

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

EZGİ GÜLENC

İSTANBUL, 2014

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

EZGİ GÜLENC

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU

İSTANBUL, 2014

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Programı

Tezin Adı : Adi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Öğrencinin Adı Soyadı : Ezgi Gülenç

Tez Savunma Tarihi : 12.06.2014

Bu yüksek lisans tezi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç. Dr. Tunç BOZBURA
Enstitü Müdürü

Bu yüksek lisans tezi gerekli şartları yerine getirmiş ve tarafımdan onaylanmıştır.

Prof.Dr.Nuri KURUOĞLU
Program Koordinatörü

Bu tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Tez Sınav Jürisi Üyeleri

Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU :

Doç. Dr. Lütfi ARDA :

Yrd. Doç. Dr. Bahri GÜLDOĞAN :

TEŐEKKÖR

Çalıőmalarım boyunca beni yönlendiren, bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU ' ya, çalışmalarıım süresince desteklerini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Ersoy ÖZ' e ve hayatımın her aşamasında yanımda olan, bana her zaman inanan çok kıymetli anneme ve babama teşekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 2014

Ezgi Gülenç

ÖZET

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Ezgi Gülenç

Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Programı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ersin Özüğurlu

Haziran, 2014, 64 Sayfa

Bu çalışmada adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan nümerik yöntemler ele alınmıştır. Mühendislik ve fizik alanlarında yapılan çalışmalar için diferansiyel denklemler büyük önem taşımaktadır. Birçok diferansiyel denklem analitik olarak çözülebilmektedir. Ancak çok sayıdaki fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan adi diferansiyel denklemler analitik olarak çözülemeyebilir. Böyle denklemler nümerik metotlarla çözülebilirler. Diferansiyel denklemler için yaklaşık sonuç bulan birçok metot bulunmaktadır.

Bu tezde ilk olarak bu metotlar ele alınmış, metotlar hakkında bilgi verilmiş ve bu yöntemler arasında kıyaslama yapılmıştır. Ardından, seçilen örnek problem üzerinde bu yöntemler ayrı ayrı uygulanmış ve sayısal çözümlerini elde etmek ve bu çözümleri analitik çözümle karşılaştırmak için bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Adi Diferansiyel Denklemler, Nümerik Analiz

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gülenç Ezgi

Graduate Program of Applied Mathematic
Supervisor : Associate Professor Ersin Özüğurlu

June, 2014, 64 pages

In this research, numerical methods used in the solution of ordinary differential equations are discussed. For the work done in the fields of engineering and physics equations is of great importance. Many differential equations can be solved analytically. However, many ordinary differential equations arising in physical applications can not be solved analytically. Such equations can be solved by numerical methods. There are several methods for approximate results of differential equations.

In this thesis, these methods are discussed firstly and then these methods are explained in detail. Beside, there is also a comparison among them. Then, on the selected sample problems, the methods were applied separately to obtain the numerical solutions. To compare these numerical solutions with analytical solutions, we used Fortran computer program.

Keywords : Ordinary Differential Equations , Numerical Analysis

İÇİNDEKİLER

TABLolar	vii
ŞEKİLLER	viii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. GENEL BİLGİLER	4
3.1 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENEL TANIMI VE SINIFLANDIRMASI	4
3.2 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ	6
3.3 BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN GENEL TEOREMİ	7
4. MATERYAL VE METOT	13
4.1 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN EULER YÖNTEMİ	13
4.2 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN YÜKSEK MERTEBEDEN TAYLOR YÖNTEMLERİ	20
4.3 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMLERİ	23
4.3.1 Orta Nokta Yöntemi	26
4.3.2 İyileştirilmiş Euler Yöntemi	27
4.3.3 Heuns's Yöntemi	27
4.3.4 4.Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	27
4.3.5 Hata Kontrolü ve Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi	28
4.4 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÇOK ADIMLI YÖNTEMLER	32
4.4.1 Adams-Bashforth İki Adımlı Açık Yöntemi	38
4.4.2 Adams-Bashforth Üç Adımlı Açık Yöntemi	39
4.4.3 Adams-Bashforth Dört Adımlı Açık Yöntemi	39
4.4.4 Adams-Bashforth Beş Adımlı Açık Yöntemi	39
4.4.5 Adams-Moulton İki Adımlı Kapalı Yöntemi	40
4.4.6 Adams-Moulton Üç Adımlı Kapalı Yöntemi	40

4.4.7 Adams-Moulton Dört Adımlı Kapalı Yöntemi	40
5. BULGULAR VE TARTIŞMA	44
5.1 Adi Diferansiyel Denklem İçin Euler Yöntemine Örnek	44
5.2 Adi Diferansiyel Denklem İçin Yüksek Mertebeden Taylor Yöntemine Örnek	47
5.3 Adi Diferansiyel Denklem İçin Runge-Kutta Yöntemlerine Örnek.....	52
5.4 Adi Diferansiyel Denklem İçin Çok Adımlı Yöntemlere Örnek.....	59
6. TARTIŞMA	64
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	65
KAYNAKÇA.....	66
EKLER.....	68
EK 1: Bölünmüş Farklar	69
EK 2: Taylor Teoremi	73
EK 3: İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi	76
EK 4: Örnek 5.1 İçin Fortran Program Kodu	77
EK 5: Örnek 5.2 İçin Fortran Program Kodu	79
EK 6: Örnek 5.3 İçin Fortran Program Kodu	81
EK 7: Örnek 5.4 İçin Fortran Program Kodu	88

TABLULAR

Tablo 4.1 : Adams-Basforth için integral değerleri.....	36
Tablo 5.1 : Euler yöntemi sonuç tablosu.....	44
Tablo 5.2 : Euler yöntemi hata sınırı ve gerçek hata tablosu.....	46
Tablo 5.3 : 2. ve 4.mertebeden Taylor yöntemi sonuç tablosu.....	49
Tablo 5.4 : Orta nokta-İyileştirilmiş Euler-Heun's yöntemi sonuç tablosu.....	52
Tablo 5.5 : 4.mertebeden Runge-Kutta yöntemi sonuç tablosu.....	55
Tablo 5.6 : Adım değerine karşılık gelen yerel kesme hata tablosu.....	56
Tablo 5.7 : Euler-İyileştirilmiş Euler -4. Mertebeden Runge-Kutta sonuç tablosu.....	58
Tablo 5.8 : Adams-Bashfort ve Adams-Moulton yöntemi sonuç tablosu.....	59
Tablo 6.1 : Yerel kesme hatası.....	63

ŞEKİLLER

Şekil 3.1 : Basit Sarkaç	6
Şekil 3.2 : Konveks Küme.....	9
Şekil 4.1 : Euler yönteminin ilk adımı.....	15
Şekil 4.2 : Euler yönteminin sırasıyla tüm adımları.....	15
Şekil 4.3 : Hata analizi.....	19
Şekil 5.1 : $h=0.2$ için Euler yönteminin çözüm grafiği.....	45
Şekil 5.2 : $h=0.2$ için Euler yönteminin hata grafiği.....	45
Şekil 5.3 : $h=0.2$ için 2.mertebeden Taylor yönteminin çözüm grafiği.....	49
Şekil 5.4 : $h=0.2$ için 2.mertebeden Taylor yönteminin hata grafiği.....	50
Şekil 5.5 : $h=0.2$ için 4.mertebeden Taylor yönteminin çözüm grafiği.....	50
Şekil 5.6 : $h=0.2$ için 4.mertebeden Taylor yönteminin hata grafiği.....	51
Şekil 5.7 : $h=0.2$ için Orta nokta yönteminin çözüm grafiği.....	52
Şekil 5.8 : $h=0.2$ için Orta nokta yönteminin hata grafiği.....	53
Şekil 5.9 : $h=0.2$ için İyileştirilmiş Euler yönteminin çözüm grafiği.....	53
Şekil 5.10 : $h=0.2$ için İyileştirilmiş Euler yönteminin hata grafiği.....	54
Şekil 5.11 : $h=0.2$ için Heun's yönteminin çözüm grafiği.....	54
Şekil 5.12 : $h=0.2$ için Heun's yönteminin hata grafiği.....	55
Şekil 5.13 : $h=0.2$ için 4.mertebeden Runge-Kutta yönteminin çözüm grafiği.....	57
Şekil 5.14 : $h=0.2$ için 4.mertebeden Runge-Kutta yönteminin hata grafiği.....	58
Şekil 5.15 : $h=0.2$ için Adams-Basforth yönteminin çözüm grafiği.....	60
Şekil 5.16 : $h=0.2$ için Adams-Basforth yönteminin hata grafiği.....	60
Şekil 5.17 : $h=0.2$ için Adams-Moulton yönteminin çözüm grafiği.....	61
Şekil 5.18 : $h=0.2$ için Adams-Moulton yönteminin hata grafiği.....	61
Şekil 5.19 : Yöntemlerin hata grafiği	62

1. GİRİŞ

Nümerik yöntemler, diferansiyel denklemler için çok önemlidir. Çünkü birçok mühendislik ve fen bilimlerinde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemi yoktur. Bu nedenle; analitik metotlar uygulanamadığı zaman bu problemler nümerik yöntemler kullanılarak çözülmektedir.

Dolayısıyla gerçek hayattaki birçok problem, türevler arasındaki ilişkiyi görmek daha kolay olduğundan diferansiyel denklemlerle modellenir.

Örneğin Newton'un ikinci kanunu

$$f = ma$$

ivmenin hızın zamanla değişimi olduğu hatırlanarak

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{f}{m}$$

şeklinde birinci dereceden, veya hızın da mesafenin türevi olduğu hatırlanarak

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a = \frac{f}{m}$$

şeklinde ikinci dereceden bir adi diferansiyel haline getirilebilir. İvmenin sabit olması halinde bu denklemlerin analitik çözümleri sırasıyla

$$v(t) = at + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

şeklinde olup, çözümlerde yer alan v_0 ve s_0 sabitleri sırasıyla hız ve konumun başlangıç değerleridir. Bu denklemler kullanılarak, bağımsız değişken olan t zamanının herhangi bir değerinde v hızının ve s konumunun sayısal değerleri elde edilebilir.

Birçok diferansiyel denklem analitik olarak çözülebilir ve bulunan genel çözümde denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi integral sabiti yer alır. Şayet integral sabit sayısı kadar koşul ortaya konulursa sabitlerin değerlerini elde etmek mümkün olur.

Bütün koşulların bağımsız değişkenin aynı değeri için belirlenmesi halinde problem

“başlangıç değer problemi” olarak adlandırılır. Koşullar bağımsız değişkenin iki farklı

değerinde, özellikle ilgilenilen bir bölgenin sınırlarında verildiği takdirde problem “sınır

değer problemi” olarak nitelendirilir.

Bu çalışmada adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan sayısal teknikler ele alınacaktır. Problemin sayısal olarak çözümü için gerekli sayıda koşulun bilinmesi ve bu koşulların sayısal çözümde kullanılması gereklidir. Çözüm tekniklerine Euler yöntemi ile başlanacak ve ardından Yüksek Mertebeden Taylor yöntemleri, Runge-Kutta Yöntemleri ve Çoklu Adım Yöntemleri ele alınacaktır. Seçilen örnek bir adi diferansiyel denklem probleminin sayısal çözümlerini elde etmek ve bu çözümleri analitik çözümle karşılaştırmak için bilgisayar programı hazırlanacaktır.

2. İLGİLİ LİTERATÜR

Diferansiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında, diferansiyel ve integral hesabın keşfinden hemen sonra, İngiliz matematikçi Newton (1642-1727) ve Alman matematikçi Leibnitz (1641-1716) ile başlar. Daha sonraları, matematik tarihinde büyük isim yapmış olan, İsviçreli matematikçilerden Bernouilli kardeşler takip eder. 18. yüzyılda, Euler, Clairaut, Lagrange, D'Alembert, Charbit, Monge, Laplace ile 19. yüzyılda da, Chrystal, Cauchy, Jacobi, Ampere, Darboux, Picard, Fusch ve F.G. Frobenius, diferansiyel denklemler teorisini, bugünkü ileri seviyeye getiren matematikçilerdir.

Belli tip diferansiyel denklemlerin, belli şartlar altında bir çözümlerinin mevcut olmasının ispatı, diferansiyel denklemler teorisinde varlık teoremi konusunu teşkil etmekte olup, bu da, ilk olarak 1820 ile 1830 yılları arasında, Fransız matematikçi A.L. Cauchy tarafından tesis edilmiş ve daha sonra gelenler tarafından geliştirilmiştir.

Diferansiyel denklem kavramının, fonksiyonlar teorisi, diferansiyel geometri, mekanik, astronomi, fiziki-kimya konuları ile sıkı bir ilgisi vardır.

Bazı diferansiyel denklemlerin analitik anlamda çözümlerine ulaşılamaması sonucu nümerik çözüm ve nümerik integral kavramlarına ihtiyaç duyulmuştur. Diferansiyel denklemler, uygulamalı matematik alanında, fiziksel olayların problemlerinde ve matematiksel modelleme problemlerinde kullanılmaktadır.

Fiziksel olayların matematiksel ifadesi olan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelere bağlı olarak 20. yüzyılın ilk çeyreğinde başlayarak günümüze kadar devam eden bir süreci oluşturmaktadır. 20. yüzyıl, diferansiyel denklemlerin geometrik ve topolojik olarak yeni bir versiyonudur. Amaç çözümün geometriksel olarak davranış niteliğini anlamaktır. Daha fazla bilgiye ihtiyaç duyulduğunda, nümerik yöntem ile elde edilen veriler kullanılmıştır. Bilgisayarlar, lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çalışmasına hız katmıştır.

3. GENEL BİLGİLER

3.1 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TANIMI VE SINIFLANDIRILMASI

Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre (diferansiyel) türevlerini içeren bağıntıya *diferansiyel denklem* denir.

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken bir tane ise bu diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir.

Bir veya daha çok bağımlı değişken, birden fazla bağımsız değişken ve bunların türevlerinden oluşan diferansiyel denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir.

Bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi o *diferansiyel denklemin mertebesini* belirtir.

Bir diferansiyel denklemin mertebesinin kuvvetine o *diferansiyel denklemin derecesi* denir.

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri 1.dereceden ve denklemi bağımlı değişken ve onların türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlere bağlı ise bu denkleme *lineer diferansiyel denklem* denir.

Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} = x \sin x$$

diferansiyel denklemi sınıflandırılırsa; bu denklemde y bağımlı x bağımsız değişken, adi diferansiyel denklem, 1.mertebe, 1.derece ve lineer diferansiyel denklemdir.

Bir diferansiyel denklem,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

veya genel olarak

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde yazılır.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

gösterim şekilleri de doğrudur.

Bağımlı değişkenin tek olması halinde genellikle bağımsız değişkeni x ile bağımlı değişkeni de y ile gösterilir.

Örneğin, **i)** $\frac{dy}{dx}$ burada y bağımlı, x bağımsız değişkendir.

ii) $\ln y' + y + xy = -x$ burada y bağımlı x bağımsız değişkendir.

Adi diferansiyel denklemlerde y nin x e göre türevleri değişik şekillerde gösterilir.

Örneğin, y nin x e göre,

Birinci türevi;

$$\frac{dy}{dx} = y', D = \frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = Dy$$

İkinci türevi;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'', D = \frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$$

Üçüncü türevi;

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''', D = \frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = D^3y \text{ şeklinde yazılır.}$$

Adi diferansiyel denklemlere ait birkaç örnek :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - w^2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{2x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{1}{2} - e^{2x}$$

Kısmi diferansiyel denklemlere ait birkaç örnek:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2u}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad u(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2y}{\partial t^2} \quad , \quad y(x,t)=0$$

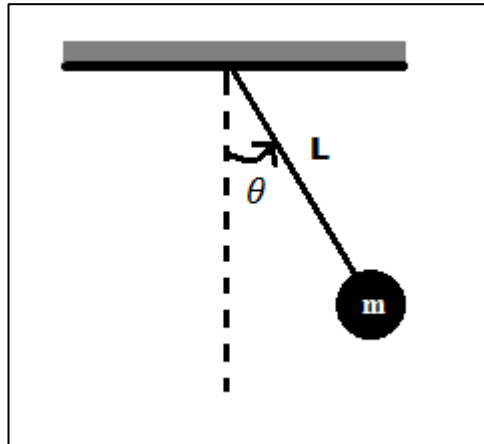
$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} = 0 \quad , \quad u(x,y)=0$$

3.2 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Basitleştirilmiş varsayımlar altında sarkaç salınım hareketi ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle tanımlanır.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Şekil 3.1 : Basit sarkaç



Burada L sarkacın uzunluğu, $g \approx 9.8 \text{ m/sn}^2$ dünyanın sabit yerçekimi ve θ sarkacın dikeyle yaptığı açıdır.

Ek olarak, eğer sarkacın harekete başladığı durum $t=t_0$ anında, $\theta(t_0) = \theta_0$, (θ_0 sabit) ve sarkacın bu noktadaki hızı, $\theta'(t_0) = \theta'_0$, özel olarak belirtirse, bu problem başlangıç değer problemi olarak adlandırılır. θ nın küçük değerleri için, $\sin\theta$ yerine θ alındığında, (*Taylor açılımından*) bu problem basitleştirilerek lineer başlangıç değer problemi olur.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} = 0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

Bu problem standart bir diferansiyel denklem tekniğiyle çözülebilmektedir. θ nın daha büyük değerleri için yaklaşım metodu kullanılmalıdır. Birinci mertebeden başlangıç değer problemine göre açıkça bulunmuş çözümler, adi diferansiyel denklem üzerine herhangi bir ders kitabında birçok metotla detaylandırılır. Pratikte, fiziksel olayların çalışmalarından kaynaklı problemlerin sadece birkaçı tam olarak çözülebilir. Bu bölümde başlangıç koşulu, $y(a) = \alpha$ olan

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b,$$

diferansiyel denklem formundaki problemi yaklaşık olarak çözmeye ilgilenecektir.

3.3 BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN GENEL TEOREMİ

Diferansiyel denklemler, değişken değiştirmeyi içeren fizik ve mühendislik problemlerini modellemek için kullanılır. Gerçek hayattaki pek çok durumda, bu örnek diferansiyel denklemi çözmek çok karışıktır. İki yaklaşımla çözüm aranır. İlk yaklaşımda; lineer olmayan diferansiyel denklem lineerleştirilir ve orijinal denklemin çözümü olarak kullanılır. Diğer yaklaşım metodu; bu bölümde incelenecek olan orijinal problemin yaklaşık çözümü için kullanılan metottur. Bu yaklaşım, daha kesin sonuçlar ve gerçek hata bilgilerini verdiği için en yaygın kullanılanıdır. Bu bölümde ele alınacak metot, başlangıç değer probleminin çözümüne sürekli yaklaşım üretmemektedir. Aksine yaklaşımlar belli bir yerde ve eşit aralıklardaki noktalarda bulunuyor. Ara değerlere

ihtiyaç duyulursa, bazı interpolasyon metotları, örneğin; Newton, kullanılır. Başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini ele almadan önce adi diferansiyel denklem teorisinden birkaç tanıma ve sonuca ihtiyaç vardır. Problemdeki küçük değişikliklerin, çözümde küçük değişiklikler gösterip göstermediğini bilmeye ihtiyaç duyulur, çünkü bu nümerik metotların kullanımında yuvarlama hatalarının meydana gelmesi sebebiyle çok önemlidir.

Tanım 3.3.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in D$ için,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlayan $L > 0$ sabiti varsa, $f(t, y)$ fonksiyonuna y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlıyor denir ve L sabiti f fonksiyonunun Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.

Örnek 1 Eğer $D = \{(t, y) | 1 \leq t \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ ve $f(t, y) = t|y|$ ise D deki herhangi (t, y_1) ve (t, y_2) noktaları için,

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |t|y_1| - t|y_2|| \\ &= |t|||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Bundan dolayı; f , D de, y değişkenine göre Lipschitz sabiti 2 olacak şekilde sağlar. Lipschitz sabiti için mümkün olan en küçük değer 2 dir, çünkü

$$|f(2,1) - f(2,0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|.$$

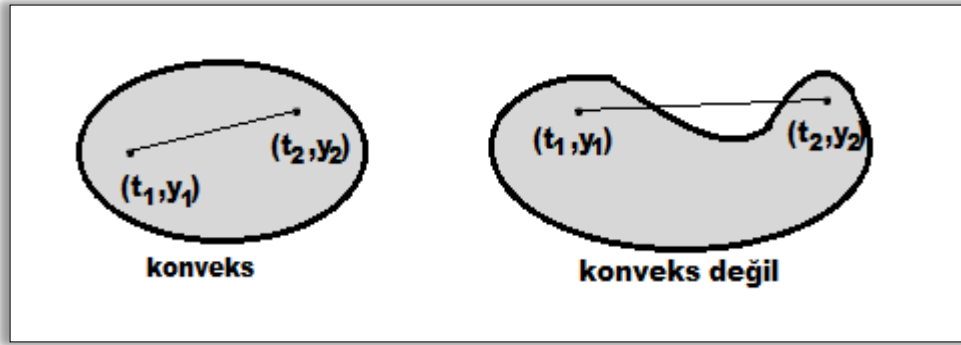
Tanım 3.3.2 $\forall (t, y_1)$ ve $(t, y_2) \in D$ ve $((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) \in D$ ise D ye \mathbb{R}^2 de bir konveks küme denir. Geometrik olarak Tanım 3.3.2 şunu ifade eder:

D 'deki herhangi iki nokta için, bu iki noktayı birleştiren doğrudan D 'nin içinde ise bu takdirde D ye konveks küme denir. Bu alanlar, bu bölümde

$$D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

şeklinde göz önüne alınacaktır, burada a ve b sabit.

Şekil 3.2 Konveks küme



Teorem 3.3.3 Varsayalım ki, $f(t, y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ konveks kümesi üzerinde tanımlı olsun. Eğer, $\forall (t, y) \in D$ için

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L, \quad (1.1)$$

eşitsizliğini sağlayan $L > 0$ sabiti varsa, bu takdirde $f(t, y)$, D üzerinde y değişkenine göre L Lipschitz sabiti olmak üzere Lipschitz koşulunu sağlar.

Teorem 3.3.4 Farzedelim ki, $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$ ve $f(t, y)$, D 'de sürekli olsun. Eğer f fonksiyonunun y değerinde ve D 'de Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, başlangıç değer problemi,

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \text{ için } y(a) = \alpha$$

tek bir $y(t)$ çözümüne sahiptir.

Örnek 2 $y' = 1 + t \sin(ty), 0 \leq t \leq 2, y(0) = 0$

başlangıç değer problemi ele alınır, t 'yi sabit tutup ve fonksiyona ortalama değer teoremi uygulanır

$$f(t, y) = 1 + t \sin(ty),$$

buradan $y_1 \leq y_2$ iken

$$\frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \xi) = t^2 \cos(\xi t)$$

olacak şekilde $\xi \in (y_1, y_2)$ sayısının var olduğu bulunur. Böylece

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |y_2 - y_1| |t^2 \cos(\xi t)| \leq 4|y_2 - y_1|$$

ve f, y değişkeninde $L = 4$ iken Lipschitz koşulunu sağlar.

Ek olarak ; $f(t, y) ; 0 \leq t \leq 2$ ve $-\infty < y < \infty$ iken süreklidir. Teorem 3.3.4 bu başlangıç değer probleminin tek bir çözümü olduğunu belirtir. Belli bir problemin, küçük bir değişiklik ya da *pertürbasyonun* çözümde küçük değişiklikler yaratıp yaratmadığı nasıl belirlenir?

Öncelikle bu kavramı da açıklamak için pratik bir tanım verilmesi gerekir.

Tanım 3.3.5

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (1.2)$$

başlangıç değer problemi; aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, iyi konumlanmıştır denir.

- i) Problemin, tek bir $y(t)$ çözümü varsa;
- ii) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $k(\varepsilon)$ pozitif sabiti vardır, öyle ki $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ ve $|\delta(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(t)$, $[a, b]$ 'de sürekli olmak üzere tek çözüm $z(t)$ 'dir.

Tüm $a \leq t \leq b$ için $|z(t) - y(t)| < k(\varepsilon)\varepsilon$ olacak şekilde

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \varepsilon_0 \quad (1.3)$$

diferansiyel denkleminin tek bir $z(t)$ çözümü mevcuttur. (1.3) denklemini ile belirtilen (1.2) orijinal problemi ile ilişkili bir "pertürbasyon problemi" olarak adlandırılır. Burada diferansiyel denklem ifadesinde bir $\delta(t)$ hatasının varlığını ve başlangıç koşulunda da bir ε_0 hatasının olduğu varsayılır.

Teorem 3.3.6 Farz edelim ki , $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b \text{ ve } -\infty < y < \infty\}$.

Eğer f sürekli ve D 'de , y deki değeri Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, başlangıç değer problemi

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) , \quad a \leq t \leq b , \quad y(a) = \alpha$$

iyi tanımlıdır.

Örnek 3 $D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 1 , \quad -\infty < y < \infty\}$ ve

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1 , \quad 0 \leq t \leq 2 , \quad y(0) = 0.5 \quad (1.4)$$

başlangıç değer problemi dikkate alınsın. Buradan;

$$\left| \frac{\partial(y - t^2 + 1)}{\partial y} \right| = |1| = 1 ,$$

Teorem (3.3.3) belirtir ki , $f(t, y) = y - t^2 + 1$, D üzerinde , y de ve $L = 1$ iken Lipschitz koşulunu sağlar. f , D ' de sürekli olduğundan Teorem(3.3.6) dan problem iyi tanımlıdır.

Doğruluğunu doğrudan gösterebilmek için 'pertürbasyon problemi' dikkate alınır.

$$\frac{dz}{dt} = z - t^2 + 1 + \delta , \quad 0 \leq t \leq 2 , \quad z(0) = 0.5 + \varepsilon_0 , \quad (\delta \text{ ve } \varepsilon_0 \text{ sabit}) \quad (1.5)$$

sırasıyla (1.4) ve (1.5) ten çözüm ,

$$y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t \text{ ve } z(t) = (t + 1)^2 + (\delta + \varepsilon_0 - 0.5)e^t - \delta$$

Eğer $|\delta| < \varepsilon$ ve $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ ise bu taktirde tüm t ler için

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta + \varepsilon_0)e^t - \delta| \leq |\delta + \varepsilon_0|e^2 + |\delta| \leq (2e^2 + 1)\varepsilon$$

böylece (1.4) teki problem $k(\varepsilon) = 2e^2 + 1$, $\forall \varepsilon > 0$ için iyi tanımlıdır.

4. ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

4.1 EULER YÖNTEMİ

Euler yöntemi pratikte nadiren kullanılsa da, elde edilmesinin basitliği daha ileri tekniklerin elde edilmesinde kullanılabilir.

Metodun amacı, iyi konumlanmış

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (1.6)$$

başlangıç değer problemine bir yaklaşım elde etmektir.

Gerçekte , $y(t)$ çözümüne sürekli bir yaklaşım elde edilemeyecek, ancak y ye yaklaşımlar $[a, b]$ aralığında ‘ağ noktası’ olarak adlandırılan noktalarda yapılacaktır. İlk yaklaşık çözüm bu noktalardan elde edilir, aralıktaki diğer noktalarda yaklaşık çözüm interpolasyon ile bulunur. Biz ilk koşul olan, $[a, b]$ aralığı boyunca eşit dağılmış ağ noktalarında hesaplayacağız. Bu koşul, pozitif bir N tamsayısı ve ağ noktası seçilerek sağlanır.

$$t_i = a + ih, \quad \forall i = 0, 1, 2, 3 \dots, N \text{ için.}$$

İki nokta arasındaki mesafe $h = \frac{b-a}{N}$ dir ve adım aralığı olarak adlandırılır. Euler yöntemini elde etmek için Taylor Teoremine ihtiyaç vardır.

Farz edelim ki, $y(t)$,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

denkleminin tek çözümü olsun, $[a, b]$ de iki sürekli türevelere sahip olsun, böylece (t_i, t_{i+1}) de bazı ξ_i ler için her bir $i=0, 1, 2, \dots, N-1$ için, Taylor Teoremini $t = t_i$ noktasında $y(t)$ fonksiyonunun içine yazılırsa,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2!}y''(\xi_i) \quad , \quad y \in C^2([a, b])$$

y nin (t_{i+1}) deki yaklaşık değeri aşağıdaki formülle elde edilir.

$h = t_{i+1} - t_i$ olduğuna göre

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_i)$$

ve $y(t_i)$ için (1.6) denklemini sağlar.

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_i). \quad (1.7)$$

$\forall i = 1, 2, 3, \dots, N$ için $\omega_i \approx y(t_i)$ yaklaşık değerini hesaplamak için Taylor açılımındaki kalan terim ihmal edilerek Euler yöntemi elde edilir.

Bu nedenle Euler yöntemi,

$$\omega_0 = \alpha$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i), \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \text{ için} \quad (1.8)$$

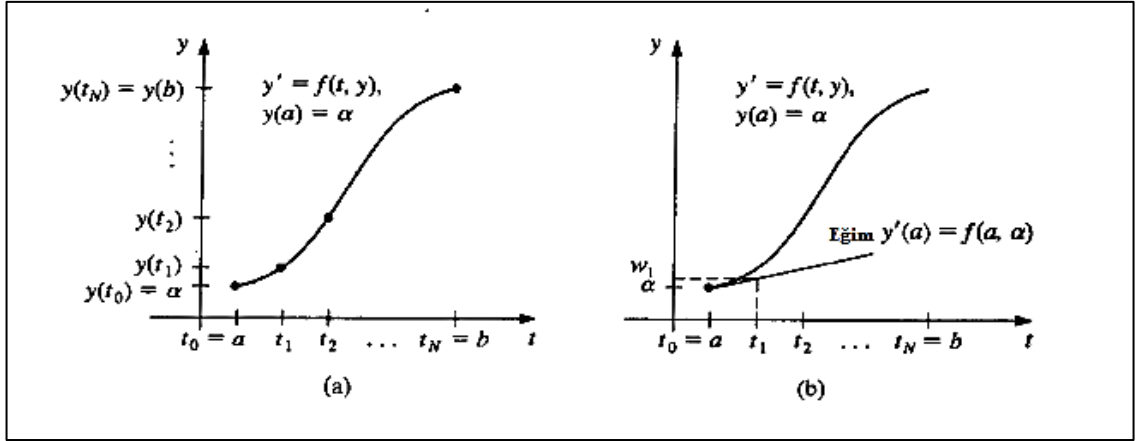
(1.8) denklemi Euler yöntemine bağlı fark denklemi olarak adlandırılır. Euler yöntemini geometrik olarak anlamak için, dikkat edin ki ω_i , $y(t_i)$ ye yakın bir yaklaşım olduğu zaman problem iyi konumlanmıştır, varsayımı ;

$$f(t_i, \omega_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

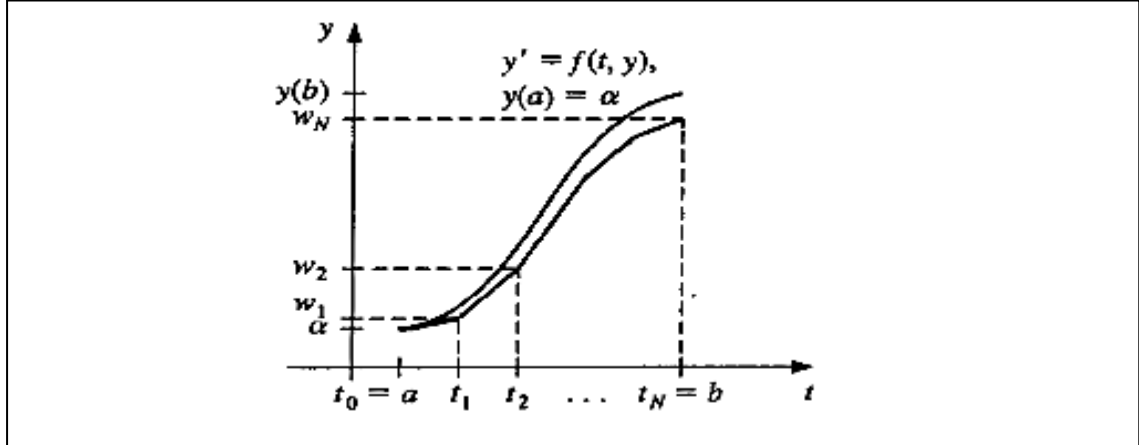
ifade eder.

Şekil 4.1 (a) da $y(t_i)$ fonksiyonunun grafiği gösterilmektedir. Şekil 4.1 (b) de Euler yönteminin ilk adımı ve Şekil 4.2 te de adımlar sırayla gösterilmektedir.

Şekil 4.1: Euler Yönteminin ilk adımı



Şekil 4.2: Euler Yönteminin sırasıyla tüm adımları



Euler yöntemi; pratikte yeterli olmamasına rağmen, uygulamalarında üretilen hatayı analiz etmek için yeterli bir başlangıçtır. Sonraki bölümlerde ele alınacak daha kesin yöntemler için, hata analizi aynı yolu takip eder ancak daha karmaşıktır.

Euler yönteminde, bir hata sınırı elde etmek için iki tane yardımcı teoreme ihtiyaç duyulur.

Teorem 4.1.1 Tüm $x \geq -1$ ve herhangi bir m pozitif sayısı için

$$0 \leq (1 + x)^m \leq e^{mx}$$

dir.

İspat $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ a Taylor teoremini uygulayalım ve $n=1$;

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2e^\xi$$

yi verir, burada ξ , x ve 0 arasındadır. Buradan,

$$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2e^\xi = e^x$$

ve $1 + x \geq 0$ olduğundan

$$0 \leq (1 + x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}.$$

Teorem 4.1.2 Eğer s ve t pozitif gerçekte sayılar $\{a_i\}_{i=0}^k$ bir dizi , $a_0 \geq -\frac{t}{s}$ ve

$$\forall i = 0,1,2, \dots, k \text{ için } a_{i+1} \leq (1 + s)a_i + t$$

ise bu taktirde

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left(a_0 + \frac{t}{s} \right) - \frac{t}{s} \quad (1.9)$$

İspat Sabit i değeri için, (1.9) eşitsizliği gösterir ki

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1 + s)a_i + t \\ &\leq (1 + s)[(1 + s)a_{i-1} + t] + t \\ &\leq (1 + s)\{(1 + s)[(1 + s)a_{i-2} + t] + t\} + t \\ &\vdots \\ &\leq (1 + s)^{i+1}a_0 + [1 + (1 + s) + (1 + s)^2 + \dots + (1 + s)^i]t. \end{aligned}$$

Ama,

$$1 + (1 + s) + (1 + s)^2 + \dots + (1 + s)^i = \sum_{j=0}^i (1 + s)^j$$

geometrik seridir.

Toplamları ,

$$\frac{1 - (1 + s)^{i+1}}{1 - (1 + s)} = \frac{1}{s} [(1 + s)^{i+1} - 1]$$

Buradan ;

$$a_{i+1} \leq (1 + s)^{i+1} a_0 + \frac{(1 + s)^{i+1} - 1}{s} t = (1 + s)^{i+1} \left(a_0 + \frac{t}{s} \right) - \frac{t}{s},$$

$x = 1 + s$ iken Teorem 4.1.1 i kullanılarak

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left(a_0 + \frac{t}{s} \right) - \frac{t}{s}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3 Farz edelim ki f , $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ bölgesinde sürekli ve Lipschitz koşulunu L sabiti ile sağlasın ve tüm $t \in [a, b]$ için

$|y''(t)| \leq \mu$ olacak şekilde bir μ pozitif sabiti vardır. $y(t)$, başlangıç değer probleminin tek bir çözümünü $y' = f(t, y)$, $a \leq t \leq b$, $y(a) = \alpha$ ifade etsin ve N pozitif tamsayısı için $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ terimleri Euler yöntemi tarafından üretilen yaklaşımlar olsun. Bu taktirde, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$|y(t_i) - \omega_i| \leq \frac{h\mu}{2L} [e^{L(t_i-a)} - 1] \quad (1.10)$$

Teorem 4.1.3 ün zayıflığı çözümün 2.türevi için bilinen sınırların gereksinimine ihtiyaç duyar. Bu koşul gerçek hatanın sınırını elde edilmesine engel olmasına rağmen, belirtmekte fayda var ki, eğer $\frac{\partial f}{\partial t}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ nin her ikisinde varsa kısmi türev için zincir kuralı kullanılarak

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))$$

ifadesi elde edilir. Böylece $y''(t)$ için $y(t)$ yi bilmemize gerek kalmadan bir hata sınırını elde etmek mümkün olur.

Gerçekte diferansiyel denklemin formu,

$$\omega_0 = \alpha$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i) , \quad \forall i = 0,1,2, \dots, N - 1 \text{ için}$$

t_i , ağ noktasında y_i çözümüne yaklaşım hesaplanamaz.

Onun yerine ,

$$U_0 = \alpha + \delta_0$$

$$U_{i+1} = U_i + hf(t_i, U_i) + \delta_{i+1} , \quad \forall i = 0,1,2, \dots, N - 1 \text{ için} \quad (1.11)$$

formunu kullanırız, burada δ_i, U_i ile birlikte yuvarlatma hatasını belirtir. Teorem 4.1.3 ün ispatında, bunun için daha basit bir metot kullanılır. Euler metodu tarafından verilen sonlu fark yaklaşımı için yuvarlatma hatasını ihmal edebiliriz.

Teorem 4.1.4 $y(t)$, başlangıç değer probleminin tek çözümünü belirtsin.

$$y' = f(t, y) , \quad a \leq t \leq b , \quad y(a) = \alpha \quad \text{ve} \quad (1.12)$$

U_0, U_1, \dots, U_N (1.11) de kullanılan yaklaşımlardı. Eğer $|\delta_i| < \delta \quad \forall i = 0,1,2, \dots, N$ için ve Teorem 4.1.3 ün hipotezi (1.12) için devam ettiğinde

$$|y(t_i) - U_i| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{h\mu}{2} + \frac{\delta}{h} \right) [e^{L(t_i-a)} - L] + |\delta_0| e^{L(t_i-a)}, \quad (1.13)$$

$i = 0,1,2, \dots, N$ için (1.13) sıçrama hatası h a göre lineer değildir. Gerçekte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h\mu}{2} + \frac{\delta}{h} \right) = \infty$$

yeterince küçük h değerleri için hatanın daha büyük olması bekleniyordu. Analiz, h adım aralığı için sıçrama aralıklarıyla belirleniyor.

$$E(h) = \left(\frac{h\mu}{2}\right) + \left(\frac{\delta}{h}\right)$$

dan ,

$$E'(h) = \left(\frac{\mu}{2}\right) + \left(\frac{\delta}{h^2}\right)$$

yi belirlenir.

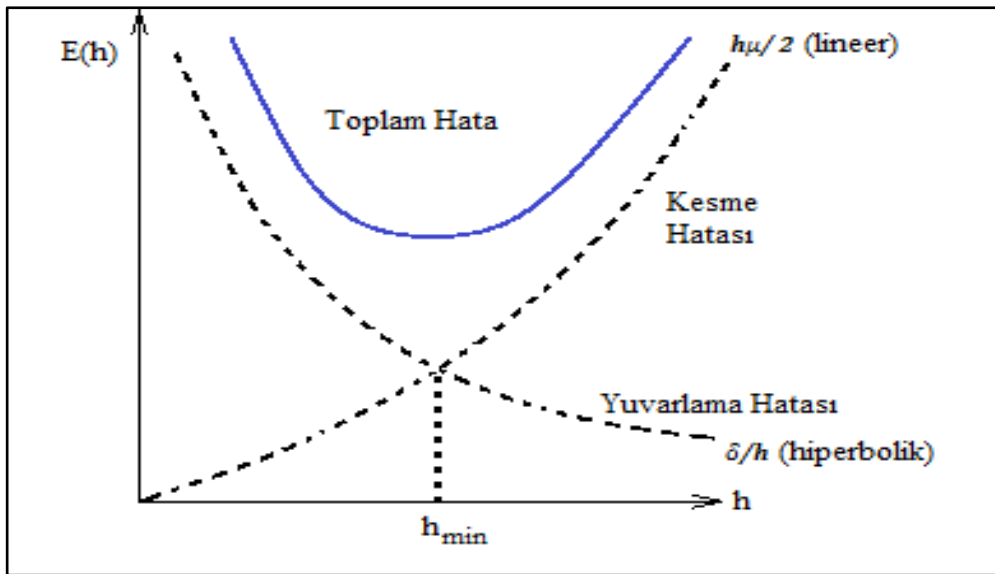
Eğer; $h < \sqrt{\frac{2\delta}{\mu}}$ iken $E'(h) < 0$ ise $E(h)$ azalandır.

$h > \sqrt{\frac{2\delta}{\mu}}$ iken $E'(h) > 0$ ise $E(h)$ artandır.

$E(h)$ en küçük değerini , $h = \sqrt{\frac{2\delta}{\mu}}$ iken alır. (1.14)

Yaklaşımında, azalan h , bu değer in ötesinde toplam hatayı artırma eğilimindedir. Normalde, bu alt sınırdaki δ değeri yeterince küçüktür, h Euler yönteminin çalışmasını etkilemez.

Şekil 4.3 Hata Analizi



4.2 YÜKSEK MERTEBEDEN TAYLOR YÖNTEMLERİ

Sayısal tekniklerin amacı, az çaba ile doğru yaklaşımları belirlemek olduğundan, çeşitli yaklaşım yöntemlerinin verimliliğini karşılaştırmak için bir yönteme ihtiyaç duyarız. İlk dikkate alacağımız mukayese yöntemi yerel kesme hatası olarak adlandırılan yöntemdir. Yaklaşım için kullanılan fark denklemi diferansiyel denklemin gerçek çözümü için yetersiz kaldığından belirli bir adımda yerel kesme hatası oluşur.

Tanım 4.2.1 $\forall i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için

$$\omega_0 = \alpha$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h\phi(t_i, \omega_i)$$

ile verilen fark yöntemi;

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h\phi(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için yerel kesme hatasına sahiptir. Euler yöntemi için,

$$y' = f(t, y) , \quad a \leq t \leq b , \quad y(a) = \alpha$$

probleminin i . adımdaki yerel kesme hatası,

$$\forall i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad \text{için} \quad \tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i)$$

Burada her zamanki gibi $y_i = y(t_i)$, t_i de çözümün gerçek değerini belirtir. Bu hata bir yerel kesme hatasıdır, çünkü bir önceki adımın kesin olduğunu varsayarak belirli bir adımda yöntemin doğruluğunu ölçer. Aslında, yerel kesme hatası diferansiyel denkleme, adım büyüklüğüne ve yaklaşımdaki belirli adıma bağlıdır.

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

denklemini dikkate alınırsa, (t_i, t_{i+1}) aralığındaki bazı ξ_i ler için Euler yönteminde yerel kesme hatasının

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\xi_i)$$

olduğu görülür. $y''(t)$, $[a, b]$ de bir M pozitif sabiti ile sınırlı olduğu bilindiğinde, bu

$$|\tau_{i+1}(h)| = \left| \frac{h}{2} y''(\xi_i) \right| \leq \frac{h}{2} |y''(\xi_i)| \leq \frac{h}{2} M$$

olduğu anlamına gelir, böylece Euler yönteminin yerel kesme hatası $O(h)$ tır. Adi diferansiyel denklemlerin çözümü için fark denklemini seçiminin bir yolu, uygun bir sınırdaki yöntemlerin hesaplanmasını ve sayısını korurken yerel kesme hatası, mümkün olduğu kadar büyük p değeri için $O(h^p)$ olacak şeklindedir. Diferansiyel denklemin çözümüne Taylor teoreminde n=1 olarak Euler yöntemi elde edildiği için ilk denemede fark yöntemlerinin yakınsaklık özelliklerini geliştirmek için, bu elde etme yöntemi n nin daha büyük değerlerine genişletilir.

Farz edelim ki $y(t)$;

$$y' = f(t, y) \quad , \quad a \leq t \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha$$

başlangıç değer probleminin çözümü (n+1) tane sürekli türevelere sahip olsun, yani

$(y \in C^{n+1}([a, b]))$.

Eğer, $y(t)$ fonksiyonunu n. Mertebeden Taylor polinomunu kullanarak t_i noktası civarında seriye açıp, t_{i+1} noktasında hesaplanırsa, (t_i, t_{i+1}) arasındaki bazı ξ_i değerleri için,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i)$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) \quad (1.15)$$

elde edilir.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y''(t) = f'(t, y(t)),$$

$y(t)$ nin ardışık türevlerini verir ve genel olarak,

$$y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t)).$$

Bu sonuçlar (1.15) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y(t_i)) + \dots \\ + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i)) \end{aligned} \quad (1.16)$$

elde edilir. (1.16) ya karşılık gelen fark denklem yöntemi ξ_i yi içeren kalan terimi silerek elde edilir. Bu metot n. Mertebeden Taylor metodunu olarak adlandırılır:

$$\omega_0 = \alpha,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hT^{(n)}(t_i, \omega_i) , \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \text{ için}, \quad (1.17)$$

burada,

$$T^{(n)}(t_i, \omega_i) = f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, \omega_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, \omega_i).$$

Not olarak; Euler yöntemi, birinci mertebeden Taylor yöntemidir. (n=1)

Teorem 4.2.2 h adım aralığında ve $y \in C^{n+1}[a, b]$ de

$$y'(t) = f(t, y(t)) , \quad a \leq t \leq b , \quad y(a) = \alpha$$

nın n. mertebeden Taylor yöntemi kullanılırsa, yerel kesme hatası $O(h^n)$ olur.

4.2 RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

Önceki bölümde özetlenen Taylor yöntemi, yüksek basamaktan yerel kesme hatasının istenen özelliklerine sahiptir, ama $f(t, y)$ nin türevinin hesaplanması ve değerlendirilmesi gerektiğinden dezavantajlıdır. Bu pek çok problem için karışık ve zaman alıcıdır, bu sebepten Taylor yöntemi pratikte nadiren kullanılır.

Runge-Kutta yöntemleri, $f(t, y)$ nin türevinin hesaplanmasını ve değerlendirmesini hariç tuttuğumuzda, Taylor yönteminin yüksek basamaktan yerel kesme hatasına sahiptir. Bu yöntemlerin elde edilmesi fikri sunulmadan önce, iki değişkenli Taylor Teoremini hatırlatmaya ihtiyaç vardır.

Teorem 4.3.1 Farz edelim ki, $f(t, y)$ ve onun $(n+1)$. kısmi türevleri

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

bölgesinde sürekli ve $(t_0, y_0) \in D$ olsun.

Her $(t, y) \in D$ için ξ ; t ve t_0 arasında, μ ; y ve y_0 arasında olacak şekilde

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y),$$

burada

$$\begin{aligned} P_n(t, y) = & f(t_0, y_0) + \left[(t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right] \\ & + \left[\frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \right. \\ & \left. + \frac{(y - y_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \right] + \dots \\ & + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t - t_0)^{n-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0, y_0) \right] \end{aligned}$$

ve

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t-t_0)^{n+1-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}(\xi, \mu).$$

$P_n(t, y)$ fonksiyonu, (t_0, y_0) daki f fonksiyonu için n . dereceden Taylor polinomu diye adlandırılır ve $R_n(t, y)$, $P_n(t, y)$ ye bağlı kalan terimdir.

Örnek 1

$$f(t, y) = e^{\left[-\frac{(t-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4}\right]} \cos(2t + y - 4)$$

fonksiyonu ile birlikte, $P_2(t, y)$, $(2,3)$ noktası civarında f in 2. dereceden Taylor polinomunu gösterir,

$$P_2(t, y) = 1 - \frac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \frac{3}{4}(y-3)^2$$

iki değişkenli polinomdur. Bu polinomu belirlemek için gerekli türevi elle hesaplamak yorucudur. Runge-Kutta yönteminin elde edilmesindeki ilk adım, α_1, α_2 ve β_1 değerlerini belirlemek için $\alpha_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ ifadesinin

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y)$$

ye yaklaşımında 2. mertebeden Taylor yöntemi için yerel kesme hatasının $O(h^2)$ den büyük olmaması koşulu aranır.

$$f'(t, y) = \frac{df}{dt}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)y'(t)$$

ve $y'(t) = f(t, y)$ olduğundan

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)f(t, y) \quad (1.18)$$

denklemini verir.

(t,y) de $f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ 1. dereceden Taylor polinomu olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned} a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1) &= a_1 f(t, y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a_1 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \\ &\quad + a_1 R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) \end{aligned} \quad (1.19)$$

verir, burada t ve $t + \alpha_1$ arasında bazı ξ , y ve $y + \beta_1$ arasında μ vardır ve

$$R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + a_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu). \quad (1.20)$$

f in katsayıları ve (1.18) ile (1.19) denklemlerindeki türevlerin eşlenmesi sonucu üç denklem elde edilir.

$$f(t, y) : \quad a_1 = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) : \quad a_1 \alpha_1 = \frac{h}{2};$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) : \quad a_1 \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y).$$

a_1, α_1, β_1 parametreleri tek bir şekilde $a_1 = 1$, $\alpha_1 = \frac{h}{2}$ ve $\beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$ olarak belirlenir, böylece

$$T^{(2)}(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) - R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right)$$

ve denklem (1.20) den

$$R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) = \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu)$$

$$+ \frac{h^2}{8} (f(t, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu).$$

Eğer f in tüm 2. mertebeden kısmi türevleri sınırlı ise, bu taktirde

$$R_1 \left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y) \right),$$

2.mertebeden Taylor yönteminin yerel kesme hatasının derecesi $O(h^2)$ dir. Sonuç olarak, 2.mertebeden Taylor yönteminin yerine yeni yöntemi kullanarak hata ekleyebiliriz ama hatanın mertebesini arttıramayız.

$$f \left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y) \right)$$

nin yazılması orta nokta yöntemi olarak da bilinen özel bir Runge-Kutta yöntemidir.

4.3.1 Orta Nokta Yöntemi

$$\omega_0 = \alpha$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf \left(\omega_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{h}{2} f(t_i, \omega_i) \right), \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \text{ için.}$$

$a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ de sadece üç parametre mevcut ve hepsi $T^{(2)}$ nin eşleşmesinde gereklidir, bizim herhangi bir yüksek mertebeden Taylor yöntemi için, koşulu sağlayabilecek daha karmaşık bir forma ihtiyaç vardır.

$$T^{(3)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y) + \frac{h^2}{6} f''(t, y)$$

yaklaşımı için en uygun dört parametrelili form,

$$a_1 f(t, y) + a_2 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)) \quad (1.21)$$

dir; ve bununla birlikte, bu $\left(\frac{h^2}{6}\right) f''(t, y)$ nin genişlemesinin sonucunda ortaya çıkan

$$\frac{h^2}{6} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right]^2 f(t, y)$$

terimini eşleştirmek için yeterli esneklik yoktur. Sonuç olarak; (1.21) kullanılarak $O(h^2)$ yerel kesme hatasıyla elde edilen en iyi yöntemdir. (1.21), dört parametreye sahiptir ancak diğer seçimlerden daha esnektir, dolayısıyla $O(h^2)$ yöntemleri sağlanmış olur.

4.3.2 İyileştirilmiş Euler Yöntemi

İyileştirilmiş Euler yöntemi de, önemli bir $O(h^2)$ metotudur. Bu metotta;

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ ve $\alpha_2 = \delta_2 = h$ seçilerek aşağıdaki fark denklemi elde edilir.

$$\omega_0 = \alpha$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2} [f(t_i, \omega_i) + f(t_{i+1}, \omega_i + hf(t_i, \omega_i))] , \forall i = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

4.3.3 Heun's Yöntemi

Diğer önemli $O(h^2)$ metotu, Heun's yöntemidir. Burada

$\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$, ve $\alpha_1 = \delta_2 = \frac{2}{3}h$ seçilerek aşağıdaki fark denklemi elde edilir.

$$\omega_0 = \alpha$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{4} \left[f(t_i, \omega_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, \omega_i + \frac{2}{3}hf(t_i, \omega_i)\right) \right] , \forall i = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Her iki yöntemin yerel kesme hatalarının mertebesi, 2.mertebeden Runge-Kutta yöntemi olarak sınıflandırılır.

4.3.4 4.Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi :

$$\omega_0 = \alpha ,$$

$$k_1 = hf(t_i, \omega_i) ,$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_1\right) ,$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_2\right) ,$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, \omega_i + k_3) ,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) , \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 .$$

$y(t)$ çözümünün beş tane sürekli türevi varsa ($C^5([a, b])$), bu yöntem $O(h^4)$ yerel kesme hatasına sahiptir. Yöntemdeki k_1, k_2, k_3, k_4 notasyonlarının tanıtılmasının sebebi $f(t, y)$ nin ikinci değişkeninde art arda yuvarlama ihtiyacını yok etmektir.

4.3.5 Hata Kontrolü ve Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi

Bir başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü ve belirli bir integralin yaklaşık değer problemi arasında yakın bir ilişki vardır. Bu beklenen bir durumdur, başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü için uyarlanabilir yöntemler vardır ki bu yöntemler sadece etkili değil, hatanın kontrolünü de kapsar. İdeal bir fark denklem yöntemi;

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h\phi(t_i, \omega_i, h_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$y' = f(t, y) \quad , \quad a \leq t \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha,$$

başlangıç değer probleminin $y(t)$ çözümüne yaklaşık bir değer alabilmesi için $\varepsilon > 0$ için, şu özelliğe sahip olmalıdır; $|y(t_i) - \omega_i|$ global hatasının ε değerini aşmaması için minimum sayıda ağ noktaları ($i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) kullanılmalıdır. Ağ noktalarının minimum sayıda olması ve ayrıca beklendiği gibi fark yönteminin global hata kontrolünün eşit aralıklı noktalarda olmasını istemek tutarsızlıktır. Bu bölümde ağ noktalarının uygun seçimiyle, etkili bir biçimde fark denklem yönteminin hata kontrolü için kullanılan teknikler hesaplanacaktır.

Bir yöntemin global hatası genel olarak belirlenememesine rağmen, yerel kesme hatasıyla global hata arasında yakın bir ilişki vardır. Farklı mertebeden yöntemlerin kullanımıyla yerel kesme hatası tahmin edilebilir ve bu tahmini kullanarak öyle bir adım aralığı seçelim ki yerel kesme hatasını aynı ve global hatayı kontrol altında tutsun. Bu tekniği örneklersek, farz edelim ki iki yaklaşım tekniğimiz var, birincisi; n.mertebeden Taylor yönteminden elde edilmiş, n.mertebeden yöntem

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\phi(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+1})$$

üretilen yaklaşımlar;

$$\omega_0 = \alpha ,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h\phi(t_i, \omega_i, h) , \quad i > 0 \text{ için } , \quad \bar{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1}) \text{ de yerel kesme hatasıdır.}$$

Genelde, bu yöntemin Taylor yönteminin Runge-Kutta'ya uygulanmasıyla üretilir. İkinci yöntem de bu yönteme benzerdir ama bir merteye yüksektir. (n+1).mertebeden Taylor yönteminin formu;

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\phi(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+2}),$$

şu yaklaşımları verir ve

$$\bar{\omega}_0 = \alpha$$

$$\bar{\omega}_{i+1} = \bar{\omega}_i + h\bar{\phi}(t_i, \bar{\omega}_i, h) , \quad i > 0 \text{ için } \bar{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1}) \text{ yerel kesme hatasıdır.}$$

Varsayalım ki ; $\omega_i \approx y(t_i) \approx \bar{\omega}_i$ ve h sabit adım aralığını seçelim ki,

ω_{i+1} ve $\bar{\omega}_{i+1}$ değerleri $y(t_{i+1})$ için yaklaşık değerler olsun.

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i), h) \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - \omega_i}{h} - \phi(t_i, \omega_i, h) \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - [\omega_i + h\phi(t_i, \omega_i, h)]}{h} \\ &= \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - \omega_{i+1}). \end{aligned}$$

Benzer bir yöntem;

$$\bar{\tau}_{i+1}(h) = \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - \bar{\omega}_{i+1})$$

ve sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - \omega_{i+1}) \\ &= \frac{1}{h}[(y(t_{i+1}) - \bar{\omega}_{i+1}) + (\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1})] \end{aligned}$$

$$= \bar{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h}(\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}).$$

Ama $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$ ve $\bar{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$, bu yüzden $\tau_{i+1}(h)$ in önemli kısmı;

$$\frac{1}{h}(\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1})$$

den gelmelidir.

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1})$$

bize mertebesi $O(h^n)$ olan bir yöntemin, yerel kesme hatası için kolayca hesaplanan bir yaklaşım verir.

Amacımız, sadece yerel kesme hatasını kolayca tahmin etmek değil, belli bir sınır içinde, yerel kesme hatasını sabit tutacak adım büyüklüğünü ayarlamaktır. Bunu yapmak için farz edelim ki,

$$\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$$

olduğu için, k, h tan bağımsız bir sayı olmak üzere

$$\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$$

olur. ω_{i+1} ve $\bar{\omega}_{i+1}$ gerçek yaklaşımlarının kullanımı ile tahmin edilebilen, qh yeni bir adım büyüklüklü, n . mertebeden yöntemin uygulanmasıyla meydana gelen yerel kesme hatası

$$\tau_{i+1}(qh) \approx K(qh)^n = q^n(Kh^n) \approx q^n\tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h}(\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1})$$

ε aracılığıyla $\tau_{i+1}(qh)$ ı sınırlamak için

$$\frac{q^n}{h}|\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}| \approx |\tau_{i+1}(qh)| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde q seçilir. Buradan;

$$q \leq \left(\frac{\varepsilon h}{|\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}|} \right)^{1/n}$$

dir.

Runge – Kutta – Fehlberg yöntemi, bu eşitsizlikte kullanılan hata kontrolü için daha yaygın bir yöntemdir.

Bu yöntem;

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

şeklinde ifade edilen 4. mertebeden Runge – Kutta yönteminde hatayı tahmin etmek için

$$\bar{\omega}_{i+1} = \omega_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6,$$

5.mertebeden yerel kesme hatalı Runge-Kutta yöntemi kullanılır, burada

$$k_1 = hf(t_i, \omega_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, \omega_i + \frac{1}{4}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, \omega_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{32}, \omega_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, \omega_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).$$

Bu metodun bir avantajı her adım için f nin sadece 6 tane değer gerektirmesidir. Keyfi olarak 4. ve 5. mertebeden Runge – Kutta metotlarının birlikte kullanılması 4. mertebeden metot için f nin en az 4 değerini ve ek olarak 5. Mertebeden metod için 6 değerini, toplamda da en az 10 fonksiyonel değerini gerektirir.

Hata kontrol teorisinde , i . adımda h nin başlangıç değeri, bu adımda q nun belirlenmesine yol açan; ω_{i+1} ve $\bar{\omega}_{i+1}$ in ilk değerlerini bulmak için kullanıldı ve daha

sonra hesaplamalar tekrarlandı. Bu işlem, hata kontrolü olmaksızın her adımda fonksiyonel değerlerinin sayısının 2. katını gerektirir.

Pratikte, kullanılacak q değerinin artan fonksiyon değerlerinin hesaplanma maliyetini, kayda değer yapmak için seçilir. i . adımda belirlenen q değerleri iki amaç için kullanılır.

Gerekirse ; i . adımda h nin başlangıç seçimini ve qh kullanarak işlemlerin tekrarını reddetmek ($i + 1$). adım için h in uygun bir başlangıç seçimini tahmin etmek fonksiyonel değerlendirmeler yönünden ortaya çıkan işlem yükü nedeniyle adımların tekrar edilmesi durumunda q nun tasarruflu seçilmesine dikkat edilmelidir.

Doğrusu ; $n = 4$ iken Runge-Kutta Fehlberg metodu için,

$$q = \left(\frac{\varepsilon h}{2|\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}|} \right)^{1/4} = 0.84 \left(\frac{\varepsilon h}{|\bar{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}|} \right)^{1/4}$$

en uygun seçimdir.

4.4 ÇOK ADIMLI YÖNTEMLER

t_{i+1} ağ noktasının yaklaşık değeri, önceki t_i ağ noktalarının yalnızca birinden elde edilen bilgilerle bulunduğundan, bu noktaya kadar bahsedilen yöntemlere *tek adımlı yöntemler* adı verilir. Bu yöntemler, t_i ile t_{i+1} arasındaki noktalarda fonksiyonel değerleri kullanabilse de, daha sonra bulunacak yaklaşık değerlerde bu bilgiyi kullanamazlar. Bu yöntemlerin kullandığı tüm bilgiler, yaklaşık çözümün üzerinde bulunduğu alt aralık içerisinde elde edilir.

t_{i+1} deki yaklaşık çözümün elde edilmesinden önce her bir t_0, t_1, \dots, t_i noktasında yaklaşık çözüm mevcut olduğundan ve $|\omega_j - y(t_j)|$ hatası j ile birlikte artma eğiliminde olduğundan, t_{i+1} de yaklaşık bir çözümün bulunması sırasında daha kesin mevcut verileri kullanan yöntemlerin geliştirilmesi mantıklı görünmektedir.

Bir sonraki noktada yaklaşık çözümü bulmak için yaklaşık çözümün önceki ağ noktalarında kullanıldığı yöntemlere *çok adımlı yöntemler* adı verilir. Bu yöntemlerin tanımını aşağıda, iki tür çok adımlı yöntemler olarak birlikte verilmiştir.

$$\text{Tanım 4.4.1 } y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (1.22)$$

başlangıç değer problemini çözmek için *m* adımlı çok adımlı yöntem ; t_{i+1} ağ noktasındaki ω_{i+1} yaklaşık çözümünü bulmak için, aşağıda *m* nin 1'den büyük bir tamsayı olduğu denklem ile belirtilen bir fark denklemine sahiptir:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} = & a_{m-1}\omega_i + a_{m-2}\omega_i + \dots + a_0\omega_{i+1-m} \\ & + h[b_m f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + b_{m-1}f(t_i, \omega_i) \\ & + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, \omega_{i+1-m})], \end{aligned} \quad (1.23)$$

$i = m - 1, m, \dots, N - 1$ için $h = (b - a)/N$, a_0, a_1, \dots, a_{m-1} ve b_0, b_1, \dots, b_{m-1} sabit değerlerdir ve başlangıç değerleri

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad \omega_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

olarak belirtilmiştir.

$b_m = 0$ olduğunda, (1.23) denklem, ω_{i+1} değerini daha önce belirlenen değerlere bağlı olarak açıkça verdiğiinden, bu yönteme *açık yöntem* adı verilir. $b_m \neq 0$ olduğunda, ω_{i+1} (1.23) denkleminin her iki tarafında da bulunduğuundan ve sadece üstü kapalı bir biçimde belirtildiğinden, bu yönteme *kapalı yöntem* adı verilir.

ÖRNEK 1 Her bir $i = 3, 4, \dots, N - 1$ için

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad \omega_3 = \alpha_3, \quad (1.24)$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, \omega_i) - 59f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, \omega_{i-3})],$$

denklemleri, *dördüncü mertebeden Adams-Bashford tekniği* olarak bilinen açık bir dört adımlı yöntemi tanımlar.

Her bir $i = 3, 4, \dots, N - 1$ için,

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad (1.25)$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 19f(t_i, \omega_i) - 5f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + f(t_{i-2}, \omega_{i-2})],$$

denklemleri ise, *dördüncü mertebeden Adams-Moulton tekniği* olarak bilinen kapalı bir üç adımlı yöntemi tanımlar.

(1.24) veya (1.25) denklemlerindeki başlangıç değerlerinin, genellikle $\omega_0 = \alpha$ alıp, kalan değerleri Runge-Kutta yöntemi veya herhangi başka bir tek adımlı yöntemle, bulunarak belirtilmesi gerekir.

(1.25) gibi kapalı bir yöntemi doğrudan uygulamak için, ω_{i+1} için kapalı denklemi çözmek gerekir. Bunun genel olarak yapılabileceği veya ω_{i+1} için özel bir çözümün her zaman bulunabileceği kesin değildir.

Çok adımlı bir yöntemin türetilmesine başlamak için, başlangıç değer probleminin çözümünün (1.22), $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı üzerinde integralinin alınması durumunda, şu özelliğe sahip olacağı göz önünde bulundursun:

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

Böylece,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \quad (1.26)$$

olacaktır. Problemin çözümü olan $y(t)$ yi bilmeden $f(t, y(t))$ nin integrali alınamayacağından, bunun yerine, önceden elde edilmiş $(t_0, \omega_0), (t_1, \omega_1), \dots, (t_i, \omega_i)$ veri noktalarının bazılarıyla belirlenen $f(t, y(t))$ ye $P(t)$ ara değerli polinomunun integrali alınır. Buna ek olarak, $y(t_i) \approx \omega_i$ aldığımızda, (1.26) denklemi şu hale gelir:

$$y(t_{i+1}) \approx \omega_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t) dt \quad (1.27)$$

Her türlü ara değerli polinomun türetme için kullanılabilecek olmasına karşın, en uygun yöntem Newton geri fark formülünü kullanmaktır.

Adams-Bashford açık m adımlı tekniğini türetmek için

$(t_i, f(t_i, y(t_i))), (t_{i-1}, f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))), \dots, (t_{i+1-m}, f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m})))$ yoluyla $P_{m-1}(t)$ geri fark polinomu oluşturulur. $P_{m-1}(t)$, $m-1$ dereceden ara değerli bir polinom olduğundan, (t_{i+1-m}, t_i) içindeki herhangi bir ξ_i sayısı, aşağıdaki denklemle ortaya çıkmaktadır:

$$f(t, y(t)) = P_{m-1}(t) + \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!} (t - t_i)(t - t_{i-1}) \dots (t - t_{i+1-m})$$

$$t = t_i + sh$$

değişkeninin yerine $dt = h ds$ getirilmesinin $P_{m-1}(t)$ ve hata terimine dahil edilmesi, aşağıdaki denklemi ifade eder:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(t_i, y(t_i)) dt \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!} (t - t_i)(t - t_{i-1}) \dots (t - t_{i+1-m}) dt \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k f(t_i, y(t_i)) h (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds \\ &+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \dots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i)) ds. \end{aligned}$$

k nın çeşitli değerleri için $(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$ integralleri kolayca değerlendirilerek, Tablo 4.1 de listelenir.

Örneğin, $k = 3$ olduğunda,

$$\begin{aligned} (-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds &= \int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ds \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (s^3 + 3s^2 + 2s) ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{s^4}{4} + s^3 + s^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \left(\frac{9}{4} \right) = \frac{3}{8}$$

Tablo 4.1: İntegral değerleri

k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

Bunun sonucunda,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = h \left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \dots \right]$$

$$+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i)) ds. \quad (1.28)$$

[0, 1] üzerinde $\int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1)$ işaret değiştirmediğinden, İntegraller için Ortalama Değer Teoremi, $t_{i+1-m} < \mu_i < t_{i+1}$ olduğu herhangi bir μ_i sayısı için (1.28) denkleminde (1.29) denklemini çıkarmak üzere kullanılabilir:

$$\begin{aligned} & \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i)) ds \\ &= \frac{h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) ds \end{aligned}$$

veya

(1.29)

$$h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds.$$

$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$ (1.26) numaralı denklemin řu şekilde yazılması mümkündür:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h \left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \dots \right] \\ + h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds. \quad (1.30)$$

ÖRNEK 2 Üç adımlı Adam-Bashforth tekniğini uygulamak için, $m = 3$ olmak üzere (1.30) denklemi değerlendirilirse:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + h \left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \dots \right] \\ = y(t_i) + h \left\{ f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} [f(t_i, y(t_i)) - f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))] \right. \\ \left. + \frac{5}{12} [f(t_i, y(t_i)) - 2f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] \right\} \\ = y(t_i) + \frac{h}{12} [23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))].$$

Dolayısıyla, üç adımlı Adams-Bashforth yöntemi $i = 2, 3, \dots, N - 1$ için şöyle olacaktır:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{12} [23f(t_i, \omega_i) - 16f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, \omega_{i-2})],$$

Çok adımlı yöntemler, Taylor serisi kullanılarak da türetilebilir. Çok adımlı yöntemlerde yerel kesme hatası, tek adımlı yöntemlerinkine paralel bir biçimde tanımlanır. Tek adımlı yöntemlerde olduğu gibi, yerel kesme hatası, diferansiyel denklemin çözümünün, fark denklemini çözmede nasıl başarısız olduğunu gösteren bir ölçüt sağlamaktadır.

Tanım 4.4.2 $y' = f(t, y)$, $a \leq t \leq b$, $y(a) = \alpha$, başlangıç değer probleminin çözümü $y(t)$ ise ve

$$\omega_{i+1} = a_{m-1}\omega_i + a_{m-2}\omega_i + \dots + a_0\omega_{i+1-m} \\ + h[b_m f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + b_{m-1}f(t_i, \omega_i) + \dots + b_0f(t_{i+1-m}, \omega_{i+1-m})],$$

çok adımlı bir yöntemin $(i + 1)$. adımı ise, bu adımdaki **yerel kesme hatası**,

her $i = m - 1, m, \dots, N - 1$ için şöyle olacaktır:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \dots - a_0y(t_{i+1-m})}{h} - [b_m f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m}))] \quad (1.31)$$

ÖRNEK 3 Örnek 2’de uygulanan üç adımlı Adams-Bashforth yönteminin yerel kesme hatasını belirlemek için, (1.29) numaralı denklemdeki hatanın biçimi ve Tablo 4.1 deki uygun girdi ele alınır:

$$h^4 f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds = \frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))$$

$f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) = y^{(4)}\mu_i$ olduğunu ve Örnek 2 de türetilen fark denklemini kullanarak, herhangi bir $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \frac{1}{12} [23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) \right] = \frac{3h^4}{8} y^{(4)}\mu_i \end{aligned}$$

Gerekli başlangıç değerleri ve yerel yuvarlama hatalarıyla birlikte çok adımlı açık yöntemlerden bazıları aşağıda verilmiştir. Bu tekniklerin uygulanması, Örnek 2 ve 3 teki işlemlerle aynıdır.

4.4.1 Adams-Bashforth İki Adımlı Açık Yöntemi:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2} [3f(t_i, \omega_i) - f(t_{i-1}, \omega_{i-1})] \quad (1.32)$$

denkleminde, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ dir. Yerel kesme hatası ise herhangi bir

$\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$ için $\tau_{i+1}(h) = \frac{5}{12} y'''(\mu_i) h^2$ olur.

4.4.2 Adams-Bashforth Üç Adımlı Açık Yöntemi:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{12} [23f(t_i, \omega_i) - 16f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, \omega_{i-2})] \quad (1.33)$$

denkleminde, $i = 2, 3, \dots, N - 1$ dir. Yerel kesme hatası ise herhangi bir

$\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$ için $\tau_{i+1}(h) = \frac{3}{8} y^{(4)}(\mu_i) h^3$ olur.

4.4.3 Adams-Bashforth Dört Adımlı Açık Yöntemi:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad \omega_3 = \alpha_3, \quad (1.34)$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, \omega_i) - 59f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, \omega_{i-3})]$$

denkleminde, $i = 3, 4, \dots, N - 1$ dir. Yerel kesme hatası ise herhangi bir $\mu_i \in$

(t_{i-3}, t_{i+1}) için $\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$ olur.

4.4.4 Adams-Bashforth Beş Adımlı Açık Yöntemi:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad \omega_3 = \alpha_3, \quad \omega_4 = \alpha_4, \quad (1.35)$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{720} [1901f(t_i, \omega_i) - 2774f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) \\ + 2616f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) - 1274f(t_{i-3}, \omega_{i-3}) + 251f(t_{i-4}, \omega_{i-4})]$$

denkleminde, $i = 4, 5, \dots, N - 1$ dir. Yerel kesme hatası ise herhangi bir

$$\mu_i \in (t_{i-4}, t_{i+1})$$

için

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{95}{288} y^{(6)}(\mu_i) h^5$$

olur.

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

integralinin yaklaşık değerinin belirlenmesinde ilave bir ara değer noktası olarak $(t_{i+1}, f(t_{i+1}, y(t_{i+1})))$ kullanılmasıyla, kapalı yöntemler uygulanabilir. Daha yaygın kapalı yöntemlerin bazıları aşağıda verilmiştir.

4.4.5 Adams-Moulton İki Adımlı Kapalı Yöntemi:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{12} [5f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 8f(t_i, \omega_i) - f(t_{i-1}, \omega_{i-1})] \quad (1.36)$$

denkleminde $i = 1, 2, \dots, N - 1$ dir. Yerel yuvarlama hatası, herhangi bir $\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$ için $\tau_{i+1}(h) = -\frac{1}{24}y^{(4)}(\mu_i)h^3$ olacaktır.

4.4.6 Adams-Moulton Üç Adımlı Kapalı Yöntemi:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 19f(t_i, \omega_i) - 5f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + f(t_{i-2}, \omega_{i-2})] \quad (1.37)$$

denkleminde $i = 2, 3, \dots, N - 1$ dir. Yerel yuvarlama hatası, herhangi bir $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$ için $\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$ olacaktır.

4.4.7 Adams-Moulton Dört Adımlı Kapalı Yöntemi:

$$\omega_0 = \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad \omega_3 = \alpha_3$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{720} [251f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 646f(t_i, \omega_i)]$$

$$-264f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 106f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, \omega_{i-3}) \quad (1.38)$$

Denkleminde $i = 3, 4, \dots, N - 1$ dir. Yerel yuvarlama hatası, herhangi bir

$\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$ için $\tau_{i+1}(h) = -\frac{3}{160}y^{(6)}(\mu_i)h^5$ olacaktır.

m adımlı bir Adams-Bashforth açık yönteminin $(m - 1)$ adımlı Adams-Moulton kapalı yöntemiyle karşılaştırılması ilginçtir. Bu yöntemlerin her ikisi de her adım için f

teriminin m değerlendirmesini içerir ve her ikisinin yerel kesme hatalarında da $y^{(m+1)}(\mu_i)h^m$ terimi mevcuttur. Genel olarak, yerel kesme hatasında f in bulunduğu terimlerin katsayıları, kapalı yöntemlerde, açık yöntemlere kıyasla daha azdır. Bu da kapalı yöntemlerde daha yüksek kararlılık ve daha düşük yuvarlama hatası anlamına gelir.

Kapalı Adams-Moulton yöntemi, aynı dereceden açık Adams-Bashforth yönteminden daha iyi sonuçlar vermiştir. Genellikle bu durumun söz konusu olmasına karşın, kapalı yöntemlerde, bir zayıflık olarak, yöntemi öncelikle ω_{i+1} için cebirsel olarak açık hale çevirmek gerekir. Aşağıdaki başlangıç değer problemi ele alındığında da görülebileceği gibi, bu işlem her zaman mümkün değildir.

$$y' = e^y, \quad 0 \leq t \leq 0.25, \quad y(0) = 1$$

$f(t, y) = e^y$ olduğundan, üç adımlı Adams-Moulton yönteminde fark denklemi olarak aşağıdaki denklem vardır ve bu denklem ω_{i+1} için açık olarak çözülemez:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [9e^{\omega_{i+1}} + 19e^{\omega_i} - 5e^{\omega_{i-1}} + e^{\omega_{i-2}}] .$$

ω_{i+1} e yaklaşık değer belirlemek için Newton yöntemi veya sekant yöntemi kullanılabilir fakat böyle bir durum, işlemi büyük ölçüde karmaşıklaştırır. Uygulamada, çok adımlı kapalı yöntemler yukarıda belirtildiği gibi kullanılmaz. Bunun yerine, açık yöntemlerle elde edilen yaklaşık değerleri iyileştirmek için kullanılır. Açık ve kapalı tekniklerin kombinasyonuna *öngörme-düzeltilme yöntemi* adı verilir. Bu yöntem, yaklaşık bir değer öngörür ve kapalı yöntem, bu öngörüü düzeltir.

Başlangıç değer problemi için aşağıdaki dördüncü derece yöntem ele alınsın. İlk adım, dört adımlı açık Adams-Bashforth yöntemi için $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ ve ω_3 başlangıç değerlerini hesaplamaktır. Bunu yapmak için, dördüncü dereceden tek adımlı bir yöntem olan, dördüncü derece Runge-Kutta yöntemi kullanılır. Bir sonraki adım ise, Adams-Bashforth açık yöntemini öngörücü olarak kullanarak, $y(t_4)$ terimine, $\omega_4^{(0)}$ yaklaşık değerini hesaplamaktır:

$$\omega_4^{(0)} = \omega_3 + \frac{h}{24} [55f(t_3, \omega_3) - 59f(t_2, \omega_2) + 37f(t_1, \omega_1) - 9f(t_0, \omega_0)]$$

$\omega_4^{(0)}$ teriminin üç adımlı kapalı Adams-Moulton yönteminin sağ tarafına yerleştirilmesi ve bu yöntemin bir düzeltici olarak kullanılmasıyla, bu hesaplama iyileştirilebilir. Bu hesaplama aşağıdaki sonucu verir.

$$\omega_4^{(1)} = \omega_3 + \frac{h}{24} [9f(t_4, \omega_4^{(0)}) + 19f(t_3, \omega_3) - 5f(t_2, \omega_2) + f(t_1, \omega_1)]$$

Bu işlemde gereken tek yeni fonksiyon değerlendirmesi, düzeltici denklemindeki $f(t_4, \omega_4^{(0)})$ fonksiyonudur ve f in diğer değerleri önceki yaklaşık değerler için hesaplanmıştır.

Bu durumda, $\omega_4^{(1)}$ değeri $y(t_4)$ e yaklaştırma olarak kullanılır ve Adams-Bashforth yönteminin öngörücü ve Adams-Moulton yönteminin düzeltici olarak kullanılması, $\omega_5^{(0)}$ ve $\omega_5^{(1)}$ in $y(t_5)$ terimine ilk ve son yaklaşımlarını bulmak için tekrarlanır.

$y(t_{i+1})$ terimine daha iyi yaklaşık değerler, aşağıdaki Adams-Moulton formülünün yinelenmesiyle bulunabilir:

$$\omega_{i+1}^{(k+1)} = \omega_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, \omega_{i+1}^{(k)}) + 19f(t_i, \omega_i) - 5f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + f(t_{i-2}, \omega_{i-2})]$$

Ancak, $\omega_{i+1}^{(k+1)}$, $y(t_{i+1})$ çözümü yerine kapalı formülün verdiği yaklaşık değer üzerinde kalır ve daha yüksek doğruluk gerekiyorsa, adım boyutunun küçültülmesi genellikle daha verimli olacaktır.

Diğer çok adımlı yöntemler, $y(t_{i+1})$ üzerinde yaklaşık değer elde etmek için $j \leq i - 1$ için $[t_j, t_{i+1}]$ türünde aralıklar üzerinde ara değerli polinomların integralinin alınmasıyla türetilebilir. Ara değerli bir polinomun $[t_{i-3}, t_{i+1}]$ üzerinde integralinin alınması durumunda, sonuç; açık *Milne yöntemi*dir :

$$\omega_{i+1} = \omega_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(t_i, \omega_i) - f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, \omega_{i-2})]$$

Bu denklemde $\xi_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$ için yerel kesme hatası $\frac{14}{45} h^4 y^{(5)}(\xi_i)$ olacaktır. Bu yöntem, aşağıda, $\xi_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$ için, yuvarlama hatası $-(h^4/90)y^{(5)}(\xi_i)$ olan kapalı **Simpson yöntemi** için sık sık öngörücü olarak da kullanılmakta olup,

$[t_{i-1}, t_{i+1}]$ üzerinde ara değerli bir polinomun integralini almak suretiyle elde edilir:

$$\omega_{i+1} = \omega_{i-1} + \frac{h}{3} [f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 4f(t_i, \omega_i) + f(t_{i-1}, \omega_{i-1})],$$

Milne-Simpson tipi bir öngörücü-düzeltilici yöntemiyle ilgili bir yerel kesme hatası, genellikle Adams-Bashforth-Moulton yöntemindeki bir hatadan daha küçük olsa da, Adams işleminde görülmeyen kesme hatası problemleri edeniyle, bu teknik sınırlı bir kullanıma sahiptir.

5. ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNE ÖRNEKLER

5.1 EULER YÖNTEMİ

Örnek 1 $y' = y - t^2 + 1$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0.5$ ve $N = 10$.

Başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünde Euler yöntemi kullanılsın,

Öyleyse $h = 0.2$, $t_i = 0.2i$, $\omega_0 = 0.5$ ve

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + h(\omega_i - t_i^2 + 1) = \omega_i + 0.2[\omega_i - 0.04i^2 + 1] \\ &= 1.2\omega_i - 0.008i^2 + 0.2, \quad i = 0,1,2, \dots, 9 \text{ için} \end{aligned}$$

Kesin çözüm, $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ dir. Tablo 5.1 de, t_i deki yaklaşık değerler ve gerçek değerlerin arasındaki karşılaştırma gösterilmektedir. Gösterilen karşılaştırmada $\omega_i \approx y(t_i)$ yaklaşık değerini hesaplamak için Taylor açılımında kalan terim ihmal edilerek Euler yöntemi elde edilir.

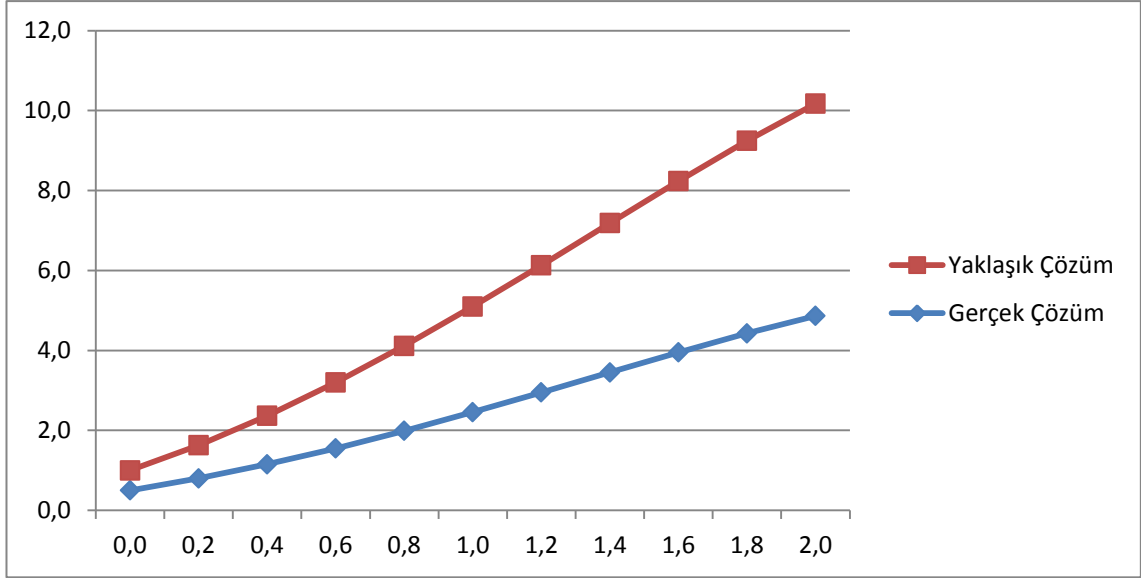
Tablo 5.1: Euler yöntemi için elde edilen sonuçlar

t_i	ω_i	$y_i = y(t_i)$	$E_{0,2} = y_i - y(t_i) $	$E_{0,1} = y_i - y(t_i) $
0.0	0.5000000	0.5000000	0.000000	0.000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986	0.0152986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877	0.0325477
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406	0.0518773
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495	0.0733828
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831	0.0971045
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303	0.1229987
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266	0.1508992
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557	0.1804681
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225	0.2111273
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874	0.2419724

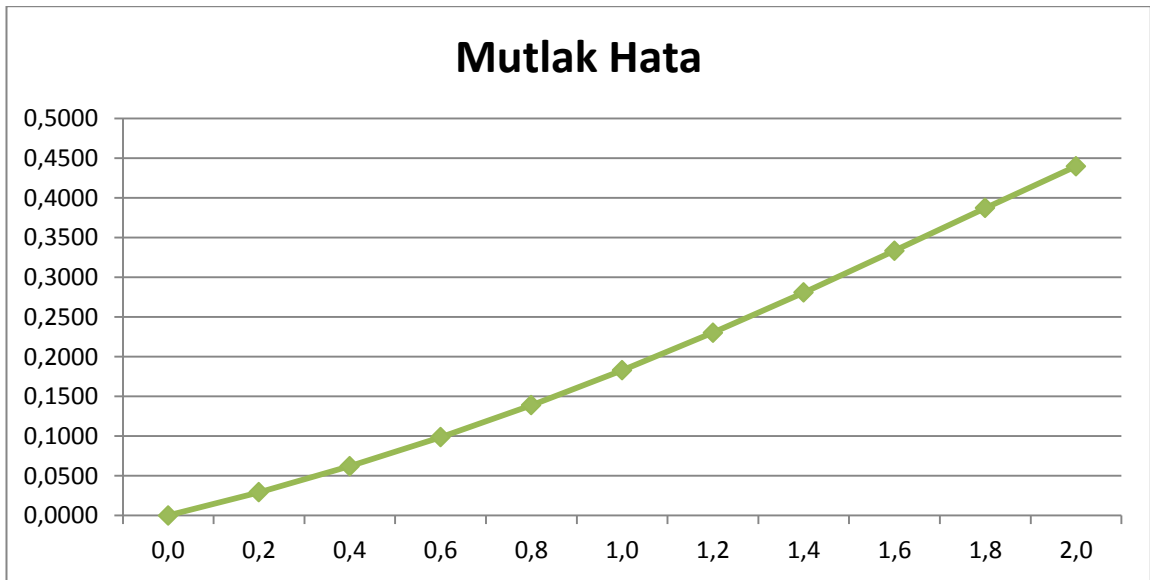
t değerleri arttıkça, hata giderek artmaktadır. Bu kontrollü hata, hatanın doğrusal bir yolda ilerlemesinden, daha kötü olmadığı beklenen Euler yönteminin kararlılığının bir sonucudur.

Ayrıca $h=0.2$ için ve $h=0.1$ için hatalar karşılaştırıldığında adım aralığının yarıya indirilmesi sonucu hatanın da aynı oranda azaldığı görülmektedir. Dolayısıyla aralık ne kadar küçük olursa yapılan hatada o derece azalmış olur.

Şekil 5.1: $h=0.2$ için Euler Yöntemi Çözüm Grafiği



Şekil 5.2: $h=0.2$ için Euler Yöntemi Hata Grafiği



Örnek 2 Örnek 1 de bahsedilen başlangıç değer problemine geri dönüldüğünde,

$$y' = y - t^2 + 1, 0 \leq t \leq 2, y(0) = 0.5,$$

görülyor ki

$$f(t, y) = y - t^2 + 1, \text{ tüm } y \text{ ler için ve } L = 1 \text{ iken}$$

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = 1$$

dir. Bu problem için $y(t) = (t + 1)^2 - \frac{1}{2}e^t$ gerçek çözümdür, böylelikle

$$y''(t) = 2 - 0.5e^t$$

ve tüm $t \in [0, 2]$ için $|y''(t)| \leq 0.5e^2 - 2$, $h=0.2$, $L=1$ ve $M=0.5e^2 - 2$.

Euler yöntemi için hata sınırındaki eşitsizliği kullanarak

$$|y_i - \omega_i| \leq 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1) \text{ elde ederiz.}$$

Tablo 5.2 de, Örnek 1 de bulunan gerçek hata (G.H.) ve bu hata sınırı (H.S.) birlikte gösterilmiştir

Tablo 5.2: Gerçek hata ve hata sınırı değerleri

t_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
G.H.	0.02930	0.06209	0.09854	0.13875	0.18268	0.23013	0.28063	0.33336	0.38702	0.43969
H.S.	0.03752	0.08334	0.13931	0.20767	0.29117	0.39315	0.51771	0.66985	0.85568	1.08264

Dikkat edilmelidir ki, çözümün ikinci türevi aynen kullanılmış olmasına rağmen oluşan hata için Teorem 4.1.3 ün sağlamış olduğu üst sınır oldukça büyüktür. Bu da teoremin, hatanın optimum bir üst sınır vermediğini ifade eder. Teorem 4.1.3 de verilen hata sınırının temel önemi, h adım aralığına lineer bağlı olmasıdır. Sonuç olarak, adım aralığını küçültmek yaklaşımda daha duyarlılık sağlar.

Teorem 4.1.3 ün sonucu ihmal edildiğinde, adım aralığının seçiminde yuvarlama hatası etkili rol oynar. h küçültüldüğünde daha fazla işleme gerek duyulur ve daha fazla yuvarlama hatası beklenir.

5.2 YÜKSEK MERTEBEDEN TAYLOR YÖNTEMLERİ

ÖRNEK 1 $y' = y - t^2 + 1$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0.5$ başlangıç değer problemine

2. ve 4. mertebeden Taylor yöntemini uygulamak istiyoruz, t ye bağlı

$f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1$ nin ilk üç türevini bulmalıyız:

$$f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 + 1 - 2t ,$$

$$f''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1 - 2t) = y' - 2t - 2$$

$$= y - t^2 + 1 - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1 \quad \text{ve}$$

$$f'''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 - 2t - 1) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1.$$

Böylece ,

$$T^{(2)}(t_i, \omega_i) = f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, \omega_i)$$

$$= \omega_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(\omega_i - t_i^2 - 2t_i + 1)$$

$$= \left(1 + \frac{h}{2}\right)(\omega_i - t_i^2 + 1) - ht_i \quad \text{ve}$$

$$T^{(4)}(t_i, \omega_i) = f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, \omega_i) + \frac{h^2}{6} f''(t_i, \omega_i) + \frac{h^3}{24} f'''(t_i, \omega_i)$$

$$= \omega_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(\omega_i - t_i^2 - 2t_i + 1) + \frac{h^2}{6}(\omega_i - t_i^2 - 2t_i - 1)$$

$$+ \frac{h^3}{24}(\omega_i - t_i^2 - 2t_i - 1)$$

$$= \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)(\omega_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right)(ht_i) \\ + 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}$$

Sonuç olarak 2. ve 4. Mertebeden Taylor yöntemi ,

$$\omega_0 = 0.5$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \left[\left(1 + \frac{h}{2}\right)(\omega_i - t_i^2 + 1) - ht_i \right]$$

ve $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için

$$\omega_0 = 0.5$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \left[\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)(\omega_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right)(ht_i) \right. \\ \left. + 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24} \right]$$

eğer ; $h=0.2$, $N=10$ ve $t_i = 0.2i$, $\forall i = 1, 2, \dots, 10$ için.

Buradan 2.mertebeden yöntem

$$\omega_0 = 0.5,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + 0.2 \left[\left(1 + \frac{0.2}{2}\right)(\omega_i - 0.04i^2 + 1) - 0.04i \right] \\ = 1.22\omega_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.22,$$

ve 4.mertebeden yöntem

$$\omega_0 = 0.5$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + 0.2 \left[\left(1 + \frac{0.2}{2} + \frac{0.04}{6} + \frac{0.008}{24}\right)(\omega_i - 0.04i^2) \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{0.2}{3} + \frac{0.04}{12}\right)(0.04i) + 1 + \frac{0.2}{2} - \frac{0.04}{6} - \frac{0.008}{24} \right]$$

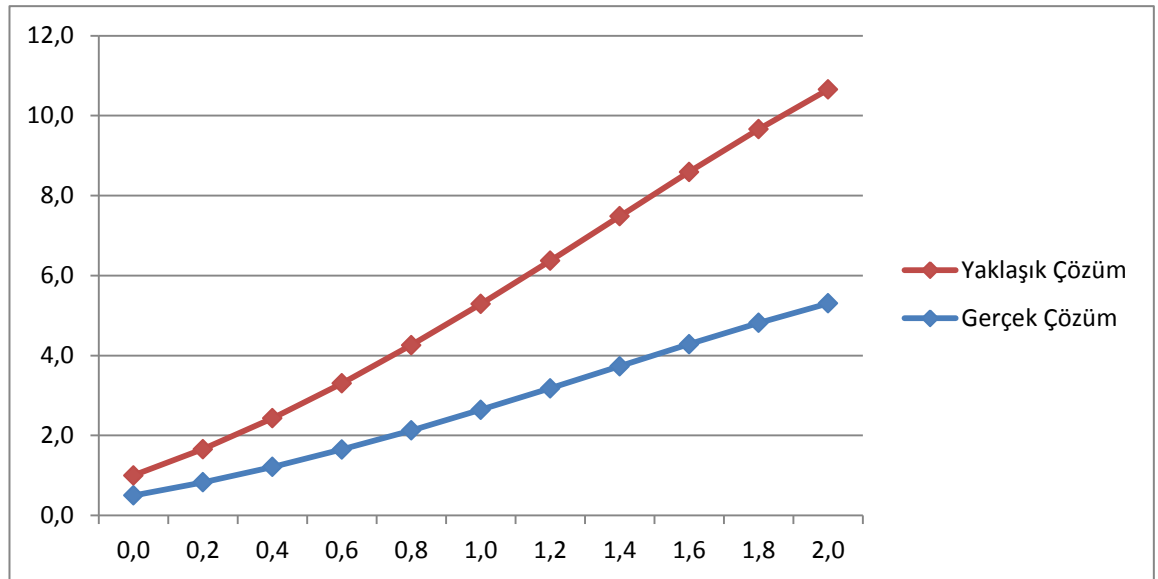
$$= 1.2214\omega_i - 0.008856i^2 - 0.00856i + 0.2186 \text{ olur.}$$

Tablo 5.3 te , $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ nin çözümünün gerçek değerleri, 2. ve 4. mertebeden Taylor yönteminin sonuçları ve bu yöntemi içeren gerçek hatalar listelenmiştir.

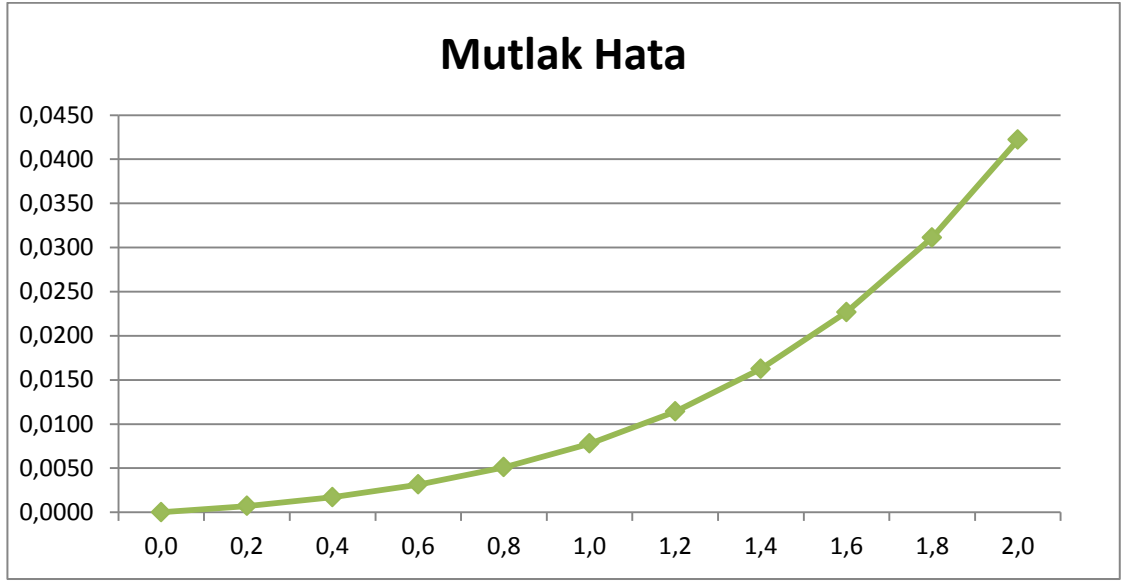
Tablo 5.3: Taylor yöntemi için elde edilen sonuçlar

t_i	$y(t_i)$	(Taylor 2) ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $	(Taylor 4) ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $
0,0	0,50000000	0,50000000	0,00000000	0,50000000	0,00000000
0,2	0,82929860	0,83000000	0,00070137	0,82930000	0,00000137
0,4	1,21408800	1,21580000	0,00171232	1,21409100	0,00000346
0,6	1,64894100	1,65207600	0,00313520	1,64894700	0,00000620
0,8	2,12722900	2,13233300	0,00510311	2,12724000	0,00001025
1,0	2,64085900	2,64864600	0,00778651	2,64087500	0,00001550
1,2	3,17994200	3,19134800	0,01140594	3,17996400	0,00002265
1,4	3,73240000	3,74864400	0,01624417	3,73243200	0,00003242
1,6	4,28348400	4,30614600	0,02266169	4,28352900	0,00004482
1,8	4,81517600	4,84629800	0,03112125	4,81523800	0,00006151
2,0	5,30547200	5,34768300	0,04221153	5,30555600	0,00008392

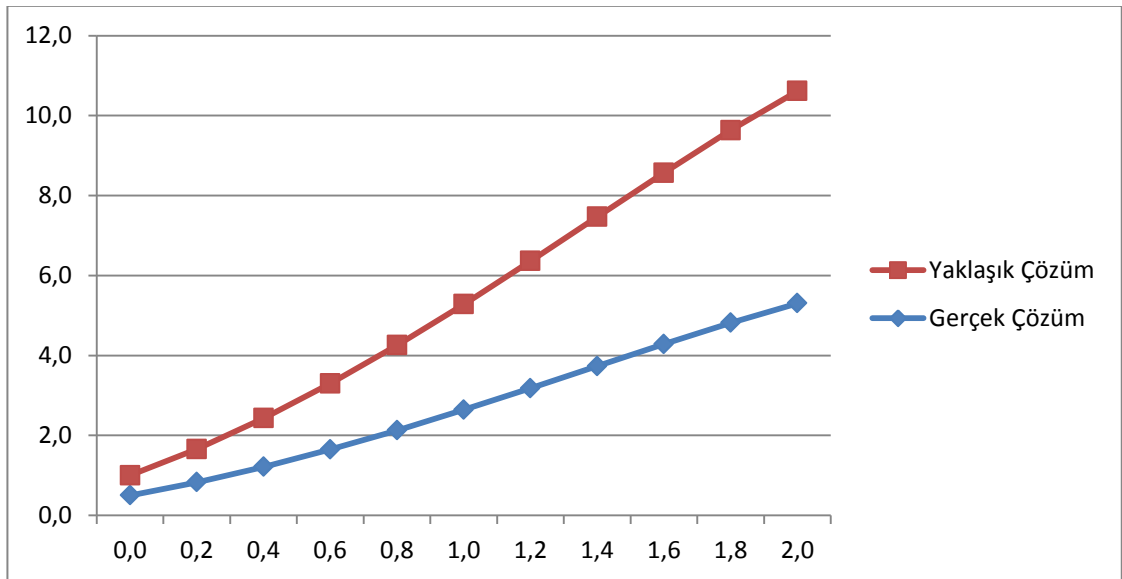
Şekil 5.3: h=0.2 için 2. mertebeden Taylor Yöntemi Çözüm Grafiği



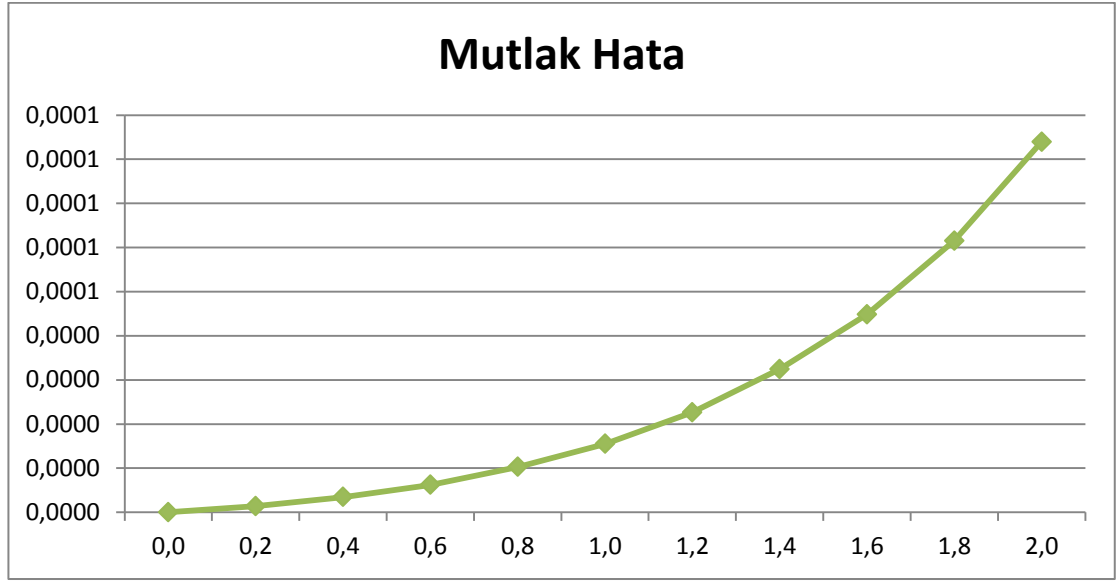
Şekil 5.4: $h=0.2$ için 2.mertebeden Taylor Yöntemi Hata Grafiği



Şekil 5.5 : $h=0.4$ için 4. mertebeden Taylor Yöntemi Çözüm Grafiği



Şekil 5.6: $h=0.2$ için 4.mertebeden Taylor Yöntemi Hata Grafiği



5.3 RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

Örnek 1 $y' = y - t^2 + 1$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0.5$ başlangıç değer problemine 2.mertebeden Runge-Kutta yöntemi uyguladığı farz edilirse; bu durumda

$$N = 10 , h = 0.2 , t_i = 0.2i \text{ ve } \omega_0 = 0.5 .$$

Çeşitli formüllerden elde edilen farklı denklemler $\forall i = 0,1,2, \dots,9$ için

Orta nokta yöntemi : $\omega_{i+1} = 1.22\omega_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.218$;

İyileştirilmiş Euler yöntemi : $\omega_{i+1} = 1.22\omega_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.216$;

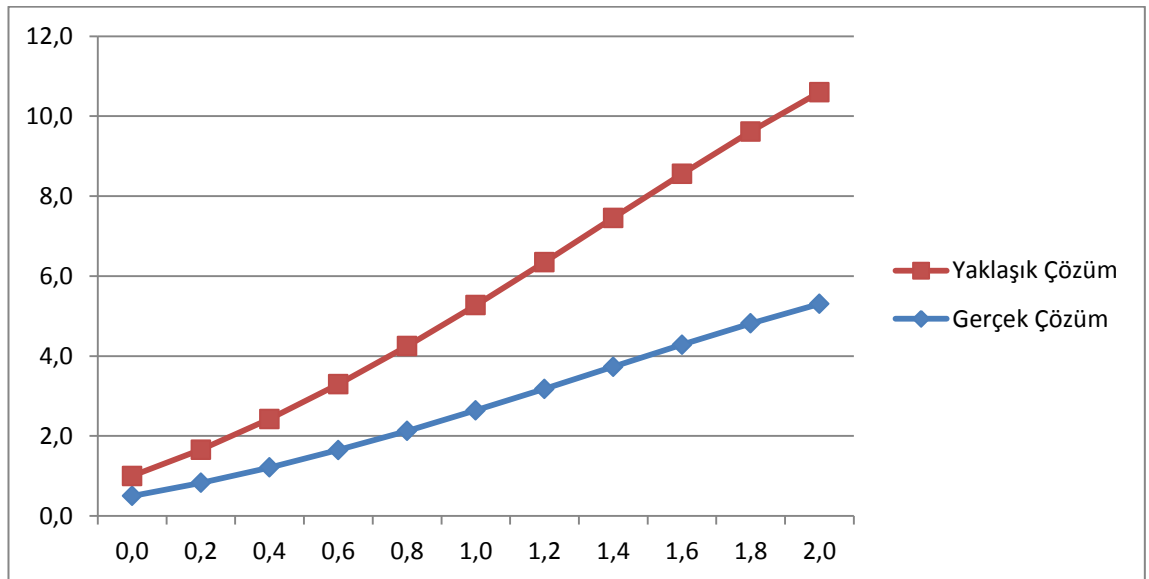
Heun's yöntemi : $\omega_{i+1} = 1.22\omega_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.217\bar{3}$.

Bu sonuçlar Tablo 5.4 te listelenmiştir. Bu problem için orta nokta yöntemi, tablodaki diğer yöntemlere göre daha iyi sonuç vermektedir, bunu Heun's yöntemi takip eder.

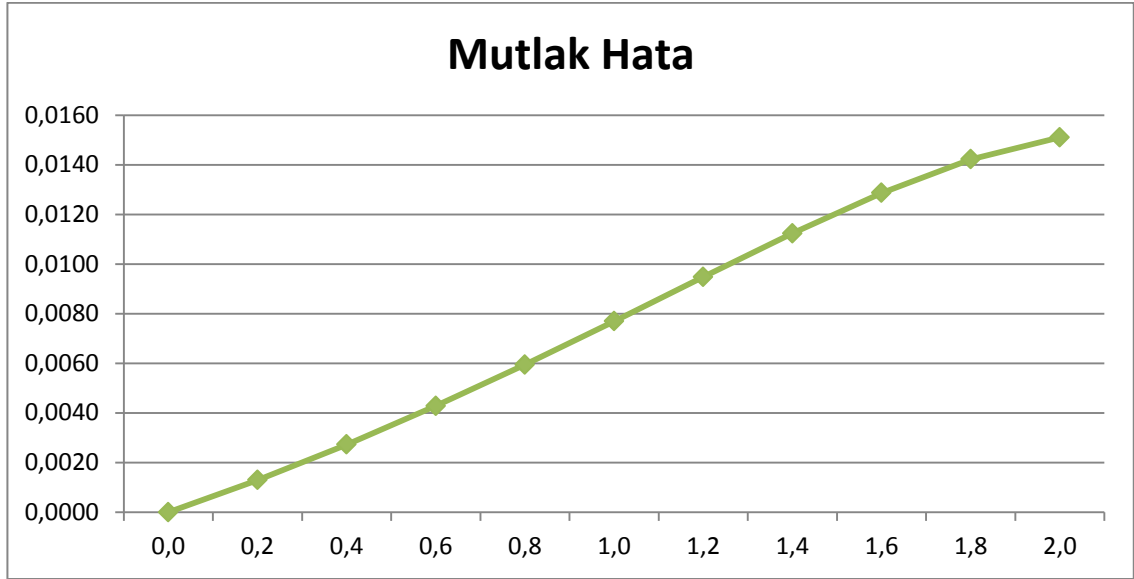
Tablo 5.4: Runge-Kutta yöntemleri için elde edilen sonuçlar

t_i	$y(t_i)$	Orta Nokta ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $	İyileş.Euler ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $	Heun's ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $
0,0	0,50000000	0,50000000	0,00000000	0,50000000	0,00000000	0,50000000	0,00000000
0,2	0,82929860	0,82800000	0,00129861	0,82600000	0,00329864	0,82730000	0,00199860
0,4	1,21408800	1,21136000	0,00272763	1,20692000	0,00716758	1,20980600	0,00428164
0,6	1,64894100	1,64465900	0,00428152	1,63724200	0,01169825	1,64206300	0,00687742
0,8	2,12722900	2,12128400	0,00594521	2,11023600	0,01699376	2,11741700	0,00981236
1,0	2,64085900	2,63316700	0,00769234	2,61768700	0,02317166	2,62774900	0,01311016
1,2	3,17994200	3,17046400	0,00947809	3,14957900	0,03036284	3,16315400	0,01678801
1,4	3,73240000	3,72116600	0,01123428	3,69368600	0,03871369	3,71154700	0,02085257
1,6	4,28348400	4,27062200	0,01286173	4,23509700	0,04838657	4,25818800	0,02529621
1,8	4,81517600	4,80095900	0,01421738	4,75561900	0,05955744	4,78508900	0,03008747
2,0	5,30547200	5,29037000	0,01510191	5,23305500	0,07241678	5,27030800	0,03516340

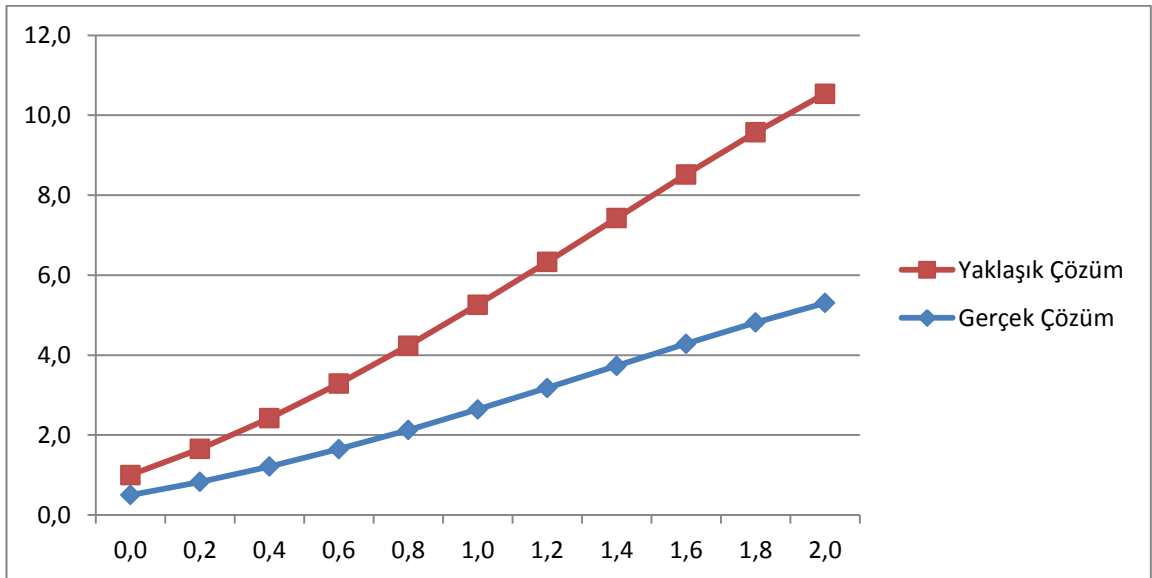
Dört değişken içeren $f(t + \alpha_1, y + \delta_1 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)))$ formu ile ifade edilen $O(h^3)$ hatasıyla birlikte $T^3(t, y)$ ye yaklaşım yapılmasına rağmen $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2$ ve δ_2 nin kararlılığını içeren cebir oldukça karmaşıktır ve burada ifade edilmeyecektir. Aslında 3.mertebeden Runge-Kutta yöntemi genellikle kullanılmaz. En yaygın kullanılan Runge-Kutta yöntemi 4.mertebedendir, fark denklemi formundadır ve aşağıdaki şekilde verilir.

Şekil 5.7: $h=0.2$ için Orta Nokta Yöntemi Çözüm Grafiği

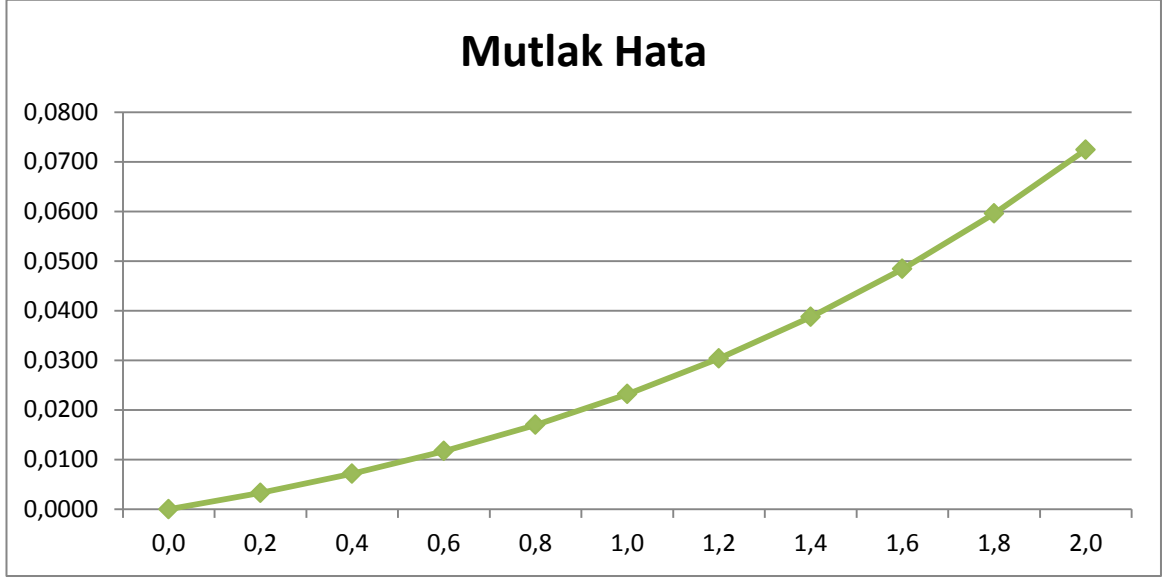
Şekil 5.8: $h=0.2$ için Orta Nokta Yöntemi Hata Grafiği



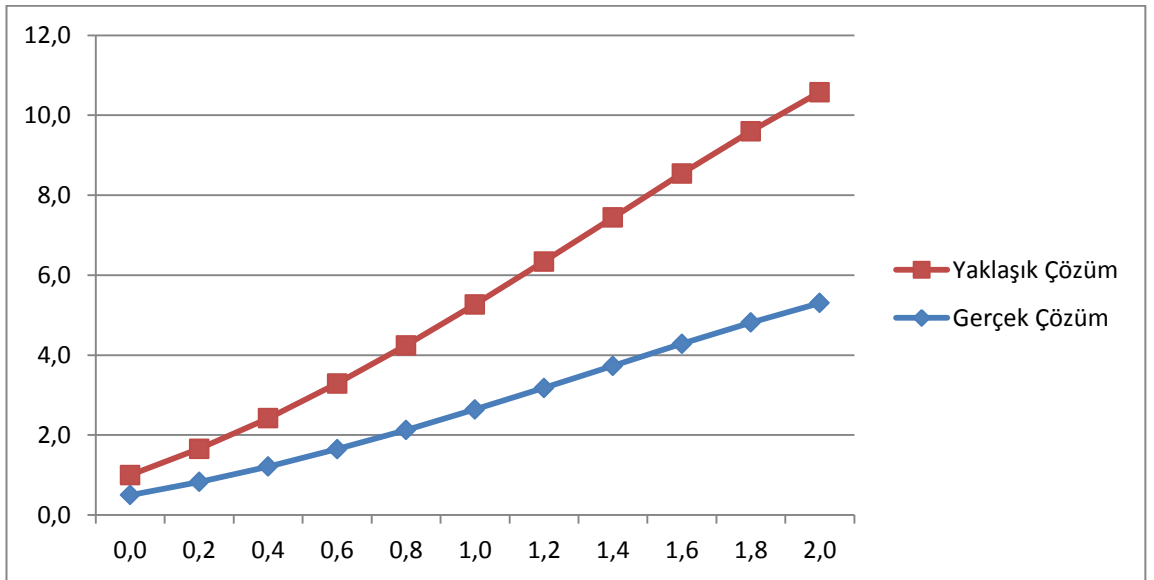
Şekil 5.9: $h=0.2$ için İyileştirilmiş Euler Yöntemi Çözüm Grafiği



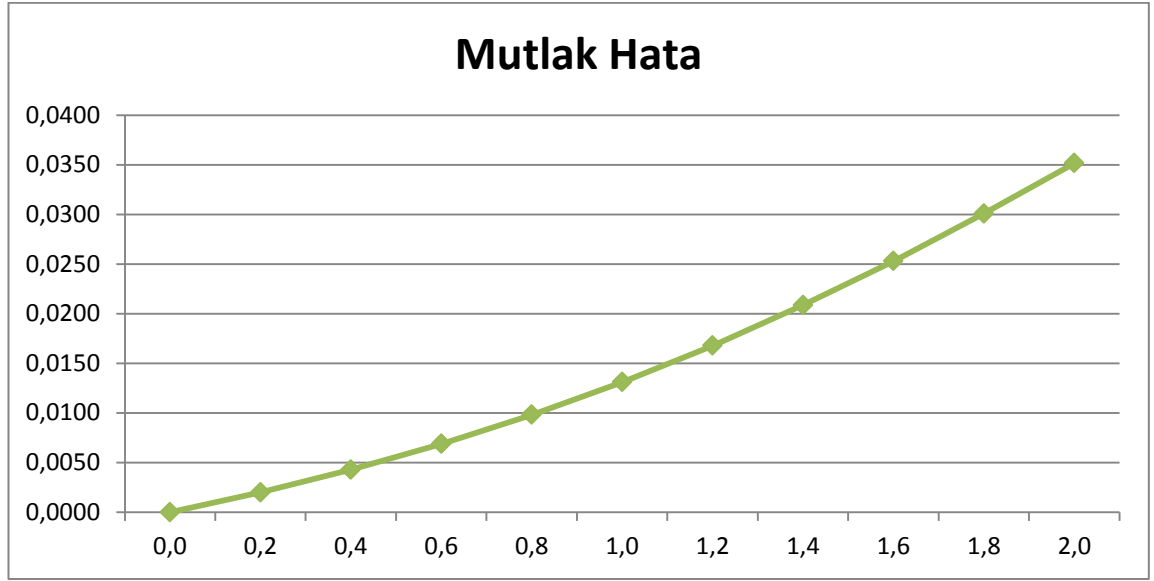
Şekil 5.10: $h=0.2$ için İyileştirilmiş Euler Yöntemi Hata Grafiği



Şekil 5.11: $h=0.2$ için Heun's Yöntemi Çözüm Grafiği



Şekil 5.12: $h=0.2$ için Heun's Yöntemi Hata Grafiği



Örnek 2 $y' = y - t^2 + 1, 0 \leq t \leq 2, y(0) = 0.5$; başlangıç değer probleminin

$h = 0.2$, $N = 10$ ve $t_i = 0.2i$ olmak üzere 4.mertebeden Runge-Kutta yönteminin kullanımıyla yaklaşık çözümünü, Tablo(5.5) da sonuçlar ve hataları verilmiştir.

Tablo 5.5: 4.mertebeden Runge-Kutta yöntemi için elde edilen sonuçlar

t_i	$y(t_i)$	ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $
0,0	0,50000000	0,50000000	0,00000000
0,2	0,82929860	0,82929330	0,00000530
0,4	1,21408800	1,21407600	0,00001144
0,6	1,64894100	1,64892200	0,00001872
0,8	2,12722900	2,12720300	0,00002670
1,0	2,64085900	2,64082300	0,00003648
1,2	3,17994200	3,17989400	0,00004745
1,4	3,73240000	3,73234000	0,00005984
1,6	4,28348400	4,28341000	0,00007439
1,8	4,81517600	4,81508600	0,00009012
2,0	5,30547200	5,30536300	0,00010872

Runge-Kutta yöntemlerinin uygulamasındaki esas hesaplama yükü f in hesaplanmasından kaynaklanır. 2.mertebeden yöntemlerde, yerel kesme hatası $O(h^2)$ dir ve her adımda iki fonksiyon değerine ihtiyaç duyulur. 4.mertebeden Runge-Kutta yöntemi her adım için dört fonksiyon değerini gerektirir ve yerel kesme hatası $O(h^4)$ tür. Her adım için değerlerin sayısı ile yerel kesme hatasının mertebesi arasındaki ilişki Tablo (5.6) de gösterilmektedir. Bu tablo, daha büyük adım aralığı kullanarak yüksek mertebeli yöntemler yerine, daha küçük adım aralıklarıyla ve beşten daha az mertebeli yöntemlerin tercih edilmesinin sebebini gösterir.

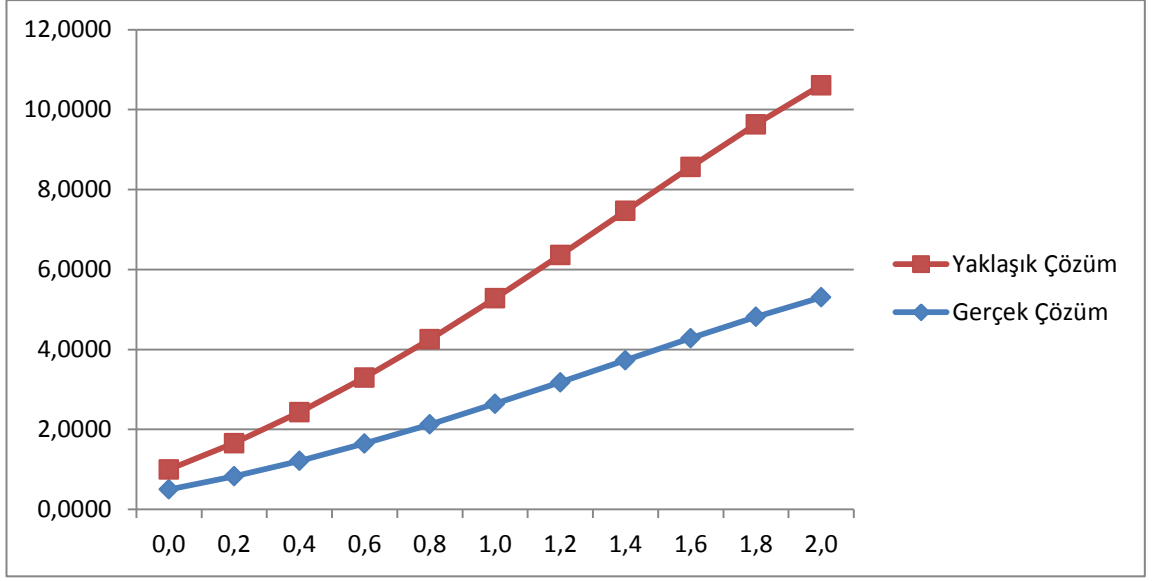
Tablo 5.6: Adım değeri ve yerel kesme hataları

Adım Değerleri	2	3	4	$5 \leq n \leq 7$	$8 \leq n \leq 9$	$10 \leq n$
En Muhtemel Yerel Kesme Hatası	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

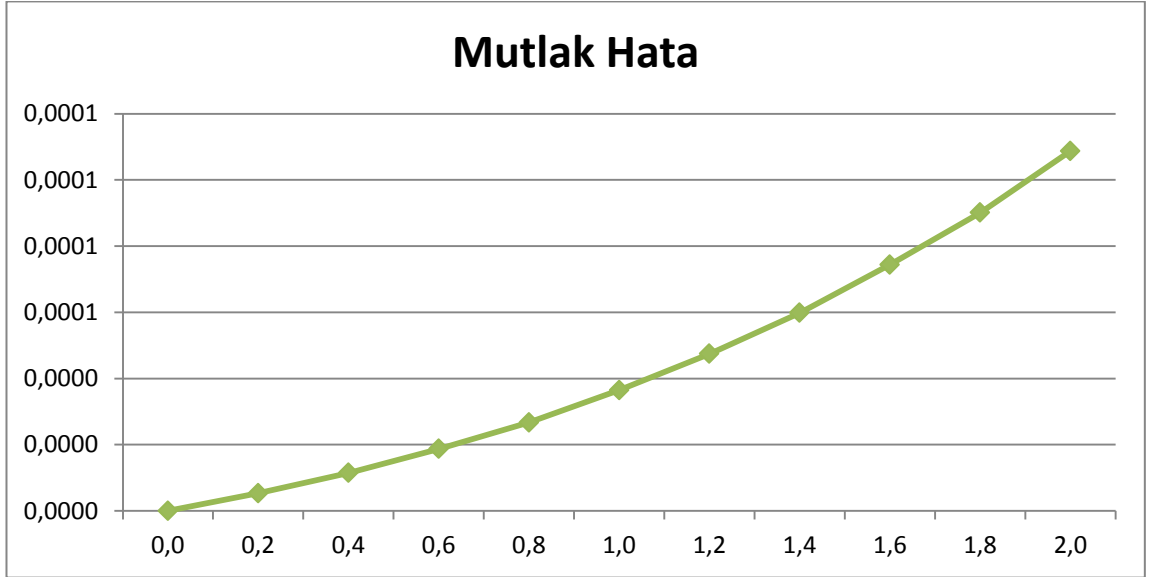
Düşük mertebeli Runge-Kutta yöntemlerinin kıyaslanmasının bir kriteri şu şekildedir;

- i. 4.mertebeden Runge-Kutta yöntemi her adım için dört değer gerektirir, bundan dolayı Runge-Kutta yöntemi daha yüksek mertebedense, dörtte bir adım aralığıyla Euler yönteminden daha kesin sonuçlar verir.
- ii. 4.mertebeden Runge-Kutta yöntemi, 2.mertebeden Runge- Kutta yönteminden daha üstün ise 2.mertebeden yöntemin $\frac{h}{2}$ adım aralığından, h adım aralığı daha kesin sonuçlar verir, çünkü 4.mertebeden yöntem adım başı iki kat fazla fonksiyon değeri gerektirir. Bu kriter ile Runge-Kutta yönteminin üstünlüğünün bir örneği aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Şekil 5.13: $h=0.2$ için 4.mertebeden Runge-Kutta Yöntemi Çözüm Grafiği



Şekil 5.14: $h=0.2$ için 4.mertebeden Runge-Kutta Yöntemi Hata Grafiği



Örnek 3 $y' = y - t^2 + 1, 0 \leq t \leq 2, y(0) = 0.5$ problemi için

$h = 0.025$ iken Euler yöntemini,

$h = 0.05$ iken Orta nokta yöntemini,

$h = 0.1$ iken 4.mertebeden Runge-Kutta yöntemini kullanarak verilen diferansiyel denklemi yaklaşık olarak hesaplayalım. Bu noktaların ortak ağ noktaları 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 ve 0.5 de karşılaştırılır. Bu tekniklerin her biri $y(0.5)$ yaklaşımı için Tablo (5.7) de listelenen değerlerin belirlenmesinde 20 işlevsel fonksiyon değeri gerektirir. Bu örnekte görüldüğü üzere 4.mertebe açıkça üstündür.

Tablo 5.7: Farklı yöntemler için elde edilen sonuçlar

t_i	$y(t_i)$	Euler $h=0.025$	İyileştirilmiş Euler $h=0.05$	4.mertebeden Runge-Kutta $h=0.1$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0147254	1.0150701
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384

5.4 ÇOK ADIMLI YÖNTEMLER

ÖRNEK 1 Aşağıdaki başlangıç değer problemini

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

Adams-Bashforth dört adımlı açık yönteminin ve Adams-Moulton üç adımlı kapalı yönteminin sağladığı yaklaşık değeri, her birinde $h = 0.2$ olmak üzere ele alalım.

Adams-Bashforth yöntemi, $i = 3, 4, \dots, 9$ için aşağıdaki fark denkleminde sahiptir.

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, \omega_i) - 59f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, \omega_{i-3})]$$

$$f(t, y) = y - t^2 + 1, h = 0.2 \text{ ve } t_i = 0.2i$$

kullanılarak sadeleştirildiğinde ise, aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\omega_{i+1} = \frac{1}{24} [35\omega_i - 11.8\omega_{i-1} + 7.4\omega_{i-2} - 1.8\omega_{i-3} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

Adams-Moulton yönteminde ise $i = 2, 3, \dots, 9$ için aşağıdaki kalanlar denklemi vardır:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 19f(t_i, \omega_i) - 5f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + f(t_{i-2}, \omega_{i-2})]$$

Bu da aşağıdaki gibi sadeleştirilecektir:

$$\omega_{i+1} = \frac{1}{24} [1.8\omega_{i+1} + 27.8\omega_i - \omega_{i-1} + 0.2\omega_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

Bu yöntemi açık olarak kullanmak için, $i = 2, 3, \dots, 9$ için

$$\omega_{i+1} = \frac{1}{22.2} [27.8\omega_i - \omega_{i-1} + 0.2\omega_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

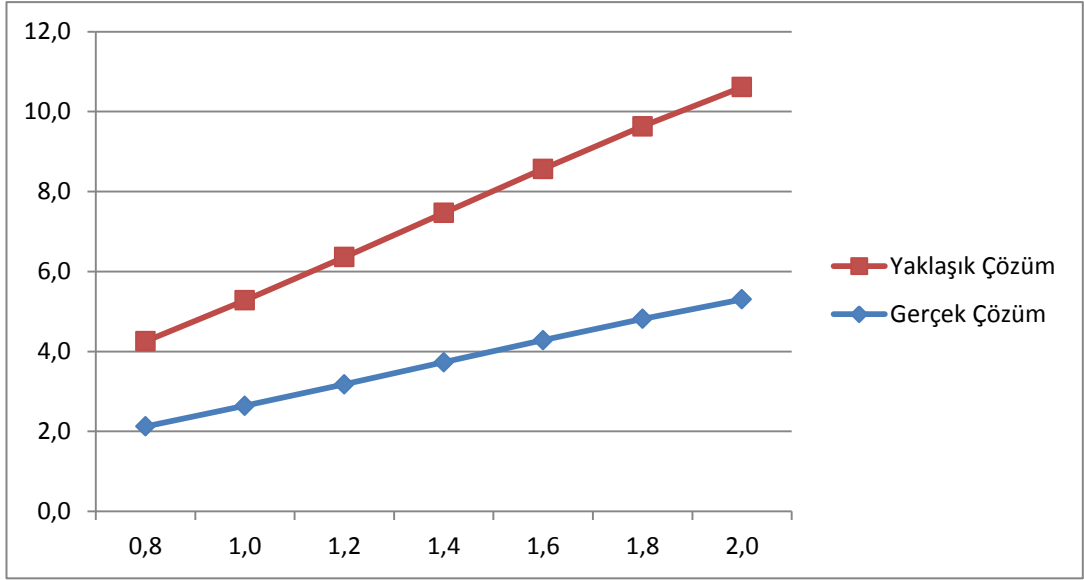
veren ω_{i+1} için çözülür.

Tablo 5.8 deki sonuçlar, açık Adams-Bashforth yöntemindeki $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ ve α_3 ve kapalı Adams-Moulton yöntemindeki α, α_1 ve α_2 için $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ denkleminde elde edilen kesin değerler kullanılarak elde edilmiştir.

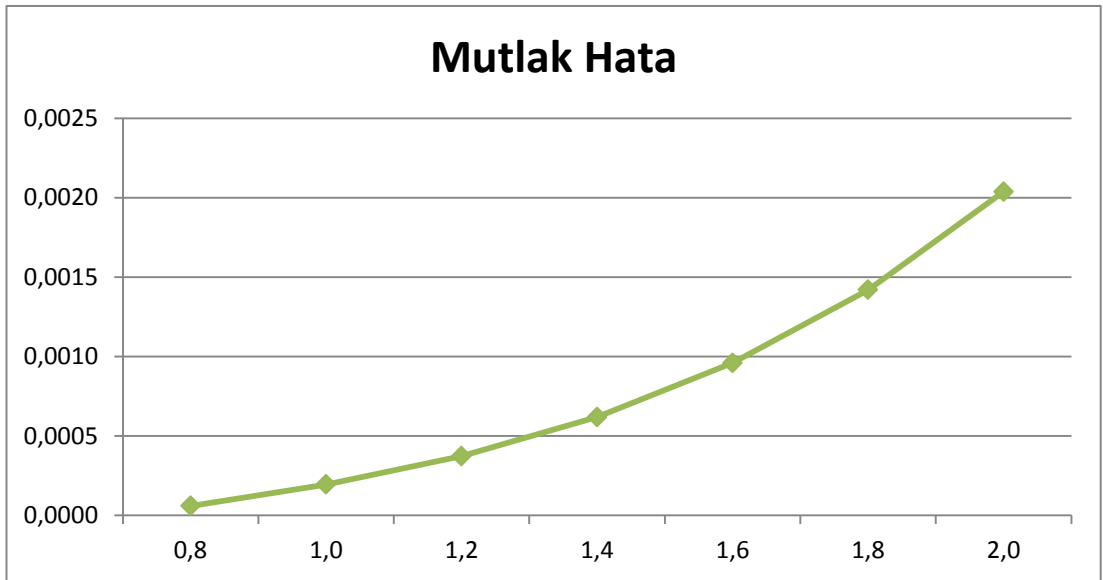
Tablo 5.8: Çok adımlı yöntemler için elde edilen sonuçlar

t_i	$y(t_i)$	Adams-Basforth ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $	Adams-Moulton ω_i	Hata $ y(t_i) - \omega_i $
0,0	0,50000000				
0,2	0,82929860				
0,4	1,21408800				
0,6	1,64894100			1,64892000	0,00002074
0,8	2,12722900	2,12728900	0,00005984	2,12719600	0,00003338
1,0	2,64085900	2,64105300	0,00019431	2,64080800	0,00005078
1,2	3,17994200	3,18031400	0,00037265	3,17986800	0,00007415
1,4	3,73240000	3,73301900	0,00061893	3,73229500	0,00010514
1,6	4,28348400	4,28444300	0,00095892	4,28333700	0,00014687
1,8	4,81517600	4,81659700	0,00142002	4,81497500	0,00020170
2,0	5,30547200	5,30750900	0,00203753	5,30519900	0,00027323

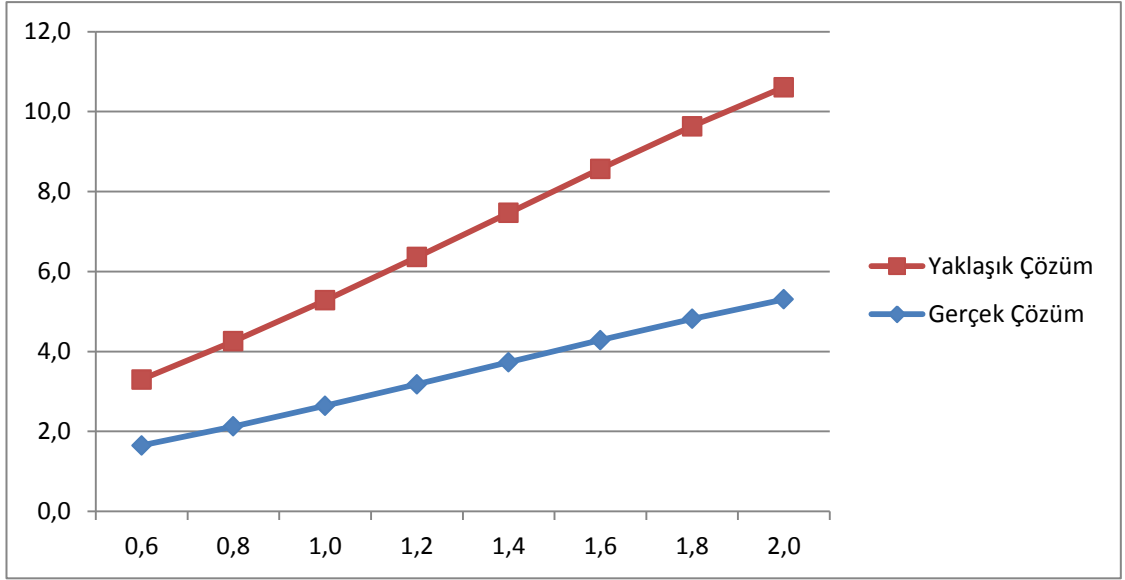
Şekil 5.15: $h=0.2$ için Adams-Bashforth Yöntemi Çözüm Grafiği



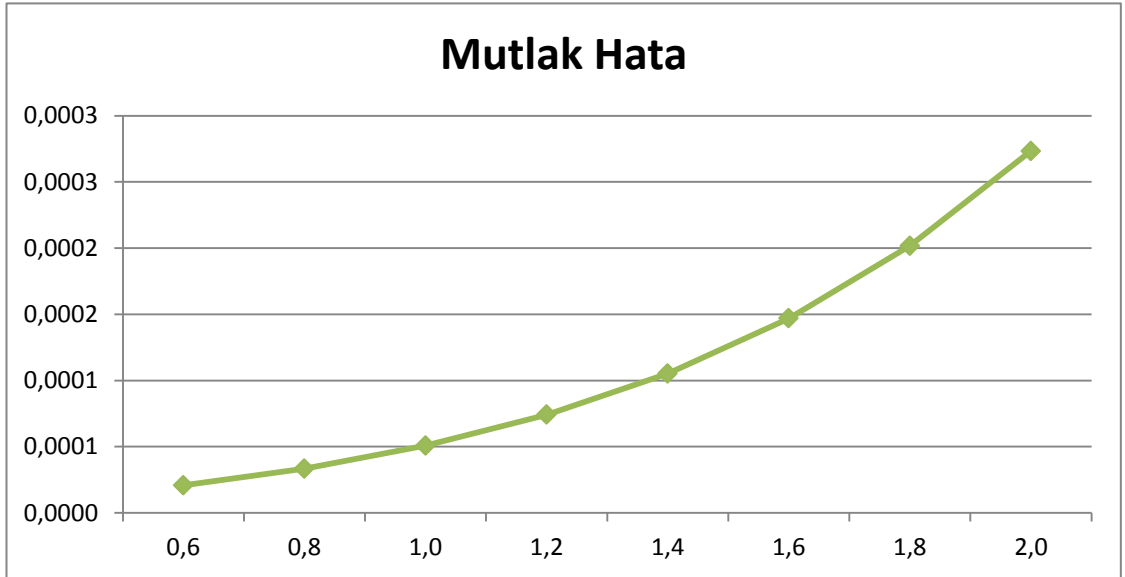
Şekil 5.16: $h=0.2$ için Adams-Bashforth Yöntemi Hata Grafiği



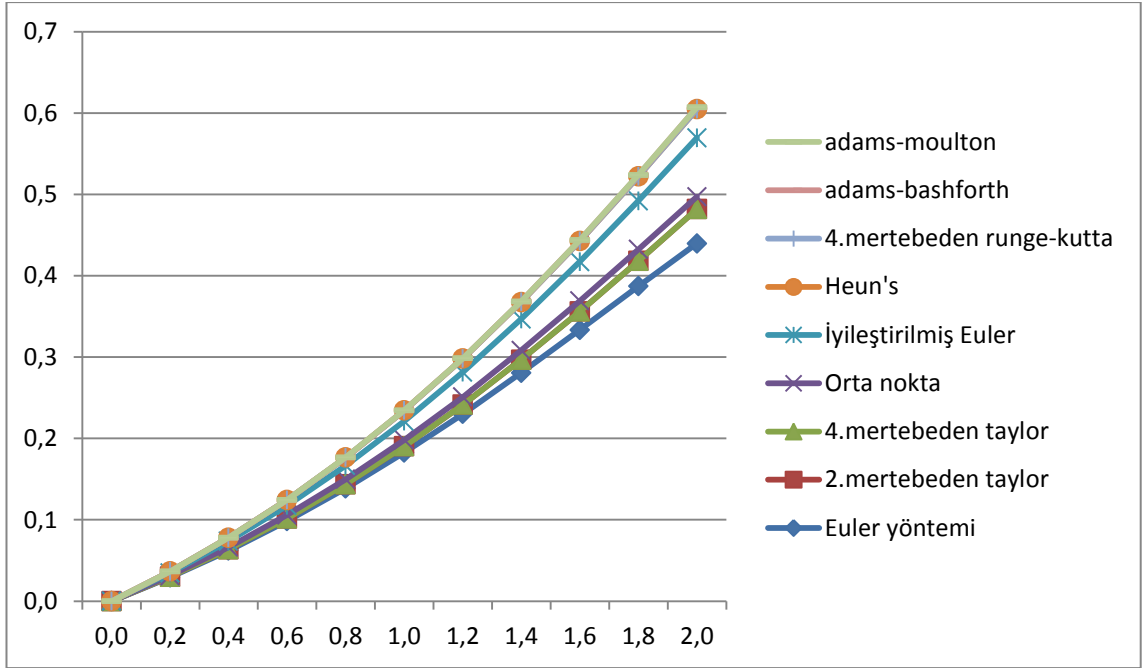
Şekil 5.17 : $h=0.2$ için Adams-Moulton Yöntemi Çözüm Grafiği



Şekil 5.18 : $h=0.2$ için Adams-Moulton Yöntemi Hata Grafiği



Şekil 5.19 : Yöntemlerin hata grafiği



6. TARTIŞMA

Bir başlangıç değer problemi dört farklı yöntemle incelendi. $O(h)$ tipindeki Euler yöntemini kullanarak incelediğimizde, h adım aralığının artışına bağlı olarak hata değerlerinin arttığı, azaltıldığında ise hata değerlerinin küçüldüğü görülmektedir. Dolayısıyla adım aralığı ne kadar küçük seçilirse hata o derece azalmış olacaktır. Ancak adım aralığının çok küçük seçilmesi durumunda, işlem basamakları artar ve bu yüzden Euler yöntemi kullanışlı ve ekonomik değildir.

Yüksek basamaktan Taylor yöntemi ise; Euler yönteminden daha iyi sonuçlar verir ancak çok fazla türev hesabı gerektirdiğinden pratikte kolay kullanılmayabilir. Yöntemin kavramsal olarak basit olması ve çok yüksek duyarlılığa sahip olması bir avantajdır. n . Mertebeden bir Taylor yönteminin yerel kesme hatası ise $O(h^n)$ dir.

Runge-Kutta yöntemleri her ne kadar Taylor yönteminin basamaklarını kullansa da, yöntemin zorluğunu ortadan kaldırmışlardır. Orta nokta yöntemi, İyileştirilmiş Euler yöntemi ve Heun's yöntemi 2. Mertebeden Runge-Kutta metodu olup kesme hataları $O(h^2)$ dir. En çok kullanılan 4. Mertebeden Runge-Kutta yönteminin ise yerel kesme hatası $O(h^5)$ dir.

Çok adımlı yöntemlerde ise m . adımdaki bir Adams-Basforth açık yöntemi ile $(m-1)$. adımdaki Adams-Moulton kapalı yöntemi karşılaştırıldığında her ikisinde hata terimleri aynıdır. Buna karşın, katsayılarından dolayı kapalı yöntem, açık yöntemle göre daha yüksek kararlılığa sahiptir. Bu da, daha düşük yuvarlama hatası anlamına gelir.

Tablo 6.1 : Yerel kesme hatası

Yöntem	Yerel Kesme Hatası
Euler Yöntemi	$O(h)$
2.Mertebeden Taylor Yöntemi	$O(h^2)$
4.Mertebeden Taylor Yöntemi	$O(h^4)$
4.Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	$O(h^5)$
4. adımda Adams-Basford Yöntemi	$O(h^3)$
3. adımda Adams-Moulton Yöntemi	$O(h^3)$

7. SONUÇ

Adi diferansiyel denklemlerin bir örneği ele alınıp, gerçek çözümler, yaklaşık çözümler ve yapılan hatalar hesaplanmıştır. Bu hesaplamalarda, Euler yöntemi, yüksek mertebeden Taylor yöntemleri, Runge-Kutta yöntemleri ve çok adımlı yöntemler kullanılmıştır.

Bunun neticesinde en iyi sonuçlar, adım aralığının küçük tutulması ve yüksek mertebeden yöntemler kullanılarak elde edilir. Ele alınan başlangıç değeri problemi için gerçekte çözüme en yakın sonuçlar, 4. mertebeden Taylor yönteminden elde edilmiştir. Yapılan hatanın en küçük olduğu durum, bu metodun uygulanması sonucunda bulunmuştur.

KAYNAKÇA

Kitaplar

Akın Ö., 1988. *Nümerik analiz*. Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi.

Bayram, M., 2009. *Nümerik analiz*. İstanbul: Birsen Yayınevi.

Faires J.D. & Burden L.R., 2002. *Numerical Methods*, 3rd edition. England

Lambert J.D., 1991. *Numerical methods for ordinary differential equations*. London.

Kinkaid D. & Cheney W., 2012. *Nümerik analiz*, 3.baskı. N. Özalp (Çev.) , Ankara:

Gazi kitapevi,(orijinal basım tarihi 2002.)

Diğer Yayınlar

Ankara Üniversitesi açık ders malzemeleri,

<http://acikders.ankara.edu.tr/course/index.php?categoryid=9> [ziyaret tarihi 23.04.2014]

EKLER

EK 1: Bölünmüş Farklar

x_0, x_1, \dots, x_n gibi $n + 1$ tane farklı noktada f fonksiyonunu interpolate eden n . Lagrange polinomu $P_n(x)$ ile gösterilsin. Her ne kadar bu polinom tek türlü belirli olsa da bazı durumlarda avantaj sağlaması bakımından farklı cebirsel gösterimleri kullanılabilir. f fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n noktalarına göre bölünmüş farkları a_0, a_1, \dots, a_n ler uygun sabitler olmak üzere

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (1.1)$$

Formundaki $P_n(x)$ polinomu ile ifade edilir. Öncelikle bu sabitleri tespit etmek için bir metot geliştirilir : (1.1) ifadesinde $x = x_0$ yazarsak sıfırdan farklı tek terim a_0 katsayısı olur. Buna göre $a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$ dır. Aitken Δ^2 notasyonu ile ilişkili olarak bölünmüş fark notasyonu tanımlanır. x_i noktasına göre f fonksiyonunun *sıfıncı bölünmüş farkı* $f(x_i)$ ile gösterilir ve f nin x_i noktasındaki değeri $f[x_i] = f(x_i)$ (1.2) olarak tanımlanır.

Benzer şekilde $P_n(x)$ polinomu x_1 noktasında hesaplanırsa, $P(x_1)$ ifadesindeki sıfırdan farklı terimler için

$$P(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

olduğundan,

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \quad (1.2)$$

elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktalarına göre *birinci bölünmüş farkı* $f[x_i, x_{i+1}]$ ile gösterilir ve

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_i - x_{i+1}} \quad (1.3)$$

olarak tanımlanır. Rekürsif olarak *ikinci bölünmüş fark*, $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ şeklinde gösterilir ve

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{f[x_{i+2}, x_i]}$$

olarak tanımlanır.

$k - 1$ bölünmüş fark işlemi sonrasında $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]$ ve $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$ terimleri elde edilmiş olur ve bunlara bağlı olarak f fonksiyonunun $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ noktalarına göre k . bölünmüş farkı $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (1.4)$$

Son olarak verilen f fonksiyonunun n . bölünmüş farkı

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

şeklinde tanımlanır. (1.3) ifadesinden $a_1 = f[x_0, x_1]$ ve $a_0 = f(x_0) = f[x_0]$ olarak yazılabildiğinden (1.1) ile verilen interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})$$

formunda bir gösterime sahiptir. a_0 ve a_1 katsayılarının hesabından da görüleceği üzere aranan katsayılar $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

formundadır. Dolayısıyla f fonksiyonunun *Newton bölünmüş farkı* $P_n(x)$,

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \quad (1.5)$$

şeklinde ifade edilir. $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ değeri x_0, x_1, \dots, x_k sayılarının sırasına bağlı değildir.

Newton Geri Fark Formülü

Eğer interpolasyon noktaları sondan başa doğru x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 şeklinde dizilir ise interpolasyon formülü

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

olarak elde edilir.

Eğer verilen noktalar $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i, x_{i-1} = h$ eşitliğini sağlıyorsa yani, noktaların hepsi eşit aralıklı ise $x = x_n + sh$ ve $x - x_i = (s + n - i)h$ olmak üzere

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) \\ = f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots \\ + s(s+1) \dots (s+n-1)h^n f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

eşitliğini sağlayan Newton geri fark formülü elde edilir. Bu formülü daha kompakt hale getirmek için aşağıdaki tanıma ihtiyaç vardır:

Tanım 1 Verilen bir $\{P_n\}_n^\infty = 0$ dizisi için geri fark ∇P_n

$$\nabla P_n = P_n - P_{n-1}, \quad n \geq 1$$

olarak ve daha yüksek mertebeler rekürsif olarak

$$\nabla^k P_n = \nabla(\nabla^{k-1} P_n), \quad k \geq 2$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 1 e göre

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n), \quad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n)$$

ve en genel halde,

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n)$$

formülü elde edilir. Sonuç olarak,

$$P_n(x) = f[x_n] + s \nabla f[x_n] + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f(x_n) + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+1-n)}{n!} \nabla^n f(x_n)$$

eşitliğine ulaşılır. Binom katsayı notasyonunun s nin tüm reel sayı değerlerine genişletilmesi ile elde edilen

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\dots(-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}$$

ifadesi kullanılarak

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f[x_n] + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) \\ + \dots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n)$$

formülü elde edilir.

Newton Geri Fark Formülü genel olarak;

$$P_n(x) = f(x_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

EK 2: Taylor Teoremi

Langrange Kalanlı Taylor Teoremi

Eğer $f \in C^n[a, b]$ ve (a, b) açık aralığında $f^{(n+1)}$ mevcut ise, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında herhangi c ve x noktaları için

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x) \quad (1.6)$$

dir. Burada c ve x arasında bazı ξ ler için hata terimi

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$

dir. Burada “ c ve x arasındaki ξ ” nin anlamı c ve x nin özel değerlerine $c < \xi < x$ veya $x < \xi < c$ dir.

$c = 0$ durumunda önemli bir özel durum oluşur. Denklem (1.6)

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x)^{n+1}$$

olmak üzere, $f(x)$ in

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k + E_n(x)$$

Maclaurin serisine dönüşür.

Ortalama Değer Teoremi

Eğer $f \in C[a, b]$ ve (a, b) açık aralığında f' mevcut ise, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında herhangi x ve c noktaları için

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x-c)$$

dir. Burada ξ , c ile x arasındadır.

$x = b$ ve $c = a$ alıp, düzenleme yapılırsa,

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (a < \xi < b)$$

önemli eşitliğini elde ederiz. $f'(x)$ e bir yaklaşım Ortalama-Değer Teoreminden elde edilebilir.

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} .$$

İntegral Kalanlı Taylor Teoremi

Eğer $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında herhangi x ve c noktaları için

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - c)^k + R_n(x)$$

dir. Burada

$$R_n(x) = \frac{1}{(n)!} \int_c^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^{n+1} dt$$

dir.

İspat :

$$\int u dv = \int uv \int v du$$

Kısmi integrasyon formülünü

$$u = \frac{(x - t)^n}{n!} dv = f^{(n+1)}(t) dt$$

ile R_n integraline uygularsak

$$R_n = \frac{1}{n!} \left[f^{(n)}(t)(x - t) \Big|_{t=c}^{t=x} + n \int_c^x f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1} dt \right]$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n + R_{n-1}$$

olur. Kısmi integrasyonlara devam edildiğinde, son olarak

$$R_n = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - c)^k + R_0$$

bulunur.

$$R_0 = \int_c^x f'(t) dt = f(x) - f(c)$$

olduğundan,

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - c)^k + R_n$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

Taylor Teoreminin Alternatif Formu

Eğer $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında herhangi x ve $x + h$ noktaları için

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + E_n(h)$$

dir. Burada

$$E_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

olup, ξ noktası x ve $x + h$ arasındadır.

$f(x + h)$ denkleminin açık formu;

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + E_n(h).$$

EK 3: İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

u ve v bir $[a, b]$ aralığında sürekli reel-değerli fonksiyonlar olmak üzere, $u \geq 0$ kabul edelim. Bu durumda,

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = u(\xi) \int_a^b v(x)dx$$

olacak şekilde $[a, b]$ aralığında bir ξ noktası vardır.

EK 4: Euler Metodu için Fortran Program Kodu

```
dimension t(12),w(12),z(12),hata(12)

OPEN(20,file='euler metodu h=0.2',status='old')

t(1)=0.0d0

w(1)=0.5d0

z(1)=0.5d0

n=10

b=2.0d0

h=b/n

hata(1)=abs(z(1)-w(1))

do n=1,11

t(n+1)=t(1)+n*h

w(n+1)=w(n)+h*(w(n)-(t(n)**2)+1.0d0)

end do

c      analitik çözüm

do i=2,11

z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))

hata(i)=abs(z(i)-w(i))

end do

write(*,*) t(1),w(1),z(1),hata(1)

write(20,*) t(1),w(1),z(1),hata(1)

do i=2,11
```

```
write(*,*) t(i),w(i),z(i),hata(i)
```

```
write(20,*) t(i),w(i),z(i),hata(i)
```

```
end do
```

```
end
```


EK 5: Yüksek Mertebeden Taylor Yöntemleri için Fortran Program Kodu

8.5.1 2.mertebeden Taylor Yöntemi

```
dimension t(12),w(12),z(12),hata(12)

OPEN(80,file='taylor.dat',status='old')

t(1)=0.0d0

w(1)=0.5d0

z(1)=0.5d0

h=0.2d0

hata(1)=abs(z(1)-w(1))

do i=1,10

t(i+1)=h*i

w(i+1)=1.22d0*w(i)-(0.0088d0*(i-1)*(i-1))-(0.008d0*(i-1))+0.22d0

end do

c      analitik çözüm

do i=2,11

z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))

hata(i)=abs(z(i)-w(i))

end do

write(*,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)

write(80,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)

do i=2,11

write(*,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
write(80,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
end do
```

```
end
```

4.mertebeden Taylor Yöntemi

```
dimension t(12),w(12),z(12),hata(12)
```

```
OPEN(80,file='taylor4.dat',status='old')
```

```
p= 0.2186d0
```

```
t(1)=0.0d0
```

```
w(1)=0.5d0
```

```
z(1)=0.5d0
```

```
h=0.2d0
```

```
hata(1)=abs(z(1)-w(1))
```

```
do i=1,10
```

```
t(i+1)=h*i
```

```
w(i+1)=1.2214d0*w(i)-(0.008856d0*(i-1)*(i-1))-(0.00856d0*(i-1))+p
```

```
end do
```

```
c      analitik çözüm
```

```
do i=2,11
```

```
z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))
```

```
hata(i)=abs(z(i)-w(i))
```

```
end do
```

```
write(*,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)
```

```
write(80,* ) t(1),z(1),w(1),hata(1)
```

```
do i=2,11
```

```
write(*,* ) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
write(80,* ) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
end do
```

```
end
```

EK 6: Runge-Kutta Yöntemleri için Fortran Program Kodu

Orta Nokta Yöntemi

```
dimension t(12),w(12),z(12),hata(12)

OPEN(80,file='midp.dat',status='old')

t(1)=0.0d0

w(1)=0.5d0

z(1)=0.5d0

h=0.2d0

hata(1)=abs(z(1)-w(1))

do i=1,10

t(i+1)=h*i

w(i+1)=1.22d0*w(i)-(0.0088d0*(i-1)*(i-1))-(0.008d0*(i-1))+0.218d0

end do

c      analitik çözüm

do i=2,11

z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))

hata(i)=abs(z(i)-w(i))

end do

write(*,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)

write(80,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)

do i=2,11

write(*,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
write(80,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
end do
```

```
end
```

İyileştirilmiş Euler Yöntemi

```
dimension t(12),w(12),z(12),hata(12)
```

```
OPEN(80,file='modieuler.dat',status='old')
```

```
t(1)=0.0d0
```

```
w(1)=0.5d0
```

```
z(1)=0.5d0
```

```
h=0.2d0
```

```
hata(1)=abs(z(1)-w(1))
```

```
do i=1,10
```

```
t(i+1)=h*i
```

```
w(i+1)=1.22d0*w(i)-(0.0088d0*(i-1)*(i-1))-(0.008d0*(i-1))+0.216d0
```

```
end do
```

```
c      analitik çözüm
```

```
do i=2,11
```

```
z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))
```

```
hata(i)=abs(z(i)-w(i))
```

```
end do
```

```
write(*,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)
```

```
write(80,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)
```

```

do i=2,11

write(*,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)

write(80,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)

end do

end

```

Heun's Yöntemi

```

dimension t(12),w(12),z(12),hata(12)

OPEN(80,file='heuns.dat',status='old')

t(1)=0.0d0

w(1)=0.5d0

z(1)=0.5d0

h=0.2d0

hata(1)=abs(z(1)-w(1))

do i=1,10

t(i+1)=h*i

w(i+1)=1.22d0*w(i)-(0.0088d0*(i-1)*(i-1))-(0.008d0*(i-1))+0.2173d0

end do

c      analitik çözüm

do i=2,11

z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))

hata(i)=abs(z(i)-w(i))

end do

```

```

write(*,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)

write(80,*) t(1),z(1),w(1),hata(1)

do i=2,11

write(*,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)

write(80,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)

end do

end

```

4.mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

```

program solvingwithRungeKutta

implicit none

real,dimension(12) ::w,e,z,hata

integer n,i,k

real(8)::a,b,h,y_0,t

e(1)=0.0d0

z(1)=0.5d0

k=10

b=2.0d0

h=b/k

hata(1)=abs(z(1)-w(1))

do k=1,11

e(k+1)=e(1)+k*h

end do

```

```

do i=2,11

z(i)=(e(i)+1)**2-(0.5d0*exp(e(i)))

end do

write(*,*)"Degerleri giriniz a,b,h,y0"

read(*,*)a,b,h,y_0

open(unit=1, file="resultadoRungeKutta.dat",status='old')

call RungeKutta(y_0,a,b,h)

close(1)

contains

subroutine RungeKutta(y_0,a,b,h)

implicit none

real(8), intent(inout)::a,h,b,y_0

real(8):: y,t, F_1, F_2, F_3, F_4

n=1

t=a

y=y_0

do while(t<=b)

y=y+(F_1+2.0d0*F_2+2.0d0*F_3+F_4)/6.0d0

F_1=h*f(y,t)

F_2=h*f(y+(1.0d0/2d0)*F_1, t+h*(1.0d0/2.0d0))

F_3=h*f(y+(1.0d0/2.0d0)*F_2, t+h*(1.0d0/2.0d0))

F_4=h*f(y+F_3,t+h)

```



```
w(n)=y  
hata(n)=abs(z(n)-w(n))  
write(1,*)t, z(n),w(n),hata(n)  
write(*,*)t,z(n),w(n),hata(n)  
n=n+1  
t=t+h  
end do  
endsubroutine  
function f(y,t)  
implicit none  
real(8)::f,y,t  
f=y-(t*t)+1.0d0  
end function  
end program
```

EK 7: Çok Adımlı Yöntemler

8.7.1 4.mertebeden Adams-Bashforth Yöntemi

dimension w(12),z(12),t(12),hata(12)

real a

a =1/24.0

w(1)=0.5

w(2)=0.8292933

w(3)=1.2140762

w(4)=1.6489220

t(1)=0.0d0

h=0.2d0

z(1)=0.5d0

OPEN(80,file='AdamsBashforth.dat',status='old')

do i=4,10

p=(i-1)*(i-1)+(i-1)

w(i+1)=a*(35*w(i)-11.8*w(i-1)+7.4*w(i-2)-1.8*w(i-3)-0.192*p+4.736)

end do

do i=1,11

t(i+1)=h*i

end do

c analitik çözüm

do i=2,11

```
z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))
```

```
end do
```

```
do i=5,11
```

```
hata(i)=abs(z(i)-w(i))
```

```
write(*,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
write(80,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)
```

```
end do
```

```
end
```

3.mertebeden Adams-Moulton Yöntemi

```
dimension w(12),z(12),t(12),hata(12)
```

```
p =1/22.2
```

```
r=0.192
```

```
w(1)=0.5
```

```
w(2)=0.8292933
```

```
w(3)=1.2140762
```

```
t(1)=0.0d0
```

```
h=0.2d0
```

```
z(1)=0.5d0
```

```
OPEN(80,file='Adamsmoulton.dat',status='old')
```

```
do i=3,10
```

```
w(i+1)=p*(27.8*w(i)-w(i-1)+0.2*w(i-2)-r*(i-1)*(i-1)-r*(i-1)+4.736)
```

```
end do
```

```
do i=1,11

t(i+1)=h*i

end do

c    analitik çözüm

do i=2,11

z(i)=(t(i)+1)**2-(0.5d0*exp(t(i)))

end do

do i=4,11

hata(i)=abs(z(i)-w(i))

write(*,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)

write(80,*) t(i),z(i),w(i),hata(i)

end do

end
```