YAKIN HALKALARDA TÜREVLER ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Zeliha BEDİR
(201392170022)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

SİVAS
KASIM 2017

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN HALKALARDA TÜREVLER ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Zeliha BEDİR
(201392170022)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

SİVAS
KASIM 2017

Zeliha BEDİR'in hazırladığı ve **"YAKIN HALKALARDA TÜREVLER ÜZERİNE"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	**Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI** Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Hasret DURNA** CumhuriyetÜniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Yılmaz ÇEVEN** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Neşe ÖMÜR** Kocaeli Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK** Adıyaman Üniversitesi	....

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İdris ZORLUTUNA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CÜBAP) Komisyonu tarafından F- 496 Nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

27.11.2017

Zeliha BEDİR

TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren ve tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI na, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ile idari personeline ve hayatımın her anında en büyük destekçim olan değerli aileme çok teşekkür ederim.

ÖZET

YAKIN HALKALARDA TÜREVLER ÜZERİNE

Zeliha BEDİR

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

2017, 47+x sayfa

Çarpımsal türevli bir asal yakın halkanın değişmeli halka olma koşullarını araştıran bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusuyla ilgili genel bilgilerden bahsedilmiş, ikinci bölümde ise diğer bölümlerde kullanılacak olan referans teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, N 3–asal yakın halkasının sıfırdan farklı bir d çarpımsal türevi için $d(N) \subseteq Z$ koşulu ispatlanmıştır. Ayrıca, N 3–asal yakın halkası üzerinde homomorfizma veya anti-homomorfizma olan bir d çarpımsal türevinin sıfır olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise N 3–asal yakın halka, f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olmak üzere her $x, y \in N$ için

$i)$ $f([x,y]) = \pm\tau([x,y])$

$ii)$ $f([x,y]) = \pm\tau(xoy)$

koşulları incelenmiştir. Ek olarak bu koşullar m, n birer doğal sayı olmak üzere

$i)$ $f([x,y]) = \pm\tau(x^m[x,y]x^n)$

$ii)$ $f([x,y]) = \pm\tau(x^m(xoy)x^n)$

biçiminde genelleştirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Asal Yakın Halka, Türev, Çarpımsal Türev, Çarpımsal Genelleştirilmiş Türev.

ABSTRACT

ON DERIVATIONS OF NEAR RINGS

Zeliha BEDİR

PhD Thesis
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI
2017, 47+x pages

This thesis which investigates the conditions of being a commutative ring of prime near rings with multiplicative derivation, is composed of four parts.

In the first part, the general information about the thesis is mentioned and in the second part, reference theorems to be used in the other parts are given without proof.

In the third part, the condition $d(N) \subseteq Z$ about commutativity is examined such that N is a $3-$prime near ring and d is a nonzero multiplicative derivation. Further, it is proved that if d acts as a homomorphism or anti-homomorphism on N, then $d = 0$.

In the fourth part, it is shown that if N $3-$prime near ring with multiplicative generalized $(\sigma, \tau)-$derivation satisfies the following conditions for all $x, y \in N$

$i)$ $f([x,y]) = \pm\tau([x,y])$

$ii)$ $f([x,y]) = \pm\tau(xoy)$,

then N is a commutative ring. In addition, these conditions are generalized as follows for all $m, n \in \mathbb{N}$

$i)$ $f([x,y]) = \pm\tau(x^m[x,y]x^n)$

$ii)$ $f([x,y]) = \pm\tau(x^m(xoy)x^n)$.

Key Words: Prime Near Rings, Derivation, Multiplicative Derivation, Multiplicative Generalized Derivation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\in$	:	Elemanı
$\notin$	:	Elemanı değil
$\forall$	:	Her
$\subseteq$	:	Alt küme veya eşit
$=$	:	Eşit
$\neq$	:	Eşit değil
$-$	:	Fark
$[x, y]$	:	x, y elemanlarının komutatör çarpımı
xoy	:	x, y elemanlarının Jordan çarpımı
$\emptyset$	:	Boş küme
(0)	:	Sıfır kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi

GİRİŞ

Toplamsal dönüşümler ile halkalar yapısı yakından ilişkilidir. Bir halkanın hangi koşullar altında değişmeli halka olacağı pek çok araştırmacının problemi olmuştur. Bu konular literatürde 1957 yılında E.C. Posner tarafından araştırılmıştır. E.C. Posner çalışmasında asal halkalar üzerinde türev tanımını vermiştir. Bunun yanında bazı koşullar altında bir halkanın değişmeli olmasını türev kavramı yardımıyla incelemiştir. Halkalarda verilen türev tanımı şu şekildedir:

"R bir halka, $d: R \to R$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$d(x + y) = d(x)y + xd(y)$

$d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanıyor ise d ye R halkasının bir türevi denir."

Bu çalışma konuyla ilgili bir ön kaynak olmuştur. E.C. Posner dan sonra pek çok araştırmacı türev yardımı ile çeşitli koşullar altında asal veya yarıasal halkaların değişmeliliğini incelemiştir. Sonraki yıllarda asal halkalarda farklı türev kavramları tanımlanmış ve bu türevlerin sağladığı özellikler incelenmiştir. Bu tanımlardan biri olan çarpımsal türev kavramı ilk kez 1969 yılında W. S. Martindale tarafından yapılan bir çalışmadan esinlenilerek, 1991 yılında M. N. Daif tarafından tanımlanmıştır. Bu tanım şu şekilde verilmiştir:

"R bir halka, $d: R \to R$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulu sağlanıyor ise d ye R halkasının bir çarpımsal türevi denir."

Çarpımsal türevler, türev tanımındaki toplamsal olma koşulu kaldırılarak elde edildiği için yeni ve daha genel bir türev tanımıdır.

Öte yandan 1905 yılında L.E. Dickson tarafından yapılan bir çalışma yakın halkalar konusuna giriş niteliğindedir. Bu çalışmada L.E. Dickson tek yanlı dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını göstererek, bu yeni yapıya yakın cisim adını vermiştir. Yakın halka teorisi üzerine çalışan tüm araştırmacılar tarafından, 1977 yılında ilk baskısı yapılan ve 1983 yılında yenilenen Günter Pilz in “Near-Rings” isimli kitabı temel kaynak olarak kabul edilmiştir. Bu kitapta yer alan yakın halka tanımı şu şekildedir:

“$N \neq \emptyset$ bir küme, N kümesi üzerinde $+$ ve $.$ ikili işlemleri tanımlı olsun. Eğer N kümesi

i) $(N,+)$ grup (değişmeli olmak zorunda değil)

ii) $\forall a,b,c \in N$ için $(a.b).c = a.(b.c)$

iii) $\forall a,b,c \in N$ için $a(b+c) = ab + ac$ $((a+b)c = ac + bc)$

koşullarını sağlıyorsa $(N,+,.)$ ya bir sol (sağ) yakın halka denir.”

Bu tanımdan da görüldüğü gibi yakın halkalar halkaların bir genellemesidir. 1987 yılında H. E. Bell ve G. Mason tarafından hazırlanan makalede ilk kez yakın halkalar için türev tanımı verilerek literatüre yeni bir çalışma alanı kazandırılmıştır. Bu çalışmadan sonra halkalar için değişmeli olma konusunda ispatlanan teoremlerin bazıları yakın halkalar için incelenmiştir. Burada elde edilen sonuçlar için iki temel hedef vardır. Bunlar yakın halkanın toplamaya ve çarpmaya göre değişmeli olduğunun ispatlanmasıdır. Bu durumda yakın halka bir halka olur. Böylece türevler konusunda yapılabilecek en iyi genelleştirmelerden biri yakın halkalarda yapılan ispatlardır.

1978 yılında I. N. Herstein tarafından R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d(R) \subseteq Z$ koşulu sağlanıyorsa bu durumda R nin değişmeli bir halka olduğu ispatlanmıştır. 1987 yılında H. E. Bell ve G. Mason bu teoremi d bir türev iken yakın halkalar için incelemişlerdir.

1989 yılında H. E. Bell and L. C. Kappe ise bir yarıasal R halkası veya R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali üzerinde tanımlı olan d türevinin, homomorfizma veya anti-homomorfizma iken bu türevin sıfır olduğunu ispatlamışlardır. Bu teorem sağ yakın halkalar için 1997 yılında N. Argaç tarafından genelleştirilmiştir.

Yine 1992 yılında M. N. Daif ve H. E. Bell tarafından,

"d, R yarıasal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa I ideali R halkasının merkezindedir.

i) $d([x,y]) = \pm[x,y]$, her $x,y \in N$
ii) $x,y \in N$ için $d([x,y]) = [x,y]$ veya $d([x,y]) = -[x,y]$ "

teoremi ispatlanmıştır.

Bu teorem yakın halkalar için A. Boua ve L. Oukhtite tarafından 2011 yılında incelenmiş ve yine 2011 yılında Y. Shang tarafından $k,l \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$d([x,y]) = \pm x^k[x,y]x^l$

biçiminde genelleştirilmiştir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için yakın halkalar teorisi ile ilgili bazı genel tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılan bazı lemma ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise çarpımsal türevli asal halkalar üzerinde yukarıda kısaca özetlenen teoremlerle ilgili daha genel sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca daha önce bilinen değişmeli olma ile ilgili bazı özdeşlikler çarpımsal türevler için incelenmiştir.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu tanım ve teoremler için yakın halkalar konusu üzerine temel kaynak niteliğindeki Günter Pilz'e ait olan, ilk baskısı 1977 yılında ve yenilenmiş baskısı 1983 yılında çıkan Near-Rings isimli kitaptan faydalanılmıştır.

Her halka bir yakın halkadır. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Çünkü halkalar birinci işleme göre değişme özelliğini sağlıyorken, yakın halkalar için bu zorunlu değildir ve halkalarda ikinci işlemin birinci işlem üzerine iki yanlı dağılma özelliği var iken yakın halkalarda bu özelliğin tek yönlü sağlanması yeterlidir. Bu nedenle yakın halkalar aslında genelleştirilmiş halkalardır.

Yakın halkalar aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 1.1: $N \neq \emptyset$ bir küme, N kümesi üzerinde $+$ ve $.$ ikili işlemleri tanımlı olsun. Eğer N kümesi

i) $(N, +)$ grup (değişmeli olmak zorunda değil)

ii) $\forall a, b, c \in N$ için $(a.b).c = a.(b.c)$

iii) $\forall a, b, c \in N$ için $a(b + c) = ab + ac$ $((\,a + b)c = ac + bc)$

koşullarını sağlıyorsa $(N, +, .)$ ya bir sol (sağ) yakın halka denir."

Bazı yakın halka örnekleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 1.2: $(\Gamma, +)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" bu grubun etkisiz elemanı olmak olsun ve

$M(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \Gamma | f \text{ bir fonksiyon }\}$

kümesi tanımlansın. $M(\Gamma)$ kümesi fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir sağ yakın halkadır.

Örnek 1.3: $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" bu grubun etkisiz elemanı olmak üzere fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdaki kümeler birer sağ yakın halkadır.

a) $M_0(\Gamma) = \{f \in M(\Gamma) \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma\}$

b) $M_c(\Gamma) = \{f \in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit}\}$

Örnek 1.4: $(N,+)$ bir grup ve bu grup üzerinde ikinci işlem $\forall\, a,b \in N$ için

$$ab = \begin{cases} a, & b \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda N bir sağ yakın halkadır. Bu yakın halka literatürde aşikar yakın halka olarak tanımlanır.

Örnek 1.5: $M = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z},\ \forall i,j = 1,2\} = \mathbb{Z}_{2\times 2}$ kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen toplama işlemi ve

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlı çarpma işlemi ile birlikte bir sol yakın halkadır.

Örnek 1.6: Her grup için bir yakın halka elde edilebilir. Gerçekten eğer $(N,+)$ grubu üzerinde ikinci işlem $\forall x,y \in N$ için $xy = 0$ biçiminde tanımlanırsa $(N,+,.)$ bir sağ yakın halkadır. Benzer şekilde eğer ikinci işlem $\forall x,y \in N$ için $xy = x$ biçiminde ise yine $(N,+,.)$ bir sağ yakın halkadır.

Örnek 1.7: G bir değişmeli grup ve $End(G)$, G nin bütün endomorfizmlerinin kümesi olmak üzere $End(G)$ kümesi fonksiyonlarda bilinen toplama ve bileşke işlemleri altında bir sağ yakın halkadır.

Önerme 1.8: N bir sol yakın halka olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $\forall n \in N$ için $n0 = 0$ dır.

b) $\forall n,n' \in N$ için $n(-n') = -nn'$ dir.

İspat: a) $\forall n \in N$ için

$$n0 = n(0+0) = n0 + n0$$

dır. Buradan

$$n0 = 0$$

elde edilir.

b) $\forall n, n' \in N$ için

$$0 = n0 = n(n' + (-n')) = nn' + n(-n')$$

dır. Buradan

$$-nn' = n(-n')$$

elde edilir.

Not: Bir N sol yakın halkasında $\forall n, n' \in N$ için $0\mathrm{n} = 0$ ve $(-n)n' = -nn'$ olmak zorunda değildir.

Tanım 1.9: N bir sol yakın halka olsun.

a) $N_0 = \{n \in N \mid 0\mathrm{n} = 0\}$ kümesine N yakın halkasının sıfır simetrik kısmı denir.

b) $N_c = \{n \in N \mid 0\mathrm{n} = \mathrm{n}\} = \{n \in N \mid \forall \mathrm{n}' \in N \text{ için } n'n = n\}$ kümesine N yakın halkasının sabit kısmı denir.

N_0 bir yakın halka olup $N = N_0$ ise N yakın halkasına sıfır simetrik yakın halka denir. Benzer şekilde $N = N_c$ ise N yakın halkasına sabit yakın halka denir.

Teorem 1.10: Bir N yakın halkası için $N = N_0 + N_c$ dir.

İspat: $n \in N$ için

$$0[n - (0n)] = 0[n + (-0n)] = 0[n + 0(-n)] = 0n + 0\big(0(-n)\big)$$

$$= 0n + 0(-n) = 0n + (-0n) = 0$$

olduğundan

$$n - (0n) \in N_0$$

elde edilir. Aynı zamanda $\forall k \in N$ için

$k(0n) = (k0)n = 0n$

olduğundan $0n \in N_c$ dir. O halde

$n = [n - (0n)] + (0n)$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 1.11: $(N, +, .)$ bir yakın halka olsun.

a) Eğer $d \in N$ ve $\forall a, b \in N$ için $(a + b)d = ad + bd$ ise $d \in N$ elemanına dağılmalı eleman denir. N yakın halkasının tüm dağılmalı elemanlarının kümesi N_d ile gösterilir. Eğer $N = N_d$ ise N ye dağılmalı yakın halka denir.

b) Eğer $(N, +)$ değişmeli grup ise N ye abelyan yakın halka, $(N, .)$ değişmeli ise N ye komutatif yakın halka, $(N, .)$ birimli ise N ye birimli yakın halka denir. Eğer $(N - \{0\}, .)$ bir grup ise N ye yakın cisim denir.

Tanım 1.12: N bir yakın halka ve $(M, +)$, $(N, +)$ kümesinin bir alt grubu olsun. Eğer $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \in M$ sağlanıyorsa, M ye N nin bir alt yakın halkası denir.

Örnek 1.13: N_0 ve N_c kümeleri N yakın halkasının alt yakın halkasıdır.

Tanım 1.14: N ve N' iki yakın halka olsun. Bir $h: N \to N'$ dönüşümü her

$x, y \in N$ için

$h(x + y) = h(x) + h(y)$

ve

$h(xy) = h(x)h(y)$

koşullarını sağlıyorsa h dönüşümüne bir yakın halka homomorfizmi denir.

Bu tanımda olduğu gibi monomorfizm, epimorfizm ve otomorfizm tanımları da halkalar teorisinde var olan tanımlara benzer olarak yapılır.

Tanım 1.15: N ve N' iki yakın halka ve $h: N \to N'$ bir yakın halka homomorfizmi olsun.

$çekh = \{n \in N \,|\, \mathrm{h(n)} = 0_{N'}\}$

kümesine h homomorfizminin çekirdeği,

$imh = \{n' \in N' \,|\, n' = h(n), \exists n \in N\}$

kümesine h homomorfizminin görüntüsü denir.

Halkalardaki modül kavramının yakın halkalara taşınması ile elde edilmiş olan $N-$grup yani N üzerinde yakın modül kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.16: $(\Gamma, +)$ etkisiz elemanı 0 olan bir grup ve N bir yakın halka olsun.

$\mu: N \times \Gamma \to \Gamma, \mu(n, \gamma) = n\gamma$

dönüşümü tanımlansın. $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için

$i)$ $(x + y)\gamma = x\gamma + y\gamma$

$ii)$ $(xy)\gamma = x(y\gamma)$

koşulları sağlanıyorsa (Γ, μ) ikilisine bir $N-$grup yani N üzerinde bir yakın modül denir. Kısaca N^{Γ} ile gösterilir.

Tanım 1.17: N bir yakın halka ve Γ bir $N-$grup olsun. Γ nın $N\Delta \subseteq \Delta$ şartını sağlayan bir Δ alt grubuna, Γ nın bir N-alt grubu denir ve $\Delta \leq_N \Gamma$ ile gösterilir.

Tanım 1.18: N bir yakın halka ve I, N nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda eğer

i. $IN \subseteq I$
ii. $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için $x(y + i) - xy \in I$

koşulları sağlanıyorsa I ya N yakın halkasının bir ideali denir. $I \trianglerighteq N$ ile gösterilir.

Eğer sadece (i) özelliği sağlanıyor ise I ya N nin bir sağ ideali denir ve $I \trianglerighteq_r N$ ile gösterilir. Sadece (ii) özelliği sağlanıyor ise I ya N nin bir sol ideali denir ve $I \trianglerighteq_l N$ ile gösterilir.

$\{0\}$ ve N, N yakın halkasının idealleridir. Bu ideallere N yakın halkasının aşikar idealleri denir.

Teorem 1.19: R bir halka, A, B ve P R halkasının idealleri olmak üzere aşağıdakiler denktir:

a) P, R nin asal idealidir.

b) $AB \subseteq P$ ise $A \subseteq P$ veya $B \subseteq$ P dir.

c) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

Not: Yakın halkalar, halkalardan farklı olarak ilk işleme göre değişmeli olması gerekmeyen ve tek taraflı dağılma özelliğinin sağlandığı, genelleştirilmiş halkalardır. Bu iki nedenden dolayı halkalarda verilen asal ideal tanımı yakın halkalarda farklı türlerde karşımıza çıkmaktadır. Bu asallık türleri halkalarda denk olduğu halde yakın halkalarda genelde denk değildir.

Tanım 1.20: N bir yakın halka ve $P \lhd N$ olmak üzere

a) $\forall A, B \lhd N$ için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ ise P ye $0-$asal ideal,

b) $\forall A, B \lhd_l N$ için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ ise P ye $1-$asal ideal,

c) $\forall A, B \leq_N N$ için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ ise P ye $2-$asal ideal,

d) $a, b \in N$ için $aNb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ ise P ye $3-$asal ideal,

e) $a, b \in N$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ ise P ye $c-$(tam) asal ideal,

f) $a, x, y \in N$ için $anx - any \in P$ olacak şekildeki $\forall n \in N$ için $a \in P$ veya

$x - y \in P$ ise P ye $e-$asal ideal denir.

Tanım 1.21: Eğer N yakın halkasının sıfır ideali $v = 0,1,2,3, c, e$ olmak üzere $v-$asal ideal ise N yakın halkasına bir $v-$asal halka denir.

Tanım 1.22: N bir yakın halka olsun. Eğer N nin sıfır ideali $3-$asal ise N ye bir $3-$asal yakın halka denir.

Tanım 1.23: N bir yakın halka olsun. Eğer $\forall a, b \in N$ için $aNb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyor ise N yakın halkasına $3-$asal yakın halka denir.

Tanım 1.24: N bir yakın halka ve $d: N \to N$ bir dönüşüm olsun. Eğer her

$x, y \in N$ için

$d(x+y) = d(x) + d(y)$

ve

$d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanıyor ise d ye bir türev denir.

Tanım 1.25: N bir yakın halka ve $d: N \to N$ bir dönüşüm olsun. Eğer her

$x, y \in N$ için

$d(xy) = xd(y) + d(x)y$

koşulu sağlanıyor ise d ye bir çarpımsal türev denir.

Örnek 1.26: S sıfır simetrik bir sol yakın halka olsun. Buna göre

$$N = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{pmatrix} \right) \middle| \, x, y, z, 0 \in S \right\}$$

kümesi matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir sol yakın halkadır. Ayrıca $d: N \to N$ olmak üzere

$$d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm N sol yakın halkası üzerinde bir çarpımsal türevdir.

Tanım 1.27: N bir yakın halka ve $\sigma, \tau, d: N \to N$ dönüşümler olsun. Eğer her $x, y \in N$ için

$d(xy) = \sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y)$

koşulu sağlanıyorsa d ye N yakın halkasında bir çarpımsal (σ, τ)-türev denir.

Tanım 1.28: N bir yakın halka ve $d: N \rightarrow N$ bir çarpımsal türev olsun. Eğer $f: N \rightarrow N$ dönüşümü her $x, y \in N$ için

$f(xy) = f(x)y + xd(y)$

koşulunu sağlıyor ise f ye d ile belirlenmiş bir sağ çarpımsal genelleştirilmiş türev denir. Eğer her $x, y \in N$ için

$f(xy) = d(x)y + xf(y)$

koşulu sağlanıyor ise f ye d ile belirlenmiş bir sol çarpımsal genelleştirilmiş türev denir.

Eğer f dönüşümü hem sağ, hem sol çarpımsal genelleştirilmiş türev ise f dönüşümüne N yakın halkası üzerinde bir çarpımsal genelleştirilmiş türev denir.

Tanım 1.29: N bir yakın halka ve $\sigma, \tau, f: N \rightarrow N$ dönüşümler olsun. $d: N \rightarrow N$ bir çarpımsal (σ, τ) $-$türev olmak üzere eğer her $x, y \in N$ için

$f(xy) = f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$

koşulu sağlanıyor ise f ye d ile belirlenmiş bir sağ çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türev denir. Eğer her $x, y \in N$ için

$f(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)f(y)$

koşulu sağlanıyor ise f ye d ile belirlenmiş bir sol çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türev denir.

Eğer f dönüşümü hem sağ, hem sol çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türev ise f dönüşümüne N yakın halkası üzerinde bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türev denir.

Tanım 1.30: $(N, +, .)$ bir yakın halka olsun. $\forall x, y \in N$ için

$[x, y] = xy - yx$

ifadesine x ve y elemanlarının komütatör çarpımı adı verilir. Ayrıca

$xoy = xy + yx$

ifadesine x ve y elemanlarının Jordan çarpımı adı verilir.

Tanım 1.31: $(N,+,.)$ bir yakın halka olsun. Halkanın tüm elemanları ile toplamsal değişmeli olan elemanların kümesine toplamsal merkez, çarpımsal değişmeli olan elemanların kümesine de çarpımsal merkez adı verilir. Bir yakın halkanın çarpımsal merkezi Z ile gösterilir.

Not: Bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe yakın halka kavramı ile sol yakın halka ifade edilecektir.

2. TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde kullanılacak olan bazı teoremler verilecektir.

Lemma 2.1: (H. Bell, G. Mason, 1987, Lemma 3) N, 3-asal yakın halka olsun.

i) Eğer $z \in Z \setminus \{0\}$ ise bu durumda z bir sıfır bölen değildir.

ii) Eğer $0 \neq z \in Z$ için $z + z \in Z$ ise bu durumda $(N, +)$ değişmelidir.

iii) Eğer herhangi $z \in Z \setminus \{0\}$ ve $x \in N$ için $xz \in Z$ ya da $zx \in Z$ ise bu durumda $x \in Z$ olur.

Lemma 2.2: (H. Bell, G. Mason, 1987, Lemma 1.5) N, 3-asal yakın halka olsun. Eğer Z, N yakın halkasının sıfırdan farklı bir yarı idealini kapsıyorsa bu durumda N değişmeli bir halkadır.

Lemma 2.3: (A. M. Kamal, K. H. Al-Shaalan, 2013, Lemma 2.1) Bir N yakın halkasında bir çarpımsal türev var ise bu durumda N yakın halkası sıfır simetriktir.

İspat: N sıfır simetrik bir yakın halka olsun. Bu durumda sıfır dönüşümü N üzerinde bir türevdir.

Tersine kabul edelim ki N yakın halkası üzerinde bir d çarpımsal türevi var olsun. Herhangi bir yakın halka $N = N_0 + N_c$ toplamı olarak ifade edilebilir. Eğer $z \in N$ bir sabit eleman ise $\forall k \in N$ için $kz = z$ olduğundan d nin bir çarpımsal türev olduğu kullanılarak

$$d(z) = d(z^2) = zd(z) + d(z)z = zd(z) + z$$

dir. Buradan

$d(z) = zd(z) + z$

elde edilir.

Ayrıca $\forall r \in N$ için

$r(zd(z) + z) = rzd(z) + rz = zd(z) + z$

olur. Böylece $zd(z) + z \in N_c$ yani $d(z) \in N_c$ elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte bu ifade kullanılırsa

$d(z) = d(z) + z$

bulunur. Bu durumda $z = 0$ olur. O halde $N = N_0$ dır. Böylece N yakın halkası sıfır simetriktir.

3. ÇARPIMSAL TÜREVLİ ASAL YAKIN HALKALAR

Literatürde çarpımsal dönüşüm kavramı ilk kez 1969 yılında W. S. III Martindale tarafından tanımlanmıştır. Bu kavramdan yola çıkarak M. N Daif., 1991 yılında yayınlanan çalışmasında halkalar üzerinde çarpımsal türev tanımını yaparak, çarpımsal türevli halkaların değişmeliliğini incelemiştir. H. Goldman and P. Semrl ise çarpımsal türev kavramını örneklendirerek açıklamışlardır. Bu çalışmalardan sonra türevli asal ve yarıasal halkalar için elde edilmiş sonuçlar çarpımsal türevler için incelenmiştir.

Yakın halkalar üzerinde türev tanımı ilk kez 1987 yılında H. Bell and G. Mason tarafından yapılmıştır ve daha önce asal halkalar için ele alınan bazı değişmelilik koşulları asal yakın halkalar için ispatlanmıştır.

1978 yılında I. N. Herstein tarafından ispatlanan karakteristiği ikiden farklı bir R asal halkasının ve sıfırdan farklı bir d türevi için $d(R) \subseteq Z$ iken R nin değişmeli bir halka olduğu teoremi, yakın halkalar üzerinde türevler teorisinin gelişimiyle beraber H. Bell and G. Mason tarafından öncelikle yakın halkalar ve daha sonra yakın halkanın yarı grup idealleri için incelenmiştir.

Yine 1989 yılında H. E. Bell and L. C. Kappe nin bir yarıasal R halkası veya R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali üzerinde tanımlı olan d türevinin, homomorfizma veya anti-homomorfizma iken bu türevin sıfır olduğunu ispatladıkları teorem, 1997 yılında N. Argaç tarafından sağ yakın halkalar için ele alınmıştır.

Bu bölümde yukarıda bahsedilen teoremler N 3–asal yakın halkasının sıfırdan farklı bir d çarpımsal türevi için ispatlanacaktır. Ayrıca türevli halkalarda değişmeli olma koşulları ile ilgili bazı temel özdeşliklerin çarpımsal türevli yakın halkalar için sağlandığı gösterilecektir.

Lemma 3.1: N bir 3-asal yakın halka ve $d: N \to N$ bir çarpımsal türev olsun. Her $x, y, z \in N$ için

$$(xd(y) + d(x)y)z = xd(y)z + d(x)yz$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Her $x, y, z \in N$ için $d(xyz)$ çarpımsal türevi iki farklı yol kullanılarak hesaplanırsa

$$d((xy)z) = xyd(z) + d(xy)z$$

ve

$$d((x(yz)) = xd(yz) + d(x)yz = x(yd(z) + d(y)z) + d(x)yz = xyd(z)$$
$$+xd(y)z + d(x)yz$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten her $x, y, z \in N$ için

$$d(xy)z = xd(y)z + d(x)yz$$

yani

$$(xd(y) + d(x)y)z = xd(y)z + d(x)yz$$

bulunur.

Lemma 3.2: N bir 3–asal yakın halka, d bir sıfırdan farklı çarpımsal türev olsun ve $a \in N$ olsun. Eğer $d(N)a = (0)$ veya $ad(N) = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ dır.

İspat : $d(N)a = (0)$ olsun. Her $x, y \in N$ için

$$d(xy)a = 0$$

dır. Bu eşitlik çarpımsal türev tanımı kullanılarak açılırsa

$$(xd(y) + d(x)y)a = 0$$

elde edilir. Lemma 3.1 kullanılarak

$$xd(y)a + d(x)ya = 0$$

bulunur. Burada hipotez uygulanırsa her $x, y \in N$ için

$$d(x)ya = 0$$

elde edilir. Böylece

$d(x)Na = (0)$

olur. N bir 3–asal yakın halka olduğundan $d(x) = 0$ veya $a = 0$ elde edilir. Hipozden d sıfırdan farklı bir çarpımsal türev olduğundan $a = 0$ sonucuna varılır.

Benzer şekilde $ad(N) = (0)$ alalım. Bu durumda her $x, y \in N$ için

$a\, d(xy) = 0$

dır. d bir çarpımsal türev olduğundan

$a(xd(y) + d(x)y) = 0$

elde edilir. Buradan N bir sol yakın halka olduğu için

$axd(y) + ad(x)y = 0$

bulunur. Hipotez kullanılırsa her $x, y \in N$ için

$axd(y) = 0$

yani

$aNd(y) = (0)$

elde edilir. N bir 3–asal yakın halka ve d sıfırdan farklı bir çarpımsal türev olduğundan $a = 0$ olduğu bulunur. İspat biter.

Teorem 3.3: N bir 3–asal yakın halka ve d sıfırdan farklı bir çarpımsal türev olsun. Eğer $d(N) \subseteq Z$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat : $d(N) \subseteq Z$ olsun. Bu durumda her $x, y \in N$ için $d(xy) \in Z$ olur. Buradan her $x, y \in N$ için

$d(xy)y = yd(xy)$

dır. d bir çarpımsal türev olduğundan

$(xd(y) + d(x)y)y = y(xd(y) + d(x)y)$

elde edilir. Burada N nin sol yakın halka olduğu ve Lemma 3.1 kullanılırsa

$$xd(y)y + d(x)yy = yxd(y) + yd(x)y$$

bulunur. Hipotezden $d(N) \subseteq Z$ olduğundan

$$d(y)xy + d(x)yy = d(y)yx + d(x)yy$$

ve böylece

$$d(y)xy = d(y)yx$$

elde edilir. Yani her $x, y \in N$ için

$$d(y)[x, y] = 0$$

dır. Lemma 2.1 (i) den bir $y \in N$ için $d(y) = 0$ veya $y \in Z$ olduğu bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $d(y) = 0$ olsun. Bu durumda hipotezden her $x \in N$ için $d(xy) \in Z$ ve d bir çarpımsal türev olduğundan

$$xd(y) + d(x)y \in Z$$

dir. $d(y) = 0$ olduğundan $d(x)y \in Z$ bulunur. Burada hipotezden $d(x) \in Z$ olduğundan Lemma 2.1 (iii) kullanılarak her $x \in N$ için $d(x) = 0$ veya $y \in Z$ elde edilir. Hipotezden d sıfırdan farklı bir çarpımsal türev olduğu için $y \in Z$ dir. O halde her iki durumda da $y \in Z$ bulunur. Buradan $N \subseteq Z$ elde edilir. Böylece Lemma 2.2 den N değişmeli bir halkadır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4: N bir 3–asal yakın halka ve d bir çarpımsal türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $d(xy) = d(x)d(y)$ ise bu durumda $d = 0$ dır.

İspat : Her $x, y \in N$ için

$$d(xy) = d(x)d(y)$$

olsun. d bir çarpımsal türev olduğundan

$$xd(y) + d(x)y = d(x)d(y) \qquad [3.1]$$

elde edilir. [3.1] eşitliğinde $z \in N$ için y yerine yz yazarsak

$$xd(yz) + d(x)yz = d(x)d(yz)$$

elde edilir. Bu eşitlikte hipotezi kullanırsak

$$xd(y)d(z) + d(x)yz = d(x)d(y)d(z)$$

olur. Tekrar hipotezi kullanırsak

$$xd(y)d(z) + d(x)yz = d(xy)d(z)$$

elde edilir. Bu eşitlik d nin bir çarpımsal türev olduğu kullanılarak düzenlenirse

$$xd(y)d(z) + d(x)yz = (xd(y) + d(x)y)d(z)$$

bulunur. Burada Lemma 3.1 kullanılırsa

$$xd(y)d(z) + d(x)yz = xd(y)d(z) + d(x)yd(z)$$

olur. Böylece

$$d(x)yz = d(x)yd(z)$$

olduğu elde edilir. N bir sol yakın halka olduğundan her $x, y, z \in N$ için

$$d(x)y(d(z) - z) = 0$$

bulunur. Buradan her $x, z \in N$ için

$$d(x)N(d(z) - z) = (0)$$

sonucuna varılır.

N bir 3–asal yakın olduğundan her $x \in N$ için $d(x) = 0$ veya her $z \in N$ için $d(z) = z$ olduğu elde edilir.

Kabul edelim ki her $z \in N$ için $d(z) = z$ eşitliği sağlansın. d bir çarpımsal türev olduğundan her $x, y \in N$ için

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y$$

dır. $d(z) = z$ olduğundan son eşitlik düzenlenirse

$$xy = xy + xy$$

elde edilir. Buradan her $x, y \in N$ için $xy = 0$ olduğu sonucu elde edilir. N bir 3–asal yakın halka olduğundan son eşitlik $N = (0)$ olduğunu verir. Bu ise bir çelişkidir. Bu nedenle her $x \in N$ için $d(x) = 0$ yani $d = 0$ olmalıdır. İspat tamamlanır.

Teorem 3.5: N bir 3–asal yakın halka ve d bir çarpımsal türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $d(xy) = d(y)d(x)$ ise bu durumda $d = 0$ dır.

İspat : Her $x, y \in N$ için

$d(xy) = d(y)d(x)$

olsun. d bir çarpımsal türev olduğundan

$$xd(y) + d(x)y = d(y)d(x) \qquad [3.2]$$

eşitliği elde edilir. [3.2] eşitliğinde y yerine xy yazılırsa

$xd(xy) + d(x)xy = d(xy)d(x)$

olur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse

$xd(y)d(x) + d(x)xy = d(xy)d(x)$

olur. Burada d nin bir çarpımsal türev olduğu kullanılırsa

$xd(y)d(x) + d(x)xy = (xd(y) + d(x)y)d(x)$

bulunur. Bu ifadeye Lemma 3.1 uygulanırsa

$xd(y)d(x) + d(x)xy = xd(y)d(x) + d(x)yd(x)$

elde edilir. Böylece her $x, y \in N$ için

$$d(x)xy = d(x)yd(x) \qquad [3.3]$$

olur. [3.3] eşitliğinde y yerine $z \in N$ olmak üzere yz yazılıp ve [3.3] eşitliği tekrar kullanılırsa

$d(x)xyz = d(x)yzd(x)$

$d(x)yd(x)z = d(x)yzd(x)$

bulunur. Buradan her $x, y, z \in N$ için

$d(x)y[z, d(x)] = 0$

elde edilir. Yani her $x, z \in N$ için

$d(x)N[z, d(x)] = (0)$

olur. N bir 3–asal yakın halka olduğundan $d(x) = 0$ veya $d(x) \in Z$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $d(x) = 0$ olsun. Bu durumda $d(x) \in Z$ dir. O halde her iki durumda da $d(N) \subseteq Z$ elde edilir. Teorem 3.3 den N bir değişmeli halkadır veya $d = 0$ olduğu sonucuna varılır.

Eğer N bir değişmeli halka ise her $x, y \in N$ için

$d(xy) = d(y)d(x) = d(x)d(y)$

elde edilir. Bu durumda d çarpımsal türevi N yakın halkası üzerinde bir homomorfizm olur. Dolayısıyla Teorem 3.4 den $d = 0$ elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.6: N bir 3–asal yakın halka ve d sıfırdan farklı bir çarpımsal türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $d([x, y]) = [d(x), y]$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Her $x, y \in N$ için

$d([x, y]) = [d(x), y]$

olsun.

Bu eşitlikye y yerine xy yazılırsa

$d([x, xy]) = [d(x), xy]$

olur. N bir sol yakın halka olduğundan

$d(x[x, y]) = [d(x), xy]$

elde edilir. Son ifadede d nin bir çarpımsal türev olduğu kullanılırsa

$xd([x, y]) + d(x)[x, y] = [d(x), xy]$

bulunur. Burada hipotez uygulanırsa

$x[d(x),y] \ + d(x)[x,y] = [d(x),xy]$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$xd(x)y - xyd(x) + d(x)[x,y] = d(x)xy - xyd(x) \qquad [3.4]$$

eşitliğine ulaşılır.

Öte yandan hipotezde y yerine 0 yazılırsa $d(0) = 0$ eşitliği elde edilir. Tekrar hipotezde y yerine x yazılırsa $[d(x),x] = d(0)$ olur. Böylece $[d(x),x] = 0$ olduğu sonucuna varılır. Buradan her $x \in N$ için

$d(x)x = xd(x)$

sağlanır. Bu eşitlik [3.4] ifadesinde kullanılırsa

$d(x)xy - xyd(x) + d(x)[x,y] = d(x)xy - xyd(x)$

olur. Böylece her $x, y \in N$ için

$d(x)[x,y] = 0$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse her $x, y \in N$ için

$d(x)xy = d(x)yx$

bulunur. Son eşitlikte y yerine $z \in N$ olmak üzere yz yazılır ve aynı eşitlik tekrar kullanılırsa

$d(x)xyz = d(x)yzx$

$d(x)yxz = d(x)yzx$

ve buradan her $x, y, z \in N$ için

$d(x)y[x,z] = 0$

olur. Yani

$d(x)N[x,z] = (0)$

elde edilir. N bir 3–asal yakın halka olduğundan bir $x \in N$ için

$d(x) = 0$ veya $x \in Z$

elde edilir.

Eğer $d(x) = 0$ ise $0 \in Z$ olduğundan $d(x) \in Z$ dir. Diğer yandan eğer $x \in Z$ olursa hipotezden her $y \in N$ için $[d(x), y] = 0$ elde edilir. Bu ise $d(x) \in Z$ demektir. Yani her iki durumda da $d(x) \in Z$ bulunur. Buradan $d(N) \subseteq Z$ sonucuna varılır. Dolayısıyla Teorem 3.3 den N değişmeli bir halkadır. İspat biter.

Teorem 3.7: N bir 3–asal yakın halka ve d sıfırdan farklı bir çarpımsal türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $[d(x), y] = [d(x), d(y)]$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Bu teoremin ispatı için $d(N) \subseteq Z$ olduğunu gösterirsek Teorem 3.3 den N değişmeli bir halka olacaktır.

Hipotezden her $x, y \in N$ için

$$[d(x), d(y)] = [d(x), y]$$

olsun. Bu eşitlikte y yerine $d(x)y$ yazılırsa

$$[d(x), d(d(x)y)] = [d(x), d(x)y]$$

elde edilir. Son ifadede d nin bir çarpımsal türev olduğu kullanılırsa

$$[d(x), d(x)d(y) + d^2(x)y] = [d(x), d(x)y]$$

olur. N bir sol yakın halka olduğundan

$$[d(x), d(x)d(y) + d^2(x)y] = d(x)[d(x), y]$$

bulunur. Bu eşitlikte hipotez kullanılırsa

$$[d(x), d(x)d(y) + d^2(x)y] = d(x)[d(x), d(y)]$$

elde edilir. Burada komütatör çarpım tanımından

$$d(x)(d(x)d(y) + d^2(x)y) - (d(x)d(y) + d^2(x)y)d(x) = \\ d(x)d(x)d(y) - d(x)d(y)d(x)$$

bulunur. Lemma 3.1 den

$$d(x)d(x)d(y) + d(x)d^2(x)y - \big(d(x)d(y)d(x) + d^2(x)yd(x)\big)$$

$= d(x)d(x)d(y) - d(x)d(y)d(x)$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlik $-(a+b) = -b-a$ özelliği uygulanarak düzenlenirse

$d(x)\ d(x)d(y) + d(x)d^2(x)y - d^2(x)yd(x) - d(x)\ d(y)d(x)$

$= d(x)d(x)d(y) - d(x)d(y)d(x)$

olur. Böylece her $x, y \in N$ için

$$d(x)d^2(x)y = d^2(x)yd(x) \qquad [3.5]$$

elde edilir. [3.5] eşitliğinde y yerine $z \in N$ olmak üzere yz yazılıp ve yine [3.5] eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in N$ için

$d(x)d^2(x)yz = d^2(x)yzd(x)$

$d^2(x)yd(x)z = d^2(x)yzd(x)$

ve buradan

$d^2(x)y[d(x), z] = 0$

olduğu elde edilir. O halde her $x, z \in N$ için

$d^2(x)N[d(x), z] = (0)$

bulunur. Burada N bir 3–asal yakın halka olduğundan

$d^2(x) = 0$ veya $d(x) \in Z$

elde edilir.

Şimdi $d^2(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezde y yerine $d(y)$ yazılırsa

$[\ d(x), d(y)\ ] = [d(x), d^2(y)]$

elde edilir. Burada $d^2(y)$=0 olduğu kullanılırsa her $y \in N$ için

$[\ d(x), d(y)\ ] = 0$

elde edilir. Bu son eşitlik hipotezde kullanılırsa her $y \in N$ için

$[\ d(x), y] = 0$

sonucuna varılır. Bu ise $d(x) \in Z$ olduğunu verir. O halde her $x \in N$ için $d(x) \in Z$ dir. Bu durumda $d(N) \subseteq Z$ ve böylece Teorem 3.3 den N değişmeli bir halkadır. İspat biter.

Teorem 3.8: N bir 3–asal yakın halka ve d sıfırdan farklı bir çarpımsal türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $[\, d(x), y] \in Z$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Her $x, y \in N$ için $[\, d(x), y] \in Z$ ifadesi sağlansın. Bu ifadede y yerine $d(x)y$ yazılırsa her $x, y \in N$ için

$[d(x), d(x)y\,] \in Z$

olur. N bir sol yakın halka olduğundan

$d(x)[\, d(x), y\,] \in Z$

sağlanır.

Burada Lemma 2.1 (i) uygulanırsa $d(x) \in Z$ veya $[\, d(x), y] = 0$ bulunur. Bu ifadeden her iki durumda $d(N) \subseteq Z$ sonucuna varılır. O halde Teorem 3.3 den N değişmeli bir halkadır.

4. ÇARPIMSAL GENELLEŞTİRİLMİŞ (σ,τ) −TÜREVLİ BAZI ÖZDEŞLİKLER

1992 yılında M. N. Daif ve H. E. Bell tarafından "d, R yarıasal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa I ideali R halkasının merkezindedir.

i) $d([x,y]) = \pm[x,y]$, her $x,y \in N$

ii) $x,y \in N$ için $d([x,y]) = [x,y]$ veya $d([x,y]) = -[x,y]$ "

teoremi ispatlanmıştır. Özel olarak $I = R$ ise R halkası değişmelidir.

Bu teorem 2011 yılında A. Boua ve L. Oukhtite tarafından türevli sol yakın halkalar için ispatlanmıştır. 2011 yılında ise Y. Shang tarafından her $k,l \in \mathbb{N}$ için $d([x,y]) = \pm x^k[x,y]x^l$ alınarak genelleştirilmiştir.

Bu bölümde yukarıda bahsi geçen teoremler, N 3–asal yakın halkasının sıfırdan farklı bir d çarpımsal (σ,τ) −türevi ile belirlenmiş bir f çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türevi için ispatlanacaktır. Bu türev (f,d) ile gösterilecektir. Bunun yanında türevli asal halkalarda daha önce ele alınan değişmeli olma koşullarından bazıları 3–asal yakın halkaların çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türevleri için incelenerek daha genel sonuçlar elde edilecektir.

Bu bölüm boyunca $\sigma,\tau: N \to N$ iki otomorfizma ve d sıfırdan farklı bir çarpımsal (σ,τ) −türev olarak alınacaktır.

Lemma 4.1: N bir 3-asal yakın halka, (f,d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev olsun. Her $x,y,z \in N$ için

$$(d(x)\sigma(y) + \tau(x)f(y))z = d(x)\sigma(y)z + \tau(x)f(y)z$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Her $x, y, z \in N$ için $f(xyz)$ çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türevi iki farklı yol kullanılarak hesaplanırsa

$f((xy)z) = f(xy)\sigma(z) + \tau(xy)d(z)$

ve

$f((x(yz)) = d(x)\sigma(yz) + \tau(x)f(yz)$

$= d(x)\sigma(yz) + \tau(x)\big(f(y)\sigma(z) + \tau(y)d(z)\big)$

$= d(x)\sigma(yz) + \tau(x)f(y)\sigma(z) + \tau(x)\tau(y)d(z)$

elde edilir. Bu iki eşitlikten her $x, y, z \in N$ için

$f(xy)\sigma(z) = d(x)\sigma(y)\sigma(z) + \tau(x)f(y)\sigma(z)$

olur. f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türev olduğundan

$(d(x)\sigma(y) + \tau(x)f(y))\sigma(z) = d(x)\sigma(yz) + \tau(x)f(y)\sigma(z)$

bulunur. σ bir otomorfizm olduğundan

$(d(x)\sigma(y) + \tau(x)f(y))z = d(x)\sigma(y)z + \tau(x)f(y)$z

sonucu elde edilir.

Teorem 4.2: N bir 3-asal yakın halka, (f, d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $f(N) \subseteq Z$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Öncelikle $d(Z) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d(z) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $z \in Z$ vardır.

Hipotezden her $x, y \in N$ için

$f(zx)y = yf(zx)$

dir. f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) $-$türev olduğundan

$(d(z)\sigma(x) + \tau(z)f(x))y = y(d(z)\sigma(x) + \tau(z)f(x))$

elde edilir. Bu eşitlik Lemma 4.1 ve N nin 3-asal yakın halka olduğu kullanılarak düzenlenirse

$$d(z)\sigma(x)y+\tau(z)f(x)y=yd(z)\sigma(x)+y\tau(z)f(x)$$

bulunur. Bu eşitlikte hipotezden $f(x)\in Z$ olduğu kullanılırsa

$$d(z)\sigma(x)y=yd(z)\sigma(x) \qquad [4.1]$$

elde edilir. [4.1] eşitliğinde x yerine $t\in N$ olmak üzere xt yazılırsa

$$d(z)\sigma(xt)y=yd(z)\sigma(xt)$$

olur. Burada σ bir otomorfizm olduğundan

$$d(z)\sigma(x)\sigma(t)y=yd(z)\sigma(x)\sigma(t)$$

elde edilir. Burada [4.1] eşitliği uygulanırsa

$$d(z)\sigma(x)\sigma(t)y=d(z)\sigma(x)y\sigma(t)$$

olur ve böylece

$$d(z)\sigma(x)[\sigma(t),y]=0$$

elde edilir. σ bir otomorfizm olduğundan her $x,y\in N$ için

$$d(z)N[t,y]=(0)$$

sağlanır. N bir $3-$asal yakın halka olduğundan $z\in Z$ için $d(z)=0$ veya her $t\in N$ için $t\in Z$ dir. Kabulden $d(z)\neq 0$ olduğu için her $t\in N$ için $t\in Z$ dir. Bu ise $N\subseteq Z$ demektir. O halde Lemma 2.2 den N değişmeli bir halkadır. İspat biter.

Şimdi ise $d(Z)=(0)$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden her $x,y,k\in N$

için

$$f(xy)k=kf(xy)$$

dir. f bir çarpımsal genelleştirilmiş $(\sigma,\tau)-$türev olduğundan

$$(d(x)\sigma(y)+\tau(x)f(y))k=k(d(x)\sigma(y)+\tau(x)f(y))$$

elde edilir. Bu ifade Lemma 4.1 kullanılarak düzenlenirse

$$d(x)\sigma(y)k + \tau(x)f(y)k = kd(x)\sigma(y) + k\tau(x)f(y)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-kd(x)\sigma(y) + d(x)\sigma(y)k + \tau(x)f(y)k - \tau(x)f(y)k = -kd(x)\sigma(y)$$

$$+kd(x)\sigma(y) + k\tau(x)f(y) - \tau(x)f(y)k$$

ve böylece

$$-kd(x)\sigma(y) + d(x)\sigma(y)k = k\tau(x)f(y) - \tau(x)f(y)k$$

bulunur. Bu eşitlikte hipotez kullanılırsa

$$-kd(x)\sigma(y) + d(x)\sigma(y)k = f(y)k\tau(x) - f(y)\tau(x)k$$

olur. Komütatör çarpım tanımından

$$-kd(x)\sigma(y) + d(x)\sigma(y)k = f(y)[k, \tau(x)]$$

elde edilir. Son eşitlikte k yerine $\tau(x)$ yazılırsa

$$d(x)\sigma(y)\tau(x) = \tau(x)d(x)\sigma(y) \qquad [4.2]$$

olur. [4.2] eşitliğinde y yerine $t \in N$ olmak üzere yt yazılırsa ve σ nın otomorfizm olduğu kullanılırsa

$$d(x)\sigma(y)\sigma(t)\tau(x) = \tau(x)d(x)\sigma(y)\sigma(t)$$

elde edilir. Bu ifade [4.2] eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y, t \in N$

$$d(x)\sigma(y)[\sigma(t), \tau(x)] = 0$$

elde edilir. σ bir otomorfizm olduğundan

$$d(x)N[t, \tau(x)] = (0)$$

bulunur.

N bir 3 $-$asal yakın halka olduğu için bir $x \in N$ için $d(x) = 0$ veya $x \in Z$ dir. Eğer $x \in Z$ ise bu durumda $d(x) \in d(Z)$ dir. Kabulden $d(Z) = (0)$ olduğu için $d(x) = 0$ elde edilir. O halde her iki durum için de $d(x) = 0$ bulunur. Yani her $x \in N$ için $d(x) = 0$ dır. Böylece $d = 0$ elde edilir. Bu ise $d \neq 0$ oluşu ile çelişir. Bu çelişkiden ispat tamamlanır.

Teorem 4.3: N bir 3-asal yakın halka, (f,d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev olsun. Eğer her $x,y \in N$ için $f([x,y]) = 0$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat : Her $x,y \in N$ için

$$f([x,y]) = 0 \quad [4.3]$$

olsun.

Öncelikle $d(Z) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d(z) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $z \in Z$ vardır.

Şimdi [4.3] eşitliğinde x yerine zx yazılırsa

$$f([zx,y]) = 0$$

olur. Bu eşitlikte $z \in Z$ olduğundan

$$f(z[x,y]) = 0$$

olur ve f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev olduğu için

$$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)f([x,y]) = 0$$

elde edilir. Bu ifadede [4.3] eşitliği kullanılırsa her $x,y \in N$ için

$$d(z)\sigma([x,y]) = 0 \quad [4.4]$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$d(z)\sigma(xy - yx) = 0$$

olur. Burada σ bir otomorfizm olduğundan

$$d(z)\sigma(x)\sigma(y) = d(z)\sigma(y)\sigma(x) \quad [4.5]$$

elde edilir. [4.5] eşitliğinde y yerine $t \in N$ olmak üzere yt yazılırsa ve tekrar [4.5] eşitliği kullanılırsa

$$d(z)\sigma(x)\sigma(y)\sigma(t) = d(z)\sigma(y)\sigma(t)\sigma(x)$$

$$d(z)\sigma(y)\sigma(x)\sigma(t) = d(z)\sigma(y)\sigma(t)\sigma(x)$$

olur. Böylece her $x,y,t \in N$ ve $z \in Z$ için

$d(z)\sigma(y)[\sigma(x), \sigma(t)] = 0$

elde edilir. σ bir otomorfizm olduğundan her $x, t \in N$ için

$$d(z)N[x, t] = (0) \qquad [4.6]$$

dır.

N bir 3–asal yakın halka olduğundan $d(z) = 0$ veya her $t \in N$ için $t \in Z$ dir. Kabulden $d(z) \neq 0$ olduğu için her $t \in N$ için $t \in Z$ dir. Bu ise $N \subseteq Z$ demektir. O halde Lemma 2.2 den N değişmeli bir halkadır.

Şimdi $d(Z) = (0)$ olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in N$ için hipotezden $f([x, y]) = 0$ olduğundan bu eşitlikte y yerine xy yazılarak

$f([x, xy]) = 0$

elde edilir. N bir sol yakın halka ve f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olduğu için

$0 = f(x[x, y]) = d(x)\sigma([x, y]) + \tau(x)f([x, y])$

bulunur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in N$ için

$$d(x)\sigma([x, y]) = 0 \qquad [4.7]$$

olur. Bu ifade düzenlenerek her $x, y \in N$ için

$$d(x)\sigma(x)\sigma(y) = d(x)\sigma(y)\sigma(x) \qquad [4.8]$$

bulunur. Son eşitlikte y yerine $k \in N$ olmak üzere yk yazılıp ve tekrar bu eşitlik kullanılırsa

$d(x)\sigma(x)\sigma(yk) = d(x)\sigma(yk)\sigma(x)$

$d(x)\sigma(x)\sigma(y)\sigma(k) = d(x)\sigma(y)\sigma(k)\sigma(x)$

$d(x)\sigma(y)\sigma(x)\,\sigma(k) = d(x)\sigma(y)\sigma(k)\sigma(x)$

olur. Böylece her $x, y, k \in N$ için

$d(x)\sigma(y)[\sigma(x), \sigma(k)] = 0$

elde edilir. Bu ifadede σ bir otomorfizm olduğundan

$$d(x)N[\sigma(x), k] = (0) \quad [4.9]$$

bulunur.

N 3–asal yakın halka olduğundan bir $x \in N$ için $d(x) = 0$ veya $\sigma(x) \in Z$ dir. Eğer $\sigma(x) \in Z$ ise her $s \in N$ için

$$\sigma(x)s = s\sigma(x)$$

dir. s yerine $\sigma(s)$ yazılırsa

$$\sigma(x)\sigma(s) = \sigma(s)\sigma(x)$$

olur. Burada σ bir otomorfizm olduğundan

$$\sigma(xs) = \sigma(sx)$$

elde edilir. Her tarafa σ^{-1} uygulanırsa her $s \in N$ için

$$xs = sx$$

bulunur. Buradan $x \in Z$ olduğu elde edilir. $x \in Z$ ise bu durumda $d(x) \in d(Z)$ dir. Kabulden $d(Z) = (0)$ olduğu için $d(x) = 0$ elde edilir. O halde her iki durum için de $d(x) = 0$ bulunur. Yani her $x \in N$ için $d(x) = 0$ dır.

Böylece $d = 0$ elde edilir. Bu ise $d \neq 0$ oluşu ile çelişir. Bu çelişkiden ispat tamamlanır.

Teorem 4.4: N bir 3-asal yakın halka, (f, d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $f([x, y]) = \pm\tau([x, y])$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat : Her $x, y \in N$ için

$$f([x, y]) = \pm\tau([x, y]) \quad [4.10]$$

olsun.

İlk olarak $d(Z) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d(z) \neq 0$ olacak biçimde en az bir $z \in Z$ vardır.

[4.10] eşitliğinde x yerine zx yazılırsa

$f([zx, y]) = \pm\tau([zx, y])$

olur. Burada $z \in Z$ olduğu için

$f(z[x, y]) = \pm\tau(z[x, y])$

olur. Son eşitlikte f nin bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olduğu kullanılırsa

$d(z)\sigma([x, y]) + \tau(z)f([x, y]) = \pm\tau(z[x, y])$

elde edilir. Bu ifadede [4.10] eşitliği kullanılırsa

$d(z)\sigma([x, y]) + \tau(z)(\pm\tau([x, y])) = \pm\tau(z[x, y])$

bulunur. N bir sol yakın halka iken her $n, n' \in N$ için $n(-n') = -nn'$ özelliği sağlandığından, son ifade bu özelliğe göre ve τ nun otomorfizm olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in N$ için

$d(z)\sigma([x, y]) + \tau(z)(\pm\tau([x, y])) = \tau(z)(\pm\tau([x, y]))$

olur. Buradan her $x, y \in N$ için

$d(z)\sigma([x, y]) = 0$

elde edilir.

Bu eşitlik Teorem 4.3 in ispatındaki [4.4] eşitliği ile aynı olduğu için benzer ispat yöntemleri kullanılarak N nin değişmeli bir halka olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi $d(Z) = (0)$ olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in N$ için hipotezden $f([x, y]) = \pm\tau([x, y])$

dir. Bu eşitlikte y yerine xy yazarsak

$f([x, xy]) = \pm\tau([x, xy])$

olur. N yakın halkası soldan dağılma özelliğine sahip olduğundan

$f(x[x, y]) = \pm\tau(x[x, y])$

dır. f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olduğundan bu eşitlik

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)f([x,y]) = \pm\tau(x[x,y])$

olur. Hipotezden $f([x,y]) = \pm\tau([x,y])$ ifadesi kullanılarak

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)(\pm\tau([x,y])) = \pm\tau(x[x,y])$

elde edilir. Burada N bir sol yakın halka iken her $n, n' \in N$ için $n(-n') = -nn'$ özelliği kullanılarak gerekli düzenleme yapılırsa her $x, y \in N$ için

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)(\pm\tau([x,y])) = \tau(x)(\pm\tau([x,y]))$

bulunur. Yani her $x, y \in N$ için

$d(x)\sigma([x,y]) = 0$

olduğu elde edilir.

Son eşitlik Teorem 4.3 in ispatındaki [4.7] eşitliği ile aynı olduğundan benzer işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.5: N bir 3-asal yakın halka, (f,d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) $-$türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $f([x,y]) = \pm\tau(xoy)$ ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Her $x, y \in N$ için

$f([x,y]) = \pm\tau(xoy)$ [4.11]

olsun.

Öncelikle $d(Z) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d(z) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $z \in Z$ vardır.

Hipotezde x yerine zx yazılırsa

$f([zx,y]) = \pm\tau(zxoy)$

olur. $z \in Z$ olduğundan

$zxoy = zxy + yzx = zxy + zyx = z(xy + yx) = z(xoy)$

dir. Böylece

$f(z[x,y]) = \pm\tau(z(xoy))$

elde edilir. Bu eşitlik f nin bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) $-$türev olduğu kullanılarak açılırsa

$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)f([x,y]) = \pm\tau\big(z(xoy)\big)$

elde edilir. Burada hipotezden $f([x,y]) = \pm\tau(xoy)$ olduğu ve her $n,n' \in N$ için $n(-n') = -nn'$ özelliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her

$x,y \in N$ için

$d(z)\sigma([x,y]) = 0$

eşitliğine ulaşılır.

Bu eşitlik Teorem 4.3 in ispatıdaki [4.4] ifadesi ile aynıdır. Dolayısıyla benzer ispat yöntemi kullanılarak N nin değişmeli bir halka olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi $d(Z) = (0)$ alalım. Bu durumda hipotezde y yerine xy yazılarak

$f([x,xy]) = \pm\tau(xoxy)$

elde edilir. N yakın halkası soldan dağılma özelliğini sağladığı için

$f(x[x,y]) = \pm\tau(x(xoy))$

olur ve burada f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) $-$türev olduğundan

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)f([x,y]) = \pm\tau\big(x(xoy)\big)$

elde edilir. Son eşitlikte hipotez kullanılır ve her $n,n' \in N$ için $n(-n') = -nn'$ özelliği uygulanırsa

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)\big(\pm\tau(xoy)\big) = \pm\tau\big(x(xoy)\big)$

ve böylece

$d(x)\sigma([x,y]) = 0$

eşitliği bulunur.

Bu eşitlik Teorem 4.3 ün ispatındaki [4.7] ifadesi ile aynıdır. [4.7] eşitliğinden sonraki benzer işlemler yapılarak $d = 0$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda ispat biter.

Teorem 4.6: N bir sıfır simetrik 3-asal yakın halka, (f, d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için

$f([x, y]) = \tau([d(x), y])$

ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Her $x, y \in N$ için

$$f([x, y]) = \tau([d(x), y]) \qquad [4.12]$$

olsun.

Kabul edelim ki $d(Z) \neq (0)$ olsun. Dolayısıyla $d(z) \neq 0$ olacak biçimde en az bir $z \in Z$ vardır.

[4.12] eşitliğinde y yerine zy yazılırsa

$f([x, zy]) = \tau([d(x), zy])$

elde edilir. Bu ifadede $z \in Z$ olduğundan

$f(z[x, y]) = \tau(z[d(x), y])$

olur. f nin bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olduğu kullanılırsa

$d(z)\sigma([x, y]) + \tau(z)f([x, y]) = \tau(z[d(x), y])$

bulunur. Son ifadede τ bir otomorfizm olduğundan

$d(z)\sigma([x, y]) + \tau(z)f([x, y]) = \tau(z)\tau([d(x), y])$

elde edilir. Bu eşitlikte [4.12] ifadesi kullanılırsa her $x, y \in N$ için

$d(z)\sigma([x, y]) = 0$

bulunur.

Bu eşitlik Teorem 4.3 ün ispatında bulunan [4.4] ifadesi ile aynı olduğundan, benzer ispat yöntemleri kullanılarak N değişmeli bir halkadır sonucuna varılır.

Şimdi $d(Z) = (0)$ olsun.

[4.12] eşitliğinde y yerine xy yazılırsa

$f([x, xy]) = \tau([d(x), xy])$

elde edilir. Buradan

$f(x[x, y]) = \tau([d(x), xy])$

yazılabilir. Bu eşitlik f nin bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olduğu kullanılırak düzenlenirse

$d(x)\sigma([x, y]) + \tau(x)f([x, y]) = \tau([d(x), xy])$

elde edilir. Hipotezden

$d(x)\sigma([x, y]) + \tau(x)\tau([d(x), y]) = \tau([d(x), xy])$

olur. Bu eşitlik komütatör çarpım tanımı kullanılarak açılır ve τ nun bir otomorfizm olduğu kullanılarak düzenlenirse

$d(x)\sigma([x, y]) + \tau(x)\tau\big(d(x)\big)\tau(y) - \tau(x)\tau(y)\tau\big(d(x)\big) = \tau\big(d(x)\big)\tau(x)\tau(y)$

$-\tau(x)\tau(y)\tau\big(d(x)\big)$

bulunur. Böylece

$d(x)\sigma([x, y]) + \tau(x)\tau\big(d(x)\big)\tau(y) = \tau\big(d(x)\big)\tau(x)\tau(y)$ [4.13]

elde edilir.

Öte yandan hipotezde $y = 0$ yazılır ve N sıfır simetrik yakın halka olduğu kullanılırsa $f(0) = \tau(0)$ =0 elde edilir. Tekrar hipotezde y yerine x yazılırsa $\tau([d(x), x]) = f(0) = 0$ bulunur. Böylece her $x \in N$ için

$\tau([d(x), x]) = 0$

elde edilir.

Tekrar komutatör çarpım tanımı ve τ nun otomorfizm olduğu kullanılarak her $x \in N$ için

$$\tau\big(d(x)\big)\tau(x) = \tau(x)\tau\big(d(x)\big)$$

bulunur. Bu ifade [4.13] eşitliğinde kullanılırsa

$$d(x)\sigma([x,y]) + \tau\big(d(x)\big)\tau(x)\tau(y) = \tau\big(d(x)\big)\tau(x)\tau(y)$$

olur ve böylece her $x, y \in N$ için

$$d(x)\sigma([x,y]) = 0$$

elde edilir.

Bu eşitlik Teorem 4.3 in ispatında bulunan [4.7] ifadesi ile aynı olduğundan benzer işlemler ile $d = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.7 : N bir sıfır simetrik 3-asal yakın halka, (f, d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için

$$f([x,y]) = \tau([x, d(y)])$$

ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Her $x, y \in N$ için

$$f([x,y]) = \tau([x, d(y)]) \qquad [4.14]$$

olsun.

Şimdi $d(Z) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d(z) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $z \in Z$ vardır.

[4.14] eşitliğinde x yerine zx yazılırsa

$$f([zx,y]) = \tau([zx, d(y)])$$

elde edilir. Bu ifade $z \in Z$ olduğu kullanılarak düzenlenirse

$$f(z[x,y]) = \tau(z[x, d(y)])$$

olur. Bu eşitlik çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev tanımı kullanılarak açılırsa

$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)f([x,y]) = \tau(z[x,d(y)])$

olur. Burada [4.14] eşitliği kullanılırsa

$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)\tau([x,d(y)]) \ = \tau(z[x,d(y)])$

bulunur. τ bir otomorfizm olduğundan

$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)\tau([x,d(y)]) \ = \tau(z)\tau([x,d(y)])$

bulunur. Yani her $x,y \in N$ için

$d(z)\sigma([x,y]) = 0$

elde edilir.

Bu ifade Teorem 4.3 ün ispatında bulunan [4.4] eşitliği ile aynıdır. Benzer ispat yöntemleri kullanılarak N nin değişmeli bir halka olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi $d(Z) = (0)$ olsun.

[4.14] eşitliğinde x yerine yx yazılırsa

$f([yx,y]) = \tau([yx,d(y)])$

elde edilir. N bir sol yakın halka olduğundan

$f(y[x,y]) = \tau([yx,d(y)])$

olur. Bu eşitlik çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev tanımı kullanılarak açılırsa

$d(y)\sigma([x,y]) + \tau(y)f([x,y]) = \tau([yx,d(y)])$

olur. Burada [4.14] eşitliği kullanılırsa

$d(y)\sigma([x,y]) + \tau(y)\tau([x,d(y)] \ = \tau([yx,d(y)])$

bulunur.

Son ifade komütatör çarpım tanımı ve τ nun bir otomorfizm olduğu kullanılarak düzenlenirse

$$d(y)\sigma([x,y]) + \tau(y)\tau(x)\tau\big(d(y)\big) - \tau(y)\tau\big(d(y)\big)\tau(x) = \tau(y)\tau(x)\tau\big(d(y)\big)$$

$$-\tau\big(d(y)\big)\tau(y)\tau(x) \qquad [4.15]$$

bulunur.

Diğer yandan hipotezde $x = 0$ yazılır ve N nin sıfır simetrik yakın halka olduğu kullanılırsa $f(0) = \tau(0) = 0$ elde edilir. Tekrar hipotezde x yerine y yazılırsa $\tau([y, d(y)]) = f(0) = 0$ bulunur. Böylece her $y \in N$ için

$$\tau(y)\tau\big(d(y)\big) = \tau\big(d(y)\big)\tau(y)$$

elde edilir. Bu ifade [4.15] eşitliğinde kullanılırsa her $x, y \in N$ için

$$d(y)\sigma([x,y])=0$$

bulunur.

Bu eşitlik Teorem 4.3 deki [4.7] eşitliği ile aynıdır. Benzer işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.8: N bir 3-asal yakın halka, $m, n \in \mathbb{N}$ ve (f, d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ, τ) −türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için

$$f([x,y]) = \pm\tau(x^m[x,y]x^n)$$

ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Her $x, y \in N$ için

$$f([x,y]) = \pm\tau(x^m[x,y]x^n) \qquad [4.16]$$

olsun.

İspat için öncelikle kabul edelim ki $d(Z) \neq (0)$ olsun. Bu durumda en az bir

$z \in Z$ vardır öyle ki $d(z) \neq 0$ dir.

[4.16] eşitliğinde y yerine zy yazılırsa

$$f([x,zy]) = \pm\tau(x^m[x,zy]x^n)$$

olur. Burada $z \in Z$ olduğundan

$$f(z[x,y]) = \pm\tau(x^m z[x,y]x^n)$$

elde edilir. f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev olduğundan

$$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)f([x,y]) = \pm\tau(x^m z[x,y]x^n)$$

bulunur. Burada hipotez uygulanırsa

$$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)\big(\pm\tau(x^m[x,y]x^n)\big) = \pm\tau(x^m z[x,y]x^n)$$

elde edilir. Bu ifadede $z \in Z$ olduğundan

$$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)\big(\pm\tau(x^m[x,y]x^n)\big) = \pm\tau(zx^m[x,y]x^n)$$

olur. Son eşitlikte τ nun bir otomorfizm olması ve $n(-n') = -nn'$ özelliği kullanılarak

$$d(z)\sigma([x,y]) \pm \tau(z)\big(\tau(x^m[x,y]x^n)\big) = \pm\tau(z)\big(\tau(x^m[x,y]x^n)\big)$$

bulunur. Bu eşitlikten her $x, y \in N$ için

$$d(z)\sigma([x,y]) = 0$$

elde edilir.

Bu eşitlik Teorem 4.3 deki [4.4] eşitliği ile aynıdır. Benzer işlemler tekrar edilerek N nin değişmeli bir halka olduğu bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $d(Z) = (0)$ olsun.

Eğer [4.16] eşitliğinde y yerine xy yazılırsa

$$f([x,xy]) = \pm\tau(x^m[x,xy]x^n)$$

olur. N bir sol yakın halka olduğundan

$$f(x[x,y]) = \pm\tau(x^{m+1}[x,y]x^n)$$

bulunur. f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev olduğundan

$$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)f([x,y]) = \pm\tau(x^{m+1}[x,y]x^n)$$

elde edilir. Bu eşitlikte hipotez kullanılırsa

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)\big(\pm\tau(x^m[x,y]x^n)\big) = \pm\tau(x^{m+1}[x,y]x^n)$

elde edilir. N bir sol yakın halka iken $n(-n') = -nn'$ özelliği sağlandığından ve τ bir otomorfizm olduğundan

$d(x)\sigma([x,y]) \pm \big(\tau(x^{m+1}[x,y]x^n)\big) = \pm\tau(x^{m+1}[x,y]x^n)$

bulunur ki bu eşitlik her $x, y \in N$ için

$d(x)\sigma([x,y]) = 0$

olduğunu verir.

Elde edilen son ifade Teorem 4.3 deki [4.7] eşitliği ile aynıdır. Benzer işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.9: N bir 3-asal yakın halka, $m, n \in \mathbb{N}$ ve (f,d) bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev olsun. Eğer her $x, y \in N$ için

$f([x,y]) = \pm\tau(x^m(xoy)x^n)$

ise bu durumda N değişmeli bir halkadır.

İspat: Her $x, y \in N$ için

$$f([x,y]) = \pm\tau(x^m(xoy)x^n) \qquad [4.17]$$

olsun.

Öncelikle kabul edelim ki $d(Z) \neq (0)$ olsun. Bu durumda en az bir $z \in Z$ vardır öyle ki $d(z) \neq 0$ dir.

[4.17] eşitliğinde y yerine zy yazılırsa

$f([x,zy]) = \pm\tau(x^m(xozy)x^n)$

olur. Bu eşitlik $z \in Z$ olduğu kullanılarak düzenlenirse

$f(z[x,y]) = \pm\tau(x^m z(xoy)x^n)$

elde edilir. f bir çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) −türev olduğundan

$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)f([x,y]) = \pm\tau(x^m z(xoy)x^n)$

bulunur. Hipotezden

$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)\big(\pm\tau(x^m(xoy)x^n)\big) = \pm\tau(x^m z(xoy)x^n)$

yazılır. Burada $z \in Z$ olduğundan

$d(z)\sigma([x,y]) + \tau(z)\big(\pm\tau(x^m(xoy)x^n)\big) = \pm\tau(zx^m(xoy)x^n)$

bulunur. Son eşitlikte $n(-n') = -nn'$ özelliği ve τ nun bir otomorfizm olduğu kullanılırsa

$d(z)\sigma([x,y]) \pm \tau(z)\tau(x^m(xoy)x^n) = \pm\tau(z)\tau(x^m(xoy)x^n)$

olur. Buradan her $x, y \in N$ için

$d(z)\sigma([x,y])$=0

elde edilir.

Bu eşitlik Teorem 4.3 deki [4.4] eşitliği ile aynıdır. Benzer yöntem uygulanarak N nin değişmeli bir halka olduğu bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $d(Z) = (0)$ olsun.

Hipotezde y yerine xy yazılırsa

$f([x,xy]) = \pm\tau(x^m(xoxy)x^n)$

elde edilir. Burada N bir sol yakın olduğundan

$f(x[x,y]) = \pm\tau(x^{m+1}(xoy)x^n)$

bulunur. Bu eşitlik çarpımsal genelleştirilmiş (σ,τ) $-$türev tanımı kullanılarak düzenlenirse

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)f([x,y]) = \pm\tau(x^{m+1}(xoy)x^n)$

elde edilir. Bu ifadede [4.17] eşitliği kullanılırsa

$d(x)\sigma([x,y]) + \tau(x)\big(\pm\tau(x^m(xoy)x^n)\big) = \pm\tau(x^{m+1}(xoy)x^n)$

olur. Bu ifadede $n(-n') = -nn'$ özelliği ve τ nın bir otomorfizm olduğu kullanılırsa

$d(x)\sigma([x,y]) \pm \tau(x^{m+1}(xoy)x^n) = \pm\tau(x^{m+1}(xoy)x^n)$

elde edilir. Buradan her $x, y \in N$ için

$d(x)\sigma([x, y]) = 0$

sağlanır.

Bu eşitlik Teorem 4.3 in ispatındaki [4.7] eşitliği ile aynıdır. Benzer yöntemle ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Argaç, N. (1997). On prime and semiprime near-rings with derivations. *Int. J. Math and Math Sci*., Vol.20, No:4, 737-740.

Beidleman, J. 1967. Strictly prime distributively generated near-rings. *Mathematische Zeitschrift*, 100 (2): 97-105

Bell, H. and Mason, G. (1987). On derivations in near rings. Near-rings and Near-fields, *North-Holland Mathematical Studies*, 137, 31-35.

Bell, H. E. and Kappe, L. C. (1989). Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions. *Acta math*. *Hungarica*, 53, 339-346.

Bell, H. E. (1997). On derivations in near-rings II. *Kluwer Academic Pub. Math. Appl., Dordr.*, 426, 191-197.

Birkenmeier G., Heatherly H. E., Lee E. (1993). Prime ideals in near-rings. *Results in Mathematics*, 24 (1): 27-48.

Booth, G. L., Groenewald, N. J., Veldsman, S. (1990). A Kurosh- Amitsur prime radical for near-rings. *Communications in Algebra*, 18 (9): 3111-3122.

Boua, A. and Oukhtite, L. (2011). Derivations On Prime Near-rings. *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, 4 (2), 162-167.

Daif, M. N. (1991). When is a multiplicative derivation additive. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 14 (3), 615-618.

Daif, M. N., Bell, H. E. (1992). Remarks on derivations on semiprime rings. *International J. Math. and Math. Science*, 15, 205-206.

Dickson, L.E., (1905). Definations of a Group and a Field by İndependent Postulates. *Trans. Amer. Math. Soc*., 6: 198-204.

Goldman, H. and Semrl, P. (1969). Multiplicative derivations on C(X). *Monatsh Math.*, 121 (3), 189-197.

Groenewald N. J., (1991). Different prime ideals in near-rings. *Communications in Algebra*, 19 (10): 2667- 2675.

Herstein, I. N. (1978). A note on derivations. *Canad. Math. Bull.,* 21(3), 369-370.

Holcombe, W. L. M. (1970). Primitive Near-rings. *University of Leeds*, PhD Thesis, Leeds, 153 s.

Kamal, A. M. and Al-Shaalan, K. H. (2013). Existence of derivations on near-rings. *Math. Slovaca*, 63, No:3, 431-438.

Kamal, A. M. and Al-Shaalan, K. H. (2013). Commutativity of near-rings with (σ, τ) $-$derivations. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 21(1), 121-142.

Laxton R. R. (1964). Prime ideals and the ideal radical of a distributively generated near-ring. *Mathematische Zeitschrift*, 83 (1): 8-17.

Martindale III, W. S. (1969). When are multiplicative maps additive. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21, 695-698.

Ramakotaiah, D. (1967). Radicals for near-rings. *Mathematische Zeitschrift*, 97 (1): 45-56.

Ramakotaiah D., Rao G. K. (1979). IFP near-rings. *Journal of Australian Mathematical Society*, 27 (3): 365-370.

Shang, Y. (2011). A study of derivations in prime near-rings. *Mathematica Balkanica*, Vol. 25, Fasc. 4.

Shang, Y. (2015). A note on the commutativity of prime near-rings. *Algebra Colloquim*, 22:3, 361-366.

Siddeeque, M. A. (2017). Generalized multiplicative derivations in near-rings. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT),* Vol. 50, No. 5, 252-260.

Taşdemir, F. (2013). Asal yakın-halkalar ve asal yakın-halka modüllerinin karakterizasyonu üzerine. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü* (Doktora Tezi), 65s, Kayseri.

Posner, E. C. (1957). Derivations in Prime Ring. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1093-1100.

Pilz, G., (1983). Near-Rings. 2nd Ed., Amsterdam, New York, Oxford, North Holland, 470s.

Van Der Walt, A. P. J. (1964). Prime ideals and nil radicals in near-rings. *Archiv der Mathematik*. 15 (1): 408-414.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Zeliha BEDİR
Doğum Yeri ve Tarihi	Malatya, 13.06.1988
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi Matematik Bölümü 58140 Sivas
E-posta Adresi	zelihabedir@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Darende Lisesi, 2005
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2010
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Matematik Bölümü, Cebir ve Sayılar Teorisi, 2013

İş Tecrübesi

Cumhuriyet Üniversitesi	Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi, 2014