**T.C.**

**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# RHEONOMİC MEKANİK SİSTEMLERE AİT HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

**Ekrem AKBUGA**

**Matematik Anabilim Dalı**

Tezin Sunulduğu Tarih:**02/07/2014**

**Tez Danışmanı:**

**Prof. Dr. MEHMET TEKKOYUN**

**ÇANAKKALE**

Ekrem AKBUGA tarafından Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN yönetiminde hazırlanan ve **02/07/2014** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan **"Rheonomic Mekanik Sistemlere Ait Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi''** başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN ……..…………

**Danışman**

Prof. Dr. Yakup HACI ………………...

**Jüri Üyesi**

Doç. Dr. İbrahim TÜRKYILMAZ ………………...

**Jüri Üyesi**

Sıra No:

# İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

**Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.**

Ekrem AKBUGA

# TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen eşim Nurten AKBUGA, çalışma boyunca desteklerini esirgemeyen Çanakkale GHSİM Şube Müdürü Nafiz KÖKSAL ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ekrem AKBUGA

Çanakkale, Temmuz 2014

## SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $R$ | Reel sayılar cümlesi |
| $R^n$ | $n$ –boyutlu reel uzay |
| $E^n$ | $n$– boyutlu Öklid uzay |
| $M$ | Diferansiyellenebilir manifod |
| $T_xM$ | M ‘nin x noktasındaki tanjant (teğet) uzay |
| $TM$ | Tanjant manifold |
| $T^*\mathrm{M}$ | Kotanjant manifold |
| $\wedge$ | Dış çarpım |
| $\xi$ | Semispray |
| $J$ | Lineer operatör |
| $V = J\xi$ | Liouville vektör alanı |
| $P$ | Potansiyel enerji |
| $T$ | Kinetik enerji |
| $L=T-P$ | Lagrange fonksiyonu |
| $E_L = V(L) - L$ | Lagrange fonksiyonunun enerji fonksiyonu |
| $dE_L$ | Lagrange fonksiyonunun diferansiyeli |
| $H=T+P$ | Hamilton fonksiyonu |
| $dH$ | Hamilton enerji fonksiyonunun diferansiyeli |
| $\Phi_L$ | L ye bağlı temel 2 form |
| $i_\xi \Phi_L = dE_L$ | Lagrangian dinamik formalizmi |
| $X_H$ | Hamilton vektör alanı |
| $\Phi$ | Temel 2 form |
| $i_{X_H} \Phi = dH$ | Hamiltonian dinamik formalizmi |
| $\alpha(t)$ | İntegral eğrisi |
| $(\mathrm{TM}, \Phi, \xi)$ | Lagrangian mekanik sistem |
| $(\mathrm{T}^*\mathrm{M}, \Phi, \mathrm{X}_H)$ | Hamilton mekanik sistem |
| $RL^n = (TM, L(x,y,t))$ | Rheonomic Lagrange uzayı |
| $(M, L(x,y,t), F(x,y,t))$ | Rheonomic Lagrange mekanik sistemi |

# ÖZET

## RHEONOMİC MEKANİK SİSTEMLERE AİT HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Ekrem AKBUGA
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman : Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN
02/07/2014, 52

Bu çalışmada, zamana bağlı hareket denklemleri için çok kullanışlı olan Lagrangian ve Hamiltonian matematiksel modellemelerini kullanarak tanjant, kompleks ve parakompleks yapılı rheonomic mekanik sistemlere ait hareket denklemleri elde edilecektir. Elde edilen hareket denklemlerin çözümü sembolik hesaplama ile yapılacaktır. Ayrıca, rheonomic mekanik sistemlere ait bazı sonuçlar verilecektir.

**Anahtar sözcükler:** Rheonomic Mekanik Sistemler, Lagrangian ve Hamiltonian Formalizmi, Euler-Lagrange Denklemleri, Hamilton Denklemleri

# ABSTRACT

## OBTAINING OF MOTION EQUATIONS ABOUT RHEONOMIC MECHANICAL SYSTEMS

Ekrem AKBUGA
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Master of Science Thesis in Mathematics Department
Advisor : Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN
02/07/2014, 52

In this study, it will be obtained equations of motion about rheonomic mechanical systems having tangent, complex and paracomplex structure using Lagrangian and Hamiltonian mathematical modeling which is very useful for time-dependent equations. The solution of the obtained motion equations will be made by a sembolic calculation. Also, some results about rheonomic mechanical systems will be given.

**Keywords:** Rheonomic Mechanical Systems, Lagrangian and Hamiltonian Formalism, Euler-Lagrange Equations, Hamilton Equations

# İÇİNDEKİLER


**Sayfa No**

TEZ SINAVI SONUÇ BELGESİ ……………………………………………………..ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.............................................................. iii
TEŞEKKÜR........................................................................................................ iv
SİMGELER VE KISALTMALAR ........................................................................ v
ÖZET ................................................................................................................ vi
ABSTRACT....................................................................................................... vii
ŞEKİLLER DİZİNİ ............................................................................................... x
BÖLÜM 1– GİRİŞ ............................................................................................... 1
BÖLÜM 2 – ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR ................................................................. 6
2.1. Mekanik Sistemler Üzerindeki Literatür Özeti ............................................ 6
BÖLÜM 3 – MATERYAL VE YÖNTEM ............................................................. 9
3.1. Tanımlar ..................................................................................................... 9
3.2. Yöntem ...................................................................................................... 25
3.2.1. Matematiksel modelleme……………………………………………25
3.2.2. Lagrange Matematiksel modelleme…………………………………26
3.2.3. Hamilton Matematiksel modelleme ………………………..……26
BÖLÜM 4 – ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA................................ 28
4.1. Tanjant Yapılı Rheonomic Lagrangian Mekanik Sistemleri..................... 28
4.2. Tanjant Yapılı Rheonomic Hamiltonian Mekanik Sistemleri.................. 31
4.3. Kompleks Yapılı Rheonomic Lagrangian Mekanik Sistemleri ............... 33
4.4. Kompleks Yapılı Rheonomic Hamiltonian Mekanik Sistemleri.............. 36
4.5. Parakompleks Yapılı Rheonomic Lagrangian Mekanik Sistemleri .......... 38
4.6. Parakompleks Yapılı Rheonomic Hamiltonian Mekanik Sistemleri ....... 40
BÖLÜM 5 – SONUÇLAR VE ÖNERİLER ......................................................... 43
5.1. Rheonomic Dinamik Denklemlerinin Çözümü …………………………43
5.1.1. (4.15) Denkleminin çözümü........................................................... ...43
5.1.2. (4.28) Denklem sisteminin çözümü.................................................. 44
5.1.3. (4.43) Denklem sisteminin çözümü.................................................. 45
5.1.4. (4.53) Denklem sisteminin çözümü.................................................. 46
5.1.5. (4.65) Denklem sisteminin çözümü.................................................. 47
5.1.6. (4.72) Denklem sisteminin çözümü.................................................. 48

KAYNAKLAR ........................................................................................................ 51
ÖZGEÇMİŞ ........................................................................................................... I

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Sayfa No**

Şekil 1.1. Basit Sarkaç I…………………………………………………………………….3
Şekil 1.2. Basit Sarkaç II……………………………….............................................4
Şekil 5.1. Euler-Lagrange Denklemi……………………………….........................44
Şekil 5.2. Hamilton Denklem Sistemi I………………………………........................45
Şekil 5.3. Euler-Lagrange Denklem Sistemi I……………………...…………………..46
Şekil 5.4. Hamilton Denklem Sistemi II..…………………………………………………47
Şekil 5.5. Euler-Lagrange Denklem Sistemi II..……………………………………….48
Şekil 5.6. Hamilton Denklem Sistemi III …………………………………………………49

# BÖLÜM 1
# GİRİŞ

Mekanik bilimi insan hayatında önemli bir yer tutar. Suyun akışı olsun, uçağın uçuşu olsun bunların hepsi yani doğadaki bütün hareketler mekanik prensiplerine göre meydana gelir. Mekanik bilim dalı, kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin hareketli ve sabit hallerini inceler. Kaldıraçların ve suyun kaldırma kuvvetini içeren tarihteki ilk kayıtlı mekanik prensipler Arşimet'e (MÖ 287-MÖ 212) aittir. Bahsi geçen dönemde mekanik sadece bina inşaatı ihtiyaçlarını karşılardı. Arşimet'ten sonra gelen İbn-i Heysem, İbn-i Sina gibi bilim insanları ile Leonardo da Vinci, Varignon, d'Alembert, Stevinus, Newton ve Lagrange gibi batılı bilim insanlarının çabaları ve çalışmaları sayesinde mekanik bugünkü seviyesine ulaşmıştır. Mekanik üç dala ayrılır. Bunlar kinematik, statik ve dinamikdir. Kinematik, cisimlerin konumlarının zamanla değişimini yani hareketlerini, statik cisimlerin dengede olabilmeleri için gerekli koşulları, dinamik ise parçacığın hareketi ile buna etkiyen kuvvet arasındaki bağıntıları inceler (Rızaoğlu ve Sünel,2008).

Manifold kavramı, gerek geometri ve topoloji gerekse analitik mekanik ve modern teorik fizikte; Öklid uzayına çok benzeyen matematiksel bir uzay olarak bilinir. *n*- boyutlu bir manifoldun her noktasının *n*- boyutlu Öklid uzayına homeomorfik bir komşuluğu vardır.

Bilim insanları uzaydaki cisimlerin hareket mekanizmaları ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır. Newton (1717-1738), Lagrange (1736-1813), Jacobi (1804-1851), Hamilton (1805-1865) olmak üzere pek çok araştırmacının çabalarıyla Newton yasaları üzerine kurulan mekanik hemen hemen kusursuz bir yapı meydana getirmiştir (Panza,2003).

19. yüzyılda geliştirilen sistematik yapı, bugün analitik dinamik yapı olarak bilinirken, Newton yasaları üzerine kurulan yapı ise klasik mekanik veya Newton mekaniği olarak bilinmektedir. Newton'un denklemleri vektörel bir yapıdadır. Bu nedenle en büyük güçlüğü toplam kuvvetin bilinmesinin gerekli olması oluşturur. Bu güçlüğü ortadan kaldırmak için, daha basit skaler büyüklüklerin kullanıldığı ve kuvvet vektörünün içinde doğrudan yer almadığı ilke ve metotların bulunmasına da çalışılmıştır. Analitik dinamikten elde edilen sonuçlarla Newton denklemlerinden elde edilenler aynıdır. Lagrange ve Hamilton denklemleri analitik dinamiği oluşturmaktadır (Panza,2003).

Mekaniğin skaler büyüklükler kullanarak yeniden kurulması açısından Lagrange yöntemi önemlidir. Lagrange yöntemi mekanik problemlerin çözümünde gayet başarılıdır. Lagrange yöntemi sayesinde Hamilton yöntemlerinin ortaya çıkışına yol açmıştır. Bu yöntem ile birlikte mekanik sistemlerin dinamik hareket denklemlerini elde etmek aşikarbir hale gelmiştir. Ancak bu durum denklemlerin çözülmesinde sistematik bir metot sunmamaktadır. Lagrange yöntemi mekanik problemlerin çözümünde başarılıdır; en önemli yanı ise Hamilton yöntemlerinin temelini oluşturuyor olmasıdır.

Klasik mekanik; cisimlerin hareketlerini, ancak cisimlerin boyutlarının ve hızlarının belirli sınırlar içinde kalması durumunda deneysel ve gözlem sonuçlarıyla tam olarak uyuşan bir şekilde izah edilebilir. Bu sınırların dışına çıkıldığında bulunan sonuçlar deney ve gözlem sonuçlarıyla uyuşmaz. Bu durum sonrasında klasik mekanik yerini daha sonra kurulan teorilere bırakır. Bunlar ise özel ve genel rölativite teorileri ile kuantum mekaniği ve kuantum alanları teorileridir. Klasik mekanik, günümüzde gökdelenlerden uçaklara kadar pek çok sistemin parçalanmadan kalabilmesi ile ilgili gerekli şartları bulundurması açısından oldukça önem arz eder (Çelik, 2014).

Matematik ile mekanik ilişkisine katkıda bulunan Euler, Lagrange ve Hamilton bir mekanik sistemin hareket prensiplerinin denklemlerini uygun bir sistemle açıklayarak matematik ile mekanik ilişkisini sağlam temellere oturtulmuştur. Dolayısıyla özellikle konumuzla ilgili olan rheonomic mekanik sistemlere ait hareketin uygun bir modelleme ile açıklanabileceği görülmüştür.

Newton deneylerle ispat edilen teoremler ortaya koyarak mekaniğin temellerini ortaya koymuştur. Euler ise deneylerle ölçülemeyen hızlarda ya da hızın maksimum ve minimum olduğu durumlarında sonuçların bilinemeyeceğini ileri sürmüştür. Dolayısıyla Euler hareketin maksimum ve minimum durumlarda matematiksel modellemesi ile uğraşmıştır. Her ne kadar sonuçlarını Newton’un sonuçları ile karşılaştırmışsa da yeni bir hipotez geliştirdiği kabul edilebilir (Struik, 2002).

Lagrangian mekaniği tanjant demetlerdeki formalizmi de geliştirmiştir. Lagrangian mekaniğine katkıda bulunmuş olan Klein ise Lagrangian formalizmi hemen hemen tanjant geometrisinin gelişimine ve özel dış türev hesaplarına katkı sağlamıştır. Böylece bu formalizm yüksek dereceden tanjant demetlere genişletilmiştir.Bunun avantajı ise kotanjant demetin simplektik formunu açıklamayı mümkün kılmasıdır.

Sistem veya denklem zamana bağlı açık değişkenler içeriyorsa rheonomic'tir denir(Wikipedia(a)).

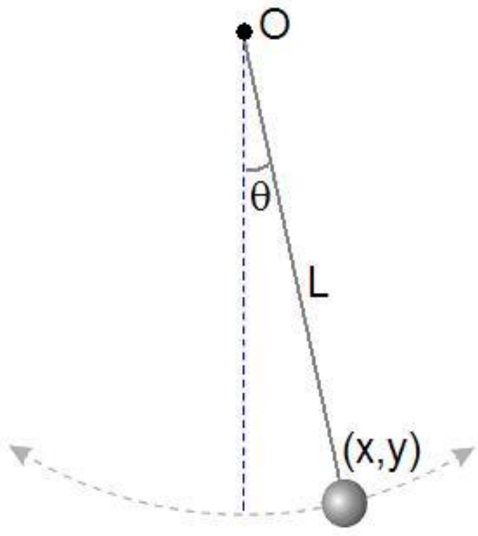
Birçok mekanik sistemlerin zamana bağlı kısıtlanan hareket denklemlerine rheonomic denir (Wikipedia(a)).

Bir başka deyişle, kısıtlamalar gibi zamana bağlı bir açık değişkenin kısıtlamalarının denklemlerine rheonomic kısıtlamalar denir.

Birçok mekanik sistemlere zamana bağlı olmayan kısıtlanan hareket denklemlerine sclernomic denir (Wikipedia(a)).

Örneğin basit sarkaç, bir ipin ucuna rahatlıkla sallanabilecek şekilde bağlanılan bir kütle ile oluşturulan bir düzenektir. (Wikipedia(a)).

Şimdi tezimizde geçen rheonomic yapıyı basit sarkaç örneği ile açıklayalım:

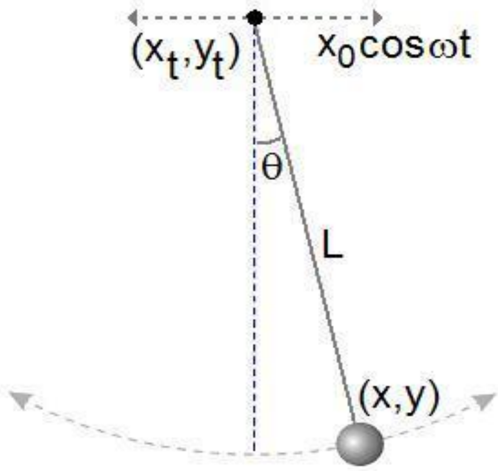



Şekil 1.1. Basit Sarkaç I

Şekil 1.1.'de, basit sarkaç bir ağırlık(küre) ve bir ipten oluşan bir sistem görüntülenmektedir. Böyle olan sistemlere sclernomic denir(Wikipedia(a)).

$$\sqrt{x^2 + y^2} - L = 0 \tag{1.1}$$

Burada $(x, y)$ kürenin bulunduğu koordinatları ve L ise O noktası ile küre arasındaki ipin yada telin uzunluğunu ifade etmektedir.




Şekil 1.2. Basit Sarkaç II

Şekil 1.2.'deki gibi eğer O noktası (başlangıç noktası) sabit değil de $x-$ ekseni boyunca basit harmonik yapıyorsa,

$$x_t = x_0 \cos\omega t \quad \textbf{(1.2)}$$

Burada $t$ zaman, $w$ açısal hız, $x_0$ ise genliktir. İpin ucu sabit olmamasına rağmen hareket halinde iken $t$ ye bağlı esnemeyen, uzamayan ipin uzunluğu olan L ise sabittir. Böylece bu sistem zamana bağlı açık değişken içerdiği için rheonomic bir sistemdir.

$$\sqrt{(x - x_0 \cos\omega t)^2 + y^2} - L = 0 \quad \textbf{(1.3)}$$

Hamilton yöntemi ile bulunan denklemler birinci mertebeden iken, Lagrange yöntemi ile elde edilen denklemler ikinci mertebedendir. Lagrange yöntemiyle elde edilen denklemlerle karşılaştırıldığında Hamilton yöntemi ile elde edilen denklemlerin çözülmeleri daha basit şekildedir.

Çeşitli bilim adamları tarafından mekanik sistemler üzerinde çeşitli uzaylar için hareket denklemleri bulunmuştur. Bu uzaylardan bazıları Hermityen uzay, (para) Kähler uzayı, Heisenberg uzayı, Cartan ve Finsler uzaylarıdır. Bu çalışmada rheonomic mekanik sistemlere ait hareket denklemleri elde edilmiştir.

Bu tanımlamalardan ve örnekten yola çıkarak, bu tezin amacı; rheonomic mekanik sistemin tanımlanması ve matematiksel modelleme kullanılarak, rheonomic mekanik sistemelere ait uzaydaki dinamik cisimlerin zamana bağlı hareketi gösteren diferansiyel denklemlerini bulmaktır. $(2n+1)-$boyutlu yerel koordinatlarını $(x^i, y^i, t)$ olan rheonomic mekanik sistemler için de Euler-Lagrange ve Hamilton hareket denklemleri, matematiksel modellemeler kullanarak bulunmaktadır.

# BÖLÜM 2
# ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

## 2.1. Mekanik Sistemler Üzerindeki Literatür Özeti

Newton (1642-1727) matematikçi, fizikçi, mucit, astronom ve filozoftur. 1687 tarihinde yayımlanan 'Philosophie Naturalis Principia Mathematica' (Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri) adlı çalışmasında, ilk kez bir cisim üzerine etki eden kuvvetler ve cismin hareketi arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur. Böylece Newton klasik mekaniğin temelini atan ilk kişi kabul edilmektedir. Newton fiziksel nesnelerin hareketleri ile ilgili birçok olayın açıklanmasında kullanılan harekete ait üç kanun ilkesini ortaya koymuştur. Bu kanunlar sonraki üç yüzyıl boyunca bilim dünyasında etken olmuştur. Newton çalışmasının üçüncü bölümünde, bu hareket yasaları ile Kepler'in gezegensel hareket yasalarının oluşturulabileceğini göstermiştir. Newton matematiğin hemen hemen her dalına katkısı olan bir bilim insanıdır. Analitik geometri, eğrilerin teğetleri (türev) ve eğrilerin oluşturduğu alanlar gibi konularda çok önemli katkılarıolmuştur. Zamanla ışık hızına yaklaşan hızlarda Newton yasaları olayları açıklamakta yetersiz kalmıştır. Işık hızına yakın hızlarda, cisimlerin hareketleri incelenecek ise Albert Einstein'in geliştirdiği 'Özel Görelilik Teorisi' dikkate alınmalıdır (Çağlar, 2011).

Lagrange (1736-1813) astronomi, güneş sistemi, mekanik, olasılık ve genel matematiğin temelleri üzerine çalışmalar yapmıştır.1788 yılında ''Analitik Mekanik '' isimli kitabı yayınlanmıştır.Bu kitabın içeriği tamamıyla mekanik alanında yapılmış olan bütün çalışmaları içermektedir.Newton kuramının gezegenlerin devinimine uygulanabileceğini göstermiştir.Newton hareket denklemlerini farklı bir yöntemle ifade etmiştir.Bu yönteme Lagrangian mekanik adı verilmiş olup Newton mekaniği ile aynı yapıdadır.

Hamilton (1805-1865) İrlandalı matematikçi, fizikçi ve astronomdur. Optik, dinamik ve cebir üzerine önemli çalışmalar yapmıştır. Modern görecelik ve kuantum mekaniğinin temelinde yatan ilke Hamilton fonksiyonlarıdır. Hamilton prensibi dinamik alanlarda geçerlidir.

Einstein (1879-1955), 1905 yılında ortaya attığı kurama özel görelilik, denklik ilkesinden yola çıkarak oluşturduğu ve 1915-1916 yıllarında tamamladığı kurama genel görelilik adını vermiştir. Matematik hesaplamalar ve denklemler ile oluşturduğu kuramları sonradan deneysel olarak defalarca doğrulanmıştır. $E = mc^2$ denklemi ile formüle ettiği kütle-enerji eşdeğerliği yıldızların nasıl enerji oluşturduğuna açıklama getirmiş ve nükleer teknolojinin önünü açmıştır. Fotoelektrik etki ve Brown hareketine getirdiği matematiksel açıklamalar, modern fiziğe diğer önemli katkıları arasındadır. Yaşamının büyük bir bölümünü bütün kuramları birleştiren bir birleşik alan kuramı yaratmaya çalışarak geçirmiş ama bu çabaları sonuçsuz kalmıştır. Einstein kuantum mekaniğinin bazı sonuçlarına, özellikle belirsizlik ilkesine oldukça şüpheci yaklaşmış fakat bu yaklaşımlar ileride kabul görmüştür (Çelik, 2014).

Klein (1962), Lagrange mekanik sistemi için yeni bir bakış açısı geliştirmiştir. Lagrangian formalizmini,

$$i_{\xi}\Phi_L = dE_L \quad \textbf{(2.1)}$$

formunda ifade etmiştir. Klein' in Lagrangian formalizmini yeniden yorumlayarak hemen hemen tanjant geometrisinin gelişimine ve özel dış türev hesaplamalarına katkıda bulunmuştur. Hamilton mekanik sistemi için de kotanjant demeti kullanmış ve Hamiltonian formalizmini

$$i_{X_H}\Phi = dH \quad \textbf{(2.2)}$$

formunda ifade etmiştir.

Crampin (1981) Euler – Lagrange denklemlerinin diferansiyel geometrisi ve Lagrangian dinamiğinin ters problemleri üzerinde çalışmalar ortaya koymuştur.

De Leon (1987) ikinci mertebeden diferansiyellenebilir denklemler ve korunumsuz Lagrangian mekaniği çalışmasında Lagrange teorisinin geometrik formunu incelemiştir.

De Leon (1991a) zamana bağlı dejenere Lagrangian formalizmin kısıtlanması üzerinde çalışma yapmıştır.

Özer (1994) bağlantılı integre edilebilir Hamilton sistemlerini incelemiştir.

Civelek (1996) vektör demetlerinde Lagrange ve Hamilton denklemlerini ele almıştır.

Tekkoyun (2002) genelleştirilmiş Kahler manifoldları üzerinde Euler- Lagrange ve Hamilton denklemlerinin yüksek mertebeden liflerini bulmuştur.

Tekkoyun (2005) para-Kähler manifoldları üzerinde para-kompleks Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerini elde etmiştir.Ayrıca mekanik sisteme ait bazı geometrik ve fiziksel sonuçlar vermiştir.

Tekkoyun (2006a) Para-Kählerian manifoldlarda Poisson parantezli para-kompleks Hamilton hareket denklemlerini hesaplamıştır.

Tekkoyun (2006b) kısıtlanmış reel Hamilton denklemlerini kompleks versiyonuna genellemiştir. Kısıtlı Kähler manifoldlarda kompleks Hamilton hareket denklemlerini ortaya çıkarmıştır.

Tekkoyun (2009a) Kähler manifoldları üzerinde kompleks Hamilton mekanik sistemlerinin liftlerini ele almış, $k.$ mertebeden dikey liftlerin zamana bağlı olan kompleks Hamilton denklemlerini bulmuştur.

# BÖLÜM 3
# MATERYAL VE YÖNTEM

Yapılan bu çalışmada; temel kavramlar olarak matematiksel yapılar, Lagrangian ve Hamiltonian mekanik sistemler alınmıştır. Rheonomic Lagrangian ve Hamiltonian mekanik sistemlere ait denklemlerin elde edilmesinde ise analitik yöntem kullanılmıştır. Bulunan denklemlerin çözümünde sembolik hesaplama kullanılmıştır.

## 3.1. Tanımlar

***Vektör uzayı:*** $V$ boş olmayan bir küme ve $K$ bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise $V$ kümesi $K$ cismi üstünde bir *vektör uzayıdır* denir. $\forall u, v, w \in V$ ve $\forall a, b \in K$ için

(V1) $V$ kümesi $+$ (toplama) işlemine göre aşağıdaki özellikler vardır.

(V1.1) $u + v \in V$

(V1.2) $(u+v)+w = u+(v+w)$

(V1.3) $u + 0 = 0 + u$

(V1.4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$

(V1.5) $u + v = v + u$

(V2) $K \times V \to V$, $(a,u) \to au$ biçiminde skaler ile çarpma işlemine göre aşağıdaki özellikler vardır.

(V2.1) $a(u+v) = au + av$

(V2.2) $(a+b)u = au + bu$

(V2.3) $(ab)u = a(bu)$

(V2.4) $1u = u$

***Vektör:*** Bir vektör uzayının her bir elemanına *vektör* adı verilir (Kasap, 2014).

***Baz:*** $V$ bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall v \in V$ vektörü bir $S = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektör kümesindeki vektörlerin tek bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa $S$ kümesi $V$ nin bir bazıdır. Eğer $V$ nin $n$-elemanlı bir bazı varsa $V$ ye sonlu n-boyutlu veya $n$-boyutludur denir (Kasap, 2014).

***Lineer dönüşüm:*** $V$ ve $U$ bir $F$ cismi üzerinde birer vektör uzayı ve $f : V \to U$ bir fonksiyon olsun. $\forall v_1, v_2 \in V$ ve $\forall a \in F$ için,

(1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

(2) $f(av_1) = af(v_1)$

şartları sağlanırsa $f$ ye $V$ den $U$ ya lineer dönüşüm denir (Hacısalihoğlu,2003).

***Dual uzay:*** $V$ bir vektör uzayı olsun. Bir $V$ vektör uzayından $K$ cismine tanımlanan lineer fonksiyonellerin kümesi $L_1$ ve $L_2$, $V$ de lineer fonksiyoneller ve $\forall u \in V$, $\forall k \in K$ olmak üzere

(1) $(L_1 + L_2)(u) = L_1(u) + L_2(u)$

(2) $(kL_1)(v) = kL_1(v)$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler çarpım özellikleriyle $K$ üzerinde yine bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $V$ nin dual uzayı denir ve $V^*$ ile gösterilir.

***Dual baz:*** $V$ bir vektör uzayı ve $K$ bir cisim olmak üzere, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ kümesi $V$ nin bir bazı olsun. $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \in V^*$, $\phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} i = j & ,1 \\ i \neq j & ,0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan lineer fonksiyoneller olsunlar. Bu durumda $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ kümesi, $V^*$ ın bir bazıdır. Bu $\{\phi_i\}$ bazı $\{v_j\}$ ye dual olan baz veya dual baz olarak adlandırılır.

***Lie parantez operatörü:*** $V$ bir $K$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ dönüşümü;

(L1) Bilineer

(L2) Alternedir $(\forall X, Y \in V;\ [X, Y] = -[Y, X])$.

(L3) $\forall X, Y, Z \in V;\ [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

olarak verilsin. $[\ ,\ ]$dönüşümüne$V$ üstünde bir *Lie operatörü* denir (Kasap, 2014).

***Afin uzay:***Boş olmayan bir cümle $A$ ve bir $K$ cismi üstünde tanımlı bir vektör uzayı $V$ olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa $A$ ya $V$ vektör uzayı ile birleştirilmiş bir *Afin uzay* denir.

(A1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

(A2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası

vardır.

***İç çarpım uzayı:*** $V$ reel cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. $x, y \in V$ vektörlerine bir $<,>$ fonksiyonuyla bir $<x, y>$ reel sayısını karşılık getirsin. Bu fonksiyon $\forall x, y, z \in V$ vektörleri ve $\forall \alpha \in R$ skalerleri için,

(İç1) $x \neq 0$ ise $<x, x> \in R^{+}$

(İç2) $<x, y> = <y, x>$

(İç3) $<x + y, z> = <x, z> + <y, z>$

(İç4) $<\alpha x, y> = \alpha <y, x>$

aksiyomları sağlanıyor ise $V$ üzerinde *iç çarpım* ve üzerinde bir iç çarpım tanımlanan $V$ uzayınada bir *iç çarpım uzayı* adı verilir (Başar, 2012).

***Öklid uzay:*** Bir reel Afin uzay $A$ ve $A$ ile birleşen vektör uzayı $V$ olsun. $V$ de bir iç çarpım işlemi olarak;

$$<,>: V \times V \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow <x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad ,(i = 1,\ldots, n)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile $A$ da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece $A$ Afin uzayı da yeni bir ad olarak *Öklid uzayı* adını alır ve $n-$boyutlu Öklid uzayı $E^n$ ile gösterilir.

$$<\alpha,\beta>=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathrm{y}_\mathrm{i}=\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta\cdot$$

***Açı:*** $\forall x,y,z\in E^n$ için $x\hat{y}z$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta=\frac{<\vec{xy},\vec{yz}>}{\left\|\vec{xy}\right\|\left\|\vec{yz}\right\|}$$

den hesaplanan $\theta$ reel sayısıdır (Hacısalihoğlu,2003).

***Ortogonal:*** $V$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $<u,v>=0$ ise $u$ , $v$ ye ortogonaldir ve $u,v\in V$ vektörlerine de *ortogonal* vektörler denir.

***Öklid çatısı:*** $E^n$ de sıralı bir $\{P_0,...,P_n\}$nokta $(n+1)-$lisine $R^n$de karşılık gelen $\left\{\vec{P_0P_1},...,\vec{P_0P_n}\right\}$ $n$-lisine $R^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0,...,P_n\}$sistemine $E^n$ in bir *dik çatısı* veya *Öklid çatısı* denir. $E_0=(0,...,0), E_n=(0,...,1)$ve $\{E_0,...,E_n\}$ çatısına da standart Öklid çatısı denir. $<\vec{E_0E_i},...,\vec{E_0E_j}>=\delta_{ij}$ şeklinde ifade edilir.

***Öklid koordinat sistemi:*** $E^n$ de bir $X$ noktasının $E^n$ deki standart Öklid çatısına göre ifadesi $\vec{E_0X}=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\vec{E_0E_i}$ dir. Burada $x_i:E^n\to R$ , $1\le i\le n$ fonksiyonları $X$ noktasının Öklid koordinat fonksiyonları denir. $\{x_1,x_2,...,x_n\}$sıralı ve reel değerli fonksiyon $n-$lisine de $E^n$in *Öklid koordinat sistemi* denir.

***Öklid koordinat fonksiyonu:*** $U$ ve $V$ sırası ile $E^m$ ve $E^n$ de birer açık cümle olsunlar. Bir

$$\begin{aligned}&\psi:U\to V\\&\quad x\to\psi(x)=(f_1(x),...,f_n(x))\end{aligned}$$

fonksiyonu için bütün $f_i : U \to R$ koordinat fonksiyonları $C^k -$sınıfından iseler $\psi \in C^k(U,V)$ dir denir. $C^\infty(U,V) = \{\psi \mid \psi \in C^k(U,V),\ \forall k \in N\}$. $f_i$ fonksiyonlarına $\psi$ nin *Öklid koordinat fonksiyonları* denir.

***Uzaklık:***

$$d : E^n \times E^n \to R$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan $d$ fonksiyonuna $E^n$ de Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Kasap, 2014).

***Öklid metriği:***

$$d : E^n \times E^n \to R$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan $d$ fonksiyonuna $E^n$ de *Öklid metriği* denir.

***Metrik:*** $X$ boş olmayan bir küme olsun.

$$d : X \times X \to R$$
$$(x, y) \to d(x, y)$$

fonksiyonu verilsin. $\forall x, y, z \in X$ olmak üzere;

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlıyorsa $d$ ye $X$ üzerinde bir *metrik*ve $(X, d)$ ikilisine de bir metrik uzay denir. Sadece (M2), (M3) ve (M4) özellikleri sağlanıyorsa *d* ye pseudo-metriği denir.

***Topoloji:*** $X$ boş olmayan bir cümle olsun. $X$ in alt cümlelerinin bir koleksiyonu $\tau$ olsun. Bu koleksiyon aşağıdaki önermeleri doğrularsa $X$ üzerinde bir *topoloji* adını alır.

(T1) $\varnothing, X \in \tau$

(T2) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \bigcap A_2 \in \tau$

(T3) $A_i \in \tau, i \in I, \bigcup A_i \in \tau$

Burada $I$ bir indeks cümlesidir (Mucuk, 2010).

***Topolojik uzay:***Bir $X$ cümlesi ve üzerindeki bir $\tau$ topolojisinden oluşan $(X, \tau)$ ikilisine bir topolojik uzay denir (Mucuk, 2010).

***Homeomorfizim (Topolojik dönüşüm):*** $X$ ve $Y$ birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli ise ve $f^{-1}$ tersi var ve $f^{-1}$ de sürekli ise $f$ ye $X$ den $Y$ ye bir *homeomorfizim (topolojik dönüşüm)* denir (Mucuk, 2010).

***Hausdorff uzayı:*** $X$ bir topolojik uzay olsun. $X$ in $P$ ve $Q$ gibi farklı noktaları için $X$ de sırası ile $P$ ve $Q$ noktalarını içine alan $A_P$ ve $A_Q$ açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \phi$ olacak biçimde bulunabilirse $X$ topolojik uzayına bir *Hausdorff uzayı* denir.

***Topolojik manifold:*** $M$ bir topolojik uzay olsun. $M$ için aşağıdaki önermeler doğruysa $M$ ye bir *topolojik n-manifold* denir.

(M1) $M$ bir Hausdorff uzayıdır.

(M2) $M$ nin her bir açık alt cümlesi $E^n$'e veya $E^n$'nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3) $M$ sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir (Mucuk, 2010).

***Harita:*** $M$ bir $n$-boyutlu topolojik manifold ve $U$ da $E^n$ in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman topolojik manifold tanımı gereğince $U$ bir $\psi$ homeomorfizmi ile $M$ nin bir $W$ açıkaltcümlesine eşlenebilir. $\psi : U \subset E^n \to W \subset M$ olmak üzere $(\psi, W)$ ikilisine $M$ de bir *koordinat komşuluğu* veya *harita* denir.

***Atlas:*** $M$ bir $n$-boyutlu topolojik manifold ve $M$ nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. $U_\alpha$ açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi $A$ olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır.

$E^n$, $n$-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $E^n$ de $U_\alpha$ ya $\psi_\alpha$ homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle $U_\alpha$ olsun. Böylece ortaya çıkan $(\psi_\alpha, U_\alpha)$ haritalarının $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir *atlas(koordinat komşuluğu sistemi)* denir.

***Diferansiyellenebilir yapı:***Bir topolojik $n$-manifold $M$ ve $M$nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer $S$ atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonlar $C^k$-sınıfından diferansiyellenebilir iseler $S$ ye $C^k$-sınıfından *diferansiyellenebilirdir* denir. $S$ atlası $M$ üzerinde $C^k$-sınıfından olduğu zaman $S$ ye $M$ üzerinde $C^k$-sınıfından *diferansiyellenebilir yapı* adı verilir.

***Diferansiyellenebilir manifold:*** $M$ bir topolojik $n$-manifold olsun. $M$ üzerinde $C^k$-sınıfından diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse $M$ ye $C^k$- sınıfından bir *diferansiyellenebilir manifold* denir.

***Diferansiyellenebilir dönüşüm:*** $E^n$ ve $E^m$ sırasıyla $n$-ve $m$-boyutlu Öklid uzayları olmak üzere $F : E^n \to E^m$ fonksiyonu verilmiş olsun. $F$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonu olan $f_i : E^n \to R$ fonksiyonları diferansiyellenebilir ise $F = (f_1, ..., f_m)$ fonksiyonu da diferansiyellenebilirdir. Bu durumda $F : E^n \to E^m$ fonksiyonuna bir diferansiyellenebilir dönüşüm denir (Koca,2001).

***Submersiyon:*** $M$ ve $N$ sırasıyla $m$ ve $n$ boyutlu manifoldlar olmak üzere, $F : M \to N$ diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. $m > n$ ve $rankF = n$ oluyorsa $M$ nin her noktasında $F$ ye bir submersiyondur denir.

***Kanonik projeksiyon:*** $TM$ tanjant demetinden $M$ manifoldu üzerine sürekli ve örten $\tau_M : TM \to M$ dönüşümüne kanonik projeksiyon denir.

***Demet:*** $E$ manifoldu total uzay, $M$ manifoldu baz uzay ve $p$ de projeksiyon olmak üzere $p : E \to M$ bir örten submersiyonsa $(E, p, M)$ üçlüsüne bir demet adı verilir.

***Lif:*** $E$ ve $M$, manifoldlar, $\pi : E \to M$ bir $C^\infty$ dönüşüm olsun. Eğer $\pi$ örten submersiyon ise $(E, \pi, M)$ üçlüsüne bir lifli manifold denir. Bir $(E, \pi, M)$ lifli manifoldunda $E$ ye total uzay, $M$ ye taban uzayı, $\pi$ ye projeksiyon ve her bir $p \in M$

noktası için $E$ nin $\pi^{-1}(p)=E(p)$ alt cümlesine de $p$ üzerindeki lif denir. Yani, $M$ bir manifold olmak üzere $\forall x\in M$ için $\pi^{-1}(p)=E(p)$ ise $p$ ye $M$ nin $x$ üzerindeki lifi denir.

***Tanjant manifold:*** $M$ bir manifold olmak üzere, $TM=\bigcup_{p\in M} T_p(M)$ $C^\infty$ -manifolduna $M$ nin bir *tanjant manifoldu* denir.

***Tanjant demet:*** $M$ bir manifold ve $TM$ tanjant manifold olsun. $\pi_M : TM \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere $(TM,\pi_M,M)$ ye $M$ manifoldunun bir *tanjant demeti* denir (Miron, 1997).

***Kotanjant demet:*** $M$ bir manifold olsun. $\pi_M : T^*M \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere $(T^*M,\pi_M,M)$' ye $M$ manifoldunun *kotanjant demeti* denir (Miron, 1997).

***Vektör alanı:*** $E^n$ n-boyutlu boyutlu Öklid uzayı ve $E^n$ in $p\in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(p)$ olsun. Buna göre bir $X: E^n \to \bigcup_{p\in E^n} T_{E^n}(p)$ fonksiyonu için $\pi o X : E^n \to E^n$ olacak şekilde bir $\pi : \bigcup_{p\in E^n} E^n \to E^n$ fonksiyonu mevcutsa $X$ e $E^n$ üzerinde bir *vektör alanı* adı verilir.

Yani, bir manifoldun bir alt kümesinde tanımlanmış ve bu kümenin her bir noktasına, bu noktada bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyondur. Yada, bir manifoldun her noktasına bir tanjant vektörü eşleyen dönüşüme bir vektör alanı denir.

***İntegral eğrisi:*** $E^{n+1}$, (n+1) boyutlu Öklid uzayı ve $E^{n+1}$de parametrik bir eğri $\alpha : I \to E^{n+1}$ olsun. Yani $t\to \alpha(t)=(\alpha_1(t),...,\alpha_{n+1}(t))$ dir. $E^{n+1}$üzerinde bir vektör alanı $\xi$ olmak üzere $\forall t\in I$ için $\dfrac{d\alpha}{dt}=\xi(\alpha(t))$ ise $\alpha$ eğrisine $\xi$ vektör alanının *integral eğrisi* denir.

***0-form:*** $E^n$ de bir açık alt cümle $U$ olmak üzere bir $f:U\to R$ fonksiyonunun k. mertebeden bütün kısmı türevleri var ve sürekli iseler $f$ fonksiyonuna $C^k$ sınıfından diferansiyellenebilirdir denir. Özel olarak $f$ sadece sürekli ise $C^0$ sınıfındandır denir. $U$ üstünde tanımlı $C^1$ sınıfından fonksiyona $U$ üstünde bir *0-form* adı verilir.

***1-form:*** $E^n$' in $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{E^n}(P)$ olsun. Buna göre bir $\omega : E^n \to \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P)$ fonksiyonu için $\pi o \omega : E^n \xrightarrow{özdeşlik} E^n$ olacak şekilde bir $\pi : \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P) \to E^n$ fonksiyonu mevcut ise $\omega$ ye $E^n$ üstünde *1-form* denir.

***Dış türev:*** $f_i \in C(E^n, R)$ için $df_i \in \chi^*(E^n)$ olsun. $\Phi = \sum f_i dx_i$ $1-$formu verilsin. $d\Phi = \sum df_i \wedge dx_i$ $2-$formuna $\Phi$ $1-$formunun *dış türevi* (*diferansiyeli*) denir.

***Tensör alanı:*** Matematik, fizik ve mühendislikte tensör alanı bir matematiksel uzayın (tipik olarak Öklid uzayı veya manifoldun) herhangi bir noktasına bir tensör karşılık getirir.

Tensör alanları diferansiyel geometri, cebirsel geometri, genel rölativitede, malzemelerin gerginlik ve basınç analizinde ve mühendislik ve fiziksel bilimlerin sayısal uygulamalarında kullanılır. Tensör skaler (uzunluğa benzer bir değeri temsil eden sade bir sayı) ve bir vektörün (uzayda bir geometrik ok) bir genelleştirmesi olduğu gibi, bir tensör alanı da uzayın her bir noktasına sırasıyla bir skaler veya vektör karşılık getiren bir skaler alan veya vektör alanının genelleştirmesidir(Wikipedia(c)).

***Grup homomorfizmi:*** $(G,.)$, $(H,*)$ iki grup olsun. $f : G \to H$ fonksiyonu $\forall a,b \in G$ için

$$f(ab) = f(a) * f(b)$$

oluyorsa $f$ ye bir grup homomorfizmi denir.

***İzomorfizm:*** Eğer $f$ grup homomorfizmi $1:1$ ve örten ise izomorfizm adını alır.

***Endomorfizm:*** Eğer $f$ grup homomorfizminde $G = H$ ise $f$ endomorfizm adını alır.

***Diffeomorfizm:*** $E^n$, $n$-boyutlu bir Öklid uzayı olmak üzere, $E^n$ in iki açık alt cümlesi $U$ ve $V$ olsun. Bir $\psi : U \to V$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler doğruysa $\psi$ ye $C^k$ sınıfından bir *diffeomorfizm* ve $U$ ile $V$ ye de $k$. dereceden *diffeomorfiktirler* denir.

(D1) $\psi \in C^k(U;V)$

(D2) $\psi^{-1}: V \to U$ var ve $\psi^{-1} \in C^k(V;U)$

***Türev dönüşümü:*** $M$ ve $N$, $C^\infty$ manifoldlar, $\varphi: M \to N$, $C^\infty$ dönüşüm $m, p \in M$ ve $v_p \in T_p M$ tanjant vektörüne $p$ noktasında teğet olan bir eğri $\alpha: I \subset R \to M$ olsun. $(\varphi_*)_p : T_p M \to T_{\varphi(p)} M$ ile tanımlanan dönüşüme $\varphi$ nin $p \in M$ noktasındaki *türev dönüşümü* denir.

***Regülerlik:*** $E^n$ ve $E^m$, $m$ ve $n$ -boyutlu birer Öklid uzayı olmak üzere, bir $F: E^n \to E^m$ dönüşümünün $\forall p \in E^n$ noktasındaki $(F_*)p$ türev dönüşümü 1:1 ise bu $(F_*)p$ türev dönüşümüne *regülerdir* denir.

***Bilineer form:*** $V$ bir reel vektör uzayı olsun. $<.,.>= V \times V \to R$ dönüşümü $\forall a, b \in R$, $\forall u, v, w \in V$ için,

(1) $< au + bv, w >= a < u, w > + b < v, w >$

(2) $< u, av + bw >= a < u, w > + b < v, w >$ oluyorsa <,> dönüşümüne bir $V$ vektör uzayı üzerinde bir *bilineer form* denir.

***Dejenerelik ve nondejenerelik:*** $V$ bir $m$-boyutlu reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to R$ bir simetrik bilineer dönüşüm olsun. Eğer bir $w \neq 0$ vektörü için , $g(w, v) = 0$ ise $g$ ye *dejenere*denir. Eğer $\forall v \in V$ için $g(w, v) = 0$ olması $w = 0$ olmasını gerektiriyor ise $g$ ye *nondejenere* denir.

***Bir matrisin rankı:*** Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A matrisinin rankı denir ve r(A) ile gösterilir.

***Kovaryant tensör alanı:*** Diferansiyellenebilir bir $M^n$ manifoldu için $s.$ mertebeden bir kovaryant tensör alanı (kısaca bir $(0, s)$-tensör alanı) $D: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times ... \times \chi(M^n) \to C^\infty(M^n, R)$ şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür.

***2-form:*** $M$ bir manifold olmak üzere $\alpha$, $M$ üzerinde $k.$ dereceden bir diferansiyellenebilir form olsun. $\alpha$ yı $(0,k)$ tipinden anti-simetrik bir tensör alanı olarak düşünebilir. Yani, $\alpha$, $k.$- formdur. Eğer $k=2$ alınırsa $2$-form elde edilmiş olur.

$$\alpha = \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \Lambda \ldots \Lambda dx^{i_k} = \frac{1}{k!} a_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \Lambda \ldots \Lambda dx^{i_k}$$

***Hemen hemen tanjant yapı:*** $n$-reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin tanjant demeti $TM$ olsun. $TM$ üzerinde $J^2=0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ=n$ ile verilen $TM$ üzerindeki $(1,1)$ tipinden bir $J$ tensör alanına bir *hemen hemen tanjant yapı* denir.

***Riemann manifoldu*:** $M$ bir $C^\infty$-manifold ve reel değerli $C^\infty$- fonksiyonların halkası $C^\infty(M,R)$ olmak üzere $g:\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,R)$ şeklinde bir iç çarpım tanımlıysa $M$ ye bir Riemann manifoldu denir. Burada $g$, $M$ üzerinde bir iç çarpımdır. Metrik tensör, Riemann metriği veya diferansiyellenebilir metrik olarak da adlandırılır.

***Semi-Riemann manifoldu:*** $M$ bir $C^\infty$- manifold olsun. $M$ üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli $C^\infty$-fonksiyonların halkası da $C^\infty(M,R)$ olmak üzere

(1) 2-Lineer; (2) Simetrik

(3) $\forall X \in \chi(M)$ için $<X,Y>=0 \Leftrightarrow Y=0 \in \chi(M)$

şartları sağlanıyorsa $<.,.>$ fonksiyonu semi-Riemann metriği ve $M$ ye de semi-Riemann manifoldu olarak adlandırılır.

***Levi-Civita konneksiyonu:*** Bir $M$ yarı(semi)-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

(i) $[X,Y]=\nabla_X Y - \nabla_Y X$

(ii) $X_g(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$ olacak şekilde bir tek $\nabla$ konneksiyonu vardır. $\nabla$ ya $M$ nin Levi-Civita konneksiyonu denir.

***Riemann eğrilik tensörü*:** Bir $n$-boyutlu Riemann manifoldu $M$ ve Levi-Civita konneksiyonu $\nabla$ olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)$$

$$(X,Y,Z)\rightarrow R(X,Y,Z)=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

şeklinde tanımlanan $R$ fonksiyonu $M$ üzerinde tensördür. $R(X,Y)Z$ veya $R(X,Y,Z)$ ile gösterilen bu tensöre $M$ nin Riemann eğrilik tensörü denir.

***Riemann-Christoffel eğrilik tensörü:*** $M$ bir semi-Riemann manifoldu olsun.

$$K:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^{\hbar}(M,R)$$

$$(X,Y,Z,W)\rightarrow K(X,Y,Z,W)=<X,R(Z,W)Y>$$

olarak tanımlanan $4$. mertebeden kovaryant tensöre, $M$ üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir.

***Konfigürasyon manifoldu:*** Klasik mekanikte, dış sınırlamalar yardımıyla fiziksel bir sisteme uygun durumların gerçekleşebildiği uzaya bir konfigürasyon uzayı denir. Tipik bir sistemin konfigürasyon uzayı bir manifold yapısına sahiptir, bundan dolayı konfigürasyon manifoldu olarak adlandırılır.

***Hız faz uzayı:*** $M$ bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M:TM\rightarrow M$ doğal projeksiyon olmak üzere $(TM,\pi_M,M)$ ye $M$ manifoldunun tanjant demeti denir. Bir $p\in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi $T_pM$ tanjant uzayıdır. $TM$ tanjant uzayı hız faz uzayıdır.

***Momentum faz uzayı:*** $M$ bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M:T^*M\rightarrow M$ doğal projeksiyon olmak üzere $(T^*M,\pi_M,M)$ye $M$ manifoldunun kotanjant demeti denir. Bir $p\in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi $T_p^*M$ kotanjant uzayıdır. $T^*M$ kotanjant uzayı momentum faz uzayıdır.

***Hemen hemen simplektik manifold:*** $2m$ reel boyutlu bir $M$ manifoldunun herhangi bir $p$ noktasında $\varphi$ anti simetrik $2$-formu regüler yani $boyM=rank\varphi$ ise $\varphi$ $2$-formuna bir hemen hemen simplektik yapı denir. $(M,\varphi)$ ikilisine bir hemen hemen simplektik manifold denir.

***Simplektik manifold:*** 2m reel boyutlu bir $M$ manifoldunun üzerinde $\varphi$ hemen hemen simplektik yapı kapalı yani $d\varphi = 0$ ise $\varphi$ 2-formuna simplektik yapı denir. $(M,\varphi)$ ikilisine bir simplektik manifold denir.

***Hemen hemen kompleks yapı:***m-reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin tanjant demeti $TM$ olsun. $TM$ üzerinde $J^2 = -I$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen $TM$ üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden $J$ tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı denir.

***Hemen hemen kompleks manifold:*** Üzerinde hemen hemen kompleks yapı tanımlanan manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir.

***Holomorfik fonksiyon:*** $D$, $C^n$ nin bir açık alt kümesi olsun. $f$, $D$ üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere $D$ nin her bir $p = z_0$ noktasında $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z_0^\alpha + \Delta z^\alpha\right) - f\left(z_0^\alpha\right)}{\Delta z^\alpha}$ $\left(\Delta z^\alpha = \Delta x^\alpha + i\Delta y^\alpha\right)$ her $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$ için limit var ve bu limit $\Delta z^\alpha \to 0$ a yaklaştığında $\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta x^\alpha}$ yönüne bağlı değilse, $f$ fonksiyonu $p$ noktasında holomorfiktir. Her $p \in D$ için bu şart sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna holomorfiktir denir(Wikipedia(b)).

***Holomorfik dönüşüm:*** $M$ ve $M$ iki kompleks manifold, $\varphi : M \to M$ sürekli bir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere $\varphi(p)$ nin bir $V$ komşuluğu üzerinde tanımlanan holomorfik fonksiyon $f$ olsun. Bu durumda $p \to \varphi(p)$ ile tanımlanan $\varphi$ sürekli dönüşümünün $\varphi^*$ dual dönüşümü 1-formları 1-formlara dönüştürüyorsa $\varphi$ diferansiyellenebilir dönüşümüne bir holomorfik dönüşüm denir.

***Kompleks manifold:*** $M$, $2n$-boyutlu Hausdorff uzayının bir $\{U_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ açık örtüsü için $\varphi_M \subset M \xrightarrow{\text{hom}} D\mu \subset C^n$ ve $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ olmak üzere $\varphi_\lambda\left(U_\lambda \cap U_\mu\right)$ nin her bir $p$ noktasında $f_{\mu\alpha} = \varphi_\mu\left(\varphi_\lambda^{-1}(p)\right)$ fonksiyonları holomorfikse bu durumda $M$ ye bir kompleks manifold denir.

***Hermit metriği:***Bir $J$ hemen hemen kompleks yapısıyla $M$bir hemen hemen kompleks manifold ve $g$ de$M$ üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. Bu durumda $g(Z,W) = g(JZ,JW)$, $\forall Z,W \in \chi(M)$eşitliğini sağlayan $g$ Riemann metriğine $M$ üzerinde Hermit metriği denir.

***Hermit manifoldu:***Bir Hermit metriğiyle bir M hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir.

***Hemen hemen parakompleks yapı:***m-reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin tanjant demeti $TM$ olsun. $TM$ üzerinde $J^2 = I$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen $TM$ üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden $J$ tensör alanına bir hemen hemen para-kompleks yapı denir.

***Hemen hemen çarpım manifoldu:***$M$ $n$-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. $M$ de $J^2 = 0$olmak üzere $J$ biir $(1,1)$ tipinde tensör alanı ve M hemen hemen çarpım yapısıyla donatılmışsa $M$ ye bir hemen hemen çarpım manifoldu denir.

***Semispray:*** $J$ $n$-reel boyutlu bir $M$ manifoldunun $TM$ tanjant demeti üzerinde bir hemen hemen tanjant yapı olsun. $TM$ demeti üzerinde yerel koordinatlar $(q^i, v^i)$, $1 \le i \le m$ ve $\xi = v^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$ , $\dot{q}^i = v^i$, $\ddot{q}^i = \dot{v}^i = \xi^i$ vektör alanına $M$ üzerinde bir semispray (ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem) denir.

***Liouville vektör alanı:*** $J$ bir hemen hemen tanjant yapı ve $\xi$ bir semispray olmak üzere $V = J\xi = v^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$ ile verilen $V$ vektör alanına Liouville vektör alanı denir.

***Kinetik enerji:*** m-reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin tanjant demeti $TM$ olsun. $M$ manifoldu üzerinde lokal koordinatlar $(q^i)$, $1 \le i \le m$ ve $TM$ üzerinde lokal koordinatlar $(q^i, v^i)$ olsun. $m_i$, $M$ üzerinde $m$ parçacıklı sistemin kütlesi olmak üzere $T = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{q}^i\right)^2 = \frac{1}{2} m_i \left(v^i\right)^2$ ile verilen $T : TM \to R$ dönüşümüne sistemin kinetik enerjisi denir.

***Potansiyel enerji:*** m-reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ manifoldu üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i\right)$, $1 \le i \le m$ olsun. $m_i$, $M$ üzerinde $m$ parçacıklı sistemin kütlesi $g$, yer çekimi ivmesi ve $h$, sistemin orijine uzaklığı olmak üzere $P = m_i gh$ ile verilen $P: M \to R$ dönüşümüne sistemin potansiyel enerjisi denir.

***Lagrangian fonksiyonu:*** $m$-reel boyutlu bir manifold $M$, $M$ nin tanjant demeti $TM$, $\tau_M : TM \to M$ kanonik projeksiyon olsun. $T = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{q}^i\right)^2 = \frac{1}{2} m_i \left(v^i\right)^2$ ve $P = m_i gh$ sırasıyla sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi olmak üzere $L = T - Po\tau_M$ ile verilen $L: TM \to R$ dönüşümüne Lagrangian fonksiyonu denir.

***Enerji fonksiyonu:*** $V = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$ Liouville vektör alanı ve $L$ Lagrangian fonksiyonu olmak üzere $TM$ üzerinde $E_L = VL - L$ fonksiyonuna $L$ ye bağlı Enerji fonksiyonu denir.

***Dikey türev:*** Bir $M$ manifoldu üzerinde her bir $X$ vektör alanı için, $X$ ile bir $\omega$ $p$-formunun $i_X\omega$ iç çarpımı veya dikey türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

(1) $i_X\omega = 0,\ p = 0$

(2) $i_X\omega = \omega(X),\ p = 1$

(3) $i_X\omega = \omega\left(X, Y_1, ..., Y_{p-1}\right),\ Y_1, ..., Y_{p-1} \in \chi(M)$ bu durumda $i_X\omega \in \wedge^{p-1}(M)$ olur.

***Euler−Lagrange vektör alanı:*** $n-$reel boyutlu bir $M$ manifoldunun $TM$ tanjant demeti üzerinde $\Phi_L = -dd_J L$ kapalı $2-$form ve $\chi(TM)$, $TM$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi ve $\wedge^1 T^* M$, $T^* M$ üzerindeki $1-$formların cümlesi olsun. Bu durumda; $TM_\Phi : \chi(TM) \to \wedge^1 T^* M$ izomorfizmi için $i_{X_L}\Phi_L = dE_L$ eşitliğini sağlayan bir tek $X_L$ vektör alanı vardır ki bu vektör alanına *Euler−Lagrange vektör alanı* denir.

***Lagrange sistem:*** *TM*, $M$ nin tanjant demeti, $\Phi_L$ kapalı $2-$form, $X_L$ Euler−Lagrange vektör alanı (semispray) ve $E_L$, $L$ ye bağlı enerji fonksiyonu olmak üzere $\left(TM, \Phi_L, X_L\right)$ veya $\left(TM, \Phi_L, E_L\right)$ üçlüsüne *Lagrange sistem* adı verilir.

***Euler–Lagrange denklemleri:*** $n-$reel boyutlu bir $M$ manifoldunun $TM$ tanjant demeti üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i, p_i\right)$, $i=1,...,n$ olsun. Lagrange fonksiyonu $L$, $E_L$ $L$ ye bağlı enerji fonksiyonu ve $X_L$ Euler–Lagrange vektör alanı olmak üzere $i_{X_L}\Phi_L = dE_L$ eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

*Euler–Lagrange denklemi* bulunur

***Dual hemen hemen tanjant yapı:*** $n-$reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin kotanjant demeti $T^*M$ olsun. $T^*M$ üzerinde $J^{*2}=0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ^* = n$ ile verilen $T^*M$ üzerindeki $(1,1)$ tipinden $J^*$ tensör alanına $T^*M$ üzerinde *dual hemen hemen tanjant yapı* denir.

***Liouville form:*** $n-$reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin kotanjant demeti $T^*M$ olsun. $T^*M$ üzerinde $J^*$ dual hemen hemen tanjant yapı ve $\omega$ $1-$form olsun. $M$ manifoldu üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i\right)$, $i=1,...,n$ ve $T^*M$ üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i, p_i\right)$ olmak üzere $\omega$ $1-$formu için $T^*M$ üzerinde lokal olarak $\Omega_M = J^*\omega$ ile verilen $\Omega_M$ ye *Liouville form* adı verilir.

***Hamilton fonksiyonu:*** $n-$reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin kotanjant demeti $T^*M$ olsun. $H : T^*M \to R$ ile verilen ve $L$ Lagrangian fonksiyona karşılık gelen $H$ enerji fonksiyonuna Hamilton fonksiyonu denir.

***Hamilton vektör alanı:*** $n-$reel boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin kotanjant demeti $T^*M$ olsun. $H : T^*M \to R$ bir Hamilton enerji olsun. $\chi\left(TM\right)$, $TM$ üzerinde vektör alanların cümlesi ve $\wedge^1 T^*M$, $T^*M$ üzerindeki $1-$formların cümlesi olsun. Bu durumda $TM_\Phi : \chi(TM) \to \wedge^1 T^*M$ izomorfizm dönüşümü $i_{X_H}\Phi = dH$ biçiminde tanımlanmak üzere $T^*M$ üzerinde bir tek $X_H$ vektör alanı vardır ki bu vektör alanına $H$ Hamilton enerjiyle beraber *Hamilton vektör alanı* denir.

***Hamilton sistem*:** $T^*M$, $M$ nin kotanjant demeti, $\Phi$ kapalı $2-$form, $X_H$ Hamilton vektör alanı olmak üzere ( $T^*M, \Phi, X_H$ ) üçlüsüne Hamilton sistem denir.

***Hamilton denklemleri:*** $T^{*}M$ , $M$ nin kotanjant demeti ve $M$ üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^{i}, p_{i}\right)$, $i=1,...,n$ olsun. $H$ Hamilton fonksiyon $X_{H}$ Hamilton vektör alanı olmak üzere $i_{X_{H}}\Phi = dH$ eşitliğinden

$$\frac{dq^{i}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{i}}, \quad \frac{dp_{i}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^{i}}$$

şeklinde elde edilen denklemlere *Hamilton denklemleri* adı verilir.

### 3.2. Yöntem

#### 3.2.1. Matematiksel modelleme

Bilim adamlarının dünyayı daha iyi bir şekilde anlamak ve karşılaşılan sorunlara en iyi şekilde çözüm bulmak için herşeyi matematiksel terimlerle ifade etmişlerdir. Buna matematiksel modelleme denir. Kısaca, matematiksel model, bir sistemin matematik diliyle ifade edilmesidir. Değişkenlerdeki değişikliği gösteren matematiksel ifadeler diferansiyel denklemler olarak isimlendirilir.

Matematiksel modellemenin amacı; gerçek dünyanın farklı yönlerini tahmin etmek, açıklamak, tanımlamak ve anlamaktır. Astronomlar gezegenlerin hareketlerini kusursuz tahmin etmek için matematiksel modellemeyi kullandılar.

Matematiksel modelleme, gerçek dünya durumlarının, beklentilerinin bir bölümünü temsil etmek üzere seçilen bir veya birden fazla matematiksel oluşumların veya aralarındaki ilişkilerin birleşimidir (Niss, 1988).Matematiksel modelleme gerçek hayat içinde yapılandırılmamış problemlere hayatın uygulamasını gerektirir (Galbraith ve Catworthy, 1990). Profesyonel matematik ve okul matematiğindeki bu süreç; algoritmik bir süreç değil, problem durumunu formüle etmeyi içeren zorlayıcı bir yapıya rağmen, uygun değişkenleri seçme, bu değişkenler arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarma, bu değişkenler ve bağlantılara bağlı olarak matematiksel bir model ortaya koyma ve bu model ve uygulamaların test edilmesi sürecidir ve bir sanattır (Burghes, 1980; Evans, 1980; Galbraith, 1987).

Matematiksel modellemeyi kurabilmek için sırasıyla problemin belirlenmesi, problemin analizi, model analizi, modelsel becerilerin geliştirilmesi, matematiksel modelleme becerileri, değişkenlerin tanımlanması gerekmektedir. Bu aşamaların sonunda uygun bir matematiksel model kurulur.

### 3.2.2. Lagrange matematiksel modelleme

Joseph-Lois Lagrange, 1766 da Berlin akademisinde Euler'in varisi olup 1762-1765 tarihleri arasında n. mertebeden homojen diferansiyel denkleminin genel çözümünün, n tane lineer bağımsız çözümlerinin lineer kombinasyonu olduğunu gösterdi.

Leonhard Euler ,yaşamının son 17 yılını görme özürlü olarak geçirmesine rağmen, ölene kadar çalışmalarını devam ettirmiştir. Mekaniği, matematiksel modellemeyle uygulaması öne çıkan çalışmalarındandır. Lagrange, Euler'in matematik uygulamaları için 'analizdeki hareketi bilime uygulayan en önemli çalışma' ifadesini kullanmıştır.

Lagrange sistemi adına verilen konfigürasyon manifoldunun hız ve momentum faz uzayları olan tanjant demetlerde tanımlı uygun bir *X* vektör alanı tarafından karakterize edilir. Bu karakterizasyonda; *M*, $n-$ boyutlu bir konfigürasyon manifold olsun. $M$ manifoldunun yerel koordinatları $\left(q^i\right)$ tanjant demeti $TM$ 'nin ise $\left(q^i, \dot{q}^i\right)$ dir. $E = TM \times R$ $(2n+1)-$boyutlu bir manifold, sistemin kinetik enerjisi *T* ve potansiyel enerjisi $P$, $RL^n = (TM, L(x, y, t))$ rheonomic Lagrange uzayı ve *L*=*T*-*P* olan L:$TM \times R \rightarrow$R bir regüler Lagrange fonksiyonu olup;

$$i_{\xi}\Phi_L = dE_L \tag{3.1}$$

olacak biçimde *TM* üzerinde bir tek $\xi$ vektör alanı vardır. Euler-Lagrange vektör alanı olarak adlandırılan $\xi$ bir semispraydir, çünkü onun integral eğrileri aşağıda verilen Euler-Lagrange denkleminin çözümleri ile çakışır (De Leon,1985,Sayfa 304).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{3.2}$$

$(TM, \Phi_L, L)$ üçlüsü *TM* tanjant demeti üzerinde Lagrangian sistem olarak adlandırılır.

### 3.2.3. Hamilton matematiksel modelleme

İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından 1883' de tanımlanan Hamiltonian mekaniği, klasik mekaniğin yeniden formüle edilmesidir.

$m-$boyutlu bir manifold $M$ ve $M$ nin kotanjant demeti $T^*M$ dir. $T^*M$ kotanjant demetinin koordinatı $\left(q^i, p^i\right)$ olup burada $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p^i$ ' dir.

Hamilton fonksiyon $H : T^*M \to R$ ye $H = T + P$ şeklinde ifade edilir. Öyleki, buradaki $T$ kinetik enerjiyi sembolize ederken $P$ potansiyel enerjiyi sembolize eder.

$T^*M$ kotanjant manifold üzerindeki vektör alanı $X$ ile gösterilirken, kotanjant demeti üzerindeki simplektik 2-form $\phi$ ile gösterilir ve $\phi = -d\lambda$ dir. Burada $\lambda$ Liouville formudur ve $\lambda = J^*\left(w\right)$ şeklindedir $\left(J^* : T^*M \to T^*M\right)$. Burada $J^*$ dual yapısı tanjant, kompleks veya parakompleks olabilir. Ayrıca $w$ 1-formdur.

Hamilton fonsiyonunun dinamik formalizmi

$$i_{X_H}\phi = dH \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. $T^*M$ kotanjant manifold, $\phi$ simplektik 2-form ve $X$ vektör alanı ile beraber $(T^*M, \phi, X)$ üçlüsü Hamiltonian mekanik sistem olarak adlandırılır. Dinamik denklemin temsil ettiği manifold yapısının üzerine kurulan dinamik sisteme ait Hamilton denklemlerinin formatı

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \; \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \text{ şeklindedir.}$$

Bu çalışmada $E = TM \times R$ $(2n+1)-$boyutlu, reel ve yerel koordinatları $(x^i, y^i, t)$ olan bir manifold üzerinde tanjant, kompleks ve parakompleks yapılı rheonomik Euler Lagrange ve rheonomik Hamilton denklemleri elde edilecek. $(M, L(x,y,t), F(x,y,t))$ üçlüsü Rheonomik Lagrangian mekanik sistemi olarak adlandırılacak. Burada $M$ bir manifold, $L$ lagrange fonksiyonu, $F$ ise $RL^n = (TM, L(x,y,t))$ Rheonomic Lagrange uzayının bir fonksiyonudur (Miron, 2009).

## BÖLÜM 4
## ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

### 4.1. Tanjant Yapılı Rheonomic Lagrangian Mekanik Sistemleri

$M$ sonlu $n-$boyutlu reel bir manifold ve $(TM,\pi,M)$ tanjant demeti olsun. $E=TM\times R$ $(2n+1)-$boyutlu, reel ve yerel koordinatları $(x^i,y^i,t)$ olan bir manifoldtur. Bu kısımda $E=TM\times R$ manifoldu üzerinde tanjant yapıya ait rheonomic mekanik sistemlere ait Euler-Lagrange denklemleri elde edilecektir (Miron, 2001).

$E$, $(2n+1)-$boyutlu olduğundan yerel koordinatları $(x^i,y^i,t)$ ile hemen hemen tanjant yapısı da $J$ ile verilsin. Özel bir vektör alanı olan semispray'i aşağıdaki gibi oluşturalım:

$$\xi = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}+Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial}{\partial t}\quad,\quad X^i=\dot{x}^i=y^i, Y^i=\ddot{x}^i=\dot{y}^i. \tag{4.1}$$

$E$ manifoldu üzerinde Liouville vektör alanı $V=J\xi$ tarafından belirlenen vektör alanıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$V=J\xi=X^iJ(\frac{\partial}{\partial x^i})+Y^iJ(\frac{\partial}{\partial y^i})+J(\frac{\partial}{\partial t}). \tag{4.2}$$

Burada $\chi(E)$, E üzerinde tanımlı vektör alanının bir kısmı ve $J$ hemen hemen tanjant yapısı olduğundan $(J^2=0)$;

$$J:\chi(E)\rightarrow\chi(E)$$

$$J(\frac{\partial}{\partial x^i})=\frac{\partial}{\partial y^i},J(\frac{\partial}{\partial y^i})=0,J(\frac{\partial}{\partial t})=0\text{ ,i=1,…,n} \tag{4.3}$$

eşitlikler sağlanır ve böylece Liouville vektör alanı

$$V=X^i\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{4.4}$$

elde edilmiş olur. $E$ manifoldu üzerinde mekanik sistemin, $L$'ye ilişkin enerji fonksiyonu $E_L = V(L) - L$ dir. $i_J$ operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$i_J : \wedge^2 E \to \wedge^1 E \tag{4.5}$$

$d = \frac{\partial}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial}{\partial y^i} dy^i + \frac{\partial}{\partial t} dt$ ile verilen $d$ diferansiyeldir ve $d_J$ dış bükey türevi aşağıdaki gibidir:

$$d_J = J(d) = \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i. \tag{4.6}$$

$d_J$ dış bükey türevi aynı zamanda aşağıdaki gibi Lie türevi olarak da tanımlanır:

$$d_J = [i_J, d] = i_J d - d i_J. \tag{4.7}$$

(4.3) ile gösterilen *J* hemen hemen tanjant yapısı için, $\phi_L = -dd_J L$ ile elde edilen kapalı 2 formdur. (4.6) ile gösterilen $d_J$ dış bükey türevi ile $L$ yi dış carpım olarak uygularsak aşağıdaki elde edilir:

$$d_J L = \frac{\partial L}{\partial y^i} dx^i. \tag{4.8}$$

(4.8) ile gösterilen $d_J L$ yi $d$ ile dış çarpım yaparsak $\phi_L$ kapalı 2- form elde edilir:

$$\phi_L = -dd_J L = -\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt \wedge dx^i. \tag{4.9}$$

(3.1) de verilen $i_\xi \phi_L = dE_L$ 'in sol tarafı

$$\phi_L(\xi) = -X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i}\left(\delta_i^j dx^i - dx^j\right) + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} \delta_i^j dx^i + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dx^i$$

**(4.10)**

Diğer taraftan $E_L$ enerji fonksiyonu

$$E_L = X^i \frac{\partial L}{\partial y^i} - L \tag{4.11}$$

olup bu enerji fonksiyonun diferansiyeli

$$dE_L = X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt - \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j - \frac{\partial L}{\partial y^j} dy^j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{4.12}$$

olarak bulunur.

$i_\xi \phi_L = dE_L$ dinamik formalizmi ve gerekli kısaltmalar dikkate alınırsa;

$$\frac{\partial L}{\partial y^i}\left( -X^i \frac{\partial}{\partial x^j} \delta_i^j dx^i - Y^i \frac{\partial}{\partial y^j} \delta_i^j dx^i - \frac{\partial}{\partial t} dx^i \right) = \vec{0}, \frac{\partial L}{\partial y^j} = 0, \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. $\delta_i^j = \begin{Bmatrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{Bmatrix}$ kronecker delta dönüşümü yapılır ve semispray yerine yazılırsa;

$$-\xi\left( \frac{\partial L}{\partial y^i} \right) dx^i + \frac{\partial L}{\partial x^i} dx^i = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. $\alpha : I \subset R \rightarrow E$ eğrisi $\xi$'nin integral eğrisi,yani $\frac{d\alpha}{dt} = \xi\left(\alpha(t)\right)$ ise bu durumda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left( \frac{\partial L}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{4.15}$$

Elde edilen bu denklemlere $E$ manifoldu üzerinde tanjant yapıya ait rheonomic Euler-Lagrange denklemleridenir. Bu Euler-Lagrange denkleminin çözümü $E$ üzerindeki $\xi$ semisprayin yörüngeleridir. Sonuç olarak bu $\left(E, \phi_L, \xi\right)$ üçlüsünün, rheonomic mekanik sistem olduğu görülür (Frigiou, 2011).

## 4.2. Tanjant Yapılı Rheonomic Hamiltonian Mekanik Sistemleri

Bu kısımda $E^*$ manifoldu üzerindetanjant yapıya ait rheonomic mekanik sistemlere ait Hamilton denklemleri elde edilecektir. $E^*$ üzerinde
$J^{*2}=0$ eşitliğini sağlayacak şekilde

$$J^*(dx^i)=dy^i, J^*(dy^i)=0, J^*(dt)=0 \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır. $J^*$, (4.16) ile verilen bir hemen hemen tanjant yapı ve $w=x^i dx^i+y^i dy^i$ olsun. $J^*(w)=x^i dy^i$ eşitliğiyle hesaplanan $\lambda$ Liouville formu $E^*$' de 1- formdur. $\phi=-d\lambda$ kapalı olduğu için $E^*$ üzerinde kapalı 2 formu yapısındadır. Kabul edelim ki $H$ Hamilton enerjiye bağlı $X_H$ Hamilton vektör alanı aşağıdaki gibi olsun.

$$X_H=X_t+\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.17}$$

Burada $X_t$ şöyle tanımlansın:

$$X_t=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}+Y^i\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{4.18}$$

$E^*$' de $\phi$ kapalı 2 formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\phi=-d\lambda=dy^j\wedge dx^j \tag{4.19}$$

$i_{X_t}\phi=\phi(X_t)$ den işleme devam edilirse;

$$\phi\left(X_t\right)=-X^i dy^i+Y^i dx^i \tag{4.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan $H$ Hamilton fonksiyonun diferansiyelini alalım:

$$dH=\frac{\partial H}{\partial x^i}dx^i+\frac{\partial H}{\partial y^i}dy^i \tag{4.21}$$

(4.20) ile (4.21) denklemlerini (3.3) de verilen $i_{X_t}\phi=\phi(X_t)$ dinamik denklem gereği eşitlersek;

$$X^i = -\frac{\partial H}{\partial y^i}, Y^i = \frac{\partial H}{\partial x^i} \quad \textbf{(4.22)}$$

elde edilir ve $X^i$ ve $Y^i$ leri (4.18) de yerine yazılırsa

$$X_t = -\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i} \quad \textbf{(4.23)}$$

bulunur. Böylece Hamilton vektör alanı aşağıdaki gibi bulunur:

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial t}; \quad \textbf{(4.24)}$$

$X_H$ Hamilton vektör alanının integral eğrisinin,

$$\alpha : I \subset R \to E^* \quad \textbf{(4.25)}$$

kabul edelim ve tanım gereği

$$X_H\left(\alpha(t)\right) = \dot{\alpha}(t) \;,\; t \in I \quad \textbf{(4.26)}$$

olduğundan ve yerel koordinatlar $\alpha(t) = \left(x^i, y^i, t\right)$ olur.

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d}{dt}\left[\alpha(t)\right] = \left(1, \frac{dx^i}{dt}, \frac{dy^i}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i} \quad \textbf{(4.27)}$$

(4.24), (4.26) ve (4.27) denklemleri göz önünde bulundurulursa tanjant yapılı rheonomic Hamilton denklemleri aşağıdaki olur:

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i} \;,\; \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad \textbf{(4.28)}$$

Sonuç olarak, $E$ manifoldunun duali $E^*$ üzerinde $\left(E^*, \phi, X_H\right)$ sistemi de bir rheonomic Hamiltonian mekanik sistemi olarak adlandırılır (Frigiou, 2011).

### 4.3. Kompleks Yapılı Rheonomic Lagrangian Mekanik Sistemleri

$M$ sonlu $n-$boyutlu bir manifold ve $(TM,\pi,M)$ tanjant demeti olsun. $E=TM\times R$ $(2n+1)-$boyutlu, kompleks ve yerel koordinatları $(x^i,y^i,t)$ olan bir manifoldtur. Bu kısımda $E=TM\times R$ manifoldu üzerinde kompleks yapıya ait rheonomic mekanik sistemlere ait Euler-Lagrange denklemleri elde edilecektir. $E$, $(2n+1)-$boyutlu olduğundan yerel koordinatları $(x^i,y^i,t)$ ile hemen hemen kompleks yapısı da $J$ ile verilsin. $E$ ‘ nin yerel bazları aşağıdaki gibidir.

$$(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial t})$$

Özel bir vektör alanı olan semispray’i aşağıdaki gibi alalım.

$$\xi = X^i\frac{\delta}{\delta x^i}+Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial}{\partial t}\quad X^i=\dot{x}^i=y^i, Y^i=\ddot{x}^i=\dot{y}^i. \tag{4.29}$$

$E$ manifoldu üzerinde Liouville vektör alanı $V=J\xi$ tarafından belirlenen vektör alanıdır. $\chi(E)$, $E$ üzerinde tanımlı vektör alanının bir kümesi ve $J$ hemen hemen kompleks yapısı olduğundan $J^2=-I$ olup ;

$$J:\chi(E)\to\chi(E)$$

$$J(\frac{\delta}{\delta x^i})=-\frac{\partial}{\partial y^i}, J(\frac{\partial}{\partial y^i})=\frac{\delta}{\delta x^i}, J(\frac{\partial}{\partial t})=0 \tag{4.30}$$

eşitlikleri ile verilir. Böylece Liouville vektör alanı

$$V=J\xi=-X^i\frac{\partial}{\partial y^i}+Y^i\frac{\delta}{\delta x^i} \tag{4.31}$$

elde edilir. $E$ manifoldu üzerinde mekanik sistemin, $L$ ’ye ilişkin enerji fonksiyonu $E_L=V(L)-L$ olarak verilir. $i_j$ operatörü (4.5) gibi tanımlansın.

$$d=\frac{\delta}{\delta x^i}dx^i+\frac{\partial}{\partial y^i}\delta y^i+\frac{\partial}{\partial t}dt \tag{4.32}$$

ile verilen $d$ diferansiyel olup $d_J$ dış bükey türevi aşağıdaki gibidir:

$$d_J = J(d) = -\frac{\partial}{\partial y^i} dx^i + \frac{\delta}{\delta x^i}\delta y^i \qquad \textbf{(4.33)}$$

(4.30) ile gösterilen *J* hemen hemen kompleks yapısı için, $\phi_L = -dd_J L$ ile elde edilen kapalı 2- form yapısındadır. (4.33) ile gösterilen $d_J$ dış bükey türevi ile $L$ yi uygularsak aşağıdaki elde edilir.

$$d_J L = -\frac{\partial L}{\partial y^i} dx^i + \frac{\delta L}{\delta x^i}\delta y^i \qquad \textbf{(4.34)}$$

(4.33) ile gösterilen $d_J L$ nin diferansiyeli alınıp eksi işaretli olarak alınırsa $\phi_L$ kapalı 2 form elde edilir.

$$\phi_L = -dd_J L = \frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) dx^j \wedge dx^i - \frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i} dx^j \wedge \delta y^i + \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta y^j \wedge dx^i$$

$$-\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^j \wedge \delta y^i + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt \wedge dx^i - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right) dt \wedge \delta y^i \qquad \textbf{(4.35)}$$

Böylece (3.1) de verilen $i_\xi \phi_L = dE_L$ sol tarafı

$$\phi_L(\xi) = X^i \frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)\left(\delta_i^j dx^i - dx^j\right) - X^i \frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i}\delta_i^j \delta y^i + Y^i \frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i} dx^j$$

$$-X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta y^j + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta_i^j dx^i - Y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta_i^j dy^i + Y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^j \qquad \textbf{(4.36)}$$

$$-X^i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt + Y^i \frac{\partial L}{\partial t}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) dt + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dx^i - \frac{\partial L}{\partial t}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\delta y^i$$

Diğer taraftan $E_L$ enerji fonksiyonu hesaplanırsa;

$$E_L = V(L) - L = -X^i \frac{\partial L}{\partial y^i} + Y^i \frac{\delta L}{\delta x^i} - L \qquad \textbf{(4.37)}$$

bulunur. Bu enerji fonksiyonun diferansiyelini alalım.

$$dE_L = -X^i \frac{\delta}{\delta x^j}(\frac{\partial L}{\partial y^i})dx^j + Y^i(\frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^j})dx^j - \frac{\delta L}{\delta x^j}dx^j - X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta y^j + Y^i(\frac{\delta L}{\delta x^i})\frac{\partial}{\partial y^j}\delta y^j$$

$$-X^i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i}dt - \frac{\partial L}{\partial y^j}\delta y^j + Y^i(\frac{\delta L}{\delta x^i})\frac{\partial}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial t}dt \qquad \textbf{(4.38)}$$

$i_\xi \phi_L = dE_L$ eşitliği gereğince gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$\left[\left(X^i \frac{\delta}{\delta x^j}dx^j + Y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\delta_i^j dx^i + \frac{\partial}{\partial t}dx^i\right)\frac{\partial L}{\partial y^i} + \frac{\delta L}{\delta x^j}dx^j\right]$$
$$-\left[\left(X^i \frac{\delta}{\delta x^j}\delta_i^j \delta y^i + Y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\delta_i^j \delta y^i + \frac{\partial}{\partial t}\delta y^i\right)\frac{\delta L}{\delta x^i} + \frac{\partial L}{\partial y^j}\delta y^j\right] = \vec{0}\ , \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{(4.39)}$$

elde edilir. Semispray yerine yazılırsa

$$\left[\xi\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) + \frac{\delta L}{\delta x^j}\right]dx^j = \vec{0}, \left[\xi\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right) + \frac{\partial L}{\partial y^j}\right]\delta y^j = \vec{0} \qquad \textbf{(4.40)}$$

bulunur. $\alpha : I \subset R \to E$ eğrisi $\xi$'nin integral eğrisi ise bu durumda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) + \frac{\delta L}{\delta x^i} = 0\ , \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right) + \frac{\partial L}{\partial y^i} = 0. \qquad \textbf{(4.41)}$$

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \alpha = 0,...,n; n \in N \qquad \textbf{(4.42)}$$

ile tanımlanan ifadeyi (4.41) ‘ deki denklemde yerine yazarsak;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^i} - N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial L}{\partial y^\alpha} = 0\ , \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial x^i}) - N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}) + \frac{\partial L}{\partial y^i} = 0. \qquad \textbf{(4.43)}$$

elde edilir. Burada $N_i^\alpha(x,y,t)$, $E$ manifoldu üzerinde $N$ lineer olmayan bağıntısının yerel katsayısıdır. Elde edilen bu denklemlere kompleks yapıya ait rheonomic Euler-

Lagrange denklemleri denir. Bu Euler-Lagrange denklemlerinin çözümü $E$ manifoldu üzerinde $\xi$ semisprayin yörüngeleridir. Sonuç olarak bu $\left(E,\phi_L,\xi\right)$ üçlüsünün rheonomic mekanik sistem olduğu görülür (Frigiou,2011).

**4.4. Kompleks Yapılı Rheonomic Hamiltonian Mekanik Sistemleri**

$M$, $n-$boyutlu bir manifold, $M$' nin kotanjant demeti $T^*M$ dir. $E^* = T^*M \times R$ ise $(2n+1)-$boyutlu $E$'nin dual manifoldu olarak tanımlanır. Bu kısımda $E^*$üzerinde kompleks yapıya ait rheonomic mekanik sistemlere ait Hamilton denklemleri elde edilecektir. $E^*$' ın dual bazları aşağıdaki gibidir.

$\delta x^i = dx^i ; \delta y^i = dy^i + N^i_j dx^j ; \delta t = dt + N^0_i dx^i$

$(dx^i, \delta y^i, dt)$ , $E^*$' ın dual bazlarıdır.

$$J^* : \chi(E^*) \to \chi(E^*)$$

$$J^*(dx^i) = -\delta y^i, J^*(\delta y^i) = dx^i, J^*(dt) = 0 \qquad \textbf{(4.44)}$$

şeklindeki eşitlikler yardımıyla $J^{*2} = -I$ eşitliği sağlanır. $J^*$, (4.44) tarafından verilen bir hemen hemen kompleks yapı ve aynı zamanda $w = \frac{1}{2}\left(x^i dx^i + y^i \delta y^i\right)$olsun. $J^*(w) = \frac{1}{2}\left(-x^i \delta y^i + y^i dx^i\right)$eşitliğiyle hesaplanan $\lambda$ Liouville formu $E^*$' de 1- formdur. $\phi = -d\lambda$ 2-formu kapalı olduğu için $E^*$'de kosimplektik yapıdır. $H$ Hamilton enerjiye bağlı $X_H$ Hamilton vektör alanı (4.17) gibi olsun.Ayrıca $X_t$de aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$X_t = X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad \textbf{(4.45)}$$

$E^*$' de $\phi$ kapalı 2 formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\phi = -d\lambda = dx^j \wedge \delta y^j \qquad \textbf{(4.46)}$$

$i_{X_t}\phi = \phi(X_t)$ den işleme devam edilirse

$$\phi\left(X_t\right)=X^i\delta_i^j(\delta y^i)-Y^i\delta_i^j(\delta x^i) \quad \textbf{(4.47)}$$

elde edilir. Diğer taraftan $H$ Hamilton fonksiyonun diferansiyeli aşağıdaki gibi alalım:

$$dH=\frac{\delta H}{\delta x^i}+\frac{\partial H}{\partial y^i} \quad \textbf{(4.48)}$$

(4.47) ile (4.48) denklemlerini $i_{X_t}\phi=\phi(X_t)$ dinamik denklem gereği eşitlenirse;

$$X^i=\frac{\partial H}{\partial y^i},Y^i=-\frac{\delta H}{\delta x^i} \quad \textbf{(4.49)}$$

elde edilir. $X^i$ ve $Y^i$ leri (4.45) de yerine yazılırsa;

$$X_t=\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^i}-\frac{\delta H}{\delta x^i}\frac{\partial}{\partial y^i} \quad \textbf{(4.50)}$$

bulunur. (4.17) olarak kabul edilen Hamilton vektör alanı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$X_H=\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^i}-\frac{\delta H}{\delta x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial}{\partial t}; \quad \textbf{(4.51)}$$

$X_H$ Hamilton vektör alanının integral eğrisi $\alpha : I\subset R\rightarrow E^*$ olup (4.26) daki denklemi dikkate alırsak;

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y^i}\ ,\ \frac{dy^i}{dt}=-\frac{\delta H}{\delta x^i} \quad \textbf{(4.52)}$$

denklemleri elde edilir. (4.42)' de tanımlanan ifadeyi (4.52) ' de yerine yazarsak aşağıdaki kompleks yapılı rheonomic Hamilton denklemleri elde edilir.

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y^i},\frac{dy^i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}+N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial H}{\partial y^\alpha} \quad \textbf{(4.53)}$$

### 4.5. Parakompleks Yapılı Rheonomic Lagrangian Mekanik Sistemleri

$M$ sonlu *n*- boyutlu bir manifold ve $(TM,\pi,M)$ tanjant demeti olsun. $E=TM\times R$ $(2n+1)-$boyutlu, parakompleks ve yerel koordinatları $(x^i,y^i,t)$ olan bir manifoldtur. Bu kısımda $E=TM\times R$ manifoldu üzerinde parakompleks yapıya ait rheonomic mekanik sistemlere ait Euler-Lagrange denklemleri elde edilecektir.

$E$, $(2n+1)-$boyutlu olduğundan yerel koordinatları $(x^i,y^i,t)$ ile hemen hemen parakompleks yapısı da $J$ ile verilsin. $E$ ‘ nin yerel bazları aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Burada $J$ hemen hemen parakompleks yapısı $J^2=I$ eşitliğini sağlayacak şekilde

$$J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial y^i},\ J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=\frac{\delta}{\delta x^i},\ J\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=0 \qquad \textbf{(4.54)}$$

tanımlanır. Özel bir vektör alanı olan semispray’i (4.29)’ daki gibi alalım. $E$ manifoldu üzerinde Liouville vektör alanı $V=J\xi$ tarafından belirlenen vektör alanıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$V=J\xi=X^i\frac{\partial}{\partial y^i}+Y^i\frac{\delta}{\delta x^i} \qquad \textbf{(4.55)}$$

$E$ üzerinde mekanik sistemin, $L$ ’ye ilişkin enerji fonksiyonunun $E_L=V(L)-L$ olarak tanımlanır.

$$d_J=J(d)=\frac{\partial}{\partial y^i}dx^i+\frac{\delta}{\delta x^i}\delta y^i \qquad \textbf{(4.56)}$$

(4.56) ile gösterilen $d_J$ dış bükey türevi ile $L$ yi dış çarpım olarak uygularsak aşağıdaki elde edilir:

$$d_J L=\frac{\partial L}{\partial y^i}dx^i+\frac{\delta L}{\delta x^i}\delta y^i \qquad \textbf{(4.57)}$$

(4.57) ile gösterilen diferansiyelin tekrar diferansiyeli alınırsa $\phi_L = -dd_J L$ ile elde edilen kapalı 2 –form bulunur.

$$\phi_L = -dd_j L = = -\frac{\delta}{\delta x^j}(\frac{\partial L}{\partial y^i})dx^j \wedge dx^i - \frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i} dx^j \wedge \delta y^i - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta y^j \wedge dx^i$$

$$-\frac{\partial}{\partial y^j}(\frac{\delta L}{\delta x^i})\delta y^j \wedge \delta y^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt \wedge dx^i - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\delta L}{\delta x^i}) dt \wedge \delta y^i \quad \textbf{(4.58)}$$

Böylece (3.1)' de verilen $i_\xi \phi_L = dE_L$ dinamik formalizmin sol tarafı

$$\phi_L(\xi) = -X^i \frac{\delta}{\delta x^j}(\frac{\partial L}{\partial y^i})\left(\delta_i^j dx^i - dx^j\right) - X^i \frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i}\delta_i^j \delta y^i + Y^i \frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i} dx^j$$

$$+X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta y^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta_i^j dx^i - Y^i \frac{\partial}{\partial y^j}(\frac{\delta L}{\delta x^i})\delta_i^j dy^i + Y^i \frac{\partial}{\partial y^j}(\frac{\delta L}{\delta x^i})\delta y^j \quad \textbf{(4.59)}$$

$$+X^i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt + Y^i \frac{\partial L}{\partial t}(\frac{\delta}{\delta x^i}) dt - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dx^i - \frac{\partial L}{\partial t}(\frac{\delta}{\delta x^i})\delta y^i$$

elde edilir. Diğer taraftan $E_L$ enerji fonksiyonu ile diferansiyelini hesaplarsak;

$$E_L = V(L) - L = X^i \frac{\partial L}{\partial y^i} + Y^i \frac{\delta L}{\delta x^i} - L \quad \textbf{(4.60)}$$

ve

$$dE_L = X^i \frac{\delta}{\delta x^j}(\frac{\partial L}{\partial y^i})dx^j + Y^i(\frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^j})dx^j - \frac{\delta L}{\delta x^j}dx^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta y^j + Y^i(\frac{\delta L}{\delta x^i})\frac{\partial}{\partial y^j}\delta y^j$$

$$+X^i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} dt - \frac{\partial L}{\partial y^j}\delta y^j + Y^i(\frac{\delta L}{\delta x^i})\frac{\partial}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \textbf{(4.61)}$$

elde edilir. $i_\xi \phi_L = dE_L$ dinamik denklemi yardımıyla;

$$\left[\left(X^i\frac{\delta}{\delta x^j}dx^j+Y^i\frac{\partial}{\partial y^j}\delta_i^j dx^i+\frac{\partial}{\partial t}dx^i\right)\frac{\partial L}{\partial y^i}-\frac{\partial L}{\partial x^j}dx^j\right]$$
$$\left[\left(X^i\frac{\delta}{\delta x^j}\delta_i^j\delta y^i+Y^i\frac{\partial}{\partial y^j}\delta y^j+\frac{\partial}{\partial t}\delta y^i\right)\frac{\delta L}{\delta x^i}-\frac{\partial L}{\partial y^j}\delta y^j\right]=\vec{0},\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{4.62}$$

bulunur ve semispray yerine yazılırsa

$$\left[\xi\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)-\frac{\delta L}{\delta x^j}\right]dx^j=\vec{0},\left[\xi\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^j}\right]\delta y^j=\vec{0} \tag{4.63}$$

elde edilir. $\alpha: I\subset R\rightarrow E$ eğrisi $\xi$'nin integral eğrileri olduğundan aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)-\frac{\delta L}{\delta x^i}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^i}=0 \tag{4.64}$$

(4.42)'de tanımlanan ifadeyi (4.64)'deki denklemde yerine yazarsak;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^i}+N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}=0,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\right)-N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^i}=0 \tag{4.65}$$

denklemleri bulunur. Burada $N_i^\alpha(x,y,t)$ $E$ manifoldu üzerinde $N$ lineer olmayan bağıntısının yerel katsayısıdır. Elde edilen bu denklemlere parakompleks yapılı rheonomic Euler-Lagrange denklemleri denir. Bu Euler-Lagrange denklemlerinin çözümü $E$ üzerindeki $\xi$ semisprayin yörüngeleridir. Sonuç olarak bu $(E,\phi_L,\xi)$ üçlüsünün, rheonomic mekanik sistem olduğu görülür (Frigiou, 2011).

### 4.6. Parakompleks Yapılı Rheonomic Hamiltonian Mekanik Sistemleri

$M$, $n-$boyutlu bir manifold, $M$' nin kotanjant demeti $T^*M$ dir. $E^*=T^*M\times R$ ise $(2n+1)-$boyutlu $E$'nin dual manifoldu olarak tanımlanır. Bu kısımda $E^*$üzerinde parakompleks yapılı rheonomic mekanik sistemlere ait Hamilton denklemleri elde edilecektir. $E^*$' ın dual bazları aşağıdaki gibidir.

$$\delta x^i=dx^i;\delta y^i=dy^i+N_j^i dx^j;\delta t=dt+N_i^0 dx^i$$

Burada $N$, $E$ manifoldu üzerinde lineer olmayan bağıntıdır.

$$J^*:\chi(E^*)\rightarrow\chi(E^*)$$

$$J^*(dx^i)=\delta y^i, J^*(\delta y^i)=dx^i, J^*(dt)=0 \qquad \textbf{(4.66)}$$

şeklindeki eşitlikler yardımıyla $J^{*2}=I$ eşitliği sağlanır. $J^*$, (4.66) tarafından verilen bir hemen hemen parakompleks yapı ve $w=\frac{1}{2}\left(x^i dx^i - y^i \delta y^i\right)$ olsun. Böylece $J^*(w)=\frac{1}{2}\left(x^i\delta y^i - y^i dx^i\right)$ eşitliğiyle hesaplanan $\lambda$ Liouville formu $E^*$' de 1- formdur. $\phi=-d\lambda$ 2-formu kapalı olduğu için $E^*$de parakosimplektik yapıdır.Farz edelim ki $H$ Hamilton enerjiye bağlı $X_H$ Hamilton vektör alanı (4.17) gibi, ayrıca $X_t$ de (4.45) deki gibi kurulsun. $E^*$' de $\phi$ kapalı 2 formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\phi=-d\lambda=\delta y^j\wedge dx^j \qquad \textbf{(4.67)}$$

$i_{X_t}\phi=\phi(X_t)$ den işleme devam edilirse

$$\phi\left(X_t\right)=-X^i\delta y^i+Y^i dx^i \qquad \textbf{(4.68)}$$

elde edilir. Diğer taraftan $H$ Hamilton fonksiyonun diferansiyeli (4.48)'deki gibi alalım. (4.48) ile (4.68) denklemlerini eşitlersek;

$X^i=-\dfrac{\partial H}{\partial y^i}, Y^i=\dfrac{\delta H}{\delta x^i}$ elde edilir. $X^i$ ve $Y^i$ leri (4.45) de yerine koyalım:

$$X_t=-\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^i}+\frac{\delta H}{\delta x^i}\frac{\partial}{\partial y^i} \qquad \textbf{(4.69)}$$

bulunur. (4.17) olarak kabul edilen Hamilton vektör alanı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$X_H=-\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^i}+\frac{\delta H}{\delta x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial}{\partial t}; \qquad \textbf{(4.70)}$$

$X_H$ Hamilton vektör alanının integral eğrisi $\alpha:I\subset R\rightarrow E^*$ kabul edilirse ve tanım gereği $X_H\left(\alpha(t)\right)=\dot{\alpha}(t)$ , $t\in I$ dir. Yerel koordinatlar $\alpha(t)=\left(x^i,y^i,t\right)$ olur.

integral eğrisi tanımı dikkate alınırsa parakompleks rheonomic Hamilton denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i} \ , \quad \frac{dy^i}{dt} = \frac{\delta H}{\delta x^i} \qquad \textbf{(4.71)}$$

(4.42)’de tanımlanan ifadeyi (4.71) ‘de yerine yazılırsa

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i} \, , \quad \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i} - N_i^{\alpha}(x, y, t)\frac{\partial H}{\partial y^{\alpha}} \qquad \textbf{(4.72)}$$

ile verilen parakompleks yapılı rheonomic Hamilton hareket denklemleri elde edilir.

# BÖLÜM 5
# SONUÇLAR VE ÖNERİLER

## 5.1. Rheonomic Dinamik Denklemlerinin Çözümü

Yapılan hesaplamalar sonucunda rheonomic mekanik sistemlere ait matematiksel modelleme ile uzayda hareket eden cisimlerin hareketlerinin yörüngelerini gösteren **(4.15), (4.28), (4.43), (4.53), (4.65) ve (4.72)** diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri sembolik hesaplama kullanılarak bulunabilir. Aşağıda denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü verilmiştir.

### 5.1.1. (4.15) Denkleminin çözümü

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^i}=0 \tag{5.1}$$

Euler-Lagrange hareket denkleminin sembolik hesaplama programı ile çözümü aşağıdaki gibidir.

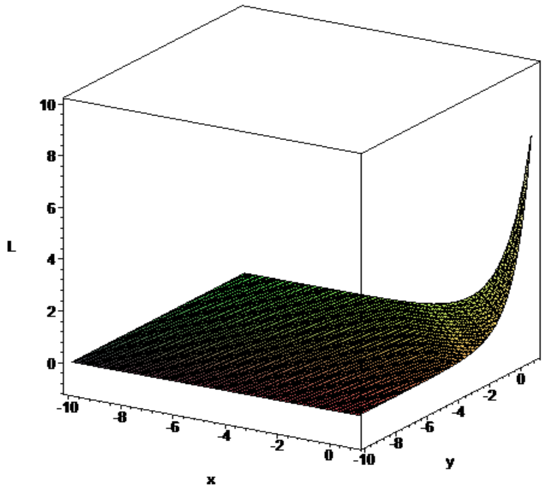
$$dif := \left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\mathrm{L}(x,y,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{L}(x,y,t)\right)=0\ ,\ \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)=y \tag{5.2}$$

$$cevap := (\mathrm{L}(x,y,t)=\_\mathrm{F1}(x)\,\_\mathrm{F2}(y)\,\_\mathrm{F3}(t))\ \&\mathrm{where}\ \left[\left\{\frac{d}{dx}\_\mathrm{F1}(x)=\_c_1\,\_\mathrm{F1}(x),\ \frac{d}{dy}\_\mathrm{F2}(y)=\_c_2\,\_\mathrm{F2}(y),\ \frac{d}{dt}\_\mathrm{F3}(t)=\frac{\_c_1\,\_\mathrm{F3}(t)}{\_c_2}\right\}\right] \tag{5.3}$$

Buradaki fonksiyonları aşağıdaki gibi alalım.

$$\_\mathrm{F1}(x):=\mathrm{e}^x\ ,\ \_\mathrm{F2}(y):=\mathrm{e}^y\ ,\ \_\mathrm{F3}(t):=\mathrm{e}^t \tag{5.4}$$

(5.4) de elde edilen çözümün $t$=0 için grafiği aşağıdaki gibidir.




**Şekil 5.1.**Euler-Lagrange Denklemi

### 5.1.2. (4.28) Denklem sisteminin çözümü

$$\frac{dx^i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y^i}\ ,\ \frac{dy^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x^i} \qquad \textbf{(5.5)}$$

Hamilton hareket denklemlerinin sembolik hesaplama ile çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$sistem1 := \left[-\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{H}(x,y,t)\right)=\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t),\ \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{H}(x,y,t)=\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right],\ \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)=y \qquad \textbf{(5.6)}$$

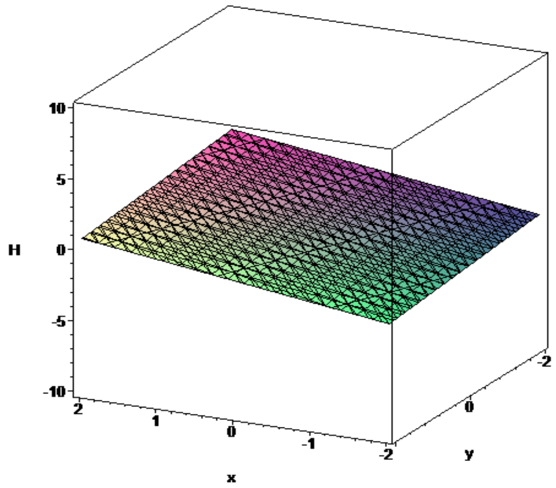
$\mathrm{x}(t) := t-\sin(t)$ ; $\mathrm{y}(t) := 1-\cos(t)$ olarak alınırsa;

$$cevap := \{\mathrm{H}(x,y,t)=(y-\_F1(t))\cos(t)+x\sin(t)-y+\_F1(t)\} \qquad \textbf{(5.7)}$$

elde edilir. Burada $\_F1(t) := t$ olarak alınırsa aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$\{\mathrm{H}(x,y,t)=(y-t)\cos(t)+x\sin(t)-y+t\} \qquad \textbf{(5.8)}$$

(5.8) de elde edilen çözümün $t=\pi/4$ için grafiği aşağıdaki gibidir.




**Şekil 5.2.**Hamilton Denklem Sistemi I

### 5.1.3. (4.43) denklem sisteminin çözümü

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)+\frac{\partial L}{\partial x^i}-N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}=0\,,\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial x^i})-N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha})+\frac{\partial L}{\partial y^i}=0. \quad \textbf{(5.9)}$$

Euler-Lagrange hareket denkleminin sembolik hesaplama programı ile çözümü aşağıdaki gibidir.

$$sistem1 := \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\mathrm{L1}(x,y,t)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{L1}(x,y,t)\right)-\mathrm{N}(x,y,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{L1}(x,y,t)\right)=0,\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\mathrm{L1}(x,y,t)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{L1}(x,y,t)\right)-\mathrm{N}(x,y,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\mathrm{L1}(x,y,t)\right)=0\right] \quad \textbf{(5.10)}$$

$$cevap := \{\mathrm{L1}(x,y,t)=\_\mathrm{F1}(t),\ \mathrm{N}(x,y,t)=\mathrm{N}(x,y,t)\}$$

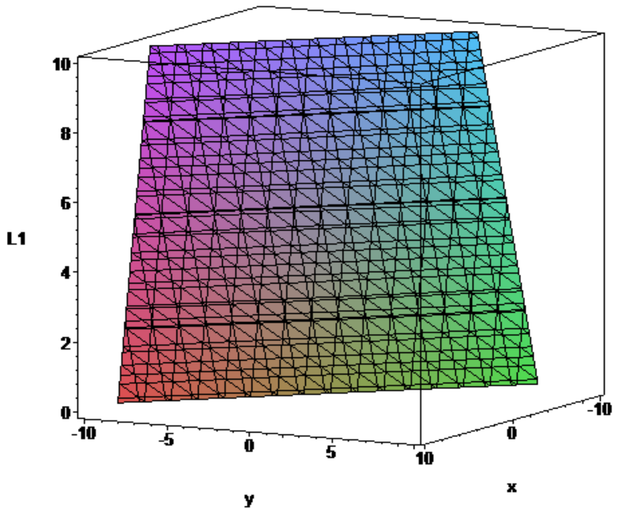
$$\left\{\mathrm{L1}(x,y,t)=-1+\mathbf{e}^t\,\_C2+\_\mathrm{F1}(x)\,\mathbf{e}^t\,\_C2+\_c_2\,y\,\mathbf{e}^t\,\_C2+\_C1\,\mathbf{e}^t\,\_C2,\right.$$
$$\left.\mathrm{N}(x,y,t)=\frac{\_c_2+\left(\frac{d}{dx}\_\mathrm{F1}(x)\right)}{\_c_2}\right\} \quad \textbf{(5.11)}$$

Burada _F1(x):=x+1; _*C1*:=1; _*C2*:=-1 olarak alınırsa aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$\{L1(x,y,t)=\_F1(t), N(x,y,t)=N(x,y,t)\},$$

$$\{L1(x,y,t)=-1-2\,\mathbf{e}^{t}-(x+1)\,\mathbf{e}^{t}-\_c_2\,y\,\mathbf{e}^{t}, N(x,y,t)=\frac{\_c_2+1}{\_c_2}\} \qquad \textbf{(5.12)}$$

(5.12) deki çözümün $t$=1 için grafiği aşağıdaki gibidir.




**Şekil 5.3.**Euler-Lagrange Denklem Sistemi I

### 5.1.4. (4.53) denklem sisteminin çözümü

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y^i}\ ,\ \frac{dy^i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}+N_i^{\alpha}(x,y,t)\frac{\partial H}{\partial y^{\alpha}} \qquad \textbf{(5.13)}$$

Hamilton hareket denklemlerinin sembolik hesaplama ile çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$sistem := \left[\frac{\partial}{\partial y}H(x,y,t)=\frac{d}{dt}x(t), -\left(\frac{\partial}{\partial x}H(x,y,t)\right)+N(x,y,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}H(x,y,t)\right)=\frac{d}{dt}y(t)\right] \qquad \textbf{(5.14)}$$

Burada N(x,y,$t$):=1; x($t$):=$t$-sin($t$); y($t$):=1-cos($t$) olarak alınırsa çözüm aşağıdaki gibi olur.

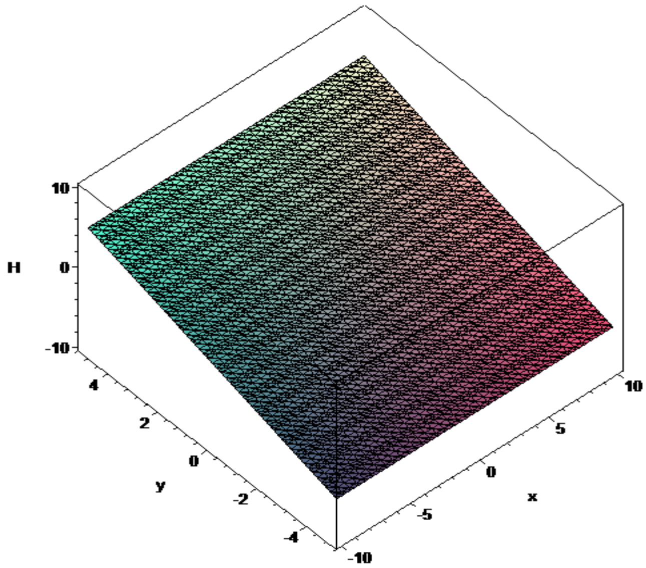
$$cevap :=$$

$$\{H(x,y,t)=\frac{((-y-x+\_F1(t))\sin(t)+(\cos(t)+1)(x-\_F1(t)))(-1+\cos(t))}{\sin(t)}\} \qquad \textbf{(5.15)}$$

Burada $\_F1(t) := t$ olarak alınırsa aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$\{H(x,y,t) = \frac{((-y-x+t)\sin(t)+(\cos(t)+1)(x-t))(-1+\cos(t))}{\sin(t)}\} \tag{5.16}$$

(5.16) da elde edilen çözümün $t=\pi/2$ için grafiği aşağıdaki gibidir.




**Şekil 5.4.**Hamilton Denklem Sistemi II

### 5.1.5. (4.65) denklem sisteminin çözümü

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^i}+N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}=0\,,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\right)-N_i^\alpha(x,y,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^i}=0. \tag{5.17}$$

Euler-Lagrange hareket denkleminin sembolik hesaplama programı ile çözümü aşağıdaki gibidir.

$$sistem2 := \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}L(x,y,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}L(x,y,t)\right)+N(x,y,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}L(x,y,t)\right)=0,\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}L(x,y,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial y}L(x,y,t)\right)-N(x,y,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}L(x,y,t)\right)=0\right] \tag{5.18}$$

$$cevap := \{L(x,y,t)=\_F1(t),\ N(x,y,t)=N(x,y,t)\}$$

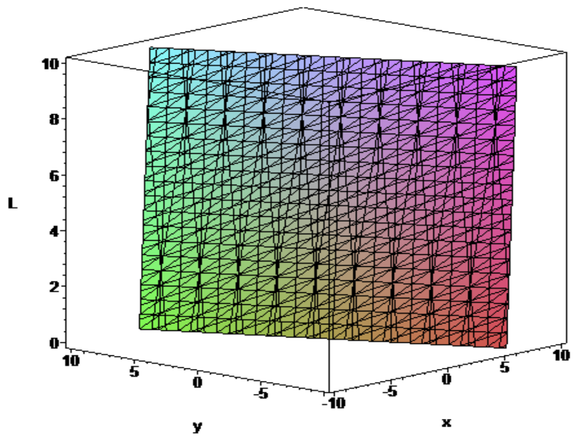
$$\left\{ L(x, y, t) = -1 + e^t \_C2 + \_F1(x)\, e^t \_C2 + \_c_2\, y\, e^t \_C2 + \_C1\, e^t \_C2, \right.$$

$$\left. N(x, y, t) = \frac{-\_c_2 + \left(\frac{d}{dx}\_F1(x)\right)}{\_c_2} \right\} \tag{5.19}$$

Burada $\_F1(x) := 2\ \_c_2\, x$ ; $\_C1 := -2$ ; $\_C2 := 2$ olarak alınırsa çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$\{L(x, y, t) = \_F1(t),\ N(x, y, t) = N(x, y, t)\},$$
$$\{L(x, y, t) = -1 - 2\, e^t + 4\ \_c_2\, x\, e^t + 2\ \_c_2\, y\, e^t,\ N(x, y, t) = 1\} \tag{5.20}$$

(5.20) deki çözümün $t$=1 için grafiği aşağıdaki gibi olur.




**Şekil 5.5.** Euler-Lagrange Denklem Sistemi II

### 5.1.6. (4.72) denklem sisteminin çözümü

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i}\ ,\quad \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i} - N_i^{\alpha}(x, y, t)\frac{\partial H}{\partial y^{\alpha}} \tag{5.21}$$

Hamilton hareket denklemlerinin sembolik hesaplama ile çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$sistem := \left[ -\left(\frac{\partial}{\partial y} H(x, y, t)\right) = \frac{d}{dt} x(t), \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, y, t)\right) - N(x, y, t)\left(\frac{\partial}{\partial y} H(x, y, t)\right) = \frac{d}{dt} y(t) \right] \tag{5.22}$$

Burada N(x,y,$t$):=1; x($t$):=$t$-sin($t$); y($t$):=1-cos($t$) olarak alınırsa çözüm aşağıdaki gibi olur.

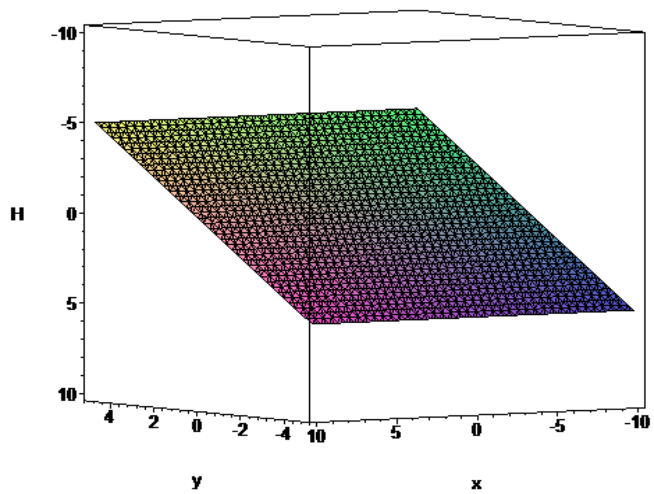
$$cevap := \{\mathrm{H}(x, y, t) = -\frac{((-x + \_\mathrm{F1}(t) - y)\sin(t) + (\cos(t) + 1)(x - \_\mathrm{F1}(t)))(\cos(t) - 1)}{\sin(t)}\}$$

**(5.23)**

Burada $\_\mathrm{F1}(t) := t$ olarak alınırsa aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$\{\mathrm{H}(x, y, t) = -\frac{((-x + t - y)\sin(t) + (\cos(t) + 1)(x - t))(\cos(t) - 1)}{\sin(t)}\} \qquad \textbf{(5.24)}$$

(5.24) deki çözümün $t$=π/2 için grafiği aşağıdaki gibi olur.




**Şekil 5.6.** Hamilton Denklem Sistemi III

Mekanik sistemlerle ilgili ileride yapılacak çalışmalar için rheonomic Euler – Lagrange ve rheonomic Hamilton denklemleri; fiziğin kollarından olan klasik mekanik ve kuantumun ilgilendiği elektrik, manyetik ve yerçekimi alanları ile ilgili problemleri çözüme kavuşturmak için önerilmektedir.

Lagrangian ve Hamiltonian modelleri çok yaygın, önemli ve basit bir şekilde kullanılan araç olarak ortaya çıkar çünkü bu modeller rheonomic mekanik sistemler modelini tanımlamak için basit metotlar oluşturmaktadır.

Rheonomic mekanik sistemler zaman içeren açık değişkenler içerdiği için elde edilen Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri de bu uzaydaki cisimlerin doğrusal yörüngelerinin zamana bağlı olduğunu açıklayan denklemleri bulmamızı sağlamıştır.

Elde edilmiş olan denklemler farklı değerler ve kabuller uygulanarak matematik için geliştirilmiş özel programlar ile çözülebilir ve yorumlanabilir hale gelmiştir.

Daha fazla araştırma yaparak fiziğin elektrik, manyetik ve kuantumun yerçekimi alanı ve klasik mekaniğin problemleri ile uğraşan bilim insanları Euler-Lagrange ve Hamilton mekanik denklemlerinin yeni benzerlerini elde edilebilirler.

## KAYNAKLAR


Çağlar F.Ö., 2011. Kompleks Uzay Formlarında Mekanik Sistemler, Yüksek Lisans Tezi. Pamukkale Üniversitesi, Denizli.

Çelik, O., 2014, Finsler Manifoldları Üzerindeki Mekanik Sistemlerin Analizi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniv., Fen Bilimleri Enst. YüksekLisans Tezi.

Civelek Ş., 1996. The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations to The Extended Vector Bundles. Mathematical& Computational Applications, Vol.1, No.1: 21-28.

Crampin M., 1981. On the Differential Geometry of Euler-Lagrange Equations and The Inverse Problem of Lagrangian Dynamics, J. Phys. A-Math. and Gen., Vol:14, Issue: 10, 2567–2575.

De Leon M. ve Rodrigues P.R., 1986. Almost Tangent Geometry and Higher Order Mechanical Systems. Differantial Gometry and Its Applications, Proceeding of the Conference, Brno, Czechoslovakia.

De Leon M. ve Rodrigues P.R., 1989. Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics, Elsevier Science Publishers, B.V., U.S.A. 516 p.

Frigiou,C., Hedrih,K.(S.), Birsan,I.,G., Lagrangian Geometrical Model of The Rheonomic Mechanical Systems, World Academy of Science,Engineering and Technology,Vol:49 2011-01-23.

Hacısalihoğlu H., 2003, Diferansiyel Geometri I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 3. Baskı.

Hacısalihoğlu H., 2003, Diferansiyel Geometir II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 4. Baskı.

Kasap, Z., 2014, Weyl Manifoldlar Üzerinde Euler–Lagrange ve Hamilton Hareket Denklemlerinin Analizi, Çanakkale Onsekiz Mart  Üniv., Fen Bil. Enst. Doktora Tezi.

Koca K., 2001, Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara.

Miron,R., Kawaguchi, T., Kawaguchi,H., On The Lagrangian Rheonomic Mechanical Systems,Romanian Academy,Vol:10,Number 1/2009,pp. 000-000.

Miron,R., Hrimiuc,D., Shimada,H., Sabau,S.,V., 2001, The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces,Hingham,MA,USA:Kluwer Academic Publishers,P.L.7.

Miron R. ve Anastasiei M., 1997, Vector Bundles. Lagrange spaces. Applications to the Theory of Relativity, Balkan Press, Bucuresti.

Mucuk O., 2010, Topoloji ve Kategori, Nobel Yayınevi Geliştirilmiş 2. Basım, Ankara, s 462.

Panza M., 2003, The Origins of Analiytic Mechanics in the 18th Century, A History of Analysi, H., N. , Jankhe (Ed.), 137–153.

Rızaoğlu E. ve Sünel N., 2008, Klasik Mekanik, Okutman Yayıncılık, Ankara.

Struik, D. J. , 2002 Kısa Matematik Tarihi, Doruk Yayınevi, 2. Basım, İstanbul.

Tekkoyun M., Görgülü A., 2006, Higher Order Complex Lagrangian and Hamiltonian Mechanics Systems, Physics Letters A, Vol.357: 261–269.

Tekkoyun M., 2006a, Para Hamiltonian Equations with Poisson Brackets, Çankaya Ünv. Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, Journal of Arts and Sciences, Sayı:6: 197-204.

Tekkoyun M., 2006b, A Note On Constrained Complex Hamiltonian Mechanics, Differential Geometry-Dynamical Systems (DGDS), Vol.8, No.1: 262–267.

Tekkoyun M., 2009a, Lifts of Time Dependent Complex Hamiltonian Mechanical Systems, http://arxiv.org/abs/0903.0222.

Wikipedia(a), http://en.wikipedia.org/wiki/Rheonomous.

Wikipedia(b), http://tr.wikipedia.org/wiki/Holomorf_fonksiyon.

Wikipedia(c), http://en.wikipedia.org/wiki/Tensorfield.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ekrem AKBUGA
Doğum Yeri: Mersin
Doğum Tarihi: 21/02/1987

### EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi:

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010.

Yüksek Lisans Öğrenimi:

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2014.

Bildiği Yabancı Diller:
İngilizce

### BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer
b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

### İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:
Çanakkale Gençlik Hizmetleri ve Spor İl Müdürlüğü, Bilgisayar İşletmeni, 2013.

### İLETİŞİM

E-posta Adresi: ekrem.akbuga33@gmail.com