ESNEK HİPER TOPOLOJİLER ve ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA TANIMLI KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

FETHULLAH EROL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ ANABİLİM DALI

2016

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK HİPER TOPOLOJİLER VE ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA TANIMLI KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

DOKTORA TEZİ

Fethullah EROL
(201292172001)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin AKDAĞ

SİVAS
OCAK 2016

Fethullah EROL’un hazırladığı ve **“Esnek Hiper Topolojiler ve Esnek Topolojik Uzaylarda Tanımlı Küme Değerli Dönüşümler”** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin AKDAĞ** ....
Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN** ....
GaziosmanpaşaÜniversitesi

Doç. Dr. İdris ZORLUTUNA ....
Cumhuriyet Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM ....
Cumhuriyet Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ....
Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa DEĞİRMENCİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu’nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)’nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

13.01.2016

Fethullah Erol

ÖZET

ESNEK HİPER TOPOLOJİLER VE ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA TANIMLI KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

Fethullah EROL

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışmanı: Prof. Dr. Metin AKDAĞ

2016, 129+xi sayfa

Esnek hiper topolojileri ve esnek küme değerli dönüşümleri incelemeyi amaçlayan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun literatürdeki önemi ve tarihçesi ele alınmıştır. İkinci bölümde, sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için esnek kümeler, esnek topolojik uzaylar ve esnek fonksiyonlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümden itibaren son bölüme kadar tezin özgün çalışmaları sunulmuştur. Üçüncü bölümde, esnek topolojik yapılar arasında tanımlanan küme değerli dönüşüm kavramı verilmiş ve bu dönüşümün temel özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, ilk olarak esnek açık kümeler kullanılarak esnek küme aileleri üzerinde alt ve üst esnek Vietoris topolojiler tanımlanmış ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra esnek kompakt, esnek Lindelöf, esnek quasi H-kapalı ve esnek F_δ kapalı kümelerden yararlanarak esnek küme aileleri üzerinde bazı hiper topolojiler tanımlanıp temel özellikleri incelenmiş ve bu topolojiler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Beşinci bölümde, önce esnek küme değerli dönüşümlerin çeşitli süreklilik tipleri (sırasıyla esnek sürekli, esnek *alfa*-sürekli, esnek *yarı*-sürekli, esnek *ön*-sürekli, esnek *b*-sürekli ve esnek *beta*-sürekli) tanımlanarak bu süreklilik tiplerinin bazı temel özellikleri verilmiş ve arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra esnek küme değerli dönüşümlerin bazı kararsızlık tipleri (sırasıyla esnek *yarı*-kararsız, esnek *ön*-kararsız, esnek *b*-kararsız) tanımlanarak bu kararsızlık tiplerinin bazı temel özellikleri verilmiştir. Tezin altıncı ve son bölümünde, esnek küme değerli dönüşümler kullanılarak medikal teşhis için bir uygulama örneği ile esnek küme değerli bilgi sistemi örneği verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, esnek topolojik uzay, esnek küme değerli dönüşüm, esnek hiper uzaylar, esnek süreklilik.

ABSTRACT

SOFT HYPER TOPOLOGIES AND MULTIFUNCTIONS DEFINED BETWEEN SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Fethullah EROL

Doctor of Philosophy (Ph. D.)

Institute of Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Metin AKDAĞ

2016, 129+xi pages

This thesis, the purpose of which is to investigate the soft hyper topologies and the multifunctions defined between soft topological spaces, composes six chapters. In the first chapter, the importance and history of the issue in the literature were discussed. In the second chapter, for better understanding of the next sections, the definitions and theorems about soft set, soft topological spaces and soft mapping were expressed. From the third chapter until the last part of the thesis, original work is presented in. In the third chapter, the concept of multifunction which defined between soft topological spaces and some basic properties of these multifunction were given. In the fourth chapter, first by use soft open set the upper and lower soft Vietoris topological space which defined on family of soft sets and some basic properties of it were given. Then by use soft compact, soft Lindelöf, soft quasi H-closed and soft F_δ sets, some hyper topological spaces which defined on family of soft sets were given and their properties were investigated. In the fifth chapter, the definitions of various types of soft continuous multifunction (soft continuous, soft *alpha*-continuous, soft *semi*-continuous, soft *pre*-continuous, soft *b*-continuous and soft *beta*-continuous, respectively) were expressed Then, basic features of these soft continuous multifunctions were given and the relationships among them were investigated. Also, various types of soft irresolute multifunction (soft *semi*-irresolute, soft *pre*-irresolute, soft *b*-irresolute, respectively) were expressed. Finally, in the sixth chapter, by use the soft multifunction an example medical diagnosis application and soft set-valued information systems were given.

Key Words: Soft sets, soft topological space, soft multifunction, soft hyper spaces, soft continuity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda bana her konuda destek olan tez danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Metin AKDAĞ'a, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. İdris ZORLUTUNA'ya ve eğitimim boyunca emeği geçen tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca maddi manevi destekleriyle her zaman yanımda olan anne babam ile bu süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan eşim ve çocuklarıma minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER DİZİNİ

$\in$	:	Elemanı
$\notin$	:	Elemanı değil
$\tilde{\in}$	:	Esnek elemanı
$\tilde{\notin}$	:	Esnek elemanı değil
c	:	Tümleyen
$\tilde{\boldsymbol{c}}$	:	Esnek tümleyen
$\backslash$	:	Fark
$\tilde{\backslash}$	:	Esnek fark
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim
$\tilde{\cup}$	:	Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	:	Esnek kesişim
$\subset$	:	Alt küme
$\supset$	:	Kapsama
$\tilde{\subset}$	:	Esnek alt küme
$\tilde{\supset}$	:	Esnek kapsama
$\boldsymbol{X}$	:	Boştan farklı evrensel küme
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$	:	X in kuvvet kümesi
E	:	Parametreler kümesi
$\emptyset$	:	Boş küme
$\boldsymbol{\Phi}$	:	Esnek boş küme
$\tilde{\boldsymbol{X}}$	:	Mutlak esnek küme
$\boldsymbol{\tau}$	:	X üzerindeki tüm açık kümelerin ailesi
$\tilde{\boldsymbol{\tau}}$	:	X üzerindeki tüm esnek açık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{\tau}'$	:	X üzerindeki tüm kapalı kümelerin ailesi
$\tilde{\boldsymbol{\tau}}'$	:	X üzerindeki tüm esnek kapalı kümelerin ailesi
$\leq$	:	Esnek küme ailesi üzerinde alt topoloji

KISALTMALAR DİZİNİ

ark.	:	Arkadaşları
$\boldsymbol{cl}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre kapanışı
$\boldsymbol{int}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre içi
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{E})$	:	X üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{K})$	:	Y üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
$\boldsymbol{bcl}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek b-kapanışı
$\boldsymbol{SBCS}(\boldsymbol{X})$	:	X esnek uzayındaki esnek b-kapalı kümelerin ailesi
$\boldsymbol{bint}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek b-içi
$\boldsymbol{SBOS}(\boldsymbol{X})$	:	Xesnek uzayındaki esnek b-açık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{pcl}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek *ön*-kapanışı
$\boldsymbol{SPCS}(\boldsymbol{X})$	:	Xesnek uzayındaki esnek *ön*-kapalı kümelerin ailesi
$\boldsymbol{pint}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek *ön*-içi
$\boldsymbol{SPOS}(\boldsymbol{X})$	:	Xesnek uzayındaki esnek *ön*-açık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{scl}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek *yarı*-kapanışı
$\boldsymbol{SSCS}(\boldsymbol{X})$	:	Xesnek uzayındaki esnek *yarı*-kapalı kümelerin ailesi
$\boldsymbol{sint}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek *yarı*-içi
$\boldsymbol{SSOS}(\boldsymbol{X})$	:	X esnek uzayındaki esnek *yarı*-açık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{\alpha cl}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek α-kapanışı
$\boldsymbol{S\alpha CS}(\boldsymbol{X})$	:	Xesnek uzayındaki esnek α-kapalı kümelerin ailesi
$\boldsymbol{\alpha int}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek α-içi
$\boldsymbol{S\alpha OS}(\boldsymbol{X})$	:	Xesnek uzayındaki esnek α-açık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{\beta cl}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek β-kapanışı
$\boldsymbol{S\beta CS}(\boldsymbol{X})$	:	X esnek uzayındaki esnek β-kapalı kümelerin ailesi
$\boldsymbol{\beta int}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$	:	(F,E) esnek kümesinin X uzayına göre esnek β-içi
$\boldsymbol{S\beta OS}(\boldsymbol{X})$	:	X esnek uzayındaki esnek β-açık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{E_e^x}$	:	X üzerindeki esnek nokta
$\boldsymbol{K_k^y}$	:	Y üzerindeki esnek nokta
$(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{K})$	:	Y üzerindeki esnek topolojik uzayı
$\mathbb{S}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{K})$	:	Y üzerindeki boş olmayan tüm esnek kümelerin ailesi
$(\boldsymbol{G},\boldsymbol{E})^{\tilde{c}}$	:	(G,E) esnek kümesinin esnek tümleyeni
$\widetilde{\boldsymbol{X}}-(\boldsymbol{G},\boldsymbol{E})$	:	(G,E) esnek kümesinin esnek tümleyeni
$\boldsymbol{\beta_{SV^+}}$	:	Üst Esnek Vietoris topolojinin tabanı

$\boldsymbol{\mathcal{S}_{SV^-}}$	:	Alt Esnek Vietoris topolojinin alt tabanı
$\boldsymbol{\tau_{SV^+}}$	:	Üst Esnek Vietoris topoloji
$\boldsymbol{\tau_{SV^-}}$	:	Alt Esnek Vietoris topoloji
$\boldsymbol{\beta_{SC^+}}$	:	Üst Esnek ko-kompakt topolojinin tabanı
$\boldsymbol{\mathcal{S}_{SC^-}}$	:	Alt Esnek ko-kompakt topolojinin alt tabanı
$\boldsymbol{\tau_{SL^+}}$	:	Üst Esnek ko-Lindelöf topoloji
$\boldsymbol{\tau_{SH^+}}$	:	Üst Esnek ko-quasi H-kapalı topoloji
$\boldsymbol{\tau_{SD^+}}$	:	Üst Esnek D-topoloji
$\boldsymbol{F^+(G,K)}$	:	(G,K) esnek kümesinin F dönüşümü altındaki üst ters görüntüsü
$\boldsymbol{F^-(G,K)}$	:	(G,K) esnek kümesinin F dönüşümü altındaki alt ters görüntüsü
$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{E})\to(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{K})$	:	X den Y ye tanımlı esnek dönüşüm
$\boldsymbol{F}:(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{E})\to(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{K})$	:	X den Y ye tanımlı esnek küme değerli dönüşüm

1. GİRİŞ

Mühendislik, tıp, ekonomi, çevre, yapay zeka ve bilgisayar gibi alanlarda çalışan birçok bilim adamı uzun süredir belirsizlik içeren verileri modellemeye ve matematiksel olarak ifade etmeye çalışmaktadır. Ancak klasik mantık yaklaşımıyla bu çalışmaların başarıya ulaştığını söylemek pek de mümkün değildir. Kesin ve tam olmayan bilgi ve olayların varlığı nedeniyle belirsizlik içeren sistemlerin modellenmesinde kullanılan klasik mantık yetersiz kaldığından, belirsizlik ile ilgili ortaya çıkan problemlerin üstesinden gelebilmek için birçok teori ortaya atılmıştır. Bunlardan bazıları olasılık teorisi, bulanık küme teorisi, yaklaşımlı küme teorisi ve esnek küme teorisidir.

17. yüzyıl başlarında Pascal ve Fermat olasılık kuramını ortaya atarak ilk olarak belirsiz bir durumu matematiksel olarak incelemişler, fakat klasik mantığın yukarıda bahsedilen yetersizliğini gidermede kullanılan bu teorinin kendisi de, ara değerleri hesaba katmaması nedeniyle yetersiz kalmaktadır.

Belirsizlik içeren olayların modellenmesine imkân tanıyan bulanık (*Fuzzy*) küme teorisi 1965' te Zadeh tarafından ortaya atılmış ve bu teorinin belirsizlik içeren sistemlere uygulanabildiği de yine kendisi tarafından gösterilmiştir. Günlük hayatımızda otomatik kontrol sistemleri, bilgi sistemleri, görüntü sistemleri gibi birçok uygulama alanı olmasına rağmen bu teori, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğu nedeniyle yetersiz kalmaktadır.

1982 de Pawlack tarafından tanımlanan ve klasik küme teorisinin bir genişlemesi niteliğinde olan yaklaşımlı (*Rough*) küme teorisinde, nitelik değerlerini ve kararları kullanarak durumları ifade eden karar tablolarındaki bilgilerin tam olduğu varsayılır, ancak pratikte bu mümkün olmayabilir. Bu nedenden dolayı, üyelik fonksiyonundan ve niteliksel ifadelerden bağımsız yeni yaklaşımlara ihtiyaç vardır.

1999 yılında Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek *(Soft)* küme teorisi, bulanık kümenin aksine reel değerli bir fonksiyon yerine, küme değerli bir fonksiyon ile belirsizliği ortadan kaldırmaya çalışmaktadır. Üyelik fonksiyonu kurma problemi olmaması bu teoriyi pratikte daha uygulanabilir kılmaktadır. Bu teori, Molodtsov ve arkadaşları (1999, 2006) tarafından ortaya konan, çeşitli alanlarda pratik uygulamalar için zengin bir potansiyele sahiptir. Esnek küme teorisi, bilgi sistemleri, sinir sistemleri, karar verme problemleri, optimizasyon teorisi, oyun teorisi, cebirsel yapılar ve matematiksel analiz (Riemann integrali, Perron integrali, ölçüm teorisi) gibi belirsizlik içeren birçok alana uygulanmıştır. 2002 yılında Maji ve arkadaşları özellikle bilgisayar uygulamalarında kullanışlı olan karar verme problemleri için ilk uygulamayı esnek kümeler yardımıyla vermişler, 2003 yılında ise esnek kümeler için cebirsel işlemleri tanımlayarak özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonra Chen ve arkadaşları (2005), Maji ve arkadaşlarının (2002) çalışmasını geliştirmişlerdir. Pei ve Miao (2005) ise esnek kümeler ve özel bilgi sistemleri arasındaki ilişkiyi incelemişler ve esnek kümelerin özel bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu göstermişlerdir. Çağman ve Enginoğlu (2010), soft matris teorisini tanımlamışlar ve bir optimum değer bulma probleminde karar verme algoritmasını geliştirmişlerdir.

Esnek kümeleri temel alan topolojik yapılar ile ilgili ilk çalışmalar Shabir ve Naz (2011) ile Çağman ve ark. (2011) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarında; Shabir ve Naz, esnek topolojik uzaylardaki bazı temel kavramların yanısıra esnek ayırma aksiyomlarını tanıtmışlar, Çağman ve ark. ise esnek topolojik uzayların bazı özelliklerini vermişlerdir. Daha sonra Min (2011) esnek ayırma aksiyomları ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde etmiştir. Zorlutuna ve arkadaşları (2012) ise esnek topolojik uzaylarda, iç nokta, iç, komşuluk, süreklilik ve kompaktlık gibi önemli kavramlara giriş yapmışlardır. Aygünoğlu ve Aygün (2012) esnek çarpım topolojiyi tanımlayarak, Alexander alt taban teoremi ile Tychonoff teoremini esnek topolojik uzaylara genelleştirmişlerdir. Kharal ve Ahmad (2011) esnek dönüşümleri tanımlayarak çeşitli özeliklerini incelemişlerdir. Chen (2013), esnek *yarı* açık küme kavramına giriş yapmış ve esnek topolojik uzaylarda ilgili özellikleri çalışmıştır. Nazmul ve Samanta (2013) ile Roy ve Samanta (2014) esnek taban ile ilgili özellikleri vermişlerdir. Georgiou ve arkadaşları (2013) ise esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları ve yakınsaklık ile ilgili yeni sonuçlar elde ederek, esnek θ-topoloji ile esnek θ-süreklilik kavramlarını ortaya atmışlardır. Esnek topolojik uzaylar ile ilgili diğer çalışmalar ise Hussain ve Ahmad (2011), Varol ve Aygün (2013), Feng ve arkadaşları (2008), Kandil ve arkadaşları (2014) ün yapmış olduğu çalışmalar olarak listelenebilir. Günümüzde halen esnek topolojik uzaylar ile ilgili çalışmalar artarak devam etmektedir.

Çağdaş matematiğin gelişme alanlarından biri de küme değerli analizdir. Bazı problemler incelenirken ortaya çıkan dönüşümler tek değerli veya diferansiyellenebilir olmayabilir. Bu durumda problemin incelenmesi için klasik analiz yöntemleri yeterli olmamaktadır. Bu nedenle yeni altyapıların oluşturulması gerekmektedir. Bunlardan biri de küme değerli dönüşümlerdir.

Klasik küme topolojilerinde önemli rol oynayan çeşitli fonksiyon türleri üzerinde yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu değişik araştırmacılar tarafından küme değerli dönüşümlere genişletilmiştir. Son yıllarda bu teori, çeşitli alanlarda (ekonomi, noncooperative games, yapay zeka, tıp, bilgi sistemleri, optimizasyon teorisi ve karar verme teorisi gibi) uygulama alanı bulabildiğinden giderek önemli hale gelmektedir. Ayrıca küme değerli dönüşümlerin türev kavramı kontrol teorisinin problemlerinin araştırılmasında kullanılmaktadır.

1930'lu yıllardan beri ayrı bir konu olarak çalışılmaya başlanan ve çağdaş matematiğin önemli konularından biri olan küme değerli dönüşümlerin çeşitli özellikleri (türevlenebilirlikleri, integrallenebilirlikleri, ölçülebilirlikleri, homotop olmaları v.b.) Stroter (1955), Jacobs (1968), Bridgland (1970), Smithson (1972) v.d. tarafından, süreklilikleri ise Wallace (1941), Choquet (1947), Ratner (1949), Michael (1951), Stroter (1955), Ponomarev (1964), Lechicki (1979), Popa (1982), Özer (1986), Küçük (1994), Akdağ (1991) ve Zorlutuna (2000) tarafından çalışılmıştır. Michael (1951) de küme değerli bir dönüşüme tek değerli bir fonksiyon karşılık getirmiş ve tek değerli dönüşümlerin sürekliliğinden yararlanmıştır. Görüntü uzaylarını yeniden topolojilendirerek kuvvet kümesi üzerinde yeni topolojiler elde etmiş, bu topolojiler yardımıyla da bir küme değerli dönüşümün sürekliliği ile buna karşılık gelen tek değerli dönüşümün sürekliliği arasındaki ilişki incelenmiştir. Böylece küme değerli dönüşümler ile ilgili pek çok problemin tek değerli fonksiyona indirgenmesi sağlanmıştır. Küme değerli dönüşümlerin sürekliliği ile ilgili ilk toplu çalışma Stroter (1955) tarafından yapılmıştır. Stroter “Continuous Multivalued Functions” adlı çalışması ile verilen tüm süreklilik çeşitleri arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Fuzzy topolojik uzaylarda ise küme değerli dönüşümler Papageorgiou (1985) tarafından tanımlanmış, bu dönüşümlerin süreklilikleri ise kendisi ile birlikte, Mukherjee ve Malakar (1991), Özbakır (1994), Zorlutuna (1996), Ekici (1996), Khaled ve ark. (2010), Akdağ ve ark. (2015) tarafından çalışılmıştır. Küme değerli dönüşümler ile ilgili yapılan çalışmalar da halen devam etmektedir.

Hiper topolojiler ile ilgili çalışmalar 1900 lü yılların başlarında başlamıştır. Bilinen en eski hiper topoloji olan Hausdorff topoloji Hausdorff tarafından, Vietoris tooloji ise

Vietoris tarafından tanımlanmıştır. Michael (1951) de alt ve üst Vietoris topolojiyi tanımlamıştır. Bunun yanısıra Küçük (1987) ile Akdağ (1991, 2003) hiper topolojiler üzerinde değişik çalışmalar yapmışlardır. Ayrıca Zorlutuna (2000) hiper topolojilerde ayırma aksiyomları üzerine çalışma yapmıştır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak esnek kümeler üzerine yapılan çalışmalar, esnek kümeler, esnek topolojik yapılar ve esnek fonksiyonların temel özelikleri verilmiştir. Daha sonra esnek topolojik uzaylar arasında küme değerli dönüşüm kavramı tanımlanarak bu dönüşümün temel özellikleri incelenmiştir. Daha sonra esnek kümeler aracılığıyla esnek küme aileleri üzerinde bazı hiper topolojiler tanımlanmış ve bu topolojilerin temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bazı esnek kümeler (sırasıyla esnek açık, esnek *alfa*-açık, esnek *yarı*-açık, esnek *ön*-açık, esnek *b*-açık ve esnek *beta*-açık) kullanılarak esnek küme değerli dönüşümlerin çeşitli süreklilik tipleri (sırasıyla esnek sürekli, esnek *alfa*-sürekli, esnek *yarı*-sürekli, esnek *ön*-sürekli, esnek *b*-sürekli ve esnek *beta*-sürekli) tanımlanmıştır. Daha sonra esnek küme değerli dönüşümlerin süreklilik tiplerinin bazı temel özellikleri verilmiş ve bu süreklilik tipleri arasındaki ilişkiler ele alınarak örnekler yardımı ile bu ilişkilerin şeması çıkarılmıştır. Bunlara ek olarak esnek küme değerli dönüşümlerin bazı kararsızlık tipleri (sırasıyla esnek *yarı*-kararsız, esnek *ön*-kararsız, esnek *b*-kararsız) tanımlanarak bu kararsızlık tiplerinin bazı temel özellikleri verilmiş ve arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak, esnek küme değerli dönüşümler ile ilgili bir tıbbi teşhis uygulama örneği ve esnek küme değerli bilgi sistemi örneği verilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlar tanıtılmış ve bunların temel özellikleri verilmiştir.

Bu tez boyunca X: başlangıç evreni ya da evrensel küme, E: parametreler kümesi, $P(X)$: X'in kuvvet kümesi olarak alınmıştır. Ayrıca, aksi ifade edilmediği müddetçe tezin tümünde X ve Y uzayları sırasıyla $(X, \tilde{\tau}, E)$ ve $(Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek topolojik uzayları yerine kullanılmışlardır.

Tanım 2.1. X evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $P(X)$ de X'in kuvvet kümesi olsun. $F: E \to P(X)$, $e \in E$ için $F(e) \subset X$ olmak üzere (F, E) ikilisine X üzerinde bir esnek küme denir.

Diğer bir deyişle, esnek küme, X evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. Her $e \in E$ için $F(e)$ değer kümesi, (F, E) esnek kümesinin e-elamanlarının ya da e-yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak göz önüne alınabilir. Bir (F, E) esnek kümesi aşağıdaki şekilde ikililer yardımıyla ifade edilir: $(F, E) = \{(e, F(e)): e \in E\}$ (Molodtsov, 1999).

Örnek 2.2. Bir (F, E) esnek kümesi, Bay X'in satın alacağı "arabaların çekiciliği" olarak tanımlansın. X gözönüne alınan bütün arabaların kümesi ve E bir parametre kümesi olsun. Her parametre bir kelime veya bir cümledir. $E =$ {pahalı, ucuz, gri renkli, beyaz renkli, otomatik vitesli, dizel, elektrikli}. Bu durumda, bir esnek kümeyi ifade etmek; pahalı arabalar, gri renkli arabalar, otomatik vitesli arabalar, dizel arabalar… gibi arabaların özelliklerini vurgulamak anlamına gelir.

Burada, $F(e)$ kümelerinin keyfi olabileceği yani; bazılarının boş olabileceği gibi bazılarının arakesitlerinin boş olmayacağına dikkat edilmelidir.

Örnek 2.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Burada, X bir küme ve τ bir topolojidir. Diğer bir ifadeyle τ, X'in açık küme olarak adlandırılan alt kümelerinin bir ailesidir. Bu taktirde $\tau(x) = \{V \in \tau: x \in V\}$ olarak gösterilen x noktasının $\tau(x)$ açık komşuluklarının ailesi (x'i ihtiva eden τ'daki açıkların kümesi), $(\tau(x), \tau)$ esnek kümesi olarak göz önüne alınabilir (Molodtsov, 1999).

Maji ve arkadaşları esnek küme tanımını aşağıdaki gibi genelleştirmişlerdir.

Tanım 2.4. $A \subset E$ ve $F: A \to P(X)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, A) çiftine X üzerinde bir esnek küme denir (Maji ve ark., 2003).

Majumdar ve Samanta'ya (2008) göre herhangi bir (F, A) esnek kümesi $e \in A$ iken $F(e) \neq \emptyset$ ve $e \in E \setminus A$ iken $F(e) = \emptyset$ olmak üzere bir (F, E) esnek kümesine genişletilebilir. Bundan sonra parametre kümesi E'nin bir alt kümesi olan X üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(X, E)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.5. X üzerinde (F, A) ve (G, B) iki esnek küme ve $A \subset B$ olsun. $\forall e \in A$ için $F(e) \subset G(e)$ ise (F, A), (G, B)'nin esnek alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ile gösterilir.

Eğer (G, B), (F, A)'nın esnek alt kümesi ise (F, A)'ya (G, B)'nin bir esnek üst (esnek süper) kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\supset} (G, B)$ ile gösterilir (Feng ve ark., 2008).

Tanım 2.6. Eğer (F, A), (G, B)'nin esnek alt kümesi ve (G, B) de (F, A)'nın esnek alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine X üzerinde eşit esnek kümeler denir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.7. Bir (F, A) esnek kümesinin $(F, A)^{\tilde{c}}$ ile gösterilen esnek tümleyeni $(F, A)^{\tilde{c}} = (F^c, A)$ ile tanımlanır. Burada $F^c: A \to P(X)$ dönüşümü her $e \in A$ için $F^c(e) = X \setminus F(e)$ ile verilen bir dönüşümdür (Ali ve ark., 2009).

Tanım 2.8. Her $e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise, (F, A) esnek kümesine X üzerinde boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.9. Her $e \in A$ için $F(e) = X$ ise, (F, A) esnek kümesine X üzerinde A-evrensel (mutlak) esnek küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Eğer $A = E$ ise, bu durumda A-evrensel esnek kümesine bir evrensel esnek küme denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Tanımlardan kolayca görülebir ki $\tilde{X}^c = \Phi$ ve $\Phi^c = \tilde{X}$ dır (Maji ve ark., 2003).

Maji ve arkadaşlarının (2003) yukarıdaki boş ve mutlak esnek kümeleri $A \subset E$ alt kümesine bağlı olduğundan tek değildir. Bu yüzden bu kümeler sırasıyla ϕ_A ve $\tilde{X}_A$ ile gösterilir. Eğer $A = E$ ise bunlar için sırasıyla Φ ve $\tilde{X}$ gösterimleri kullanılır ve bu kümeler sırasıyla tam boş ve tam mutlak kümeler olarak adlandırılır (Kharal ve Ahmad, 2011).

Bu tez boyunca tam boş ve tam mutlak esnek kümeler sırasıyla Φ ve $\tilde{X}$ ile gösterilmiştir.

Tanım 2.10. (F, A) ve (G, B), X üzerinde iki esnek küme ve $C = A \cup B$ olsun. Bu durumda her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , e \in A \setminus B \ ise \\ G(e) & , e \in B \setminus A \ ise \\ F(e) \cup G(e) & , e \in A \cap B \ ise \end{cases}$$

ile tanımlı (H, C) esnek kümesine (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi denir ve $(H, C) = (F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.11. (F, A) ve (G, B), X üzerinde iki esnek küme ve $C = A \cap B$ olsun. Bu durumda her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ ile tanımlı (H, C) esnek kümesine (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin kesişimi denir ve $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir (Feng ve ark., 2008).

Teorem 2.12. (F, A), (G, B), $(H, C) \tilde{\in} S(X, E)$ ve I bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in I$ için (F_i, A), $(G_i, B) \tilde{\in} S(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i. $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$ ve $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$

ii. $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (G, B) \tilde{\cap} (F, A)$ ve $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (G, B) \tilde{\cup} (F, A)$

iii.$(F, A) \tilde{\cap} \big((G, B) \tilde{\cap} (H, C)\big) = \big((F, A) \tilde{\cap} (G, B)\big) \tilde{\cap} (H, C)$

ve $(F, A) \tilde{\cup} \big((G, B) \tilde{\cup} (H, C)\big) = \big((F, A) \tilde{\cup} (G, B)\big) \tilde{\cup} (H, C)$

iv. $(F, A) = (F, A) \tilde{\cup} \big((F, A) \tilde{\cap} (G, B)\big)$ ve $(F, A) = (F, A) \tilde{\cap} \big((F, A) \tilde{\cup} (G, B)\big)$

v. $(F, A) \tilde{\cap} \big(\tilde{\cup}_{i \in I} (G_i, B)\big) = \tilde{\cup}_{i \in I} \big((F, A) \tilde{\cap} (G_i, B)\big)$

vi. $(F, A) \tilde{\cup} \big(\tilde{\cap}_{i \in I} (G_i, B)\big) = \tilde{\cup}_{i \in I} \big((F, A) \tilde{\cup} (G_i, B)\big)$

vii. $((F, A)^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = (F, A)$

viii. $\big(\tilde{\cup}_{i \in I} (F_i, A)\big)^{\tilde{c}} = \tilde{\cap}_{i \in I} (F_i, A)^{\tilde{c}}$

ix. $\left(\tilde{\cap}_{i\in I}\ (F_i, A)\right)^{\tilde{c}} = \tilde{\cup}_{i\in I}\ (F_i, A)^{\tilde{c}}$

x. $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ise, $(G, B)^{\tilde{c}} \tilde{\subseteq} (F, A)^{\tilde{c}}$

xi. $(F, A)\ \tilde{\cup}\ (F, A)^{\tilde{c}} = \tilde{A}$, $(F, A)\ \tilde{\cap}\ (F, A)^{\tilde{c}} = \Phi$ (Maji ve ark., 2003; Cagman ve Enginoglu, 2010).

Not: Esnek kümeyi (F, A) olarak aldığımızda mutlak esnek küme, mutlak boş esnek küme ve esnek tümleyen gibi kavramlar sıkıntılı olduğu için bundan sonra (F, A) esnek kümesi yerine (F, E) esnek kümesini kullanacağız.

Tanım 2.13. X üzerinde (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin esnek farkı (H, E) olsun. Bu durumda (H, E) esnek kümesi her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \backslash G(e)$ olarak tanımlanır ve $(F, E) \tilde{\backslash} (G, E)$ ile gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.14. (F, E), X üzerinde bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Her $e \in E$ için $x \in F(e)$ olduğunda x elemanına (F, E) esnek kümesine aittir denir ve $x \tilde{\in} (F, E)$ ile gösterilir.

Dikkat edelim ki eğer bir $e \in E$ için $x \notin F(e)$ ise $x \tilde{\notin} (F, E)$ dir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.15. $x \in X$ olsun. Her $e \in E$ için $x(e) = \{x\}$ ise, bu esnek küme (x, E) ile gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

Lemma 2.16. (F, E), X üzerinde bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. $x \tilde{\in} (F, E) \Leftrightarrow (x, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$

ii. $(x, E)\ \tilde{\cap}\ (F, E) = \Phi$ ise, $x \tilde{\notin} (F, E)$ dir (Min, 2011).

Tanım 2.17. Y, X'in boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\tilde{Y}$, her $e \in E$ için $Y(e) = Y$ ile X üzerinde (Y, E) esnek kümesini gösterir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.18. (F, E), X üzerinde bir esnek küme ve Y de X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda Y üzerinde alt esnek (F, E) kümesi $({}^{Y}F, E)$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için ${}^{Y}F(e) = \tilde{Y} \cap F(e)$ ile tanımlanır. Diğer bir deyişle $({}^{Y}F, E) = \tilde{Y}\ \tilde{\cap}\ (F, E)$ ile de ifade edilebilir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.19. $(F,E) \tilde{\in} S(X,E)$ olsun. Bir $e \in E$ için $F(e) \neq \emptyset$ ve her $e' \in E \backslash \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ ise (F,E) esnek kümesine esnek nokta denir ve e_F ile gösterilir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.20. Ortak X evreni üzerinde e_F ve (G,B) iki esnek küme olsun. Eğer $e \in B$ için $F(e) \subset G(e)$ ise, e_F esnek noktası (G,B) esnek kümesinin bir elemanıdır denir ve $e_F \tilde{\in} (G,B)$ ile gösterilir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Önerme 2.21. Ortak X evreni üzerinde e_F ve (G,B) iki esnek küme olsun. Bu durumda $e_F \tilde{\in} (G,B)$ ise $e_F \tilde{\notin} (G,B)^{\tilde{c}}$ dir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Uyarı 2.22. Yukarıdaki önermenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.23. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evreni üzerinde parametre kümesi $E = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere $e_F = (e_1, \{x_1, x_2\})$ esnek noktası ve $(G,B) = \{(e_1, \{x_1, x_3\}),\ (e_2, \{x_1, x_2\})\}$ esnek kümesi için $e_F \tilde{\notin} (G,B)$ ve $e_F \tilde{\notin} (G,B)^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{x_2\}),\ (e_2, \{x_3\})\}$ tür.

Tanım 2.24. $(F,A) \tilde{\in} S(X,E)$ olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = \{x_0\}$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası varsa ve her $e \in E \backslash A$ için $F(e) = \emptyset$ ise, (F,A) esnek kümesine esnek nokta denir ve $F_A^{x_0}$ ile gösterilir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

$F_E^{x_0}$ esnek noktasına mutlak esnek nokta denir. Ayrıca her $e \in A$ için $x_0 \in G(e)$ ise $F_A^{x_0}$, (G,B) esnek kümesine aittir denir ve bu durum $F_A^{x_0} \tilde{\in} (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.25. (F,E), X üzerinde bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) = \{x\}$ oluyorsa (F,E) kümesine esnek tek nokta küme denir ve x_E ile gösterilir. Tümleyeni de $x_E^{\tilde{c}}$ dir (Kandil ve Tantawy, 2014).

Tanım 2.26. (E,A), X üzerinde bir esnek küme olsun. Bir $\alpha \in A$ için $E(\alpha) = \{x\}$ olacak şekilde $x \in X$ varsa ve her $\beta(\neq \alpha)$ için $E(\beta) = \emptyset$ ise (E,A) kümesine esnek nokta denir ve E_α^x ile gösterilir. (Nazmul ve Samanta, 2013).

Örnek 2.27. $X = \{x_1, x_2\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda X üzerindeki bütün esnek noktalar aşağıdaki gibi olur:

$(e_1, \{x_1\}),\ (e_1, \{x_2\}),\ (e_2, \{x_1\}),\ (e_2, \{x_2\})$

Not. Esnek küme teorisi ile ilgili yapılan çalışmalarda temel kavramlardan biri olan esnek nokta kavramı yukarıda tanımları verildiği üzere dört şekilde tanımlanmıştır. Biz tezin orjinal kısmı boyunca (3. bölümden 6. bölümün sonuna kadar) Nazmul ve Samanta'nın tanımladığı esnek nokta tanımını (Tanım 2.26) kullanacağız..

Aşağıda esnek topolojik uzay, esnek açık (kapalı) küme, esnek komşuluk, esnek iç (kapanış) ve esnek taban (alt taban) ile ilgili özellikler verilmiştir.

Tanım 2.28. $\tilde{\tau}$, X üzerinde esnek kümelerin bir sınıfı ve E parametrelerin kümesi olsun. $\tilde{\tau}$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\tilde{\tau}$ ya X üzerinde bir esnek topoloji denir.

T1. $\Phi, \tilde{X} \tilde{\in} \tilde{\tau}$

T2. $\tilde{\tau}$ daki esnek kümelerin her hangi sayıda birleşimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.

T3. $\tilde{\tau}$ daki her hangi iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.

Bu durumda $(X, \tilde{\tau}, E)$ üçlüsüne X üzerinde esnek topolojik uzay denir. $\tilde{\tau}$'nun her elemanına X de esnek açık küme, X'deki bir esnek açık kümenin tümleyenine de esnek kapalı küme denir. X uzayındaki tüm esnek kapalı kümelerin ailesi $\tilde{\tau}'$ ile gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

Teorem 2.29. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $\tilde{\tau}'$, X'deki esnek kapalı kümelerin ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

F1. $\Phi, \tilde{X} \tilde{\in} \tilde{\tau}'$

F2. $\tilde{\tau}'$ nün elemanlarının her hangi sonlu birleşimi $\tilde{\tau}'$ dedir.

F3. $\tilde{\tau}'$ nin elemanlarının her hangi kesişimi $\tilde{\tau}'$ dedir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.30. $\tilde{\tau}$ ve $\tilde{\tau}^*$, X üzerinde iki esnek topoloji ve $\tilde{\tau} \subset \tilde{\tau}^*$ ise τ esnek topolojisi $\tilde{\tau}^*$ topolojisinden daha kabadır denir (Aygunoğlu ve Aygun, 2012).

Önerme 2.31. Aynı X evreni üzerinde $(X, \tilde{\tau}_1, E)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, E)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Bu durumda $(X, \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2, E)$, X üzerinde esnek topolojik uzaydır (Shabir ve Naz, 2011).

Uyarı 2.32. Herhangi bir X evreni üzerindeki iki esnek topolojinin birleşimi X üzerinde esnek topoloji olmayabilir (Shabir ve Naz, 2011).

Örnek 2.33. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evreni üzerinde parametre kümesi $E = \{e\}$ olmak üzere $\tau_1 = \left\{\Phi, \tilde{X}, \{(e, \{x_1\})\}\right\}$ ve $\tau_2 = \left\{\Phi, \tilde{X}, \{(e, \{x_2\})\}\right\}$ esnek topolojileri için $\tau_1 \cup \tau_2 = \left\{\Phi, \tilde{X}, \{(e, \{x_1\})\}, \{(e, \{x_2\})\}\right\}$ bir esnek topoloji değildir.

Önerme 2.34. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda her $e \in E$ için $\tau_{\boldsymbol{e}} = \{F(e) : (F, E) \in \tilde{\tau}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir (Shabir ve Naz, 2011).

Ayrıca bu son önerme gösterir ki, her $e \in E$ parametresi için X üzerinde bir τ_e topolojisi vardır. Böylece X üzerindeki bir esnek topoloji, X üzerindeki topolojilerin parametrelendirilmiş bir ailesini verir.

Önerme 2.35. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve Y de X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $e \in E$ için (Y, τ_{eY}), (X, τ_e)'nın bir alt uzayıdır. Burada $\tau_{eY} = \{Y \ \cap \ F\,(e), | \ F\,(e) \in \tau_{\boldsymbol{e}}\}$ dır. (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.36. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve Y de X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\tilde{\tau}_Y = \{(\,^{Y}F, E) | (F, E) \in \tilde{\tau}\}$ ailesine Y üzerine esnek indirgenmiş topoloji denir.

$(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$ uzayına $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı denir (Shabir ve Naz, 2011).

Önerme 2.37. $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$, $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı ve (F, E), Y de bir esnek açık küme olsun. Eğer $\tilde{Y} \in \tau$ ise, $(F, E) \in \tau$ dur (Shabir ve Naz, 2011).

Teorem 2.38. $(Y, \tilde{\tau}_Y, E)$, $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı olsun. Eğer (F, E) kümesi Y de esnek kapalı ve $Y \in \tilde{\tau}'$ ise $(F, E) \in \tilde{\tau}'$ dur (Zorlutuna ve Çakır, 2015).

Teorem 2.39. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay, $Y \subset X$ ve (F, E) de X üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. (F, E), Y'de esnek açıktır $\Leftrightarrow$ $(F, E) = \tilde{Y} \,\tilde{\cap}\, (G, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \,\tilde{\in}\, \tilde{\tau}$ vardır.

ii. (F, E), Y'de esnek kapalıdır $\Leftrightarrow$ $(F, E) = \tilde{Y} \,\tilde{\cap}\, (G, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \,\tilde{\in}\, \tilde{\tau}'$ vardır (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.40. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay, $e_F \tilde{\in} S(X, E)$ bir esnek nokta ve (G, E) de X de bir esnek küme olsun. Eğer $e_F \tilde{\in} (H, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olacak biçimde bir (H, E) esnek açık kümesi varsa, (G, E) esnek kümesine e_F esnek noktasının bir esnek komşuluğu denir.

e_F esnek noktasının $\tilde{\tau}$ esnek topolojisine göre bütün esnek komşuluklarından oluşan aile $N_\tau(e_F)$ ile gösterilir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Teorem 2.41. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $e_F \tilde{\in} S(X, E)$ olsun. Bu durumda $N_\tau(e_F)$ komşuluklar ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $(G, E) \tilde{\in} N_\tau(e_F)$ ise $e_F \tilde{\in} (G, E)$

ii. $(G, E) \tilde{\in} N_\tau(e_F)$ ve $(G, E) \tilde{\subset} (M, E)$ ise $(M, E) \tilde{\in} N_\tau(e_F)$

iii. $(G, E), (M, E) \tilde{\in} N_\tau(e_F)$ ise $(G, E) \tilde{\cap} (M, E) \tilde{\in} N_\tau(e_F)$

iv. $(G, E) \tilde{\in} N_\tau(e_F)$ ise öyle bir $(M, E) \tilde{\in} N_\tau(e_F)$ vardır öyle ki her $e_H \tilde{\in} (M, E)$ için $(G, E) \tilde{\in} N_\tau(e_H)$ dır (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.42. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve (F, E) ile (G, E) de X üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer $(F, E) \tilde{\subset} (H, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olacak şekilde bir $(H, E) \in \tilde{\tau}$ varsa, (G, E) esnek kümesine bu uzayda (F, E)'nin bir esnek komşuluğu denir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Teorem 2.43. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında bir (G, E) esnek kümesi esnek açıktır ancak ve ancak (G, E) tarafından kapsanan her (F, E) esnek kümesi için (G, E), (F, E)'nın bir esnek komşuluğudur (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.44. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay, $x \in X$ ve (G, E) bir esnek küme olsun. $x \tilde{\in} (F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olacak şekilde bir (F, E) esnek açık kümesi varsa, x elamanına (G, E)'nin esnek iç noktası denir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.45. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay, $x \in X$ ve (G, E) bir esnek küme olsun. $x \tilde{\in} (F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olacak şekilde bir (F, E) esnek açık kümesi varsa, (G, E) ye x elamanının esnek komşuluğudur denir (Shabir ve Naz, 2011).

Önerme 2.46. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i. Her $x \in X$ elemanı bir esnek komşuluğa sahiptir.

ii. $x \in X$ elamanının esnek komşulukları (F, E) ve (G, E) ise $(F, E) \tilde{\cap} (G, E)$ de x'in bir esnek komşuluğudur.

iii. $x \in X$ elamanının esnek komşuluğu (F, E) ve $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ ise (G, E) de x in bir esnek komşuluğudur (Shabir ve Naz, 2011).

Önerme 2.47. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda X üzerindeki herhangi bir (F, E) esnek açık kümesi için (F, E), $\tilde{\cap}_{e \in E} F(e)$'nın her noktasının esnek komşuluğudur (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.48. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve (F, E) de bu uzayda bir esnek küme olsun.

i.(F, E) esnek kümesinin esnek kapanışı

$cl(F, E) = \tilde{\cap} \{(G, E) : (G, E)$ esnek kapalı ve $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)\}$ (Shabir ve Naz, 2011).

ii.(F, E) esnek kümesinin esnek içi

$int(F, E) = \tilde{\cup} \{(O, E) : (O, E)$ esnek açık ve $(O, E) \tilde{\subseteq} (F, E)\}$ biçiminde tanımlanır (Zorlutuna ve ark., 2012).

Esnek kapalı kümelerin Teorem 2.29 (F2) özelliğinden, $cl(F, E)$ esnek kapalıdır ve (F, E)'yi kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir. Yani $cl(F, E)$, (F, E)'yi kapsayan tüm esnek kapalı kümeler tarafından kapsanır. Benzer şekilde esnek açık kümelerin Tanım 2.28 (T3) den $int(F, E)$ esnek açıktır ve (F, E) tarafından kapsanan en büyük esnek açık kümedir (Shabir ve Naz, 2011).

Teorem 2.49. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve (F, E), (G, E) de X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. $int(\Phi) = \Phi$ ve $int(\tilde{X}) = \tilde{X}$

ii. $int(F, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$

iii. $int(int(F, E)) = int(F, E)$

iv. (F, E) esnek açık kümedir $\Leftrightarrow int(F, E) = (F, E)$

v. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $int(F,E) \tilde{\subseteq} int(G,E)$

vi. $int\big((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\big) = int(F,E) \tilde{\cap} int(G,E)$

vii. $int\big((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\big) \tilde{\supseteq} int(F,E) \tilde{\cup} int(G,E)$ (Hussain ve Ahmad, 2011).

Teorem 2.50. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve (F,E), (G,E) de X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. $cl(\Phi) = \Phi$ ve $cl(\tilde{X}) = \tilde{X}$

ii. $(F,E) \tilde{\subseteq} cl(F,E)$

iii. $cl\big(cl(F,E)\big) = cl(F,E)$

iv. (F,E) esnek kapalı kümedir $\Leftrightarrow cl(F,E) = (F,E)$

v. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $cl(F,E) \tilde{\subseteq} cl(G,E)$

vi. $cl\big((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\big) \tilde{\subseteq} cl(F,E) \tilde{\cap} cl(G,E)$

vii. $cl\big((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\big) = cl(F,E) \tilde{\cup} cl(G,E)$ (Shabir ve Naz, 2011).

Teorem 2.51. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve (F,E) de X üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. $int\big((F,E)^{\tilde{c}}\big) = (cl(F,E))^{\tilde{c}}$

ii. $cl\big((F,E)^{\tilde{c}}\big) = (int(F,E))^{\tilde{c}}$

iii. $int(F,E) = \Big(cl\big((F,E)^{\tilde{c}}\big)\Big)^{\tilde{c}}$ (Hussain ve Ahmad, 2011).

Tanım 2.52. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve β da τ nun bir alt ailesi olsun. τ daki her bir esnek küme, β daki bazı esnek kümelerin birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa β ya τ nun açık bir esnek tabanı denir (Nazmul and Samanta, 2012).

Örnek 2.53. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ kümeleri verilsin. Bu durumda
$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_4\}), (e_2, \{x_3\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_4\})\}$,

$(F_4, E) = \{(e_1, \{x_1, x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$,
$(F_5, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_4\})\}$,
$(F_6, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3, x_4\}),\ (e_2, \{x_1, x_3, x_4\})\}$,
$(F_7, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4\})\}\}$
esnek kümeleri için $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E), (F_7, E)\}$

esnek ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir. Ayrıca $\beta = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ esnek ailesi de bu esnek topoloji için bir esnek açık tabandır (Nazmul and Samanta, 2012).

Önerme 2.54. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve β da τ nun bir açık alt ailesi olsun. Bu durumda β, τ nun bir esnek açık tabanıdır eğer $\forall (F, E) \in \tau$ ve $\forall E_e{}^x \tilde{\in} (F, E)$ için $\exists (G, E) \in \beta$ vardır öyle ki $E_e{}^x \tilde{\in} (G, E) \tilde{\subset} (F, E)$ dir (Nazmul and Samanta, 2012).

Önerme 2.55. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve β da τ nun bir alt ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan β ya τ nun bir esnek açık tabanı denir.

(i) $\Phi \in \beta$

(ii) $\tilde{X}$, β daki esnek kümelerin birleşimidir.

(iii) Eğer $(F, E), (G, E) \in \beta$ ise $(F, E) \tilde{\cap} (G, E)$ esnek kümesi β daki bazı esnek kümelerin birleşimidir yani $(F, E), (G, E) \in \beta$ ve $E_e{}^x \tilde{\in} (F, E) \tilde{\cap} (G, E)$ ise $\exists (H, E) \in \beta$ vardır öyle ki $E_e{}^x \tilde{\in} (H, E) \tilde{\subset} (F, E) \tilde{\cap} (G, E)$ dir (Nazmul and Samanta, 2012).

Tanım 2.56. (F, A) nın esnek alt kümelerin bir sınıfı olan (F, A) üzerindeki $\tilde{\tau}$ ya aşağıdaki özellikleri sağlarsa (F, A) üzerinde bir esnek topoloji denir.

T1. $\Phi, (F, A) \in \tilde{\tau}$

T2. $(G, B), (H, C) \in \tilde{\tau}$ ise $(G, B) \tilde{\cap} (H, C) \in \tilde{\tau}$

T3. I bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $(F_i, A) \in \tilde{\tau}$ ise $\bigcup_{i \in I} (F_i, A) \in \tilde{\tau}$ dur. (Roy and Samanta, 2014).

Tanım 2.57. Aşağıdaki şartları sağlayan (F, A) nın bazı alt kümelerinin koleksiyonu olan β ailesine (F, A) üzerindeki bir topoloji için esnek açık taban (veya kısaca esnek taban)dır denir.

(i) $\Phi \in \beta$

(ii) $\cup \beta = (F,A)$ yani her bir $e \in A$ ve $x \in (F,A)(e)$ için $B \subseteq A$ olmak üzere $(G,B) \in \beta$ vardır öyle ki $x \in (G,B)(e)$ dir. Burada $x \in (F,A)(e)$ ifadesi $(e,\{x\}) \tilde{\in} (F,A)$ yani $(e,\{x\})$ esnek noktası (F,A) esnek kümesine aittir anlamında kullanılmıştır.

(iii) Eğer $(G,B),(H,C) \in \beta$ ise her bir $e \in B \cap C$ ve $x \in ((G,B) \tilde{\cap} (H,C))(e) = (G,B)(e) \cap (H,C)(e)$ için $D \subseteq B \cap C$ olmak üzere $(I,D) \in \beta$ vardır öyle ki $(I,D) \tilde{\subseteq} (G,B) \tilde{\cap} (H,C)$ ve $x \in (I,D)(e)$ dır. (Roy and Samanta, 2014).

Örnek 2.58. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$, $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ ve
$A = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ kümeleri olmak üzere
$(F,A) = \{(e_1,\{x_1,x_5,x_8\}),(e_2,\{x_2,x_6,x_9\}),(e_3,\{x_3,x_7,x_9\}),(e_4,\{x_4,x_7,x_{10}\})\}$
esnek kümesi verilsin. Bu durumda (F,A) nın alt kümelerinden oluşan
$(F_1,A) = \{(e_2,\{x_2\})\}$,
$(F_2,A) = \{(e_4,\{x_4\})\}$,
$(F_3,A) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_3,\{x_3\})\}$,
$(F_4,A) = \{(e_2,\{x_2\}),(e_4,\{x_4\})\}$,
$(F_5,A) = \{(e_2,\{x_2,x_9\}),(e_4,\{x_4,x_7\})\}$,
$(F_6,A) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2\}),(e_3,\{x_3\})\}$,
$(F_7,A) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_3,\{x_3\}),(e_4,\{x_4\})\}$,
$(F_8,A) = \{(e_1,\{x_1,x_5\}),(e_2,\{x_2,x_6\}),(e_3,\{x_3,x_7\})\}$,
$(F_9,A) = \{(e_1,\{x_1,x_8\}),(e_3,\{x_3,x_9\}),(e_4,\{x_4,x_{10}\})\}$,
$(F_{10},A) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2\}),(e_3,\{x_3\}),(e_4,\{x_4\})\}$,
$(F_{11},A) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2,x_9\}),(e_3,\{x_3\}),(e_4,\{x_4,x_7\})\}$,
$(F_{12},A) = \{(e_1,\{x_1,x_8\}),(e_2,\{x_2\}),(e_3,\{x_3,x_9\}),(e_4,\{x_4,x_{10}\})\}$,
$(F_{13},A) = \{(e_1,\{x_1,x_5\}),(e_2,\{x_2,x_6\}),(e_3,\{x_3,x_7\}),(e_4,\{x_4\})\}$,
$(F_{14},A) = \{(e_1,\{x_1,x_8\}),(e_2,\{x_2,x_9\}),(e_3,\{x_3,x_9\}),(e_4,\{x_4,x_7,x_{10}\})\}$,
$(F_{15},A) = \{(e_1,\{x_1,x_5\}),(e_2,\{x_2,x_6,x_9\}),(e_3,\{x_3,x_7\}),(e_4,\{x_4,x_7\})\}$,
$(F_{16},A) = \{(e_1,\{x_1,x_5,x_8\}),(e_2,\{x_2,x_6\}),(e_3,\{x_3,x_7,x_9\}),(e_4,\{x_4,x_{10}\})\}$
esnek kümeleri için $\tau = \{\Phi, (F,A), (F_1,A), (F_2,A), (F_3,A), (F_4,A), (F_5,A), (F_6,A), (F_7,A), (F_8,A), (F_9,A), (F_{10},A), (F_{11},A), (F_{12},A), (F_{13},A), (F_{14},A), (F_{15},A), (F_{16},A)\}$
esnek ailesi (F,A) kümesi üzerinde bir esnek topolojidir.

Ayrıca $\beta = \{\Phi, (F_1, A), (F_2, A), (F_3, A), (F_5, A), (F_8, A), (F_9, A)\}$ esnek ailesi de (F, A) üzerindeki bu τ esnek topolojisi için bir esnek tabandır (Roy and Samanta, 2014).

Teorem 2.59. β, (F, A) üzerindeki bir esnek topoloji için bir esnek taban olsun. Kabul edelim ki τ_β, (F, A) nın (G, B) alt kümelerinden oluşsun öyle ki her bir $e \in B$ ve $x \in (G, B)(e)$ için $C \subseteq B$ olmak üzere $(H, C) \in \beta$ vardır öyle ki $(H, C) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ve $x \in (H, C)(e)$ dir. Bu durumda τ_β, (F, A) üzerinde bir esnek topolojidir (Roy and Samanta, 2014).

Tanım 2.60. β, (F, A) üzerindeki bir esnek topoloji için bir esnek taban olsun. Bu durumda yukarıdaki teoremde bahsedilen τ_β ye β tarafından üretilen esnek topoloji denir ve β ya τ_β için bir esnek tabandır denir (Roy and Samanta, 2014).

Örnek 2.61. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere

$(F, A) = \{(e_1, X), (e_2, X), (e_3, X)\}$ esnek kümesi verilsin.

$(F_1, A) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$,

$(F_2, A) = \{(e_1, \{x_3, x_4\}), (e_2, \{x_1\})\}$,

$(F_3, A) = \{(e_2, \{x_4\}), (e_3, X)\}\}$

(F, A) nın esnek alt kümeleri olmak üzere

$\beta = \{\Phi, (F_1, A), (F_2, A), (F_3, A)\}$ esnek ailesi (F, A) üzerindeki bazı esnek topolojiler için bir tabandır. Ayrıca

$(F_1, A) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$,

$(F_2, A) = \{(e_1, \{x_3, x_4\}), (e_2, \{x_1\})\}$,

$(F_3, A) = \{(e_2, \{x_4\}), (e_3, X)\}$,

$(F_4, A) = \{(e_1, X),\ (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,

$(F_5, A) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\}), (e_3, X)\}$,

$(F_6, A) = \{(e_1, \{x_3, x_4\}),\ (e_2, \{x_1, x_4\}),\ (e_3, X)\}$

olmak üzere

$\tau_\beta = \{\Phi, (F, A), (F_1, A), (F_2, A), (F_3, A), (F_4, A), (F_5, A), (F_6, A)\}$

esnek ailesi β tarafından üretilen esnek topolojidir.

Teorem 2.62. β, (F, A) üzerindeki bir esnek topoloji için bir esnek taban olsun. Bu durumda $(G, B) \in \tau_\beta$ dır ancak ve ancak $(G, B) = \bigcup(G_i, B_i)$ dir. Burada her bir $i \in \Lambda$ için $(G_i, B_i) \in \beta$ dir ve Λ bir indeks kümedir (Roy and Samanta, 2014).

Teorem 2.63. $((F, A), \tau)$ bir esnek topolojik uzay ve β da τ nun bir esnek alt ailesi olsun öyle ki τ nun her bir elemanı β nın bazı elemenlarının birleşimi olsun. Bu durumda β, (F, A) üzerindeki τ esnek topolojisi için bir esnek tabandır (Roy and Samanta, 2014).

Tanım 2.64. τ bir esnek topolojik uzay ve τ daki elemanların bir koleksiyonu Ω olsun. Bu durumda Ω nun elemanlarının bütün sonlu kesişimleri τ için bir taban oluyorsa Ω ya τ esnek topolojisi için bir esnek alt tabandır denir (Roy and Samanta, 2014).

Örnek 2.65. Örnek 2.58 de verilen esnek topolojiyi göz önüne alalım. Bu durumda $(F_5, A) = \{(e_2, \{x_2, x_9\}),\ (e_4, \{x_4, x_7\})\}$, $(F_8, A) = \{(e_1, \{x_1, x_5\}), (e_2, \{x_2, x_6\}), (e_3, \{x_3, x_7\})\}$, $(F_9, A) = \{(e_1, \{x_1, x_8\}),\ (e_3, \{x_3, x_9\}),\ (e_4, \{x_4, x_{10}\})\}$ esnek kümeleri için $\Omega = \{(F_5, A), (F_8, A), (F_9, A)\}$ esnek ailesi de (F, A) üzerindeki bu τ esnek topolojisi için bir esnek alttabandır (Roy and Samanta, 2014).

Teorem 2.66. (F, A) nın esnek alt kümelerinin bir koleksiyonu olan Ω ya aşağıdaki iki şartı sağlaması durumunda, (F, A) üzerindeki bir τ esnek topolojisi için bir alt tabandır denir.

i. $\Phi \in \Omega$ dir ya da Φ, Ω nin sonlu sayıdaki elemanlarının kesişimidir
ii. $(F, A) = \bigcup \Omega$ dır (Roy and Samanta, 2014).

Aşağıda esnek fonksiyon ve esnek süreklilik ile ilgili temel özellikler verilmiştir.

Tanım 2.67. $S(X, E)$ ve $S(Y, K)$ esnek küme aileleri ile $u: X \to Y$, $p: E \to K$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda bir $f: S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $(F,E) \in S(X,E)$ olsun. Bu durumda (F,E) nın f altındaki görüntüsü $f(F,E) = (f(F),p(E))$, $S(Y,K)$ da bir esnek kümedir. Burada $f(F,E)$, her $k \in B \subset K$ için

$$f(F,E)(k) = \begin{cases} \bigcup_{e \in p^{-1}(k) \cap E} u\big(F(e)\big) & ,p^{-1}(k) \cap E \neq \emptyset \\ \emptyset & ,p^{-1}(k) \cap E = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlanır.

ii. $(G,K) \in S(Y,K)$ olsun. Bu durumda (G,K) nin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}((G,K)) = (f^{-1}(G),p^{-1}(K))$, $S(X,E)$ de bir esnek kümedir. Burada $f^{-1}(G,K)$, her $e \in E$ için

$$f^{-1}(G,K)(e) = \begin{cases} u^{-1}\Big(G\big(p(e)\big)\Big) & ,p(e) \in K \\ \emptyset & ,p(e) \notin K \end{cases}$$

ile tanımlanır (Kharal ve Ahmad, 2011).

Örnek 2.68. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ ile $Y = \{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ evrensel kümeler, $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ile $K = \{k_1,k_2,k_3,k_4\}$ kümeleri de sırasıyla X ve Y evrensel kümelerinin nesnelerinin özelliklerini temsil eden parametre kümeleri olmak üzere $S(X,E)$ ile $S(Y,K)$ esnek aileleri verilsin. $u: X \to Y$ ve $p: E \to K$ dönüşümlerini de

$$u(x_1) = y_1,\ u(x_2) = y_3,\ u(x_3) = y_3,\ u(x_4) = y_4,\ u(x_5) = y_2$$

$$p(e_1) = k_2,\ p(e_2) = k_1,\ p(e_3) = k_3,\ p(e_4) = k_1$$

biçiminde tanımlayalım.

Bu durumda $(F,E) = \{(e_1,\{x_1,x_4\}),(e_2,\{x_1,x_3,x_5\}),(e_3,\{x_2\}),(e_4,\emptyset)\} \in S(X,E)$ ile tanımlanan esnek kümesinin f esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü

$f(F,E) = \{(k_1,\{y_3\}),(k_2,\{y_1,y_4\}),(k_3,\{y_1,y_2,y_3\}),(k_4,\emptyset)\}$ şeklindedir.

Diğer taraftan $(G,K) = \{(k_1,\{y_2\}),(k_2,\{y_1,y_3\}),(k_3,\emptyset),(k_4,\{y_2,y_4,y_5\})\} \in S(Y,K)$ ile tanımlanan esnek kümenin f esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü de $f^{-1}(G,K) = \{(e_1,\{x_1,x_2,x_3\}),(e_2,\emptyset),(e_3,x_5),(e_4,x_5)\}$ şeklindedir.

Tanım 2.69. Eğer $u: X \to Y$ ve $p: E \to K$ fonksiyonları bire-bir ise f esnek dönüşümüne bire-birdir, $u: X \to Y$ ve $p: E \to K$ fonksiyonları örten ise f esnek dönüşümüne örtendir denir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.70. $f: S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek dönüşüm ve (F,E), $(G,E) \in S(X,E)$ olsun. Bu durumda (F,E) ve (G,E) nin esnek görüntülerinin birleşimi ve kesişimi sırasıyla $k \in K$ için,

$$(f(F,E) \tilde{\cup} f(G,E))(k) = f(F,E)(k) \cup f(G,E)(k)$$

$$(f(F,E) \tilde{\cap} f(G,E))(k) = f(F,E)(k) \cap f(G,E)(k)$$

biçiminde tanımlanır (Kharal ve Ahmad, 2011).

Tanım 2.71. $f: S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek dönüşüm ve (H,K), $(M,K) \in S(Y,K)$ olsun. Bu durumda (H,K) ve (M,K) nin esnek ters görüntülerinin birleşimi ve kesişimi sırasıyla $e \in E$ için,

$$(f^{-1}(H,K) \tilde{\cup} f^{-1}(M,K))(e) = f^{-1}(H,K)(e) \cup f^{-1}(M,K))(e)$$

$$(f^{-1}(H,K) \tilde{\cap} f^{-1}(M,K))(e) = f^{-1}(H,K)(e) \cap f^{-1}(M,K))(e)$$

biçiminde tanımlanır (Kharal ve Ahmad, 2011).

Teorem 2.72. $u: X \to Y$ ve $p: E \to K$ fonksiyonlar olmak üzere $f: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek dönüşümü verilsin. Bu durumda (F,E),$(G,E) \in S(X,E)$ esnek kümeleri ve $\{(F_i, E_i): i \in I\} \tilde{\subseteq} S(X,E)$ esnek küme ailesi için aşağıdakiler doğrudur.

i. $f(\Phi) = \Phi$,

ii. $f(\tilde{X}) \tilde{\subseteq} \tilde{Y}$,

iii. $f\big((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\big) = f(F,E) \tilde{\cup} f(G,E)$ ve genel olarak

$f(\tilde{\cup}_i (F_i, E_i)) = \tilde{\cup}_i f(F_i, E_i)$ dir.

iv. $f\big((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\big) \tilde{\subseteq} f(F,E) \tilde{\cap} f(G,E)$ ve genel olarak

$f(\tilde{\cap}_i f(F_i, E_i)) \tilde{\subseteq} \tilde{\cap}_i f(F_i, E_i)$ dir.

v. Eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $f(F,E) \tilde{\subseteq} f(G,E)$ dir. (Kharal ve Ahmad, 2011).

Teorem 2.73. $u: X \to Y$ ve $p: E \to K$ fonksiyonlar olmak üzere $f: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek dönüşümü verilsin. Keyfi $(F,K), (G,K) \in S(Y,K)$ esnek kümeleri ve $\{(F_i, K_i): i \in I\} \tilde{\subseteq} S(Y,K)$ esnek küme ailesi için aşağıdakiler doğrudur.

i. $f^{-1}(\Phi) = \Phi$

ii. $f^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$

iii. $f^{-1}\big((F,K) \tilde{\cup} (G,K)\big) = f^{-1}(F,K) \tilde{\cup} f^{-1}(G,K)$ ve genel olarak

$f^{-1}\big(\tilde{\cup}_i f(F_i,K_i)\big) = \tilde{\cup}_i f^{-1}(F_i,K_i)$ dir.

iv. $f^{-1}((F,K) \tilde{\cap} (G,K)) = f^{-1}(F,K) \tilde{\cap} f^{-1}(G,K)$ ve genel olarak

$f^{-1}(\tilde{\cap}_i f(F_i,K_i)) = \tilde{\cap}_i f^{-1}(F_i,K_i)$ dir.

v. Eğer $(F,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ ise, bu durumda $f^{-1}(F,K) \tilde{\subseteq} f^{-1}(G,K)$ dir. (Kharal ve Ahmad, 2011).

Teorem 2.74. $u: X \to Y$ ve $p: E \to K$ fonksiyonlar olmak üzere $f: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek dönüşümü verilsin. Keyfi $(F,E) \in S(X,E)$ ve $(G,K) \in S(Y,K)$ esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.

i. $f^{-1}\big((G,K)^{\tilde{c}}\big) = \big(f^{-1}(G,K)\big)^{\tilde{c}}$

ii. $f\big((F,E)^{\tilde{c}}\big) \supseteq \big(f(F,E)\big)^{\tilde{c}}$

iii. $(F,E) \subseteq f^{-1}(f(F,E))$ dir.

Eğer f bire-bir ise, $(F,E) = f^{-1}(f(F,E))$ dir.

iv. $f(f^{-1}((G,K))) \subseteq (G,K)$ dir.

Eğer f örten ise, $f(f^{-1}((G,K))) = (G,K)$ dir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.75. (X,τ,E), (Y,υ,K) esnek topolojik uzaylar, $f: (X,\tau,E) \to (Y,\upsilon,K)$ esnek bir dönüşüm ve $e_F \in S(X,E)$ olsun.

i. Her $(G,K) \in N_\upsilon(f(e_F))$ için $f(M,E) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olacak biçimde en az bir $(M,E) \in N_\tau(e_F)$ var ise bu f dönüşümüne e_F esnek noktasında esnek süreklidir denir.

ii. Her $e_F \in S(X,E)$ esnek noktasında f dönüşümü sürekli ise f dönüşümüne, X üzerinde esnek süreklidir veya kısaca esnek süreklidir denir (Zorlutuna ve ark., 2012)

Tanım 2.76. (X, τ, E), (Y, υ, K) esnek topolojik uzaylar, $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \upsilon, K)$ bir esnek dönüşüm olsun. τ' ve υ' da sırasıyla τ ve υ topolojik uzaylarının kapalı alt kümeler ailesini göstersin.

i. Her bir $(F, E) \in \tau$ için $f(F, E) \in \upsilon$ ise, f ye esnek açık dönüşüm denir.

ii. Herbir $(F, E) \in \tau'$ için $f(F, E) \in \upsilon'$ ise, f ya esnek kapalı dönüşüm denir (Zorlutuna ve Çakır., 2015).

Aşağıda esnek örtü, esnek kompakt, esnek Lindelöf, esnek Lindelöf kapalı, esnek Hausdorff topolojik uzay tanımları verilmiştir.

Tanım 2.77. Esnek kümelerin bir Ψ ailesi, $(F, A) \tilde{\subseteq} \bigcup\{(F_i, A): (F_i, A) \in \Psi \ ve \ i \in I\}$ şartını sağlıyor ise (F, A) nın bir örtüsü olarak isimlendirilir. (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.78. $\tilde{X}$ in her bir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ, E) esnek topolojik uzayına esnek kompakt uzay denir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.79. $\tilde{X}$ in her bir açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa (X, τ, E) esnek topolojik uzayına esnek Lindelöf uzay denir (Weijian Rong, 2012).

Tanım 2.80. (X, τ, E) esnek topolojik uzayında her esnek Lindelöf küme esnek kapalı ise bu uzaya esnek Lindelöf kapalı uzay denir.

Önerme 2.81. (X, τ, E) esnek kompakt topolojik uzayında her esnek kapalı küme, esnek kompakttır (Varol ve ark., 2012).

Tanım 2.82. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. $x \in F, E)$, $y \in (G, E)$ olacak şekilde $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \phi$ şartını sağlayan (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri varsa (X, τ, E) uzayına esnek Hausdorff topolojik uzay denir (Shabir ve Naz, 2011).

3. ESNEK KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, esnek küme değerli dönüşüm kavramı tanımlanmış ve bu dönüşümlerin görüntü, alt (üst) ters görüntü gibi bazı temel özellikleri örneklerle beraber incelenmiştir.

Tanım 3.1. $S(X,E)$ ve $S(Y,K)$ esnek küme aileleri ile $p: E \to K$ dönüşümü ile $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü verilsin. Bu durumda bir $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır;

i. $(G,E) \tilde{\in} S(X,E)$ olsun. Bu durumda (G,E)'nin F altındaki görüntüsü $F(G,E) = (F(G), p(E))$, $S(Y,K)$ da bir esnek kümedir. Burada $F(G)$; her $k \in K$ için

$$F(G,E)(k) = \begin{cases} \bigcup_{e \in p^{-1}(k) \cap E} u\big(G(e)\big) & , p^{-1}(k) \cap E \neq \emptyset \\ \emptyset & , p^{-1}(k) \cap E = \emptyset \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $F(G,E) = \tilde{\bigcup} \{F({E_e}^x): {E_e}^x \tilde{\in} (G,E)\}$ dir.

ii.$(H,K) \tilde{\in} S(Y,K)$ olsun. Bu durumda (H,K) esnek kümesinin F altındaki üst ve alt ters görüntüleri $S(X,E)$ de birer esnek küme olup sırasıyla $F^+(H,K)$ ve $F^-(H,K)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F^+(H,K) = \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: F({E_e}^x) \tilde{\subset} (H,K)\}$$

$$F^-(H,K) = \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: F({E_e}^x) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi\}$$

Ayrıca ${K_k}^y \tilde{\in} \tilde{Y}$ esnek noktasının F altındaki üst ve alt ters görüntüsü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$F^-({K_k}^y) = \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: {K_k}^y \tilde{\in} F({E_e}^x)\}$$

$$F^+({K_k}^y) = \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: {K_k}^y = F({E_e}^x)\}$$

Örnek 3.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel kümeler, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ parametre kümeleri olsun. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $u(x_3) = \{y_2, y_3\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$, $p(e_3) = k_1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek küme değerli dönüşümdür.

i) (X,E) deki tüm esnek noktaların F altındaki görüntüsü aşağıdaki gibi bulunur; $F\big((e_1,\{x_1\})\big) = \{(k_1,\{y_1\})\}$

$F\big((e_1,\{x_2\})\big) = \{(k_1,\{y_2\})\}$

$F\big((e_1,\{x_3\})\big) = \{(k_1,\{y_2,y_3\})\}$

$F\big((e_2,\{x_1\})\big) = \{(k_2,\{y_1\})\}$

$F\big((e_2,\{x_2\})\big) = \{(k_2,\{y_2\})\}$

$F\big((e_2,\{x_3\})\big) = \{(k_2,\{y_2,y_3\})\}$

$F\big((e_3,\{x_1\})\big) = \{(k_1,\{y_1\})\}$

$F\big((e_3,\{x_2\})\big) = \{(k_1,\{y_2\})\}$

$F\big((e_3,\{x_3\})\big) = \{(k_1,\{y_2,y_3\})\}$

ii) (X,E) deki $(G,E) = \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_2\}),(e_3,\{x_1,x_3\})\}$ esnek kümesinin F dönüşümü altındaki görüntüsü $F(G,E) = \{(k_1,Y),(k_2,\{y_2\})\}$ olarak bulunur, çünkü $F(G,E)(k_1) = u\big(G(e_1)\big) \cup u\big(G(e_3)\big) = u(x_2) \cup u(x_1,x_3) = \{y_1\} \cup Y = Y$, $F(G,E)(k_2) = u\big(G(e_2)\big) = u(x_2) = \{y_2\}$ dir.

iii) (Y,K) daki esnek noktaların F altındaki üst ve alt ters görüntüleri şöyle bulunur;

$F^+\big((k_1,\{y_1\})\big) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_3,\{x_1\})\}$

$F^+\big((k_1,\{y_2\})\big) = \{(e_1,\{x_2\}),(e_3,\{x_2\})\}$

$F^+\big((k_1,\{y_3\})\big) = \emptyset$

$F^+\big((k_2,\{y_1\})\big) = \{(e_2,\{x_1\})\}$

$F^+\big((k_2,\{y_2\})\big) = \{(e_2,\{x_2\})\}$

$F^+\big((k_2,\{y_3\})\big) = \emptyset$

$F^-\big((k_1,\{y_1\})\big) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_3,\{x_1\})\}$

$F^-\big((k_1,\{y_2\})\big) = \{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_3,\{x_2,x_3\})\}$

$F^{-}\big((k_1,\{y_3\})\big) = \{(e_1,\{x_3\}),(e_3,\{x_3\})\}$

$F^{-}\big((k_2,\{y_1\})\big) = \{(e_2,\{x_1\})\}$

$F^{-}\big((k_2,\{y_2\})\big) = \{(e_2,\{x_2,x_3\})\}$

$F^{-}\big((k_2,\{y_3\})\big) = \{(e_2,\{x_3\})\}$

iv) (Y,K) daki $(H,K) = \{(k_1,\{y_2\}),(k_2,\{y_1,y_3\})\}$ esnek kümesinin F dönüşümü altındaki üst ve alt ters görüntüsü sırasıyla $F^{+}(H,K) = \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_1\}),(e_3,\{x_2\})\}$ ve $F^{-}(H,K) = \{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\}),(e_3,\{x_2,x_3\})\}$ olarak bulunur.

Tanım 3.3. $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ ve $G: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli iki dönüşüm olsun. Bu durumda her ${E_e}^x$ esnek noktası için $F({E_e}^x) = G({E_e}^x)$ ise F ve G eşittir denir ve $F = G$ ile gösterilir.

Tanım 3.4. $p: E \to K$ dönüşümü ile $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü örten ise $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümüne örtendir denir.

Tanım 3.5 $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek küme değerli dönüşüm olmak üzere (G,E), $(H,E) \,\tilde{\in}\, S(X,E)$ ve (U,K), $(V,K) \,\tilde{\in}\, S(Y,K)$ olsun.

i) $k \in K$ için (G,E) ile (H,E) kümelerinin esnek görüntülerinin birleşimi ve kesişimi sırasıyla

$$\big(F(G,E) \,\tilde{\cup}\, F(H,E)\big)(k) = F(G,E)(k) \cup F(H,E)(k)$$

$$\big(F(G,E) \,\tilde{\cap}\, F(H,E)\big)(k) = F(G,E)(k) \cap F(H,E)(k)$$

biçiminde tanımlanır.

ii) $e \in E$ için (U,K) ile (V,K) kümelerinin esnek üst ve esnek alt ters görüntülerinin birleşimi ve kesişimi sırasıyla

$$\big(F^{+}(U,K) \,\tilde{\cup}\, F^{+}(V,K)\big)(e) = F^{+}(U,K)(e) \cup F^{+}(V,K)(e)$$

$$\big(F^{+}(U,K) \,\tilde{\cap}\, F^{+}(V,K)\big)(e) = F^{+}(U,K)(e) \cap F^{+}(V,K)(e)$$

$$\big(F^{-}(U,K) \,\tilde{\cup}\, F^{-}(V,K)\big)(e) = F^{-}(U,K)(e) \cup F^{-}(V,K)(e)$$

$$\left(F^{-}(U,K)\,\tilde{\cap}\,F^{-}(V,K)\right)(e)=F^{-}(U,K)(e)\cap F^{-}(V,K)(e)$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 3.6. $S(X,E)$ de (G,A), (H,B) esnek kümeler ve $E_e{}^x$ de bir esnek nokta olsun. $(G,A)\,\tilde{\subseteq}\,(H,B)$ dir ancak ve ancak her $E_e{}^x\,\tilde{\in}\,(G,A)$ için $E_e{}^x\,\tilde{\in}\,(H,B)$ olmasıdır.

İspat. Tanım 2.5 ve Tanım 2.20. den açıktır.

Teorem 3.7. $S(X,E)$ de (G,A), (H,B) esnek kümeler ve $i\in I$ için (G_i,E) de bir esnek kümeler ailesi olsun. Bu durumda $F\colon S(X,E)\to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) $F(\Phi)=\Phi$

ii) $F\big(\tilde{X}\big)\,\tilde{\subseteq}\,\tilde{Y}$

iii) $F\big((G,A)\,\tilde{\cup}\,(H,B)\big)=F(G,A)\,\tilde{\cup}\,F(H,B)$ ve genel olarak

$F\big(\tilde{\cup}_{i\in I}\,(G_i,E)\big)=\tilde{\cup}_{i\in I}\,F(G_i,E)$

iv) $F\big((G,A)\,\tilde{\cap}\,(H,B)\big)\,\tilde{\subseteq}\,F(G,A)\,\tilde{\cap}\,F(H,B)$ ve genel olarak

$F\big(\tilde{\cap}_{i\in I}\,(G_i,E)\big)\,\tilde{\subseteq}\tilde{\cap}_{i\in I}\,F(G_i,E)$

v) $(G,E)\,\tilde{\subseteq}\,(H,E)$ ise $F(G,E)\,\tilde{\subseteq}\,F(H,E)$ olur.

vi) $F(\tilde{X})-F(G,E)\,\tilde{\subseteq}\,F(\tilde{X}-(G,E))$

İspat. i, ii ve vi açıktır.

iii) $k\in K$ için $p^{-1}(k)\cap(A\cup B)=\emptyset$ ise ispat açıktır. Eğer $p^{-1}(k)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$ ise üç durum söz konusudur;

1. Durum: $e\in p^{-1}(k)\cap(A-B)$ ise

$F\big((G,A)\,\tilde{\cup}\,(H,B)\big)(k)=\bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap(A-B)}\Big(u\big(G(e)\big)\Big)=F(G,A)(k)=F(G,A)(k)\cup\emptyset$
$=\big(F(G,A)(k)\big)\cup\big(F(H,B)(k)\big)$

2. Durum: $e\in p^{-1}(k)\cap(B-A)$ ise

$\big((G,A)\,\tilde{\cup}\,(H,B)\big)(k) = \bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap(B-A)}\Big(u\big(H(e)\big)\Big) = F(H,B)(k) = \emptyset \cup$
$F(H,B)(k) = \big(F(G,A)(k)\big) \cup \big(F(H,B)(k)\big)$

3. Durum: $e \in p^{-1}(k) \cap (B \cap A)$ ise

$F\big((G,A)\,\tilde{\cup}\,(H,B)\big)(k) = \bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap(B\cap A)}\Big(u\big(G(e)\big) \cup u\big(H(e)\big)\Big) =$
$\Big(\bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap(B\cap A)}\Big(u\big(H(e)\big)\Big)\Big) \cup \Big(\bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap(B\cap A)}\Big(u\big(G(e)\big)\Big)\Big) = \big(F(G,A)(k)\big) \cup$
$\big(F(H,B)(k)\big)$

iv) $k \in K$ için $p^{-1}(k) \cap (A \cap B) = \emptyset$ ise ispat açıktır. $p^{-1}(k) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ ise $\big(F(G,A)(k)\big) \cap \big(F(H,B)(k)\big) = \big(\bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap A} u\big(G(e)\big)\big) \cap \big(\bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap B} u\big(H(e)\big)\big) \subset \big(\bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap A\cap B} u\big(G(e) \cap H(e)\big)\big) = (F(G,A) \cap F(H,B))(k)$

v) $k \in K$ için $p^{-1}(k) \cap A = \emptyset$ ise ispat açıktır. Eğer $p^{-1}(k) \cap A \neq \emptyset$ ise $F(G,A)(k) = \bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap A} u\big(G(e)\big) \subset \bigcup_{e\in p^{-1}(k)\cap B} u\big(H(e)\big) = F(H,B)(k)$

Aşağıdaki iki örnekte ii) ve iv) ifadelerinde eşitlik olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 3.8. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olsun. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümünü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_1\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü için $F\big(\tilde{X}\big) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_1\})\}$ olup $F\big(\tilde{X}\big) \neq \tilde{Y}$ bulunur.

Örnek 3.9. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ evrensel kümeler, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ parametre kümeleri olsun. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_2) = \{y_2, y_3\}$, $u(x_3) = \{y_4\}$, $u(x_4) = \{y_1, y_3, y_4\}$, $p(e_1) = k_2$, $p(e_2) = k_3$, $p(e_3) = k_1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü ve
$(G,E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_3\}), (e_3, \{x_1, x_2\})\}$
$(H,E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_3\}), (e_3, \{x_3\})\}$ esnek kümeleri için
$F\big((G,E)\,\tilde{\cap}\,(H,E)\big) \neq F(G,E)\,\tilde{\cap}\,F(H,E)$ dir.

Teorem 3.10. $S(Y,K)$ de (G,K), (H,K) esnek kümeler ve $i \in I$ için (H_i,K) de esnek kümeler ailesi olsun. Bu durumda $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) $F^+(\Phi) = \Phi$ ve $F^-(\Phi) = \Phi$

ii) $F^+(\tilde{Y}) = \tilde{X}$ ve $F^-(\tilde{Y}) = \tilde{X}$

iii) $F^-\big((G,K) \,\tilde{\cup}\, (H,K)\big) = F^-(G,K) \,\tilde{\cup}\, F^-(H,K)$ ve genel olarak

$F^-\big(\tilde{\cup}_{i\in I}\,(H_i,K)\big) = \tilde{\cup}_{i\in I}\,F^-(H_i,K)$ dir.

iv) $F^+(G,K) \,\tilde{\cup}\, F^+(H,K) \;\tilde{\subseteq}\; F^+\big((G,K) \,\tilde{\cup}\, (H,K)\big)$ ve genel olarak

$\tilde{\cup}_{i\in I}\,F^+(H_i,K) \,\tilde{\subseteq}\, F^+\big(\tilde{\cup}_{i\in I}\,(H_i,K)\big)$ dir.

v) $F^-\big((G,K) \,\tilde{\cap}\, (H,K)\big) \,\tilde{\subseteq}\, F^-(G,K) \,\tilde{\cap}\, F^-(H,K)$ ve genel olarak

$F^-\big(\tilde{\cap}_{i\in I}\,(H_i,K)\big) \,\tilde{\subseteq}\, \tilde{\cap}_{i\in I}\,F^-(H_i,K)$ dir.

vi) $F^+\big((G,K) \,\tilde{\cap}\, (H,K)\big) = F^+(G,K) \,\tilde{\cap}\, F^+(H,K)$ ve genel olarak

$F^+\big(\tilde{\cap}_{i\in I}\,(H_i,K)\big) = \tilde{\cap}_{i\in I}\,F^+(H_i,K)$ dir.

vii) $(G,K) \,\tilde{\subseteq}\, (H,K)$ ise $F^+(G,K) \,\tilde{\subseteq}\, F^+(H,K)$ ve $F^-(G,K) \,\tilde{\subseteq}\, F^-(H,K)$ dir.

İspat. i) ve ii) açıktır.

iii) ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-\big((G,K) \,\tilde{\cup}\, (H,K)\big)$ olsun. Bu durumda $F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, \big((G,K) \,\tilde{\cup}\, (H,K)\big) \neq \Phi$ ve $\big(F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (G,K)\big) \,\tilde{\cup}\, \big(F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (H,K)\big) \neq \Phi$ olur. Buradan $\big(F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (G,K)\big) \neq \Phi$ veya $\big(F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (H,K)\big) \neq \Phi$ elde edilir. O halde ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-(G,K)$ veya ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-(H,K)$ olup ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-(G,K) \,\tilde{\cup}\, F^-(H,K)$ bulunur.

Tersine ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-(G,K) \,\tilde{\cup}\, F^-(H,K)$ alalım. Bu durumda ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-(G,K)$ veya ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-(H,K)$ olup $F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (G,K) \neq \Phi$ veya $F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (H,K) \neq \Phi$ dır. Buradan $\big(F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (G,K)\big) \,\tilde{\cup}\, \big(F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, (H,K)\big) \neq \Phi$ ve $F({E_e}^x) \,\tilde{\cap}\, \big((G,K) \,\tilde{\cup}\, (H,K)\big) \neq \Phi$ olur. Böylece ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, F^-\big((G,K) \,\tilde{\cup}\, (H,K)\big)$ olduğu elde edilir.

iv) $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K) \tilde{\cup} F^+(H,K)$ olsun. Bu durumda $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K)$ veya $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(H,K)$ dır. O halde $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (G,K)$ veya $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ olur. Dolayısıyla $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (G,K) \tilde{\cup} (H,K)$ ve böylece $E_e{}^x \tilde{\in} F^+\big((G,K) \tilde{\cup} (H,K)\big)$ olduğu elde edilir.

v) $E_e{}^x \tilde{\in} F^-\big((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\big)$ olsun. Bu durumda $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} \big((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\big) \neq \Phi$ olur. Buradan $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ ve $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olduğu elde edilir. Böylece $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(G,K)$ ve $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(H,K)$ olur. O halde $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(G,K) \tilde{\cap} F^-(H,K)$ bulunur.

vi) $E_e{}^x \tilde{\in} F^+\big((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\big)$ olsun. Bu durumda $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} \big((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\big)$ olup buradan $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (G,K)$ ve $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ bulunur. Böylece $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K)$ ve $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(H,K)$ dolayısıyla $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K) \tilde{\cap} (H,K)$ olduğu elde edilir.

Tersine $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K) \tilde{\cap} (H,K)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K)$ ve $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(H,K)$ olup buradan $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (G,K)$ ve $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ olur. Böylece $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (G,K) \tilde{\cap} (H,K)$ ve $E_e{}^x \tilde{\in} F^+\big((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\big)$ olduğu elde edilir.

vii) $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(G,K)$ olsun. Bu durumda $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ olur. $(G,K) \tilde{\subset} (H,K)$ olduğundan $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ ve $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(H,K)$ elde edilir.

$E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K)$ olsun. Bu durumda $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (G,K)$ olur. $(G,K) \tilde{\subset} (H,K)$ olduğundan $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ ve $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(H,K)$ elde edilir.

Aşağıdaki örnekte iv) ve v) ifadelerinde eşitlik olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 3.11. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ evrensel kümeler, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ parametre kümeleri olsun. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_2) = \{y_2, y_3\}$, $u(x_3) = \{y_4\}$, $u(x_4) = \{y_1, y_3, y_4\}$, $p(e_1) = k_2$, $p(e_2) = k_3$, $p(e_3) = k_1$ olacak şekilde $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda
$(G,K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_1, y_2\}), (k_3, \{y_4\})\}$
$(H,K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, \{y_2, y_3\}), (k_3, \{y_1, y_2\})\}$ esnek kümeleri için
$(G,K) \tilde{\cap} (H,K) = \{(k_2, \{y_2\})\}$ olup $F^-\big((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\big) = \{(e_1, \{x_1, x_2\})\}$ ve
$F^-(G,K) \tilde{\cap} F^-(H,K) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_4\}), (e_3, \{x_1\})\}$ dir. O halde
$F^-\big((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\big) \neq F^-(G,K) \tilde{\cap} F^-(H,K)$ dir.

Ayrıca $(G,K)\,\tilde{\cup}\,(H,K)=\{(k_1,\{y_1,y_2\}),(k_2,\{y_1,y_2,y_3\}),(k_3,\{y_1,y_2,y_4\})\}$ olup
$F^+\big((G,K)\,\tilde{\cup}\,(H,K)\big)=\{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_1,x_3\}),(e_3,\{x_1\})\}$
$F^+(G,K)\,\tilde{\cup}\,F^+(H,K)=\{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\}$ dir. Dolayısıyla
$F^+\big((G,K)\,\tilde{\cup}\,(H,K)\big)\neq F^+(G,K)\,\tilde{\cup}\,F^+(H,K)$ dir.

Önerme 3.12. $(G,E)\in S(X,E)$ ve $(H,K),(V,K)\in S(Y,K)$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda $F\colon S(X,E)\to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) $(G,E)\,\tilde{\subset}\,F^+\big(F(G,E)\big)\,\tilde{\subset}\,F^-\big(F(G,E)\big)$ dir. Eğer F örten ise $(G,E)=F^+\big(F(G,E)\big)=F^-\big(F(G,E)\big)$ olur.

ii) $F\big(F^+(H,K)\big)\,\tilde{\subset}\,(H,K)\,\tilde{\subset}\,F\big(F^-(H,K)\big)$

iii) Eğer $(H,K)\,\tilde{\cap}\,(V,K)=\Phi$ ise $F^+(H,K)\,\tilde{\cap}\,F^-(V,K)=\Phi$

İspat. i) ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,(G,E)$ olsun. Bu durumda $F({E_e}^x)\,\tilde{\subset}\,F(G,E)$ olur ve böylece F^+ nın tanımından ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^+\big(F(G,E)\big)$ bulunur.

${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^+\big(F(G,E)\big)$ olsun. O halde $F({E_e}^x)\,\tilde{\subset}\,F(G,E)$ olup $F({E_e}^x)\neq\Phi$ olduğundan $F({E_e}^x)\,\tilde{\cap}\,F(G,E)\neq\Phi$ olur. Böylece F^- nın tanımından ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^-\big(F(G,E)\big)$ bulunur.

ii) ${K_k}^y\,\tilde{\in}\,F\big(F^+(H,K)\big)$ alalım. Bu durumda en az bir ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^+(H,K)$ vardır öyle ki ${K_k}^y\,\tilde{\in}\,F({E_e}^x)$ dir. O halde $F({E_e}^x)\,\tilde{\subset}\,(H,K)$ ve ${K_k}^y\,\tilde{\in}\,F({E_e}^x)$ dir. Buradan da ${K_k}^y\,\tilde{\in}\,(H,K)$ elde edilir. Dolayısıyla $F\big(F^+(H,K)\big)\,\tilde{\subset}\,(H,K)$ bulunur.

${K_k}^y\,\tilde{\in}\,(H,K)$ esnek noktası için $F^-({K_k}^y)\,\tilde{\subset}\,F^-(H,K)$ olup
$F^-({K_k}^y)=\{{E_e}^x\,\tilde{\in}\,\tilde{X}\colon F({E_e}^x)\,\tilde{\cap}\,{K_k}^y\neq\phi\}$ olduğundan en az bir ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ vardır öyle ki ${K_k}^y\,\tilde{\in}\,F({E_e}^x)$ ve ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^-(H,K)$ dır. Dolayısıyla
${K_k}^y\,\tilde{\in}\,\bigcup\{F({E_e}^x)\colon {E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^-(H,K)\}=F\big(F^-(H,K)\big)$ elde edilir. O halde
$(H,K)\,\tilde{\subset}\,F\big(F^-(H,K)\big)$ dir.

iii) $(H,K)\,\tilde{\cap}\,(V,K)=\Phi$ olmak üzere ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^+(H,K)\,\tilde{\cap}\,F^-(V,K)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^+(H,K)$ ve ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^-(V,K)$ olup buradan da $F({E_e}^x)\,\tilde{\subset}\,(H,K)$ ve $F({E_e}^x)\,\tilde{\cap}\,(V,K)\neq\Phi$ dır. Böylece $(H,K)\,\tilde{\cap}\,(V,K)\neq\Phi$ çelişkisine ulaşmış oluruz. O halde $F^+(H,K)\,\tilde{\cap}\,F^-(V,K)=\Phi$ dir.

Tanım 3.13. $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ ve $G: S(Y,K) \to S(Z,L)$ esnek küme değerli iki dönüşüm olsun. Bu durumda $GoF: S(X,E) \to S(Z,L)$ esnek küme değerli dönüşümüne G ile F esnek küme değerli dönüşümlerinin bileşkesi denir ve $(GoF)({E_e}^x) = G\big(F({E_e}^x)\big)$ ile tanımlanır.

Önerme 3.14. $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ ve $G: S(Y,K) \to S(Z,L)$ esnek küme değerli iki dönüşüm ve (H,L), $S(Z,L)$ de bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) $(F^-)^- = F$

ii) $(GoF)^-(H,L) = F^-\big(G^-(H,L)\big)$ ve $(GoF)^+(H,L) = F^+\big(G^+(H,L)\big)$

İspat. i) $(F^-)^-({E_e}^x) = \{{K_k}^y \tilde{\in} \tilde{Y}: F^-({K_k}^y) \tilde{\cap} {E_e}^x \neq \Phi\} = \{{K_k}^y \tilde{\in} \tilde{Y}: {K_k}^y \tilde{\in} F({E_e}^x)\}$

$= F({E_e}^x)$ dir. O halde ${E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}$ keyfi olduğundan $(F^-)^- = F$ olur.

ii)$(GoF)^-(H,L) = \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: (GoF)({E_e}^x) \tilde{\cap} (H,L) \neq \Phi\}$
$= \big\{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: G\big(F({E_e}^x)\big) \tilde{\cap} (H,L) \neq \Phi\big\}$
$= \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: \exists {K_k}^y \tilde{\in} F({E_e}^x)\ için\ G({K_k}^y) \tilde{\cap} (H,L) \neq \Phi\}$
$= \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: \exists {K_k}^y \tilde{\in} F({E_e}^x)\ için\ {K_k}^y \tilde{\in} G^-(H,L)\}$
$= \{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: \exists {K_k}^y \tilde{\in} F({E_e}^x)\ için\ F({E_e}^x) \tilde{\cap} G^-(H,L) \neq \Phi\}$
$= \big\{{E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X}: {E_e}^x \tilde{\in} F^-\big(G^-(H,L)\big)\big\} = F^-\big(G^-(H,L)\big)$

Benzer şekilde $(GoF)^+(H,L) = F^+\big(G^+(H,L)\big)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.15. $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm ve (G,K), $S(Y,K)$ de bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) $F^+\left(\tilde{Y} - (G,K)\right) = \tilde{X} - F^-(G,K)$

ii) $F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right) = \tilde{X} - F^+(G,K)$

İspat. i) ${E_e}^x \tilde{\in} F^+\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)$ alalım. Bu durumda $F({E_e}^x) \tilde{\subset} \tilde{Y} - (G,K)$ olup buradan $F({E_e}^x) \tilde{\cap} (G,K) = \Phi$ elde edilir. O halde ${E_e}^x \tilde{\notin} F^-(G,K)$ olup dolayısıyla ${E_e}^x \tilde{\in} \tilde{X} - F^-(G,K)$ bulunur.

Tersine $E_e{}^x \tilde{\in} \tilde{X} - F^-(G,K)$ alalım. Bu durumda $E_e{}^x \tilde{\notin} F^-(G,K)$ ve dolayısıyla $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (G,K) = \Phi$ dır. Buradan $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} \tilde{Y} - (G,K)$ olup $E_e{}^x \tilde{\in} F^+\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)$ olduğu elde edilir.

ii) $E_e{}^x \tilde{\in} F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)$ alalım. Bu durumda $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y} - (G,K)\right) \neq \Phi$ olup $\exists K_k{}^y \tilde{\in} F(E_e{}^x)$ için $K_k{}^y \tilde{\in} \tilde{Y} - (G,K)$ dır. Buradan $\exists K_k{}^y \tilde{\in} F(E_e{}^x)$ için $K_k{}^y \tilde{\notin} (G,K)$ ve $F(E_e{}^x) \tilde{\not\subset} (G,K)$ elde edilir. O halde $E_e{}^x \tilde{\notin} F^+(G,K)$ olup dolayısıyla $E_e{}^x \tilde{\in} \tilde{X} - F^+(G,K)$ bulunur.

Tersine $E_e{}^x \tilde{\in} \tilde{X} - F^+(G,K)$ alalım. Bu durumda $E_e{}^x \tilde{\notin} F^+(G,K)$ ve dolayısıyla $F(E_e{}^x) \tilde{\not\subset} (G,K)$dır. Buradan $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y} - (G,K)\right) \neq \Phi$ olduğu elde edilir. O halde $E_e{}^x \tilde{\in} F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)$ dir.

Tanım 3.16. $F,G: S(X,E) \to S(Y,K)$ iki esnek küme değerli dönüşüm ve $E_e{}^x$ de X de bir esnek nokta olsun. Bu durumda F ile G nin birleşimi ve kesişimi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır;

$(F \cup G)(E_e{}^x) = F(E_e{}^x) \cup G(E_e{}^x)$,

$(F \cap G)(E_e{}^x) = F(E_e{}^x) \cap G(E_e{}^x)$.

Önerme 3.17. $F,G: S(X,E) \to S(Y,K)$ iki esnek küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda Y deki (H,K) esnek kümesi için aşağıdakiler doğrudur;

i) $(F \cup G)^-(H,K) = F^-(H,K) \cup G^-(H,K)$.

ii) $(F \cup G)^+(H,K) = F^+(H,K) \cup G^+(H,K)$

iii) $(F \cap G)^-(H,K) \subset F^-(H,K) \cap G^-(H,K)$

iv) $F^+(H,K) \cap G^+(H,K) \subset (F \cap G)^+(H,K)$ dir.

İspat. i) $E_e{}^x \tilde{\in} (F \cup G)^-(H,K)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(F \cup G)(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ bulunur ve buradan da $(F(E_e{}^x) \tilde{\cup} G(E_e{}^x)) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olduğunu elde ederiz. Böylece $(F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K)) \tilde{\cup} (G(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K)) \neq \Phi$ dir. O halde $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ veya $G(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ dır. Dolayısıyla

${E_e}^x \tilde{\in} F^-(H,K)$ veya ${E_e}^x \tilde{\in} G^-(H,K)$ dır. Böylece ${E_e}^x \tilde{\in} F^-(H,K) \tilde{\cup} G^-(H,K)$ dir. O halde $(F \cup G)^-(H,K) \tilde{\subset} F^-(H,K) \tilde{\cup} G^-(H,K)$ dir.

Benzer şekilde $F^-(H,K) \tilde{\cup} G^-(H,K) \tilde{\subset} (F \cup G)^-(H,K)$ olduğu gösterilebilir.

iv) ${E_e}^x \in F^+(H,K) \tilde{\cap} G^+(H,K)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ ve $G({E_e}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ tir. Böylece $F({E_e}^x) \tilde{\cap} G({E_e}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ ve dolayısıyla da $(F \cap G)({E_e}^x) \tilde{\subset} (H,K)$ dir. O halde ${E_e}^x \tilde{\in} (F \cap G)^+(H,K)$ dir.

ii) ve iii) ün ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 3.18. $S(X,E)$, $S(Y,K)$ iki esnek küme ailesi olsun. Bu durumda $F_i: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümleri için aşağıdakiler doğrudur;

i) $(\cup F_i)^-(H,K) = \cup {F_i}^-(H,K)$

ii) $(\cup F_i)^+(H,K) = \cup {F_i}^+(H,K)$

iii) $(\cap F_i)^-(H,K) \subset \cap {F_i}^-(H,K)$

iv) $\cap {F_i}^+(H,K) \subset (\cap F_i)^+(H,K)$

İspat. Yukarıdaki önermeye benzer şekilde ispatı yapılabilir.

4. ESNEK KÜME AİLELERİ ÜZERİNDE HİPER TOPOLOJİLER

Bu bölümde esnek küme aileleri üzerinde tanımlanan hiper topolojiler tanımlanarak bu topolojiler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Aşağıda bu hiper topolojileri tanımlarken ve incelerken kullanacağımız bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 4.1. $S(Y,K)$, Y üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi ve (U,K), Y de bir esnek küme olsun. $(U,K)^+$ ve $(U,K)^-$ esnek küme ailelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$(U,K)^+ = \{(T,K) \in S(Y,K) : (T,K) \tilde{\subseteq} (U,K)\}$,

$(U,K)^- = \{(T,K) \in S(Y,K) : (T,K) \tilde{\cap} (U,K) \neq \Phi\}$.

Önerme 4.2. $S(Y,K)$ de boş esnek olmayan (G,K) ve (H,K) esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur;

i) $(G,K)^+ \cap (H,K)^+ = ((G,K) \tilde{\cap} (H,K))^+$

ii) $(G,K)^+ \cup (H,K)^+ \subset ((G,K) \tilde{\cup} (H,K))^+$

iii) $((G,K) \tilde{\cap} (H,K))^- \subset (G,K)^- \cap (H,K)^-$

iv) $(G,K)^- \cup (H,K)^- = ((G,K) \tilde{\cup} (H,K))^-$

v) $(G,K) \tilde{\subseteq} (H,K) \Leftrightarrow (G,K)^+ \subset (H,K)^+$

vi) $(G,K) \tilde{\subseteq} (H,K) \Leftrightarrow (G,K)^- \subset (H,K)^-$

vii) $(G,K) \tilde{\cap} (H,K) = \Phi \Leftrightarrow (G,K)^+ \cap (H,K)^+ = \emptyset$

viii) $(G,K)^- \cap (H,E)^- \neq \emptyset$

İspat. i) $(T,K) \in (G,K)^+ \cap (H,K)^+$ için $(T,K) \in (G,K)^+$ ve $(T,K) \in (H,K)^+$ olur. Bu durumda $(T,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ ve $(T,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ olup $(T,K) \tilde{\subseteq} (G,K) \tilde{\cap} (H,K)$ bulunur. O halde $(T,K) \in ((G,K) \cap (H,K))^+$ olur.

Tersine, $(T,K) \in ((G,K) \cap (H,K))^+$ olsun. Bu durumda $(T,K) \tilde{\subseteq} (G,K) \tilde{\cap} (H,K)$ olup $(T,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ ve $(T,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ olur. O halde $(T,K) \in (G,K)^+$ ve $(T,K) \in (H,K)^+$ dir. Böylece $(T,K) \in (G,K)^+ \cap (H,K)^+$ olduğu elde edilir.

ii) $(T,K) \in (G,K)^+ \cup (H,K)^+$ olsun. Bu durumda $(T,K) \in (G,K)^+$ veya $(T,K) \in (H,K)^+$ dir. O halde $(T,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ veya $(T,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ olur. Buradan

$(T,K) \tilde{\subseteq} (G,K) \tilde{\cup} (H,K)$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $(T,K) \in ((G,K) \cup (H,K))^+$ bulunur.

iii) $(T,K) \in ((G,K) \tilde{\cap} (H,K))^-$ alalım. Bu durumda $(T,K) \tilde{\cap} ((G,K) \tilde{\cap} (H,K)) \neq \Phi$ olup $(T,K) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ ve $(T,K) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ dir. O halde $(T,K) \in (G,K)^-$ ve $(T,K) \in (H,K)^-$ dir. Böylece $(T,K) \in (G,K)^- \cap (H,K)^-$ olduğu elde edilir.

iv) $(T,K) \in ((G,K) \cup (H,K))^-$ alalım. Bu durumda $(T,K) \tilde{\cap} ((G,K) \tilde{\cup} (H,K)) \neq \Phi$ olup $((T,K) \tilde{\cap} (G,K)) \tilde{\cup} ((T,K) \tilde{\cap} (H,K)) \neq \Phi$ dir. O halde $(T,K) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ veya $(T,K) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olur. O halde $(T,K) \in (G,K)^-$ veya $(T,K) \in (H,K)^-$ dir. Böylece $(T,K) \in (G,K)^- \cup (H,K)^-$ olduğu elde edilir.

Tersine, $(T,K) \in (G,K)^- \cup (H,K)^-$ alalım. Bu durumda $(T,K) \in (G,K)^-$ veya $(T,K) \in (H,K)^-$ olur. O halde $(T,K) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ veya $(T,K) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olduğu elde edilir. Böylece $((T,K) \tilde{\cap} (G,K)) \tilde{\cup} ((T,K) \tilde{\cap} (H,K)) \neq \Phi$ ve buradan da $(T,K) \tilde{\cap} ((G,K) \tilde{\cup} (H,K)) \neq \Phi$ dir. O halde $(T,K) \in ((G,K) \cup (H,K))^-$ olur.

v) $K_k{}^y \tilde{\in} (G,K)$ olsun. Bu durumda $K_k{}^y \in (G,K)^+$ dir. $(G,K)^+ \subset (H,K)^+$ olduğundan $K_k{}^y \in (H,K)^+$ ve böylece $K_k{}^y \tilde{\in} (H,K)$ dir. Sonuç olarak, $(G,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ olur.

Tersine, $(T,K) \in (G,K)^+$ olsun. Bu durumda $(T,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olup $(G,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ olduğundan $(T,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ ve böylece $(T,K) \in (H,K)^+$olduğu elde edilir.

vi) $(T,K) \in (G,K)^-$ olsun. Bu durumda $(T,K) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ olup $(G,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ olduğundan $(T,K) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olur. Böylece $(T,K) \in (H,K)^-$ ve dolayısıyla $(G,K)^- \subset (H,K)^-$ dir.

Tersine, $K_k{}^y \in (G,K)$ olsun. Bu durumda $K_k{}^y \in (G,K)^-$ olup $(G,K)^- \subset (H,K)^-$ olduğundan $K_k{}^y \in (H,K)^-$ dir. Böylece $K_k{}^y \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olur. O halde $K_k{}^y \tilde{\in} (H,K)$ ve $(G,K) \tilde{\subseteq} (H,K)$ dir.

vii) $(G,K) \tilde{\cap} (H,K) = \Phi$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\left((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\right)^+ = \emptyset$ olup $(G,K)^+ \cap (H,K)^+ = \left((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\right)^+$ olduğundan $(G,K)^+ \cap (H,K)^+ = \emptyset$ olur.

Tersine, $(G,K)^+ \cap (H,K)^+ = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\left((G,K) \tilde{\cap} (H,K)\right)^+ = \emptyset$ dir. O halde $(G,K) \tilde{\cap} (H,K) = \Phi$ olur.

viii) $\tilde{Y} \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ olduğundan $\tilde{Y} \in (G,K)^{-}$ ve $\tilde{Y} \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olduğundan $\tilde{Y} \in (H,K)^{-}$ olup $\tilde{Y} \in (G,K)^{-} \cap (H,K)^{-}$ dir. O halde $(G,K)^{-} \cap (H,K)^{-} \neq \emptyset$ dir.

Önerme 4.3. $S(Y,K)$ bir esnek küme ailesi ve $(G,K) \in S(Y,K)$ olsun. Bu durumda $\tilde{Y} - (G,K)$ kümesi (G,K) nin esnek tümleyeni olmak üzere aşağıdakiler doğrudur;

i) $S(Y,K) - (G,K)^{+} = \left(\tilde{Y} - (G,K)\right)^{-}$

ii) $S(Y,K) - (G,K)^{-} = \left(\tilde{Y} - (G,K)\right)^{+}$

İspat. i) $(B,K) \in S(Y,K) - (G,K)^{+} \Leftrightarrow (B,K) \notin (G,K)^{+} \Leftrightarrow (B,K) \tilde{\not\subset} (G,K) \Leftrightarrow (B,K) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y} - (G,K)\right) \neq \phi \Leftrightarrow (B,K) \in \left(\tilde{Y} - (G,K)\right)^{-}$.

ii) $(B,K) \in S(Y,K) - (G,K)^{-} \Leftrightarrow (B,K) \notin (G,K)^{-} \Leftrightarrow (B,K) \tilde{\cap} (G,K) = \phi \Leftrightarrow (B,K) \tilde{\subseteq} \left(\tilde{Y} - (G,K)\right) \Leftrightarrow (B,K) \in \left(\tilde{Y} - (G,K)\right)^{+}$.

Lemma 4.4. $S(Y,K)$ bir esnek küme ailesi olsun. Bu durumda (C_1,K) ve (C_2,K) esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur,

i. $[S(Y,K) - (C_1,K)^{-}] \tilde{\cap} [S(Y,K) - (C_2,K)^{-}] = S(Y,K) - [(C_1,K)^{-} \cup (C_2,K)^{-}]$

ii. $S(Y,K) - [(C_1,K)^{+} \cup (C_2,K)^{+}] = [S(Y,K) - (C_1,K)^{+}] \tilde{\cap} [S(Y,K) - (C_2,K)^{+}]$

İspat. i. $(H,K) \in [S(Y,K) - (C_1,K)^{-}] \tilde{\cap} [S(Y,K) - (C_2,K)^{-}]$
$\Leftrightarrow (H,K) \in S(Y,K) - (C_1,K)^{-}$ ve $(H,K) \in S(Y,K) - (C_2,K)^{-}$
$\Leftrightarrow (H,K) \notin (C_1,K)^{-}$ ve $(H,K) \notin (C_2,K)^{-}$
$\Leftrightarrow (H,K) \tilde{\cap} (C_1,K) = \phi$ ve $(H,K) \tilde{\cap} (C_2,K) = \phi$
$\Leftrightarrow (H,K) \tilde{\cap} [(C_1,K) \cup (C_2,K)] = \phi$
$\Leftrightarrow (H,K) \notin [(C_1,K) \cup (C_2,K)]^{-}$
$\Leftrightarrow (H,K) \in S(Y,K) - [(C_1,K) \cup (C_2,K)]^{-}$
$\Leftrightarrow (H,K) \in S(Y,K) - [(C_1,K)^{-} \cup (C_2,K)^{-}]$.

ii. $(H,K) \in S(Y,K) - [(C_1,K)^{+} \cup (C_2,K)^{+}]$
$\Leftrightarrow (H,K) \notin [(C_1,K)^{+} \cup (C_2,K)^{+}]$
$\Leftrightarrow (H,K) \notin (C_1,K)^{+}$ ve $(H,K) \notin (C_2,K)^{+}$
$\Leftrightarrow (H,K) \in S(Y,K) - (C_1,K)^{+}$ ve $(H,K) \in S(Y,K) - (C_2,K)^{+}$
$\Leftrightarrow (H,K) \in [S(Y,K) - (C_1,K)^{+}] \tilde{\cap} [S(Y,K) - (C_2,K)^{+}]$.

4.1. Esnek Üst ve Alt Vietoris Topolojiler

Bu kısımda, (Y,τ,K) esnek topolojik uzayının esnek açık alt kümelerinden yararlanarak esnek küme aileleri üzerinde üst (alt) Vietoris topolojiler tanımlanmıştır. Daha sonra esnek küme değerli bir dönüşümün üst (alt) Vietoris sürekliliği tanımlanarak bu küme değerli dönüşümün sürekliliğinin, buna karşılık gelen tek değerli bir esnek fonksiyonun sürekliliği cinsinden ifadesi verilmiştir. Öncelikle aşağıda esnek üst (alt) Vietoris topolojiler tanımlanırken kullandığımız bir teorem verilmiştir.

Teorem 4.1.1. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\beta_{SV^+} = \{(U,K)^+ : (U,K)\ esnek\ açık\ küme\}$$

$$\mathcal{S}_{SV^-} = \{(U,K)^- : (U,K)\ esnek\ açık\ küme\}$$

esnek küme aileleri $\mathbb{S}(Y,K)$ üzerindeki farklı iki esnek topolojik uzay için sırasıyla bir taban ve alt tabandır.

İspat. $\tilde{Y} \in \tau$ esnek kümesi için $\tilde{Y}^+ = \mathbb{S}(Y,K) \subset \beta_{SV^+}$ ve $\mathbb{S}(Y,K) = \bigcup_{\tilde{Y}^+ \in \beta_{SV^+}} \tilde{Y}^+$ olur.

$(U_1,K)^+, (U_2,K)^+ \in \beta_{SV^+}$ olmak üzere $(G,K) \in (U_1,K)^+ \cap (U_2,K)^+$ alalım. (U_1,K) ve (U_2,K) esnek açık kümeler olduğundan, $(U_3,K) = (U_1,K) \tilde{\cap} (U_2,K)$ da esnek açık kümedir. Ayrıca $(U_1,K)^+ \cap (U_2,K)^+ = ((U_1,K) \tilde{\cap} (U_2,K))^+$ olduğundan $(G,K) \in (U_3,K)^+$ olup $(U_3,K)^+ \in \beta_{SV^+}$ ve $(U_3,K)^+ \subset (U_1,K)^+ \cap (U_2,K)^+$ dir.

Dolayısıyla β_{SV^+} bir esnek topoloji için tabandır.

Yukarıdakine benzer şekilde $\mathcal{S}_{SV^-}$ nin de bir esnek topoloji için alt taban olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.1.2. i) $\mathbb{S}(Y,K)$ üzerinde β_{SV^+} ailesini taban kabul eden topolojiye esnek üst Vietoris topoloji denir ve τ_{SV^+} ile gösterilir.

ii) $\mathbb{S}(Y,K)$ üzerinde $\mathcal{S}_{SV^-}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye esnek alt Vietoris topoloji denir ve τ_{SV^-} ile gösterilir.

iii) $\mathbb{S}(Y,K)$ üzerinde $\beta_{SV^+} \cup \mathcal{S}_{SV^-} = \{(U,K)^+, (U,K)^- : (U,K)\ esnek\ açık\ küme\}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye (veya $\tau_{SV^+} \cup \tau_{SV^-}$ ailesini taban kabul eden topolojiye) esnek Vietoris topoloji denir ve bu topoloji τ_{SV} ile gösterilir.

Örnek 4.1.3. $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K = \{k_1, k_2\}$ olsun.
$(F_1, K) = \{(k_1, \{y_1\})\}$,

$(F_2, K) = \{(k_1, \{y_2\})\}$,

$(F_3, K) = \{(k_1, Y)\}$,

$(F_4, K) = \{(k_2, \{y_1\})\}$,

$(F_5, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_1\})\}$,

$(F_6, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, \{y_1\})\}$,

$(F_7, K) = \{(k_1, Y), (k_2, \{y_1\})\}$,

$(F_8, K) = \{(k_2, \{y_2\})\}$,

$(F_9, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\}$,

$(F_{10}, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, \{y_2\})\}$,

$(F_{11}, K) = \{(k_1, Y), (k_2, \{y_2\})\}$,

$(F_{12}, K) = \{(k_2, Y)\}$,

$(F_{13}, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, Y)\}$,

$(F_{14}, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, Y)\}$

esnek kümeler olmak üzere
$S(Y, K) = \{ \phi, (F_1, K), (F_2, K), (F_3, K), (F_4, K), (F_5, K), (F_6, K), (F_7, K), (F_8, K), (F_9, K),$
$(F_{10}, K), (F_{11}, K), (F_{12}, K), (F_{13}, K), (F_{14}, K), \tilde{Y}\}$

esnek küme ailesi ve

$\tilde{\tau} = \left\{\Phi, \widetilde{Y}, (F_1, K), (F_8, K), (F_9, K)\right\}$

esnek topolojisi verilsin. Bu durumda
$(F_1, K)^+ = \{(F_1, K)\}$
$(F_8, K)^+ = \{(F_8, K)\}$
$(F_9, K)^+ = \{(F_1, K), (F_8, K), (F_9, K)\}$
$\tilde{Y}^+ = \mathbb{S}(Y, K)$ olur.

O halde $\beta_{SV^+} = \{(F_1,K)^+,\ (F_8,K)^+,(F_9,K)^+,\tilde{Y}^+\}$ ailesi $\mathbb{S}(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Çünkü,

$\tilde{Y}^+ = \mathbb{S}(Y,K)$

$(F_1,K)^+ \cap (F_8,K)^+ = \emptyset,$

$(F_1,K)^+ \cap (F_9,K)^+ = (F_1,K)^+ \in \beta_{SV^+},$

$(F_1,K)^+ \cap \tilde{Y}^+ = (F_1,K)^+ \in \beta_{SV^+},$

$(F_8,K)^+ \cap (F_9,K)^+ = (F_8,K)^+ \in \beta_{SV^+},$

$(F_8,K)^+ \cap \tilde{Y}^+ = (F_8,K)^+ \in \beta_{SV^+},$

$(F_9,K)^+ \cap \tilde{Y}^+ = (F_9,K)^+ \in \beta_{SV^+}$ dir.

Bu esnek topoloji (üst esnek Vietoris topoloji) de

$\tau_{SV^+} = \left\{(F_1,K)^+,\ (F_8,K)^+,\ (F_1,K)^+ \cup (F_8,K)^+,\ (F_9,K)^+,\ \tilde{Y}^+,\emptyset\right\}$

$=\left\{\{(F_1,K)\},\ \{(F_8,K)\},\ \{(F_1,K),(F_8,K)\},\ \{(F_1,K),(F_8,K),(F_9,K)\},\ \mathbb{S}(Y,K),\emptyset\right\}$ olur.

Örnek 4.1.4. Örnek 4.1.3 deki esnek topolojiyi ele alalım. Bu durumda

$(F_1,K)^- = \{(F_1,K),(F_3,K),(F_5,K),(F_7,K),(F_9,K),(F_{11},K),(F_{13},K),\tilde{Y}\}$

$(F_8,K)^- = \{(F_8,K),(F_9,K),(F_{10},K),(F_{11},K),(F_{12},K),(F_{13},K),(F_{14},K),\tilde{Y}\}$

$(F_9,K)^- =\{(F_1,K),(F_3,K),(F_5,K),(F_7,K),(F_8,K),(F_9,K),(F_{10},K),(F_{11},K),$
$(F_{12},K),(F_{13},K),(F_{14},K),\tilde{Y}\}$

$\tilde{Y}^- = \mathbb{S}(Y,K)$ olur.

O halde $\mathcal{S}_{SV^-} = \{(F_1,K)^-,\ (F_8,K)^-,(F_9,K)^-,\tilde{Y}^-\}$ ailesi $S(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için alt tabandır. Çünkü, $(F_1,K)^- \cap (F_8,K)^- = \{(F_9,K),(F_{11},K),(F_{13},K),\tilde{Y}\}$ olmak üzere $\beta_{SV^-} = \{(F_1,K)^-,\ (F_8,K)^-,(F_9,K)^-,\tilde{Y}^-,(F_1,K)^- \cap (F_8,K)^-\}$ ailesi $\mathbb{S}(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Bu esnek topoloji (alt esnek Vietoris topoloji) de

$\tau_{SV^-} = \{(F_1,K)^-,\ (F_8,K)^-,(F_9,K)^-,\tilde{Y}^-,(F_1,K)^- \cap (F_8,K)^-,\emptyset\}$ olarak bulunur.

Örnek 4.1.5. Örnek 4.1.3 deki esnek topolojiyi ele alalım. Bu durumda $\tau_{SV^+} \cup \tau_{SV^-} = \left\{(F_1,K)^+,\ (F_8,K)^+,\ (F_1,K)^+ \cup (F_8,K)^+,\ (F_9,K)^+,\ \tilde{Y}^+,\emptyset,(F_1,K)^-,\right.$ $\left.(F_8,K)^-,\ (F_9,K)^-,(F_1,K)^- \cap (F_8,K)^-\right\}$ nin taban olduğu esnek Vietoris topoloji de $\tau_{SV} =\{\emptyset,\mathbb{S}(Y,K),\{(F_1,K)\},\{(F_8,K)\},\{(F_1,K),(F_8,K)\},\{(F_1,K),(F_8,K),(F_9,K)\},$
$\{(F_1,K),(F_3,K),(F_5,K),(F_7,K),(F_9,K),(F_{11},K),(F_{13},K),\tilde{Y}\},$

$\{(F_8,K),(F_9,K),(F_{10},K),(F_{11},K),(F_{12},K),(F_{13},K),(F_{14},K),\tilde{Y}\}$,
$\{(F_1,K),(F_3,K),(F_5,K),(F_7,K),(F_8,K),(F_9,K),(F_{10},K),(F_{11},K)$,
$(F_{12},K),(F_{13},K),(F_{14},K),\tilde{Y}\}$,$\{(F_9,K),(F_{11},K),(F_{13},K),\tilde{Y}\}$,
$\{(F_1,K),(F_8,K),(F_9,K),(F_{10},K),(F_{11},K)$,$(F_{12},K),(F_{13},K),(F_{14},K),\tilde{Y}\}$,
$\{(F_1,K),(F_9,K),(F_{11},K)$,$(F_{13},K),\tilde{Y}\}$,
$\{(F_1,K),(F_3,K),(F_5,K),(F_7,K),(F_8,K),(F_9,K),(F_{11},K),(F_{13},K),\tilde{Y}\}$,
$\{(F_8,K),(F_9,K),(F_{11},K),(F_{13},K),\tilde{Y}\}$, $\{(F_1,K),(F_8,K),(F_9,K),(F_{11},K),(F_{13},K),\tilde{Y}\}\}$
olur.

Uyarı 4.1.6. Esnek dönüşümlerin sürekliliğinden bahsedebilmek için tanım ve değer kümeleri üzerinde topolojik yapılar olması gerekir. Bu nedenle esnek dönüşümlerin sürekliliği ile ilgili çalışmalarda $S(X,E)$ ve $S(Y,K)$ esnek küme aileleri yerine $(X,\tilde{\upsilon},E)$ ve $(Y,\tilde{\tau},K)$ esnek topolojik uzaylar alınacak, dolayısıyla $F\colon S(X,E)\to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü $F\colon(X,\tilde{\upsilon},E)\to(Y,\tilde{\tau},K)$ biçiminde düşünülecektir.

Tanım 4.1.7. $(X,\sigma,E),(Y,\tau,K)$ iki esnek topolojik uzay, ${E_e}^{x_0}$ X de bir esnek nokta ve $F\colon(X,\sigma,E)\to(Y,\tau,K)$ da bir esnek küme değerli dönüşüm olsun.

(i) ${E_e}^{x_0}\,\tilde{\in}\,F^{+}(H,K)$ olan Y deki her (H,K) esnek açık kümesi için $(P,E)\,\tilde{\subset}\,F^{+}(H,K)$ (yani her ${E_e}^{x}\,\tilde{\in}\,(P,E)$ için $F({E_e}^{x})\,\tilde{\subset}\,(H,K)$) şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu var ise F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten Vietoris yarı süreklidir denir.

(ii) ${E_e}^{x_0}\,\tilde{\in}\,F^{-}(H,K)$ olan Y deki her (H,K) esnek açık kümesi için $(P,E)\,\tilde{\subset}\,F^{-}(H,K)$ (yani her ${E_e}^{x}\,\tilde{\in}\,(P,E)$ için $F({E_e}^{x})\,\tilde{\cap}\,(H,K)\neq\Phi$) şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu var ise F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten Vietoris yarı süreklidir denir.

(iii) F dönüşümü X in her ${E_e}^{x_0}$ esnek noktasında esnek üstten (alttan) Vietoris yarı sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) Vietoris yarı süreklidir denir.

(iv) F, üstten ve alttan esnek Vietoris sürekli ise F ye esnek Vietoris süreklidir denir.

Tanım 4.1.8. $(X,\sigma,E),(Y,\tau,K)$ iki esnek topolojik uzay ve $P(Y)$ de Y nin kuvvet kümesi olsun. Bu durumda $u\colon X\to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p\colon E\to K$ fonksiyonu aracılığı ile tanımlanan $F\colon(X,\sigma,E)\to(Y,\tau,K)$ esnek küme değerli dönüşümünü ele alalım. $u'(x)=u(x)$, $u'\colon X\to P(Y)$ ve $p'(e)=p(e)$, $p'\colon E\to K$ fonksiyonları aracılığıyla $f\colon(X,\sigma,E)\to(S(Y,K),\tau_{S(Y,K)},K)$ esnek fonksiyonunu tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan f esnek fonksiyonunan F esnek küme değerli dönüşümüne karşılık gelen esnek fonksiyon adı verilir. Bu durumda X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası için $f({E_e}^x) = F({E_e}^x)$ olur.

Teorem 4.1.9. $(X, \sigma, E), (Y, \tau, K)$ iki esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $F: (X, \sigma, E) \to (Y, \tau, K)$ esnek küme değerli dönüşümünün üstten (alttan) esnek Vietoris yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart f esnek fonksiyonunun $S(Y, K)$ üzerindeki τ_{SV^+} (τ_{SV^-}) esnek topolojisine göre esnek sürekli olmasıdır.

İspat. (⇒) F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten Vietoris yarı sürekli ve $f({E_e}^{x_0}) \in (G, K)^+ \in \beta_{SV^+}$ olsun. $(G, K)^+ = \{(H, K): (H, K) \tilde{\subset} (G, K)\}$ olduğundan $f({E_e}^{x_0}) \tilde{\in} (G, K)$ olduğunu elde ederiz. Böylece $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subset} (G, K)$ dir. $F: X \to Y$, esnek üstten Vietoris yarı sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her ${E_e}^x \tilde{\in} (P, E)$ için $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (G, K)$ dır. O halde $f({E_e}^x) \tilde{\in} (G, K)$ olup $f: (X, \sigma, E) \to (S(Y, K), \tau_{SV^+}, K)$ fonksiyonu ${E_e}^{x_0}$ da esnek süreklidir.

(⇐) $f: (X, \sigma, E) \to (S(Y, K), \tau_{SV^+}, K)$ fonksiyonu ${E_e}^{x_0}$ da esnek sürekli ve (G, K) da $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subset} (G, K)$ şartını sağlayan bir esnek açık küme olsun. Bu durumda $f({E_e}^{x_0}) \in (G, K)^+ \in \beta_{SV^+}$dir. f esnek fonksiyonu τ_{SV^+} ye göre esnek sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $f(P, E) \tilde{\subset} (G, K)$ dır. O halde her ${E_e}^x \tilde{\in} (P, E)$ için $f({E_e}^x) \in (G, K)^+$ ve böylece $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (G, K)$ dır. Bu da $F: X \to Y$ nin ${E_e}^{x_0}$ da üstten esnek Vietoris yarı sürekli olduğunu gösterir.

Benzer şekilde alttan esnek Vietoris yarı süreklilik için de ispat yapılabilir.

4.2. Esnek Üst ve Alt Ko-Kompakt Topolojiler

Bu kısımda, (Y, τ, K) esnek topolojik uzayının kompakt alt kümelerinden yararlanarak $S(Y, K)$ üzerinde üst (alt) ko-kompakt topolojiler tanımlanmıştır ve bu topolojiler üst (alt) esnek Vietoris topolojiler ile kıyaslanmıştır. Aşağıda $S(Y, K)$ üzerinde esnek üst ve alt ko-kompakt topolojileri tanımlarken kullandığımız bir önerme verilmiştir.

Önerme 4.2.1. (Y, τ, K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda

$\beta_{SC^+} = \{S(Y, K) - (C, K)^- : (C, K)\ esnek\ kompakt\ k\ddot{u}me\}$ ve

$\mathcal{S}_{SC^-} = \{\emptyset\} \cup \{S(Y, K) - (C, K)^+ : (C, K)\ esnek\ kompakt\ k\ddot{u}me\}$ esnek küme aileleri $S(Y, K)$ üzerinde farklı iki esnek topoloji için sırasıyla esnek taban ve esnek alt tabandır.

İspat. $(C, K) = \phi$ esnek kompakt bir küme olup $(C, K)^- = \emptyset$ olduğundan

$S(Y, K) - (C, K)^- = S(Y, K) - \emptyset = S(Y, K) \in \beta_{SC^+}$ olur.

Böylece $S(Y, K) = \bigcup_{S(Y,K) \in \beta_{SC^+}} S(Y, K)$ dır.

$S(Y, K) - (C_1, K)^-,\ S(Y, K) - (C_2, K)^- \in \beta_{SC^+}$ olmak üzere

$(H, K) \in [S(Y, K) - (C_1, K)^-] \cap [S(Y, K) - (C_2, K)^-]$ için

$[S(Y, K) - (C_1, K)^-] \cap [S(Y, K) - (C_2, K)^-] = S(Y, K) - [(C_1, K)^- \cup (C_2, K)^-]$

olduğundan $(H, K) \in S(Y, K) - [(C_1, K)^- \cup (C_2, K)^-]$ bulunur.

Ayrıca $(C_1, K)^- \cup (C_2, K)^- = \big((C_1, K) \cup (C_2, K)\big)^-$ dır ve (C_1, K), (C_2, K) esnek kompakt kümeleri için $(C_1, K) \tilde{\cup} (C_2, K)$ esnek kompakt küme olduğundan $S(Y, K) - [(C_1, K)^- \cup (C_2, K)^-] \in \beta_{SC^+}$ tür. O halde β_{SC^+} bir esnek topolojik uzay için tabandır.

Benzer şekilde $\mathcal{S}_{SC^-}$ nin de bir esnek topolojik uzay için alt taban olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.2.2. i) $S(Y, K)$ üzerinde β_{SC^+} ailesini taban kabul eden topolojiye esnek üst ko-kompakt topoloji denir ve τ_{SC^+} ile gösterilir.

ii) $S(Y, K)$ üzerinde $\mathcal{S}_{SC^-}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye esnek alt ko-kompakt topoloji denir ve τ_{SC^-} ile gösterilir.

Lemma. 4.2.3. Bir esnek kompakt topolojik uzayında esnek kapalı bir küme esnek kompakttır.

İspat. (X,τ,E) bir esnek kompakt topolojik uzay ve (H,E) bu uzayda bir esnek kapalı küme ve $\{(G_i,E): i\in I\}$ ailesi (H,E) nin bir esnek açık örtüsü olsun. Bu durumda $\{(G_i,E): i\in I\}\,\tilde{\cup}\left(\tilde{X}-(H,E)\right)$ ailesi $\tilde{X}$ in bir esnek açık örtüsü olup (X,τ,E) esnek kompakt topolojik uzay olduğundan $\left\{\left(G_{i_1},E\right),\dots,\left(G_{i_n},E\right)\right\}\tilde{\cup}\left(\tilde{X}-(H,E)\right)$ ailesi $\tilde{X}$ in sonlu bir esnek alt örtüsüdür. Dolayısıyla $\left\{\left(G_{i_1},E\right),\dots,\left(G_{i_n},E\right)\right\}$ ailesi (H,E) nin bir esnek alt örtüsü olup (H,E) esnek kompakttır.

Lemma. 4.2.4. Bir Hausdorff esnek topolojik uzayında esnek kompakt bir küme esnek kapalıdır.

İspat. (X,τ,E) bir Hausdorff esnek topolojik uzay ve (C,E) bu uzayda bir esnek kompakt küme olsun. $\tilde{X}-(C,E)$ nın esnek açık küme olduğunu göstereceğiz. ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,\tilde{X}-(C,E)$ esnek noktası için ${E_e}^x\,\tilde{\notin}\,(C,E)$ olur. ${E_e}^x$ ten farklı her ${E_e}^y\,\tilde{\in}\,(C,E)$ esnek noktası için (X,τ,E) esnek Hausdorff olduğundan ${E_e}^x$ ve ${E_e}^y$ nin $\left(U_y,E\right)$ ve $\left(P_y,E\right)$ gibi iki esnek açık komşulukları vardır öyle ki $\left(U_y,E\right)\tilde{\cap}\left(P_y,E\right)=\phi$ dir. Bu durumda $\left\{\left(P_y,E\right): {E_e}^y\,\tilde{\in}\,(C,E)\right\}$ ailesi, (C,E) nin bir esnek açık örtüsüdür. (C,E) esnek kompakt olduğundan, $(C,E)\,\tilde{\subset}\,\bigcup_{i=1}^{n}\left(P_{y_i},E\right)$ şartını sağlayan sonlu bir esnek alt örtüsü vardır. Her $y_i\in\{y_1,\dots,y_n\}$ için $\left(U_{y_i},E\right)\tilde{\cap}\left(P_{y_i},E\right)=\phi$ olduğundan $\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{y_i},E\right)\right)\tilde{\cap}\left(P_{y_i},E\right)=\phi$ olup $\bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{y_i},E\right)$ esnek kümesi ${E_e}^x$ nin esnek açık komşuluğudur. Her $y_i\in\{y_1,\dots,y_n\}$ için $\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{y_i},E\right)\right)\tilde{\cap}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(P_{y_i},E\right)\right)=\phi$ olur. O halde $\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{y_i},E\right)\right)\tilde{\cap}\,(C,E)=\phi$ ve böylece ${E_e}^x\,\tilde{\in}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{y_i},E\right)\right)\tilde{\subset}\,\tilde{X}-(C,E)$ olur. Bu durumda $\tilde{X}-(C,E)$ esnek açık dolayısıyla (C,E) esnek kapalı küme olur.

Sonuç 4.2.5. Kompakt olan bir Hausdorff esnek topolojik uzayında bir kümenin esnek kompakt olması için gerek ve yeter koşul esnek kapalı olmasıdır.

Önerme 4.2.6. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. $\leq$ sembolü, esnek küme aileleri üzerindeki alt topoloji olma durumunu göstersin. Bu durumda $S(Y,K)$ üzerindeki $\tau_{SC^+}, \tau_{SC^-}, \tau_{SV^+}, \tau_{SV^-}$ esnek topolojiler için aşağıdakiler doğrudur;

i) (Y, τ, K) Hausdorff esnek topolojik uzay ise $\tau_{SC^+} \leq \tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SC^-} \leq \tau_{SV^-}$ dir.

ii) (Y, τ, K) Hausdorff ve kompakt esnek topolojik uzay ise $\tau_{SC^+} = \tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SC^-} = \tau_{SV^-}$ olur.

İspat. i) $S(Y, K) - (C, K)^- \in \beta_{SC^+}$ olsun. $S(Y, K) - (C, K)^- = \left(\tilde{Y} - (C, K)\right)^+$ olduğunu biliyoruz. (C, K) esnek kompakt küme ve (Y, τ, K) Hausdorff esnek topolojik uzay olduğundan (C, K) esnek kapalı küme, dolayısıyla $\tilde{Y} - (C, K)$ bir esnek açık kümedir. Böylece $\left(\tilde{Y} - (C, K)\right)^+ \in \tau_{SV^+}$ ve $S(Y, K) - (C, K)^- \in \tau_{SV^+}$ olup $\tau_{SC^+} \leq \tau_{SV^+}$ olur.

Benzer şekilde $S(Y, K) - (C, K)^+ \in \mathcal{S}_{SC^-}$ alalım. $S(Y, K) - (C, K)^+ = \left(\tilde{Y} - (C, K)\right)^-$ olduğunu biliyoruz. (C, K) esnek kompakt küme ve (Y, τ, K) Hausdorff esnek topolojik uzay olduğundan $\tilde{Y} - (C, K)$ bir esnek açık küme olup $\left(\tilde{Y} - (C, K)\right)^- \in \tau_{SV^-}$ ve $S(Y, K) - (C, K)^+ \in \tau_{SV^-}$ olup $\tau_{SC^-} \leq \tau_{SV^-}$ olduğu elde edilir.

ii) Hausdorff ve kompakt bir esnek topolojik uzayda kompakt kümeler ve kapalı kümeler çakıştığından $\tau_{SC^+} = \tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SC^-} = \tau_{SV^-}$ olur.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) C yarı süreklilik tanımı verilmiştir. Daha sonra bir esnek küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) C yarı sürekli oluşu, bu dönüşüme karşılık gelen esnek fonksiyonun sürekliliği cinsinden verilmiştir.

Tanım 4.2.7. $(X, \sigma, E), (Y, \tau, K)$ iki esnek topolojik uzay, ${E_e}^{x_0}$ X de bir esnek nokta ve $F: (X, \sigma, E) \to (Y, \tau, K)$ da bir esnek küme değerli dönüşüm olsun.

i) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (C, K) = \phi$ olan bir (C, K) esnek kompakt kümesi ve her ${E_e}^{x} \in (P, E)$ için $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (C, K) = \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten C yarı süreklidir denir.

ii) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (C, K) \neq \phi$ ve $\tilde{Y} - (C, K)$ esnek kompakt olan bir (C, K) esnek kümesi verilsin. Her ${E_e}^{x} \in (P, E)$ için $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (C, K) \neq \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan C yarı süreklidir denir.

iii) F dönüşümü X in her ${E_e}^{x_0}$ esnek noktasında esnek üstten (alttan) C yarı sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) C yarı süreklidir denir.

Önerme 4.2.8. $F:(X,\sigma,E)\ \rightarrow (Y,\tau,K)$ bir esnek küme değerli dönüşüm olsun.

i) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten C yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart F ye karşılık gelen $f:(X,\sigma,E)\ \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SC^+},K)$ esnek fonksiyonunun ${E_e}^{x_0}$ da sürekli olmasıdır.

ii) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan C yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart F ye karşılık gelen $f:(X,\sigma,E)\ \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SC^-},K)$ esnek fonksiyonunun ${E_e}^{x_0}$ da sürekli olmasıdır.

İspat. i) $(\Rightarrow)$ $f({E_e}^{x_0}) \in S(Y,K)-(C,K)^- \in \beta_{SC^+}$ olsun. Bu durumda $f({E_e}^{x_0}) \in \left(\tilde{Y}-(C,K)\right)^+ = \{(A,K):(A,K)\ \tilde{\subseteq}\ \tilde{Y}-(C,K)\}$ ve $f({E_e}^{x_0})\ \tilde{\subseteq}\ \tilde{Y}-(C,K)$ dir. O halde $f({E_e}^{x_0})\ \tilde{\cap}\ (C,K)=\phi$ ve dolayısıyla $F({E_e}^{x_0})\ \tilde{\cap}\ (C,K)=\phi$ dir. F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten C yarı sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her bir ${E_e}^{x} \in (P,E)$ için $F({E_e}^{x})\ \tilde{\cap}\ (C,K)=\phi$ dir. Böylece $f({E_e}^{x}) \notin (C,K)^-$ ve dolayısıyla $f({E_e}^{x}) \in S(Y,K)-(C,K)^-$ olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak $f:(X,\sigma,E)\rightarrow (S(Y,K),\tau_{SC^+},K)$ esnek fonksiyonu ${E_e}^{x_0}$ da süreklidir.

$(\Leftarrow)$ $F({E_e}^{x_0})\ \tilde{\cap}\ (C,K)=\phi$ şartını sağlayan bir (C,K) esnek kompakt kümesini alalım. Bu durumda $f({E_e}^{x_0}) \notin (C,K)^-$ olduğundan $f({E_e}^{x_0}) \in S(Y,K)-(C,K)^- \in \beta_{SC^+}$ dir. $f:(X,\sigma,E)\ \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SC^+},K)$ esnek fonksiyonu ${E_e}^{x_0}$ da sürekli olduğundan, ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $f(P,E) \in S(Y,K)-(C,K)^-$ tir. Böylece her ${E_e}^{x} \in (P,E)$ için $f({E_e}^{x}) \in S(Y,K)-(C,K)^-$ dir. O halde $F({E_e}^{x})\ \tilde{\cap}\ (C,K)=\phi$ dir. Dolayısıyla F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten C yarı süreklidir.

ii) Benzer şekilde ispatı yapılabilir.

Aşağıdaki önermelerde bir esnek küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) C yarı sürekli oluşuna denk koşullar verilmiştir.

Önerme 4.2.9. $F:(X,\sigma,E)\ \rightarrow (Y,\tau,K)$ bir esnek küme değerli dönüşüm ve (Y,τ,K) bir Hausdorff esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir;

i) F esnek üstten C yarı süreklidir.

ii) $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek kompakt olan her esnek açık (V,K) kümesi için $F^+(V,K)$ kümesi X de esnek açıktır.

iii) Y deki her (H,K) esnek kompakt kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek kapalıdır.

İspat. (i ⇒ ii) (V,K) esnek açık küme olmak üzere $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek kompakt ve ${E_e}^{x_0} \tilde{\in} F^+(V,K)$olsun. Buradan $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subset} (V,K)$ olup $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y}-(V,K)\right) = \phi$ olduğu elde edilir. F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten C yarı sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her bir ${E_e}^{x} \tilde{\in} (P,E)$ için $F({E_e}^{x}) \tilde{\subset} (V,K)$ dir. Bu durumda ${E_e}^{x_0} \tilde{\in} (P,E) \tilde{\subset} F^+(V,K)$ dir ve böylece ${E_e}^{x_0} \tilde{\in} int\left(F^+(V,K)\right)$ olduğu elde edilir. O halde $F^+(V,K) \tilde{\subset} int\left(F^+(V,K)\right)$ dolayısıyla $F^+(V,K)$ esnek açık bir kümedir.

(ii ⇒ iii) (H,K), Y de herhangi bir esnek kompakt küme olsun. Bu durumda Y Hausdorff olduğundan (H,K) esnek kapalı kümedir. O halde $\tilde{Y}-(H,K)$ esnek açık küme ve $\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)$ esnek kompakt kümedir. ii) den, $F^+\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)$ esnek açık kümedir. Ayrıca $F^+\left(\tilde{Y}-(H,K)\right) = \tilde{X}-\left(F^-(H,K)\right)$ olduğundan $\tilde{X}-\left(F^-(H,K)\right)$ esnek açık kümedir ve böylece $F^-(H,K)$ esnek kapalı kümedir.

(iii ⇒ i) (C,K) kümesi, $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (C,K) = \phi$ şartını sağlayan bir esnek kompakt küme olsun. Bu durumda $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subset} \tilde{Y}-(C,K)$ dir. iii) den $F^-(C,K)$ bir esnek kapalı kümedir. Böylece $\tilde{X}-\left(F^-(C,K)\right) = F^+\left(\tilde{Y}-(C,K)\right)$ esnek açık kümedir ve ${E_e}^{x_0} \in F^+\left(\tilde{Y}-(C,K)\right)$ dir. $(P,E) = F^+\left(\tilde{Y}-(C,K)\right)$ olarak alınırsa, (P,E) kümesi ${E_e}^{x_0}$ ın bir esnek açık komşuluğudur. O halde her ${E_e}^{x} \in F^+\left(\tilde{Y}-(C,K)\right)$ için $F({E_e}^{x}) \tilde{\subset} \tilde{Y}-(C,K)$ dir ve böylece $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (C,K) = \phi$ dir. O halde F esnek küme değerli dönüşümü ${E_e}^{x_0}$ da üstten esnek C yarı süreklidir.

Önerme 4.2.10. $F:(X,\sigma,E) \rightarrow (Y,\tau,K)$ bir esnek küme değerli dönüşüm ve (Y,τ,K) bir Hausdorff esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan C yarı süreklidir.

ii) $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek kompakt olan her (V,K) esnek açık kümesi için $F^-(V,K)$ esnek açık kümedir.

iii) Y deki her esnek kompakt (H,K) kümesi için $F^+(H,K)$ kümesi esnek kapalıdır.

İspat. Önceki önermeye benzer şekilde ispatı yapılabilir.

4.3. Esnek Üst ve Alt Ko-Lindelöf Topolojiler

Bu kısımda, (Y, τ, K) esnek topolojik uzayının Lindelöf alt kümelerinden yararlanarak $S(Y, K)$ üzerinde üst (alt) ko-Lindelöf topolojileri tanımlanmış daha sonra bu topolojiler ile üst (alt) esnek Vietoris topolojiler kıyaslanmıştır. Öncelikle aşağıda $S(Y, K)$ üzerinde esnek üst (alt) ko-lindelöf topolojileri tanımlarken kullandığımız bir önerme verilmiştir.

Önerme 4.3.1. (Y, τ, K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda

$\beta_{SL^+} = \{S(Y, K) - (L, K)^- : (L, K)\ Lindelöf\ esnek\ küme\}$,

$\mathcal{S}_{SL^-} = \{\emptyset\} \cup \{S(Y, K) - (L, K)^+ : (L, K)\ Lindelöf\ esnek\ küme\}$
esnek küme aileleri $S(Y, K)$ üzerinde farklı iki topoloji için sırasıyla taban ve alt tabandır.

İspat. $(L, K) = \phi$ esnek Lindelöf bir küme olup $(L, K)^- = \emptyset$ olduğundan $S(Y, K) - (L, K)^- = S(Y, K) \in \beta_{SL^+}$ ve böylece $S(Y, K) = \bigcup_{S(Y,K) \in \beta_{SL^+}} S(Y, K)$ bulunur.

$S(Y, K) - (L_1, K)^- S(Y, K) - (L_2, K)^- \in \beta_{SL^+}$ olmak üzere $(H, K) \in [S(Y, K) - (L_1, K)^-] \cap [S(Y, K) - (L_2, K)^-]$ için $[S(Y, K) - (L_1, K)^-] \cap [S(Y, K) - (L_2, K)^-] = S(Y, K) - [(L_1, K)^- \cup (L_2, K)^-]$ olduğundan $(H, K) \in S(Y, K) - [(L_1, K)^- \cup (L_2, K)^-]$ dir. Ayrıca $(L_1, K)^- \cup (L_2, K)^- = \big((L_1, K) \cup (L_2, K)\big)^-$ dır ve (L_1, K), (L_2, K) esnek Lindelöf kümeleri için $(L_1, K) \tilde{\cup} (L_2, K)$ esnek Lindelöf küme olduğundan $S(Y, K) - [(L_1, K)^- \cup (L_2, K)^-] \in \beta_{SL^+}$ olur. O halde β_{SL^+} bir esnek topolojik uzay için tabandır.

Benzer şekilde $\mathcal{S}_{SL^-}$ nın da bir esnek topolojik uzay için alt taban olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.3.2. i) $S(Y, K)$ üzerinde β_{SL^+} ailesini taban kabul eden topolojiye esnek üst ko-lindelöf topoloji denir ve τ_{SL^+} ile gösterilir.

ii) $S(Y, K)$ üzerinde $\mathcal{S}_{SL^-}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye esnek alt ko-lindelöf topoloji denir ve τ_{SL^-} ile gösterilir.

Lemma 4.3.3. Esnek kompakt kümeler esnek Lindelöf'tür.

İspat. Esnek kompakt küme ve esnek Lindelöf küme tanımlarından açıktır.

Tanım 4.3.4. Bir esnek topolojik uzayın bütün esnek Lindelöf alt kümeleri esnek kapalı ise bu uzaya Lindelöf kapalı esnek uzay denir.

Önerme 4.3.5. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $S(Y,K)$ üzerindeki $\tau_{SL^+}, \tau_{SL^-}, \tau_{SC^+}, \tau_{SC^-}, \tau_{SV^+}, \tau_{SV^-}$ esnek topolojileri için aşağıdakiler doğrudur;

i) (Y,τ,K) Lindelöf kapalı esnek topolojik uzay ise $\tau_{SL^+} \le \tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SL^-} \le \tau_{SV^-}$ olur.

ii) $\tau_{SC^+} \le \tau_{SL^+}$ ve $\tau_{SC^-} \le \tau_{SL^-}$

İspat. i) $S(Y,K) - (L,K)^- \in \beta_{SL^+}$ olsun. (L,K) Lindelöf esnek küme olduğundan hipotezden (L,K) esnek kapalı kümedir. O halde $\tilde{Y} - (L,K)$ esnek açık küme olup $\left(\tilde{Y} - (L,K)\right)^+ \in \tau_{SV^+}$ olur. Ayrıca $S(Y,K) - (L,K)^- = \left(\tilde{Y} - (L,K)\right)^+$ olduğundan $S(Y,K) - (L,K)^- \in \tau_{SV^+}$ bulunur. Böylece $\tau_{SL^+} \le \tau_{SV^+}$ olduğu elde edilir.

Benzer şekilde $\tau_{SL^-} \le \tau_{SV^-}$ olduğu gösterilebilir.

ii) Bir (Y,τ,K) esnek topolojik uzayında, kompakt esnek kümeler Lindelöf olduğundan ispat açıktır.

Sonuç 4.3.6. Bir (Y,τ,K) Lindelöf kapalı esnek topolojik uzayında $\tau_{SC^+} \le \tau_{SL^+} \le \tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SC^-} \le \tau_{SL^-} \le \tau_{SV^-}$ ifadeleri doğrudur.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) L yarı süreklilik tanımları verilmiştir. Daha sonra bir esnek küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) L yarı sürekli oluşu ile bu dönüşüme karşılık gelen esnek fonksiyonun sürekliliği arasındaki ilişki verilmiştir. Son olarak bir esnek küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) L yarı sürekli oluşuna denk koşullar verilmiştir.

Tanım 4.3.7. $(X,\sigma,E), (Y,\tau,K)$ iki esnek topolojik uzay, ${E_e}^{x_0}$ X de bir esnek nokta ve $F: (X,\sigma,E) \to (Y,\tau,K)$ da bir esnek küme değerli dönüşüm olsun.

i) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (L,K) = \phi$ olan bir (L,K) esnek Lindelöf kümesi verilsin. ${E_e}^{x} \in (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (L,K) = \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten L yarı süreklidir denir.

ii) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (L,K) \ne \phi$ ve $\tilde{Y} - (L,K)$ esnek Lindelöf olan bir (L,K) esnek kümesi verilsin. ${E_e}^{x} \in (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (L,K) \ne \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan L yarı süreklidir denir.

iii) F dönüşümü X in her ${E_e}^{x_0}$ esnek noktasında esnek üstten (alttan) L yarı sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) L yarı süreklidir denir.

Önerme 4.3.8. $F:(X,\sigma,E) \rightarrow (Y,\tau,K)$ bir esnek küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f:(X,\sigma,E) \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SL^+},K)$ fonksiyonunun ${E_e}^{x_0}$ da esnek sürekli olmasıdır.

ii) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f:(X,\sigma,E) \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SL^-},K)$ fonksiyonunu ${E_e}^{x_0}$ da esnek sürekli olmasıdır.

İspat. Önerme 4.2.8. e benzer şekilde ispatı yapılabilir.

Önerme 4.3.9. $F:(X,\sigma,E) \rightarrow (Y,\tau,K)$ bir esnek küme değerli dönüşüm ve (Y,τ,K) Lindelöf kapalı esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek Lindelöf küme olmak üzere $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subset} (V,K)$ olan her (V,K) esnek açık kümesi için ${E_e}^{x} \in (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\subset} (V,K)$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğunun bulunmasıdır.

ii) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $\tilde{Y}-(V,K)$ Lindelöf esnek küme olmak üzere $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ olan her (V,K) esnek açık kümesi için ${E_e}^{x} \in (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğunun bulunmasıdır.

İspat. Tanım 4.3.7. den ispatı açıktır.

Önerme 4.3.10. $F:(X,\sigma,E) \rightarrow (Y,\tau,K)$ bir küme değerli dönüşüm ve (Y,τ,K) esnek Lindelöf kapalı topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek Lindelöf küme olmak üzere her (V,K) esnek açık kümesi için $F^+(V,K)$ nın esnek açık küme olmasıdır.

ii) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek Lindelöf küme olmak üzere her (V,K) esnek açık kümesi için $F^-(V,K)$ nın esnek açık küme olmasıdır.

İspat. i) $(\Rightarrow)$ $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek Lindelöf küme olacak şekilde (V,K) esnek açık küme ve ${E_e}^{x_0} \in F^+(V,K)$ olsun. Bu durumda $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subseteq} F\big(F^+(V,K)\big) \tilde{\subseteq} (V,K)$ dır ve böylece $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y}-(V,K)\right) = \phi$ dır. $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek Lindelöf küme ve F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten L yarı sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $F(P,E) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y}-(V,K)\right) = \phi$ dir. O halde $F(P,E) \tilde{\subseteq} (V,K)$ dir ve böylece ${E_e}^{x_0} \in (P,E) \tilde{\subseteq} F^+(V,K)$ dir. O halde ${E_e}^{x_0} \tilde{\in} int\left(F^+(V,K)\right)$ dir. Dolayısıyla $F^+(V,K) \tilde{\subseteq} int\big(F^+(V,K)\big)$ bulunur ki buda $F^+(V,K)$ nin esnek açık bir küme olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$ (L,K) bir esnek Lindelöf küme olmak üzere $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (L,K) = \phi$ olsun. Bu durumda $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subseteq} \tilde{Y}-(L,K)$ dir. (Y,τ,K) esnek Lindelöf kapalı topolojik uzay olduğundan, (L,K) esnek kapalı küme olup $\tilde{Y}-(L,K)$ esnek açık bir kümedir. Hipotezden $F^+\left(\tilde{Y}-(L,K)\right)$ bir esnek açık kümedir ve ${E_e}^{x_0} \in F^+\left(\tilde{Y}-(L,K)\right)$ dir. $(P,E) = F^+\left(\tilde{Y}-(L,K)\right)$ olarak alınırsa (P,E) esnek kümesi, ${E_e}^{x_0}$ ın bir esnek açık komşuluğudur. Buradan $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subseteq} F(P,E) \tilde{\subseteq} \left(\tilde{Y}-(L,K)\right)$ olduğu elde edilir. Ayrıca $F(P,E) \tilde{\cap} (L,K) = \phi$ dır. Dolayısıyla F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten L yarı süreklidir

ii) $(\Rightarrow)$ $\tilde{Y}-(V,K)$ bir esnek Lindelöf küme olacak şekilde (V,K) esnek açık küme ve ${E_e}^{x_0} \in F^-(V,K)$ olsun. Bu durumda $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ dır. $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek Lindelöf küme olup F dönüşümü ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan L yarı sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $F(P,E) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ dir. Buradan ${E_e}^{x_0} \in (P,E) \tilde{\subseteq} F^-(V,K)$ dir ve böylece ${E_e}^{x_0} \in int\left(F^-(V,K)\right)$ dir. O halde $F^-(V,K) \tilde{\subseteq} int\big(F^-(V,K)\big)$ ve $F^-(V,K)$ bir esnek açık kümedir.

$(\Leftarrow)$ $\tilde{Y}-(V,K)$ bir esnek Lindelöf küme ve $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ olsun. (Y,τ,K) esnek Lindelöf kapalı topolojik uzay olduğundan $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek kapalı ve (V,K) esnek açık bir kümedir. Hipotezden $F^-(V,K)$ esnek açık küme ve ${E_e}^{x_0} \in F^-(V,K)$ dir. $(P,E) = F^-(V,K)$ olarak alınırsa, (P,E) esnek kümesi, ${E_e}^{x_0}$ ın bir esnek açık komşuluğudur. O halde $F(P,E) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ dir. Böylece F dönüşümü ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan L yarı süreklidir.

4.4. Esnek Üst ve Alt ko-quasi H-kapalı Topolojiler

Bu kısımda, (Y,τ,K) esnek topolojik uzayının esnek quasi H-kapalı alt kümelerinden yararlanarak $S(Y,K)$ üzerinde üst (alt) ko-quasi H-kapalı topolojiler tanımlanmıştır. Daha sonra bu topolojiler ile esnek üst (alt) Vietoris topolojiler arasındaki ilişki verilmiştir. Öncelikle aşağıda esnek üst (alt) ko-quasi H-kapalı topolojileri tanımlarken kullandığımız tanım ve önerme verilmiştir.

Tanım 4.4.1. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay ve (H,K) bu uzayda bir esnek küme olsun.

i) (H,K) nın her açık örtüsünün esnek kapanışları (H,K) yı örten sonlu bir alt örtüsü varsa yani (H,K) nın her $\{(G_i,K) |\ i \in \Lambda\}$ esnek açık örtüsünün $(H,K) \tilde{\subseteq} \bigcup_{i=1}^{n} cl\big(G_{\lambda_i},K\big)$ şartını sağlayan bir $\{\big(G_{\lambda_1},K\big),\big(G_{\lambda_2},K\big),\cdots,\big(G_{\lambda_n},K\big)\}$ sonlu esnek alt örtüsü varsa (H,K)esnek kümesine quasi-H-kapalıdır denir.

ii) $\tilde{Y}$ nin her açık örtüsünün esnek kapanışları $\tilde{Y}$ yi örten sonlu bir alt örtüsü varsa yani $\tilde{Y}$ nin her $\{(G_i,K) |\ i \in \Lambda\}$ esnek açık örtüsünün $\bigcup_{i=1}^{n} cl\big(G_{\lambda_i},K\big) = \tilde{Y}$ şartını sağlayan bir $\{\big(G_{\lambda_1},K\big),\big(G_{\lambda_2},K\big),\cdots,\big(G_{\lambda_n},K\big)\}$ sonlu bir esnek alt örtüsü varsa (Y,τ,K) esnek topolojik uzayına quasi-H-kapalıdır denir. Kısaca $\tilde{Y}$ nin kendisi quasi-H-kapalı ise (Y,τ,K) esnek topolojik uzayına quasi-H-kapalıdır denir.

iii) Esnek Hausdorff ve esnek quasi H-kapalı topolojik uzaya esnek H-kapalı topolojik uzay denir.

iv) Y in her esnek quasi H-kapalı kümesi esnek kapalı ise (Y,τ,K) ye esnek HC topolojik uzay denir.

v) X in her esnek kapalı kümesi esnek quasi H- kapalı ise (Y,τ,K) ye esnek C-kompakt topolojik uzay denir.

Önerme 4.4.2. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\beta_{SH^+} = \{S(Y,K) - (H,K)^-: (H,K)\ esnek\ quasi\ H - kapalı\ küme\}$$

$$\mathcal{S}_{SH^-} = \{\emptyset\} \cup \{S(Y,K) - (H,K)^+: (H,K)\ esnek\ quasi\ H - kapalı\ küme\}$$

esnek küme aileleri $S(Y,K)$ üzerinde iki farklı topoloji için sırasıyla bir taban ve alt tabandır.

İspat. $(H,K) = \phi$ bir esnek quasi H-kapalı küme ve $(H,K)^- = \emptyset$ olduğundan $S(Y,K) - (H,K)^- = S(Y,K) - \emptyset \in \beta_{SH^+}$ tir. O halde $S(Y,K) = \bigcup_{S(Y,K)\in\beta_{SH^+}} S(Y,K)$ dir.

$(G,K) \in S(Y,K) - (H_1,K)^-$ ve $(G,K) \in S(Y,K) - (H_2,K)^-$ olsun. Bu durumda $(G,K) \in [S(Y,K) - (H_1,K)^-] \cap [S(Y,K) - (H_2,K)^-] = S(Y,K) - [(H_1,K)^- \cup (H_2,K)^-]$ dir. O halde β_{SH^+} bir esnek topolojik uzay için tabandır.

Benzer şekilde $\mathcal{S}_{SH^-}$ nin da bir esnek topolojik uzay için alt taban olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.4.3. i) $S(Y,K)$ üzerinde β_{SH^+} ailesini taban kabul eden topolojiye esnek üst ko-quasi H-kapalı topoloji denir ve τ_{SH^+} ile gösterilir.

ii) $S(Y,K)$ üzerinde $\mathcal{S}_{SH^-}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye esnek alt ko-quasi H-kapalı topoloji denir ve τ_{SH^-} ile gösterilir.

Örnek 4.4.4. $Y = \{y\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K = \{k_1, k_2\}$ olsun. $(G,K) = \{(k_1,\{y\})\}$ esnek küme olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{Y}, (G,K)\}$ esnek topolojisi verilsin. O halde $\tilde{\tau}' = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ olup burada $(H,K) = \{(k_2,\{y\})\}$ dir. Bu durumda

$\phi^- = \emptyset$

$(G,K)^- = \{(G,K), \tilde{Y}\}$

$(H,K)^- = \{(H,K), \tilde{Y}\}$

$\tilde{Y}^- = S(Y,K) = \{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\}$ olduğundan

$S(Y,K) - \phi^- = S(Y,K) = \{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\}$

$S(Y,K) - (G,K)^- = \{(H,K)\}$

$S(Y,K) - (H,K)^- = \{(G,K)\}$

$S(Y,K) - \tilde{Y}^- = \emptyset$ dir.

O halde $\beta_{SH^+} = \{S(Y,K) - \phi^-,\ S(Y,K) - (G,K)^-,\ S(Y,K) - (H,K)^-, S(Y,K) - \tilde{Y}^-\}$ $= \left\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K)\},\ \{(G,K)\},\ \emptyset\right\}$ ailesi $S(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Bu esnek topoloji (üst esnek ko-quasi H-kapalı topoloji), $\tau_{SH^+} = \left\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K)\},\ \{(G,K)\},\ \emptyset,\ \{(G,K),(H,K)\}\right\}$ şeklindedir.

Örnek 4.4.5. $Y = \{y\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K = \{k_1, k_2\}$ olsun. $(G,K) = \{(k_1,\{y\})\}$ esnek kümesi için $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{Y}, (G,K)\}$ esnek topolojisi verilsin. O halde $(H,K)=\{(k_2,\{y\})\}$ esnek küme olmak üzere $\tilde{\tau}'=\{\Phi,\tilde{Y},(H,K)\}$ olur. Bu durumda

$\phi^+=\emptyset$

$(G,K)^+=\{(G,K)\}$

$(H,K)^+=\{(H,K)\}$

$\tilde{Y}^+=S(Y,K)$ olduğundan

$S(Y,K)-\phi^+=S(Y,K)=\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\}$

$S(Y,K)-(G,K)^+=\{(H,K),\tilde{Y}\}$

$S(Y,K)-(H,K)^+=\{(G,K),\tilde{Y}\}$

$S(Y,K)-\tilde{Y}^+=\emptyset$ dir.

O halde $\mathcal{S}_{SH^-}=\{S(Y,K)-\phi^+,S(Y,K)-(G,K)^+,S(Y,K)-(H,K)^+,\ S(Y,K)-\tilde{Y}^+\}$ $=\left\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(G,K),\tilde{Y}\},\ \emptyset\right\}$ ailesi $2^{S(Y,K)}$ üzerinde bir esnek topoloji için alt tabandır.

Dolayısıyla $\beta_{SH^-}=\left\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(G,K),\tilde{Y}\},\ \{\tilde{Y}\},\ \emptyset\right\}$ ailesi $S(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır.

Bu esnek topoloji (alt esnek ko-quasi H-kapalı topoloji) de $\tau_{SH^-}=\left\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(G,K),\tilde{Y}\},\ \{\tilde{Y}\},\ \emptyset\right\}$ olur.

Önerme 4.4.6. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $S(Y,K)$ üzerinde tanımlı $\tau_{SH^+},\tau_{SH^-},\tau_{SV^+},\tau_{SV^-}$ topolojileri için aşağıdakiler doğrudur;

i) (Y,τ,K) HC esnek topolojik uzay ise $\tau_{SH^+}\leq\tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SH^-}\leq\tau_{SV^-}$ dir.

ii) (Y,τ,K) HC ve C-kompakt esnek topolojik uzay ise $\tau_{SH^+}=\tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SH^-}=\tau_{SV^-}$ dir.

İspat. i) $S(Y,K)-(H,K)^-\in\beta_{SH^+}$ olsun. (H,K) quasi H-kapalı ve (Y,τ,K) HC esnek topolojik uzay olduğundan (H,K) esnek kapalı dolayısıyla $\tilde{Y}-(H,K)$ esnek açık bir kümedir. O halde $\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)^+\in\tau_{SV^+}$ dir. $S(Y,K)-(H,K)^-=\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)^+$ olduğundan $S(Y,K)-(H,K)^-\in\tau_{SV^+}$ ve dolayısıyla $\tau_{SH^+}\leq\tau_{SV^+}$ dır.

Benzer şekilde $S(Y,K)-(H,K)^+=\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)^-$ eşitliği kullanılarak $\tau_{SH^-}\leq\tau_{SV^-}$ olduğu gösterilebilir.

ii) Bir HC ve C-kompakt esnek topolojik uzayda esnek quasi H-kapalı kümeler ve esnek kapalı kümeler çakışık olduğundan $\tau_{SH^+} = \tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SH^-} = \tau_{SV^-}$ eşitlikleri elde edilir.

Sonuç 4.4.7. Bir esnek topolojik uzayda esnek kompakt kümeler esnek quasi H-kapalı

olduğundan $\tau_{SC^+} \leq \tau_{SH^+}$ ve $\tau_{SC^-} \leq \tau_{SH^-}$ dir.

Sonuç 4.4.8. (Y, τ, K) bir HC esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $\tau_{SC^+} \leq \tau_{SH^+} \leq \tau_{SV^+}$ ve $\tau_{SC^-} \leq \tau_{SH^-} \leq \tau_{SV^-}$ dir.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) H yarı süreklilik tanımı verilmiştir. Daha sonra bir esnek küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) H yarı sürekli oluşu ile bu dönüşüme karşılık gelen esnek fonksiyonun sürekliliği arasındaki bağıntı verilmiştir. Son olarak bir esnek küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) H yarı sürekli oluşuna denk koşullar verilmiştir.

Tanım 4.4.9. (X, σ, E), (Y, τ, K) iki esnek topolojik uzay, ${E_e}^{x_0}$, X te bir esnek nokta ve $F: (X, \sigma, E) \rightarrow (Y, \tau, K)$ esnek küme değerli dönüşüm olsun.

i) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V, K) = \phi$ ve $\tilde{Y} - (V, K)$ esnek quasi H-kapalı olan bir (V, K) esnek kümesi için ${E_e}^{x} \in (P, E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V, K) = \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten H yarı süreklidir denir.

ii) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V, K) \neq \phi$ ve $\tilde{Y} - (V, K)$ esnek quasi H-kapalı olan bir (V, K) esnek kümesi için ${E_e}^{x} \in (P, E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V, K) \neq \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan H yarı süreklidir denir.

iii) F dönüşümü X in her ${E_e}^{x_0}$ esnek noktasında esnek üstten (alttan) H yarı sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) H yarı süreklidir denir.

Önerme 4.4.10. (X, σ, E), (Y, τ, K) esnek topolojik uzaylar ve $F: (X, \sigma, E) \rightarrow (Y, \tau, K)$ esnek küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten H yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f: (X, \sigma, E) \rightarrow (S(Y, K), \tau_{SH^+}, K)$ esnek fonksiyonunun ${E_e}^{x_0}$ da sürekli olmasıdır.

ii) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan H yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f: (X, \sigma, E) \rightarrow (S(Y, K), \tau_{SH^-}, K)$ esnek fonksiyonunun ${E_e}^{x_0}$ da sürekli olmasıdır.

İspat. i) $(\Rightarrow)$ $f(E_e{}^{x_0}) \in S(Y,K) - (H,K)^- \in \beta_{SH^+}$ olsun. Bu durumda $f(E_e{}^{x_0}) \in S(Y,K) - (H,K)^- = \left(\tilde{Y} - (H,K)\right)^+$ ve $f(E_e{}^{x_0}) \tilde{\subseteq} \tilde{Y} - (H,K)$ olur. O halde $F(E_e{}^{x_0}) \tilde{\cap} (H,K) = \phi$ dir. F, $E_e{}^{x_0}$ da esnek üstten H yarı sürekli olduğundan $E_e{}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $E_e{}^{x} \in (P,E)$ olduğunda $F(E_e{}^{x}) \tilde{\cap} (P,E) = \phi$ dir. Böylece $F(E_e{}^{x}) = f(E_e{}^{x}) \notin (H,K)^-$ olup $f(E_e{}^{x}) \in S(Y,K) - (H,K)^-$ dir. Dolayısıyla $f: (X,\sigma,E) \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SH^+},K)$ esnek fonksiyonu $E_e{}^{x_0}$ da esnek süreklidir.

$(\Leftarrow)$ (H,K), $F(E_e{}^{x_0}) \tilde{\cap} (H,K) = \phi$ şartını sağlayan bir esnek quasi H-kapalı küme olsun. Bu durumda $f(E_e{}^{x}) \notin (H,K)^-$ ve böylece $f(E_e{}^{x_0}) \in S(Y,K) - (H,K)^- \in \beta_{SH^+}$ dir. $f: (X,\sigma,E) \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SH^+},K)$ fonksiyonu $E_e{}^{x_0}$ da esnek sürekli olduğundan $E_e{}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $f(P,E) \in S(Y,K) - (H,K)^-$ dir. O halde her $E_e{}^{x} \in (P,E)$ için $f(E_e{}^{x}) \in S(Y,K) - (H,K)^-$ dir. Böylece $F(E_e{}^{x}) \tilde{\cap} (H,K) = \phi$ dir. Dolayısıyla F, $E_e{}^{x_0}$ da esnek üstten H yarı süreklidir.

ii) Benzer şekilde ispat edilebilir.

Önerme 4.4.11. Bir $F: (X,\sigma,E) \rightarrow (Y,\tau,K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir;

i) F esnek üstten H yarı süreklidir.

ii) $\tilde{Y} - (V,K)$ esnek quasi H-kapalı olan Y deki her (V,K) esnek kümesi için $F^+(V,K)$ kümesi X de esnek açık kümedir.

iii) Y deki her (H,K) esnek quasi H-kapalı kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek kapalı kümedir.

İspat. (i⇒ii) $\tilde{Y} - (V,K)$ esnek quasi H-kapalı olmak üzere (V,K) bir esnek küme ve $E_e{}^{x_0} \in F^+(V,K)$ olsun. Buradan $F(E_e{}^{x_0}) \tilde{\subseteq} (V,K)$ olup $F(E_e{}^{x_0}) \tilde{\cap} \left(\tilde{Y} - (V,K)\right) = \phi$ dir. F, $E_e{}^{x_0}$ da esnek üstten H yarı sürekli olduğundan $E_e{}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her bir $E_e{}^{x} \in (P,E)$ için $F(E_e{}^{x}) \tilde{\subseteq} (V,K)$ dir. O halde $E_e{}^{x_0} \in (P,E) \tilde{\subseteq} F^+(V,K)$ dir ve buradan $E_e{}^{x_0} \in int\left(F^+(V,K)\right)$ olduğu elde edilir. O halde $F^+(V,K) \tilde{\subseteq} int\left(F^+(V,K)\right)$ dir. Dolayısıyla $F^+(V,K)$ bir esnek açık kümedir.

(ii⇒iii) (H,K) bir esnek quasi H-kapalı küme olsun. Hipotezden, $F^{+}\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)$ bir esnek açık kümedir. $F^{+}\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)=\tilde{X}-\left(F^{-}(H,K)\right)$ olduğundan $\tilde{X}-\left(F^{-}(H,K)\right)$ esnek açık küme ve böylece $F^{-}(H,K)$ esnek kapalı kümedir.

(iii⇒i) (V,K), $F({E_e}^{x_0})\,\tilde{\cap}\,(V,K)=\phi$ şartını sağlayan bir esnek quasi H-kapalı küme olsun. Bu durumda $F({E_e}^{x_0})\,\tilde{\subseteq}\,\tilde{Y}-(V,K)$ tir. Hipotezden $F^{-}(V,K)$ esnek kapalı kümedir. Ayrıca, $\tilde{X}-\left(F^{-}(V,K)\right)=F^{+}\left(\tilde{Y}-(V,K)\right)$ olduğu için $F^{+}\left(\tilde{Y}-(V,K)\right)$ bir esnek açık kümedir ve ${E_e}^{x_0}\in F^{+}\left(\tilde{Y}-(V,K)\right)$ dir. Eğer $(P,E)=F^{+}\left(\tilde{Y}-(V,K)\right)$ olarak alınırsa, $F^{+}\left(\tilde{Y}-(V,K)\right)$ kümesi ${E_e}^{x_0}$ ın bir esnek açık komşuluğu olup, her ${E_e}^{x}\in F^{+}\left(\tilde{Y}-(V,K)\right)$ için $F({E_e}^{x})\,\tilde{\subseteq}\,\tilde{Y}-(V,K)$ olur. Böylece $F({E_e}^{x})\,\tilde{\cap}\,(V,K)=\phi$ olur. Dolayısıyla F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten H yarı süreklidir.

Önerme 4.4.12. Bir $F:(X,\sigma,E)\rightarrow(Y,\tau,K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir;

i) F esnek alttan H yarı süreklidir.

ii) $\tilde{Y}-(V,K)$ esnek quasi H-kapalı olan Y deki her (V,K) esnek kümesi için $F^{-}(V,K)$ X de esnek açık kümedir.

iii) Y deki her (H,K) esnek quasi H-kapalı kümesi için $F^{+}(H,K)$ esnek kapalı kümedir.

İspat. (i⇒ii) $\tilde{Y}-(V,K)$ quasi H-kapalı bir esnek küme olmak üzere (V,K) esnek kümesi için ${E_e}^{x_0}\in F^{-}(V,K)$ olsun. Bu durumda $F({E_e}^{x_0})\,\tilde{\cap}\,(V,K)\neq\phi$ dir. F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan H yarı sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her ${E_e}^{x}\in(P,E)$ için $F({E_e}^{x})\,\tilde{\cap}\,(V,K)\neq\phi$ dir. Buradan ${E_e}^{x_0}\,\tilde{\in}\,(P,E)\,\tilde{\subseteq}\,F^{-}(V,K)$ olduğu, dolayısıyla da ${E_e}^{x_0}\in int\left(F^{-}(V,K)\right)$ olduğu elde edilir. O halde $F^{-}(V,K)\,\tilde{\subseteq}\,int\left(F^{-}(V,K)\right)$ dir ve böylece $F^{-}(V,K)$ esnek açık kümedir.

(ii⇒iii) (H,K) esnek quasi H-kapalı bir küme olsun. Hipotezden $F^{-}\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)=\tilde{X}-\left(F^{+}(H,K)\right)$ kümesi X de esnek açık bir kümedir. Dolayısıyla $F^{+}(H,K)$ esnek kapalı kümedir.

(iii⇒i) $\tilde{Y} - (V, K)$ esnek quasi H-kapalı küme olmak üzere (V, K) esnek kümesi için $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V, K) \neq \phi$ olsun. Hipotezden $F^+\left(\tilde{Y} - (V, K)\right) = \tilde{X} - \left(F^-(V, K)\right)$ esnek kapalı bir kümedir. Böylece $F^-(V, K)$ esnek açık küme ve ${E_e}^{x_0} \in F^-(V, K)$ dir. $(P, E) = F^-(V, K)$ kümesi ${E_e}^{x_0}$ ın bir esnek açık komşuluğu olarak alınırsa, her ${E_e}^{x} \in F^-(V, K)$ için $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V, K) \neq \phi$ elde edilir. O halde F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan H yarı süreklidir.

4.5. Esnek Üst ve Alt D Topolojiler

Bu kısımda, (Y,τ,K) esnek topolojik uzayının esnek kapalı G_δ alt kümelerinden yararlanarak $S(Y,K)$ üzerinde üst (alt) D topolojiler tanımlanmıştır. Daha sonra bu topolojiler ile üst (alt) esnek Vietoris topolojiler kıyaslanmıştır. Öncelikle aşağıda esnek üst (alt) D topolojileri tanımlarken kullandığımız tanım ve ilgili önerme verilmiştir.

Tanım 4.5.1. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay ve (G,K) bu uzayda bir esnek küme olsun.

i) (G,K) kümesi sayılabilir sayıda esnek kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabiliyorsa yani (F_i,K) ler esnek kapalı kümeler olmak üzere $(G,K)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_i,K)$ olarak yazılabiliyorsa (G,K) ya esnek F_σ küme denir.

ii) (G,K) kümesi sayılabilir sayıda esnek açık kümenin kesişimi olarak yazılabiliyorsa yani (U_i,K) ler esnek açık kümeler olmak üzere $(G,K)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(U_i,K)$ olarak yazılabiliyorsa (G,K) ya G_δ esnek küme denir.

Önerme 4.5.2. Bir (Y,τ,K) esnek topolojik uzayında esnek F_σ ve esnek G_δ alt kümeler için aşağıdakiler doğrudur;

i) Her esnek kapalı küme esnek F_σ kümedir.

ii) Her esnek açık küme esnek G_δ kümedir.

iii) Bir esnek F_σ kümenin tümleyeni esnek G_δ kümedir ve bir esnek G_δ kümenin tümleyeni esnek F_σ kümedir.

iv) F_σ kümelerin sayılabilir birleşimi ve sonlu kesişimi F_σ kümedir.

v) G_δ kümelerin sayılabilir kesişimi ve sonlu birleşimiF_σ kümedir.

İspat. i) ve ii) esnek F_σ ve esnek G_δ küme tanımlarından açıktır.

iii) (G,K) bir esnek F_σ küme olsun. Bu durumda (F_i,K) ler esnek kapalı kümeler olmak üzere $(G,K)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_i,K)$ olup $\tilde{Y}-(G,K)=\tilde{Y}-\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_i,K)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{Y}-(F_i,K)\right)$ dır. $\tilde{Y}-(F_i,K)$ lar esnek açık kümeler olduğundan $\tilde{Y}-(G,K)$ esnek G_δ kümedir.

Diğer taraftan (G,K) bir esnek G_δ küme olsun. Bu durumda (U_i,K) ler esnek açık kümeler olmak üzere $(G,K)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(U_i,K)$ olup $\tilde{Y}-(G,K)=\tilde{Y}-\bigcap_{i=1}^{\infty}(U_i,K)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{Y}-(U_i,K)\right)$ dır. $\tilde{Y}-(U_i,K)$ lar esnek kapalı kümeler olduğundan $\tilde{Y}-(G,K)$ esnek F_σ kümedir.

iv) i) den açıktır.

v) ii) den açıktır.

Önerme 4.5.3. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda

$\beta_{SD^+}=\{S(Y,K)-(V,K)^-:(V,K),$ esnek $kapalı\ G_\delta$ küme$\}$

$\mathcal{S}_{SD^-}=\{\emptyset\}\cup\{S(Y,K)-(V,K)^+:(V,K),$ esnek $kapalı\ G_\delta$ küme$\}$

esnek küme aileleri $S(Y,K)$ üzerinde iki farklı topoloji için sırasıyla bir taban ve alt taban oluştururlar.

İspat. $(V,K)=\phi$ bir esnek kapalı G_δ küme ve $(V,K)^-=\emptyset$ olduğundan $S(Y,K)-(V,K)^-=S(Y,K)-\emptyset\in\beta_{SD^+}$ dir. Böylece $S(Y,K)=\bigcup_{S(Y,K)\in\beta_{SD^+}}S(Y,K)$ dir.

$(H,K)\in S(Y,K)-(V_1,K)^-$ ve $(H,K)\in S(Y,K)-(V_2,K)^-$ alalım. Bu durumda $(H,K)\in[S(Y,K)-(V_1,K)^-]\cap[S(Y,K)-(V_2,K)^-]=S(Y,K)-[(V_1,K)^-\cup(V_2,K)^-]$ dir. Dolayısıyla β_{SD^+} bir esnek topolojik uzay için tabandır.

Ayrıca $\mathcal{S}_{SD^-}\subset\beta_{SD^-}=\{\bigcap_{i=1}^{n}(S(Y,K)-(V_i,K)^+):S(Y,K)-(V_i,K)^-\in\mathcal{S}_{SD^-}\}=\{\bigcap_{i=1}^{n}(S(Y,K)-(V_i,K)^+):\ (V_i,K)\ esnek\ kapalı\ G_\delta$ küme$\}$ dir. $(V_i,K)=\phi$ olursa $(V_i,K)^+=\emptyset$ olduğundan $S(Y,K)-(V,K)^+=S(Y,K)-\emptyset\in\beta_{SD^-}$ dir. $(H,K)\in[\bigcap_{i=1}^{n}(S(Y,K)-(V_i,K)^+)]\cap\left[\bigcap_{j=1}^{m}\left(S(Y,K)-\left(V_j,K\right)^+\right)\right]$ alalım. Buradan $(H,K)\in\bigcap_{i=1}^{n}(S(Y,K)-(V_i,K)^+)$ ve $(H,K)\in\bigcap_{j=1}^{m}\left(S(Y,K)-\left(V_j,K\right)^+\right)$ olur. O halde her i için $(H,K)\in S(Y,K)-(V_i,K)^+$ ve her j için $(H,K)\in S(Y,K)-\left(V_j,K\right)^+$ olup buradan $(H,K)\notin(V_i,K)^+$ ve $(H,K)\notin\left(V_j,K\right)^+$ olduğunu elde ederiz. O halde en az bir i_0 için $(H,K)\notin\left(V_{i_0},K\right)^+$ ve en az bir j_0 için $(H,K)\notin\left(V_{j_0},K\right)^+$ dır. Dolayısıyla $(H,K)\notin\left(V_{i_0},K\right)^+\cup\left(V_{j_0},K\right)^+$ olup $(H,K)\in S(Y,K)-\left(\left(V_{i_0},K\right)^+\cup\left(V_{j_0},K\right)^+\right)=\left(S(Y,K)-\left(V_{i_0},K\right)^+\right)\cap\left(S(Y,K)-\left(V_{j_0},K\right)^+\right)$ dır. O halde $\mathcal{S}_{SD^-}$, $S(Y,K)$ üzerinde bir topoloji için alt tabandır.

Tanım 4.5.4. i) $S(Y,K)$ üzerinde β_{SD^+} ailesini taban kabul eden topoloji τ_{SD^+} ile gösterilir.

ii) $S(Y,K)$ üzerinde $\mathcal{S}_{SD^-}$ ailesini alt taban kabul eden topoloji τ_{SD^-} ile gösterilir.

Örnek 4.5.5. $Y=\{y_1,y_2\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K=\{k\}$ olmak üzere $\tilde{\tau}=\{\Phi,\tilde{Y},(G,K),(H,K)\}=\tilde{\tau}'$ esnek diskre topolojisi verilsin. Burada $(G,K)=\{(k,\{y_1\})\}$, $(H,K)=\{(k,\{y_2\})\}$ } dir. Bu durumda $\Phi,\tilde{Y},(G,K),(H,K)$ esnek kapalı G_δ kümeler olup

$\phi^- = \emptyset$
$(G,K)^- = \{(G,K),\tilde{Y}\}$
$(H,K)^- = \{(H,K),\tilde{Y}\}$
$\tilde{Y}^- = S(Y,K) = \{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\}$ olduğundan

$S(Y,K) - \phi^- = \{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\}$
$S(Y,K) - (G,K)^- = \{(H,K)\}$
$S(Y,K) - (H,K)^- = \{(G,K)\}$
$S(Y,K) - \tilde{Y}^- = \emptyset$

O halde $\beta_{SD^+} = = \left\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K)\},\ \{(G,K)\},\ \emptyset\right\}$ ailesi $S(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Bu esnek topoloji (üst esnek D topoloji), $\tau_{SD^+} = \left\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K)\},\ \{(G,K)\},\ \emptyset,\ \{(G,K),(H,K)\}\right\}$ olarak bulunur.

Örnek 4.5.6. $Y=\{y_1,y_2\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K=\{k\}$ olmak üzere $\tilde{\tau}=\{\Phi,\tilde{Y},(G,K),(H,K)\}=\tilde{\tau}'$ esnek diskre topolojisi verilsin. Burada $(G,K)=\{(k,\{y_1\})\}$, $(H,K)=\{(k,\{y_2\})\}$ } dir. Bu durumda $\Phi,\tilde{Y},(G,K),(H,K)$ esnek kapalı G_δ kümeler olup

$\phi^+ = \emptyset$
$(G,K)^+ = \{(G,K)\}$
$(H,K)^+ = \{(H,K)\}$
$\tilde{Y}^+ = S(Y,K) = \{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\}$ olduğundan

$S(Y,K) - \phi^+ = \{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\}$
$S(Y,K) - (G,K)^+ = \{(H,K),\tilde{Y}\}$

$S(Y,K) - (H,K)^{+} = \{(G,K), \tilde{Y}\}$
$S(Y,K) - \tilde{Y}^{+} = \emptyset$

O halde $\mathcal{S}_{SD^{-}} = \Big\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(G,K),\tilde{Y}\},\ \emptyset\Big\}$ ailesi $S(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için alt tabandır.

Dolayısıyla $\beta_{SD^{-}} = \Big\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(G,K),\tilde{Y}\},\ \{\tilde{Y}\},\ \emptyset\Big\}$ ailesi $S(Y,K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır.

Bu esnek topoloji (alt esnek D topoloji) de
$\tau_{SD^{-}} = \Big\{\{(G,K),(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(H,K),\tilde{Y}\},\ \{(G,K),\tilde{Y}\},\ \{\tilde{Y}\},\ \emptyset\Big\}$ olarak bulunur.

Önerme 4.5.7. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $\tau_{SD^{+}} \leq \tau_{SV^{+}}$ ve $\tau_{SD^{-}} \leq \tau_{SV^{-}}$ olur.

İspat. i) $S(Y,K) - (V,K)^{-} \in \beta_{SD^{+}}$ olsun. (V,K) esnek G_{δ} kapalı bir küme olduğundan aynı zamanda esnek kapalı kümedir, dolayısıyla $\tilde{Y} - (V,K)$ esnek açık bir kümedir. O halde $\left(\tilde{Y} - (V,K)\right)^{+} \in \tau_{SV^{+}}$ olup $S(Y,K) - (V,K)^{-} = \left(\tilde{Y} - (V,K)\right)^{+}$ olduğundan $S(Y,K) - (V,K)^{-} \in \tau_{SV^{+}}$ olur. Böylece $\tau_{SD^{+}} \leq \tau_{SV^{+}}$ olduğu elde edilir.

Benzer şekilde $S(Y,K) - (V,K)^{+} = \left(\tilde{Y} - (V,K)\right)^{-}$ eşitliği kullanılarak $\tau_{SD^{-}} \leq \tau_{SV^{-}}$ olduğu gösterilebilir.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün üst (alt) D-süreklilik tanımı verilerek bu esnek küme değerli dönüşümün esnek üstten (alttan) D yarı sürekli oluşu, bu dönüşüme karşılık gelen esnek fonksiyonun sürekliliği cinsinden verilmiştir.

Tanım 4.5.8. (X,σ,E), (Y,τ,K) iki esnek topolojik uzay, ${E_e}^{x_0}$ X in bir esnek noktası ve $F\colon (X,\sigma,E) \to (Y,\tau,K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

i) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V,K) = \phi$ olan $\tilde{Y} - (V,K)$ esnek açık F_{σ} kümesi için ${E_e}^{x} \in (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V,K) = \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten D yarı süreklidir denir.

ii) $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ olan $\tilde{Y} - (V,K)$ esnek kapalı G_δ kümesi için ${E_e}^{x} \in (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V,K) \neq \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan D yarı süreklidir denir.

iii) F dönüşümü X in her ${E_e}^{x_0}$ esnek noktasında üstten (alttan) D yarı sürekli ise F ye X üzerinde üstten (alttan) D yarı süreklidir denir.

Önerme 4.5.9. (Y,τ,K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten D yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f:(X,\sigma,E) \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SD^+},K)$ esnek fonksiyonunun ${E_e}^{x_0}$ da esnek sürekli olmasıdır.

ii) F nin ${E_e}^{x_0}$ da esnek alttan D yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f:(X,\sigma,E) \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SD^-},K)$ esnek fonksiyonunun ${E_e}^{x_0}$ da esnek sürekli olmasıdır.

İspat. i) $(\Rightarrow)$ (V,K) bir esnek kapalı G_δ küme ve $f({E_e}^{x_0}) \in S(Y,K) - (V,K)^-$ olsun. Bu durumda $f({E_e}^{x_0}) \in \left(\tilde{Y} - (V,K)\right)^+$ olacağından $f({E_e}^{x_0}) \tilde{\subset} \tilde{Y} - (V,K)$ dir. O halde $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V,K) = \emptyset$ dir. $\tilde{Y} - (V,K)$ esnek açık F_σ küme ve F, esnek üstten D yarı sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her bir ${E_e}^{x} \in (P,E)$ için $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V,K) = \phi$ dir. Böylece her ${E_e}^{x} \in (P,E)$ için $f({E_e}^{x}) \notin (V,K)^-$ dir. O halde her bir ${E_e}^{x} \in (P,E)$ için $f({E_e}^{x}) \in S(Y,K) - (V,K)^-$ dir. Dolayısıyla $f:(X,\sigma,E) \rightarrow (S(Y,K),\tau_{SD^+},K)$ esnek fonksiyonu ${E_e}^{x_0}$ da esnek süreklidir.

$(\Leftarrow)$ $\tilde{Y} - (V,K)$ kümesi $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\cap} (V,K) = \phi$ şartını sağlayan bir esnek açık F_σ küme olsun. Bu durumda $F({E_e}^{x_0}) \tilde{\subset} \tilde{Y} - (V,K)$ dir ve böylece $F({E_e}^{x_0}) \in \left(\tilde{Y} - (V,K)\right)^+$ dir. O halde $F({E_e}^{x_0}) \in S(Y,K) - (V,K)^-$ ve $f({E_e}^{x_0}) \in S(Y,K) - (V,K)^-$ dir. f, ${E_e}^{x_0}$ da esnek sürekli olduğundan ${E_e}^{x_0}$ ın bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her ${E_e}^{x} \in (P,E)$ için $f({E_e}^{x}) \in S(Y,K) - (V,K)^-$ dir. Böylece $F({E_e}^{x}) \in S(Y,K) - (V,K)^-$ ve $F({E_e}^{x}) \in \left(\tilde{Y} - (V,K)\right)^+$ olur. O halde $F({E_e}^{x}) \tilde{\subset} \tilde{Y} - (V,K)$ ve $F({E_e}^{x}) \tilde{\cap} (V,K) = \phi$ dir. Dolayısıyla F, ${E_e}^{x_0}$ da esnek üstten D yarı süreklidir.

ii) Benzer şekilde gösterilebilir.

5. ESNEK KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN BAZI SÜREKLİLİK VE KARARSIZLIK TİPLERİ

Bu bölümde, öncelikle esnek küme tipleri (sırasıyla esnek α-açık küme, esnek *yarı*-açık küme, esnek *ön*-açık küme, esnek b-açık küme ve esnek β-açık küme) kavramları ile temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra bu kümeler yardımıyla esnek küme değerli dönüşümlerin bazı süreklilik tipleri (sırasıyla sürekli, α-sürekli, *yarı*-sürekli, *ön*-sürekli, b-sürekli, β-sürekli) ile bazı kararsızlık tipleri (sırasıyla *yarı*-kararsız, *ön*-kararsız ve *b*-kararsız) tanıtılmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Son olarak, bu esnek kümeler arasındaki ilişkilerden yararlanarak esnek küme değerli dönüşümlerin süreklilik tipleri arasındaki ilişkiler örneklerle beraber verilmiş ve bu ilişkilerin şeması çıkarılmıştır.

5.1 Esnek Sürekli Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, esnek küme değerli dönüşümler için üstten (alttan) süreklilik tanımı verilmiş ve bu süreklilikler için denk koşullar verilmiştir.

Tanım 5.1.1. $(X,\tilde{\tau},E)$ ve $(Y,\tilde{\upsilon},K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F({E_e}^x)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ olan her (G,K) esnek açık kümesi için ${E_e}^z\,\tilde{\in}\,(P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten süreklidir denir.

b) $F({E_e}^x)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ olan her (G,K) esnek açık kümesi için ${E_e}^z\,\tilde{\in}\,(P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında alttan süreklidir denir.

c) F dönüşümü X in her ${E_e}^x$ esnek noktasında esnek üstten (alttan) sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) süreklidir denir.

Not. F nin üstten (alttan) süreklilik tanımı ile 4. bölümde geçen F nin Vietoris üstten (alttan) yarı süreklilik tanımı çakışıktır.

Teorem 5.1.2. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümünün üstten sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^{+}(G,K)$ nin X'de esnek açık küme olmasıdır.

İspat. (G,K), $E_e{}^x \,\tilde{\in}\, F^+(G,K)$ şartını sağlayan Y nin bir esnek açık kümesi olsun. F esnek üstten sürekli olduğundan $E_e{}^x$ esnek noktasının bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her $E_e{}^z \,\tilde{\in}\, (P,E)$ için $F(E_e{}^z) \,\tilde{\subset}\, (G,K)$ dir. O halde $F(P,E) \,\tilde{\subset}\, (G,K)$ olup $(P,E) \,\tilde{\subset}\, F^+(G,K)$ dir. Bu durumda $E_e{}^x \,\tilde{\in}\, (P,E) = int(P,E) \,\tilde{\subset}\, int\big(F^+(G,K)\big)$ olur. Dolayısıyla $F^+(G,K) \,\tilde{\subset}\, int\big(F^+(G,K)\big)$ olur. Bu da $F^+(G,K)$ nin X de esnek açık küme olduğunu gösterir.

Tersine Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^+(G,K)$, X de esnek açık bir küme olsun. $E_e{}^x \,\tilde{\in}\, F^+(G,K)$ için $(P,E) = F^+(G,K)$ alınırsa istenen elde edilir.

Teorem 5.1.3. $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümünün alttan sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^-(G,K)$ nin X de esnek açık olmasıdır.

İspat. Y deki herhangi bir esnek açık (G,K) kümesi için $E_e{}^x \,\tilde{\in}\, F^-(G,K)$ alalım. Bu durumda F esnek alttan sürekli olduğundan $E_e{}^x$ esnek noktasının bir (P,E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki her $E_e{}^z \,\tilde{\in}\, (P,E)$ için $F(E_e{}^z) \,\tilde{\cap}\, (G,K) \neq \emptyset$ dir. O halde $F(P,E) \,\tilde{\cap}\, (G,K) \neq \emptyset$ olup $(P,E) \,\tilde{\subset}\, F^-(G,K)$ dir. Bu durumda $E_e{}^x \,\tilde{\in}\, (P,E) = int(P,E) \,\tilde{\subset}\, int\big(F^-(G,K)\big)$ olur. Dolayısıyla $F^-(G,K) \,\tilde{\subset}\, int\big(F^-(G,K)\big)$ olur. Bu da $F^-(G,K)$ nin X de esnek açık olduğunu gösterir.

Tersine Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^-(G,K)$, X de esnek açık küme olsun. $E_e{}^x \,\tilde{\in}\, F^-(G,K)$ için $(P,E) = F^-(G,K)$ alınırsa istenen elde edilir.

Örnek 5.1.4. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ve esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ olsun. Burada $(G,E) = \{(e_2, \{x_1\})\}$ ve $(H,K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = Y$, $p(e_1) = k_2$, $p(e_2) = k_1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten süreklidir, çünkü Y deki esnek açık (H,K) kümesi için $F^+(H,K) = (G,E)$ kümesi X de esnek açıktır.

Örnek 5.1.5. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ve esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ olsun. Burada $(G,E) = \{(e_1, \{x_2\})(e_2, X)\}$ ve $(H,K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü

$u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = Y$, $p(e_1) = k_2$, $p(e_2) = k_1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan süreklidir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^-(H, K) = (G, E)$ kümesi X de esnek açıktır.

Teorem 5.1.6. $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek üstten süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H, K) kümesi için $F^-(H, K)$ kümesi X de esnek kapalıdır.

iii) Y deki her esnek (G, K) kümesi için $cl\big(F^-(G, K)\big) \tilde{\subseteq} F^-\big(cl(G, K)\big)$ dır.

iv) Y deki her esnek (G, K) kümesi için $F^+\big(int(G, K)\big) \tilde{\subseteq} int\big(F^+(G, K)\big)$ dır.

İspat. (i⇒ ii) Y de herhangi bir esnek kapalı (H, K) kümesi için $\tilde{Y} - (H, K)$ esnek açık küme olup F esnek küme değerli dönüşümü esnek üstten sürekli olduğundan Teorem 5.1.2 den $F^+\left(\tilde{Y} - (H, K)\right)$ esnek açık kümedir. Ayrıca $F^+\left(\tilde{Y} - (H, K)\right) = \tilde{X} - F^-(H, K)$ olduğundan $\tilde{X} - F^-(H, K)$ esnek açık küme dolayısıyla $F^-(H, K)$ esnek kapalı kümedir.

(ii⇒ iii) Y deki herhangi bir (G, K) esnek kümesi için $cl(G, K)$ esnek kapalı küme olup ii) den $F^-\big(cl(G, K)\big)$ esnek kapalı kümedir. Ayrıca $F^-(G, K) \tilde{\subseteq} F^-\big(cl(G, K)\big)$ olduğundan kapanış alınırsa $cl\big(F^-(G, K)\big) \tilde{\subseteq} cl\left(F^-\big(cl(G, K)\big)\right) = F^-\big(cl(G, K)\big)$ olduğu elde edilir.

(iii⇒iv) iii) de (G, K) esnek kümesi yerine $\tilde{Y} - (G, K)$ esnek kümesi yazılırsa $cl\left(F^-\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^-\left(cl\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right)$ olur. İki tarafın esnek tümleyeni alınırsa $\tilde{X} - F^-\left(cl\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{X} - cl\left(F^-\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right)$ olduğu elde edilir. Ayrıca $\tilde{X} - F^-\left(cl\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right) = F^+\left(\tilde{X} - cl\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right)$ ve $\tilde{X} - cl\left(F^-\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right) = int\left(\tilde{X} - F^-\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right)$ eşitlikleri kullanılırsa $F^+\left(\tilde{Y} - cl\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right) \tilde{\subseteq} int\left(\tilde{X} - F^-\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)\right)$ bulunur. O halde

$$F^{+}\left(int\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right) \tilde{\subseteq} int\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)$$

ve böylece $F^{+}\big(int(G,K)\big) \tilde{\subseteq} int\big(F^{+}(G,K)\big)$ olduğu elde edilir.

(iv⇒i) Y nin herhangi bir (G,K) esnek açık kümesi için iv) den $F^{+}\big(int(G,K)\big) \tilde{\subseteq} int\big(F^{+}(G,K)\big)$ yazılabilir. Buradan $F^{+}(G,K) \tilde{\subseteq} int\big(F^{+}(G,K)\big)$ elde edilir. Bu ise $F^{+}(G,K)$ nın esnek açık olduğunu gösterir. O halde Teorem 5.1.2 den F esnek üstten süreklidir.

Teorem 5.1.7. $F: (X,\tilde{\tau},E) \rightarrow (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^{+}(H,K)$ kümesi X de esnek kapalıdır.

iii) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $cl\big(F^{+}(G,K)\big) \tilde{\subseteq} F^{+}\big(cl(G,K)\big)$

iv) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $F^{-}\big(int(G,K)\big) \tilde{\subseteq} int\big(F^{-}(G,K)\big)$

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde ispatı yapılabilir.

5.2. Esnek α-sürekli Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, öncelikle esnek α-açık (α-kapalı) kümeler ile ilgili özellikler verilmiştir. Daha sonra esnek topolojik uzaylarda α-sürekli küme değerli dönüşümler tanımlanıp temel özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.2.1. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq} int\Big(cl\big(int(F,E)\big)\Big)$ ise (F,E) ye esnek α-açık küme denir. Bir esnek α-açık kümenin tümleyenine de esnek α-kapalı küme denir.

$(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayındaki tüm esnek α-açık ve esnek α-kapalı kümelerin ailesi sırasıyla $S\alpha OS(X)$ ve $S\alpha CS(X)$ ile gösterilmiştir. (Akdağ and Özkan, 2014)

Önerme 5.2.2. Her esnek açık (esnek kapalı) küme esnek α-açık (esnek α-kapalı) kümedir. Bu önermenin tersi genelde doğru değildir. (Akdağ and Özkan, 2014)

Teorem 5.2.3. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) ile (G,E) iki esnek küme olsun.

i. $(F,E)\tilde{\in} S\alpha OS(X)$ olması için gerek ve yeter koşul $(O,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\tilde{\subseteq} int\big(cl(O,E)\big)$ olacak şekilde bir (O,E) esnek açık kümesinin var olmasıdır.

ii. $(F,E)\tilde{\in} S\alpha OS(X)$ ve $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)\tilde{\subseteq} int\big(cl(F,E)\big)$ ise $(G,E)\tilde{\in} S\alpha OS(X)$ olur (Akdağ and Özkan, 2014)

Teorem 5.2.4. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında bir (F,E) kümesinin esnek α-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $cl\big(int(K,E)\big)\tilde{\subseteq}(F,E)\tilde{\subseteq}(K,E)$ olacak şekilde bir (K,E) esnek kapalı kümesinin var olmasıdır (Ilango ve ark., 2014).

Önerme 5.2.5. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında aşağıdakiler doğrudur:

i. Esnek α-açık kümelerin keyfi birleşimleri de esnek α-açık kümedir.

ii. Esnek α-kapalı kümelerin keyfi kesişimleri de esnek α-kapalı kümedir. (Akdağ and Özkan, 2014)

Tanım 5.2.6. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun. Bu durumda

i. (F, E) esnek kümesinin esnek α-kapanışı

$s\alpha cl(F, E) = \tilde{\cap} \{(G, E) : (G, E)$ esnek α-kapalı küme ve $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)\}$

ii. (F, E) esnek kümesinin esnek α-içi

$s\alpha int(F, E) = \tilde{\cup} \{(O, E) : (O, E)$ esnek α-açık küme ve $(O, E) \tilde{\subseteq} (F, E)\}$

biçiminde tanımlanır.

O halde $s\alpha cl(F, E)$ kümesi, (F, E)'yi kapsayan en küçük esnek α-kapalı kümedir. $s\alpha int(F, E)$ kümesi de (F, E)'nin kapsadığı en büyük esnek α-açık kümedir. (Akdağ and Özkan, 2014)

Önerme 5.2.7. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) ve (G, E) esnek kümeleri için aşağıdaki özellikler doğrudur;

i. $s\alpha cl(\Phi) = \Phi$ ve $s\alpha int(\Phi) = \Phi$

ii. $s\alpha cl(F, E)$ esnek α-kapalıdır ve $s\alpha int(F, E)$ esnek α-açıktır.

iii. $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ ise $s\alpha cl(F, E) \tilde{\subseteq} s\alpha cl(G, E)$ ve $s\alpha int(F, E) \tilde{\subseteq} s\alpha int(G, E)$ olur.

iv. $s\alpha cl\big(s\alpha cl(F, E)\big) = s\alpha cl(F, E)$ ve $s\alpha int\big(s\alpha int(F, E)\big) = s\alpha int(F, E)$ olur.
(Akdağ and Özkan, 2014)

Önerme 5.2.8. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) esnek kümesi için aşağıdaki özellikler doğrudur;

i. $(F, E) \tilde{\in} S\alpha CS(X) \Leftrightarrow (F, E) = s\alpha cl(F, E)$

ii. $(F, E) \tilde{\in} S\alpha OS(X) \Leftrightarrow (F, E) = s\alpha int(F, E)$. (Akdağ and Özkan, 2014)

Teorem 5.2.9. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) ve (G, E) esnek kümeleri için aşağıdaki özellikler doğrudur;

i. $\big(s\alpha cl(F, E)\big)^{\tilde{c}} = s\alpha int\big((F, E)^{\tilde{c}}\big)$ ve $\big(s\alpha int(F, E)\big)^{\tilde{c}} = s\alpha cl\big((F, E)^{\tilde{c}}\big)$

ii. $s\alpha cl(\tilde{X}) = \tilde{X}$ ve $s\alpha int(\tilde{X}) = \tilde{X}$

iii. $s\alpha cl\big((F,E)\,\tilde{\cup}\,(G,E)\big) = s\alpha cl(F,E)\,\tilde{\cup}\,s\alpha cl(G,E)$ ve
$s\alpha cl\big((F,E)\,\tilde{\cap}\,(G,E)\big) \,\tilde{\subseteq}\, s\alpha cl(F,E)\,\tilde{\cap}\,s\alpha cl(G,E)$

iv. $s\alpha int\big((F,E)\,\tilde{\cap}\,(G,E)\big) = s\alpha int(F,E)\,\tilde{\cap}\,s\alpha int(G,E)$ ve
$s\alpha int\big((F,E)\,\tilde{\cup}\,(G,E)\big) \,\tilde{\supseteq}\, s\alpha int(F,E)\,\tilde{\cup}\,s\alpha int(G,E)$ olur. (Akdağ and Özkan, 2014)

Önerme 5.2.10. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek kümesi için aşağıdaki özellikler denktir;

i. (F,E) esnek α-kapalı kümedir.

ii. $int\left(cl\big(int(F,E)^{\tilde{c}}\big)\right) \,\tilde{\supseteq}\, (F,E)^{\tilde{c}}$.

iii. $cl\left(int\big(cl(F,E)\big)\right) \,\tilde{\subseteq}\, (F,E)$. (Akdağ and Özkan, 2014)

Tanım 5.2.11. $(X,\tilde{\tau},E)$, $(Y,\tilde{\upsilon},K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F\colon (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F({E_e}^x) \,\tilde{\subseteq}\, (G,K)$ olan her (G,K) esnek açık kümesi için ${E_e}^z \,\tilde{\in}\, (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \,\tilde{\subseteq}\, (G,K)$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek α-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten α-süreklidir denir.

b) $F({E_e}^x)\,\tilde{\cap}\,(G,K) \neq \Phi$ olan her (G,K) esnek açık kümesi için ${E_e}^z \,\tilde{\in}\, (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z)\,\tilde{\cap}\,(G,K) \neq \Phi$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek α-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten α-süreklidir denir.

c) F, X in her esnek noktasında esnek üstten (alttan) α-sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) α-süreklidir denir.

Önerme 5.2.12. $F\colon (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümünün esnek üstten α-sürekli olması için gerek ve yeter şart Y deki her (G,K) esnek açık kümesi için $F^+(G,K)$ kümesinin X de esnek α-açık olmasıdır.

İspat. $F({E_e}^x) \,\tilde{\subseteq}\, (G,K)$ şartını sağlayan bir (G,K) esnek açık kümesini alalım. F üstten α-sürekli olduğundan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek α-açık komşuluğu vardır öyle ki ${E_e}^z \,\tilde{\in}\, (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \,\tilde{\subseteq}\, (G,K)$ dir. Böylece $(P,E) \,\tilde{\subseteq}\, F^+(G,K)$ olup ${E_e}^x \,\tilde{\in}\, (P,E) \,\tilde{\subseteq}\, int\left(cl\big(int(P,E)\big)\right) \,\tilde{\subseteq}\, int\left(cl\left(int\big(F^+(G,K)\big)\right)\right)$ olduğu elde edilir. O halde $F^+(G,K) \tilde{\subseteq} int\left(cl\left(int\left(F^+(G,K)\right)\right)\right)$ olur. Bu da $F^+(G,K)$ nin X de esnek α-açık küme olduğunu gösterir.

Tersine, $F^+(G,K)$ kümesi X de esnek α-açık bir küme olmak üzere ${E_e}^x \tilde{\in} F^-(G,K)$ alalım. Bu durumda $F^-(G,K)$esnek kümesi ${E_e}^x$ esnek noktasının bir esnek α-açık komşuluğu olup ${E_e}^z \tilde{\in} F^-(G,K)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ dır. O halde F esnek dönüşümü alttan α-sürekli olur.

Önerme 5.2.13. $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü esnek alttan α-süreklidir ancak ve ancak Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^-(G,K)$ kümesi X de esnek α-açıktır.

İspat. Yukarıdaki önermeye benzer şekilde ispatı yapılabilir.

Teorem 5.2.14. $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek üstten α-süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek α-kapalıdır.

iii) Y deki her esnek (B,K) kümesi için $\alpha cl\left(F^-(B,K)\right) \tilde{\subseteq} F^-\left(cl(B,K)\right)$ dır.

iv) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $F^+\left(int(G,K)\right) \tilde{\subseteq} \alpha int\left(F^+(G,K)\right)$ dır.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii) Y deki herhangi bir esnek kapalı (H,K) kümesi için $\tilde{X} - (H,K)$ kümesi esnek açık olup Önerme 5.2.12. den $F^+\left(\tilde{X} - (H,K)\right)$ esnek α- açık kümedir. Ayrıca $F^+\left(\tilde{X} - (H,K)\right) = \tilde{X} - F^-(H,K)$ olduğundan $\tilde{X} - F^-(H,K)$ kümesi esnek α- açık dolayısıyla $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek α-kapalıdır.

(ii$\Rightarrow$iii) Y de (B,K) esnek kümesi için $cl(B,K)$ esnek kapalı olup ii) den $F^-\left(cl(B,K)\right)$ esnek α-kapalıdır. O halde $\alpha cl\left(F^-(B,K)\right) \tilde{\subseteq} \alpha cl\left(F^-\left(cl(B,K)\right)\right) = F^-\left(cl(B,K)\right)$ bulunur.

(iii$\Rightarrow$iv) Y de herhangi bir esnek (G,K) kümesi alalım. Bu durumda elde ederiz ki $F^+\left(int(G,K)\right) = F^+\left(\tilde{Y} - \left(\tilde{Y} - \left(int(G,K)\right)\right)\right) = \tilde{X} - F^-\left(cl\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)\right)$ dir. O halde hipotezden $\alpha cl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^{-}\left(cl\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)$ yazılabilir. Esnek tümleyen alınırsa $\tilde{X}-F^{-}\left(cl\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{X}-\alpha cl\left(F^{-}(\tilde{Y}-G,K)\right)$ elde edilir. Buradan $\tilde{X}-\alpha cl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)=\alpha int\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)$

$=\alpha int\big(F^{+}(G,K)\big)$ dir. O halde $F^{+}\big(int(G,K)\big) \tilde{\subseteq} \alpha int\big(F^{+}(G,K)\big)$ bulunur.

(iv⇒i) Y de herhangi bir (G,K) esnek açık kümesini alalım. Hipotezden $\alpha int\big(F^{+}(G,K)\big) \tilde{\subseteq} F^{+}(G,K)=F^{+}\big(int(G,K)\big) \tilde{\subseteq} \alpha int\big(F^{+}(G,K)\big)$ bulunur. O halde $F^{+}(G,K)$ esnek α-açık kümedir. Dolayısıyla F esnek üstten α-süreklidir.

Teorem 5.2.15. $F:(X,\tilde{\tau},E) \rightarrow (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan α-süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^{+}(H,K)$ kümesi X de esnek α-kapalıdır.

iii) Y deki her esnek (B,K) kümesi için $\alpha cl\big(F^{+}(B,K)\big) \tilde{\subseteq} F^{+}\big(cl(B,K)\big)$ dır.

iv) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $F^{-}\big(int(G,K)\big) \tilde{\subseteq} \alpha int\big(F^{-}(G,K)\big)$ dır.

İspat. Yukarıdaki önermeye benzer şekilde ispatı yapılabilir.

5.3. Esnek *Yarı*-Sürekli ve Esnek *Yarı*-Kararsız Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, ilk olarak esnek *yarı*-açık (*yarı*-kapalı) kümeler ile ilgili özellikler verilmiş, daha sonra esnek topolojik uzaylar arasında tanımlanan *yarı*-sürekli ile *yarı*-kararsız (semi-irresolute) küme değerli dönüşümler tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.3.1. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) bir esnek küme olsun. Eğer $(O, E) \tilde{\subset} (F, E) \tilde{\subset} cl(O, E)$ olacak şekilde bir (O, E) esnek açık kümesi varsa (F, E) kümesine esnek *yarı*-açıktır denir (Chen, 2013).

Tanım 5.3.2. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzay ve (G, E), X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer (G, E)'nin tümleyeni esnek *yarı*-açık ise, (G, E) kümesine esnek *yarı*-kapalıdır denir (Chen, 2013).

$(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayındaki tüm esnek *yarı*-açık ve esnek *yarı*-kapalı kümelerin ailesi sırasıyla $SSOS(X)$ ve $SSCS(X)$ ile gösterilmiştir.

Esnek *yarı*-açık ve esnek *yarı*-kapalı kümenin tanımından aşağıdaki uyarıyı yazabiliriz.

Uyarı 5.3.3. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında aşağıdakiler doğrudur;

i. Her esnek açık küme esnek *yarı*-açıktır.

ii. Her esnek kapalı küme esnek *yarı*-kapalıdır (Chen, 2013).

Teorem 5.3.4. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında bir (F, E) esnek alt kümesinin esnek *yarı*-açık küme olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) \tilde{\subset} cl\big(int(F, E)\big)$ olmasıdır (Chen, 2013).

Önerme 5.3.5. $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. Esnek *yarı*-açık kümelerin keyfi birleşimleri de esnek *yarı*-açıktır.

ii. Esnek *yarı*-kapalı kümelerin keyfi kesişimleri de esnek *yarı*-kapalıdır. (Mahanta ve Das, 2012).

Teorem 5.3.6. (F, E) kümesi $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında bir esnek *yarı*-açık küme ve $(F, E) \tilde{\subset} (G, E) \tilde{\subset} cl(F, E)$ olsun. Bu durumda (G, E) esnek *yarı*-açık kümedir (Chen, 2013).

Not 5.3.7. (G,E) kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında bir esnek küme olsun. Bu durumda (G,E) esnek *yarı*-kapalıdır ancak ve ancak $int(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde bir (F,E) esnek kapalı kümesi vardır (Chen, 2013).

Teorem 5.3.8. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında bir (G,E) esnek kümesinin esnek *yarı*-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $int\big(cl(G,E)\big) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olmasıdır (Chen, 2013).

Tanım 5.3.9. (F,E) kümesi $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında bir esnek küme olsun. Bu durumda;

i. (F,E) esnek kümesinin esnek *yarı*-kapanışı

$sscl(F,E) = \tilde{\cap}\,\{(G,E):(G,E)$ esnek *yarı*-kapalı küme ve $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)\}$

ii. (F,E) esnek kümesinin esnek *yarı*-içi

$ssint(F,E) = \tilde{\cup}\,\{(O,E):(O,E)$ esnek *yarı*-açık küme ve $(O,E) \tilde{\subseteq} (F,E)\}$

biçiminde tanımlanır (Chen, 2013).

O halde $sscl(F,E)$ kümesi, (F,E)'yi kapsayan en küçük esnek *yarı*-kapalı kümedir. $ssint(F,E)$ kümesi, (F,E)'nin kapsadığı en büyük esnek *yarı*-açık kümedir.

Önerme 5.3.10. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında esnek *yarı* kapanış (esnek *yarı* iç) için aşağıdakiler doğrudur;

i. $sscl(\Phi) = \Phi$ ve $ssint(\Phi) = \Phi$

ii. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $sscl(F,E) \tilde{\subseteq} sscl(G,E)$ ve $ssint(F,E) \tilde{\subseteq} ssint(G,E)$

iii. (F,E) esnek *yarı*-kapalı $\Leftrightarrow$ $(F,E) = sscl(F,E)$

(F,E) esnek *yarı*-açık $\Leftrightarrow$ $(F,E) = ssint(F,E)$

iv. $sscl(sscl(F,E)) = sscl(F,E)$ ve $ssint(ssint(F,E)) = ssint(F,E)$ (Chen, 2013).

Teorem 5.3.11. (F,E), (X,τ,E) esnek topolojik uzayında bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. $\big(sscl(F,E)\big)^{\tilde{c}} = ssint\big((F,E)^{\tilde{c}}\big)$

ii. $\left(ssint(F,E)\right)^{\tilde{c}} = sscl\left((F,E)^{\tilde{c}}\right)$

iii. $ssint(F,E) = \left(sscl\left((F,E)^{\tilde{c}}\right)\right)^{\tilde{c}}$ (Chen, 2013).

Lemma 5.3.12. (F,E), (X,τ,E) esnek topolojik uzayında bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. $sscl(F,E) = (F,E) \tilde{\cup}\, int\left(cl(F,E)\right)$

ii. $ssint(F,E) = (F,E) \tilde{\cap}\, cl\left(int(F,E)\right)$ (Chen, 2013).

Teorem 5.3.13. (F,E), (X,τ,E) esnek topolojik uzayında herhangi bir esnek küme olsun. Bu durumda $int(F,E) \tilde{\subseteq} ssint(F,E) \tilde{\subseteq} (F,E) \tilde{\subseteq} sscl(F,E) \tilde{\subseteq} cl(F,E)$ dir (Chen, 2013).

Teorem 5.3.14. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayı için aşağıdaki ilişkiler doğrudur;

i. $sscl\left((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\right) \tilde{\supseteq} sscl(F,E) \tilde{\cup} sscl(G,E)$

ii. $sscl\left((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\right) \tilde{\subseteq} sscl(F,E) \tilde{\cap} sscl(G,E)$ (Chen, 2013).

Teorem 5.3.15. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) ve (G,E) esnek kümeleri için aşağıdaki ifadeler doğrudur;

i. $ssint\left((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\right) \tilde{\supseteq} ssint(F,E) \tilde{\cup} ssint(G,E)$

ii. $ssint\left((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\right) \tilde{\subseteq} ssint(F,E) \tilde{\cap} ssint(G,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

5.3.1. Esnek *Yarı*-Sürekli Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, esnek topolojik uzaylar arasında tanımlı *yarı*-sürekli (semi-continuous) küme değerli dönüşümler tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.3.1.1. $(X,\tilde{\tau},E)$, $(Y,\tilde{\upsilon},K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F(E_e{}^x)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ olan her (G,K) esnek açık kümesi için $E_e{}^z\,\tilde{\in}\,(P,E)$ olduğunda $F(E_e{}^z)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ şartını sağlayan $E_e{}^x$ in bir (P,E) esnek *yarı*-açık komşuluğu varsa F ye $E_e{}^x$ esnek noktasında üstten *yarı*-süreklidir denir.

b) $F(E_e{}^x)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ olan her (G,K) esnek açık kümesi için $E_e{}^z\,\tilde{\in}\,(P,E)$ olduğunda $F(E_e{}^z)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ şartını sağlayan $E_e{}^x$ in bir (P,E) esnek *yarı*-açık komşuluğu varsa F ye $E_e{}^x$ esnek noktasında alttan *yarı*-süreklidir denir.

c) F, X in her esnek noktasında esnek üstten (alttan) *yarı*-sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) *yarı*-süreklidir denir.

Teorem 5.3.1.2. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümünün alttan *yarı*-sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^-(G,K)$ nin X de esnek *yarı*-açık olmasıdır.

İspat. Y deki herhangi bir esnek açık (G,K) kümesi için $E_e{}^x\,\tilde{\in}\,F^-(G,K)$ alalım. F, üstten *yarı*-sürekli olduğundan $E_e{}^x$ in bir (P,E) esnek *yarı*-açık komşuluğu vardır öyle ki $E_e{}^z\,\tilde{\in}\,(P,E)$ olduğunda $F(E_e{}^z)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ dir. Böylece $(P,E)\,\tilde{\subset}\,F^-(G,K)$ ve $E_e{}^x\,\tilde{\in}\,(P,E)=sint(P,E)\,\tilde{\subset}\,sint\big(F^-(G,K)\big)$ dir. O halde $F^-(G,K)\,\tilde{\subset}\,sint\big(F^-(G,K)\big)$ olur ki bu da $F^-(G,K)$ nin X de esnek *yarı*-açık küme olduğunu gösterir.

Tersine, $F^-(G,K)$ kümesi X de esnek *yarı*-açık bir küme olmak üzere $E_e{}^x\,\tilde{\in}\,F^-(G,K)$ alalım. Bu durumda $F^-(G,K)$esnek kümesi $E_e{}^x$ esnek noktasının bir esnek *yarı*-açık komşuluğu olup $E_e{}^z\,\tilde{\in}\,F^-(G,K)$ olduğunda $F(E_e{}^z)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ dır. O halde F esnek dönüşümü alttan *yarı*-sürekli olur.

Teorem 5.3.1.3. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümünün üstten *yarı*-sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^+(G,K)$ nin X de esnek *yarı*-açık küme olmasıdır.

İspat: Yukarıdaki teoreme benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 5.3.1.4. $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan *yarı*-süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H, K) kümesi için $F^+(H, K)$ kümesi X de esnek *yarı*-kapalıdır.

iii) Y deki her esnek kapalı (G, K) kümesi için $int\left(cl\big(F^+(G, K)\big)\right) \tilde{\subseteq} F^+(G, K)$ dır.

iv) Y deki her esnek açık (G, K) kümesi için $F^-(G, K) \tilde{\subseteq} cl\left(int\big(F^-(G, K)\big)\right)$ dır.

v) Y deki her esnek (B, K) kümesi için $scl\big(F^+(B, K)\big) \tilde{\subseteq} F^+\big(cl(B, K)\big)$ dır.

vi) Y deki her esnek (N, K) kümesi için $F^-\big(int(N, K)\big) \tilde{\subseteq} sint\big(F^-(N, K)\big)$ dır.

İspat. (i⇒ii) Y de herhangi bir (H, K) esnek kapalı kümesi için $\tilde{Y} - (H, K)$ esnek açık küme olup Teorem 5.3.1.2 den $F^-\left(\tilde{Y} - (H, K)\right)$ kümesi esnek açıktır. Ayrıca $F^-\left(\tilde{Y} - (H, K)\right) = \tilde{X} - F^+(H, K)$ olduğundan $\tilde{X} - F^+(H, K)$ esnek *yarı*-açık küme dolayısıyla $F^+(H, K)$ esnek *yarı*-kapalı kümedir.

(ii⇒iii) Y de herhangi bir (G, K) esnek kapalı kümesini alalım. ii) den $F^+(G, K)$ nin esnek *yarı*-kapalı küme olduğunu söyleyebiliriz. O halde $cl\big(F^+(G, K)\big) \tilde{\subseteq} F^+(G, K)$ dir. Buradan $int\left(cl\big(F^+(G, K)\big)\right) \tilde{\subseteq} int\big(F^+(G, K)\big) \tilde{\subseteq} F^+(G, K)$ bulunur.

(iii⇒iv) Y de herhangi bir (G, K) esnek açık kümesi için $\tilde{Y} - (G, K)$ esnek kapalı küme olup iii) den $int\left(cl\left(F^+\big(\tilde{Y} - (G, K)\ \big)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^+\left(\tilde{Y} - (G, K)\right)$ olduğu elde edilir. Buradan da elde ederiz ki $int\left(cl\left(F^+\big(\tilde{Y} - (G, K)\ \big)\right)\right) = int\left(cl\left(\tilde{X} - \big(F^-(G, K)\ \big)\right)\right) = int\left(\tilde{X} - int\big(F^-(G, K)\big)\right) = \tilde{X} - cl\left(int\big(F^-(G, K)\big)\right)$ ve $F^+\left(\tilde{Y} - (G, K)\right) = \tilde{X} - \big(F^-(G, K)\big)$ olduğundan $\tilde{X} - cl\left(int\big(F^-(G, K)\big)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{X} - \big(F^-(G, K)\big)$ bulunur. Esnek tümleyen alınırsa $F^-(G, K) \tilde{\subseteq} cl\left(int\big(F^-(G, K)\big)\right)$ olur.

(iv⇒v) Y de herhangi bir (B,K) esnek kümesi için $\tilde{Y}-cl(B,K)$ esnek açık küme olup iv) den $F^{-}\left(\tilde{Y}-cl(B,K)\right)\tilde{\subset} cl\left(int\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-cl(B,K)\right)\right)\right)$ dir. Bu durumda tümleyen alınırsa $\tilde{X}-cl\left(int\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-cl(B,K)\right)\right)\right)\tilde{\subset}\tilde{X}-F^{-}\left(\tilde{Y}-cl(B,K)\right)$ dir ve buradan da $int\left(cl\left(\tilde{X}-\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-cl(B,K)\right)\right)\right)\right)\tilde{\subset}F^{+}\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-cl(B,K)\right)\right)$ olduğu elde edilir. O halde $int\left(cl\left(F^{+}\left(cl(B,K)\right)\right)\right)\tilde{\subset}F^{+}\left(cl(B,K)\right)$ dir ve Lemma 5.3.12 den $scl\left(F^{+}\left(cl(B,K)\right)\right)\tilde{\subset}F^{+}\left(cl(B,K)\right)$ dır. Dolayısıyla $scl\left(F^{+}(B,K)\right)\tilde{\subset}F^{+}\left(cl(B,K)\right)$ bulunur.

(v⇒vi) Y de herhangi bir (N,K) esnek kümesini alalım. Bu durumda $\tilde{Y}-(N,K)$ esnek kümesi için hipotezden $scl\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)\tilde{\subset}F^{+}\left(cl\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)$ yazılabilir. Tümleyen alınırsa $\tilde{X}-F^{+}\left(cl\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)\tilde{\subset}\tilde{X}-scl\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)$ ve böylece $F^{-}\left(\tilde{Y}-\left(cl\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)\right)\tilde{\subset}sint\left(\tilde{X}-\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)\right)$ bulunur. Buradan da $F^{-}\left(int\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)\right)\tilde{\subset}sint\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)\right)$ olur. O halde $F^{-}\left(int(N,K)\right)\tilde{\subset}sint\left(F^{-}(N,K)\right)$ elde edilir.

(vi⇒i) Kabul edelim ki (G,K), ${E_e}^{x}\tilde{\in}F^{-}(G,K)$ şartını sağlayan bir esnek açık küme olsun. Bu durumda vi) dan $F^{-}\left(int(G,K)\right)\tilde{\subset}sint\left(F^{-}(G,K)\right)$ dır ve buradan da $F^{-}(G,K)\tilde{\subset}sint\left(F^{-}(G,K)\right)$ elde edilir. Böylece $F^{-}(G,K)$, ${E_e}^{x}$ esnek noktasını içeren bir esnek *yarı* açık kümedir. $F^{-}(G,K)=(U,E)$ alınırsa F nin esnek alttan *yarı*-sürekli olduğu elde edilir.

Teorem 5.3.1.5. $F:(X,\tilde{\tau},E)\rightarrow(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek üstten *yarı*-süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^{-}(H,K)$ kümesi X de esnek *yarı*-kapalı kümedir.

iii) Y deki her esnek kapalı (G, K) kümesi için $int\left(cl\left(F^{-}(G, K)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^{-}(G, K)$

iv) Y deki her esnek açık (G, K) kümesi için $F^{+}(G, K) \tilde{\subseteq} cl\left(int\left(F^{+}(G, K)\right)\right)$

v) Y deki her esnek (B, K) kümesi için $scl\left(F^{-}(B, K)\right) \tilde{\subseteq} F^{-}\left(cl(B, K)\right)$

vi) Y deki her esnek (N, K) kümesi için $F^{+}\left(int(N, K)\right) \tilde{\subseteq} sint\left(F^{+}(N, K)\right)$ dır.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı 5.3.1.6. Her üstten (alttan) esnek sürekli küme değerli dönüşüm üstten (alttan) esnek *yarı*-süreklidir, fakat tersi aşağıdaki örneklerde gösterildiği gibi genelde doğru değildir.

Örnek 5.3.1.7. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ve esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G, E) = \{(e_2, \{x_2\})\}$ ve $(H, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, Y)\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = Y$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten *yarı*-süreklidir fakat üstten sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{+}(H, K) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, X)\}$ kümesi X de esnek *yarı*-açık kümedir fakat esnek açık küme değildir.

Örnek 5.3.1.8. $X = \{x_1, x_2\}$ ile $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$ ve $K = \{k_1, k_2\}$ olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ esnek topolojileri verilsin. Burada $(G, E) = \{(e_2, \{x_2\})\}$ ve $(H, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = Y$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan *yarı*-süreklidir fakat alttan sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{-}(H, K) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, X)\}$ kümesi X de esnek *yarı*-açık kümedir fakat esnek açık küme değildir.

5.3.2. Esnek *Yarı*-Kararsız Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, esnek topolojik uzaylar arasında tanımlı *yarı*-kararsız (semi-irresolute) küme değerli dönüşümler tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.3.2.1. $(X,\tilde{\tau},E)$, $(Y,\tilde{\upsilon},K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F({E_e}^x)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ olan her (G,K) esnek *yarı*-açık kümesi için ${E_e}^z\,\tilde{\in}\,(P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek *yarı*-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten *yarı*-kararsızdır denir.

b) $F({E_e}^x)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ olan her (G,K) esnek *yarı*-açık kümesi için ${E_e}^z\,\tilde{\in}\,(P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z)\,\tilde{\cap}\,(G,K)\neq\Phi$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek *yarı*-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında alttan *yarı*-kararsızdır denir.

c) F, X in her esnek noktasında esnek üstten (alttan) *yarı*-kararsız ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) *yarı*-kararsızdır denir.

Teorem 5.3.2.2. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümünün üstten *yarı*-kararsız olması için gerek ve yeter koşul Y deki her esnek *yarı*-açık (G,K) kümesi için $F^+(G,K)$ nin X de esnek *yarı*-açık olmasıdır.

İspat. F esnek üstten *yarı*-kararsız ve (G,K), Y de ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^+(G,K)$ şartını sağlayan bir esnek *yarı* açık küme olsun. Bu durumda F esnek üstten *yarı*-kararsız olduğundan ${E_e}^x$ esnek noktasının bir esnek *yarı* açık (U,E) komşuluğu vardır öyle ki ${E_e}^z\,\tilde{\in}\,(U,E)$ olduğunda $F({E_e}^z)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ dir. Böylece $F(U,E)\,\tilde{\subset}\,(G,K)$ ve $(U,E)\,\tilde{\subset}\,F^+(G,K)$ dir. (U,E) esnek *yarı* açık küme olduğundan $(U,E)=sint(U,E)\,\tilde{\subset}\,sint\big(F^+(G,K)\big)$ dir. O halde ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,sint\big(F^+(G,K)\big)$ ve dolayısıyla $F^+(G,K)\,\tilde{\subset}\,sint\big(F^+(G,K)\big)$ dir. Bu da $F^+(G,K)$ nin esnek *yarı*-açık olduğunu gösterir.

Tersine, Y de herhangi bir (G,K) esnek *yarı*-açık kümesi için $F^+(G,K)$ esnek *yarı*-açık küme olsun. ${E_e}^x\,\tilde{\in}\,F^+(G,K)$ alalım. $(U,E)=F^+(G,K)$ alınırsa bu durumda (U,E), ${E_e}^x$ esnek noktasının bir esnek *yarı* açık komşuluğu olup ${E_e}^z\,\tilde{\in}\,(U,E)$ olduğunda $F({E_e}^z)\,\tilde{\in}\,(G,K)$ dir. O halde F esnek üstten *yarı*-kararsızdır.

Teorem 5.3.2.3. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümünün alttan *yarı*-kararsız olması için gerek ve yeter koşul Y deki her esnek *yarı*-açık (G,K) kümesi için $F^{-}(G,K)$ nin X de esnek *yarı*-açık olmasıdır.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 5.3.2.4. $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri sırasıyla $E=\{e_1,e_2\}$, $K=\{k_1,k_2\}$ olmak üzere $\tilde{\tau}=\{\Phi,\tilde{X},(G,E)\}$, $\tilde{\upsilon}=\{\Phi,\tilde{Y},(H,K)\}$ esnek topolojileri verilmiş olsun. Burada $(G,E)=\{(e_2,\{x_2\})\}$ ve $(H,K)=\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,\{y_2\})\}$ dir. $u:X\to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p:E\to K$ dönüşümü $u(x_1)=\{y_1\}$, $u(x_2)=Y$, $p(e_1)=k_1$, $p(e_2)=k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten *yarı*-kararsızdır, çünkü Y deki esnek *yarı*-açık $\{(k_2,\{y_2\})\}$, (H,K) ve $\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,Y)\}$ kümeleri için $F^{+}(\{(k_2,\{y_2\})\})=(G,E)=F^{+}(H,K)$ ve $F^{+}(\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,Y)\})=(e_2,X)\}$ kümeleri X de esnek *yarı*-açıktır.

Örnek 5.3.2.5. $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri sırasıyla $E=\{e_1,e_2\}$, $K=\{k_1,k_2\}$ olmak üzere $\tilde{\tau}=\{\Phi,\tilde{X},(G,E)\}$, $\tilde{\upsilon}=\{\Phi,\tilde{Y},(H,K)\}$ esnek topolojileri verilmiş olsun. Burada $(G,E)=\{(e_2,\{x_2\})\}$ ve $(H,K)=\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,\{y_2\})\}$ dir. $u:X\to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p:E\to K$ dönüşümü $u(x_1)=\{y_1\}$, $u(x_2)=Y$, $p(e_1)=k_1$, $p(e_2)=k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan *yarı*-kararsızdır, çünkü Y deki esnek *yarı*-açık $\{(k_2,\{y_2\})\}$, (H,K) ve $\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,Y)\}$ kümeleri için
$F^{-}(\{(k_2,\{y_2\})\})=\{(e_2,X)\}$,
$F^{-}(H,K)=\{(e_1,\{x_1\}),(e_2,X)\}=F^{-}(\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,Y)\})$ kümeleri X de esnek *yarı*-açıktır.

Teorem 5.3.2.6. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) F esnek üstten *yarı*-kararsızdır.

ii) Y deki her (H,K) esnek *yarı*-kapalı kümesi için $F^{-}(H,K)$ kümesi X de esnek *yarı*-kapalıdır.

iii) Y deki her (M,K) esnek *yarı*-kapalı kümesi için $sint\left(scl\left(F^{-}(M,K)\right)\right)\tilde{\subseteq}F^{-}(M,K)$

iv) Y deki her (G,K) esnek *yarı*-açık kümesi için $F^{+}(G,K) \tilde{\subseteq} scl\left(sint\left(F^{+}(G,K)\right)\right)$

v) Y deki her (B,K) esnek kümesi için $scl\left(F^{-}(B,K)\right) \tilde{\subseteq} F^{-}\left(scl(B,K)\right)$

vi) Y deki her (N,K) esnek kümesi için $F^{+}\left(sint(N,K)\right) \tilde{\subseteq} sint\left(F^{+}(N,K)\right)$ dır.

İspat. (i⇒ii) Y deki bir (H,K) esnek *yarı*-kapalı kümesi için $\tilde{Y}-(H,K)$ esnek *yarı*-açık küme olup F dönüşümü esnek üstten *yarı*-kararsız olduğundan Teorem 5.3.2.2. gereğince $F^{+}\left(\tilde{Y}-H,K\right)$ esnek *yarı*-açık kümedir. O halde $F^{+}\left(\tilde{Y}-H,K\right)=\tilde{X}-F^{-}(H,K)$ eşitliğinden $\tilde{X}-F^{-}(H,K)$ esnek *yarı*-açık küme dolayısıyla $F^{-}(H,K)$ esnek *yarı*-kapalı küme olur.

(ii⇒iii) Y deki herhangi bir esnek *yarı*-kapalı (M,K) kümesi için $(M,K)=scl(M,K)$ olup ii) den $F^{-}(M,K)$ kümesi X de esnek *yarı*-kapalıdır. O halde $scl\left(F^{-}(M,K)\right)=F^{-}(M,K)$ dir. Böylece $sint\left(scl\left(F^{-}(M,K)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^{-}(M,K)$ olduğu elde edilir.

(iii⇒iv) Y de herhangi bir (G,K) esnek *yarı*-açık kümesi için $\tilde{Y}-(G,K)$ esnek *yarı*-kapalı küme olduğundan iii) den $sint\left(scl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)$ dır. Esnek tümleyen alınırsa $\tilde{X}-F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{X}-sint\left(scl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)$ ve buradan $F^{+}\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right) \tilde{\subseteq} scl\left(sint\left(\tilde{X}-\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)\right)$ bulunur. O halde $F^{+}(G,K) \tilde{\subseteq} scl\left(sint\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)\right)=scl\left(sint\left(F^{+}(G,K)\right)\right)$ dir.

(iv⇒v) Açıktır.

(v⇒vi) Y deki herhangi bir (N,K) esnek kümesi için v) de (B,K) yerine $\tilde{Y}-(N,K)$ yazılırsa $scl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^{-}\left(scl\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)$ bulunur. Esnek tümleyen alınırsa $\tilde{X}-F^{-}\left(scl\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{X}-scl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)$ ve buradan da $F^{+}\left(\tilde{Y}-scl\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right) \tilde{\subseteq} sint\left(\tilde{X}-\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(N,K)\right)\right)\right)$ bulunur. Sonuç olarak $F^{+}\left(sint(N,K)\right) \tilde{\subseteq} sint\left(F^{+}(N,K)\right)$ bulunur.

(vi⇒i) Y deki herhangi bir (G,K) esnek *yarı* açık kümesi için vi) dan $F^{+}\big(sint(G,K)\big) \tilde{\subseteq} sint\big(F^{+}(G,K)\big)$ yazılabilir. Buradan $F^{+}(G,K) \tilde{\subseteq} sint\big(F^{+}(G,K)\big)$ bulunur. O halde $F^{+}(G,K)$ esnek *yarı* açık küme dolayısıyla F esnek üstten *yarı*-kararsızdır.

Teorem 5.3.2.7. $F: (X,\tilde{\tau},E) \rightarrow (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) F esnek alttan *yarı*-kararsızdır.

ii) Y deki her (H,K) esnek *yarı*-kapalı kümesi için $F^{+}(H,K)$ kümesi X de esnek *yarı*-kapalıdır.

iii) Y deki her (M,K) esnek *yarı*-kapalı kümesi için $sint\left(scl\big(F^{+}(M,K)\big)\right) \tilde{\subseteq} F^{+}(M,K)$

iv) Y deki her (G,K) esnek *yarı*-açık kümesi için $F^{-}(G,K) \tilde{\subseteq} scl\left(sint\big(F^{-}(G,K)\big)\right)$

v) Y deki her (B,K) esnek kümesi için $scl\big(F^{+}(B,K)\big) \tilde{\subseteq} F^{+}\big(scl(B,K)\big)$

vi) Y deki her (N,K) esnek kümesi için $F^{-}\big(sint(N,K)\big) \tilde{\subseteq} sint\big(F^{-}(N,K)\big)$ dır.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde ispatı yapılabilir.

5.4. Esnek *Ön*-Sürekli ve Esnek *Ön*-Kararsız Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, ilk olarak esnek *ön*-açık (*ön*-kapalı) kümeler ile ilgili özellikler verilmiştir. Daha sonra esnek topolojik uzaylar arasında tanımlanan *ön*-sürekli (pre-continuous) ile *ön*-kararsız (pre-irresolute) küme değerli dönüşümler tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.4.1. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) esnek bir esnek küme olsun.

i. $(F, E) \tilde{\subseteq} int\big(cl(F, E)\big)$ ise (F, E) ye esnek *ön*-açık küme denir.

ii. $(F, E) \tilde{\supseteq} cl\big(int(F, E)\big)$ ise (F, E) ye esnek *ön*-kapalı küme denir. (Arockiarani ve Lancy, 2013).

Tanımlardan açıktır ki esnek *ön*-açık kümenin tümleyeni esnek *ön*-kapalı küme ve *ön*-kapalı kümenin tümleyeni esnek *ön*-açık kümedir. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayındaki tüm esnek *ön*-açık ve esnek *ön*-kapalı kümelerin ailesi sırasıyla $SPOS(X)$ ve $SPCS(X)$ ile gösterilmiştir.

Önerme 5.4.2. Her esnek açık (esnek kapalı) küme esnek *ön*-açık (esnek *ön*-kapalı) kümedir. (Akdağ and Özkan, 2014)

Teorem 5.4.3. Bir $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında aşağıdakiler doğrudur;

i. Esnek *ön*-açık kümelerin keyfi birleşimleri esnek *ön*-açıktır.

ii. Esnek *ön*-kapalı kümelerin keyfi kesişimleri esnek *ön*-kapalıdır. (Akdağ and Özkan, 2014)

Tanım 5.4.4 $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) bir esnek küme olsun.

i. (F, E) esnek kümesinin esnek *ön*-kapanışı

$spcl(F, E) = \tilde{\cap} \{(G, E) : (G, E)$ esnek *ön*-kapalı küme ve$(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)\}$

ii. (F, E) esnek kümesinin esnek *ön*-içi

$spint(F, E) = \tilde{\cup} \{(O, E) : (O, E)$ esnek *ön*-açık küme ve $(O, E) \tilde{\subseteq} (F, E)\}$

biçiminde tanımlanır.

O halde $spcl(F,E)$ kümesi, (F,E) yi kapsayan en küçük esnek *ön*-kapalı kümedir. $spint(F,E)$ kümesi de (F,E) nin kapsadığı en büyük esnek *ön*-açık kümedir. (Akdağ and Özkan, 2014)

Teorem 5.4.5. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun.

i. (F,E) esnek *ön*-kapalı kümedir ancak ve ancak $(F,E) = spcl(F,E)$
ii. (F,E) esnek *ön*-açık kümedir ancak ve ancak $(F,E) = spint(F,E)$ dir. (Akdağ and Özkan, 2014)

Önerme 5.4.6. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında esnek *ön*-kapanış ve esnek *ön*-iç ile ilgili aşağıdaki ifadeler doğrudur;

i. $spcl(\Phi) = \Phi$ ve $spint(\Phi) = \Phi$

ii. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $spcl(F,E) \tilde{\subseteq} spcl(G,E)$ ve $spint(F,E) \tilde{\subseteq} spint(G,E)$

iii. $spcl\big(spcl(F,E)\big) = spcl(F,E)$ ve $spint\big(spint(F,E)\big) = spint(F,E)$ dir. (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.4.7. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. $spcl((F,E)^c) = \big(spint(F,E)\big)^{\tilde{c}}$

ii. $spint((F,E)^c) = \big(spcl(F,E)\big)^{\tilde{c}}$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Lemma 5.4.8. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. $spcl(F,E) = (F,E) \tilde{\cup} cl\big(int(F,E)\big)$

ii. $spint(F,E) = (F,E) \tilde{\cap} int\big(cl(F,E)\big)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.4.9. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) ve (G,E) esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur;

i. $spcl\big((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\big) \tilde{\supseteq} spcl(F,E) \tilde{\cup} spcl(G,E)$

ii. $spcl\big((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\big) \tilde{\subseteq} spcl(F,E) \tilde{\cap} spcl(G,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.4.10. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) ve (G, E) esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur;

i. $spint\big((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\big) \tilde{\supseteq} spint(F,E) \tilde{\cup} spint(G,E)$

ii. $spint\big((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\big) \tilde{\subseteq} spint(F,E) \tilde{\cap} spint(G,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

5.4.1. Esnek *Ön*-Sürekli Küme Değerli Dönüşümler

Tanım 5.4.1.1. $(X, \tilde{\tau}, E)$, $(Y, \tilde{\upsilon}, K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F({E_e}^x) \tilde{\subseteq} (G, K)$ olan her (G, K) esnek açık kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P, E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\subseteq} (G, K)$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P, E) esnek *ön*-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten esnek *ön*-süreklidir denir.

b) $F({E_e}^x) \tilde{\cap} (G, K) \neq \phi$ olan her (G, K) esnek açık kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P, E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\cap} (G, K) \neq \phi$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P, E) esnek *ön*-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında alttan esnek *ön*-süreklidir denir.

c) F dönüşümü X in her ${E_e}^x$ esnek noktasında esnek üstten (alttan) *ön*-sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) *ön*-süreklidir denir.

Teorem 5.4.1.2. $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) F esnek üstten *ön*-süreklidir.

ii) Y deki her esnek açık (V, K) kümesi için $F^+(V, K)$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır.

iii) Y deki her esnek kapalı (H, K) kümesi için $F^-(H, K)$ kümesi X de esnek *ön*-kapalıdır.

iv) Y deki her esnek (G, K) kümesi için $pcl\big(F^-(G,K)\big) \tilde{\subseteq} F^-\big(cl(G,K)\big)$ dır.

v) X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası ve $F({E_e}^x)$ in Y deki her esnek (H, K) komşuluğu için $F^+(H, K)$ kümesi ${E_e}^x$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğudur.

vi) X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası ve $F({E_e}^x)$ in Y deki her esnek (V,K) komşuluğu için ${E_e}^x$ in bir (U,E) esnek *ön*-açık komşuluğu vardır öyle ki $F(U,E) \tilde{\subseteq} (V,K)$ dır.

vii) Y deki her (H,K) esnek kümesi için $F^+\big(int(H,K)\big) \tilde{\subseteq} pint\big(F^+(H,K)\big)$ dır.

viii) Y deki her (G,K) esnek açık kümesi için $F^+(G,K) \tilde{\subseteq} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ dır.

ix) X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası ve $F({E_e}^x)$ in Y deki her (V,K) esnek açık komşuluğu için $cl\big(F^+(V,K)\big)$ kümesi ${E_e}^x$ in bir esnek komşuluğudur.

İspat. (i⇒ii) (V,K), Y de herhangi bir esnek açık küme ve ${E_e}^x \tilde{\in} F^+(V,K)$ olsun. Bu durumda $F({E_e}^x) \tilde{\subseteq} (V,K)$ dır. F esnek üstten *ön*-sürekli olduğundan ${E_e}^x$ esnek noktasını içeren (U,E) esnek *ön*-açık kümesi vardır öyle ki $F(U,E) \tilde{\subseteq} (V,K)$ dır. Buradan $(U,E) \tilde{\subseteq} F^+(V,K)$ olup ${E_e}^x \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subseteq} int\big(cl(U,E)\big) \tilde{\subseteq} int\Big(cl\big(F^+(V,K)\big)\Big)$ olduğundan $F^+(V,K) \tilde{\subseteq} int\Big(cl\big(F^+(V,K)\big)\Big)$ olduğunu elde ederiz. Böylece $F^+(V,K)$ esnek *ön*-açık kümedir.

(ii⇒iii) Y deki herhangi bir (H,K) esnek kapalı kümesi için $\tilde{Y} - (H,K)$ esnek açık küme olup ii) den $F^+\Big(\tilde{Y} - (H,K)\Big)$ esnek *ön*-açık kümedir. Ayrıca $F^+\Big(\tilde{Y} - (H,K)\Big) = \tilde{X} - \big(F^-(H,K)\big)$ olduğundan $\tilde{X} - \big(F^-(H,K)\big)$ kümesi esnek *ön*-açık küme dolayısıyla $F^-(H,K)$ kümesi esnek *ön*-kapalıdır.

(iii⇒ii) Y nin bir (V,K) esnek açık kümesi için $\tilde{Y} - (V,K)$ esnek kapalı olup iii) den $F^-\Big(\tilde{Y} - (V,K)\Big)$ esnek *ön*-kapalıdir. Ayrıca $F^-\Big(\tilde{Y} - (V,K)\Big) = \tilde{X} - \big(F^+(V,K)\big)$ olduğundan $\tilde{X} - \big(F^+(H,K)\big)$ kümesi esnek *ön*-kapalı küme dolayısıyla $F^+(V,K)$ kümesi esnek *ön*-açıktır.

(iii⇒iv) Y nin herhangi bir (G,K) esnek kümesi için $cl(G,K)$ esnek kapalı küme olduğundan iii) özelliğinden $F^-\big(cl(G,K)\big)$ kümesi esnek *ön*-kapalı olur. Ayrıca $F^-(G,K) \tilde{\subseteq} F^-\big(cl(G,K)\big)$ olup $pcl\big(F^-(G,K)\big) \tilde{\subseteq} pcl\Big(F^-\big(cl(G,K)\big)\Big) = F^-\big(cl(G,K)\big)$ olduğu elde edilir.

(iv⇒iii) Y deki herhangi bir (H,K) esnek kapalı kümesi için iv) den $pcl\big(F^{-}(H,K)\big) \tilde{\subset} F^{-}\big(cl(H,K)\big) = F^{-}(H,K)$ dir. Bu da $F^{-}(H,K)$ nın esnek kapalı küme olduğunu gösterir.

(ii⇒v) ${E_e}^x$, X de herhangi bir esnek nokta ve (H,K) kümesi de $F({E_e}^x)$ in Y deki herhangi bir esnek komşuluğu olsun. Bu durumda bir (G,K) esnek açık kümesi vardır öyle ki $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (G,K) \tilde{\subset} (H,K)$ dir ve dolayısıyla ${E_e}^x \tilde{\in} F^{+}(G,K) \tilde{\subset} F^{+}(H,K)$ dır. ii) den dolayı $F^{+}(G,K)$ esnek *ön*-açık küme olduğundan $F^{+}(H,K)$ kümesi ${E_e}^x$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğudur.

(v⇒vi) ${E_e}^x$, X de herhangi bir esnek nokta ve (V,K) kümesi de $F({E_e}^x)$ in Y deki herhangi bir esnek komşuluğu olsun. $(U,E) = F^{+}(V,K)$ alırsak (U,E) esnek kümesi $F({E_e}^x)$ in Y deki bir esnek komşuluğudur ve $F(U,E) \tilde{\subset} (V,K)$ dır.

(vi⇒i) ${E_e}^x$, X de herhangi bir esnek nokta ve (V,K) da $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (V,K)$ şartını sağlayan Y de bir esnek küme olsun. Bu durumda (V,K), $F({E_e}^x)$ in bir esnek komşuluğudur ve vi) dan ${E_e}^x$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğu (U,E) vardır öyle ki $F(U,E) \tilde{\subset} (V,K)$ dır. O halde (P,E) esnek *ön*-açık kümesi vardır öyle ki ${E_e}^x \tilde{\in} (P,E) \tilde{\subset} (U,E)$ dir. Böylece $F(P,E) \tilde{\subset} (V,K)$ bulunur. Bu da F nin esnek üstten *ön*-sürekli olduğunu gösterir.

(ii⇒vii) Y deki herhangi bir (H,K) esnek kümesi için $int(H,K)$ esnek açık küme olup ii) den için $F^{+}\big(int(H,K)\big)$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır. Böylece $F^{+}\big(int(H,K)\big) = pint\left(F^{+}\big(int(H,K)\big)\right) \tilde{\subset} pint\big(F^{+}(H,K)\big)$ bulunur.

(vii⇒ii) Y nin herhangi bir (V,K) esnek açık kümesi için vii) den $F^{+}(V,K) = F^{+}\big(int(V,K)\big) \tilde{\subset} pint\big(F^{+}(V,K)\big)$ olur. Bu da $F^{+}(V,K)$ nin esnek *ön*-açık bir küme olduğunu gösterir.

(ii⇔viii) Esnek *ön*-açık küme tanımından açıktır.

(ii⇒ix) ${E_e}^x$, X de herhangi bir esnek nokta ve (V,K) kümesi de $F({E_e}^x)$ in Y deki herhangi bir esnek açık komşuluğu olsun. Bu durumda ii) den $F^{+}(V,K)$ esnek açık küme olup ${E_e}^x \tilde{\in} F^{+}(V,K) \tilde{\subset} cl\big(F^{+}(V,K)\big)$ dir. Böylece $cl\big(F^{+}(V,K)\big)$ ${E_e}^x$ in bir esnek komşuluğudur.

(ix⇒viii) (G,K), $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K)$ şartını sağlayan Y de herhangi bir esnek açık küme olsun. Bu durumda $cl\big(F^+(V,K)\big)$, $E_e{}^x$ in bir esnek komşuluğudur. O halde $E_e{}^x \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subset} cl\big(F^+(G,K)\big)$ olacak şekilde (U,E) esnek açık kümesi vardır. Dolayısıyla $E_e{}^x \tilde{\in} (U,E) = int(U,E) \tilde{\subset} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ olduğu elde edilir. Böylece $F^+(G,K) \tilde{\subset} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ dır.

Teorem 5.4.1.3. $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) F esnek alttan *ön*-süreklidir.

ii) Y deki her esnek açık (V,K) kümesi için $F^-(V,K)$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır.

iii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^+(H,K)$ kümesi X de esnek *ön*-kapalıdır.

iv) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $pcl\big(F^+(G,K)\big) \tilde{\subset} F^+\big(cl(G,K)\big)$

v) X deki her $E_e{}^x$ esnek noktası ve $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (H,K) \neq \Phi$ olan Y deki her esnek (H,K) kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi $E_e{}^x$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğudur.

vi) X deki her $E_e{}^x$ esnek noktası ve $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (V,K) \neq \Phi$ olan Y deki her esnek (V,K) kümesi için $E_e{}^x$ in bir (U,E) esnek *ön*-açık komşuluğu vardır öyle ki her $E_e{}^z \tilde{\in} (U,E)$ için $F(E_e{}^z) \tilde{\cap} (V,K) \neq \Phi$

vii) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $F^-\big(int(G,K)\big) \tilde{\subset} pint\big(F^-(G,K)\big)$

viii) Y deki her esnek açık (H,K) kümesi için $F^-(H,K) \tilde{\subset} int\Big(cl\big(F^-(H,K)\big)\Big)$

ix) X deki her $E_e{}^x$ esnek noktası ve $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (V,K) \neq \Phi$ olan Y deki her esnek açık (V,K) kümesi için $cl\big(F^-(V,K)\big)$ kümesi $E_e{}^x$ in bir esnek komşuluğudur.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 5.4.1.4. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G,E)\}$, $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ esnek topolojileri verilmiş olsun. Burada $(G,E) = \{(e_1,\{x_1\})(e_2,\{x_2\})\}$ ve $(H,K) = \{(k_1,\{y_1\}),(k_2,\{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü

$u(x_1) = Y,\ u(x_2) = \{y_2\},\ p(e_1) = k_1,\ p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten *ön*-süreklidir, fakat üstten sürekli değildir. Çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{+}(H, K) = \{(e_2, \{x_2\})\}$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır fakat esnek açık değildir.

Örnek 5.4.1.5. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G, E)\}$, $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ esnek topolojileri verilmiş olsun. Burada $(G, E) = \{(e_1, \{x_1\})(e_2, \{x_2\})\}$ ve $(H, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = Y,\ u(x_2) = \{y_2\},\ p(e_1) = k_1,\ p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan *ön*-süreklidir, fakat alttan sürekli değildir. Çünkü, Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{-}(H, K) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, X)\}$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır fakat esnek açık değildir.

5.4.2. Esnek *Ön*-Kararsız Küme Değerli Dönüşümler

Tanım 5.4.2.1. $(X, \tilde{\tau}, E)$, $(Y, \tilde{\upsilon}, K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ bir esnek küme değerli dönüşüm olsun.

a) $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (G, K)$ olan her (G, K) esnek *ön*-açık kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P, E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\subset} (G, K)$ olacak şekilde ${E_e}^x$ in bir (P, E) esnek *ön*-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten *ön*-kararsızdır denir.

b) $F({E_e}^x) \tilde{\cap} (G, K) \neq \Phi$ olan her (G, K) esnek *ön*-açık kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P, E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\cap} (G, K) \neq \Phi$ olacak şekilde ${E_e}^x$ in bir (P, E) esnek *ön*-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında alttan *ön*-kararsızdır denir.

c) F dönüşümü X in her ${E_e}^x$ esnek noktasında esnek üstten (alttan) *ön*-kararsız ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) *ön*-kararsızdır denir.

Örnek 5.4.2.2. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H_1, K), (H_2, K), (H_3, K)\}$ esnek topolojileri verilmiş olsun. Burada $(F_1, E) = \{(e_2, \{x_2\})\}$, $(F_2, E) = \{(e_2, X)\}$, $(F_3, E) = \{(e_1, X)(e_2, \{x_2\})\}$, $(H_1, K) = \{(k_1, \{y_1\})\}$, $(H_2, K) = \{(k_2, \{y_2\})\}$, $(H_3, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \rightarrow K$ dönüşümü $u(x_1) = Y$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \rightarrow (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten *ön*-kararsızdır, çünkü Y deki esnek *ön*-açık $\{(k_1, \{y_1\})\}$, $\{(k_2, \{y_2\})\}$, (H_3, K), $\{(k_1, \{y_1\}), (k_2, Y)\}$, $\{(k_1, Y), (k_2, \{y_2\})\}$ kümelerinin üst ters görüntüleri olan $F^+(\{(k_1, \{y_1\})\}) = \Phi$, $F^+(\{(k_2, \{y_2\})\}) = (F_1, E) = F^+(H_3, K)$, $F^+(\{(k_1, \{y_1\}), (k_2, Y)\}) = \{(e_2, X)\}$, $F^+(\{(k_1, Y), (k_2, \{y_2\})\}) = \{(e_1, X), (e_2, \{x_2\})\}$ kümeleri X de esnek *ön*-açıktır.

Örnek 5.4.2.3. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümeler, $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ parametre kümeleri olmak üzere $\tilde{\tau}$ ve $\tilde{\upsilon}$ esnek topolojileri sırasıyla $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E), (F_7, E)\}$, $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H_1, K), (H_2, K), (H_3, K)\}$ şeklinde verilsin. Burada $(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\})\}$, $(F_2, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_1\})\}$, $(F_3, E) = \{(e_1, X)\}$, $(F_4, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, X)\}$, $(F_5, E) = \{(e_1, X), (e_2, \{x_1\})\}$, $(F_6, E) = \{(e_2, \{x_1\})\}$, $(F_7, E) = \{(e_2, X)\}$ ve $(H_1, K) = \{(k_1, \{y_1\})\}$, $(H_2, K) = \{(k_2, \{y_2\})\}$, $(H_3, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\}$ dir. $u: X \rightarrow Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \rightarrow K$ dönüşümü $u(x_1) = Y$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \rightarrow (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan esnek *ön*-kararsızdır, çünkü Y deki esnek *ön*-açık $\{(k_1, \{y_1\})\}$, $\{(k_2, \{y_2\})\}$, (H_3, K), $\{(k_1, \{y_1\}), (k_2, Y)\}$, $\{(k_1, Y), (k_2, \{y_2\})\}$ kümelerinin alt ters görüntüleri olan $F^-(\{(k_1, \{y_1\})\}) = \{(e_1, \{x_1\})\}$, $F^-(\{(k_2, \{y_2\})\}) = \{(e_2, X)\}$, $F^-(H_3, K) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, X)\}$=$F^-(\{(k_1, \{y_1\}), (k_2, Y)\})\}$, $F^-(\{(k_1, Y), (k_2, \{y_2\})\}) = \tilde{X}$ kümeleri X de esnek *ön*-açıktır.

Teorem 5.4.2.4. $F: (X, \tilde{\tau}, E) \rightarrow (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) F esnek üstten *ön*-kararsızdır.

ii) X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası ve $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (G, K)$ olan Y deki her esnek *ön*-açık (G, K) kümesi için ${E_e}^x \tilde{\in} int\left(cl\left(F^+(G, K)\right)\right)$

iii) X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası ve $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (G, K)$ olan Y deki her (G, K) esnek *ön*-açık kümesi için bir (U, E) esnek açık kümesi vardır öyle ki ${E_e}^x \tilde{\in} (U, E) \tilde{\subset} cl\left(F^+(G, K)\right)$

iv) X deki her $E_e{}^x$ esnek noktası ve $F(E_e{}^x)$ in Y deki her (G,K) esnek *ön*-açık komşuluğu için $F^+(G,K)$ kümesi de $E_e{}^x$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğudur.

v) X deki her $E_e{}^x$ esnek noktası ve $F(E_e{}^x)$ in her (G,K) esnek *ön*-açık komşuluğu için $E_e{}^x$ in bir (U,E) esnek *ön*-açık komşuluğu vardır öyle ki $F(U,E) \tilde{\subset} (G,K)$

vi) Y deki her esnek *ön*-açık (G,K) kümesi için $F^+(G,K)$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır.

vii) Y deki her esnek *ön*-kapalı (H,K) kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek *ön*-kapalıdır.

viii) Y deki her esnek (B,K) kümesi için $pcl\big(F^-(B,K)\big) \tilde{\subset} F^-\big(pcl(B,K)\big)$ dır.

İspat. (i⇒ii) Y de $F(E_e{}^x) \tilde{\subset} (G,K)$ şartını sağlayan herhangi bir (G,K) esnek *ön*-açık küme olsun. i) den $E_e{}^x$ esnek noktasını içeren bir (P,E) esnek *ön*-açık kümesi vardır öyle ki $E_e{}^z \tilde{\in} (P,E)$ olduğunda $F(E_e{}^z) \tilde{\subset} (G,K)$ dir. Buradan da $F(P,E) \tilde{\subset} (G,K)$ olduğu elde edilir. Ayrıca (P,E) esnek *ön*-açık bir küme olduğundan dolayı $E_e{}^x \tilde{\in} (P,E) \tilde{\subset} int\big(cl(P,E)\big) \tilde{\subset} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ bulunur.

(ii⇒iii) Eğer ii) de $(U,E) = int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ alınırsa $E_e{}^x \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subset} cl\big(F^+(G,K)\big)$ olduğu elde edilir.

(iii⇒iv) (G,K) esnek kümesi $F(E_e{}^x)$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğu olsun. Bu durumda $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K)$ dır ve iii) den bir (U,E) esnek açık kümesi vardır öyle ki $E_e{}^x \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subset} cl\big(F^+(G,K)\big)$ dir. $E_e{}^x \tilde{\in} (U,E) = int(U,E) \tilde{\subset} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ ve $F^+(G,K) \tilde{\subset} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ dir. O halde $F^+(G,K)$, $E_e{}^x$ esnek noktasının esnek *ön*-açık komşuluğudur.

(iv⇒v) (G,K), $F(E_e{}^x)$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğu olsun. Eğer $(U,E) = F^+(G,K)$ olarak alınırsa iv) den (U,E) kümesi, $E_e{}^x$ esnek noktasının esnek *ön*-açık komşuluğudur ve $F(U,E) \tilde{\subset} (G,K)$ dir.

(v⇒vi) (G,K), Y de $E_e{}^x \tilde{\in} F^+(G,K)$ şartını sağlayan herhangi bir esnek *ön*-açık küme olsun. hipotezden $E_e{}^x$ esnek noktasının bir (U,E) esnek *ön*-açık komşuluğu vardır öyle ki $F(U,E) \tilde{\subset} (G,K)$ dir. Bu durumda $E_e{}^x \tilde{\in} (U,E) \tilde{\subset} F^+(G,K)$ olur ve böylece

${E_e}^x \widetilde{\in} (U,E) \widetilde{\subset} int\big(cl(U,E)\big) \widetilde{\subset} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ olduğu elde edilir. O halde $F^+(G,K) \widetilde{\subset} int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ dır. Dolayısıyla $F^+(G,K)$ esnek *ön*-açık kümedir.

(vi⇒vii) (H,K), Y de herhangi bir esnek *ön*-kapalı küme olsun. Bu durumda $\tilde{Y} - (H,K)$ esnek *ön*-açık küme olup vi) dan $F^+\Big(\tilde{Y} - (H,K)\Big)$ esnek *ön*-açık kümedir. Ayrıca $F^+\Big(\tilde{Y} - (H,K)\Big) = \tilde{X} - F^-(H,K)$ olduğundan $\tilde{X} - F^-(H,K)$ esnek *ön*-açık küme dolayısıyla $F^-(H,K)$ esnek *ön*-kapalı kümedir.

(vii⇒viii) (B,K), Y de herhangi bir esnek küme olsun. Bu durumda $pcl(B,K)$ esnek *ön*-kapalı küme olup vii) dan $F^-\big(pcl(B,K)\big)$ esnek *ön*-kapalı kümedir. Böylece $pcl\big(F^-(G,K)\big) \widetilde{\subset} pcl\Big(F^-\big(pcl(G,K)\big)\Big) = F^-\big(pcl(G,K)\big)$ olduğu elde edilir.

(viii⇒i) (G,K), Y de ${E_e}^x \widetilde{\in} F^+(G,K)$ şartını sağlayan herhangi bir esnek *ön*-açık küme olsun. Bu durumda $F({E_e}^x) \widetilde{\subset} (G,K)$ dir ve dolayısıyla $F({E_e}^x) \widetilde{\cap} \Big(\tilde{Y} - (G,K)\Big) \neq \Phi$ dir. Böylece ${E_e}^x \widetilde{\notin} F^-\Big(\tilde{Y} - (G,K)\Big) = F^-\Big(\tilde{Y} - pint(G,K)\Big) = F^-\Big(pcl\Big(\tilde{Y} - (G,K)\Big)\Big)$ dır ve viii) den ${E_e}^x \widetilde{\notin} pcl\Big(F^-\Big(\tilde{Y} - (G,K)\Big)\Big)$ dır. Bu durumda ${E_e}^x$ i içeren esnek *ön*-açık (U,E) kümesi vardır öyle ki $F^-\Big(\tilde{Y} - (G,K)\Big) \widetilde{\subset} \tilde{X} - (U,E)$ ve dolayısıyla $(U,E) \widetilde{\cap} F^-\Big(\tilde{Y} - (G,K)\Big) = \Phi$ dir. Buradan $F(U,E) \widetilde{\subset} (G,K)$ elde edilir. O halde F esnek üstten *ön*-kararsızdır.

Teorem 5.4.2.5. $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan *ön*-kararsızdır.

ii) X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası ve $F({E_e}^x) \widetilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ olan Y deki her esnek *ön*-açık (G,K) kümesi için ${E_e}^x \widetilde{\in} int\Big(cl\big(F^-(G,K)\big)\Big)$

iii) X deki her ${E_e}^x$ esnek noktası ve $F({E_e}^x) \widetilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ olan Y deki her bir esnek *ön*-açık (G,K) kümesi için bir (U,E) esnek açık kümesi vardır öyle ki ${E_e}^x \widetilde{\in} (U,E) \widetilde{\subset} cl\big(F^-(G,K)\big)$

iv) X deki her $E_e{}^x$ esnek noktası ve $F(E_e{}^x) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ olan Y deki her bir (G,K) esnek *ön*-açık komşuluğu için $F^-(G,K)$ kümesi de $E_e{}^x$ in bir esnek *ön*-açık komşuluğudur.

v) Y deki her esnek *ön*-açık (G,K) kümesi için $F^-(G,K)$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır.

vi) Y deki her esnek *ön*-kapalı (H,K) kümesi için $F^+(H,K)$ kümesi X de esnek *ön*-kapalıdır.

vii) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $cl\left(int\left(F^+(G,K)\right)\right) \tilde{\subset} F^+\left(pcl(G,K)\right)$

viii) X deki her esnek (U,E) kümesi için $F\left(cl\left(int(U,E)\right)\right) \tilde{\subset} pcl\left(F(U,E)\right)$

ix) X deki her esnek (U,E) kümesi için $F\left(pcl(U,E)\right) \tilde{\subset} pcl\left(F(U,E)\right)$

x) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $pcl\left(F^+(G,K)\right) \tilde{\subset} F^+\left(pcl(B,K)\right)$

İspat. Biz sadece iv⇒v, vi⇒viii, vii⇒viii ve viii⇒ix un ispatını yapacağız. Diğerlerinin ispatı yukarıdaki teoremdekine benzer şekilde yapılabilir.

(iv⇒v) (G,K), Y de $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(G,K)$ şartını sağlayan herhangi bir esnek *ön*-açık küme olsun. iv) den $F^-(G,K)$ kümesi $E_e{}^x$ esnek noktasının bir esnek *ön*-açık komşuluğudur. Böylece $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(G,K) \tilde{\subset} int\left(cl\left(F^-(G,K)\right)\right)$ olur. O halde $F^-(G,K)$ kümesi X de esnek *ön*-açıktır.

(vi⇒vii) (G,K), Y de herhangi bir esnek *ön*-açık küme olsun. $pcl(G,K)$ *ön*-kapalı esnek küme olduğundan vi) dan $F^+\left(pcl(G,K)\right)$ kümesi X de esnek *ön*-kapalıdır. Ayrıca $F^+(G,K) \tilde{\subset} F^+\left(pcl(G,K)\right)$ olduğundan $pcl\left(F^+(G,K)\right) \tilde{\subset} pcl\left(F^+\left(pcl(G,K)\right)\right) = F^+\left(pcl(G,K)\right)$ dır. $pcl\left(F^+(G,K)\right) = F^+(G,K) \tilde{\cup} cl\left(int\left(F^+(G,K)\right)\right)$ olduğundan $cl\left(int\left(F^+(G,K)\right)\right) \tilde{\subset} F^+\left(pcl(G,K)\right)$ bulunur.

(vii⇒viii) X de herhangi bir (U,E) esnek kümesi için $(U,E) \tilde{\subset} F^+\left(F(U,E)\right)$ olup vii) den $cl\left(int(U,E)\right) \tilde{\subset} cl\left(int\left(F^+\left(F(U,E)\right)\right)\right) \tilde{\subset} F^+\left(pcl\left(F(U,E)\right)\right)$ olur. Buradan $F\left(cl\left(int(U,E)\right)\right) \tilde{\subset} F\left(F^+\left(pcl\left(F(U,E)\right)\right)\right) \tilde{\subset} pcl\left(F(U,E)\right)$ bulunur.

(viii⇒ix) X deki herhangi bir (U,E) esnek kümesi için $pcl(U,E) = (U,E) \tilde{\cup}\, cl\big(int(U,E)\big)$ olduğundan viii) den $F\big(pcl(U,E)\big) = F\Big((U,E) \tilde{\cup}\, cl\big(int(U,E)\big)\Big) = F(U,E) \tilde{\cup}\, F\Big(cl\big(int(U,E)\big)\Big) \tilde{\subseteq} pcl\big(F(U,E)\big)$ olur.

(ix⇒x) Y de herhangi bir (G,K) esnek kümesi için $F^{+}(B,K)$ X de bir esnek küme olup ix) dan $F\Big(pcl\big(F^{+}(B,K)\big)\Big) \tilde{\subseteq} pcl\Big(F\big(F^{+}(B,K)\big)\Big)$ yazılabilir. Buradan da $pcl\big(F^{+}(B,K)\big) \tilde{\subseteq} F^{+}\Big(pcl\Big(F\big(F^{+}(B,K)\big)\Big)\Big) \tilde{\subseteq} F^{+}\big(pcl(B,K)\big)$ bulunur.

5.5. Esnek b-Sürekli ve Esnek b-Kararsız Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, ilk olarak esnek b-açık (b-kapalı) kümeler ile ilgili özellikler verilmiştir. Daha sonra esnek topolojik uzaylarda üstten (alttan) b-sürekli ile b-kararsız küme değerli dönüşümler tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.5.1. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) bir esnek küme olsun.

i. $(F, E) \tilde{\subseteq} int\big(cl(F, E)\big) \tilde{\cup} cl\big(int(F, E)\big)$ ise (F, E) ye esnek b-açık kümedir denir.

ii. $(F, E) \tilde{\supseteq} int\big(cl(F, E)\big) \tilde{\cap} cl\big(int(F, E)\big)$ ise (F, E) ye esnek b-kapalı kümedir denir. (Akdağ and Özkan, 2014).

$(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayındaki tüm esnek b-açık ve esnek b-kapalı kümelerin ailesi sırasıyla $SBOS(X)$ ve $SBCS(X)$ ile gösterilmiştir.

Teorem 5.5.2. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. (F, E) nin esnek b-açık küme olması için gerek ve yeter koşul $(F, E)^{\tilde{c}}$ nin esnek b-kapalı olmasıdır.

ii. (F, E) nin esnek b-kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $(F, E)^{\tilde{c}}$ nin esnek b-açık olmasıdır. (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.3. Bir $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında aşağıdakiler doğrudur;

i. Esnek b-açık kümelerin keyfi birleşimleri esnek b-açıktır.

ii. Esnek b-kapalı kümelerin keyfi kesişimleri de esnek b-kapalıdır. (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.4. Bir $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında aşağıdakiler doğrudur;

i. Her esnek *ön*-açık küme esnek b-açıktır.

ii. Her esnek *yarı*-açık küme esnek b-açıktır. (Akdağ and Özkan, 2014).

Tanım 5.5.5. $(X, \tilde{\tau}, E)$ esnek topolojik uzayında (F, E) bir esnek küme olsun.

i. (F, E) esnek kümesinin esnek b-kapanışı

$sbcl(F,E) = \tilde{\cap} \{(G,E): (G,E)$ esnek b-kapalı küme ve$(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)\}$

ii. (F,E) esnek kümesinin esnek b-içi

$sbint(F,E) = \tilde{\cup} \{(O,E): (O,E)$ esnek b-açık küme ve $(O,E) \tilde{\subseteq} (F,E)\}$

biçiminde tanımlanır.

O halde $sbcl(F,E)$ kümesi, (F,E) yi kapsayan en küçük esnek b-kapalı kümedir. $sbint(F,E)$ kümesi, (F,E) nin kapsadığı en büyük esnek b-açık kümedir. (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.6. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek kümesi için aşağıdakiler doğrudur;

i. (F,E) nin esnek b-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) = sbcl(F,E)$ olmasıdır.

ii. (F,E) nin esnek esnek b-açık olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) = sbint(F,E)$ olmasıdır. (Akdağ and Özkan, 2014).

Önerme 5.5.7. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E), (G,E) esnek kümeler olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. $sbcl(\Phi) = \Phi$ ve $sbint(\Phi) = \Phi$

ii. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $sbcl(F,E) \tilde{\subseteq} sbcl(G,E)$ ve $sbint(F,E) \tilde{\subseteq} sbint(G,E)$

iii. $sbcl\big(sbcl(F,E)\big) = sbcl(F,E)$ ve $sbint\big(sbint(F,E)\big) = sbint(F,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.8. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek kümesi için aşağıdakiler doğrudur;

i. $sbcl\big((F,E)^{\tilde{c}}\big) = (sbint(F,E))^{\tilde{c}}$

ii. $sbint\big((F,E)^{\tilde{c}}\big) = (sbcl(F,E))^{\tilde{c}}$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Lemma 5.5.9. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek kümesi için aşağıdakiler doğrudur;

i. $sbcl(F,E) = sscl(F,E) \tilde{\cap} spcl(F,E)$

ii. $sbint(F,E) = ssint(F,E) \tilde{\cup} spint(F,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Sonuç 5.5.10. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun.

i. $sbcl(F,E)$ kümesi (F,E) esnek kümesini kapsayan en küçük esnek b-kapalı küme olacağından $sbcl(F,E) = (F,E) \tilde{\cup} \left[int\big(cl(F,E)\big) \tilde{\cap} cl\big(int(F,E)\big)\right]$ olur.

ii. $sbint(F,E)$ kümesi (F,E) esnek kümesinin kapsadığı en büyük esnek b-açık küme olacağından $sbint(F,E) = (F,E) \tilde{\cap} [int(cl(F,E)) \tilde{\cup} cl(int(F,E))]$ olur. (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.11. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E), (G,E) esnek kümeleri için aşağıdaki özellikler doğrudur;

i. $sbcl\big((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\big) \tilde{\supseteq} sbcl(F,E) \tilde{\cup} sbcl(G,E)$

ii. $sbcl\big((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\big) \tilde{\subseteq} sbcl(F,E) \tilde{\cap} sbcl(G,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.12. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında aşağıdaki özellikler doğrudur;

i. $sbint\big((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\big) \tilde{\supseteq} sbint(F,E) \tilde{\cup} sbint(G,E)$

ii. $sbint\big((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\big) \tilde{\subseteq} sbint(F,E) \tilde{\cap} sbint(G,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.13. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek kümesi için aşağıdaki özellikler doğrudur;

i. $sbcl(F,E) \tilde{\subseteq} sscl(F,E) \tilde{\cap} spcl(F,E)$

ii. $sbint(F,E) \tilde{\supseteq} ssint(F,E) \tilde{\cup} spint(F,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Tanım 5.5.14. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun. Eğer $(F,E) = cl\big(int(F,E)\big)$ ise (F,E) ye esnek regüler kapalı, $(F,E) = int\big(cl(F,E)\big)$ ise (F,E) ye esnek regüler açık küme denir (Arockiarani ve Lancy, 2013).

Teorem 5.5.15. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek b-açık bir küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. (F,E) esnek regüler-kapalı ise (F,E) esnek *ön*-açıktır.

ii. (F,E) esnek regüler-açık ise (F,E) esnek *yarı*-açıktır (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.16. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek b-açık küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i. (F,E) esnek regüler-kapalı ise (F,E) esnek *yarı*-kapalıdır.

ii. (F,E) esnek regüler-açık ise (F,E) esnek *ön*-kapalıdır (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.17. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında herhangi bir (F,E) esnek b-açık kümesi için $cl(F,E)$ esnek kümesi esnek regüler-kapalıdır (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.18. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında herhangi bir (F,E) esnek b-kapalı kümesi için $int(F,E)$ esnek regüler açıktır (Akdağ and Özkan, 2014).

Önerme 5.5.19. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek b-açık (esnek b-kapalı) bir esnek küme olsun. Eğer $int(F,E)=\Phi$ ise (F,E) esnek *ön*-açık kümedir (Akdağ and Özkan, 2014).

Önerme 5.5.20. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek b-açık bir esnek küme olsun. Eğer $cl\big((F,E)\big)=\Phi$ ise (F,E) esnek *yarı*-açık kümedir (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.21. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (G,E) esnek açık küme ve (F,E) esnek b-açık küme ise $(F,E)\ \tilde{\cap}\ (G,E)$ esnek b-açık kümedir (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.22. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (G,E) esnek α-açık ve (F,E) esnek b-açık ise $(F,E)\ \tilde{\cap}\ (G,E)$ esnek b-açık kümedir (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.5.23. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) nin esnek b-açık (esnek b-kapalı) olması için gerek ve yeter koşul (F,E)'nin bu uzayda esnek *yarı*-açık ve esnek *ön*-açık kümelerin birleşimlerinin (kesişimlerinin) alt kümesi olarak yazılabilmesidir. (Akdağ and Özkan, 2014).

5.5.1. Esnek b-Sürekli Küme Değerli Dönüşümler

Bu alt kısımda, esnek topolojik uzaylar arasında tanımlı b-sürekli (semi-continuous) küme değerli dönüşümler tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.5.1.1. $(X,\tilde{\tau},E)$, $(Y,\tilde{\upsilon},K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F(E_e{}^x)\tilde{\subset}(G,K)$ olan her esnek açık kümesi için $E_e{}^z\tilde{\in}(P,E)$ olduğunda $F(E_e{}^z)\tilde{\subset}(G,K)$ şartını sağlayan $E_e{}^x$ in bir (P,E) esnek b-açık komşuluğu var ise F ye $E_e{}^x$ esnek noktasında üstten b-süreklidir denir.

b) $F(E_e{}^x)\tilde{\cap}(G,K)\neq\Phi$ olan her esnek açık kümesi için $E_e{}^z\tilde{\in}(P,E)$ olduğunda $F(E_e{}^z)\tilde{\cap}(G,K)\neq\Phi$ şartını sağlayan $E_e{}^x$ in bir (P,E) esnek b-açık komşuluğu var ise F ye $E_e{}^x$ esnek noktasında alttan b-süreklidir denir.

c) F, X in her esnek noktasında esnek üstten (alttan) b-sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) b-süreklidir denir.

Teorem 5.5.1.2. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek üstten b-süreklidir.

ii) Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^+(G,K)$ kümesi X de esnek b-açıktır.

iii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek b-kapalıdır.

iv) Y deki her esnek (B,K) kümesi için $bcl\big(F^-(B,K)\big)\tilde{\subset}F^-\big(bcl(B,K)\big)$ dır.

v) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $F^+\big(int(G,K)\big)\tilde{\subset}bint\big(F^+(G,K)\big)$ dır.

İspat. (i⇒ii) $E_e{}^x\tilde{\in}F^+(G,K)$ olmak üzere Y de herhangi bir esnek (G,K) kümesi alalım. Bu durumda $F(E_e{}^x)\tilde{\subset}(G,K)$ olduğundan i) den $E_e{}^x$ i içeren bir (U,E) esnek b-açık kümesi vardır öyle ki $F(U,E)\tilde{\subset}(G,K)$ dır. O halde $E_e{}^x\tilde{\in}(U,E)\tilde{\subset}int\big(cl(U,E)\big)\tilde{\cup}cl\big(int(U,E)\big)\tilde{\subset}int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)\tilde{\cup}cl\Big(int\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ olacağından $F^+(G,K)\tilde{\subset}int\Big(cl\big(F^+(G,K)\big)\Big)\tilde{\cup}cl\Big(int\big(F^+(G,K)\big)\Big)$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla $F^+(G,K)$ kümesi X de esnek b-açıktır.

(ii⇒iii) Y de herhangi bir (H,K) esnek kapalı kümesi için $\tilde{Y}-(H,K)$ esnek açık küme olup ii) den $F^{+}\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)$ esnek b-açık kümedir. $F^{+}\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)=\tilde{X}-F^{-}(H,K)$ olduğundan $\tilde{X}-F^{-}(H,K)$ esnek b-açık küme dolayısıyla $F^{-}(H,K)$ esnek b-kapalıdır.

(iii⇒iv) Y de herhangi bir (B,K) esnek kümesi için $cl(B,K)$ esnek kapalı küme olduğundan iii) özelliğinden $F^{-}\big(cl(B,K)\big)$ esnek b-kapalı kümedir. O halde $bcl\big(F^{-}(B,K)\big)\,\tilde{\subseteq}\, bcl\left(F^{-}\big(cl(B,K)\big)\right)=F^{-}\big(cl(B,K)\big)$ dır.

(iv⇒v) Y deki herhangi bir (G,K) esnek kümesi için iv) özelliğinden $bcl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\,\tilde{\subseteq}\, F^{-}\left(cl\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)$ olduğundan esnek tümleyen alınırsa $\tilde{X}-F^{-}\left(cl\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\,\tilde{\subseteq}\,\tilde{X}-bcl\left(F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)$ olduğu elde edilir. Böylece $F^{+}\left(\tilde{Y}-cl\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\,\tilde{\subseteq}\, bint\left(\tilde{X}-F^{-}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)$ bulunur ve buradan da $F^{+}\left(int\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)\,\tilde{\subseteq}\, bint\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)$ elde edilir. O halde $F^{+}\big(int(G,K)\big)\,\tilde{\subseteq}\, bint\big(F^{+}(G,K)\big)$ bulunur.

(v⇒i) Y deki herhangi bir (B,K) esnek kümesi için v) özelliğinden $F^{+}(G,K)=F^{+}\big(int(G,K)\big)\,\tilde{\subseteq}\, bint\big(F^{+}(G,K)\big)$ olur. O halde $F^{+}(G,K)$ esnek b-açık kümedir.

Teorem 5.5.1.3. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan b-süreklidir.

ii) Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^{-}(G,K)$ kümesi X de esnek b-açıktır.

iii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^{+}(H,K)$ kümesi X de esnek b-kapalıdır.

iv) Y deki her esnek (B,K) kümesi için $bcl\big(F^{+}(B,K)\big)\,\tilde{\subseteq}\, F^{+}\big(bcl(B,K)\big)$ dır.

v) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $F^{-}\big(int(G,K)\big)\,\tilde{\subseteq}\, bint\big(F^{-}(G,K)\big)$ dır.

vi) X deki her esnek (U,E) kümesi için $F\big(bcl(U,E)\big)\,\tilde{\subseteq}\, cl\big(F(U,E)\big)$ dır.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde i), ii), iii), iv) ve v) in denk olduğu gösterilebilir. Biz sadece v) ile vi) nın denk olduğunu göstereceğiz.

(v⇒vi) X deki herhangi bir (U,E) esnek kümesini alalım. Bu durumda $F\big(bcl(U,E)\big) = F\Big((U,E) \tilde{\cup} \big[int\big(cl(U,E)\big) \tilde{\cap} cl\big(int(U,E)\big)\big]\Big) =$

$F(U,E) \tilde{\cup} F\Big(int\big(cl(U,E)\big) \tilde{\cap} cl\big(int(U,E)\big)\Big) \tilde{\subseteq} F(U,E) \tilde{\cup} F\big(cl(U,E)\big) = F\big(cl(U,E)\big)$ bulunur.

(vi⇒iii) Y deki herhangi bir (H,K) esnek kümesini alalım. Bu durumda $F\big(F^+(H,K)\big) \tilde{\subseteq} (H,K)$ olduğundan $F^+(H,K)$ esnek kümesi için vi) özelliğinden $F\Big(bcl\big(F^+(H,K)\big)\Big) \tilde{\subseteq} cl\Big(F\big(F^+(H,K)\big)\Big) \tilde{\subseteq} cl(H,K) = (H,K)$ bulunur. Dolayısıyla $bcl\big(F^+(H,K)\big) \tilde{\subseteq} F^+(H,K)$ bulunur ki bu da $F^+(H,K)$ nın esnek b-kapalı olduğunu gösterir.

Örnek 5.5.1.4. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümeleri, $E = \{e\}$, $K = \{k\}$ parametre kümeleri ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1,E), (G_2,E), (G_3,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ esnek topolojileri verilmiş olsun. Burada $(G_1,E) = \{(e,\{x_4\})\}$, $(G_1,E) = \{(e,\{x_1,x_2\})\}$, $(G_1,E) = \{(e,\{x_1,x_2,x_4\})\}$ ve $(H,K) = \{(k,\{y_1\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_2\}$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $u(x_3) = \{y_1\}$, $u(x_4) = Y$, $p(e) = k$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten b-süreklidir, çünkü Y deki esnek açık (H,K) kümesi için $F^+(H,K) = \{(e,\{x_1\})\}$ kümesi X de esnek b-açıktır.

Örnek 5.5.1.5. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümeler, $E = \{e\}$, $K = \{k\}$ parametre kümeleri $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1,E), (G_2,E), (G_3,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ esnek topolojiler olsun. Burada $(G_1,E) = \{(e,\{x_4\})\}$, $(G_1,E) = \{(e,\{x_1,x_2\})\}$, $(G_1,E) = \{(e,\{x_1,x_2,x_4\})\}$ ve $(H,K) = \{(k,\{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_2\}$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $u(x_3) = \{y_1\}$, $u(x_4) = Y$, $p(e) = k$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan b-süreklidir, çünkü Y deki esnek açık (H,K) kümesi için $F^-(H,K) = \tilde{X}$ kümesi X de esnek b-açıktır.

5.5.2. Esnek *b*-Kararsız Küme Değerli Dönüşümler

Bu alt kısımda, esnek topolojik uzaylar arasında tanımlı b-kararsız (b-irresolute) küme değerli dönüşümler tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.5.2.1. $(X,\tilde{\tau},E)$, $(Y,\tilde{\upsilon},K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F:(X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F({E_e}^x) \tilde{\subset} (G,K)$ olan her (G,K) esnek b-açık kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\subset} (G,K)$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek b-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten b-kararsızdır denir.

b) $F({E_e}^x) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ olan her (G,K) esnek b-açık kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek b-açık komşuluğu varsa F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında alttan b-kararsızdır denir.

c) F, X in her esnek noktasında esnek üstten (alttan) b-kararsız ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) b-kararsızdır denir.

Teorem 5.5.2.2. $F:(X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan b-kararsızdır.

ii) Y deki her esnek b-açık (G,K) kümesi için $F^-(G,K)$ kümesi X de esnek b-açıktır.

iii) Y deki her esnek b-kapalı (H,K) kümesi için $F^+(H,K)$ kümesi X de esnek b-kapalıdır.

İspat. (i⇒ii) ${E_e}^x \tilde{\in} F^-(G,K)$ olmak üzere Y de herhangi bir (G,K) esnek b-açık kümesi alalım. F esnek alttan b-kararsız olduğundan ${E_e}^x$ esnek noktasının bir (U,E) esnek b-açık kümesi vardır öyle ki $(U,E) \tilde{\subset} F^-(G,K)$ dır. O halde $(U,E) = bint(U,E) \tilde{\subset} bint\big(F^-(G,K)\big)$ bulunur ve ${E_e}^x \tilde{\in} bint\big(F^-(G,K)\big)$ olur. Böylece $F^-(G,K) \tilde{\subset} bint\big(F^-(G,K)\big)$ ve dolayısıyla $F^-(G,K)$ kümesi esnek b-açıktır.

(ii⇒iii) Y de herhangi bir (H,K) esnek b-kapalı kümesi için $\tilde{Y} - (H,K)$ esnek b-açık küme olup hipotezden $F^-\left(\tilde{Y} - (H,K)\right)$ bir esnek b-açık kümedir. Bu durumda

$F^-\left(\tilde{Y} - (H,K)\right) = \tilde{X} - F^+(H,K)$ olduğundan $\tilde{X} - F^+(H,K)$ esnek b-açık küme dolayısıyla $F^+(H,K)$ esnek b-kapalıdır.

(iii⇒i) $E_e{}^x \tilde{\in} F^-(G,K)$ olmak üzere Y de herhangi bir (G,K) esnek b-açık kümesi için $\tilde{Y} - (G,K)$ esnek b-kapalı küme olup iii) $F^+\left(\tilde{Y} - (G,K)\right) = \tilde{X} - F^-(G,K)$ eşitliğinden $F^-(G,K)$ esnek b-açık kümedir. $F^-(G,K) = (U,E)$ olarak alırsak (U,E) kümesi $E_e{}^x$ i içeren bir esnek b-açık küme olup $(U,E) \tilde{\subseteq} F^-(G,K)$ dır. O halde F esnek alttan b-kararsızdır.

Teorem 5.5.2.3. $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek üstten b-kararsızdır.

ii) Y deki her esnek b-açık (G,K) kümesi için $F^+(G,K)$ kümesi X de esnek b-açıktır.

iii) Y deki her esnek b-kapalı (H,K) kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek b-kapalıdır.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde ispatı yapılabilir.

Teorem 5.5.2.4. $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ ve $G: (Y,\tilde{\upsilon},K) \to (Z,\tilde{\sigma},L)$ iki esnek küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda $GoF: (X,\tilde{\tau},E) \to (Z,\tilde{\sigma},L)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) F esnek üstten (alttan) b-sürekli ve G esnek üstten (alttan) sürekli ise GoF esnek üstten (alttan) b-süreklidir.

ii) F ve G esnek üstten (alttan) b-kararsız ise GoF esnek üstten (alttan) b-kararsızdır.

iii) F esnek üstten (alttan) b-kararsız ve G esnek üstten (alttan) b-sürekli ise GoF esnek üstten (alttan) b-süreklidir.

İspat. i) (H,T) kümesi Z de esnek açık bir küme olsun. G esnek üstten sürekli olduğundan $G^+(H,T)$ kümesi Y de esnek açıktır. F esnek üstten b-sürekli olduğundan $F^+\left(G^+(H,T)\right) = (GoF)^+(H,T)$ esnek b-açık kümedir. Dolayısıyla GoF esnek üstten b-süreklidir.

ii) (H,T) kümesi Z de esnek b-açık bir küme olsun. G esnek üstten b-kararsız bir dönüşüm olduğundan $G^+(H,T)$ kümesi Y de esnek b-açık kümedir. F esnek üstten b-kararsız bir dönüşüm olduğundan $F^+\big(G^+(H,T)\big)=(GoF)^+(H,T)$ esnek b-açık kümedir. Dolayısıyla GoF esnek üstten b-kararsızdır.

iii) (H,T) kümesi Z de esnek açık bir küme olsun. G esnek üstten b-sürekli bir dönüşüm olduğundan $G^+(H,T)$ kümesi Y de esnek b-açık kümedir. F esnek üstten b-kararsız bir dönüşüm olduğundan $F^+\big(G^+(H,T)\big)=(GoF)^+(H,T)$ esnek b-açık kümedir. Dolayısıyla GoF esnek üstten b-süreklidir.

Teorem 5.5.2.5. $F:(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ ve $G:(Y,\tilde{\upsilon},K)\to(Z,\tilde{\sigma},L)$ iki esnek küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda $GoF:(X,\tilde{\tau},E)\to(Z,\tilde{\sigma},L)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur;

i) F esnek alttan b-sürekli ve G esnek alttan sürekli ise GoF esnek alttan b-süreklidir.

ii) F ve G esnek alttan b-kararsız ise GoF esnek alttan b-kararsızdır.

iii) F esnek alttan b-kararsız ve G esnek alttan b-sürekli ise GoF esnek alttan b-süreklidir.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde yapılabilir.

5.6. Esnek β-sürekli Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda, öncelikle esnek β-açık (β-kapalı) kümeler ile ilgili temel özellikler verilmiştir. Daha sonra esnek topolojik uzaylarda β-sürekli küme değerli dönüşümler tanımlanarak temel özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.6.1. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun. Eğer $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\, cl\Big(int\big(cl((F,E))\big)\Big)$ ise (F,E) esnek kümesine esnek β-açıktır denir. Esnek β-açık kümenin tümleyenine de esnek β-kapalıdır denir (Arockiarani ve Lancy, 2013).

$(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayındaki tüm esnek β-açık ve esnek β-kapalı kümelerin ailesi sırasıyla $S\beta OS(X)$ ve $S\beta CS(X)$ ile gösterilmiştir.

Tanım 5.6.2. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) bir esnek küme olsun.

i.(F,E) esnek kümesinin esnek β-kapanışı

$s\beta cl(F,E) = \tilde{\cap}\,\{(G,E):(G,E)$ esnek β-kapalı küme ve $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(G,E)\}$

ii. (F,E) esnek kümesinin esnek β-içi

$s\beta int(F,E) = \tilde{\cup}\,\{(O,E):(O,E)$ esnek β-açık küme ve $(O,E)\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)\}$

biçiminde tanımlanır.

O halde $s\beta cl(F,E)$ kümesi, (F,E)'yi kapsayan en küçük esnek β-kapalı kümedir. Ayrıca $s\beta int(F,E)$ kümesi, (F,E)'nin kapsadığı en büyük esnek β-açık kümedir (Akdağ and Özkan, 2014).

Önerme 5.6.3. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında aşağıdakiler doğrudur;

i. Esnek β-açık kümelerin keyfi birleşimleri de esnek β-açıktır.

ii. Esnek β-kapalı kümelerin keyfi kesişimleri de esnek β-kapalıdır. (Yumak ve Kaymakcı, 2013).

Önerme 5.6.4. Bir $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E) esnek kümesi için aşağıdakiler doğrudur;

i. $(F,E)\,\tilde{\in}\, S\beta CS(X,\tilde{\tau},E)$ ancak ve ancak $(F,E) = s\beta cl(F,E)$

ii. $(F,E) \tilde{\in} S\beta OS(X,\tilde{\tau},E)$ ancak ve ancak $(F,E) = s\beta int(F,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.6.5. $(X,\tilde{\tau},E)$ esnek topolojik uzayında (F,E), (G,E) esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur:

i. $\left(s\beta cl(F,E)\right)^{\tilde{c}} = s\beta int\left((F,E)^{\tilde{c}}\right)$

ii.$\left(s\beta int(F,E)\right)^{\tilde{c}} = s\beta cl\left((F,E)^{\tilde{c}}\right)$

iii. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $s\beta cl(F,E) \tilde{\subseteq} s\beta cl(G,E)$

iv. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ise $s\beta int(F,E) \tilde{\subseteq} s\beta int(G,E)$

v. $s\beta cl(\Phi) = \Phi$ ve $s\beta cl(\tilde{X}) = \tilde{X}$

vi. $s\beta int(\Phi) = \Phi$ ve $s\beta int(\tilde{X}) = \tilde{X}$

vii. $s\beta cl\left((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\right) \tilde{\subseteq} s\beta cl(F,E) \tilde{\cap} s\beta cl(G,E)$

viii. $s\beta int\left((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\right) \tilde{\supseteq} s\beta int(F,E) \tilde{\cup} s\beta int(G,E)$

ix. $s\beta cl\left(s\beta cl(F,E)\right) = s\beta cl(F,E)$

x. $s\beta int\left(s\beta int(F,E)\right) = s\beta int(F,E)$ (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.6.6. Bir (X,τ,E) esnek topolojik uzayında aşağıdakiler doğrudur;

i. $\tilde{\tau} \tilde{\subseteq} S\beta OS(X)$.

ii. X'de (G,E) esnek küme olmak üzere $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \tilde{\subseteq} cl\left(int(F,E)\right)$ olacak şekilde (F,E) esnek *ön*-açık kümesi varsa, (G,E) esnek β-açıktır. (Akdağ and Özkan, 2014).

Teorem 5.6.7. Bir (X,τ,E) esnek topolojik uzayında (F,E) esnek kapalı küme ve (G,E) esnek β-açık küme ise, $(F,E) \tilde{\cup} (G,E)$ esnek β-açıktır (Akdağ and Özkan, 2014).

Tanım 5.6.8. $(X,\tilde{\tau},E)$, $(Y,\tilde{\upsilon},K)$ iki esnek topolojik uzay ve $F: (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli bir dönüşüm olsun.

a) $F({E_e}^x) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olan her esnek açık (G,K) kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\subseteq} (G,K)$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek β-açık komşuluğu var ise F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında üstten α-süreklidir denir.

b) $F({E_e}^x) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi\ (G,K)$ olan her esnek açık (G,K) kümesi için ${E_e}^z \tilde{\in} (P,E)$ olduğunda $F({E_e}^z) \tilde{\cap} (G,K) \neq \Phi$ şartını sağlayan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek β-açık komşuluğu var ise F ye ${E_e}^x$ esnek noktasında alttan α-süreklidir denir.

c) F dönüşümü X in her esnek noktasında esnek üstten (alttan) β-sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) β-süreklidir denir.

Önerme 5.6.9. $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü esnek üstten β-süreklidir ancak ve ancak Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^+(G,K)$ kümesi X de esnek β-açıktır.

İspat. Kabul edelim ki (G,K), $F({E_e}^x) \tilde{\subseteq} (G,K)$ şartını sağlayan bir esnek açık küme olsun. Bu durumda F üstten β-sürekli olduğundan ${E_e}^x$ in bir (P,E) esnek β-açık komşuluğu vardır öyle ki her ${E_e}^z \tilde{\in} (P,E)$ için $F({E_e}^z) \tilde{\subseteq} (G,K)$ dir. Bu da $F^+(G,K)$ nin X de esnek β-açık küme olduğunu gösterir. Diğer yönü F in esnek üstten β-süreklilik tanımından açıktır.

Önerme 5.6.10. $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü esnek alttan β-süreklidir ancak ve ancak Y deki her esnek açık (G,K) kümesi için $F^-(G,K)$ kümesi X de esnek β-açıktır.

İspat. Yukarıdaki önermeye benzer şekilde ispatı yapılabilir.

Teorem 5.6.11. $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir:

i) F esnek üstten β-süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^-(H,K)$ kümesi X de esnek β-kapalıdır.

iii) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $int\Big(cl\Big(int\big(F^-(G,K)\big)\Big)\Big) \tilde{\subseteq} F^-\big(cl(G,K)\big)$

İspat. (i ⇒ ii) Y deki herhangi bir esnek kapalı (H,K) kümesi için $\tilde{X}-(H,K)$ kümesi esnek açık küme olup $F^{+}\left(\tilde{Y}-(H,K)\right)=\tilde{X}-F^{-}(H,K)$ esnek β-açık kümedir. Dolayısıyla $F^{-}(H,K)$ kümesi X de esnek β-kapalı kümedir.

(ii⇒i) Kabul edelim ki (G,K), $F({E_e}^{x})\tilde{\subseteq}(G,K)$ şartını sağlayan bir esnek açık küme olsun. Hipotezden, $F^{+}(G,K)$ kümesi ${E_e}^{x}$ i içeren bir esnek kümedir. $F^{+}(G,K)=(P,E)$ olarak alırsak $F(P,E)\tilde{\subseteq}(G,K)$ dır. O halde F esnek üstten β-süreklidir.

(ii⇒iii) Y deki herhangi bir (G,K) esnek kümesi için $cl(G,K)$ Y de β-kapalı kümedir. Dolayısıyla $F^{-}\left(cl(G,K)\right)$ X de β-kapalı kümedir. O halde $int\left(cl\left(int\left(F^{-}(G,K)\right)\right)\right)\tilde{\subseteq}$ $int\left(cl\left(int\left(F^{-}\left(cl(G,K)\right)\right)\right)\right)\tilde{\subseteq}cl\left(F^{-}\left(cl(G,K)\right)\right)=F^{-}\left(cl(G,K)\right)$ bulunur.

(iii⇒i) (G,K), Y deki herhangi bir esnek açık küme olmak üzere $\tilde{Y}-(G,K)$ esnek kapalıdır. $(B,E)=F^{+}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)$ olarak alınırsa $(B,E)\tilde{\subseteq}F^{-}\left(F(B,E)\right)$ olduğundan $int\left(cl\left(int(B,E)\right)\right)\tilde{\subseteq}int\left(cl\left(int\left(F^{-}\left(F(B,E)\right)\right)\right)\right)\tilde{\subseteq}F^{-}\left(cl\left(F(B,E)\right)\right)$ olur. Böylece $F\left(int\left(cl\left(int(B,E)\right)\right)\right)\tilde{\subseteq}cl\left(F(B,E)\right)$ olduğu elde edilir. Yani

$$F\left(int\left(cl\left(int\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)\right)\right)\tilde{\subseteq}cl\left(F\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)=cl\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)$$

$=\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)$ dır. Buradan $int\left(cl\left(int\left(F^{+}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)\right)\right)\right)\tilde{\subseteq}\ F^{+}\left(\tilde{Y}-(G,K)\right)$ olur. Bu da $F^{+}(G,K)\tilde{\subseteq}int\left(cl\left(int\left(F^{+}(G,K)\right)\right)\right)$ olduğunu dolayısıyla $F^{+}(G,K)$ nın esnek β-açık küme olduğunu gösterir. O halde F esnek üstten β-süreklidir.

Teorem 5.6.12. $F:(X,\tilde{\tau},E)\rightarrow(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir;

i) F esnek alttan β-süreklidir.

ii) Y deki her esnek kapalı (H,K) kümesi için $F^{+}(H,K)$ kümesi X de esnek β-kapalıdır.

iii) Y deki her esnek (G,K) kümesi için $int\left(cl\left(int\left(F^{+}(G,K)\right)\right)\right)\tilde{\subseteq}F^{+}\left(cl(G,K)\right)$

iv) X deki her esnek (A,E) kümesi için $F\left(int\left(cl\big(int(A,E)\big)\right)\right) \tilde{\subseteq} cl\big(F(A,E)\big)$ dir.

İspat. (iii ⇒ iv) (A,E), X deki herhangi bir esnek küme olsun. $(A,E) \tilde{\subseteq} F^+\big(F(A,E)\big)$ olduğundan Y deki $F(A,E)$ esnek kümesi için iii) özelliğinden elde ederiz ki $int\left(cl\big(int(A,E)\big)\right) \tilde{\subseteq} int\left(cl\left(int\left(F^+\big(F(A,E)\big)\right)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^+\left(cl\big(F(A,E)\big)\right)$ dir. O halde $F\left(int\left(cl\big(int(A,E)\big)\right)\right) \tilde{\subseteq} cl\big(F(A,E)\big)$ olur.

(iv ⇒ i) (G,K), Y deki herhangi bir esnek açık küme olmak üzere $\tilde{Y} - (G,K)$ esnek kapalı küme olup $(A,E) = F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)$ olarak alınırsa bu durumda

$$F\left(int\left(cl\ int\left(F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)\right)\right)\right) \tilde{\subseteq} cl\left(F\left(F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)$$

bulunur. O halde $int\left(cl\left(int\left(F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)\right)\right)\right) \tilde{\subseteq} F^-\left(\tilde{Y} - (G,K)\right)$ ve buradan $F^-(G,K) \tilde{\subseteq} int\left(cl\left(int\big(F^-(G,K)\big)\right)\right)$ dır. Dolayısıyla $F^-(G,K)$ esnek β-açık kümedir ve F esnek alttan β-süreklidir.

Teorem 5.6.13. $F\colon (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ ve $G\colon (Y,\tilde{\upsilon},K) \to (Z,\tilde{\vartheta},L)$ iki esnek küme değerli dönüşüm olsun. Eğer F esnek üstten β-sürekli ve G esnek üstten sürekli ise bu durumda $GoF\colon (X,\tilde{\tau},E) \to (Z,\tilde{\vartheta},L)$ esnek küme değerli dönüşümü de esnek üstten β-süreklidir.

İspat. (M,L), Z de herhangi bir esnek küme olsun. G esnek üstten sürekli olduğundan $G^+(M,L)$ kümesi Y de esnek açık bir kümedir. F esnek üstten β-sürekli olduğundan $F^+\big(G^+(M,L)\big) = (GoF)^+(M,L)$ kümesi X de esnek β-açık bir kümedir. Dolayısıyla GoF esnek küme değerli dönüşümü esnek üstten β-süreklidir.

Teorem 5.6.14. $F\colon (X,\tilde{\tau},E) \to (Y,\tilde{\upsilon},K)$ ve $G\colon (Y,\tilde{\upsilon},K) \to (Z,\tilde{\vartheta},L)$ iki esnek küme değerli dönüşüm olsun. Eğer F esnek alttan β-sürekli ve G esnek alttan sürekli ise bu durumda $GoF\colon (X,\tilde{\tau}) \to (Z,\tilde{\vartheta},L)$ esnek küme değerli dönüşümü de esnek alttan β-süreklidir.

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde ispatı yapılabilir.

5.7. Esnek Küme Değerli Dönüşümlerin Süreklilik Türleri Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda, tez içinde tanımlanan esnek sürekli küme değerli dönüşümler arasındaki ilişkiler incelenmiş, ters gerektirmeler için örnekler verilmiş ve son olarak bu ilişkilerin bir şeması oluşturulmuştur.

Önerme 5.7.1. Esnek sürekli küme değerli dönüşümler arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

i) Her üstten esnek sürekli küme değerli dönüşüm üstten esnek α-süreklidir.

ii) Her üstten esnek α-sürekli küme değerli dönüşüm üstten esnek *ön*-süreklidir.

iii) Her üstten esnek α-sürekli küme değerli dönüşüm üstten esnek *yarı*-süreklidir.

iv) Her üstten esnek ön-sürekli küme değerli dönüşüm üstten esnek b-süreklidir.

v) Her üstten esnek *yarı*-sürekli küme değerli dönüşüm üstten esnek b-süreklidir.

vi) Her üstten esnek b-sürekli küme değerli dönüşüm üstten esnek β-süreklidir.

İspat. Esnek kümelerin tanımları dikkate alındığında ispat açıktır.

Uyarı 5.7.2. Bu önermelerin terslerinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örneklerle gösterilmiştir.

Örnek 5.7.3. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ve esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G, E) = \{(e_2, \{x_2\})\}$ ve $(H, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, Y)\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = Y$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten α-süreklidir fakat üstten sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^+(H, K) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, X)\}$ kümesi X de esnek α-açık kümedir fakat esnek açık küme değildir.

Örnek 5.7.4. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$, $(G_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_3\})\}$, $(G_3, E) =$

$\{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}$ ve (H,K) =$\{(k_1,\{y_1\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_3) = \{y_2, y_3\}$ $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten b-süreklidir fakat üstten *yarı*-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H,K) kümesi için $F^+(H,K) = \{(e_1,\{x_1\})\}$ kümesi X de esnek b-açık kümedir fakat esnek *yarı*-açık küme değildir.

Örnek 5.7.5. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1,E), (G_2,E), (G_3,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ olsun. Burada $(G_1,E) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2\})\}$,$(G_2,E) = \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_3\})\}$,
$(G_3,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}$ ve (H,K) =$\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,\{y_1,y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_3) = \{y_2, y_3\}$ $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten *yarı*-süreklidir fakat üstten α-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H,K) kümesi için $F^+(H,K) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_1,x_2\})\}$ kümesi X de esnek *yarı*-açıktır fakat esnek α-açık değildir.

Örnek 5.7.6. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1,E), (G_2,E), (G_3,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ olsun. Burada $(G_1,E) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2\})\}$,$(G_2,E) = \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_3\})\}$,
$(G_3,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}$ ve (H,K) =$\{(k_1,\{y_1,y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_3) = \{y_2, y_3\}$ $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten *ön*-süreklidir fakat üstten α-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H,K) kümesi için $F^+(H,K) = \{(e_1,\{x_1,x_2\})\}$ kümesi X de esnek *ön*-açık kümedir fakat esnek α -açık küme değildir.

Örnek 5.7.7. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümeleri, $E = \{e\}$, $K = \{k\}$ parametre kümeleri ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1,E), (G_2,E), (G_3,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H,K)\}$ esnek topolojiler olsun. Burada $(G_1,E) = \{(e,\{x_4\})\}$, $(G_1,E) = \{(e,\{x_1,x_2\})\}$, $(G_1,E) = \{(e,\{x_1,x_2,x_4\})\}$ ve $(H,K) = \{(k,\{y_1\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_2\}$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $u(x_3) = \{y_1\}$, $u(x_4) = Y$, $p(e) = k$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten b-süreklidir fakat üstten esnek *yarı*-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{+}(H, K) = \{(e, \{x_1\})\}$ kümesi X de esnek b-açıktır fakat esnek *yarı*-açık değildir.

Örnek 5.7.8. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$, $(G_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_3\})\}$, $(G_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$ ve $(H, K) = \{(k_2, \{y_1, y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_3) = \{y_2, y_3\}$ $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü üstten β-süreklidir fakat üstten b-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{+}(H, K) = \{(e_2, \{x_1, x_2\})\}$ kümesi X de esnek β-açıktır fakat esnek *ön*-açık değildir.

Not. Üstten esnek sürekli küme değerli dönüşümler arasındaki ilişkileri aşağıdaki şema ile gösterebiliriz;

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{üstten esnek sürekli küme değerli dönüşüm} \arrow[d, shift left] & \\
 & \text{üstten esnek } \alpha\text{-sürekli küme değerli dönüşüm} \arrow[u, shift left, "/" marking] \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\
\begin{array}{l}\text{üstten esnek } yarı\text{-sürekli}\\ \text{küme değerli dönüşüm}\end{array} \arrow[ur, shift left, "/" marking] \arrow[dr, shift left] & & \begin{array}{l}\text{üstten esnek ön-sürekli}\\ \text{küme değerli dönüşüm}\end{array} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[dl, shift left] \\
 & \text{üstten esnek } b\text{-sürekli küme değerli dönüşüm} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left, "/" marking] \arrow[d, shift left] & \\
 & \text{üstten esnek } \beta\text{-sürekli küme değerli dönüşüm} \arrow[u, shift left, "/" marking] &
\end{tikzcd}
$$

Not: $\not\longrightarrow$ sembolü uygulamaların her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Önerme 5.7.9. Esnek sürekli küme değerli dönüşümler arasında aşağıdaki ilişkiler vardır;

i) Her alttan esnek sürekli küme değerli dönüşüm alttan esnek α-süreklidir.

ii) Her alttan esnek α-sürekli küme değerli dönüşüm alttan esnek *ön*-süreklidir.

iii) Her alttan esnek α-sürekli küme değerli dönüşüm alttan esnek *yarı*-süreklidir.

iv) Her alttan esnek *ön*-sürekli küme değerli dönüşüm alttan esnek b-süreklidir.

v) Her alttan esnek *yarı*-sürekli küme değerli dönüşüm alttan esnek b-süreklidir.

vi) Her alttan esnek b-sürekli küme değerli dönüşüm alttan esnek β-süreklidir.

İspat. Esnek kümelerin tanımları dikkate alındığında ispat açıktır.

Uyarı 5.7.10. Bu önermelerin terslerinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örneklerle gösterilmiştir.

Örnek 5.7.11. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ve esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G, E) = \{(e_2, \{x_2\})\}$ ve (H, K) $=\{(k_1,\{y_1\}),(k_2,\{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = Y$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan α-süreklidir fakat alttan sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{-}(H, K) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, X)\}$ kümesi X de esnek α-açık kümedir fakat esnek açık küme değildir.

Örnek 5.7.12. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$, $(G_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_3\})\}$,
$(G_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$ ve (H, K) $=\{(k_1,\{y_1\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_3) = \{y_2, y_3\}$ $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü altttan *ön*-süreklidir fakat altttan α-sürekli

değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{-}(H, K) = \{(e_1, \{x_1, x_2\})\}$ kümesi X de esnek *ön*-açık kümedir fakat esnek α-açık küme değildir.

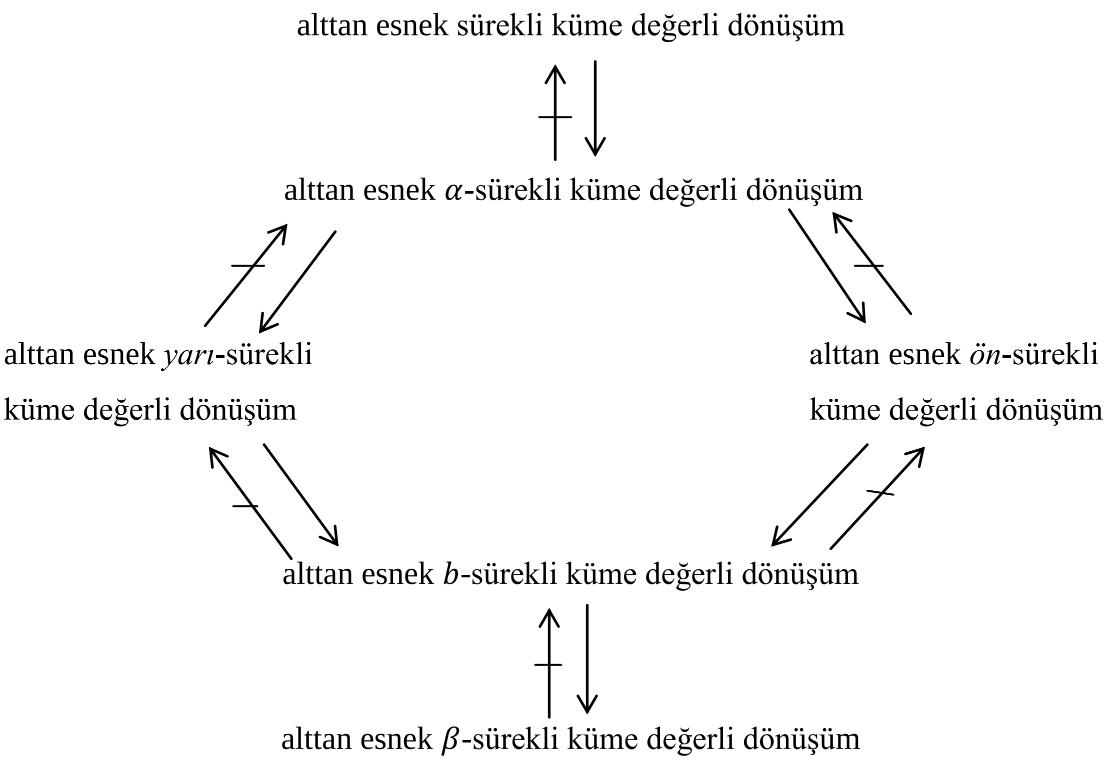
Örnek 5.7.13. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e\}$, $K = \{k\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G_1, E) = \{(e, \{x_1\})\}$, $(G_2, E) = \{(e, \{x_2\})\}$, $(G_3, E) = \{(e, \{x_1, x_2\})\}$ ve $(H, K) = \{(k, \{y_2\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $u(x_3) = Y$, $p(e) = k$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü altttan *yarı*-süreklidir fakat altttan α-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{-}(H, K) = \{(e_1, \{x_2, x_3\})\}$ kümesi X de esnek *yarı*-açık kümedir fakat esnek α-açık küme değildir.

Örnek 5.7.14. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e\}$, $K = \{k\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G_1, E) = \{(e, \{x_1\})\}$, $(G_2, E) = \{(e, \{x_2\})\}$, $(G_3, E) = \{(e, \{x_1, x_2\})\}$ ve $(H, K) = \{(k, \{y_1\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $u(x_3) = Y$, $p(e) = k$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü altttan b-süreklidir fakat altttan *ön*-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{-}(H, K) = \{(e, \{x_1, x_3\})\}$ kümesi X de esnek b-açık kümedir fakat esnek *ön*-açık küme değildir.

Örnek 5.7.15. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ evrensel kümelerine ait parametre kümeleri ile esnek topolojiler sırasıyla $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ ve $\tilde{\tau} = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ ve $\tilde{\upsilon} = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ olsun. Burada $(G_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$, $(G_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_3\})\}$,
$(G_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$ ve $(H, K) = \{(k_1, \{y_1\})\}$ dir. $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p: E \to K$ dönüşümü $u(x_1) = \{y_1\}$, $u(x_2) = \{y_1, y_2\}$, $u(x_3) = \{y_2, y_3\}$ $p(e_1) = k_1$, $p(e_2) = k_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F: (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\upsilon}, K)$ esnek küme değerli dönüşümü altttan b-süreklidir fakat altttan *yarı*-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H, K) kümesi için $F^{-}(H, K) = \{(e_1, \{x_1, x_2\})\}$ kümesi X de esnek b-açık kümedir fakat esnek *yarı*-açık küme değildir.

Örnek 5.7.16. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$ evrensel kümeler, $E=\{e\}$, $K=\{k\}$ parametre kümeleri $\tilde{\tau}=\{\Phi,\tilde{X},(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E)\}$ ve $\tilde{\upsilon}=\{\Phi,\tilde{Y},(H,K)\}$ esnek topolojiler olsun. Burada $(G_1,E)=\{(e,\{x_4\})\}$, $(G_2,E)=\{(e,\{x_1,x_2\})\}$, $(G_3,E)=\{(e,\{x_1,x_2,x_4\})\}$ ve $(H,K)=\{(k,\{y_1\})\}$ dir. $u\colon X\to Y$ küme değerli dönüşümü ve $p\colon E\to K$ dönüşümü $u(x_1)=\{y_2\}$, $u(x_2)=\{y_2\}$, $u(x_3)=\{y_1\}$, $u(x_4)=Y$, $p(e)=k$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F\colon(X,\tilde{\tau},E)\to(Y,\tilde{\upsilon},K)$ esnek küme değerli dönüşümü alttan β-süreklidir fakat fakat alttan esnek b-sürekli değildir, çünkü Y deki esnek açık (H,K) kümesi için $F^{-}(H,K)==\{(e,\{x_3,x_4\})\}$ kümesi X de esnek β -açıktır fakat esnek b-açık değildir.

Not. Alttan esnek sürekli küme değerli dönüşümler arasındaki ilişkileri aşağıdaki şema ile gösterebiliriz;



Not: $\nrightarrow$ sembolü uygulamaların her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

6. ESNEK KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN UYGULAMALAR

Bu bölümde ilk olarak esnek küme değerli dönüşümlerin medikal teşhis yönteminde kullanılması ile ilgili bir uygulama örneği verilmiştir. İkinci olarak Pawlak (1981) tarafından tanımlanan bilgi sistemi verilmiş, daha sonra esnek küme değerli bilgi sistemi tanımlanarak bununla ilgili bir uygulama örneği verilmiştir.

6.1. Esnek Küme Değerli Dönüşümlerin Tıbbi Teşhis Uygulaması

Tıbbi uzmanlık sisteminin önemli görevlerinden birisi hastaların şikayetleri ile bu şikayetlerin önem derecelerini, muhtemel sebeplerin kümesine ve tedavinin derecesine dönüştürmektir. Bunun için aşağıdaki adımları inceleyelim.

1. Adım: X evreni hastalıkların kümesi ve E parametre kümesi şikayetlerin önem dereceleri kümesi olmak üzere $S(X,E)$ esnek küme ailesi oluşturulur. Bu durumda (G,E) esnek kümesi hastanın şikayetleri ve önem derecesini gösterecektir.

2. Adım: Y evreni hastalığın nedenleri kümesi ve E parametre kümesi tedavi yöntemleri kümesi olmak üzere $S(Y,K)$ esnek küme ailesi oluşturulur. Tedavi yöntemi ile beraber hastalık nedenleri esnek kümeye kodlanır. Bu durumda (H,K) esnek kümesi hastalık nedenleri ve tedavi yöntemini gösterecektir.

3. Adım: Hastanın şikayetleri alınarak bu şikayetlerin hasta için önem dereceleri belirlenir. Önem dereceleri ile beraber hastanın şikayetleri esnek kümeye kodlanır.

4. Adım: $u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü hastanın şikayetlerini hastalığın muhtemel nedenlerine dönüştüren bir dönüşüm ve $p: E \to K$ fonksiyonu hastalığın önem derecesini tedavi yöntemine dönüştüren bir fonksiyon olsun. Bu durumda $F: S(X,E) \to S(Y,K)$ esnek küme değerli dönüşümü, hastanın şikayetlerini ve hastalığın önem derecesini, hastalığın nedenleri ve tedavi yöntemine dönüştüren bir dönüşüm olacaktır.

Aşağıdaki kapsamlı örneği inceleyelim.

Örnek 6.1.

1. Adım: $S(X,E)$ esnek küme ailesi oluşturalım.

x_1= egzema

x_2= migren

x_3= uçuk

x_4= tedirginlik

x_5= bel ağrısı

x_6= eklem ağrısı

x_7= uykusuzluk

x_8= baş ağrısı

x_9= mide yanması

olmak üzere $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ hastalıklar kümesi ve

e_1= yüksek önemde

e_2= orta önemde

e_3= düşük önemde

e_4= çok düşük önemde

e_5= önemsiz

olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun.

2. Adım: $S(Y, K)$ esnek küme ailesi oluşturalım.

y_1= iştahsızlık

y_2= alerji

y_3= obezite

y_4= moral bozukluğu

y_5= depresyon

y_6= duruş bozukluğu

y_7= yorgunluk

y_8= kan basıncı

y_9= asitlik

olmak üzere $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\}$ hastalık nedenleri kümesi ve

k_1= sık ve yüksek etkili

k_2= sık olmayan ve yüksek etkili

k_3= sık ve düşük etkili

k_4= sık olmayan ve düşük etkili

k_5= etkisiz

olmak üzere $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ tedavi yöntemleri kümesi olsun.

3. Adım: Tedavi için uzmana gelen hastanın şikayetleri şöyledir:

Migren, tedirginlik ve baş ağrısı hastalıklarından önemli derecede muzdaribim. Bel ağrısı ve eklem ağrısı şikayetlerim var. Bazen egzema, uykusuzluk ve mide yanması rahatsızlıklarım oluyor. Nadiren dudağımda uçuklar oluşuyor.

Hastanın verdiği bilgilere göre,
$(G, E) = \{(e_1, \{x_2, x_4, x_8\}), (e_2, \{x_5, x_6\}), (e_3, \{x_1, x_7, x_9\}), (e_4, \{x_3\}), (e_5, \emptyset)\}$
esnek kümesi oluşturulur..

4. Adım: Medikal uzmanlık sistemi, elde edilen tıbbi bilgileri aşağıdaki şekilde uygular.

$u: X \to Y$ küme değerli dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$u(x_1) = \{y_2, y_8\}$

$u(x_2) = \{y_4, y_5, y_9\}$

$u(x_3) = \{y_7\}$

$u(x_4) = \{y_4, y_5\}$

$u(x_5) = \{y_6, y_7\}$

$u(x_6) = \{y_7\}$

$u(x_7) = \{y_3, y_5\}$

$u(x_8) = \{y_1, y_2\}$

$u(x_9) = \{y_8, y_9\}$

Örneğin $u(x_1) = \{y_2, y_8\}$ ifadesi egzema hastalığının nedenlerinin alerji ve kan basıncı olduğunu ifade etmektedir.

$p: E \to K$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$p(e_1) = k_1$

$p(e_2) = k_2$

$p(e_3) = k_3$

$p(e_4) = k_4$

$p(e_5) = k_5$

Örneğin $p(e_1) = k_1$ ifadesi önemli derecede şikayet edilen bir hastalık için sık ve yüksek etkili tedavi yöntemi uygulanması gerektiğini ifade etmektedir.

$F: S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek küme değerli dönüşümü yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

$F(G, E) = \{(k_1, \{y_1, y_2, y_4, y_5, y_9\}), (k_2, \{y_6, y_7\}), (k_3, \{y_2, y_3, y_5, y_8, y_9\}), (k_4, \{y_7\})\}$.

Örneğin sık ve yüksek etkili tedavi uygulanması gerekenler; iştahsızlık, alerji, moral bozukluğu, depresyon ve asitliktir.

6.2. Esnek Küme Değerli Dönüşümler ve Bilgi Sistemleri

Aşağıda esnek küme değerli dönüşümler ile bilgi sistemleri arasında bazı ilişkiler olduğu gösterilmiştir. İyi bilinmektedir ki esnek kümeler, özel bilgi sistemlerinin bir sınıfıdır. Ayrıca esnek kümeler ve bilgi sistemleri ile ilgili araştırma yapan araştırmacılar aynı yapılarla uğraşmaktadır. Aşağıda öncelikle bilgi sistemi tanımı verilmiş, daha sonra da küme değerli bilgi sisteminin tanımı verilmiştir. Son olarak küme değerli bilgi sistemi ile ilgili bir örnek verilmiştir.

Tanım 6.2.1. $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tüm ilgili nesnelerin kümesi ve $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ parametrelerin (nitelik) kümesi olmak üzere (U, A, F, V) dörtlüsüne bir bilgi sistemi (information system-IS) adı verilir. Burada V_j, a_j parametrelerinin değer kümesi olmak üzere $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ ve $f_j: U \to V_j$ olmak üzere $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ dir. (Pawlak, 1981)

Örnek. 6.2.2. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ kümesi bir işletmenin bir departmanında çalışan kişileri ve $A = \{c, m, y\}$ kümesi de bu kişilere ait bazı özellikleri (c= cinsiyet, m= maaş, y= yaş) göstersin. V_c ={erkek, kadın}, V_m ={düşük, normal, yüksek}, V_y ={genç, orta, yaşlı} kümeleri de sırasıyla cinsiyet, maaş ve yaş parametrelerine ait değer kümelerini göstersin. $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ de aşağıdaki tabloda tanımlan $f_i: U \to V_i$ fonksiyonları aracılığı ile belirli olsun.

$f_1: U \to V_c$	$f_1: U \to V_m$	$f_1: U \to V_y$
$x_1 \to$ erkek	$x_1 \to$ normal	$x_1 \to$ genç
$x_2 \to$ erkek	$x_2 \to$ düşük	$x_2 \to$ yaşlı
$x_3 \to$ kadın	$x_3 \to$ yüksek	$x_3 \to$ yaşlı
$x_4 \to$ kadın	$x_4 \to$ normal	$x_4 \to$ genç
$x_5 \to$ erkek	$x_5 \to$ yüksek	$x_5 \to$ orta

Bu durumda x_2 çalışanına ait bilgi sistemi $F_{x_2} = \{\text{erkek, düşük, yaşlı}\}$ şeklinde olur. Bunu aşağıdaki şekilde tablo ile de gösterebiliriz:

$F_{x_2} =$	cinsiyet	maaş	yaş
	erkek	düşük	yaşlı

Not. 6.2.3. i. Tanım 6.2.1. de $V_j = [0,1]$ olarak alınırsa bulanık bilgi sistemi (fuzzy information system-FIS) adını alır.

ii. Tanım 6.2.1. de f_j fonksiyonu $f_j: U \to P(V_j)$ küme değerli dönüşüm olarak alınırsa küme değerli bilgi sistemi (set-valued information system-SIS) adını alır. (Pei and Miao, 2015)

Tanım 6.2.4. Eğer tanım 6.2.1. deki f_j fonksiyonu her $j \leq m$ için $f_j: U \to P(V_j)$ esnek küme değerli dönüşüm olarak alınırsa bu durumda bu esnek bilgi sistemi, esnek küme değerli bilgi sistemi adını alır.

Esnek küme değerli bilgi sistemi ile ilgili aşağıdaki kapsamlı örneği inceleyelim.

Örnek 6.2.5. $U = \{x_1, x_2\}$, a_1 =ev, a_2 =araba, a_3 =şehir olmak üzere $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ olsun. Ayrıca $V_{ev} = \{h_1, h_2, h_3\}$, $V_{araba} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ve $V_{şehir} = \{c_1, c_2\}$ olmak üzere $V = V_{ev} \cup V_{araba} \cup V_{şehir}$ olsun. e_1 =ucuz, e_2 =güzel ve e_3 =rahat olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $G = \{G_1, G_2, G_3\}$ için

$G_1: U \to V_{ev}$ $\;G_1(x_1) = (F_1, E)$ ve $G_1(x_2) = (F_2, E)$

$G_2: U \to V_{araba}$ $\;G_2(x_1) = (H_1, E)$ ve $G_2(x_2) = (H_2, E)$

$G_3: U \to V_{şehir}$ $G_3(x_1) = (K_1, E)$ ve $G_3(x_2) = (K_2, E)$ olsun.

Burada geçen (F_1, E), (F_2, E), (H_1, E), (H_2, E), (K_1, E), (K_2, E) esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$F_1: E \to P(V_{ev})$, $F_1(e_1) = \{h_1, h_3\}$, $F_1(e_2) = \{h_2\}$, $F_1(e_3) = \{h_2, h_3\}$

$F_2: E \to P(V_{ev})$, $F_2(e_1) = \{h_1, h_2\}$, $F_1(e_2) = \{h_3\}$, $F_1(e_3) = \{h_2, h_3\}$

$H_1: E \to P(V_{araba})$, $H_1(e_1) = \{b_1, b_3, b_4\}$, $H_1(e_2) = \emptyset$, $H_1(e_3) = \{b_2, b_4\}$

$H_2: E \to P(V_{araba})$, $H_2(e_1) = \emptyset$, $H_2(e_2) = \{b_3\}$, $H_2(e_3) = \{b_1, b_4\}$

$K_1: E \to P(V_{şehir})$, $K_1(e_1) = \{c_1, c_2\}$, $K_1(e_2) = \{c_2\}$, $K_1(e_3) = \{c_1\}$

$K_2: E \to P(V_{şehir})$, $K_2(e_1) = \{c_1\}$, $K_2(e_2) = \{c_2\}$, $K_2(e_3) = \emptyset$

$S(V)$ kümesi V üzerindeki tüm esnek kümeler olmak üzere $\rho: U \times A \to S(V)$ fonksiyonu aşağıdaki tabloda gösterildiği şekilde tanımlansın;

U	a_1	a_2	a_3
x_1	(F_1, E)	(H_1, E)	(K_1, E)
x_2	(F_2, E)	(H_2, E)	(K_2, E)

Her bir $x \in U$ için $\rho_x: A \to S(V)$ fonksiyonunu $\rho_x(a) = \rho(x, a)$ şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonu x in küme değerli bilgisi olarak göstereceğiz.

Örneğin, x_2 için küme değerli bilgi sistemi aşağıdaki şekilde olur;

$\rho_{x_2} =$	ev	araba	şehir
	(F_2, E)	(H_2, E)	(K_2, E)

Ev:	e_1 =ucuz	e_2 =güzel	e_3 =rahat
	$\{h_1, h_2\}$	$\{h_3\}$	$\{h_2, h_3\}$

Araba:	e_1 =ucuz	e_2 =güzel	e_3 =rahat
	$\emptyset$	$\{b_3\}$	$\{b_1, b_4\}$

Şehir:	e_1 =ucuz	e_2 =güzel	e_3 =rahat
	$\{c_1\}$	$\{c_2\}$	$\emptyset$

KAYNAKLAR

Akdağ, M. (1991). 2^Y-Üzerindeki Çeşitli Topolojiler ve Çoğul-Değerli Fonksiyonların Süreklilikleri. *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bilim Dalı* (Yüksek Lisans tezi), 54s, Sivas.

Akdag, M., Erol, F. (2014). Upper and Lower Continuity of Soft Multifunctions. Appl. Math. Inf. Sci.,7, 1-8.

Akdag, M., Erol, F. (2015). Fuzzy Almost β-Continuous Multifunctions. Internat. Jour. of Physical and Mathematical Sciences, Vol 5, No 1, pp.197-205.

Akdag, M., Ozkan, A. (2014). Soft α-Open Sets and Soft α-Continuous Function. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume, Article ID 891341, 7 pages.

Akdag, M., Ozkan A. (2014). On Soft Preopen Sets and Soft Pre Separation Axioms. Gazi University Journal of Science GUJ Sci. 27(4):1077-1083.

Akdag, M., Ozkan, A. (2014). On Soft β-Open Sets and Soft β-Continuous Functions. Hindawi Publishing Corporation, Scientific World Journal Volume, Article ID 843456, 6 pages.

Akdag, M., Ozkan, A. (2014). Soft b-open sets and soft b-continuous functions. Math Sci 8:124 DOI 10.1007/s40096-014-0124-7.

Aktas, H., Cagman, N. (2007). Soft sets and soft groups. Inform. Sci., 177 (13), 2726-2735.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., and Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. Computer and Mathematics with Applications, 57, 1547-1553.

Arokia, L., Arockiarani, L. (2013). On soft β-separation axioms. International Journal of Mathematical Archive, 1 (5).

Arockiarani, L., Lancy, A.A. (2013). Generalized soft gβ-closed sets and soft gsβ-closed sets in soft topological spaces. International Journal of Mathematical Archive, 4 (2), 1-7.

Aygunoğlu, A., Aygun, H. (2012). Some notes on soft topological spaces. Neural Computer and Applications, 21 (1) 113-119.

Berge, C. (1959). Topological Spaces. Macmillian, New York, 1963. English translation by E. M. Patterson of Espaces Topologiques et Fonctions Multivoques, published by Dunod, Paris.

Bridgland, T.F., (1970). Trajectory integrals of set valued functions. Pasific J. Math., 33, 43-67.

Cagman, N., Enginoglu, S. (2010). Soft set theory and uni-int decision making. Eur. J. Oper. Res., 207, 848-855.

Cagman, N., Enginoglu, S. (2010). Soft matrix theory and its decision making. Computers and Mathematics with Applications, 59: 3308-3314.

Cagman, N., Karatas, S., and Enginoglu, S. (2011). Soft topology. Computer and Mathematics with Applications, 62, 351-358.

Chen, D.G., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S., and Wang, X.Z. (2005). The paremeterization reduction of soft sets and itsapplications. Comput. Math. Appl., 49757–763.

Chen, B. (2013). Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces. Applied Mathematics and Information Sciences,7 (1), 287-294.

Choquet, G. (1947). Convergences. Grenoble Uni. Anall., vol. 23, 57-112.

Ekici, E. (1996). Fuzzy Fonksiyonların ve Fuzzy Çoğul Fonksiyonların Çeşitli Süreklilik Tiplerinin Birleştirilmesi. *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bilim Dalı* (Yüksek lisans tezi), 53s, Sivas.

Feng, F., Jun, Y.B., and Zhao, X.Z. (2008). Soft semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56, 2621–2628.

Georgiou, D.N., Megaritis A.C., and Petropoulos, V.I. (2013). On Soft Topological Spaces, Appl. Math. Inf. Sci. 7, No. 5, 1889-1901.

Georgiou, D.N., Megaritis, A.C. (2013). Soft Set Theory and Topology, Applied General Topology, 14.

Hussain, S., Ahmad, B. (2011). Some properties of soft topological spaces. Computer and Mathematics with Applications, 62, 4058-4067.

Ilango, G., Arun, B., and Kumar,S.K. (2014). Some properties of soft α-open sets in soft topological space. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM). Volume 9, Issue 6, 20-24.

Jacobs, M.Q. (1968). Measurable multivalued mappings and Lusin's theo. Trans. Amer. Math. Soc., 143, 471-481.

Kandil, A., Tantawy, O.A.E., and El-Latif, S.A. (2014). Soft semi separation axioms and some type of soft functions. Volume 7, No. 2, (February), pp. 181–196.

Khaled Al-Hamadi M.A., Nimse S.B. (2010). On fuzzy α-continuous multifunctions. Misc. Math. Not., Vol 11, No.2, pp. 105-112.

Kharal, A., Ahmad, B. (2011). Mappings of soft classes. New Math. Nat. Comput., 7 (3), 471-481.

Küçük, Y. (1994). On strongly θ-continuousness and almost strongly θ-continuousness of multifunctions. Pure and Appl. Math. Sci., Vol XXXX, No 1-2, 43-54.

Küçük, Y. (1987). 2^Y-Üzerindeki Çeşitli Topolojiler ve Çoğul-Değerli Fonksiyonların Süreklilikleri. *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bilim Dalı* (Doktora tezi), 59s, Ankara.

Lechicki, A. (1979). On continuous and measurable multifunctions. Amer. Math. Soc. Polonea, series1, XXI, 141-156.

Mahanta, J., Das, P.K. (2014). On soft topological space via semiopen and semiclosed soft sets. KYUNGPOOK Math. J. 54, 221-236.

Maji, P.K., Roy, A.R., and Biswas, R. (2002). An application of soft sets in desicion making problem. Comput. Math. Appl., 44, 1077-1083.

Maji. P.K, Biswas, R., and Roy, A.R. (2003). Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45 (4-5), 555-562.

Majumdar, P., Samanta, S.K. (2008). Similarity measure of soft set. New Math. Nat. Comput., 4 (1), 1-12.

Michael, E. (1951). Topologies on spaces of subsets. Trans. Amer. Math. Soc., 71, 152-182.

Min, W.K. (2011). A note on soft topological space. Computers and Mathematics with Applications, 62, 3524-3528.

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. Computers and Mathematics with Applications, 37 (4-5), 19-31.

Molodtsov, D.A., Leonov, V.Y., and Kovkov, D.V. (2006). Soft sets technique and its application, Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1, 8–39.

Mukherjee M.N., Malakar S. (1991). On almost continuous and weakly continuous fuzzy multifunctions. Fuzzy sets and systems, 41, 113-125.

Nazmul, S.K., Samanta, S.K. (2013). Neighbourhood properties of soft topological spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics. Volume 6, No. 1, (July), pp. 1–15.

Özbakır O. (1994). Fuzzy Çoğul Değerli Fonksiyonların Sürekliliği. *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bilim Dalı*, (Doktora Tezi), 63s.,İzmir.

Özer, O. (1986). On almost strongly θ upper semi-continuous multifunctions. Demonstratio Math., Vol 26, No 2, 363-380.

Papageorgiou, N.S. (1985). Fuzzy Topology and Fuzzy Multifunctions. J. Math. and Appl., 109, 397-425.

Pawlak, Z. (1981). Information Systems Theoretical Foundations. Information Systems, Vol. 6, No 3, 205-218.

Pawlak, Z. (1982). Rough sets. Int. J. of Information and Computer Sciences, 11 (5), 341-356.

Pei, D., Miao, D. (2005). From soft sets to information systems. In Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing, 2, 617-621.

Ponomarev, V.I. (1964). Properties of topological spaces preserved under multivalued continuous mappings on compacta. Amer. Math. Soc. Translations, (2) (38), 119-140.

Popa, V. (1982). Almost continuous functions. Mat. Vesnik, 6(19) (34), 75-84.

Ratner, L. (1949). Multivalued transformations. University of California.

Roy, S., Samanta, T.K. (2014). A note on Soft Topological Spaces. Punjab University Journal of Mathematics, 46(1), pp. 19-24.

Shabir, M., Naz, M. (2011). On soft topological Spaces. Computers and Mathematics with Applications, 61 (7), 1786-1799.

Smithson, R.E. (1972). Multifunctions. Nieuw Arch. Wiskd. (5), XX, 31-53.

Stroter, W.L. (1955). Continuous multivalued functions. Boletim do Sociedade de S. Paulo, 10, 87-120.

Varol, B.P., and et al. (2012). A New Approach to Soft Topology. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 41 (5), 731–74.

Varol, B.P., Aygün, H. (2013). On soft Hausdorff spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5(1), 15-24.

Vietoris, L. (1923). Bereiche Zweiter Ordnung. Monatshefte für Mathematik und Physık, vol. 33, pp. 49-62.

Wallace, A.D. (1941). A fixed-point theorem for trees. Bull. Amer. Math. Soc., 47, 757–760.

Weijian Rong. (2012). The countabilities of soft topological spaces. International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 6, 159-162.

Yumak, Y., Kaymakcı, A.K. (2015). Soft β-open sets and their aplications. Journal of New Theory, Number: 4, Pages: 80-89.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. Inform. and Control, 8(1), 338-353.

Zorlutuna, İ. (1996). Fuzzy Topolojik Uzaylar Üzerinde Tanımlı Olan Çoğul Değerli Fonksiyonların Çeşitli Süreklilikleri Üzerine. *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bilim Dalı* (Yüksek lisans tezi), 62s, Sivas.

Zorlutuna, İ. (2000). 2^Y Üzerindeki Topolojiler ve Özellikleri. *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bilim Dalı* (Doktora tezi), 69s, Sivas.

Zorlutuna, I., Akdag, M., Min, W. K., and Atmaca, S. (2012). Remarks on soft topological spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3 (2), 171-185.

Zorlutuna, İ., Çakır, H. (2015). On Continuity of Soft Mappings. Appl. Math. Inf. Sci. 9, No. 1, 403-409.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Fethullah EROL
Doğum Yeri ve Tarihi	Şanlıurfa, 20.06.1980
Medeni Hali	Evli (2 çocuk)
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 58140 Sivas
E-posta Adresi	feerol@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Şanlıurfa İHL, 1997
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 2004
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2012
Doktora	Cumhuriyet Üniversitesi, 2016

İş Tecrübesi

Özel Kurum	Matematik Öğretmenliği 2004-2009
Cumhuriyet Üni.	Öğretim Görevlisi 2009-...

Yayınlar

Ulusal -

Uluslararası

1. **Akdağ, M., Erol, F.** (2014). Upper and Lower Continuity of Soft Multifunctions. Appl. Math. Inf. Sci. 8, No. 6, 2873-2880.
2. **Akdağ, M., Erol, F.** (2014). Upper and Lower α-I-Continuous Multifunctions. International Mathematical Forum, Vol. 9, no. 5, 225 – 235.
3. **Akdağ, M., Erol,** F. (2014). Soft I Sets and Soft I Continuity of Functions, Gazi University Journal of Science GUJ Sci 27(3):923-932.
4. **Akdağ, M., Erol, F.** (2014). Upper and Lower Pre(μ_X, μ_Y) Continuous Multifunctions, Scientific Journal of Mathematics Research, Vol. 4, Iss.5, Pp. 46-52.

5. **Akdağ, M., Erol, F.** (2014). Upper and Lower α-Continuity of Soft Multifunctions. American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS) Volume 8, No 1, pp 96-107.
6. **Akdağ, M., Karataş, S., and Erol, F.** (2015). Upper and Lower Continuity of Fuzzy Soft Multifunctions. Journal of New Theory, Pp.59-68.
7. **Akdağ, M., Erol, F., and Bingöl, Y.** (2015). Soft Semi I-Continuous Functions. Gazi University Journal of Science GUJ Sci. 28(1):37-44.
8. **Akdağ, M., Erol, F.** (2015). $\alpha(\mu_X, \mu_Y)$ Continuous Multifunctions. Journal of Linear and Topological Algebra, Vol. 04, No. 01, 1-9.
9. **Akdağ, M., Erol, F.** (2015). Multifunction between Soft Topological Spaces. International Journal of Mathematics Trends and Technology, Volume 20 Number1-April, pp. 62-69.
10. **Akdağ, M., Erol, F.** (2015). Upper and Lower Semi Continuous and Semi-Irresolute Soft Multifunctions. International Journal of Mathematics Trends and Technology, Volume 19 Number 1 Mar. pp 74-79.
11. **Akdağ, M., Erol, F.** (2015). Soft b-continuous and soft b-irresolute multifunctions. Journal of Advanced Studies in Topology 6:3, 82–89.
12. **Akdag, M., Erol, F.** (2015). Fuzzy Almost β-Continuous Multifunctions. Internat. Jour. of Physical and Mathematical Sciences Vol 5, No 1, pp.197-205.
13. **Akdag, M., Erol, F.** (2015). On Hyperspaces of Soft Sets, Journal of New Theory 7, 86-97.
14. **Akdag, M., Erol, F.** (2015). On Soft Multifunctions. Journal of Advanced Research in Scientific Computing, Vol.7, Issue 4, pp.1–15.

15. **Akdag, M., Erol, F.** (2015). On Soft b−Open Sets with Respect To Soft Ideal. Journal of New Theory, No 9, pp.94–107.
16. **Akdag, M., Erol, F.** (2016). Remarks on Hyperspaces of Soft Sets. Journal of Advanced Studies in Topology, 7:1, 1–11.

<u>Kongreler ve Bildiriler</u>

Ulusal	-
Uluslararası	Karatekin Mathematics Days (2014)

<u>Ödüller, Teşvikler ve Üyelikler</u>