w_0} [g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{20}|^2] + \frac{g_{21}}{2} \quad (2.8)$$

$$\mu_2 = \frac{-\text{Re } c_1(0)}{\alpha'(0)} \quad (2.9)$$

$$\tau_2 = \frac{-(\text{Im } c_1(0) + \mu_2 w'(0))}{w_0} \quad (2.10)$$

$$\beta_2 = 2 \text{Re } c_1(0) \quad (2.11)$$

denklemleri ile elde edilir.

vii) $\varepsilon^2 = \frac{\tau - \tau_c}{\mu_2} + (\tau - \tau_c)^2$ olmak üzere çözümlerin periyodu ($\mu_2 \neq 0$)

$$T = \frac{2\pi}{w_0} [1 + \mathfrak{I}_2 \varepsilon^2 + \mathfrak{I}_3 \varepsilon^3] + o(\varepsilon^4)$$

ve karakteristik üsteli

$$\beta = \beta_2 \varepsilon^2 + \beta_3 \varepsilon^3 + o(\varepsilon^4)$$

ifadeleri ile verilir.

$$y_1 = \operatorname{Re} z, y_2 = \operatorname{Im} z,$$

$$(y_1, \dots, y_n)^T = w_{11}|z|^2 + \operatorname{Re}(w_{20}z^2) + O(|z|^3)$$

ve

$$z = \varepsilon e^{\frac{2\pi i t}{T}} + \frac{i\varepsilon^2}{6w_0} [g_{02} e^{-\frac{4\pi i t}{T}} - 3g_{20} e^{\frac{4\pi i t}{T}} + 6g_{11}] + O(\varepsilon^2)$$

olmak üzere $x = x_*(\tau) + Py$ periyodik çözümlerdir.

2.2.6 Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma Analizi

Bu bölümde daha önce bahsedilen teori gecikmeli diferansiyel denklemlere taşınacaktır. Bunun için Center Manifold Teoremi kullanılacaktır. İlk önce sistem iki boyuta indirgenecek ve böylece daha önceki bölümde denge noktasından çatallanan periyodik çözümlerin periyodu, kararlılığı ve çatallanmanın yönü için verilen formüller uygulanacaktır.

$C^k[-r,0]$, $[-r,0]$ aralığında tanımlı, k -kez sürekli türevlere sahip n -boyutlu, reel, vektör değerli fonksiyonları gösterebiliriz. $t, r > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\theta \in [-r,0]$ için $x: [-r,0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = L_\mu x_t + f(x_t(\cdot), \mu) \quad (2.12)$$

otonom sistemi ele alınacaktır. Burada $L_\mu: C[-r,0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli lineer operatörlerin ailesi ve $f(\cdot, \mu): C[-r,0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ kuadratik terimden başlamak üzere lineer olmayan terimleri içeren ve $f(0, \mu) = 0, D_x f(0, \mu) = 0$ koşullarını sağlayan bir operatördür.

Çatallanmanın varlığından bahsedebilmek için önce (2.12) sistemi tek değişkene bağlı olan

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + Rx_t \quad (2.13)$$

denklemine dönüştürülmelidir. Riesz Temsil Teoremi gereğince $n_{ij} : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$) bileşenleri $[-r, 0]$ üzerinde sınırlı değişimleri olan ve her $\phi \in C[-r, 0]$ için

$$L_\mu \phi = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta) \quad (2.14)$$

eşitliğini sağlayan $\eta : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ fonksiyonu mevcuttur. Örneğin, $\delta(\theta)$ Dirac delta fonksiyonunu göstermek üzere

$$\eta(\theta, \mu) = -\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)\delta(\theta + 1)$$

ise (2.15)

$$L_\mu x_t = -\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)x(t-1)$$

şeklinde elde edilir.

Çatallanmanın yönü, periyodik çözümlerin periyodu ve kararlılığı hakkında bilgi edinebilmek için aşağıdaki tanımlara ihtiyaç vardır:

$\phi \in C^1[-r, 0]$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}, & -r \leq \theta < 0 \\ \int_{-r}^0 d\eta(s, \mu)\phi(s) \equiv L_\mu \phi, & \theta = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

ve

$$R\phi = \begin{cases} 0 & -r \leq \theta < 0, \\ f(\phi, \mu) & \theta = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

olarak tanımlanırsa başlangıçtaki sistem (2.13) denkleminde dönüşür. $\mu = 0$ iken μ_2, β_2, T_2 değerleri, gecikmeli diferansiyel denklem için de hesaplanmalıdır. Bunun için ilk olarak $\mu = 0$ atayarak $A(0)$ operatörünün $\lambda(0)$ öz değerine karşılık gelen $q(\theta)$ özvektörü ve $\bar{\lambda}(0)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü hesaplanmalıdır.

η^T, η nin transpozu olmak üzere $A(0)$ operatörünün adjoint (ek) operatörü

$$A^*(0)\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds} & 0 < s \leq r, \\ \int_{-r}^0 d\eta^T(t,0)\alpha(-t) & s = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

ile tanımlanır. $A(0)$ yerine A , $A^*(0)$ yerine A^* ve $\eta(s,0)$ için $\eta(s)$ ifadeleri kullanılacaktır.

$$A(0)q(\theta) = iw_0q(\theta)$$

eşitliği ile A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen q özvektörü,

$$A^*(0)q^*(\theta) = -iw_0q^*(\theta)$$

eşitliği ile de A^* adjoint operatörünün $\bar{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen q^* özvektörü hesaplanır.

Sıfır denge noktası civarında C_0 Center Manifoldunu tanımlamak için önce manifoldun koordinatları belirlenmelidir. Bunun için ise özel bir iç çarpıma gerek vardır.

$\psi \in C[0, r]$ ve $\phi \in C[-r, 0]$ olmak üzere,

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0) \cdot \phi(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^0 \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta) \phi(\xi) d\xi \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Elde edilen q ve q^* özvektörleri bu iç çarpım altında normalleştirilir. Center Manifold'un koordinatlarını veren (z, w) ikilisinin oluşturulması gerekmektedir.

$$z = \langle q^*, x \rangle \quad (2.20)$$

ve

$$w = x - zq - \bar{z}\bar{q} = x(\theta) - 2\operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\} \quad (2.21)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. $\mu = 0$ değerinde (2.13) denkleminin x_t çözümleri için (2.20)

$$z = \langle q^*, x_t \rangle \text{ ve (2.21)}$$

$$w = x_t - zq - \bar{z}\bar{q} = x_t(\theta) - 2\operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\}$$

olarak tanımlanır. C_0 manifoldu üzerinde

$$w(z, \bar{z}, \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{20}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.22)$$

olmak üzere $w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta)$. Buradaki z ve \bar{z} sırasıyla q ve \bar{q}^* vektörleri yönündeki C_0 manifoldunun yerel koordinatlarıdır. Buradan $\langle q^*, w \rangle = 0$. (2.13) denkleminin $x_t \in C_0$ çözümleri için,

$$\dot{z} = \langle q^*, x_t \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle$$

$\mu = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= iw_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f(w(z, \bar{z}, \theta)) + 2\operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\} \\ &= iw_0 z + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

elde edilir ve kısaca

$$\dot{z} = iw_0 z(t) + g(z, \bar{z}) \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir. g fonksiyonunun θ değişkenine olan bağıllığı kaldırılmıştır. μ_2, β_2 ve T_2 değerlerini hesaplayabilmek için g fonksiyonunun g_{ij} katsayılarının bulunması gerekir. (2.23) kullanılarak

$$g(z, \bar{z}) = \overline{q^*}(0) f_0(z, \bar{z}) \quad (2.25)$$

elde edilir. g_{ij} katsayıları w_{ij} katsayılarına bağlıdır. (2.21) denkleminin θ değişkenine göre türev alınırsa

$$\dot{w} = x_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q}$$

(2.13) ve (2.24) kullanılarak

$$\dot{w} = \begin{cases} Aw - 2\operatorname{Re}\{\overline{q^*}(0) \cdot f_0 q(\theta)\}, & -r \leq \theta < 0 \\ Aw - 2\operatorname{Re}\{\overline{q^*}(0) \cdot f_0 q(0)\} + f_0, & \theta = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu ifade

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{20}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots$$

olmak üzere

$$\dot{w} = Aw + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (2.27)$$

olarak yeniden ifade edilebilir. Orijin civarında C_0 manifoldu üzerinde

$$\dot{w} = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$$

elde edilir. w_z ve \dot{z} ifadeleri denklemde yerine yazılır ve (2.26) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(2iw_0 - A)w_{20}(\theta) &= H_{20}(\theta) \\
-w_{11}(\theta) &= H_{11}(\theta) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak w_{ij} katsayıları hesaplanır.

$$\dot{z} = iw_0 z + g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots
\tag{2.29}$$

olarak yazılabilir. Poincaré Normal Form'unda geçen ve çatallanmanın yönünü belirlemede yardımcı olan $c_1(0)$ katsayısının, μ_2 , β_2 ve T_2 katsayılarının hesaplanmasından daha önceki bölümde bahsedilmiştir.

2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ

Bir dinamik sistemin Center Manifoldu, denge noktası etrafındaki davranışı kararlı manifoldun çekimi ya da kararsız denge noktasının itimi tarafından kontrol edilemeyen yörüngelerden oluşmaktadır. Dinamik sistemlerin denge noktasını incelerken ilk önce sistem lineerleştirilir. Negatif reel kısma sahip öz değerlere karşılık gelen öz vektörler kararlı manifoldu veren kararlı öz uzaylar oluşturur. Pozitif reel kısma sahip öz değerler ise kendisine yakın yörüngeleri iten kararsız manifoldu verirken reel kısmı sıfır olan öz değerler ise Center Manifold'u verir. Sistemin ilgi çeken davranışı Center Manifold üzerinde meydana geldiğinden Center Manifold'lar çatallanma teorisinde önemli bir konuma sahiptir.

$f(0) = 0$ iken,

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (*)$$

dinamik sistemi için, $x_* = 0$ denge noktasında A Jakobian matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun, Kabul edelim ki, özdeğerlerinin gerçel kısmı sıfır olsun ve $\text{Re } \lambda > 0$ olduğunda sayılabilir çoklukta n_+ özdeğerleri, $\text{Re } \lambda = 0$ olduğunda n_0 özdeğerleri ve $\text{Re } \lambda < 0$ olduğunda ise n_- özdeğerleri olsun. T^c sanal eksen üzerindeki n_0 özdeğerlerinin birleşimine karşılık gelen lineer özvektör uzay olsun. Sanal eksen üzerindeki özdeğerler ($\text{Re } \lambda = 0$) T^c özvektör uzayında olduğu gibi genellikle kritik özdeğer olarak adlandırılır. φ^t fonksiyonu (*) eşitliğine karşılık gelen akı olarak tanımlansın. Bu kabullerle aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 2.3.1: (Center Manifold Teoremi) (*) sisteminin n_0 boyutlu $W_{loc}^c(0)$ invaryant manifoldu, $x = 0$ da T^c özvektör uzayına teğettir. Ayrıca, $x_0 = 0$ ' ın bir U komşuluğunda, her $t \geq 0$ ($t \leq 0$) için $(\varphi^t)x \in U$ ise, $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) için $(\varphi^t)x \rightarrow W_{loc}^c(0)$.

Tanım: W_{loc}^c manifoldu 'Center Manifold' olarak adlandırılır.

3. SONUÇ

3.1. KARARLILIK ANALİZİ VE HOPF ÇATALLANMA

Bu tezde aşağıdaki sürekli ve gecikmeli diferansiyel denklem sistemi incelenecektir:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu x_1(t) + a_{11}f_{11}(x_1(t - \tau_1)) + a_{12}f_{12}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s - \tau_1)ds\right) \quad (3.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2(t) + a_{21}f_{21}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s - \tau_1)ds\right) + a_{22}f_{22}(x_2(t - \tau_1)).$$

Burada x_1 ve x_2 sırasıyla iki nöronun hareketini belirtmektedir. Bu sistemde $\mu > 0$ ve τ_1 sinaptik gecikmedir ve $f_{ij} : R \rightarrow R$ ($1 \leq i, j \leq 2$) nöronların hareket fonksiyonunu tanımlamaktadır ($f_{ij} \in C^r(R)$, $f_{ij}(0) = 0$, $r \geq 4$). Sistemdeki F , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilir, negatif olmayan sınırlı gecikme çekirdeğidir ve nöronların t zamanında geçmişte kendine olan etkisini tanımlar. Dağılımlı gecikmenin varlığı denge noktasını etkilemediğinden bu çekirdek fonksiyonu $\int_{-\infty}^t F(t-s)ds = 1$ olarak normalleştirilebilir. Parametrelerin sayısını düşürmek için gecikme çekirdeği aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçilebilir:

- i) $\int_{-\infty}^t F(s)ds = 1$ ve $F(s) = \mu e^{-\mu(t-s)}$,
- ii) $\int_{-\infty}^t F(t-s)ds = 1$ ve $F(s) = \mu e^{-\mu s}$, $\mu > 0$.

İlk olarak,

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s - \tau_1)ds$$

$$x_4(t) = \int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s - \tau_1)ds$$

olarak alınır. Bu eşitlikler kullanılarak

$$x_3'(t) = \mu x_2(t - \tau_1) - \mu x_3(t)$$

$$x_4'(t) = \mu x_1(t - \tau_1) - \mu x_4(t)$$

elde edilmiş olur. Yeni denklem sistemi

$$x_1'(t) = -\mu x_1(t) + a_{11}f_{11}(x_1(t - \tau_1)) + a_{12}f_{12}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_2(s - \tau_1)ds\right)$$

$$x_2'(t) = -\mu x_2(t) + a_{21}f_{21}\left(\int_{-\infty}^t F(t-s)x_1(s - \tau_1)ds\right) + a_{22}f_{22}(x_2(t - \tau_1))$$

(3.2)

$$x_3'(t) = \mu x_2(t - \tau_1) - \mu x_3(t)$$

$$x_4'(t) = \mu x_1(t - \tau_1) - \mu x_4(t)$$

şekline dönüşür. Bu sistemin tek pozitif denge noktası olan $E_0^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$,

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0, \frac{dx_3}{dt} = 0, \frac{dx_4}{dt} = 0$$

eşitliklerinden faydalanarak

$$x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 0$$

şeklinde bulunur.

Sistemin (0,0,0,0) denge noktası etrafında kararlılığını incelemek için önce sistem bu nokta etrafında lineerleştirilir.

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) - x_1^*$$

$$x_2(t) = \tilde{x}_2(t) - x_2^*$$

$$x_3(t) = \tilde{x}_3(t) - x_3^*$$

$$x_4(t) = \tilde{x}_4(t) - x_4^*, \quad b_{ij} = a_{ij} \frac{df_{ij}}{dx}$$

değişken değişimi yapılırsa yeni sistem aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= -\mu x_1(t) + b_{11}(x_1(t - \tau_1)) + b_{12}x_3(t), \\
x_2'(t) &= -\mu x_2(t) + b_{21}x_4(t) + b_{22}(x_2(t - \tau_1)), \\
x_3'(t) &= \mu x_2(t - \tau_1) - \mu x_3(t), \\
x_4'(t) &= \mu x_1(t - \tau_1) - \mu x_4(t).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Bu lineerleştirilmiş sistemin karakteristik denklemi, yani $\det(A - \lambda I) = 0$. O halde

$$\begin{vmatrix}
\lambda + \mu - b_{11}e^{-\lambda\tau_1} & 0 & -b_{12} & 0 \\
0 & \lambda + \mu - b_{22}e^{-\lambda\tau_1} & 0 & -b_{21} \\
0 & -\mu e^{-\lambda\tau_1} & \lambda + \mu & 0 \\
-\mu e^{-\lambda\tau_1} & 0 & 0 & \lambda + \mu
\end{vmatrix} = 0$$

Burada $2\tau_1 = \tau$ ve $b_{11} + b_{22} = 0$ olarak alınır;

$$\lambda^4 + 4\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 4\lambda\mu^3 + \mu^4 + e^{-\lambda\tau} (b_{11}b_{22}\lambda^2 + 2\lambda\mu b_{11}b_{22} + \mu^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})) = 0 \tag{3.4}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
4\mu &= a_3 & b_{11}b_{22} &= b_2 \\
6\mu^2 &= a_2 & 2\mu b_{11}b_{22} &= b_1 \\
4\mu^3 &= a_1 & (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\mu^2 &= b_0 \\
\mu^4 &= a_0 & &
\end{aligned}$$

olarak alınır ve denklemde yerine yazılırsa (3.4) denklemi

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0) = 0 \tag{3.5}$$

şeklinde yazılmış olur.

Teorem 3.1: $\tau = 0$ durumundaki (3.5) sistemi için pozitif denge noktası asimptotik kararlıdır.

İspat : $\tau = 0$ olarak alındığında sistemin karakteristik denklemi

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + (a_2 + b_2)\lambda^2 + (a_1 + b_1)\lambda + a_0 + b_0 = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklemin köklerini bulmak için Routh-Hurwitz kriterlerinden yararlanılacaktır.

Routh-Hurwitz kriterlerine göre $P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n$ şeklindeki bir polinoma göre denklemin katsayıları

$$\begin{aligned}c_1 &= a_3 \\c_2 &= a_2 + b_2 \\c_3 &= a_1 + b_1 \\c_4 &= a_0 + b_0\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}-\sqrt{2}\mu &< b_{11} < \sqrt{2}\mu \\b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} &> -\mu^2 \\b_{12}b_{21} &> 2b_{11}^2\end{aligned}$$

koşulları altında

$$c_1 > 0, c_3 > 0, c_4 > 0 \text{ ve } c_1c_2c_3 > c_3^2 + c_1^2c_4$$

eşitsizlikleri doğrudur. Yani Routh-Hurwitz kriterleri sağlanmış olur.

Dolayısıyla $\tau = 0$ durumunda köklerin negatif veya negatif reel kısma sahip olduğu ispatlanmış olur. Köklerin sürekliliğinden ve Routh-Hurwitz kriterinden en az bir $\tau_0 > 0$ vardır öyle ki $\tau \in [0, \tau_0)$ için $\text{Re } \lambda < 0$. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sistemin $(0,0,0,0)$ noktasındaki kararlılığı karakteristik denklemin köklerine bağlıdır. Bu nedenle ilk olarak karakteristik denklemin kökleri incelenir. $\text{Re } \lambda(\tau) = 0$ olduğunda

denge noktası kararlılığını kaybettiğinden $\text{Re } \lambda(\tau^*) = 0$ olacak şekilde bir $\tau^* > 0$ 'ın olup olmadığı araştırılacaktır. Başka bir deyişle (3.4) denkleminin sırf sanal olan köklerinin var olup olmadığı incelenecektir.

Yardımcı teorem 3.2: (1) sistemi için, (3.4) transandental denklemi sanal köke sahiptir.

İspat: $w > 0$ ve $\tau = \tau^*$ olmak üzere $\lambda = iw$ (3.5) denklemin de yazılırsa;

$$w^4 - a_3 w^3 i - a_2 w^2 + a_1 w i + a_0 + (-b_2 w^2 + b_1 w i + b_0)(\cos w\tau - i \sin w\tau) = 0$$

denklemi elde edilir. Gerçek ve sanal kısımlar ayrılarak;

$$\begin{aligned} w^4 - a_2 w^2 + a_0 &= (b_2 w^2 - b_0) \cos w\tau - b_1 w \sin w\tau \\ a_3 w^3 - a_1 w &= (w^2 b_2 - b_0) \sin w\tau + b_1 w \cos w\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem sistemindeki eşitliklerin her iki tarafın kareleri alınıp toplanırsa;

$$(w^4 - a_2 w^2 + a_0)^2 + (a_3 w^3 - a_1 w)^2 = (b_2 w^2 - b_0)^2 + w^2 b_1^2$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu denklemde;

$$\begin{aligned} p &= a_3^2 - 2a_2 = 4\mu^2 \\ q &= a_2^2 + 2a_0 - 2a_1 a_2 - b_2^2 = 6\mu^4 - b_{11}^2 b_{22}^2 \\ u &= a_1^2 - 2a_0 a_2 + 2b_0 b_2 - b_1^2 = 4\mu^6 + 2\mu^2 b_{11} b_{22} (-b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) \\ v &= a_0^2 - b_0^2 = \mu^4 (\mu^4 - (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})^2) \end{aligned}$$

ve $w^2 = z$ olarak alınırsa denklem,

$$z^4 + pz^3 + qz^2 + uz + v = 0 \quad (3.7)$$

şekline dönüşür.

$$\begin{aligned} h(z) &= z^4 + pz^3 + qz^2 + uz + v = 0 \\ h'(z) &= 4z^3 + 3pz^2 + 2qz + u \end{aligned}$$

olarak isimlendirilir. Burada,

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} h(z) = \lim_{Z \rightarrow \infty} h'(z) = \infty$$

ve

$$h(0) = a_0^2 - b_0^2 = \mu^4(\mu^4 - (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})^2).$$

Yardımcı teorem 3.3: Kabul edelim ki $b_{11}^2 + b_{12}b_{21} > \mu^2$ ya da $b_{11}^2 + b_{12}b_{21} < -\mu^2$ ve $b_{11} = -b_{22}$ olsun.

Bu durumda $v=h(0)<0$.

$\lim_{Z \rightarrow \infty} h(z) = \infty$ ve $v<0$ olduğundan (3.5) denkleminin en az bir tane pozitif kökü vardır.

(3.6) sisteminden,

$$\tan w_k \tau = \frac{(a_3b_2 - b_1)w_k^5 + (a_2b_1 - a_3b_0 - a_1b_2)w_k^3 + (a_1b_0 - a_0b_1)w_k}{b_2w_k^6 + (a_3b_1 - a_2b_2 - b_0)w_k^4 + (a_2b_0 - a_0b_2 - a_1b_1)w_k^2 - a_0b_0}$$

$$\tan w_k \tau = \frac{2\mu b_{11}b_{22}w_k^5 + 4\mu^3(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})w_k^3 + 2\mu^5(b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21})w_k}{b_{11}b_{22}w_k^6 + \mu^2(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})w_k^4 - 3\mu^4(b_{11}b_{22} + 2b_{12}b_{21})w_k^2 - \mu^6(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})} + 2s\pi,$$

$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$w_k \tau_s = \arctan\left[\frac{2\mu b_{11}b_{22}w_k^5 + 4\mu^3(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})w_k^3 + 2\mu^5(b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21})w_k}{b_{11}b_{22}w_k^6 + \mu^2(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})w_k^4 - 3\mu^4(b_{11}b_{22} + 2b_{12}b_{21})w_k^2 - \mu^6(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}\right] + 2s\pi$$

$$\tau_s = \frac{1}{w_k} \left[\arctan\left[\frac{2\mu b_{11}b_{22}w_k^5 + 4\mu^3(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})w_k^3 + 2\mu^5(b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21})w_k}{b_{11}b_{22}w_k^6 + \mu^2(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})w_k^4 - 3\mu^4(b_{11}b_{22} + 2b_{12}b_{21})w_k^2 - \mu^6(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}\right] + 2s\pi \right]$$

olarak bulunmuş olur.

Yardımcı Teorem 3.4: (3.5) denklemini için $\tau = \tau_k$ ve $k=0,1,2,\dots$ iken denge noktasında aşağıdaki transversality şartı sağlanır.

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(\tau_k)}{d\tau} \neq 0$$

İspat: $F(\lambda) = (\lambda + \mu)^4 + [(\lambda + \mu)^2 b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \mu^2] e^{-\lambda\tau} = 0$

$$F_1(\lambda) = (\lambda + \mu)^4,$$

$$F_2(\lambda) = (\lambda + \mu)^2 b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \mu^2$$

olarak adlandırılırsa,

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + e^{-\lambda\tau} F_2(\lambda)$$

şeklinde yazılmış olur.

$F(\lambda) = F_1(\lambda) + e^{-\lambda\tau} F_2(\lambda) = 0$ denkleminin τ 'ya göre türevi alınır ve bu eşitlikten $\frac{d\lambda}{d\tau}$ çekilirse

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda F_2(\lambda)}{F_1'(\lambda) + F_1'(\lambda) - \tau F_2(\lambda) e^{\lambda\tau}}$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu eşitlik kullanılarak ve $\lambda = iw$ yazılarak;

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k} = -\frac{F_1'(\lambda)}{\lambda F_1'(\lambda)} + \frac{F_2'(\lambda)}{\lambda F_2'(\lambda)} - \frac{\tau_k}{\lambda} = \frac{1}{iw} \left(\frac{2(iw + \mu)b_{11}b_{22}}{(iw + \mu)^2 b_{11}b_{22} + b_{11}^2 \mu^2} - \frac{4}{iw + \mu} - \tau_k \right),$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k} = \frac{(2w^2 - 2\mu^2 - 4A\mu^2) + i(-4w\mu)}{(-w^2 \mu^2 A - 3w^2 \mu^2 + w^4) + i(w\mu^3 + wA\mu^3 - 3w^3 \mu)}.$$

Payda eşleniği ile çarpılır ve reel kısmı alınırsa

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_k} = \frac{2w^6 + w^2\mu^2(2w^2(1-3A) + 2\mu^2(1+5A) + 4A^2\mu^2)}{(w\mu^3 + Aw\mu^3 - 3w^3\mu)^2 + (-w^2\mu^2A - 3w^2\mu^2 + w^4)^2} > 0$$

$$[1 - 3A = 1 - 3\frac{b_{11}}{b_{22}} = 1 - 3\frac{(-b_{22})}{b_{22}} > 0]$$

olduğu görülmektedir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bu teoremin ispatıyla aynı zamanda çatallanmanın da bütün koşulları sağlanmış olur.

Teorem 3.5: (1) sistemi için,

- i. Eğer $\tau \in [0, \tau_0)$ ise sistemin denge noktası asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer $\tau > \tau_0$ ise sistemin denge noktası kararsızdır.
- iii. Eğer $\tau = \tau_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ ise sistemin denge noktasında Hopf çatallanma meydana gelir.

3.2. Hopf Çatallanmanın Yönü Ve Kararlılık Analizi

Bu bölümde, Hopf çatallanmanın yönü ve (3.3) denkleminin çatallanmış periyodik çözümlerinin kararlılığı analiz edilecektir. Bu yaklaşımlar için Center Manifold Teoremi kullanılacaktır.

Geçen bölümden $\tau = \tau_k^{(i)}$ (3.1) denkleminin Hopf çatallanma noktalarıdır.

$\tau^* = \tau_0^{(0)} = \min_{1 \leq k \leq 4} \{\tau_k^{(0)}\}$ olarak alalım. Kolaylık açısından, $\tau^* = 2\tau_1^* = 2(\tau_0 + a)$ olarak alalım. $0 < a = \tau_1^* - \tau_0$, (3.1) denkleminin Hopf çatallanma parametresidir.

$C = C([- \tau_1^*, 0], c^4)$ olmak üzere $x_t = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ ve $x_t(\theta) = x(t + \theta) \in C$.

(3.1) denkleminde $a=0$ noktasında Hopf çatallanma meydana gelir. Diğer taraftan (3.2)

denklemleri aşağıdaki forma dönüştürülebilir:

$$x' = L_a(x_t) + f(a, x_t) \quad (3.8)$$

$$L_a(x_t) = -B\phi(0) - B_1\phi(-\tau_1^*)$$

ve

$$f(a, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}f_{11}''}{2}\varphi_1^2(-\tau_0 - a) + \frac{a_{12}f_{12}''}{2}\varphi_3^2(0) + \frac{a_{11}f_{11}^{(3)}}{6}\varphi_1^3(-\tau_0 - a) + \frac{a_{12}f_{12}^{(3)}}{6}\varphi_3^3(0) \\ \frac{a_{21}f_{21}''}{2}\varphi_4^2(0) + \frac{a_{22}f_{22}''}{2}\varphi_2^2(-\tau_0 - a) + \frac{a_{21}f_{21}^{(3)}}{6}\varphi_4^3(0) + \frac{a_{22}f_{22}^{(3)}}{6}\varphi_2^3(-\tau_0 - a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Burada, $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta), \varphi_4(\theta))^T \in C$ ve

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -b_{12} & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -b_{21} \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B_1 = \begin{pmatrix} -b_{11}e^{-i\omega\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{22}e^{-i\omega\tau} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu e^{-i\omega\tau} & 0 & 0 \\ -\mu e^{-i\omega\tau} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riesz Gösterim Teoremine göre $\theta \in (-\tau_1^*, 0)$ için elemanları sınırlı değişimli bir $\eta(\theta, a)$ matris fonksiyonu vardır öyle ki;

$$L_a\varphi = \int_{-\tau_1^*}^0 d\eta(\theta, a)\varphi(\theta), \quad \varphi \in C. \quad (3.9)$$

Burada

$$\eta(\theta, a) = \begin{cases} -B & \theta = 0, \\ -B_1\delta(\theta + \tau_1^*) & \theta \in [-\tau_1^*, 0] \end{cases} \quad (3.10)$$

olarak alınmıştır. δ Dirac fonksiyonu olmak üzere ;

$$\delta(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \neq 0, \\ 1 & \theta = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır. $\varphi \in C$ için,

$$A_a \varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta} & \theta \in [-\tau_1^*, 0], \\ \int_{-\tau_1^*}^0 d\eta(s, a) \varphi(s) & \theta = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

ve

$$R_a \varphi(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \in [-\tau_1^*, 0], \\ f(a, \varphi) & \theta = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

formunda tanımlanır.

(3.2) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$x_t' = A_a(x_t) + R_a(x_t) \quad (3.14)$$

$\psi \in C^*$, $C^* = C([0, \tau_1^*], c^4)$ olmak üzere $\varphi \in C$ ve $\psi \in C^*$ için A operatörünün adjoint operatörü:

$$A_0^* \psi(s) = \begin{cases} \frac{d\psi}{ds} & s \in (0, \tau_1^*), \\ \int_{-\tau_1^*}^0 d\eta^T(s, 0) \psi(-s) & s = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

ile verilir.

Yardımcı Teorem 3.2.1: $A(0)$ ve A^* adjoint operatörlerdir.

İspat: $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ ve $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^3)^*)$ iken (4.4), $A(0)$ ve A^* 'in tanımından

$$\langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle = \langle A^*\psi(s), \phi(\theta) \rangle$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olacaktır.

$$\begin{aligned} \langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle &= \bar{\psi}(0)A\theta(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) A(0)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 [\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi)]_{\xi=0}^{\theta} \\ &\quad + \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} d\eta(\theta)\phi(\xi) \\ &= \int_{-1}^0 \bar{\psi}(-\theta) d\eta(\theta)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \left(\frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} \right) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= A^*\bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} A^*\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) \\ &= \langle A^*\psi(s), \phi(\theta) \rangle \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece $A(0)$ ve A^* 'in adjoint operatörleri olduğu gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur.

Daha sonra yapılacak işlemler için bilineer iç çarpım;

$$\langle \psi(s), \varphi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{-\tau_1^*}^0 \int_0^{\theta} \bar{\psi}^{-T}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\varphi(\xi) d\xi \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $\pm iw\tau_k$, A ve A^* 'in özdeğerleridir. $A(0)$ 'in $\lambda = iw\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q(\theta)$ 'dir. A^* 'in $\lambda = -iw\tau_k$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q^*(s)$ 'dir.

Yani;

$$Aq(\theta) = iw\tau_k q(\theta) \text{ ve } A^*q^*(s) = -iw\tau_k q^*(s) \text{ 'dir.}$$

O halde $q(\theta) = (1, \alpha, \beta, \gamma)^T e^{iw_0\theta}$ olarak seçer ve $A(0)q(0) = iw\tau_k q(0)$ eşitliğinde $A(0)$ ve $q(0)$ değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\tau_k \begin{bmatrix} b_{11}e^{-iw\tau} - \mu - iw & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22}e^{-iw\tau} - \mu - iw & 0 & b_{21} \\ 0 & \mu e^{-iw\tau} & -\mu - iw & 0 \\ \mu e^{-iw\tau} & 0 & 0 & -\mu - iw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan

$$\alpha = \frac{1}{b_{22}} ((\mu + iw)e^{iw\tau} - \frac{b_{21}\mu}{\mu + iw}),$$

$$\beta = \frac{\mu}{b_{22}} - \frac{b_{21}\mu^2 e^{-iw\tau}}{b_{22}(\mu + iw)^2} = \alpha\gamma,$$

$$\gamma = \frac{\mu e^{-iw\tau}}{\mu + iw}$$

değerleri elde edilir.

$q^*(s) = D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)^T e^{-iw_0 s}$ ve $A^*(0)$ değerlerini $A^*(0)q(0) = -iw\tau_k q(0)$

denkleminde yerine yazarsak

$$\tau_k \begin{bmatrix} b_{11}e^{-iw\tau} - \mu + iw & 0 & 0 & \mu e^{-iw\tau} \\ 0 & b_{22}e^{-iw\tau} - \mu + iw & \mu e^{-iw\tau} & 0 \\ b_{12} & 0 & -\mu + iw & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & -\mu + iw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden;

$$\alpha^* = \frac{1}{b_{21}} \left(\frac{(\mu - iw)^2 e^{iw\tau}}{\mu} - \frac{b_{11}(\mu - iw)}{\mu} \right),$$

$$\beta^* = \frac{b_{12}}{\mu - iw},$$

$$\gamma^* = \frac{b_{21}\alpha^*}{\mu - iw}$$

değerleri elde edilir.

$\langle q^*(\theta), q(\theta) \rangle = 1$ olduğundan ve bilinear iç çarpımın tanımını kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\langle q^*(\theta), q(\theta) \rangle &= \overline{q^*(0)q(0)} - \int_{-\tau_1^*}^0 \int_0^\theta \overline{q^*}(\xi - \theta) d\eta(\theta, 0) q(\xi) d\xi \\
&= \overline{D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)} (1, \alpha, \beta, \gamma)^T - \int_{-\tau_1^*}^0 \int_0^\theta \overline{D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)} e^{-iw_0(\xi - \theta)} d\eta(\theta, 0) (1, \alpha, \beta, \gamma)^T e^{iw_0\xi} d\xi \\
&= \overline{D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)} (1, \alpha, \beta, \gamma)^T - \int_{-\tau_1^*}^0 \overline{D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)} \theta e^{iw_0\theta} d\eta(\theta, 0) (1, \alpha, \beta, \gamma)^T \\
&= \overline{D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)} (1, \alpha, \beta, \gamma)^T - \overline{D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)} (-\tau_1^*) (-B_1) (1, \alpha, \beta, \gamma)^T \\
&= \overline{D((1 + \alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*) - (e^{-iw\tau} \tau_1^* (b_{11} + \alpha\alpha^* b_{22} + \alpha\beta^* \mu + \overline{\gamma^* \mu})))} \\
D &= ((1 + \alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*) - (e^{-iw\tau} \tau_1^* (b_{11} + \alpha\alpha^* b_{22} + \alpha\beta^* \mu + \overline{\gamma^* \mu})))^{-1}
\end{aligned}$$

hesaplanmış olur.

$a=0$ iken Center Manifoldu tanımlamak için önce koordinatlar hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$z = \langle q^*, x_t \rangle \text{ ve } W(t, \theta) = x_t(\theta) - 2 \operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\} \quad (3.17)$$

eşitliklerini tanımlayalım. Center Manifoldunun lokal kordinatları için;

$$W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + W_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (3.18)$$

eşitliği tanımlansın.

R(a)'nın tanımından ve A ve A^* 'in adjoint operatörler oluşundan;

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \langle q^*, x'(t) \rangle = \langle A_0^* q^*, x_t \rangle + \overline{q^*(0)R_0(0, x_t)} \\
&= iw_0 x(t) + \overline{q^*(0)R_0(0, W(z, \bar{z}) + 2 \operatorname{Re}\{zq(0)\})} \\
&= iw_0 x(t) + \overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})} \\
&\cong iw_0 x(t) + g(z, \bar{z})
\end{aligned} \quad (3.19)$$

Burada

$$g(z, \bar{z}) = g_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + g_{21}(\theta) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (3.20)$$

$$x_t = (x_{1t}(\theta), x_{2t}(\theta), x_{3t}(\theta), x_{4t}(\theta)) = W(t, \theta) + zq(\theta) + \overline{zq(\theta)} \text{ ve } q(\theta) = (1, \alpha, \beta, \gamma)^T e^{i\omega_0\theta}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$x_{3t}(0) = \beta z + \overline{\beta z} + w_{20}^{(3)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(3)}(0) z \overline{z} + w_{02}^{(3)}(0) \frac{\overline{z}^2}{2} + \dots$$

$$x_{4t}(0) = \gamma z + \overline{\gamma z} + w_{20}^{(4)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(4)}(0) z \overline{z} + w_{02}^{(4)}(0) \frac{\overline{z}^2}{2} + \dots$$

$$x_{1t}(-\tau_0) = z e^{-i\omega_0\tau_0} + \overline{z} e^{i\omega_0\tau_0} + w_{20}^{(1)}(-\tau_0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-\tau_0) z \overline{z} + w_{02}^{(1)}(-\tau_0) \frac{\overline{z}^2}{2} + \dots$$

$$x_{2t}(-\tau_0) = \alpha z e^{-i\omega_0\tau_0} + \overline{\alpha z} e^{i\omega_0\tau_0} + w_{20}^{(1)}(-\tau_0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-\tau_0) z \overline{z} + w_{02}^{(1)}(-\tau_0) \frac{\overline{z}^2}{2} + \dots$$

ifadeleri yazılır. Bu eşitliklerde $\alpha_1 = \overline{\alpha^*}$ olarak alınır;

$$g(z, \overline{z}) = \overline{q^*(0)} R_0(z, \overline{z})$$

$$\begin{aligned} &= \overline{D}(1, \overline{\alpha^*}, \overline{\beta^*}, \overline{\gamma^*}) \begin{pmatrix} \frac{a_{11}f_{11}''(0)}{2} x_1^2(-\tau_0) + \frac{a_{12}f_{12}''(0)}{2} x_3^2(0) + \frac{a_{11}f_{11}^{(3)}(0)}{6} x_1^3(-\tau_0) + \frac{a_{12}f_{12}^{(3)}(0)}{6} x_3^3(0) \\ \frac{a_{21}f_{21}''(0)}{2} x_4^2(0) + \frac{a_{22}f_{22}''(0)}{2} x_2^2(-\tau_0) + \frac{a_{21}f_{21}^{(3)}(0)}{6} x_4^3(0) + \frac{a_{22}f_{22}^{(3)}(0)}{6} x_2^3(-\tau_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \overline{D} \left(\frac{a_{11}f_{11}''(0)}{2} x_1^2(-\tau_0) + \frac{a_{12}f_{12}''(0)}{2} x_3^2(0) + \frac{a_{11}f_{11}^{(3)}(0)}{6} x_1^3(-\tau_0) + \frac{a_{12}f_{12}^{(3)}(0)}{6} x_3^3(0) \right) + \alpha_1 \overline{D} \left(\frac{a_{21}f_{21}''(0)}{2} x_4^2(0) + \right. \\ &\quad \left. \frac{a_{22}f_{22}''(0)}{2} x_2^2(-\tau_0) + \frac{a_{21}f_{21}^{(3)}(0)}{6} x_4^3(0) + \frac{a_{22}f_{22}^{(3)}(0)}{6} x_2^3(-\tau_0) \right) \\ &= \overline{D} \frac{a_{11}}{2} (f_{11}''(0) x_1^2(-\tau_0) + \frac{f_{11}^{(3)}(0)}{3} x_1^3(-\tau_0)) + \overline{D} \frac{a_{12}}{2} (f_{12}''(0) x_3^2(0) + \frac{f_{12}^{(3)}(0)}{3} x_3^3(0)) + \overline{D} \alpha_1 \frac{a_{21}}{2} (f_{21}''(0) x_4^2(0) + \frac{f_{21}^{(3)}(0)}{3} x_4^3(0)) + \\ &\quad \overline{D} \alpha_1 \frac{a_{22}}{2} (f_{22}''(0) x_2^2(-\tau_0) + \frac{f_{22}^{(3)}(0)}{3} x_2^3(-\tau_0)) \end{aligned}$$

$$b_{ij}^{(2)} = a_{ij} f_{ij}''(0)$$

$$b_{ij}^{(3)} = a_{ij} f_{ij}'''(0)$$

olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) &= \frac{\bar{D}}{2} b_{11}^{(2)} (ze^{-iw_0\tau_0} + \bar{z}e^{iw_0\tau_0} + w_{20}^{(1)}(-\tau_0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-\tau_0) z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(-\tau_0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^2 + \\
&\frac{\bar{D}}{6} b_{11}^{(3)} (ze^{-iw_0\tau_0} + \bar{z}e^{iw_0\tau_0} + w_{20}^{(1)}(-\tau_0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(-\tau_0) z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(-\tau_0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^3 + \\
&\frac{\bar{D}}{2} b_{12}^{(2)} (\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + w_{20}^{(3)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(3)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(3)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^2 + \\
&\frac{\bar{D}}{6} b_{12}^{(3)} (\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + w_{20}^{(3)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(3)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(3)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^3 + \\
&\bar{D} \alpha_1 \frac{b_{21}^{(2)}}{2} (\gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} + w_{20}^{(4)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(4)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(4)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^2 + \\
&\bar{D} \alpha_1 \frac{b_{21}^{(3)}}{6} (\gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} + w_{20}^{(4)}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(4)}(0) z\bar{z} + w_{02}^{(4)}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^3 + \\
&\bar{D} \alpha_1 \frac{b_{22}^{(2)}}{2} (\alpha z e^{-iw_0\tau_0} + \bar{\alpha} \bar{z} e^{iw_0\tau_0} + w_{20}^{(2)}(-\tau_0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(-\tau_0) z\bar{z} + w_{02}^{(2)}(-\tau_0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^2 + \\
&\bar{D} \alpha_1 \frac{b_{22}^{(3)}}{6} (\alpha z e^{-iw_0\tau_0} + \bar{\alpha} \bar{z} e^{iw_0\tau_0} + w_{20}^{(2)}(-\tau_0) \frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(-\tau_0) z\bar{z} + w_{02}^{(2)}(-\tau_0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots)^3 \\
&= g_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + g_{21}(\theta) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Bu eşitlik kullanılarak;

$$\begin{aligned}
g_{20}(\theta) &= \bar{D}(b_{11}^{(2)} e^{-2iw_0\tau_0} + b_{12}^{(2)} \beta^2 + \alpha_1 b_{21}^{(2)} \gamma^2 + \alpha_1 b_{22}^{(2)} \alpha^2 e^{-2iw_0\tau_0}) \\
g_{11}(\theta) &= \bar{D}(b_{11}^{(2)} + b_{12}^{(2)} \beta \bar{\beta} + \alpha_1 b_{21}^{(2)} \gamma \bar{\gamma} + \alpha_1 b_{22}^{(2)} \alpha \bar{\alpha}) \\
g_{02}(\theta) &= \bar{D}(b_{11}^{(2)} e^{2iw_0\tau_0} + b_{12}^{(2)} \bar{\beta}^2 + \alpha_1 b_{21}^{(2)} \bar{\gamma}^2 + \alpha_1 b_{22}^{(2)} \bar{\alpha}^2 e^{2iw_0\tau_0}) \\
g_{21}(\theta) &= \bar{D}(b_{11}^{(2)} (e^{iw_0\tau_0} w_{20}^{(1)}(-\tau_0) + 2e^{-iw_0\tau_0} w_{11}^{(1)}(-\tau_0)) + b_{11}^{(3)} e^{-iw_0\tau_0}) + \\
&\bar{D}(b_{12}^{(2)} (w_{20}^{(3)}(0) \bar{\beta} + 2\beta w_{11}^{(3)}(0)) + b_{12}^{(3)} \beta^2 \bar{\beta}) + \alpha_1 \bar{D}(b_{21}^{(2)} (\bar{\gamma} w_{20}^{(4)}(0) + 2\gamma w_{11}^{(4)}(0)) + b_{21}^{(3)} \gamma^2 \bar{\gamma}) + \\
&\alpha_1 \bar{D}(b_{22}^{(2)} (\bar{\alpha} e^{iw_0\tau_0} w_{20}^{(2)}(-\tau_0) + 2\alpha e^{-iw_0\tau_0} w_{11}^{(2)}(-\tau_0)) + b_{22}^{(3)} \alpha^2 \bar{\alpha} e^{-iw_0\tau_0})
\end{aligned}$$

değerleri elde edilmiş olur.

g_{02}, g_{20}, g_{11} ve g_{21} 'i hesaplamak için W_{20} ve W_{11} 'i hesaplamamız gerekir. (3.17)

denklemleri kullanarak

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t, \theta) &= \dot{x}_t(\theta) - 2 \operatorname{Re}\{\dot{z}(t)q(\theta)\} \\
&= (Ax_t + Rx_t) - 2 \operatorname{Re}\{[iw_0 z(t) + \overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}]q(\theta)\} \\
&= A[w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\}] + Rx_t - 2 \operatorname{Re}\{iw_0 z(t)q(\theta)\} - 2 \operatorname{Re}\{\overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}q(\theta)\} \\
&= Aw(t, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{z(t)Aq(\theta)\} + Rx_t - 2 \operatorname{Re}\{iw_0 z(t)q(\theta)\} - 2 \operatorname{Re}\{\overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}q(\theta)\} \\
&= Aw(t, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{z(t)iw_0 q(\theta)\} + Rx_t - 2 \operatorname{Re}\{iw_0 z(t)q(\theta)\} - 2 \operatorname{Re}\{\overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}q(\theta)\} \\
\dot{W}(t, \theta) &= Aw(t, \theta) - 2 \operatorname{Re}\{\overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}q(\theta)\}Rx_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W' &= x_t' - z'q - \bar{z}'q = \begin{cases} A_0W - 2 \operatorname{Re}\{\overline{q^{*T}(0)R_0}q(\theta)\}, & \theta \in [-\tau_1^*, 0] \\ A_0W - 2 \operatorname{Re}\{\overline{q^{*T}(0)R_0}q(\theta)\} + R_0 & \theta = 0 \end{cases} \quad (3.21) \\
&\stackrel{def}{=} A_0W + H(z, \bar{z}, \theta)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada;

$$H(z, \bar{z}) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (3.22)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= AW + H(z, \bar{z}, \theta) \\
AW - \dot{W} &= -H(z, \bar{z}, \theta) \\
H(z, \bar{z}, \theta) &= -2 \operatorname{Re}\{\overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}q(\theta)\}
\end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
H(z, \bar{z}, \theta) &= -[\overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}q(\theta) + \overline{q^*(0)R_0(z, \bar{z})}q(\theta)] \\
&= -[g(z, \bar{z})q(\theta) + \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta)] \\
&= -[q(\theta)(g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots) + \bar{q}(\theta)(\bar{g}_{20} \frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}z\bar{z} + \bar{g}_{02} \frac{z^2}{2} + \dots)] \quad (3.24) \\
&= -[(q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}) \frac{z^2}{2} - (q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11})z\bar{z} - (q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}) \frac{\bar{z}^2}{2} - y.m.t.]
\end{aligned}$$

(3.22) ve (3.23) denklemleri karşılaştırılırsa;

$$\begin{aligned}
H_{20} &= -(q(\theta)g_{20} + \overline{q(\theta)g_{02}}) \\
H_{11} &= -(q(\theta)g_{11} + \overline{q(\theta)g_{11}}) \\
H_{02} &= -(q(\theta)g_{02} + \overline{q(\theta)g_{20}})
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

$W(t, \theta)$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\dot{w} = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned}
\dot{w}_z &= w_{20}(\theta)z + w_{11}(\theta)\bar{z} + w_{30}(\theta)\frac{z^2}{3} + \dots \\
\dot{w}_{\bar{z}} &= w_{11}(\theta)z + w_{02}(\theta)\bar{z} + \dots
\end{aligned}$$

değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= w_{20}(\theta)z\dot{z} + w_{11}(\theta)(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) + w_{02}(\theta)\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots \\
&= w_{20}(\theta)z(iwz + g(z, \bar{z}) + w_{11}(\theta)[\bar{z}(iwz + g(z, \bar{z})) + z(-iw\bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}))]) \\
&+ w_{02}(\theta)\bar{z}(-iw\bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z})) + \dots = \frac{z^2}{2} 2iww_{20}(\theta) + \dots
\end{aligned}$$

W_{ij} ve H_{ij} katsayıları arasında bir ilişki kurabilmek için (3.23) eşitliğinin sol tarafı hesaplanır:

$$Aw(t, \theta) = Aw_{20}(t, \theta)\frac{z^2}{2} + Aw_{11}(t, \theta)z\bar{z} + Aw_{20}(t, \theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + Aw_{30}(t, \theta)\frac{z^3}{6} + \dots$$

$$Aw(t, \theta) - \dot{w} = (A - 2iw)w_{20}(t, \theta)\frac{z^2}{2} + Aw_{11}(t, \theta)z\bar{z} + \dots$$

$$(A - 2iw)w_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta) \tag{3.25}$$

$$Aw_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta) \tag{3.26}$$

şeklinde eşitlenebilir. (3.25) ve (3.26) eşitlikleri kullanılarak $w_{ij}(\theta)$ katsayıları hesaplanabilir:

i) $W_{20}(\theta)$ Katsayısının Hesaplanması:

(3.25) eşitliği kullanılarak,

$$(A - 2iw_0)w_{20}(\theta) = q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}$$

$$\dot{w}_{20} - 2iw_0w_{20} = q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}$$

$$(w_{20}e^{-2iw_0\theta})' = e^{-2iw_0\theta} (q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02})$$

$$\begin{aligned} w_{20}e^{-2iw_0\theta} &= \int (g_{20}q(\theta)e^{-2iw_0\theta} + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)e^{-2iw_0\theta})d\theta \\ &= \frac{g_{20}(1, \alpha, \beta, \gamma)^T e^{-iw_0\theta}}{-iw_0} - \frac{D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)^T \bar{g}_{02}e^{-3iw_0\theta}}{3iw_0} + K_1 \end{aligned}$$

$$w_{20} = \frac{ig_{20}(1, \alpha, \beta, \gamma)^T}{w_0} e^{iw_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}D(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)^T}{3w_0} e^{-iw_0\theta} + K_1 e^{2iw_0\theta}$$

$$w_{20} = \frac{ig_{20}q(0)e^{iw_0\theta}}{w_0} + \frac{i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)}{3w_0} e^{-iw_0\theta} + K_1 e^{2iw_0\theta} \quad (3.27)$$

ii) $W_{11}(\theta)$ Katsayısının Hesaplanması:

(3.26) eşitliğinden;

$$Aw_{11}(\theta) = q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}$$

$$\dot{w}_{11} = q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}$$

$$= (1, \alpha, \beta, \gamma)^T e^{iw_0\theta} g_{11} + \bar{g}_{11}(1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)^T e^{-iw_0\theta}$$

$$\begin{aligned}
w_{11}(\theta) &= (1, \alpha, \beta, \gamma)^T e^{iw\theta} \frac{g_{11}}{iw} + \frac{\bar{g}_{11}}{-iw} (1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)^T e^{-iw\theta} \\
&= -g_{11} \frac{i}{w} (1, \alpha, \beta, \gamma)^T e^{iw\theta} + \bar{g}_{11} \frac{i}{w} (1, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)^T e^{-iw\theta} \\
&= -\frac{ig_{11}}{w_0} q(0) e^{iw_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{w_0} \bar{q}(0) e^{-iw_0\theta} + K_2
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olarak hesaplanmış olur. $K_i = (K_i^{(1)}, K_i^{(2)}, K_i^{(3)}, K_i^{(4)}) \in R^4, i=1,2$. W_{20} ve W_{11} 'i hesaplamak için K_1 ve K_2 sabitlerinin bilinmesi gerekir. $\theta=0$ için

$$W_{20}(0) = \frac{ig_{20}q(0)}{w_0} + \frac{i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)}{3w_0} + K_1 \tag{3.}$$

$$W_{11}(0) = -\frac{ig_{11}}{w_0} q(0) + \frac{i\bar{g}_{11}}{w_0} \bar{q}(0) + K_2 \tag{3.}$$

değerleri elde edilir.

K_1 ve K_2 değerleri hesaplanmalıdır. A 'nın tanımından ve (3.25) ile (3.26)'dan

$$\int_{-\tau_1^*}^0 d\eta(\theta) W_{20}(\theta) = 2iw\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0) \tag{3.31}$$

ve

$$\int_{-\tau_1^*}^0 d\eta(\theta) W_{11}(\theta) = -H_{11}(0) \tag{3.32}$$

denklemleri bulunur.

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + \begin{pmatrix} b_{11}^{(2)} e^{-2iw\tau_0} + b_{12}^{(2)} \beta^2 \\ \alpha_1 b_{21}^{(2)} \gamma^2 + \alpha_1 b_{22}^{(2)} \alpha^2 e^{-2iw\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{20}^{(1)} \\ H_{20}^{(2)} \\ H_{20}^{(3)} \\ H_{20}^{(4)} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

ve

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \overline{g_{11}q(0)} + \begin{pmatrix} b_{11}^2 + b_{12}^2\beta\bar{\beta} \\ \alpha_1 b_{21}^2\gamma\bar{\gamma} + \alpha_1 b_{22}^2\alpha\bar{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{(1)} \\ H_{11}^{(2)} \\ H_{11}^{(3)} \\ H_{11}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

şeklinde yazılır.

(3.31) ve (3.33)'den

$$\left(iw\tau_k I - \int_{-\tau_1^*}^0 e^{iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0$$

$$\left(-iw\tau_k I - \int_{-\tau_1^*}^0 e^{-iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0$$

yardımları ile

$$\left(2iw\tau_k I - \int_{-\tau_1^*}^0 e^{2iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) K_1 = H_{20}(0) \quad (3.35)$$

yani

$$\begin{bmatrix} 2iw - \lambda - \mu + b_{11}e^{-iw\tau_k} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 2iw - \lambda - \mu + b_{22}e^{-iw\tau_k} & 0 & b_{21} \\ 0 & \mu e^{-iw\tau_k} & 2iw - \lambda - \mu & 0 \\ \mu e^{-iw\tau_k} & 0 & 0 & 2iw - \lambda - \mu \end{bmatrix} K_1 = \begin{bmatrix} H_{20}^{(1)} \\ H_{20}^{(2)} \\ H_{20}^{(3)} \\ H_{20}^{(4)} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{bmatrix} 2i\omega - \lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 2i\omega - \lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{21} \\ 0 & \mu e^{-i\omega\tau_k} & 2i\omega - \lambda - \mu & 0 \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & 0 & 0 & 2i\omega - \lambda - \mu \end{bmatrix} = G$$

olarak adlandırılıp sistem çözüldüğünde

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} H_{20}^{(1)} & 0 & b_{12} & 0 \\ H_{20}^{(2)} & 2i\omega - \lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{21} \\ H_{20}^{(3)} & \mu e^{-i\omega\tau_k} & 2i\omega - \lambda - \mu & 0 \\ H_{20}^{(4)} & 0 & 0 & 2i\omega - \lambda - \mu \end{bmatrix}$$

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} 2i\omega - \lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & H_{20}^{(1)} & b_{12} & 0 \\ 0 & H_{20}^{(2)} & 0 & b_{21} \\ 0 & H_{20}^{(3)} & 2i\omega - \lambda - \mu & 0 \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & H_{20}^{(4)} & 0 & 2i\omega - \lambda - \mu \end{bmatrix}$$

$$K_1^{(3)} = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} 2i\omega - \lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & H_{20}^{(1)} & 0 \\ 0 & 2i\omega - \lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & H_{20}^{(2)} & b_{21} \\ 0 & \mu e^{-i\omega\tau_k} & H_{20}^{(3)} & 0 \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & 0 & H_{20}^{(4)} & 2i\omega - \lambda - \mu \end{bmatrix}$$

$$K_1^{(4)} = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} 2i\omega - \lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{12} & H_{20}^{(1)} \\ 0 & 2i\omega - \lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & H_{20}^{(2)} \\ 0 & \mu e^{-i\omega\tau_k} & 2i\omega - \lambda - \mu & H_{20}^{(3)} \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & 0 & 0 & H_{20}^{(4)} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (3.28), (3.32) ve (3.34) denklemleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -\lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & -\lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{21} \\ 0 & \mu e^{-i\omega\tau_k} & -\lambda - \mu & 0 \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & 0 & 0 & -\lambda - \mu \end{bmatrix} K_2 = \begin{bmatrix} H_{11}^{(1)} \\ H_{11}^{(2)} \\ H_{11}^{(3)} \\ H_{11}^{(4)} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{bmatrix} -\lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & -\lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{21} \\ 0 & \mu e^{-i\omega\tau_k} & -\lambda - \mu & 0 \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & 0 & 0 & -\lambda - \mu \end{bmatrix} = M$$

olarak adlandırılır ve sistem çözülürse

$$K_2^{(1)} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} H_{11}^{(1)} & 0 & b_{12} & 0 \\ H_{11}^{(2)} & -\lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & b_{21} \\ H_{11}^{(3)} & \mu e^{-i\omega\tau_k} & -\lambda - \mu & 0 \\ H_{11}^{(4)} & 0 & 0 & -\lambda - \mu \end{bmatrix}$$

$$K_2^{(2)} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} -\lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & H_{11}^{(1)} & b_{12} & 0 \\ 0 & H_{11}^{(2)} & 0 & b_{21} \\ 0 & H_{11}^{(3)} & -\lambda - \mu & 0 \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & H_{11}^{(4)} & 0 & -\lambda - \mu \end{bmatrix}$$

$$K_2^{(3)} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} -\lambda - \mu + b_{11}e^{-i\omega\tau_k} & 0 & H_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & -\lambda - \mu + b_{22}e^{-i\omega\tau_k} & H_{11}^{(2)} & b_{21} \\ 0 & \mu e^{-i\omega\tau_k} & H_{11}^{(3)} & 0 \\ \mu e^{-i\omega\tau_k} & 0 & H_{11}^{(4)} & -\lambda - \mu \end{bmatrix}$$

$$K_2^{(4)} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} -\lambda - \mu + b_{11}e^{-iw\tau_k} & 0 & b_{12} & H_{11}^{(1)} \\ 0 & -\lambda - \mu + b_{22}e^{-iw\tau_k} & 0 & H_{11}^{(2)} \\ 0 & \mu e^{-iw\tau_k} & -\lambda - \mu & H_{11}^{(3)} \\ \mu e^{-iw\tau_k} & 0 & 0 & H_{11}^{(4)} \end{bmatrix}$$

elde edilmiş olur. Böylece Center Manifold'da τ_k kritik değerindeki çatallanan periyodik çözümlerin çatallanma katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2w_0} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{1}{2}g_{21}$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}\{c(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\tau_0)\}}, \quad \nu_2 = 2\text{Re}\{c_1(0)\},$$

$$T_2 = -\frac{1}{w_0} (\text{Im}\{c_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\{\lambda'(\tau_0)\})$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla Hopf çatallanmanın yönü, kararlılığı ve periyodu ile ilgili aşağıdaki genel teorem elde edilmiş olur:

Teorem 3.2.2: Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen μ_2 için; eğer $\mu_2 > 0$ ise $\tau > \tau_0$ için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma süperkritiktir, $\mu_2 < 0$ ise $\tau < \tau_0$ için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma subkritiktir. Çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen β_2 için; $\beta_2 < 0$ ise çatallanan periyodik çözüm kararlı, $\beta_2 > 0$ ise kararsızdır. Çatallanan çözümün periyodunu ifade eden T_2 için ; $T_2 < 0$ iken periyot artar, $T_2 > 0$ iken periyot azalır.

KAYNAKÇA

Kitaplar

Hassard, N.D. & Kazarinoff, Y.H., 1981. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge: Cambridge University Press.

Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Boston: Academic Press.

May, R.M., 1973. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, New Jersey, USA: Princeton University Press.

Murray, J.D., 1993. *Mathematical Biology*, New York: Springer -Verlag Press.

Sürelî Yayınlar

- Baldi P., Atiya A., 1994. How delays affect neural dynamics and learning, *IEEE Trans. Neural networks* **5** 610-621.
- Campbell S.A., Ruan S., Wei J., 1999. Qualitative analysis of a neural network model with multiple time delays, *Int. J. Bifurcation chaos* **9** 1585-1595.
- Cao J., Xiao M., 2007. Stability and hopf bifurcation in a simplified BAM neural network with two time delays, *IEEE Trans. Neural networks* **18** (2) 416-430.
- Cao J., Wang J., 2004. Absolute exponential stability of recurrent neural networks with Lipschitz-continuous activation and time delays, *Neural networks* **17** 379-390.
- Cao J., 1999. On stability analysis in delayed celler neural networks, *Phys. Rev. E* **59** 5940-5944.
- Cheng Z., Cao J., 2006. Bifurcation and stability analysis of a neural network model with distributed delays, *Nonlinear Dyn.* **46** 363-373
- Chen, G. & Liao, X., 2005. Hopf bifurcation and chaos analysis of Chen's system with distributed delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, pp.197-220.
- Chen Y., Wu J., 2001. Slowly oscillating periodic solutions for a delayed frustrated network of two neurons, *J. Math. Anal. Appl.* **259** 188-288.
- Çelik, C., 2011. Dynamical behavior of a ratio-dependent predator-prey model with distributed delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **16** (3), pp.719-738.
- Çelik, C., 2009. Hopf bifurcation of a ratio-dependent predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractal*, **42**, pp. 1474-1484.
- Çelik, C., 2008. The stability & Hopf bifurcation for a predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **16**, pp.59-77.

- Faria T., 2000. On a planar system modelling a neuron network with memory, *J. Differ. Eqn.* **168** 129-149.
- Guo S., Huang L., Wang L., 2004. Linear stability and Hopf bifurcation in a two neuron network with three delays, *Int. J. Bifurcation Chaos* **14** (8) 2799-2810.
- Guo S., Huang L., 2003. Exponential stability and periodic solutions of neural network with continuously distributed delays, *Phys. Rev. F.* **67** 1901-1902.
- Guo S., Huang L., 2003. Hopf bifurcating periodic orbits in a ring of neurons with delays, *Physica D* **183** 19-44.
- Hopfield J.J., 1984. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **81** 3088-3092.
- Huang C., He Y., Huang L., Yuan Z., 2007. Hopf bifurcation analysis of two neurons with three delays, *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* **8** 903-921.
- Huang L., Wu J., 2001. Dynamics of inhibitory artificial neural networks with threshold nonlinearity. *Fields Inst. Commun.* **29** 235-243.
- Huang L., Wu J., 2001. The role of threshold in preventing delay-induced oscillations of frustrated neural networks with McCulloch-Pitts nonlinearity, *Int. J. Math. Game Theory Algebra* **11** (6) 71-100.
- Kuang, Y., 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, *Academic Press, Inc.*, San Diego.
- Liao X., Wong K.W., Wu Z., 2001. Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays, *Physica D* **149** 123-141.
- Liao X., Wu Z., Yu J., 1999. Stability switches and bifurcation analysis of neural network with continuously delay, *IEEE trans. Syst. Man. Cybernet.* **29** 692-696.
- Marcus C.M., Waugh F.R., Westervelt R.M., 1991. Nonlinear dynamics and stability of analog neural networks, *Physica D* **51** 234C247.

- Ruan S., Filfil R., 2004. Dynamics of a two neuron system with discrete and distributed delays, *Physica D* 191 323-342.
- Ruan S., Wei J., 2003. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays, *Dyn. Contin. Discret. Impuls. Syst.* **10** 863C87.
- Olien L., Bélair J., 1997. Bifurcation, stability and monotonicity properties of a delayed neural model, *Physica D* 102 349-363.
- Shayer L.P., Campbell S.A., 2000. Stability, bifurcation and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays, *SIAM J. Appl. Math.* **61** 673-700.
- Shayer L.P., Campbell S.A., 2000. Stability, bifurcation and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays, *SIAM J. Appl. Math.* **61** 673-700.
- Tank D.W., Hopfield J.J., 1987. neural computation by concentrating information in time, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **84** 1896-1991.
- Wei J., Yuan Y., 2005. Synchronized Hopf bifurcation analysis in a neural network model with delays, *J. Math. Anal. Appl.* **312** 205-229.
- Wei J., Ruan S., 1999. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays, *Physica D* 130 255C272.
- Yazıcı A. C., E. Ögüş, S.Ankaralı, S. Canan, H. Ankaralı, Z. Akkuş, 2007. Artificial neural networks, *Türkiye Klinikleri J Med Sci* **27** 65-71.
- Zhou X., Wu Y., Li Y., Yao X., 2009. Stability and Hopf bifurcaion analysis on a two-neuron network with discrete and distributed delays, *Chaos Solutions Fract.* **40** 1493-1505.

Diğer Yayınlar

“Bifurcation Theory” erişim adresi:

http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation_theory

“Center Manifold Teoremi” erişim adresi:

http://en.wikipedia.org/wiki/Center_Manifold

“Delay Diferential Equation” erişim adresi:

http://en.wikipedia.org/wiki/Delay_diferential_equation