T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

TEKİL TERİMLİ HİPERBOLİK DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

MERVE HACIOĞLU

İSTANBUL, 2015

T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK

TEKİL TERİMLİ HİPERBOLİK DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

MERVE HACIOĞLU

Tez Danışmanı: Doç. Dr. MAKSAT ASHYRALIYEV

İSTANBUL, 2015

T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK

Tezin Adı : Tekil Terimli Hiperbolik Denklemlerin Nümerik Çözümleri

Öğrencinin Adı Soyadı : Merve HACIOĞLU

Tez Savunma Tarihi : 27.08.2015

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç. Dr. Nafiz ARICA
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Canan Çelik KARAASLANLI
Program Koordinatörü

Bu tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzalar
Tez Danışmanı Doç. Dr. Maksat ASHYRALIYEV	______________________
Üye Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU	______________________
Üye Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU	______________________

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışması süresince bilgi, düşünce ve önerilerinden yararlandığım ve hiçbir konuda yardım ve desteğini benden esirgemeyen değerli tez hocam Sayın Doç. Dr. Maksat ASHYRALIYEV'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bugüne kadar benim, en iyi şekilde yetişmem için eğitim hayatımda maddi ve manevi desteklerini benden asla esirgemedikleri ve göstermiş oldukları anlayış ve sabır için annem Nihal HACIOĞLU ve babam Hasan HACIOĞLU'na, beni hiç bir konuda yalnız bırakmayan ve bana olan güveni için kardeşim Melike Nur HACIOĞLU'na çok teşekkür ederim.

İSTANBUL, 2015 Merve HACIOĞLU

ÖZET

TEKİL TERİMLİ HİPERBOLİK DENKLEMLERİN NUMERİK ÇÖZÜMLERİ

Merve Hacıoğlu

Uygulamalı Matematik
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Maksat Ashyraliyev

Ağustos 2015, 59 sayfa

Tekil terimli hiperbolik denklemler için numerik yöntemler incelenmektedir. Denklemlerdeki tekil terimler Dirac delta fonksiyonu ile ifade edilir. Bu tarz denklemlerin çözümleri, süreksizliklere sahiptir ve bu standart nümerik yöntemler için bir sorundur. Bu tezde, tekil kaynak terimli hiperbolik denklemlerin nümerik çözümleri için üçüncü ve beşinci mertebeden Ağırlıklı Esasında Salınımsız (WENO) yöntemleri uygulanmaktadır. Her iki şemada sonlu hacim metodu ile polinom interpolasyon teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. Çözümü düzgün olan problemlerde her iki şema için hata analizi verilmektedir. Hem çözümü düzgün olan problemler, hem de çözümü süreksiz olan problemler için nümerik örnekler gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Denklemler, Tekil Kaynak Terimler, Sonlu Hacim Metodu, WENO Yöntemleri

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH SINGULAR SOURCE TERMS

Merve Hacıoğlu

Graduate Program of Applied Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Maksat Ashyraliyev

August 2015, 59 pages

A numerical study for hyperbolic equations having singular source terms is presented. Singular in the sense that within the spatial domain the source is defined by a Dirac delta function. Solutions of such problems have discontinuities which forms an obstacle for standard numerical methods. In this study, the third order and the fifth order Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) schemes are studied for approximate solutions of hyperbolic equations having singular source terms. Both schemes are constructed by using finite volume method and polynomial interpolation techniques. Analysis for correct order of convergence is given for problems with smooth solutions. Numerical examples both for problems with smooth solutions and problems with discontinuous solutions are provided.

Keywords: Hyperbolic Equations, Singular Source Terms, Finite Volume Method, WENO Methods

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR

KISALTMALAR

ADD	:	Adi Diferensiyel Denklemler
BDP	:	Başlangıç Değer Problemi
ENO	:	Esasında Salınımsız Şema
KDD	:	Kısmi Diferensiyel Denklemler
SDP	:	Sınır Değer Problemi
WENO	:	Ağırlıklı Esasında Salınımsız Şema
WENO3	:	3. Mertebeden Ağırlıklı Esasında Salınımsız Şema
WENO5	:	5. Mertebeden Ağırlıklı Esasında Salınımsız Şema

1. GİRİŞ

Gerçek hayattaki sistemlerin matematiksel modellenmesi, bilimin farklı uygulamalı alanlarında yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Modeller genellikle bazı bilinen kurallara dayanırlar. Bu kurallara bağlı olarak belirleyici bir model, Adi Diferensiyel Denklemler (ADD), Kısmi Diferensiyel Denklemler (KDD), Gecikmeli Diferensiyel Denklemler vb. ya da bunların kombinasyonları gibi bir grup lineer ve/veya lineer olmayan diferensiyel denklemlerden oluşmaktadır. Ayrıca, modelde diferensiyel denklemler ile cebirsel bağıntılar bir Diferensiyel Cebirsel Denklemler sistemini oluşturabilirler. Modelin analitik çözümü çok nadir bulunabilmektedir ve bu nedenle, çoğu zaman çeşitli nümerik teknikleri kullanarak modelin nümerik (yaklaşık) çözümünü hesaplamak gerekir.

Tekil terimli kısmi diferensiyel denklemler bilim ve mühendisliğin farklı alanlarında ortaya çıkmaktadır. Bu tür denklemler için nümerik yöntemlerin uygulanması özel bir hassasiyet gerektirir. Çözümü düzgün olmayan veya çözümü süreksiz olan problemler için, standart nümerik yöntemler yakınsamayabilir.

Bu tezde, tekil terimli hiperbolik denklemler için nümerik yöntemleri sunuyoruz. Uzamsal ayrıklaştırma için üçüncü ve beşinci mertebeden Ağırlıklı Esasında Salınımsız (WENO) sonlu hacim yöntemleri kullanılmaktadır. Zamansal ayrıklaştırması için ise, üçüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılır. Çözümü düzgün olan problemler için hata analizi verilmektedir. Teorik bulguları teyit eden nümerik örnekler verilmektedir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Tekil terimli kısmi diferensiyel denklemler için nümerik yöntemler konusunda farklı çalışmalar bulunmaktadır, örneğin [1], [8], [10], [13].

Hiperbolik kısmi diferensiyel denklemler için Esasında salınımsız (ENO) yöntemi ilk olarak 1987 yılında tanımlanmıştır [5], [6]. ENO şemasını esas alarak, çözümleri süreksiz olan hiperbolik kısmi diferensiyel denklemler için üçüncü mertebeden Ağırlıklı Esasında Salınımsız (WENO3) yöntemi 1994 yılında geliştirilmiştir [9]. Beşinci mertebeden Ağırlıklı Esasında Salınımsız (WENO5) yöntemi 1996 yılında elde edilmiştir [7]. Daha yüksek mertebeden WENO yöntemleri 2009 yılında inşa edilmiştir [2]. WENO uzamsal ayrıklaştırma yöntemi düzgün olmayan ağlarda ilk olarak 2008 yılında uygulanmıştır [12]. WENO yontemleri ile ilgili tüm elde edilmiş sonuçlar ve bu konuda hala cevaplanmasi gereken sorular [11] yayında özetlenmiştir.

WENO uzamsal ayrıklaştırma yöntemi kullanıldığında, zamansal ayrıklaştırma için en yaygın kullanılan ise güçlü kararlılık koruyucu açık üçüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemidir [3], [4].

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan diferensiyel denklemlerin tanımları ve sınıflandırmaları, bazı özel fonksiyonların tanımları ve özellikleri, Taylor teoremi, sonlu farklar ve sonlu hacimler yöntemleri ile ilgili genel bilgiler verilecektir.

3.1 DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE SINIFLANDIRMALARI

Gerçek hayattaki birçok olay diferensiyel denklemler ile modellenir. Örneğin; damarlarda kan akışı, hücrelerde protein konsantrasyonu, Güneşin etrafında gezegenlerin dönüşü, populasyon değişimi, tümörün büyümesi gibi.

Tanım 1. *Bilinmeyen fonksiyon (bağımlı değişken) ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere* ***diferensiyel denklemler*** *denir.*

Diğer bir ifadeyle diferensiyel denklem bir takım fonksiyonlar ile bunların türevleri arasındaki ilişkiyi temsil eder. Diferensiyel denklemler, kısmi diferensiyel denklemler ve adi diferensiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılır.

Tanım 2. *Bir bağımsız değişken bulunduran diferensiyel denklemlere* ***Adi Diferensiyel Denklemler (ADD)****, iki veya daha fazla bağımsız değişken bulunduran diferensiyel denklemlere de* ***Kısmi Diferensiyel Denklemler (KDD)*** *denir.*

Örneğin, $y'' + xy' - e^y = 0$ denklemi bir adi diferensiyel denklemdir ve $u_t = u_{xx}$ denklemi ise bir kısmi diferensiyel denklemdir. Bu tezde kısmi diferensiyel denklemler üzerinde durulacaktır.

Diferensiyel denklem, bir fonksiyon veya türevlerinin belirli bağımsız değişken değerlerine karşılık gelen bağımsız değişken değerleri konusunda bilgi içermez. Sonuç olarak aynı fiziksel olayla ilgili pek çok farklı problem aynı diferensiyel denklemle ifade edilir. Farklılık ise elde edilen genel çözümden bizim ilgilendiğimiz problemin özel çözümüne geçebilmemizi sağlayan özel koşulların tanımlanmasıdır.

Tanım 3. *Bir diferensiyel denklem başlangıç koşullarıyla birlikte* ***Başlangıç Değer Problemi (BDP)****, sınır değer koşulları ile birlikte bir* ***Sınır Değer Problemi (SDP)*** *oluşturur.*

Örneğin,

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

bir başlangıç değer problemidir ve

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

bir sınır değer problemidir.

Tanım 4. *Bir kısmi diferensiyel denklemin bağımlı değişken ve türevlerinin hepsinin dereceleri* 1 *ve denklemde bağımlı değişkenler ve türevleri çarpım durumunda değil ise buna* ***lineer kısmi diferensiyel denklem*** *denir.*

Örneğin, $u_t = u_{xx}$ denklemi bir lineer diferensiyel denklemdir, $y'' + xy' - e^y = 0$ denklemi ise lineer olmayan bir diferensiyel denklemdir.

Tanım 5. *Bir kısmi diferensiyel denklem, en yüksek mertebeli terimlerine göre lineer ise bu denkleme* ***yarı lineer kısmi diferensiyel denklem*** *denir.*

Tanım 6. *Yarı lineer kısmi diferensiyel bir denklemin en yüksek mertebeden türevli değişkenlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerden oluşuyorsa* ***hemen-hemen lineer kısmi diferensiyel denklem*** *denir.*

İkinci mertebeden hemen-hemen lineer

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \tag{3.1}$$

denklemini ele alalım. Burada A, B ve C; xy-düzleminin bir Ω bölgesinde tanımlı fonksiyonlar olduğunu ve aynı anda üçünün birden sıfır olmadığını varsayıyoruz.

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyona (3.1) denkleminin **diskriminantı** denir.

Tanım 7. *Eğer Ω nın bir (x_0, y_0) noktasında*

$\Delta(x_0, y_0) > 0$ ise, (3.1) denklemine bu noktada *hiperboliktir*,

$\Delta(x_0, y_0) = 0$ ise, (3.1) denklemine bu noktada *paraboliktir*,

$\Delta(x_0, y_0) < 0$ ise, (3.1) denklemine bu noktada *eliptiktir*

denir. Bir Ω bölgesinin tüm noktalarında hiperbolik, parabolik veya eliptik bir denkleme Ω da sırasıyla ***hiperbolik***, ***parabolik*** *veya* ***eliptik*** *denklem denir.*

Örneğin, $u_t - u_{xx} = 0$ ısı denklemi, parabolik bir denklemdir; $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace denklemi, eliptik bir denklemdir; $u_{tt} - u_{xx} = 0$ dalga denklemi ve $u_t + u_x = 0$ adveksiyon denklemi hiperbolik denklemlerdir.

3.2 TAYLOR TEOREMİ

Teorem 1. *$f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ türevi $[a,b]$ aralığında mevcut ve $x_0 \in [a,b]$ olsun. Bu durumda*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ve her $x \in [a,b]$ için x_0 ile x arasında bir $\xi(x)$ sayısı

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

olmak üzere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur.

Yukarıdaki şekilde tanımlanan $P_n(x)$ polinomuna f fonksiyonunun x_0 civarındaki *n.Taylor polinomu* ve $R_n(x)$ ifadesine de $P_n(x)$ ile ilişkili *kesme hatası* denir. Kesme hatasındaki $\xi(x)$ sayısı $P_n(x)$ polinomunun civarında açıldığı x sayısına bağlı olduğundan x'in bir fonksiyonudur.

3.3 BİRİM VE DİRAC DELTA FONKSİYONU

Tanım 8. $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ *şeklinde tanımlanan fonksiyona birim (Heaviside) fonksiyonu denir.*

Birim fonksiyonunun türevi $x \neq 0$ için 0 dır. $x = 0$ da birim fonksiyonunun türevi klasik anlamda tanımsızdır. Literatürde, birim fonksiyonunun türevi Dirac delta fonksiyonu olarak tanımlanır ve $\delta(x)$ şeklinde gösterilir. Yani $H'(x) = \delta(x)$ 'dir.

Tanım 9. *Dirac delta fonksiyonu,*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

koşullarını sağlayan fonksiyonu olarak tanımlanır.

Dirac Delta fonksiyonun önemli özelliklerinden birisi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{3.2}$$

eşitliğinin her f fonsiyonu ve her a sabiti için sağlanmasıdır.

3.4 SONLU FARKLAR VE SONLU HACİMLER YÖNTEMLERİ

Sonlu farklar ve sonlu hacimler yöntemleri diferensiyel denklemleri çözmek için en önemli nümerik yöntemlerdendir. Sonlu farklar yöntemlerinde, denklemin diferensiyel formu kullanılır ve denklemdeki bilinmeyen fonksiyonun türevleri sonlu farklar ile değiştirilir. Sonlu hacimler yöntemleri ise aksine denklemin integral formunu kullanır. Bu bölümde, bazı basit başlangıç-sınır-değer problemler için her iki yöntemin uygulanmasını göstereceğiz.

3.4.1 Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemleri diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerini bulmakta kullanılan en eski yöntemlerden biridir. Bu yöntemlerin esası Taylor formülüne dayanır.

Örnek 1.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Dirichlet-sınır koşulları ile başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Taylor formülünü kullanarak, küçük bir τ için,

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau}$$

ve küçük bir h için,

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2}$$

yaklaşım formülleri elde edilebilir. Bu yaklaşım formülleri kullanılarak (3.3) problemi aşağıdaki sonlu farklar şeması ile değiştirilebilir

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}, \quad k = 0,1,\ldots,M-1, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \\ u_i^0 = \sin(\pi x_i), \quad i = 0,1,\ldots,N, \\ u_0^k = u_N^k = 0, \quad k = 0,1,\ldots,M, \\ \tau = \dfrac{1}{M}, \quad h = \dfrac{1}{N}, \quad x_i = ih, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad t_k = k\tau, \quad k = 0,1,\ldots,M. \end{cases} \tag{3.4}$$

Burada u_i^k, (3.3) probleminin $u(x,t)$ çözümünün, $t = t_k$ ve $x = x_i$ değerleri için nümerik bir yaklaşımıdır.

(3.4) sonlu farklar şemasına zamanda ileri konumda merkezi fark yöntemi denir. Bilindiği gibi bu şema zamana göre, birinci mertebeden ve konuma göre, ikinci mertebeden bir yöntemdir. Türevler için farklı yaklaşım formüllerini kullanarak diğer sonlu fark şemaları da elde edilebilir.

3.4.2 Sonlu Hacimler Yöntemi

Örnek 2.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \le x \le 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Neumann-sınır koşulları ile başlangıç-değer problemini göz önüne alalım.

$[0,1]$ aralığının

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < x_{\frac{5}{2}} < \ldots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$$

ve

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = h = \frac{1}{N}, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

şeklindeki parçalanmasını göz önüne alalım. Hücreleri ve hücre merkezlerini

$$\Omega_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right], \quad x_i = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

şeklinde tanımlayalım.

(3.5) problemindeki denklem için sonlu hacim yöntemini uygulamak, denklemin her Ω_i hücresi üzerinde integralini almak ve hücrenin hacmine bölmek anlamına gelir. Bunun sonucunda

$$\frac{1}{h}\int_{\Omega_i} u_t dx = \frac{1}{h}\int_{\Omega_i} u_{xx} dx, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{3.6}$$

elde ederiz. $u(x,t)$ fonksiyonunun Ω_i hücresindeki ortalama değerini

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{h}\int_{\Omega_i} u(x,t)dx, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

şeklinde tanımlayarak (3.6) den

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{1}{h}\left(u_x(x_{i+\frac{1}{2}},t) - u_x(x_{i-\frac{1}{2}},t)\right), \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{3.7}$$

yazılabilir. Sonlu hacim yöntemini tamamlamak için

$$u_x(x_{i+\frac{1}{2}},t) = \frac{\bar{u}_{i+1}(t) - \bar{u}_i(t)}{h}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1$$

yaklaşım formüllerini kullanarak, (3.5) probleminin konuma göre ayrıklaştırılmış hali

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}_i}{dt} = \dfrac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h^2}, & i = 2,3,\ldots,N-1, \\ \dfrac{d\bar{u}_1}{dt} = \dfrac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{h^2}, & \\ \dfrac{d\bar{u}_N}{dt} = \dfrac{\bar{u}_{N-1} - \bar{u}_N}{h^2}, & \\ \bar{u}_i(0) = \dfrac{\cos(\pi x_{i-\frac{1}{2}}) - \cos(\pi x_{i+\frac{1}{2}})}{\pi h}, & i = 1,2,\ldots,N \end{cases} \tag{3.8}$$

olur. Sonunda (3.8) adi diferensiyel denklemlerin sistemi Runge-Kutta gibi herhangi bir nümerik metod ile çözülebilir.

3.5 TEKİL TERİMLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Tekil terimli kısmi diferensiyel denklemlerde kaynak terimi Dirac delta fonksiyonu içerir. Örneğin,

$$u_t = u_{xx} + \delta(x - \xi), \tag{3.9}$$

bir boyutlu tekil terimli ısı denklemidir. Bu denklemin herhangi bir çözümü düzgün fonksiyon değildir. Ayrıca, denklemde Dirac delta fonksiyonlu terim bulunduğu için, Örnek 1 de gösterilen (3.4) gibi herhangi bir sonlu farklar şeması kullanılamaz. Bu durumda, genellikle düzenleştirme yöntemi kullanılır. Yani, (3.9) denkleminde $\delta(x-\xi)$ Dirac delta fonksiyonu parçalı-doğrusal

$$\delta_\epsilon(x-\xi)=\begin{cases}0, & x<\xi-\epsilon,\\[2ex] \dfrac{x-\xi+\epsilon}{\epsilon^2}, & \xi-\epsilon\le x<\xi,\\[2ex] \dfrac{-x+\xi+\epsilon}{\epsilon^2}, & \xi\le x\le\xi+\epsilon,\\[2ex] 0, & x>\xi+\epsilon\end{cases} \tag{3.10}$$

fonksiyonu ile değiştirilir. Düzenleştirilmiş denklem için şimdi (3.4) deki gibi

$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau}=\frac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h^2}+\delta_\epsilon(x_i-\xi) \tag{3.11}$$

şemasını kullanabiliriz. $\delta_\epsilon(x-\xi)$ için diğer fonksiyonlar seçilebilir [13].

(3.9) denklemini düzenleştirince esas soru ϵ parametresinin ne kadar küçük seçilmesi gerektiğidir. Düzenleştirilmiş denklemin çözümünün (3.9) denkleminin çözümüne yakınsaması icin $\epsilon\to 0$ olması gerekir. Aynı zamanda, (3.11) şemasının çözümünün (3.9) denkleminin çözümüne yakınsaması için $h<2\epsilon$ olması gerekir. Yani, küçük ϵ değeri için h'in değerinin de küçük olması gerekir. Bu yüzden uzamsal ayrıklaştırma için fazla sayıda nokta seçilmesi lazım.

(3.9) denklemi icin sonlu hacimler yönteminin uygulamasında, denklem düzenleştirme gerekmez. $\xi\in\Omega_j$ olduğunu varsayalım. O zaman, (3.9) denklemin her Ω_i hücresi üzerinde integralini alırsak ve hücrenin hacmine bölersek,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i}u_t dx=\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i}u_{xx}dx+\frac{\delta_{ij}}{h} \tag{3.12}$$

elde ederiz. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Kronecker delta işaretidir. Şimdi, Örnek 2 deki gibi gerekli işlemleri yaparak (3.12) eşitliğinden

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h^2} + \frac{\delta_{ij}}{h} \tag{3.13}$$

adi diferensiyel denklemlerini elde ederiz. Gördüğümüz gibi, (3.9) denklemi için sonlu hacimler yöntemi düzenleştirme yapılmadan uygulunabiliyor.

Bu tezde,

$$u_t + au_x = f(t)\delta(x - \xi) \tag{3.14}$$

tekil terimli adveksiyon denklemler icin nümerik yöntemlerin üzerinde durulacaktır.

4. WENO3 YÖNTEMİ

4.1 WENO3 İNTERPOLASYON

WENO3 interpolasyon yöntemleri, bir fonksiyonun değerini düşük dereceli polinomları kullanarak yaklaşım yapma esasına dayanır [11, 12]. Farzedelim ki bir $u(x)$ fonksiyonunun x_{i-1}, x_i, x_{i+1} noktalardaki değerleri verilmiş olsun. Yani $u(x_{i-1}) = u_{i-1}$, $u(x_i) = u_i$, $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$ olsun. Burada $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$ olduğunu varsayalım. $u(x)$ fonsiyonunun $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ noktasındaki değerini bulmak için WENO3 interpolasyon formüllerini kurmak istiyoruz. Bu nedenle, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ nin yaklaşımını birinci dereceden polinomları kullanarak ifade etmeye çalışacağız.

İlk olarak amacımız $S_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$ noktalarındaki, $u(x)$ fonksiyonunun verilen değerleri ile aynı değerleri alan birinci dereceden bir polinom bulmaktır. Bildiğimiz gibi bu polinom tektir. Polinomu, $P_1(x) = a_1(x - x_i) + b_1$ biçiminde ele alalım, burada a_1 ve b_1 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} P_1(x_{i-1}) = u_{i-1} \\ P_1(x_i) = u_i \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -ha_1 + b_1 = u_{i-1} \\ b_1 = u_i \end{cases}$$

ve buradan

$$a_1 = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad b_1 = u_i$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için;

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_1(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h}{2}a_1 + b_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + u_i$$

veya

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{3u_i - u_{i-1}}{2} \tag{4.1}$$

elde ederiz.

Teorem 2. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (4.1) ikinci mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} \;=\; u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^2).$$

İspat: (4.1) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) \;=\; \frac{3u_i - u_{i-1}}{2} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) \;=\; \frac{3u(x_i) - u(x_i - h)}{2} - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left(3u(x_i) - u(x_i) + hu'(x_i) - \frac{h^2}{2}u''(x_i)\right) - \left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i)\right) + O(h^3)$$

$$= -\frac{3h^2}{8}u''(x_i) + O(h^3) \;=\; O(h^2)$$

elde ederiz.

Şimdi benzer şekilde amacımız $S_2 = \{x_i, x_{i+1}\}$ noktalarındaki, $u(x)$ fonksiyonunun verilen değerleri ile aynı değerleri alan birinci dereceden bir polinom bulmaktır. Bildiğimiz gibi bu polinom tektir. Polinomu, $P_2(x) = a_2(x - x_i) + b_2$ biçiminde ele alalım, burada a_2 ve b_2 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} P_2(x_i) = u_i \\ P_2(x_{i+1}) = u_{i+1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} b_2 = u_i \\ ha_2 + b_2 = u_{i+1} \end{cases}$$

ve buradan

$$a_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad b_2 = u_i$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ yaklaşık değeri için;

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_2(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h}{2}a_2 + b_2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + u_i$$

veya

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \tag{4.2}$$

elde ederiz.

Teorem 3. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (4.2) ikinci mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^2).$$

İspat: (4.2) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u(x_i) + u(x_i + h)}{2} - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left(u(x_i) + u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i)\right) - \left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i)\right) + O(h^3)$$

$$= \frac{h^2}{8}u''(x_i) + O(h^3) = O(h^2)$$

elde ederiz.

Şimdi ise $S = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ noktalarındaki $u(x)$ fonksiyonunun verilen değerleri ile aynı değerleri alan ikinci dereceden bir polinom kuralım. Polinomu, $P(x) = a(x-x_i)^2 + b(x-x_i) + c$ biçiminde ele alalım, burada a, b ve c bilinmeyen katsayılardır. Bu durumda,

$$\begin{cases} P(x_{i-1}) = u_{i-1} \\ P(x_i) = u_i \\ P(x_{i+1}) = u_{i+1} \end{cases} \implies \begin{cases} h^2a - hb + c = u_{i-1} \\ c = u_i \\ h^2a + hb + c = u_{i+1} \end{cases}$$

olur. Bu sistemi çözerek, $a = \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{2h^2}$, $b = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{2h}$, $c = u_i$ bulunur.O zaman

$$u_{i+\frac{1}{2}} \equiv P(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4}a + \frac{h}{2}b + c = \frac{h^2}{4}\cdot\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{2h^2} + \frac{h}{2}\cdot\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i,$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}u_{i-1} + \frac{3}{4}u_i + \frac{3}{8}u_{i+1} \tag{4.3}$$

bulunur.

Teorem 4. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (4.3) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u_{i+\frac{1}{2}} \;=\; u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (4.3) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$\begin{aligned}
u_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) \;&=\; -\frac{1}{8}u(x_i - h) + \frac{3}{4}u(x_i) + \frac{3}{8}u(x_i + h) - u(x_i + \frac{h}{2}) \\
&=\; -\frac{1}{8}\left(u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i)\right) \\
&\quad + \frac{3}{4}u(x_i) + \frac{3}{8}\left(u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i)\right) \\
&\quad - \left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + \frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right) + O(h^4) \\
&=\; \frac{h^3}{16}u'''(x_i) + O(h^4) \;=\; O(h^3)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Asıl önemli olan ise 3.mertebeden (4.3) yaklaşımının 2. mertebeden (4.1) ve (4.2) yaklaşımlarının *lineer birleşimi* şeklinde yazılabiliyor olmasıdır. Yani

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

veya

$$-\frac{1}{8}u_{i-1} + \frac{3}{4}u_i + \frac{3}{8}u_{i+1} = \gamma_1 \frac{3u_i - u_{i-1}}{2} + \gamma_2 \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$

olur. Bu eşitlik $\gamma_1 = \dfrac{1}{4}$ ve $\gamma_2 = \dfrac{3}{4}$ olduğunda sağlanır. Buradaki γ_1 ve γ_2 sabitlerine WENO literatüründe *lineer ağırlıklar* denir.

Özetle, $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ aralığında düzgün ise (4.1) ve (4.2) yaklaşımları 2.

mertebeden olmasına rağmen

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$$

yaklaşımının bulduğumuz γ_1 ve γ_2 değerleri için 3. mertebeden interpolasyon formülü olur.

Şimdi $u(x)$ 'in parçalı düzgün ve $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ aralığında bir noktada düzgün olmadığını varsayalım (yani bu noktada $u(x)$ fonksiyonu veya herhangi bir türevi süreksiz olduğunu varsayalım). Bu durumda $[x_{i-1}, x_i]$ veya $[x_i, x_{i+1}]$ aralıklarından birisinde $u(x)$ fonksiyonu düzgündür. Yani, 2. mertebeden $u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}$ veya $u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$ yaklaşımlardan birisi hala geçerlidir. WENO3'ün amacı, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 'nin yaklaşımını 2. mertebeden $u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}$ ve $u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$ yaklaşımlarını *konveks kombinasyonu* olarak seçmektir. Yani,

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega^{(i)}_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \omega^{(i)}_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$$

veya

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega^{(i)}_1 \cdot \frac{3u_i - u_{i-1}}{2} + \omega^{(i)}_2 \cdot \frac{u_{i+1} + u_i}{2} \tag{4.5}$$

Burada ki $\omega^{(i)}_1 \geq 0$ ve $\omega^{(i)}_2 \geq 0$ sabitlerine WENO literatüründe *lineer olmayan ağırlıklar* denir ve $\omega^{(i)}_1 + \omega^{(i)}_2 = 1$ 'dir. $\omega^{(i)}_k$ lerin aşağıdaki durumları karşılaması gerekir:

(i) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ aralığında düzgün ise $\omega^{(i)}_1 \approx \gamma_1$ ve $\omega^{(i)}_2 \approx \gamma_2$ olur ve (4.5) yaklaşımı 3. mertebeden olur.

(ii) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında düzgün ise ancak $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının bir noktasında düzgün değilse $\omega^{(i)}_1 \approx 0$ ve $\omega^{(i)}_2 \approx 1$ olur ve (4.5) yaklaşımı 2. mertebeden olur.

(iii) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında düzgün ise ancak $[x_i, x_{i+1}]$ aralığının bir noktasında düzgün değilse $\omega^{(i)}_1 \approx 1$ ve $\omega^{(i)}_2 \approx 0$ olur ve (4.5) yaklaşımı 2. mertebeden olur.

$\omega_k^{(i)}$ lerin seçimi $u(x)$ fonksiyonunun düzgünlüğünü ölçen, *düzgünlük göstergesi,* $\beta_k^{(i)}$ lere dayanır. WENO literatüründe

$$\beta_k^{(i)} = h \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (P_k'(x))^2 dx, \quad k = 1,2$$

şeklinde seçilir. Yani, $\beta_1^{(i)} = h^2 a_1{}^2 = (u_i - u_{i-1})^2$ ve $\beta_2^{(i)} = h^2 a_2{}^2 = (u_{i+1} - u_i)^2$ olur. Şimdi bu doğruluk göstergelerini kullanarak, doğrusal olmayan ağırlıkları tanımlayabiliriz,

$$\tilde{\omega}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k}{(\varepsilon + \beta_k^{(i)})^2}, \quad k = 1,2 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_k^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{\tilde{\omega}_1^{(i)} + \tilde{\omega}_2^{(i)}}, \quad k = 1,2$$

Burada ki ε 'u küçük bir pozitif sayı almamızın sebebi paydanın 0 olmamasıdır. WENO literatüründe $\varepsilon = 10^{-6}$ seçilir.

4.2 WENO3 YENİDEN YAPILANDIRMA

WENO3 yeniden yapılandırma yöntemine bakacak olursak, WENO3 interpolasyon yönteminde olduğu gibi, bir fonksiyonun değerini düşük dereceli polinomları kullanarak yaklaşım yapma esasına dayanır. $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$ olmak üzere,

$$\Omega_{i-1} = \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}} \right], \quad \Omega_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right], \quad \Omega_{i+1} = \left[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right]$$

hücrelerini tanımlayalım. Farzedelim ki bir $u(x)$ fonksiyonunun Ω_{i-1}, Ω_i ve Ω_{i+1} hücrelerindeki ortalama değerleri verilmiş olsun. Yani,

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega_{i-1}} u(x) dx = \bar{u}_{i-1}, \quad \frac{1}{h} \int_{\Omega_i} u(x) dx = \bar{u}_i, \quad \frac{1}{h} \int_{\Omega_{i+1}} u(x) dx = \bar{u}_{i+1}$$

olsun. $u(x)$ fonsiyonunun $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ noktasındaki değerini bulmak için WENO3 yeniden yapılandırma formüllerini kurmak istiyoruz. Bu nedenle, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ nin yaklaşımını birinci dereceden polinomları kullanarak ifade etmeye çalışacağız.

İlk olarak amacımız $S_1 = \{\Omega_{i-1}, \Omega_i\}$ hücrelerindeki ortalama değerleri, $u(x)$ fonksiyonunun ortalama değerleri ile aynı degerleri alan birinci dereceden bir polinom bulmaktır. Polinomu, $P_1(x) = a_1(x - x_i) + b_1$ biçiminde ele alalım, burada a_1 ve b_1 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{\Omega_{i-1}} P_1(x)dx = \bar{u}_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{\Omega_i} P_1(x)dx = \bar{u}_i \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \left(a_1(x - x_i) + b_1\right) dx = \bar{u}_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(a_1(x - x_i) + b_1\right) dx = \bar{u}_i \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -ha_1 + b_1 = \bar{u}_{i-1} \\ b_1 = \bar{u}_i \end{cases}$$

ve buradan,

$$a_1 = \frac{\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{h}, \quad b_1 = \bar{u}_i$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_1(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h}{2}a_1 + b_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{h} + \bar{u}_i$$

veya

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{3\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{2} \tag{4.6}$$

olarak bulunur.

Teorem 5. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (4.6) ikinci mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^2).$$

İspat: (4.6) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{3\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{2} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{3}{2h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(x)dx - \frac{1}{2h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} u(x)dx - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{3}{2h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \ldots\right) dx$$

$$-\frac{1}{2h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \ldots\right) dx$$

$$-\left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + O(h^3)\right)$$

$$= \frac{3}{2h}\left(hu(x_i) + \frac{h^3}{24}u''(x_i)\right) - \frac{1}{2h}\left(hu(x_i) - h^2u_x(x_i) + \frac{13h^3}{24}u''(x_i)\right)$$

$$-\left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i)\right) + O(h^3)$$

$$= -\frac{h^2}{3}u''(x_i) + O(h^3) \;=\; O(h^2)$$

elde ederiz.

Şimdi benzer şekilde amacımız $S_2 = \{\Omega_i, \Omega_{i+1}\}$ hücrelerindeki ortalama değerleri, $u(x)$ fonksiyonunun ortalama değerleri ile aynı olan, birinci dereceden bir polinom bulmaktır. Polinomu, $P_2(x) = a_2(x - x_i) + b_2$ biçiminde ele alalım, burada a_2 ve b_2 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\Omega_i} P_2(x)dx = \bar{u}_i \\ \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\Omega_{i+1}} P_2(x)dx = \bar{u}_{i+1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} (a_2(x - x_i) + b_2)\, dx = \bar{u}_i \\ \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} (a_2(x - x_i) + b_2)\, dx = \bar{u}_{i+1} \end{cases}$$

ve buradan,

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b_2 = \bar{u}_i \\ ha_2 + b_2 = \bar{u}_{i+1} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$a_2 = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h}, \quad b_2 = \bar{u}_i$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_2(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h}{2}a_2 + b_2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h} + \bar{u}_i$$

veya

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2} \tag{4.7}$$

olarak bulunur.

Teorem 6. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (4.7) ikinci mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^2).$$

İspat: (4.7) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} u(x)dx + \frac{1}{2h}\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(x)dx - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \ldots\right) dx$$

$$+\frac{1}{2h}\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \ldots\right) dx$$

$$-\left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + O(h^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2h}\left(hu(x_i) + h^2u'(x_i) + \frac{13h^3}{24}u''(x_i)\right) + \frac{1}{2h}\left(hu(x_i) + \frac{h^3}{24}u''(x_i)\right)$$

$$-\left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i)\right) + O(h^3)$$

$$= \frac{h^2}{6}u''(x_i) + O(h^3) \; = \; O(h^2)$$

elde ederiz.

Şimdi ise $S = \{\Omega_{i-1}, \Omega_i, \Omega_{i+1}\}$ hücrelerindeki ortalama değerleri, $u(x)$ fonksiyonunun ortalama değerleri ile aynı olan, ikinci dereceden bir polinom bulmaktır. Polinomu, $P(x) = a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c$ biçiminde ele alalım, burada a, b ve c bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{\Omega_{i-1}} P(x)dx = \bar{u}_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{\Omega_i} P(x)dx = \bar{u}_i \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{\Omega_{i+1}} P(x)dx = \bar{u}_{i+1} \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{i-\frac{3h}{2}}}^{x_{i-\frac{h}{2}}} \left(a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c\right) dx = \bar{u}_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{i-\frac{h}{2}}}^{x_{i+\frac{h}{2}}} \left(a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c\right) dx = \bar{u}_i \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{i+\frac{h}{2}}}^{x_{i+\frac{3h}{2}}} \left(a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c\right) dx = \bar{u}_{i+1} \end{cases}$$

ve buradan,

$$\implies \begin{cases} \dfrac{13h^2}{12}a - hb + c = \bar{u}_{i-1}; \\ \dfrac{h^2}{12}a + c = \bar{u}_i; \\ \dfrac{13h^2}{12}a + hb + c = \bar{u}_{i+1} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$a = \frac{\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2h^2}, \quad b = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2h}, \quad c = \frac{-\bar{u}_{i-1} + 26\bar{u}_i - \bar{u}_{i+1}}{24}$$

bulunur. O zaman $u_{i+\frac{1}{2}}$'nin yaklaşık değeri için

$$u_{i+\frac{1}{2}} = P(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4}a + \frac{h}{2}b + c$$

$$= \frac{h^2}{4} \cdot \frac{\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2h^2} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2h} + \frac{-\bar{u}_{i-1} + 26\bar{u}_i - \bar{u}_{i+1}}{24}$$

veya

$$u_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{u}_i + \frac{1}{3}\bar{u}_{i+1} \tag{4.8}$$

olarak bulunur.

Teorem 7. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (4.8) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (4.8) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{u}_i + \frac{1}{3}\bar{u}_{i+1} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= -\frac{1}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} u(x)dx + \frac{5}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(x)dx + \frac{1}{3h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} u(x)dx - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= -\frac{1}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + \ldots\right) dx$$

$$+\frac{5}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + \ldots\right) dx$$

$$+\frac{1}{3h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + \ldots\right) dx$$

$$-\left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + \frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right)$$

$$= -\frac{1}{6h}\left(hu(x_i) - h^2u'(x_i) + \frac{13h^3}{24}u''(x_i) - \frac{5h^4}{24}u'''(x_i)\right) + \frac{5}{6h}\left(hu(x_i) + \frac{h^3}{24}u''(x_i)\right)$$

$$+\frac{1}{3h}\left(hu(x_i) + h^2u'(x_i) + \frac{13h^3}{24}u''(x_i) + \frac{5h^4}{24}u'''(x_i)\right)$$

$$- \left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + \frac{h^3}{48}u'''(x_i) \right) + O(h^4)$$

$$= \frac{h^3}{12}u'''(x_i) + O(h^4) = +O(h^3)$$

elde ederiz.

Asıl önemli olan ise 3.mertebeden (4.8) yaklaşımının 2. mertebeden (4.6) ve (4.7) yaklaşımlarının *lineer birleşimi* şeklinde yazılabiliyor olmasıdır. Yani

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} \tag{4.9}$$

veya

$$-\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{u}_i + \frac{1}{3}\bar{u}_{i+1} = \gamma_1 \frac{3\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{2} + \gamma_2 \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2}$$

olur. Bu eşitlik $\gamma_1 = \dfrac{1}{3}$ ve $\gamma_2 = \dfrac{2}{3}$ olduğunda sağlanır. Buradaki, γ_1 ve γ_2 sabitlerine WENO literatüründe *lineer ağırlıklar* denir.

Özetle, $u(x)$ fonksiyonu $S = \{\Omega_{i-1}, \Omega_i, \Omega_{i+1}\}$ hücrelerinde düzgün ise (4.6) ve (4.7) yaklaşımları 2. mertebeden olmasına rağmen

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$$

yaklaşımının bulduğumuz γ_1 ve γ_2 değerleri için 3. mertebeden yeniden yapılandırma formülü olur.

4.1 bölümünde anlatıldığı gibi, WENO3'ün amacı, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 'nin yaklaşımını 2. mertebeden $u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}$ ve $u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$ yaklaşımlarını *konveks kombinasyonu* olarak seçmektir. Yani,

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega^{(i)}_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \omega^{(i)}_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$$

veya

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega_1^{(i)} \cdot \frac{3\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{2} + \omega_2^{(i)} \cdot \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2} \tag{4.10}$$

Burada ki $\omega_1^{(i)} \geq 0$ ve $\omega_2^{(i)} \geq 0$ sabitlerine WENO literatüründe *lineer olmayan ağırlıklar* denir ve $\omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} = 1$ 'dir. $\omega_k^{(i)}$ lerin aşağıdaki durumları karşılaması gerekir:

(i) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $S = \{\Omega_{i-1}, \Omega_i, \Omega_{i+1}\}$ hücrelerinin üzerinde düzgün ise $\omega_1^{(i)} \approx \gamma_1$ ve $\omega_2^{(i)} \approx \gamma_2$ olur ve (4.10) yaklaşımı 3. mertebeden olur.

(ii) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $S_2 = \{\Omega_i, \Omega_{i+1}\}$ hücrelerinin üzerinde düzgün ise ancak Ω_{i-1} hücresinin bir noktasında düzgün değilse $\omega_1^{(i)} \approx 0$ ve $\omega_2^{(i)} \approx 1$ olur ve (4.10) yaklaşımı 2. mertebeden olur.

(iii) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $S_1 = \{\Omega_{i-1}, \Omega_i\}$ hücrelerinin üzerinde düzgün ise ancak Ω_{i+1} hücresinin bir noktasında düzgün değilse $\omega_1^{(i)} \approx 1$ ve $\omega_2^{(i)} \approx 0$ olur ve (4.10) yaklaşımı 2. mertebeden olur.

$\omega_k^{(i)}$ lerin seçimi $u(x)$ fonksiyonunun düzgünlüğünü ölçen, *düzgünlük göstergesi,* $\beta_k^{(i)}$ lere dayanır. WENO literatüründe

$$\beta_k^{(i)} = h \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (P_k'(x))^2 dx, \quad k = 1,2$$

şeklinde seçilir. Düzgünlük göstergesi $\beta_k^{(i)}$, aralık boyutu h'a bağlı değildir. Yani, $\beta_1^{(i)} = h^2 {a_1}^2 = (\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1})^2$ ve $\beta_2^{(i)} = h^2 {a_2}^2 = (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i)^2$ olur. Şimdi bu doğruluk göstergelerini kullanarak, doğrusal olmayan ağırlıkları tanımlayabiliriz,

$$\tilde{\omega}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k}{(\varepsilon + \beta_k^{(i)})^2}, \quad k = 1,2 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_k^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{\tilde{\omega}_1^{(i)} + \tilde{\omega}_2^{(i)}}, \quad k = 1,2$$

Burada ki ε 'u küçük bir pozitif sayı almamızın sebebi paydanın 0 olmamasıdır. WENO literatüründe $\varepsilon = 10^{-6}$ seçilir.

5. WENO5 YÖNTEMİ

5.1 WENO5 İNTERPOLASYON

Farzedelim ki bir $u(x)$ fonksiyonunun x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2} noktalardaki değerleri verilmiş olsun. Yani $u(x_{i-2}) = u_{i-2}$, $u(x_{i-1}) = u_{i-1}$, $u(x_i) = u_i$, $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$, $u(x_{i+2}) = u_{i+2}$ olsun. Burada $x_{i+2} - x_{i+1} = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = x_{i-1} - x_{i-2} = h$ olduğunu varsayalım. $u(x)$ fonsiyonunun $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ noktasındaki değerini bulmak için WENO5 interpolasyon formüllerini kurmak istiyoruz. Bu nedenle, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ nin yaklaşımını ikinci dereceden polinomları kullanarak ifade etmeye çalışacağız.

İlk olarak amacımız $S_1 = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}$ noktalarındaki, $u(x)$ fonksiyonunun verilen değerleri ile aynı değerleri alan ikinci dereceden bir polinom bulmaktır. Bildiğimiz gibi bu polinom tektir. Polinomu, $P_1(x) = a_1(x - x_i)^2 + b_1(x - x_i) + c_1$ biçiminde ele alalım, burada a_1, b_1 ve c_1 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} P_1(x_{i-2}) = u_{i-2} \\ P_1(x_{i-1}) = u_{i-1} \\ P_1(x_i) = u_i \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4h^2 a_1 - 2hb_1 + c_1 = u_{i-2} \\ h^2 a_1 - hb_1 + c_1 = u_{i-1} \\ c_1 = u_i \end{cases}$$

ve buradan

$$a_1 = \frac{u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i}{2h^2}, \quad b_1 = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i}{2h}, \quad c_1 = u_i$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$’nun yaklaşık değeri için;

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_1(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4} a_1 + \frac{h}{2} b_1 + c_1$$

ve

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{3u_{i-2} - 10u_{i-1} + 15u_i}{8} \tag{5.1}$$

elde ederiz.

Teorem 8. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.1) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (5.1) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$\begin{aligned}
u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) &= \frac{3}{8}u(x_i - 2h) - \frac{10}{8}u(x_i - h) + \frac{15}{8}u(x_i) - u(x_i + \frac{h}{2}) \\
&= \frac{3}{8}\left(u(x_i) - 2hu'(x_i) + 2h^2u''(x_i) - \frac{4h^3}{3}u'''(x_i)\right) \\
&\quad - \frac{10}{8}\left(u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i)\right) + \frac{15}{8}u(x_i) \\
&\quad - \left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + \frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right) + O(h^4) \\
&= -\frac{5h^3}{16}u'''(x_i) + O(h^4) = O(h^3)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi amacımız $S_2 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ noktalarındaki, $u(x)$ fonksiyonunun verilen değerleri ile aynı değerleri alan ikinci dereceden bir polinom bulmaktır. Bildiğimiz gibi bu polinom tektir. Polinomu, $P_2(x) = a_2(x-x_i)^2 + b_2(x-x_i) + c_2$ biçiminde göz önüne alalım, burada a_2 , b_2 ve c_2 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} P_2(x_{i-1}) = u_{i-1} \\ P_2(x_i) = u_i \\ P_2(x_{i+1}) = u_{i+1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h^2a_2 - hb_2 + c_2 = u_{i-1} \\ c_2 = u_i \\ h^2a_2 + hb_2 + c_2 = u_{i+1} \end{cases}$$

ve buradan

$$a_2 = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{2h^2}, \quad b_2 = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad c_2 = u_i$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için;

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_2(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4}a_2 + \frac{h}{2}b_2 + c_2$$

ve

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{-u_{i-1} + 6u_i + 3u_{i+1}}{8} \tag{5.2}$$

elde ederiz.

Teorem 9. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.2) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (5.2) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$\begin{aligned}
u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{8}u(x_i - h) + \frac{3}{4}u(x_i) + \frac{3}{8}u(x_i + h) - u(x_i + \frac{h}{2}) \\
&= -\frac{1}{8}\left(u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i)\right) \\
&\quad + \frac{3}{4}u(x_i) + \frac{3}{8}\left(u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i)\right) \\
&\quad - \left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + \frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right) + O(h^4) \\
&= \frac{h^3}{16}u'''(x_i) + O(h^4) = O(h^3)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi ise amacımız $S_3 = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ noktalarındaki, $u(x)$ fonksiyonunun verilen değerleri ile aynı değerleri alan ikinci dereceden bir polinom bulmaktır. Bildiğimiz gibi bu polinom tektir. Polinomu, $P_3(x) = a_3(x-x_i)^2 + b_3(x-x_i) + c_3$ biçiminde ele alalım, burada a_3, b_3 ve c_3 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} P_3(x_i) = u_i \\ P_3(x_{i+1}) = u_{i+1} \\ P_3(x_{i+2}) = u_{i+2} \end{cases} \implies \begin{cases} c_3 = u_i \\ h^2 a_3 + h b_3 + c_3 = u_{i+1} \\ 4h^2 a_3 + 2h b_3 + c_3 = u_{i+2} \end{cases}$$

ve buradan

$$a_3 = \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{2h^2}, \quad b_3 = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - 4u_{i+2}}{2h}, \quad c_3 = u_i$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için;

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_3(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4} a_3 + \frac{h}{2} b_3 + c_3$$

ve

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}}{8} \tag{5.3}$$

elde ederiz.

Teorem 10. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.3) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (5.3) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{3}{8}u(x_i) + \frac{3}{4}u(x_i + h) - \frac{1}{8}u(x_i + 2h) - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{3}{8}u(x_i) + \frac{3}{4}\left(u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i)\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(u(x_i) + 2hu'(x_i) + 2h^2u''(x_i) + \frac{4h^3}{3}u'''(x_i)\right)$$

$$-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right)+O(h^4)$$

$$=-\frac{h^3}{16}u'''(x_i)+O(h^4)=O(h^3)$$

elde ederiz.

Şimdi de $S=\{x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2}\}$ noktalarındaki $u(x)$ fonksiyonunun verilen değerleri ile aynı değerleri alan dördüncü dereceden bir polinom kuralım. Polinomu, $P(x)=a(x-x_i)^4+b(x-x_i)^3+c(x-x_i)^2+d(x-x_i)+e$ biçiminde ele alalım, burada a, b, c, d, e bilinmeyen katsayılardır. Bu durumda,

$$\begin{cases} P(x_{i-2})=u_{i-2} \\ P(x_{i-1})=u_{i-1} \\ P(x_i)=u_i \\ P(x_{i+1})=u_{i+1} \\ P(x_{i+2})=u_{i+2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 16h^4a-8h^3b+4h^2c-2hd+e=u_{i-2} \\ h^4a-h^3b+h^2c-hd+e=u_{i-1} \\ e=u_i \\ h^4a+h^3b+h^2c+hd+e=u_{i+1} \\ 16h^4a+8h^3b+4h^2c+2hd+e=u_{i+2} \end{cases}$$

olur.

Bu sistemi çözerek,

$$a=\frac{u_{i-2}-4u_{i-1}+6u_i-4u_{i+1}+u_{i+2}}{24h^4},\quad b=\frac{-u_{i-2}+2u_{i-1}-2u_{i+1}+u_{i+2}}{12h^3},$$

$$c=\frac{-u_{i-2}+16u_{i-1}-30u_i+16u_{i+1}-u_{i+2}}{24h^2},\quad d=\frac{u_{i-2}-8u_{i-1}+8u_{i+1}-u_{i+2}}{12h},\quad e=u_i$$

bulunur. O zaman

$$u_{i+\frac{1}{2}}\equiv P(x_{i+\frac{1}{2}})=\frac{h^4}{16}a+\frac{h^3}{8}b+\frac{h^2}{4}c+\frac{h}{2}d+e$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{3}{128}u_{i-2} - \frac{5}{32}u_{i-1} + \frac{45}{64}u_i + \frac{15}{32}u_{i+1} - \frac{5}{128}u_{i+2} \tag{5.4}$$

bulunur.

Teorem 11. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.4) beşinci mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^5).$$

İspat: (5.4) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{3}{128}u(x_i - 2h) - \frac{5}{32}u(x_i - h) + \frac{45}{64}u(x_i) + \frac{15}{32}u(x_i + h) - \frac{5}{128}u(x_i + 2h) - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{3}{128}\left(u(x_i) - 2hu'(x_i) + 2h^2u''(x_i) - \frac{4h^3}{3}u'''(x_i) + \frac{2h^4}{3}u^{(4)}(x_i) + \frac{4h^5}{15}u^{(5)}(x_i)\right)$$

$$-\frac{5}{32}\left(u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) - \frac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i)\right) + \frac{45}{64}u(x_i)$$

$$+\frac{15}{32}\left(u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i)\right)$$

$$-\frac{5}{128}\left(u(x_i) + 2hu'(x_i) + 2h^2u''(x_i) + \frac{4h^3}{3}u'''(x_i) + \frac{2h^4}{3}u^{(4)}(x_i) - \frac{4h^5}{15}u^{(5)}(x_i)\right)$$

$$-\left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + \frac{h^3}{48}u'''(x_i) + \frac{h^4}{384}u^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{3840}u^{(5)}(x_i)\right) + O(h^6)$$

$$= \frac{83h^5}{3840}u^{(5)}(x_i) + O(h^6) = O(h^5)$$

elde ederiz.

Asıl önemli olan ise 5.mertebeden (5.4) yaklaşımının 3. mertebeden (5.1), (5.2) ve (5.3) yaklaşımlarının *lineer birleşimi* şeklinde yazılabiliyor olmasıdır. Yani

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_3 u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} \tag{5.5}$$

veya

$$\frac{3}{128}u_{i-2} - \frac{5}{32}u_{i-1} + \frac{45}{64}u_i + \frac{15}{32}u_{i+1} - \frac{5}{128}u_{i+2}$$

$$= \gamma_1 \frac{3u_{i-2} - 10u_{i-1} + 15u_i}{8} + \gamma_2 \frac{-u_{i-1} + 6u_i + 3u_{i+1}}{8} + \gamma_3 \frac{3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}}{8}$$

olur. Bu eşitlik $\gamma_1 = \frac{1}{16}$, $\gamma_2 = \frac{5}{8}$ ve $\gamma_3 = \frac{5}{16}$ olduğunda sağlanır. Buradaki γ_1, γ_2 ve γ_3 sabitlerine WENO literatüründe *lineer ağırlıklar* denir.

Özetle, $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığında düzgün ise (5.1), (5.2) ve (5.3) yaklaşımları 3. mertebeden olmasına rağmen

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_3 u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}}$$

yaklaşımının bulduğumuz γ_1, γ_2 ve γ_3 değerleri için 5. mertebeden interpolasyon formülü olur.

Şimdi $u(x)$ 'in parçalı düzgün ve $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığında bir noktada düzgün olmadığını varsayalım (yani bu noktada $u(x)$ fonksiyonu veya herhangi bir türevi süreksiz olduğunu varsayalım). Bu durumda $[x_{i-2}, x_i]$, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ veya $[x_i, x_{i+2}]$ aralıklarından en az birisinde $u(x)$ fonksiyonu düzgündür. Yani, 3. mertebeden $u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}$, $u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$ veya $u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}}$ yaklaşımlardan en az birisi hala geçerlidir.

WENO5'in amacı, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 'nin yaklaşımını 3. mertebeden $u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}$, $u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$ ve $u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}}$ yaklaşımlarını *konveks kombinasyonu* olarak seçmektir. Yani,

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega^{(i)}_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \omega^{(i)}_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} + \omega^{(i)}_3 u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}}$$

veya

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega_1^{(i)}\frac{3u_{i-2} - 10u_{i-1} + 15u_i}{8} + \omega_2^{(i)}\frac{-u_{i-1} + 6u_i + 3u_{i+1}}{8} + \omega_3^{(i)}\frac{3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}}{8} \tag{5.6}$$

Burada ki $\omega_1^{(i)} \geq 0$, $\omega_2^{(i)} \geq 0$ ve $\omega_3^{(i)} \geq 0$ sabitlerine WENO literatüründe *lineer olmayan ağırlıklar* denir ve $\omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} + \omega_3^{(i)} = 1$ 'dir. $\omega_k^{(i)}$ lerin aşağıdaki durumları karşılaması gerekir:

(i) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığında düzgün ise $\omega_1^{(i)} \approx \gamma_1$, $\omega_2^{(i)} \approx \gamma_2$ ve $\omega_3^{(i)} \approx \gamma_3$ olur ve (5.6) yaklaşımı 5. mertebeden olur.

(ii) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ aralığında düzgün ise ancak $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ aralığının bir noktasında düzgün değilse $\omega_1^{(i)} \approx 0$ ve $\omega_2^{(i)} + \omega_3^{(i)} \approx 1$ olur ve (5.6) yaklaşımı 3. mertebeden olur.

(iii) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-2}, x_{i+1}]$ aralığında düzgün ise ancak $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ aralığının bir noktasında düzgün değilse $\omega_3^{(i)} \approx 0$ ve $\omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} \approx 1$ olur ve (5.6) yaklaşımı 3. mertebeden olur.

(iv) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ ve $[x_i, x_{i+2}]$ aralıklarında düzgün ise ancak $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının bir noktasında düzgün değilse $\omega_1^{(i)} \approx 0$, $\omega_2^{(i)} \approx 0$, $\omega_3^{(i)} \approx 1$ olur ve (5.6) yaklaşımı 3. mertebeden olur.

(v) Eğer $u(x)$ fonksiyonu $[x_{i-2}, x_i]$ ve $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ aralıklarında düzgün ise ancak $[x_i, x_{i+1}]$ aralığının bir noktasında düzgün değilse $\omega_1^{(i)} \approx 1$, $\omega_2^{(i)} \approx 0$, $\omega_3^{(i)} \approx 0$ olur ve (5.6) yaklaşımı 3. mertebeden olur.

$\omega_k^{(i)}$ lerin seçimi $u(x)$ fonksiyonunun düzgünlüğünü ölçen, *düzgünlük göstergesi,* $\beta_k^{(i)}$ lere dayanır. WENO literatüründe

$$\beta_k^{(i)} = h\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (P_k'(x))^2 dx + h^3 \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (P_k''(x))^2 dx, \quad k = 1,2,3$$

şeklinde seçilir. Yani,

$$\beta_1^{(i)} = \frac{1}{3}\left(4u_{i-2}^2 - 19u_{i-2}u_{i-1} + 25u_{i-1}^2 + 11u_{i-2}u_i - 31u_{i-1}u_i + 10u_i^2\right),$$

$$\beta_2^{(i)} = \frac{1}{3}\left(4u_{i-1}^2 - 13u_{i-1}u_i + 13u_i^2 + 5u_{i-1}u_{i+1} - 13u_iu_{i+1} + 4u_{i+1}^2\right),$$

$$\beta_3^{(i)} = \frac{1}{3}\left(10u_i^2 - 31u_iu_{i+1} + 25u_{i+1}^2 + 11u_iu_{i+2} - 19u_{i+1}u_{i+2} + 4u_{i+2}^2\right).$$

olur. Şimdi bu doğruluk göstergelerini kullanarak, doğrusal olmayan ağırlıkları tanımlayabiliriz,

$$\tilde{\omega}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k}{(\varepsilon + \beta_k^{(i)})^2}, \quad k = 1,2,3 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_k^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{\tilde{\omega}_1^{(i)} + \tilde{\omega}_2^{(i)} + \tilde{\omega}_3^{(i)}}, \quad k = 1,2,3$$

Burada ki ε 'u küçük bir pozitif sayı almamızın sebebi paydanın 0 olmamasıdır. WENO literatüründe $\varepsilon = 10^{-6}$ seçilir.

5.2 WENO5 YENİDEN YAPILANDIRMA

WENO5 yeniden yapılandırma yöntemine bakacak olursak, WENO5 interpolasyon yönteminde olduğu gibi, bir fonksiyonun değerini düşük dereceli polinomları kullanarak yaklaşım yapma esasına dayanır. $x_{i+2} - x_{i+1} = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = x_{i-1} - x_{i-2} = h$ olmak üzere,

$$\Omega_{i-2} = \left[x_{i-\frac{5}{2}}, x_{i-\frac{3}{2}}\right], \quad \Omega_{i-1} = \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}\right], \quad \Omega_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Omega_{i+1} = \left[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}\right], \quad \Omega_{i+2} = \left[x_{i+\frac{3}{2}}, x_{i+\frac{5}{2}}\right]$$

hücreleri tanımlayalım. Farzedelim ki bir $u(x)$ fonksiyonunun Ω_{i-2}, Ω_{i-1}, Ω_i, Ω_{i+1} ve Ω_{i+2} hücrelerindeki ortalama değerleri verilmiş olsun. Yani,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i-2}} u(x)dx = \bar{u}_{i-2}, \quad \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i-1}} u(x)dx = \bar{u}_{i-1}, \quad \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i}} u(x)dx = \bar{u}_{i},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i+1}} u(x)dx = \bar{u}_{i+1}, \quad \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i+2}} u(x)dx = \bar{u}_{i+2}$$

olsun. $u(x)$ fonsiyonunun $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ noktasındaki değerini bulmak için WENO5 yeniden yapılandırma formüllerini kurmak istiyoruz. Bu nedenle, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ nin yaklaşımını ikinci dereceden polinomları kullanarak ifade etmeye çalışacağız.

İlk olarak amacımız $S_1 = \{\Omega_{i-2}, \Omega_{i-1}, \Omega_i\}$ hücrelerindeki ortalama değerleri, $u(x)$ fonksiyonunun ortalama değerleri ile aynı degerleri alan ikinci dereceden bir polinom bulmaktır. Polinomu, $P_1(x) = a_1(x - x_i)^2 + b_1(x - x_i) + c_1$ biçiminde ele alalım, burada a_1, b_1 ve c_1 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i-2}} P_1(x)dx = \bar{u}_{i-2} \\ \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i-1}} P_1(x)dx = \bar{u}_{i-1} \\ \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i}} P_1(x)dx = \bar{u}_{i} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{h}\int\limits_{x_i-\frac{5h}{2}}^{x_i-\frac{3h}{2}} \left(a_1(x-x_i)^2 + b_1(x-x_i) + c_1\right) dx = \bar{u}_{i-2} \\ \frac{1}{h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \left(a_1(x-x_i)^2 + b_1(x-x_i) + c_1\right) dx = \bar{u}_{i-1} \\ \frac{1}{h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(a_1(x-x_i)^2 + b_1(x-x_i) + c_1\right) dx = \bar{u}_{i} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{49h^2}{12}a_1 - 2hb_1 + c_1 = \bar{u}_{i-2} \\ \frac{13h^2}{12}a_1 - hb_1 + c_1 = \bar{u}_{i-1} \\ \frac{h^2}{12}a_1 + c_1 = \bar{u}_{i} \end{cases}$$

ve buradan,

$$a_1 = \frac{\bar{u}_{i-2} - 2\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i}{2h^2}, \quad b_1 = \frac{\bar{u}_{i-2} - 4\bar{u}_{i-1} + 3\bar{u}_i}{2h}, \quad c_1 = \frac{-\bar{u}_{i-2} + 2\bar{u}_{i-1} + 23\bar{u}_i}{24}$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_1(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4}a_1 + \frac{h}{2}b_1 + c_1$$

ve

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2\bar{u}_{i-2} - 7\bar{u}_{i-1} + 11\bar{u}_i}{6} \tag{5.7}$$

olarak bulunur.

Teorem 12. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.7) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (5.7) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{2\bar{u}_{i-2} - 7\bar{u}_{i-1} + 11\bar{u}_i}{6} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{3h}\int_{x_i-\frac{5h}{2}}^{x_i-\frac{3h}{2}} u(x)dx - \frac{7}{6h}\int_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} u(x)dx + \frac{11}{6h}\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(x)dx - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{3h}\int_{x_i-\frac{5h}{2}}^{x_i-\frac{3h}{2}} \left(u(x_i) + (x - x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + \ldots \right) dx$$

$$-\frac{7}{6h}\int_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}}\left(u(x_i)+(x-x_i)u'(x_i)+\frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i)+\frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i)+...\right)dx$$

$$+\frac{11}{6h}\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}}\left(u(x_i)+(x-x_i)u'(x_i)+\frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i)+\frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i)+...\right)dx$$

$$-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)+O(h^4)\right)$$

$$=\frac{1}{3h}\left(hu(x_i)-2h^2u'(x_i)+\frac{49h^3}{24}u''(x_i)-\frac{17h^4}{12}u'''(x_i)\right)$$

$$-\frac{7}{6h}\left(hu(x_i)-h^2u'(x_i)+\frac{13h^3}{24}u''(x_i)-\frac{5h^4}{24}u'''(x_i)\right)+\frac{11}{6h}\left(hu(x_i)+\frac{h^3}{24}u''(x_i)\right)$$

$$-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right)+O(h^4)$$

$$=-\frac{h^3}{44}u'''(x_i)+O(h^4)=O(h^3)$$

elde ederiz.

Şimdi benzer şekilde amacımız $S_2=\{\Omega_{i-1},\Omega_i,\Omega_{i+1}\}$ hücrelerindeki ortalama değerleri, $u(x)$ fonksiyonunun ortalama değerleri ile aynı degerleri alan ikinci dereceden bir polinom bulmaktır. Polinomu, $P_2(x)=a_2(x-x_i)^2+b_2(x-x_i)+c_2$ biçiminde ele alalım, burada a_2, b_2 ve c_2 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i-1}} P_2(x)dx = \bar{u}_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i}} P_2(x)dx = \bar{u}_{i} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i+1}} P_2(x)dx = \bar{u}_{i+1} \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \Big(a_2(x-x_i)^2 + b_2(x-x_i) + c_2\Big)\,dx = \bar{u}_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \Big(a_2(x-x_i)^2 + b_2(x-x_i) + c_2\Big)\,dx = \bar{u}_{i} \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \Big(a_2(x-x_i)^2 + b_2(x-x_i) + c_2\Big)\,dx = \bar{u}_{i+1} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \dfrac{13h^2}{12}a_2 - hb_2 + c_2 = \bar{u}_{i-1} \\ \dfrac{h^2}{12}a_2 + c_2 = \bar{u}_{i} \\ \dfrac{13h^2}{12}a_2 + hb_2 + c_2 = \bar{u}_{i+1} \end{cases}$$

ve buradan,

$$a_2 = \frac{\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2h^2}, \quad b_2 = \frac{-\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_{i+1}}{2h}, \quad c_2 = \frac{-\bar{u}_{i-1} + 26\bar{u}_i - \bar{u}_{i+1}}{24}$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_2(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4}a_2 + \frac{h}{2}b_2 + c_2$$

ve

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{-\bar{u}_{i-1} + 5\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i+1}}{6} \tag{5.8}$$

olarak bulunur.

Teorem 13. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.8) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü* *dür. Yani,*

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (5.8) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{-\bar{u}_{i-1} + 5\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i+1}}{6} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= -\frac{1}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} u(x)dx + \frac{5}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(x)dx + \frac{1}{3h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} u(x)dx - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= -\frac{1}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + ...\right) dx$$

$$+\frac{5}{6h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + ...\right) dx$$

$$+\frac{1}{3h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + ...\right) dx$$

$$-\left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{8}u''(x_i) + \frac{h^3}{48}u'''(x_i) + O(h^4)\right)$$

$$= -\frac{1}{6h}\left(hu(x_i) - h^2u'(x_i) + \frac{13h^3}{24}u''(x_i) - \frac{5h^4}{24}u'''(x_i)\right) + \frac{5}{6h}\left(hu(x_i) + \frac{h^3}{24}u''(x_i)\right)$$

$$+\frac{1}{3h}\left(hu(x_i) + h^2u'(x_i) + \frac{13h^3}{24}u''(x_i) + \frac{5h^4}{24}u'''(x_i)\right)$$

$$
-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right)+O(h^4)
$$

$$
=\frac{h^3}{12}u'''(x_i)+O(h^4)=O(h^3)
$$

elde ederiz.

Şimdi benzer şekilde amacımız $S_3 = \{\Omega_i, \Omega_{i+1}, \Omega_{i+2}\}$ hücrelerindeki ortalama değerleri, $u(x)$ fonksiyonunun ortalama değerleri ile aynı degerleri alan ikinci dereceden bir polinom bulmaktır. Polinomu, $P_3(x) = a_3(x-x_i)^2 + b_3(x-x_i) + c_3$ biçiminde ele alalım, burada a_3, b_3 ve c_3 bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$
\begin{cases}
\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i} P_3(x)dx = \bar{u}_i \\
\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i+1}} P_3(x)dx = \bar{u}_{i+1} \\
\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_{i+2}} P_3(x)dx = \bar{u}_{i+2}
\end{cases}
\implies
\begin{cases}
\frac{1}{h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(a_3(x-x_i)^2+b_3(x-x_i)+c_3\right)dx = \bar{u}_i \\
\frac{1}{h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \left(a_3(x-x_i)^2+b_3(x-x_i)+c_3\right)dx = \bar{u}_{i+1} \\
\frac{1}{h}\int\limits_{x_i+\frac{3h}{2}}^{x_i+\frac{5h}{2}} \left(a_3(x-x_i)^2+b_3(x-x_i)+c_3\right)dx = \bar{u}_{i+2}
\end{cases}
$$

$$
\implies
\begin{cases}
\frac{h^2}{12}a_3 + c_3 = \bar{u}_i \\
\frac{13h^2}{12}a_3 + hb_3 + c_3 = \bar{u}_{i+1} \\
\frac{49h^2}{12}a_3 + 2hb_3 + c_3 = \bar{u}_{i+2}
\end{cases}
$$

ve buradan,

$$
a_3 = \frac{\bar{u}_i - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2}}{2h^2}, \quad b_3 = \frac{-3\bar{u}_i + 4\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}}{2h}, \quad c_3 = \frac{23\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}}{24}
$$

bulunur. O zaman $u(x_{i+\frac{1}{2}})$'nun yaklaşık değeri için

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} \equiv P_3(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^2}{4}a_3 + \frac{h}{2}b_3 + c_3$$

ve

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2\bar{u}_i + 5\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}}{6} \tag{5.9}$$

olarak bulunur.

Teorem 14. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.9) üçüncü mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3).$$

İspat: (5.9) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{2\bar{u}_i + 5\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}}{6} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{3h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(x)dx + \frac{5}{6h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} u(x)dx - \frac{1}{6h}\int\limits_{x_i+\frac{3h}{2}}^{x_i+\frac{5h}{2}} u(x)dx - u(x_i + \frac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{3h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + ...\right) dx$$

$$+\frac{5}{6h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + ...\right) dx$$

$$-\frac{1}{6h}\int\limits_{x_i+\frac{3h}{2}}^{x_i+\frac{5h}{2}} \left(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i) + ...\right) dx$$

$$-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)+O(h^4)\right)$$

$$=\frac{1}{3h}\left(hu(x_i)+\frac{h^3}{24}u''(x_i)\right)+\frac{5}{6h}\left(hu(x_i)+h^2u'(x_i)+\frac{13h^3}{24}u''(x_i)+\frac{5h^4}{24}u'''(x_i)\right)$$

$$-\frac{1}{6h}\left(hu(x_i)+2h^2u'(x_i)+\frac{49h^3}{24}u''(x_i)+\frac{17h^4}{12}u'''(x_i)\right)$$

$$-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)\right)+O(h^4)$$

$$=-\frac{h^3}{12}u'''(x_i)+O(h^4)=O(h^3)$$

elde ederiz.

Şimdi ise $S=\{\Omega_{i-2},\Omega_{i-1},\Omega_i,\Omega_{i+1},\Omega_{i+2}\}$ hücrelerindeki ortalama değerleri, $u(x)$ fonksiyonunun ortalama değerleri ile aynı degerleri alan dördüncü dereceden bir polinom bulmaktır. Polinomu, $P(x)=a(x-x_i)^4+b(x-x_i)^3+c(x-x_i)^2+d(x-x_i)+e$ biçiminde ele alalım, burada a, b, c, d ve e bilinmeyen katsayılardır. O zaman,

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i-2}} P(x)dx = \bar{u}_{i-2} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i-1}} P(x)dx = \bar{u}_{i-1} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i}} P(x)dx = \bar{u}_{i} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i+1}} P(x)dx = \bar{u}_{i+1} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{i+2}} P(x)dx = \bar{u}_{i+2}
\end{cases}
\Longrightarrow
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i-\frac{5h}{2}}^{x_i-\frac{3h}{2}} \left(a(x-x_i)^4 + b(x-x_i)^3 + c(x-x_i)^2 + d(x-x_i) + e\right) dx = \bar{u}_{i-2} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \left(a(x-x_i)^4 + b(x-x_i)^3 + c(x-x_i)^2 + d(x-x_i) + e\right) dx = \bar{u}_{i-1} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \left(a(x-x_i)^4 + b(x-x_i)^3 + c(x-x_i)^2 + d(x-x_i) + e\right) dx = \bar{u}_{i} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \left(a(x-x_i)^4 + b(x-x_i)^3 + c(x-x_i)^2 + d(x-x_i) + e\right) dx = \bar{u}_{i+1} \\[2ex]
\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_i+\frac{3h}{2}}^{x_i+\frac{5h}{2}} \left(a(x-x_i)^4 + b(x-x_i)^3 + c(x-x_i)^2 + d(x-x_i) + e\right) dx = \bar{u}_{i+2}
\end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \begin{cases}
\dfrac{1441}{80}h^4a - \dfrac{17}{2}h^3b + \dfrac{49}{12}h^2c - 2hd + e = \bar{u}_{i-2} \\
\dfrac{121}{80}h^4a - \dfrac{5}{4}h^3b + \dfrac{13}{12}h^2c - hd + e = \bar{u}_{i-1} \\
\dfrac{h^4}{80}a + \dfrac{h^2}{12}c + e = \bar{u}_i \\
\dfrac{121}{80}h^4a + \dfrac{5}{4}h^3b + \dfrac{13}{12}h^2c + hd + e = \bar{u}_{i+1} \\
\dfrac{1441}{80}h^4a + \dfrac{17}{2}h^3b + \dfrac{49}{12}h^2c + 2hd + e = \bar{u}_{i+2}
\end{cases}
$$

olur. Bu sistemi çözerek,

$$
a = \frac{\bar{u}_{i-2} - 4\bar{u}_{i-1} + 6\bar{u}_i - 4\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2}}{24h^4}, \quad b = \frac{-\bar{u}_{i-2} + 2\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2}}{12h^3},
$$

$$
c = \frac{-\bar{u}_{i-2} + 12\bar{u}_{i-1} - 22\bar{u}_i + 12\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}}{16h^2}, \quad d = \frac{5\bar{u}_{i-2} - 34\bar{u}_{i-1} + 34\bar{u}_{i+1} - 5\bar{u}_{i+2}}{48h},
$$

$$
e = \frac{-9\bar{u}_{i-2} + 116\bar{u}_{i-1} - 2134\bar{u}_i + 116\bar{u}_{i+1} - 9\bar{u}_{i+2}}{1920}
$$

bulunur. O zaman

$$
u_{i+\frac{1}{2}} \equiv P(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^4}{16}a + \frac{h^3}{8}b + \frac{h^2}{4}c + \frac{h}{2}d + e
$$

$$
u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{30}\bar{u}_{i-2} - \frac{13}{60}\bar{u}_{i-1} + \frac{47}{60}\bar{u}_i + \frac{9}{20}\bar{u}_{i+1} - \frac{1}{20}\bar{u}_{i+2} \tag{5.10}
$$

bulunur.

Teorem 15. *$u(x)$ fonksiyonu düzgün ise (5.10) beşinci mertebeden bir yaklaşım formülü dür. Yani,*

$$
u_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^5).
$$

İspat: (5.10) yaklaşım formülü için Taylor açılımını kullanarak

$$u_{i+\frac{1}{2}} - u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{30}\bar{u}_{i-2} - \frac{13}{60}\bar{u}_{i-1} + \frac{47}{60}\bar{u}_{i} + \frac{9}{20}\bar{u}_{i+1} - \frac{1}{20}\bar{u}_{i+2} - u(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{30h}\int\limits_{x_i-\frac{5h}{2}}^{x_i-\frac{3h}{2}} u(x)dx - \frac{13}{60h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} u(x)dx + \frac{47}{60h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(x)dx$$

$$+\frac{9}{20h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} u(x)dx - \frac{1}{20h}\int\limits_{x_i+\frac{3h}{2}}^{x_i+\frac{5h}{2}} u(x)dx - u(x_i+\frac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{30h}\int\limits_{x_i-\frac{5h}{2}}^{x_i-\frac{3h}{2}} \Bigg(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i)$$

$$+\frac{(x-x_i)^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \frac{(x-x_i)^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \ldots\Bigg)\,dx$$

$$-\frac{13}{60h}\int\limits_{x_i-\frac{3h}{2}}^{x_i-\frac{h}{2}} \Bigg(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i)$$

$$+\frac{(x-x_i)^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \frac{(x-x_i)^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \ldots\Bigg)\,dx$$

$$+\frac{47}{60h}\int\limits_{x_i\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} \Bigg(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i)$$

$$+\frac{(x-x_i)^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \frac{(x-x_i)^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \ldots\Bigg)\,dx$$

$$+\frac{9}{20h}\int\limits_{x_i+\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{3h}{2}} \Bigg(u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i)$$

$$+\frac{(x-x_i)^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \frac{(x-x_i)^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \ldots\Bigg)\,dx$$

$$-\frac{1}{20h}\int\limits_{x_i+\frac{3h}{2}}^{x_i+\frac{5h}{2}}\left(u(x_i)+(x-x_i)u'(x_i)+\frac{(x-x_i)^2}{2}u''(x_i)+\frac{(x-x_i)^3}{6}u'''(x_i)\right.$$

$$\left.+\frac{(x-x_i)^4}{24}u^{(4)}(x_i)+\frac{(x-x_i)^5}{120}u^{(5)}(x_i)+\ldots\right)dx$$

$$-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)+\frac{h^4}{384}u^{(4)}(x_i)+\frac{h^5}{3840}u^{(5)}(x_i)+O(h^6)\right)$$

$$=\frac{1}{30h}\left(hu(x_i)-2h^2u'(x_i)+\frac{49h^3}{24}u''(x_i)-\frac{17h^4}{12}u'''(x_i)+\frac{1441h^5}{1920}u^{(4)}(x_i)-\frac{931h^6}{2880}u^{(5)}(x_i)\right)$$

$$-\frac{13}{60h}\left(hu(x_i)-h^2u'(x_i)+\frac{13h^3}{24}u''(x_i)-\frac{5h^4}{24}u'''(x_i)+\frac{121h^5}{1920}u^{(4)}(x_i)-\frac{91h^6}{5760}u^{(5)}(x_i)\right)$$

$$+\frac{47}{60h}\left(hu(x_i)+\frac{h^3}{24}u''(x_i)+\frac{h^5}{1920}u^{(4)}(x_i)\right)$$

$$+\frac{9}{20h}\left(hu(x_i)+h^2u'(x_i)+\frac{13h^3}{24}u''(x_i)+\frac{5h^4}{24}u'''(x_i)+\frac{121h^5}{1920}u^{(4)}(x_i)+\frac{91h^6}{5760}u^{(5)}(x_i)\right)$$

$$-\frac{1}{20h}\left(hu(x_i)+2h^2u'(x_i)+\frac{49h^3}{24}u''(x_i)+\frac{17h^4}{12}u'''(x_i)+\frac{1441h^5}{1920}u^{(4)}(x_i)+\frac{931h^6}{2880}u^{(5)}(x_i)\right)$$

$$-\left(u(x_i)+\frac{h}{2}u'(x_i)+\frac{h^2}{8}u''(x_i)+\frac{h^3}{48}u'''(x_i)+\frac{h^4}{384}u^{(4)}(x_i)+\frac{h^5}{3840}u^{(5)}(x_i)\right)+O(h^6)$$

$$= -\frac{h^5}{60}u^{(5)}(x_i) + O(h^6) = O(h^5)$$

elde ederiz.

Asıl önemli olan ise 5.mertebeden (5.10) yaklaşımının 3. mertebeden (5.7), (5.8) ve (5.9) yaklaşımlarının *lineer birleşimi* şeklinde yazılabiliyor olmasıdır. Yani

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_3 u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} \tag{5.11}$$

veya

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{30}u_{i-2} - \frac{13}{60}u_{i-1} + \frac{47}{60}u_i + \frac{9}{20}u_{i+1} - \frac{1}{20}u_{i+2}$$

$$= \gamma_1 \frac{2\bar{u}_{i-2} - 7\bar{u}_{i-1} + 11\bar{u}_i}{6} + \gamma_2 \frac{-\bar{u}_{i-1} + 5\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i+1}}{6} + \gamma_3 \frac{2\bar{u}_i + 5\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}}{6}$$

olur. Bu eşitlik $\gamma_1 = \frac{1}{10}$, $\gamma_2 = \frac{3}{5}$ ve $\gamma_3 = \frac{3}{10}$ olduğunda sağlanır. Buradaki γ_1, γ_2 ve γ_3 sabitlerine WENO literatüründe *lineer ağırlıklar* denir.

Özetle, $u(x)$ fonksiyonu $S = \{\Omega_{i-2}, \Omega_{i-1}, \Omega_i, \Omega_{i+1}, \Omega_{i+2}\}$ hücrelerin üzerinde düzgün ise (5.7), (5.8) ve (5.9) yaklaşımları 3. mertebeden olmasına rağmen

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx u_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_3 u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}}$$

yaklaşımının bulduğumuz γ_1, γ_2 ve γ_3 değerleri için 5. mertebeden yeniden yapılandırma formülü olur.

5.1 bölümünde anlatıldığı gibi WENO5'in amacı, $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 'nin yaklaşımını 3. mertebeden $u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}$, $u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$ ve $u^{(3)}_{i+\frac{1}{2}}$ yaklaşımlarını *konveks kombinasyonu* olarak seçmektir. Yani,

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega^{(i)}_1 u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} + \omega^{(i)}_2 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} + \omega^{(i)}_3 u^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$$

veya

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega_1^{(i)} \frac{2\bar{u}_{i-2} - 7\bar{u}_{i-1} + 11\bar{u}_i}{6} + \omega_2^{(i)} \frac{-\bar{u}_{i-1} + 5\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i+1}}{6} + \omega_3^{(i)} \frac{2\bar{u}_i + 5\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}}{6} \tag{5.12}$$

Burada ki $\omega_1^{(i)} \geq 0$, $\omega_2^{(i)} \geq 0$ ve $\omega_3^{(i)} \geq 0$ sabitlerine WENO literatüründe *lineer olmayan ağırlıklar* denir ve $\omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} + \omega_3^{(i)} = 1$ 'dir.

$\omega_k^{(i)}$ lerin seçimi $u(x)$ fonksiyonunun düzgünlüğünü ölçen, *düzgünlük göstergesi,* $\beta_k^{(i)}$ lere dayanır. WENO literatüründe

$$\beta_k^{(i)} = h \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (P_k'(x))^2 dx + h^3 \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (P_k''(x))^2 dx, \quad k = 1,2,3$$

şeklinde seçilir. Yani,

$$\beta_1^{(i)} = \frac{13}{12} (\bar{u}_{i-2} - 2\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i)^2 + \frac{1}{4} (\bar{u}_{i-2} - 4\bar{u}_{i-1} + 3\bar{u}_i)^2 ,$$

$$\beta_2^{(i)} = \frac{13}{12} (\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i+1})^2 ,$$

$$\beta_3^{(i)} = \frac{13}{12} (\bar{u}_i - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3\bar{u}_i - 4\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2 .$$

olur. Şimdi bu doğruluk göstergelerini kullanarak, doğrusal olmayan ağırlıkları tanımlayabiliriz,

$$\tilde{\omega}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k}{(\varepsilon + \beta_k^{(i)})^2}, \quad k = 1,2,3 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_k^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{\tilde{\omega}_1^{(i)} + \tilde{\omega}_2^{(i)} + \tilde{\omega}_3^{(i)}}, \quad k = 1,2,3$$

Burada ki ε 'u küçük bir pozitif sayı almamızın sebebi paydanın 0 olmamasıdır. WENO literatüründe $\varepsilon = 10^{-6}$ seçilir.

6. ADVEKSİYON DENKLEMLER

1-boyutlu homojen olmayan adveksiyon denklemlerini ele alalım:

$$u_t + au_x = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{6.1}$$

Burada $a \equiv$ sabit ve $f(x,t)$ verilen bir fonksiyon olsun. Her yerde (6.1) denkleminin çözümü $u(x,t)$' nin periyodik fonksiyon olduğunu varsayalım.

$[0,l]$ aralığının

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < x_{\frac{5}{2}} < \ldots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = l$$

ve

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = h = \frac{l}{N}, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

şeklindeki parçalanmasını göz önüne alalım. Hücreleri ve hücre merkezlerini

$$\Omega_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right], \quad x_i = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

şeklinde tanımlayalım.

(6.1) denklemi için sonlu hacim yöntemini uygulamak, denklemin Ω_i hücresi üzerinde integralini almak ve hücrenin hacmine bölmek anlamına gelir. Bunun sonucunda

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i} u_t dx + \frac{a}{h}\int\limits_{\Omega_i} u_x dx = \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i} f(x,t)dx, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{6.2}$$

elde ederiz. $u(x,t)$ fonksiyonunun Ω_i hücresindeki ortalama değerini

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i} u(x,t)dx, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

şeklinde tanımlayarak (6.2) den

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{a}{h}\left(u(x_{i+\frac{1}{2}},t) - u(x_{i-\frac{1}{2}},t)\right) = \bar{f}_i(t), \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{6.3}$$

yazılabilir. Burada $\bar{f}_i(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i} f(x,t)dx,\ i = 1,2,\ldots,N$ dır. Sonlu hacim yöntemini tamamlamak için $u(x,t)$ fonksiyonunun $x = x_{i\pm\frac{1}{2}}$ noktalarındaki değerlerini $\bar{u}_i(t)$ ortalama değerleri cinsinden ifade etmemiz gerekir. Bunun için önceki bölümde elde ettiğimiz WENO3 ve WENO5 formüllerini kullanacağız.

6.1 WENO3 UYGULAMALARI

(4.10) yaklaşım formülünü kullanarak

$$u(x_{i+\frac{1}{2}},t) = \omega_1^{(i)}\left(\frac{3}{2}\bar{u}_i(t) - \frac{1}{2}\bar{u}_{i-1}(t)\right) + \omega_2^{(i)}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_i(t) + \frac{1}{2}\bar{u}_{i+1}(t)\right) \tag{6.4}$$

ve

$$u(x_{i-\frac{1}{2}},t) = \omega_1^{(i-1)}\left(\frac{3}{2}\bar{u}_{i-1}(t) - \frac{1}{2}\bar{u}_{i-2}(t)\right) + \omega_2^{(i-1)}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_{i-1}(t) + \frac{1}{2}\bar{u}_i(t)\right) \tag{6.5}$$

yazabiliriz. (6.4) ve (6.5) formüllerini (6.3)'de yerine koyarsak:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{a}{h}\left[\omega_1^{(i-1)}\left(\frac{3}{2}\bar{u}_{i-1} - \frac{1}{2}\bar{u}_{i-2}\right) + \omega_2^{(i-1)}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_{i-1} + \frac{1}{2}\bar{u}_i\right)\right]$$

$$-\frac{a}{h}\left[\omega_1^{(i)}\left(\frac{3}{2}\bar{u}_i-\frac{1}{2}\bar{u}_{i-1}\right)+\omega_2^{(i)}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_i+\frac{1}{2}\bar{u}_{i+1}\right)\right]+\bar{f}_i$$

veya

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt}=-\frac{a}{2h}\omega_1^{(i-1)}\bar{u}_{i-2}+\frac{a}{2h}\left(3\omega_1^{(i-1)}+\omega_2^{(i-1)}+\omega_1^{(i)}\right)\bar{u}_{i-1}$$

$$+\frac{a}{2h}\left(\omega_2^{(i-1)}-3\omega_1^{(i)}-\omega_2^{(i)}\right)\bar{u}_i-\frac{a}{2h}\omega_2^{(i)}\bar{u}_{i+1}+\bar{f}_i,\quad i=1,2,\ldots,N \tag{6.6}$$

adi diferensiyel denklemlerin sistemini elde ederiz. Burada periyodik koşullarına göre $\bar{u}_{-1}=\bar{u}_{N-1}$, $\bar{u}_0=\bar{u}_N$, $\bar{u}_{N+1}=\bar{u}_1$, $\omega_1^{(0)}=\omega_1^{(N)}$, $\omega_2^{(0)}=\omega_2^{(N)}$ dır.

6.2 WENO5 UYGULAMALARI

(5.12) yaklaşım formülünü kullanarak

$$u(x_{i+\frac{1}{2}},t)=\omega_1^{(i)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_{i-2}(t)-\frac{7}{6}\bar{u}_{i-1}(t)+\frac{11}{6}\bar{u}_i(t)\right)+\omega_2^{(i)}\left(-\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1}(t)+\frac{5}{6}\bar{u}_i(t)+\frac{1}{3}\bar{u}_{i+1}(t)\right)$$

$$+\omega_3^{(i)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_i(t)+\frac{5}{6}\bar{u}_{i+1}(t)-\frac{1}{6}\bar{u}_{i+2}(t)\right) \tag{6.7}$$

ve

$$u(x_{i-\frac{1}{2}},t)=\omega_1^{(i-1)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_{i-3}(t)-\frac{7}{6}\bar{u}_{i-2}(t)+\frac{11}{6}\bar{u}_{i-1}(t)\right)+\omega_2^{(i-1)}\left(-\frac{1}{6}\bar{u}_{i-2}(t)+\frac{5}{6}\bar{u}_{i-1}(t)+\frac{1}{3}\bar{u}_i(t)\right)$$

$$+\omega_3^{(i-1)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_{i-1}(t)+\frac{5}{6}\bar{u}_i(t)-\frac{1}{6}\bar{u}_{i+1}(t)\right) \tag{6.8}$$

yazabiliriz. (6.7) ve (6.8) formüllerini (6.3)'de yerine koyarsak:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{a}{h}\left[\omega_1^{(i-1)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_{i-3} - \frac{7}{6}\bar{u}_{i-2} + \frac{11}{6}\bar{u}_{i-1}\right) + \omega_2^{(i-1)}\left(-\frac{1}{6}\bar{u}_{i-2} + \frac{5}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{1}{3}\bar{u}_i\right)\right.$$

$$+\omega_3^{(i-1)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{u}_i - \frac{1}{6}\bar{u}_{i+1}\right) - \omega_1^{(i)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_{i-2} - \frac{7}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{11}{6}\bar{u}_i\right)$$

$$\left.-\omega_2^{(i)}\left(-\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{u}_i + \frac{1}{3}\bar{u}_{i+1}\right) - \omega_3^{(i)}\left(\frac{1}{3}\bar{u}_i + \frac{5}{6}\bar{u}_{i+1} - \frac{1}{6}\bar{u}_{i+2}\right)\right] + \bar{f}_i$$

veya

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{a}{3h}\omega_1^{(i-1)}\bar{u}_{i-3} - \frac{a}{6h}\left(7\omega_1^{(i-1)} + \omega_2^{(i-1)} + 2\omega_1^{(i)}\right)\bar{u}_{i-2}$$

$$+\frac{a}{6h}\left(11\omega_1^{(i-1)} + 5\omega_2^{(i-1)} + 2\omega_3^{(i-1)} + 7\omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)}\right)\bar{u}_{i-1}$$

$$+\frac{a}{6h}\left(2\omega_2^{(i-1)} + 5\omega_3^{(i-1)} - 11\omega_1^{(i)} - 5\omega_2^{(i)} - 2\omega_3^{(i)}\right)\bar{u}_i$$

$$-\frac{a}{6h}\left(\omega_3^{(i-1)} + 2\omega_2^{(i)} + 5\omega_3^{(i)}\right)\bar{u}_{i+1} + \frac{a}{6h}\omega_3^{(i)}\bar{u}_{i+2} + \bar{f}_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{6.9}$$

adi diferensiyel denklemlerin sistemini elde ederiz. Burada periyodik koşullarına göre $\bar{u}_{-2} = \bar{u}_{N-2}$, $\bar{u}_{-1} = \bar{u}_{N-1}$, $\bar{u}_0 = \bar{u}_N$, $\bar{u}_{N+1} = \bar{u}_1$, $\bar{u}_{N+2} = \bar{u}_2$, $\omega_1^{(0)} = \omega_1^{(N)}$, $\omega_2^{(0)} = \omega_2^{(N)}$, $\omega_3^{(0)} = \omega_3^{(N)}$ dır.

6.3 RUNGE-KUTTA METODU

(6.1) denklemi için WENO3 veya WENO5 uygulanınca sırasıyla (6.6) veya (6.9) adi diferensiyel denklem sistemleri elde edilir.

(6.6) ve (6.9) sistemleri şu formda yazılabilir:

$$\frac{d\bar{\mathrm{u}}}{dt} = L(\bar{\mathrm{u}}(t)) + \mathrm{f}(t) \tag{6.10}$$

burada

$$\bar{\mathrm{u}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \dots \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathrm{f}(t) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \\ \dots \\ \bar{f}_n(t) \end{bmatrix}, \quad L(\bar{\mathrm{u}}) = W(\bar{\mathrm{u}}(t)) \cdot \bar{\mathrm{u}}(t)$$

(6.10) adi diferensiyel denklemler sistemi 3.mertebeden açık Runge-Kutta güçlü-kararlılık-koruyucu metodu [3] kullanılarak çözülebilir.

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{u}}^{(1)} &= \bar{\mathrm{u}}^k + \tau \left(L(\bar{\mathrm{u}}^k) + \mathrm{f}(t_k) \right), \\ \bar{\mathrm{u}}^{(2)} &= \frac{3}{4}\bar{\mathrm{u}}^k + \frac{1}{4}\bar{\mathrm{u}}^{(1)} + \frac{\tau}{4} \left(L(\bar{\mathrm{u}}^{(1)}) + \mathrm{f}(t_k + \tau) \right), \\ \bar{\mathrm{u}}^{k+1} &= \frac{1}{3}\bar{\mathrm{u}}^{(k} + \frac{2}{3}\bar{\mathrm{u}}^{(2)} + \frac{2\tau}{3} \left(L(\bar{\mathrm{u}}^{(2)}) + \mathrm{f}(t_k + \frac{\tau}{2}) \right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.4 HATA ÖLÇÜMÜ

$$\|Hata\|_1 = \frac{h}{l} \sum_{i=1}^{N} |\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}(T) - u(x_{i+\frac{1}{2}}, T)|$$

burada $u(x_{i+\frac{1}{2}}, T)$ ve $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}(T)$ sırasıyla $x = x_i + \frac{h}{2}$, $t = T$ için çözümün gerçek ve nümerik değerleridir.

$$\|Hata\|_\infty = \max_{1\le k\le K} |\bar{U}_i^k - \bar{U}_i(t_k)|, 1 \le i \le x$$

burada $\bar{U}_i(t_k) = \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega_i} u(x,t_k)dx$ ve $t = t_k$ için Ω_i hücresindeki gerçek çözümün ortalama değeri ve karşılığında $\bar{U}_i^k$ nümerik çözümüdür.

6.5 NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölümde, yukarıda anlattığımız WENO3 ve WENO5 yöntemlerini iki farklı örnekte uygulayacağız. Birinci örnekte çözümü düzgün fonksiyon olan homojen adveksiyon problemi için WENO3 ve WENO5 yöntemlerini uygulayarak sırasıyla 3. ve 5. mertebeden yöntemler olduğunu göstereceğiz. Asıl amacımız WENO3 ve WENO5 yöntemlerinin, çözümleri düzgün olmayan problemler için uygulanabileceğini göstermektir. Bu nedenle ikinci örnekte çözümü süreksiz olan tekil kaynaklı adveksiyon problemi için WENO3 ve WENO5 yöntemlerini uygulayacağız.

Örnek 3.

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x), \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t), \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{6.12}$$

başlangıç - sınır - değer hiperbolik problemi ele alalım.

Problem (6.12)'in gerçek çözümü

$$u(x,t) = \sin\left(2\pi(x-t)\right), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1$$

dür. Görüldüğü gibi bu çözümü düzgün bir fonksiyondur.

İlk olarak problem (6.12) için WENO3 sonlu hacimler yöntemini uygulayarak (6.10) adi diferensiyel denklem sistemini elde ederiz. Elde ettigimiz sistemi 3.mertebeden Runge-

Kutta güçlü-kararlılık-koruyucu (6.11) metodunu $\tau = 10^{-4}$ değeri için kullanarak (6.12) probleminin nümerik çözümünü elde ederiz.

Tablo 6.1, N hücre sayısı olmak üzere, N'nin farklı değerleri için elde ettigimiz (6.12) probleminin nümerik çözümlerinin hatalarını göstermektedir. Gördüğümüz gibi $\|\cdot\|_\infty$ ve $\|\cdot\|_1$ normlarının ikisinde de WENO3 yönteminin yakınsaklık mertebesi üçtür. Bu da bizim teorik bulgularımızla uyuşmaktadır çünkü (6.12) probleminin çözümü düzgün bir fonksiyondur.

Tablo 6.1 (6.12) problemi icin WENO3 yönteminin hataları.

N	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe	$\|Hata\|_1$	Mertebe
20	4.50e-002	-	2.16e-002	-
40	5.09e-003	3.145	1.99e-003	3.442
80	5.41e-004	3.232	1.82e-004	3.445
160	5.61e-005	3.271	2.06e-005	3.142
320	5.31e-006	3.400	2.56e-006	3.012

Aynı şekilde problem (6.12) için WENO5 sonlu hacimler yöntemini uygulayarak (6.10) adi diferensiyel denklem sistemini elde ederiz. Elde ettigimiz sistemi 3.mertebeden Runge-Kutta güçlü-kararlılık-koruyucu (6.11) metodunu $\tau = 10^{-4}$ değeri için kullanarak (6.12) probleminin nümerik çözümünü elde ederiz.

Tablo 6.2, N hücre sayısı olmak üzere, N'nin farklı değerleri için elde ettigimiz (6.12) probleminin nümerik çözümlerinin hatalarını göstermektedir. Gördüğümüz gibi $\|\cdot\|_\infty$ ve $\|\cdot\|_1$ normlarının ikisinde de WENO5 yönteminin yakınsaklık mertebesi beştir. Bu da bizim teorik bulgularımızla uyuşmaktadır çünkü (6.12) probleminin çözümü düzgün bir fonksiyondur.

Tablo 6.2 (6.12) problemi icin WENO5 yönteminin hataları.

N	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe	$\|Hata\|_1$	Mertebe
20	2.57e-003	-	1.48e-003	-
40	8.88e-005	4.852	4.54e-005	5.019
80	2.83e-006	4.972	1.41e-006	5.005
160	8.60e-008	5.039	4.42e-008	5.001
320	2.62e-009	5.036	1.42e-009	4.962

Örnek 4.

$$\begin{cases} u_t + u_x = \sin(\pi t)\cdot\delta\left(x-\dfrac{1}{3}\right), & 0<x<1, \quad 0<t<0.5, \\ u(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1, & \\ u(0,t)=u(1,t), \quad 0\le t\le 0.5 & \end{cases} \tag{6.13}$$

başlangıç-sınır-değer problemini ele alalım.

Problem (6.13)'in gerçek çözümü

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, \quad x<\dfrac{1}{3} \quad \text{veya} \quad x>\dfrac{1}{3}+t, \\ \sin\left(\pi\cdot\left(t+\dfrac{1}{3}-x\right)\right), \quad \dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{1}{3}+t \end{cases}$$

dür. Görüldüğü gibi bu fonksiyon $x=\dfrac{1}{3}$ noktasında süreksizdir.

İlk olarak problem (6.13) için WENO3 sonlu hacimler yöntemini uygulayarak (6.10) adi diferensiyel denklem sistemini elde ederiz. Elde ettigimiz sistemi 3.mertebeden Runge-Kutta güçlü-kararlılık-koruyucu (6.11) metodunu $\tau=5\cdot 10^{-5}$ değeri için kullanarak (6.13) probleminin nümerik çözümünü elde ederiz.

Tablo 6.3, N hücre sayısı olmak üzere, N'nin farklı değerleri için elde ettigimiz (6.13) probleminin nümerik çözümlerinin hatalarını göstermektedir. Gördüğümüz gibi $\|\cdot\|_\infty$ normu için yakınsaklık yoktur ancak $\|\cdot\|_1$ normu için birinci mertebeden yakınsaklık vardır.

Tablo 6.3 (6.13) problemi icin WENO3 yönteminin hataları.

N	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe	$\|Hata\|_1$	Mertebe
10	3.13e-001	-	5.08e-002	-
40	3.34e-001	-	1.00e-002	1.171
160	3.33e-001	-	2.23e-003	1.082
640	3.33e-001	-	5.28e-004	1.040

Aynı şekilde problem (6.13) için WENO5 sonlu hacimler yöntemini uygulayarak (6.10) adi diferensiyel denklem sistemini elde ederiz. Elde ettigimiz sistemi 3.mertebeden Runge-

Kutta güçlü-kararlılık-koruyucu (6.11) metodunu $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ değeri için kullanarak (6.13) probleminin nümerik çözümünü elde ederiz.

Tablo 6.4, N hücre sayısı olmak üzere, N'nin farklı değerleri için elde ettigimiz (6.13) probleminin nümerik çözümlerinin hatalarını göstermektedir. Gördüğümüz gibi $\|\cdot\|_\infty$ normu için yakınsaklık yoktur ancak $\|\cdot\|_1$ normu için birinci mertebeden yakınsaklık vardır.

Tablo 6.4 (6.13) problemi icin WENO5 yönteminin hataları.

N	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe	$\|Hata\|_1$	Mertebe
10	3.33e-001	-	3.95e-002	-
40	3.33e-001	-	9.03e-003	1.063
160	3.33e-001	-	2.17e-003	1.028
640	3.33e-001	-	5.28e-004	1.020

Özet olarak, nümerik sonuçlarda görüldüğü gibi WENO3 ve WENO5 yöntemleri çözümü düzgün fonksiyon olan adveksiyon problemi için uygulanınca sırasıyla üçüncü ve beşinci mertebeden yakınsaklığı elde etmiş olduk. Ayrıca bu yöntemleri çözümü süreksiz fonksiyon olan tekil terimli adveksiyon problemi için uygulayınca mertebe düşüklüğünü gözlemlemiş olduk. Ancak $\|\cdot\|_1$ normda hala birinci mertebeden yakınsaklık olduğunu söyleyebiliriz. Bu sonuçlar gösteriyor ki WENO yöntemleri diğer klasik yöntemlere göre daha avantajlıdır.

7. SONUÇ

Bu tezde, tekil terimli Adveksiyon denklemler için nümerik yöntemler sunulmuştur. Uzamsal ayrıklaştırma için üçüncü ve beşinci mertebeden Ağırlıklı Esasında Salınımsız (WENO) sonlu hacim yöntemleri kullanılmıştır. Zamansal ayrıklaştırması için ise, üçüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Çözümü düzgün olan problemler için hata analizi gösterilmiştir. Teorik bulguları teyit eden nümerik örnekler verilmiştir.

Sonuç olarak belirtmek gerekir ki, bu tezde sunulan nümerik yöntemler, tekil terimli Adveksiyon-Difüzyon denklemler için de benzer şekilde uygulanabilir.

KAYNAKÇA

Süreli Yayinlar

[1] Ashyraliyev, M., Blom, J., and Verwer, J. (2008). On the numerical solution of diffusion-reaction equations with singular source terms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216(1):20–38.

[2] Gerolymos, G. A., Senechal, D., and Vallet, I. (2009). Very-high-order weno schemes. *Journal of Computational Physics*, 228:8481–8524.

[3] Gottlieb, S. (2005). On high order strong stability preserving runge-kutta and multi step time discretizations. *Journal of scientific Computing*, 25(1/2):105–128.

[4] Gottlieb, S., Shu, C.-W., and Tadmor, E. (2001). Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Reviewer*, 43:89–112.

[5] Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S. R. (1987). Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes iii. *Journal of Computational Physics*, 71(2):231–303.

[6] Harten, A. and Osher, S. (1987). Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 4:279–309.

[7] Jiang, G.-S. and Shu, C.-W. (1996). Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126:202–228.

[8] Jung, J.-H. and Don, W. S. (2009). Collocation methods for hyperbolic partial differential equations with singular sources. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 1(6):769–780.

[9] Liu, X.-D., Osher, S., and Chan, T. (1994). Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115:200–212.

[10] Santos, J. and de Oliveira, P. (1999). A converging finite volume scheme for hyperbolic conservation laws with source terms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 111(1/2):239–251.

[11] Shu, C.-W. (2009). High order weighted essentially nonoscillatory schemes for convection dominated problems. *SIAM Review*, 51(1):82–126.

[12] Spiteri, R., Feng, H., and Wang, R. (2008). Observation on the fifth-order weno method with non-uniform meshes. *Applied Mathematics and Computation*, 196(1):433–447.

[13] Tornberg, A.-K. and Engquist, B. (2003). Regularization techniques for numerical approximation of pdes with singularities. *Journal of Scientific Computing*, 19:527–552.

EKLER

Ek.1 Tekil terimli adveksiyon denklemi icin WENO3 MATLAB kodu

```
function [hata_inf,hata_L1]=adveksiyon2_weno3
clear all;close all;
global gama1 gama2 epsilon N c

% u_t + a*u_x = sin(pi*t)*delta(x-XI),  0<x<1, 0<t<0.5
% u(x,0)=0, 0<=x<=1
% u(0,t)=u(1,t), 0<=t<=0.5
%          |0,  eger 0<=x<XI ise
% Cozumu = |sin(pi*(a*t-x+XI)/a)/a, eger XI<=x<a*t+XI
%          |0,  eger a*t+XI<=x<=1 ise
% XI=1/3; a=1
% Yontem: WENO5 + RK3

a=1;
T0 = 0; Tson = 0.5;
K = 10000; N = 160;

xi=1/3;
j=ceil(xi*N);

tau=(Tson-T0)/K;
for i=1:K
    tvalues(i)=i*tau;
end

h=1/N;
for i=1:N
    xvalues(i)=0.5*h+(i-1)*h;
end

rk21 = 3/4; rk22 = 1/4; rk31 = 1/3; rk32 = 2/3;
c = a/(2*h); c1=0.5*tau; c2=0.5*h; c3=pi*h;
gama1 = 1/3; gama2 = 2/3;
```

```
epsilon = 0.000001;
CFL=tau/h;

hata_inf=0;

for m=1:N
    u(m)=0;
end

L=sparse(N,N);

for jj=1:K

      % TVD Runge-Kutta 3
      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      % Birinci adim
      [L,uhalf]=L_matris(u);
      Lu=L*u';
      u1 = u' + tau*Lu;
      u1(j)=u1(j)+CFL*sin(pi*(tvalues(jj)-tau));
      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      % Ikinci adim
      [L,uhalf]=L_matris(u1);
      Lu1=L*u1;
      u2 = rk21*u' + rk22*(u1+tau*Lu1);
      u2(j)=u2(j)+rk22*CFL*sin(pi*tvalues(jj));
      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      % Ucuncu adim
      [L,uhalf]=L_matris(u2);
      Lu2=L*u2;
      u3 = rk31*u' + rk32*(u2+tau*Lu2);
      u3(j)=u3(j)+rk32*CFL*sin(pi*(tvalues(jj)-c1));

      u=u3';

     for i=1:N
        if(((xvalues(i)-c2)>xi)&&((xvalues(i)+c2)<(xi+a*tvalues(jj))))
            exactsol_u(i)=(cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)-c2)/a)-cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)+c2)/a))/
        elseif(((xvalues(i)-c2)<xi)&&((xvalues(i)+c2)>xi))
            exactsol_u(i)=(cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)-c2)/a)-cos(pi*tvalues(jj)))/(c3);
```

```
            elseif(((xvalues(i)-c2)<(xi+a*tvalues(jj)))&&((xvalues(i)+c2)>(xi+a*tvalues(jj))))
                exactsol_u(i)=(1-cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)+c2)/a))/(c3);
            else
                exactsol_u(i)=0;
            end
        end

        temp=norm(abs(u-exactsol_u),inf);

        if temp>hata_inf
            hata_inf=temp;
        end

        %plot(xvalues,abs(u-exactsol_u))
        %drawnow

end

hata_L1=0;
time=tvalues(K);
[L,uhalf]=L_matris(u);
for i=1:N
    if(((xvalues(i)+c2)<xi)||((xvalues(i)+c2)>=(xi+a*time)))
      exactsol_u(i)=0;
    else
      exactsol_u(i)=sin(pi*(xi+a*time-xvalues(i)-c2)/a)/a;
    end
  hata_L1=hata_L1+abs(uhalf(i)-exactsol_u(i))*h;
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [L,uhalf]=L_matris(u)

global gama1 gama2 epsilon N c

%% Ilk once OMEGA lari hesaplatma
```

```
for i=1:N
    if i==1
        uim1=u(N);
        ui=u(i);
        uip1=u(i+1);
        uip2=u(i+2);
    elseif i==(N-1)
        uim1=u(i-1);
        ui=u(i);
        uip1=u(N);
        uip2=u(1);
    elseif i==N
        uim1=u(i-1);
        ui=u(i);
        uip1=u(1);
        uip2=u(2);
    else
        uim1=u(i-1);
        ui=u(i);
        uip1=u(i+1);
        uip2=u(i+2);
    end

   beta1 = (uip1-uim1)^2;
   beta2 = (3*ui-4*uip1+uip2)^2;

   omega1_bar = gama1/((epsilon + beta1)^2);
   omega2_bar = gama2/((epsilon + beta2)^2);
   omega1(i) = omega1_bar/(omega1_bar + omega2_bar);
   omega2(i) = omega2_bar/(omega1_bar + omega2_bar);

   uhalf(i)=0.5*(omega1(i)*(3*ui-uim1)+omega2(i)*(ui+uip1));

end

%% L matrisi hesaplatma

% Birinci satir
i=1;
L(i,i)=c*(omega2(N) - 3*omega1(i) - omega2(i));
```

```
L(i,i+1)=-c*omega2(i);
L(i,N)=c*(3*omega1(N) + omega2(N) + omega1(i));
L(i,N-1)=-c*omega1(N);

% Ikinci satir
i=2;
L(i,i)=c*(omega2(i-1) - 3*omega1(i) - omega2(i));
L(i,i+1)=-c*omega2(i);
L(i,i-1)=c*(3*omega1(i-1) + omega2(i-1) + omega1(i));
L(i,N)=-c*omega1(i-1);

% 'N'-nci satir
i=N;
L(i,i)=c*(omega2(i-1) - 3*omega1(i) - omega2(i));
L(i,1)=-c*omega2(i);
L(i,i-1)=c*(3*omega1(i-1) + omega2(i-1) + omega1(i));
L(i,i-2)=-c*omega1(i-1);

% i=3,4,5,...,N-1 - nci satirlar
for i=3:(N-1)
    L(i,i)=c*(omega2(i-1) - 3*omega1(i) - omega2(i));
    L(i,i+1)=-c*omega2(i);
    L(i,i-1)=c*(3*omega1(i-1) + omega2(i-1) + omega1(i));
    L(i,i-2)=-c*omega1(i-1);
end

end
```

Ek.2 Tekil terimli adveksiyon denklemi icin WENO5 MATLAB kodu

```
function [hata_inf,hata_L1]=adveksiyon2_weno5

clear all;close all;

global gama1 gama2 gama3 epsilon N

global b1 b2 a1 a2 a5 a7 a11 k1 k2 k3 k4 k5


%% u_t + a*u_x = sin(pi*t)*delta(x-XI),  0<x<1,  0<t<0.5

%% u(x,0)=0,  0<=x<=1

%% u(0,t)=u(1,t),  0<=t<=0.5

%%           |0,  eger 0<=x<XI ise

%% Cozumu = |sin(pi*(a*t-x+XI)/a)/a, eger XI<=x<a*t+XI

%%           |0,  eger a*t+XI<=x<=1 ise

%% XI=1/3;  a=1

%% Yontem: WENO5 + RK3


a=1;

T0 = 0;  Tson = 0.5;

K = 10000;  N = 40;


xi=1/3;

j=ceil(xi*N);


tau=(Tson-T0)/K;

for i=1:K

    tvalues(i)=i*tau;

end


h=1/N;

for i=1:N

    xvalues(i)=0.5*h+(i-1)*h;

end


rk21 = 3/4;  rk22 = 1/4;  rk31 = 1/3;  rk32 = 2/3;

b1 = 13/12;  b2 = 1/4;

a1 = a/(6*h);  a2 = 2*a1;  a5 = 5*a1;  a7 = 7*a1;  a11 = 11*a1;

c1=0.5*tau;  c2=0.5*h;  c3=pi*h;

k1=1/3;  k2=-7/6;  k3=11/6;  k4=-1/6;  k5=5/6;

gama1 = 1/10;  gama2 = 3/5;  gama3 = 3/10;

epsilon = 0.000001;

CFL=tau/h;
```

```
hata_inf=0;

for m=1:N
    u(m)=0;
end

L=sparse(N,N);

for jj=1:K

      % TVD Runge-Kutta 3
      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      % Birinci adim
      [L,uhalf]=L_matris(u);
      Lu=L*u';
      u1 = u' + tau*Lu;
      u1(j)=u1(j)+CFL*sin(pi*(tvalues(jj)-tau));
      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      % Ikinci adim
      [L,uhalf]=L_matris(u1);
      Lu1=L*u1;
      u2 = rk21*u' + rk22*(u1+tau*Lu1);
      u2(j)=u2(j)+rk22*CFL*sin(pi*tvalues(jj));
      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      % Ucuncu adim
      [L,uhalf]=L_matris(u2);
      Lu2=L*u2;
      u3 = rk31*u' + rk32*(u2+tau*Lu2);
      u3(j)=u3(j)+rk32*CFL*sin(pi*(tvalues(jj)-c1));

      u=u3';

      for i=1:N
         if(((xvalues(i)-c2)>xi)&&((xvalues(i)+c2)<(xi+a*tvalues(jj))))
             exactsol_u(i)=(cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)-c2)/a)-cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)+c2)/a))/
         elseif(((xvalues(i)-c2)<xi)&&((xvalues(i)+c2)>xi))
             exactsol_u(i)=(cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)-c2)/a)-cos(pi*tvalues(jj)))/c3;
         elseif(((xvalues(i)-c2)<(xi+a*tvalues(jj)))&&((xvalues(i)+c2)>(xi+a*tvalues(jj))))
             exactsol_u(i)=(1-cos(pi*(xi+a*tvalues(jj)-xvalues(i)+c2)/a))/c3;
```

```
         else
             exactsol_u(i)=0;
         end
      end

     temp=norm(abs(u-exactsol_u),inf);

     if temp>hata_inf
         hata_inf=temp;
     end


end

hata_L1=0;
time=tvalues(K);
[L,uhalf]=L_matris(u);
for i=1:N
    if(((xvalues(i)+c2)<xi)||((xvalues(i)+c2)>=(xi+a*time)))
      exactsol_u(i)=0;
    else
      exactsol_u(i)=sin(pi*(xi+a*time-xvalues(i)-c2)/a)/a;
    end
  hata_L1=hata_L1+abs(uhalf(i)-exactsol_u(i))*h;
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [L,uhalf]=L_matris(u)

global gama1 gama2 gama3 epsilon N
global b1 b2 a1 a2 a5 a7 a11 k1 k2 k3 k4 k5

%% Ilk once OMEGA lari hesaplatma

for i=1:N
    if i==1
        uim1=u(N);
```

```
        uim2=u(N-1);
        ui=u(i);
        uip1=u(i+1);
        uip2=u(i+2);
    elseif i==2
        uim1=u(i-1);
        uim2=u(N);
        ui=u(i);
        uip1=u(i+1);
        uip2=u(i+2);
    elseif i==N
        uim1=u(i-1);
        uim2=u(i-2);
        ui=u(i);
        uip1=u(1);
        uip2=u(2);
    elseif i==(N-1)
        uim1=u(i-1);
        uim2=u(i-2);
        ui=u(i);
        uip1=u(i+1);
        uip2=u(1);
    else
        uim1=u(i-1);
        uim2=u(i-2);
        ui=u(i);
        uip1=u(i+1);
        uip2=u(i+2);
    end

   beta1 = b1*(uim2-2*uim1+ui)^2 + b2*(uim2-4*uim1+3*ui)^2;
   beta2 = b1*(uim1-2*ui+uip1)^2 + b2*(uim1-uip1)^2;
   beta3 = b1*(ui-2*uip1+uip2)^2 + b2*(3*ui-4*uip1+uip2)^2;
   omega1_bar = gama1/((epsilon + beta1)^2);
   omega2_bar = gama2/((epsilon + beta2)^2);
   omega3_bar = gama3/((epsilon + beta3)^2);
   omega1(i) = omega1_bar/(omega1_bar + omega2_bar + omega3_bar);
   omega2(i) = omega2_bar/(omega1_bar + omega2_bar + omega3_bar);
   omega3(i) = omega3_bar/(omega1_bar + omega2_bar + omega3_bar);
```

```
   uhalf(i)=omega1(i)*(k1*uim2+k2*uim1+k3*ui)+omega2(i)*(k4*uim1+k5*ui+k1*uip1)+omega3(i)*(k1*ui+k5*uip1+k4*uip2);
 end

%% L matrisi hesaplatma

% Birinci satir
i=1;
L(i,i)=a2*omega2(N) + a5*omega3(N) - a11*omega1(i) - a5*omega2(i) - a2*omega3(i);
L(i,i+1)=-a1*omega3(N) - a2*omega2(i) - a5*omega3(i);
L(i,i+2)=a1*omega3(i);
L(i,N)=a11*omega1(N) + a5*omega2(N) + a2*omega3(N) + a7*omega1(i) + a1*omega2(i);
L(i,N-1)=-a7*omega1(N) - a1*omega2(N) - a2*omega1(i);
L(i,N-2)=a2*omega1(N);

% Ikinci satir
i=2;
L(i,i)=a2*omega2(i-1) + a5*omega3(i-1) - a11*omega1(i) - a5*omega2(i) - a2*omega3(i);
L(i,i+1)=-a1*omega3(i-1) - a2*omega2(i) - a5*omega3(i);
L(i,i+2)=a1*omega3(i);
L(i,i-1)=a11*omega1(i-1) + a5*omega2(i-1) + a2*omega3(i-1) + a7*omega1(i) + a1*omega2(i);
L(i,N)=-a7*omega1(i-1) - a1*omega2(i-1) - a2*omega1(i);
L(i,N-1)=a2*omega1(i-1);

% Ucuncu satir
i=3;
L(i,i)=a2*omega2(i-1) + a5*omega3(i-1) - a11*omega1(i) - a5*omega2(i) - a2*omega3(i);
L(i,i+1)=-a1*omega3(i-1) - a2*omega2(i) - a5*omega3(i);
L(i,i+2)=a1*omega3(i);
L(i,i-1)=a11*omega1(i-1) + a5*omega2(i-1) + a2*omega3(i-1) + a7*omega1(i) + a1*omega2(i);
L(i,i-2)=-a7*omega1(i-1) - a1*omega2(i-1) - a2*omega1(i);
L(i,N)=a2*omega1(i-1);

% 'N-1'-nci satir
i=N-1;
L(i,i)=a2*omega2(i-1) + a5*omega3(i-1) - a11*omega1(i) - a5*omega2(i) - a2*omega3(i);
L(i,i+1)=-a1*omega3(i-1) - a2*omega2(i) - a5*omega3(i);
L(i,1)=a1*omega3(i);
L(i,i-1)=a11*omega1(i-1) + a5*omega2(i-1) + a2*omega3(i-1) + a7*omega1(i) + a1*omega2(i);
L(i,i-2)=-a7*omega1(i-1) - a1*omega2(i-1) - a2*omega1(i);
L(i,i-3)=a2*omega1(i-1);
```

```
% 'N'-nci satir
i=N;
L(i,i)=a2*omega2(i-1) + a5*omega3(i-1) - a11*omega1(i) - a5*omega2(i) - a2*omega3(i);
L(i,1)=-a1*omega3(i-1) - a2*omega2(i) - a5*omega3(i);
L(i,2)=a1*omega3(i);
L(i,i-1)=a11*omega1(i-1) + a5*omega2(i-1) + a2*omega3(i-1) + a7*omega1(i) + a1*omega2(i);
L(i,i-2)=-a7*omega1(i-1) - a1*omega2(i-1) - a2*omega1(i);
L(i,i-3)=a2*omega1(i-1);

% i=4,5,...,N-2 - nci satirlar
for i=4:(N-2)
    L(i,i)=a2*omega2(i-1) + a5*omega3(i-1) - a11*omega1(i) - a5*omega2(i) - a2*omega3(i);
    L(i,i+1)=-a1*omega3(i-1) - a2*omega2(i) - a5*omega3(i);
    L(i,i+2)=a1*omega3(i);
    L(i,i-1)=a11*omega1(i-1) + a5*omega2(i-1) + a2*omega3(i-1) + a7*omega1(i) + a1*omega2(i);
    L(i,i-2)=-a7*omega1(i-1) - a1*omega2(i-1) - a2*omega1(i);
    L(i,i-3)=a2*omega1(i-1);
end

end
```