T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

TEMEL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR ve BAZI ÖZELLİKLERİ

Yüksek Lisans Tezi

SEMRA HARDAL

İSTANBUL, 2016

T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK

TEMEL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR ve BAZI ÖZELLİKLERİ

Yüksek Lisans Tezi

SEMRA HARDAL

Tez Danışmanı: Prof. Dr. NURİ KURUOĞLU

İSTANBUL, 2016

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

Tezin Adı: Temel Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri
Öğrencinin Adı Soyadı: Semra Hardal
Tez Savunma Tarihi: 18/05/2016

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç. Dr. Nafiz ARICA
Enstitü Müdürü
İmza

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI
Program Koordinatörü
İmza

Bu Tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzalar
Tez Danışmanı Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU	...…………
Üye Prof. Dr. Ahmet GÖKSEL AĞARGÜN	...…………
Üye Prof. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI	...…………

ÖNSÖZ

Tez aşaması dönemimde, benden yardımını ve desteğini esirgemeyen tez danışman hocam Prof. Dr. Nuri Kuruoğlu'na, benden bilgi ve birikimini eksik etmeyen, bana hep desteği olan sevgili eş danışman hocam Mahmoud Jafari Shah Belaghi'ye en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.

İstanbul, 2016 Semra HARDAL

ÖZET

TEMEL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR ve BAZI ÖZELLİKLERİ

Semra Hardal

Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nuri Kuruoğlu

Mayıs, 2016, 87 sayfa

Bu tezin amacı Temel Hipergeometrik Fonksiyonları (veya q-Hipergeometrik Fonksiyonları) incelemektir. Bu amaçla, önce bilinen Hipergeometrik Fonksiyonların tanımı, ilgili denklemleri ve dönüşümlerinden bahsedilmiş daha sonra q-türevinin tanımı verilerek bilinen fonksiyonların q-analizindeki ifadeleri elde edilmiştir. Son olarak, Temel Hipergeometrik Fonksiyon tanımı verilerek, q-parametreli Heine, Gauss ve benzeri dönüşümlerin analizi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hipergeometrik Fonksiyon, q-Hipergeometrik Fonksiyon, q-Seri, q-Türev

ABSTRACT

BASIC HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS and ITS APPLICATIONS

Semra Hardal

Applied Mathematics

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Nuri Kuruoğlu

May, 2016, 87 pages

The objective of this thesis is to study the Basic Hypergeometric Functions (or q-Hypergeometric Functions). For this purpose, firstly well-known definition of Hypergeometric Functions, relevant equations and transformations were mentioned. Secondly, description of well-known functions were obtained by using the definition of q-derivative in q-analysis. Thirdly, the definition of Basic Hypergeometric Functions were given and then some transformations more involving the parameter "q" such as Heine's transformation, Gauss's transformation and etc., were analyzed.

Keywords: Hypergeometric Function, q-Hypergeometric Function, q-Series, q-Derivative

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

Bessel fonksiyonu	: $J_\alpha(z)$
Beta fonksiyonu	: $B(x,y)$
Gamma fonksiyonu	: $\Gamma(x)$
Gauss hipergeometrik fonksiyon	: ${}_2F_1(a,b;c;z)$
Gegenbaur polinomu	: $C_n^\alpha(x)$
Heine hipergeometrik fonksiyon	: ${}_2\phi_1(a,b;c;q;z)$
Hermite polinomu	: $H_n(x)$
Jacobi polinomu	: $P_n^{\alpha+\beta}$(x)
Laguerre polinomu	: $L_n^\alpha(x)$
Legendre polinomu	: $P_n(x)$
Pochammer sembolü	: $(a)_n$
Tchebichef polinomları	: $T_n(x)$ veya $U_n(x)$
q-Bessel polinomu	: $J_v^{(1)}(z;q)$
q-Gegenbauer polinomu	: $C_n(x;\, q^m\,\|\,q)$
q-Hermite polinomu	: $H_n(x\,\|\,q)$
q-Jacobi polinomu	: $P_n(x;a\,,b\,;\,q)$
q-Laguerre polinomu	: $L_n^\alpha(x;q)$
q-Legendre polinomu	: $P_n(x\,\|\,q)$
q-Tchebichef polinomları	: $T_n(x)$ veya $U_n(x)$

1. GİRİŞ

Bu çalışmada ilk olarak hipergeometrik ve temel hipergeometrik seriler için notasyon ve tanımları verilip daha sonra temel toplam, dönüşüm ve açılım formülleri için oluşturulan temel formüller gösterilecektir.

İlk olarak Gauss tarafından tanımlanan ${}_2F_1$ hipergeometrik serileri ile ${}_rF_s$ genelleştirilmiş hipergeometrik serileri ile başlayacağız ve bu serilerin birçok önemli özel durumlarına dikkat çekeceğiz. İkinci adımda ise; taban ile adlandıracağımız bir q parametresi içeren Heine'nin ${}_2\Phi_1$ hipergeometrik serisi tanımlandıktan sonra ${}_r\Phi_s$ temel hipergeometrik seriler ile ilgili notasyonlar ve tanımları vereceğiz. ${}_r\Phi_s$ serisinin $q \to 1$ limiti durumunda ${}_rF_s$ serisi elde edildiğinden temel hipergeometrik serileri, hipergeometrik serilerin q-benzeri olarak adlandırılır. Hipergeometrik seriler için toplam formüllerinin birçoğunun temelinde binom teoremi olduğundan dolayı q-benzeri yardımıyla q-binom teoremi olarak adlandırılır. Daha sonra bu teorem, Euler dönüşüm formülünün q-benzeri ve Chu ve Vandermonde, Gauss, Kummer Pfaff gibi q-benzerlerinin toplam formüllerini türetirken kullanılacaktır (Gasper & Rahman 2004, s. 1).

2. GENEL BİLGİLER

2.1 HİPERGEOMETRİK SERİLER ve TEMEL HİPERGEOMETRİK SERİLER

Gauss 1812 yılında Göttingen'de Royal Society of Science'te sunduğu çok ünlü çalışması Gauss (1813) deki $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ olmak üzere a, b, c ve z nin bir fonksiyonu olan

$$1 + \frac{a\,b}{c\,1!}z + \frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{c\,(c+1)\,2!}z^2 + \cdots \tag{2.1}$$

sonsuz serisini ortaya çıkardı. Bu serinin bütün terimlerinin paydası sıfırdan farklıdır. Gauss $|z| < 1$ iken yakınsaklığını ve $|z| = 1$ iken $Re(c-a-b) > 0$ için serinin mutlak yakınsaklığını gösterdi ve $Re(c-a-b) > 0$ ve $z = 1$ iken bu serinin toplamı için formül türetti. Gauss, kendi serisi için $F(a,b,c,z)$ notasyonunu kullanmasına rağmen şu anda alışılagelmiş $F(a,b;c;z)$ veya aşağıdaki notasyonlar kullanılmaktadır.

$${}_2F_1(a,b;c;z), \qquad {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};z\right]$$

Çünkü bu notasyon a ve b pay parametresi, c payda parametresi ve değişkeni z olarak ayırmaktadır. Gauss'un çalışmalarında onun serilerine sıklıkla

Gauss serileri denmektedir. Bununla birlikte $a = 1, b = c$ özel durumu

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

geometrik serileri vermektedir. Gauss serileri de **hipergeometrik serileri** veya **Gauss hipergeometrik serileri** olarak isimlendirilmiştir. Gauss serileri biçiminde açılabilen bazı önemli fonksiyonlar $|z| < 1$ olmak üzere aşağıdaki biçimdedir :

$$\begin{aligned}
(1+z)^a &= F(-a, b; b; -z) \\
\log(1+z) &= zF(1,1;2;-z) \\
\sin^{-1} z &= zF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2) \\
\tan^{-1} z &= zF(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2) \\
e^z &= \lim_{a\to\infty} F(a, b; b; \frac{z}{a})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Ayrıca ortogonal polinomlarda Gauss serileri şeklinde aşağıdaki gibi açılabilirler.

Tanım 2.1 $a \in \mathbb{R}$ sayısı için ve azalan bir fonksiyon ele alındığında Lebesque integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int f(x) d\alpha(x)$$

Eğer bu integral tüm polinomlar için sonlu ise, f ve g fonksiyonlarının iç çarpımı aşağıdaki şekildedir:

$$< f, g >= \int f(x) g(x) d\alpha(x)$$

$d\alpha(x) = W(x)dx$ ve $W : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ (W: ağırlık fonksiyonu) ise ortogonol polinom aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$< f, g >= \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)W(x)dx$$

Birinci ve ikinci tür Tchebichef polinomları

$$T_n(x) = F\Big(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{(1-x)}{2}\Big) \tag{2.3}$$

$$U_n(x) = (n+1)F\Big(-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{(1-x)}{2}\Big) \tag{2.4}$$

Legendre polinomları

$$P_n(x) = F\Big(-n, n+1; 1; \frac{(1-x)}{2}\Big) \tag{2.5}$$

Gegenbaur polinomları

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} F\Big(-n, n+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{(1-x)}{2}\Big) \tag{2.6}$$

genelleştirilmiş Jacobi polinomları

$$P_n^{\alpha+\beta}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\Big(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{(1-x)}{2}\Big) \tag{2.7}$$

şeklindedir. Gauss'tan önce Chu (1303) ve Vandermonde (1772) Vandermonde formülü veya Chu-Vandermonde formülü olarak bilinen

$$F(-n,b;c;1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \qquad n = 0,1,\cdots \tag{2.8}$$

toplam formülünü ispatladılar ve (Euler 1748)

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a,c-b;c;z), \qquad |z| < 1 \tag{2.9}$$

biçimindeki kendi dönüşüm formülünü içeren hipergeometrik seriler için birçok sonuç elde etmiştir. (2.8) formülü, Gauss'un çalışmasında ispatladığı

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad Re(c-a-b) > 0 \tag{2.10}$$

toplam formülünün $a = -n$ sonlu durumudur. Gauss serilerin genel hali $a_1, a_2, \cdots, a_r$, r adet pay parametresi ve $b_1, b_2, \cdots, b_s$, s adet payda parametresi aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$${}_rF_s(a_1,a_2,\cdots,a_r;b_1,b_2,\cdots,b_s;z) \equiv {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1,a_2,\cdots,a_r \\ b_1,b_2,\cdots,b_s \end{matrix};z\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_r)_n}{n!(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_s)_n} z^n \tag{2.11}$$

(2.11) için $(a_1)_n = a_1(a_1+1)\ldots(a_1+n-1)$ Pochammer Sembolü şeklinde yazılır.

Özel olarak $r = 0$ veya $s = 0$ olması durumunda aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

Üstel fonksiyon

$$e^{z} = {}_0F_0(-;-;z) \tag{2.12}$$

Trigonometrik fonksiyon

$$\sin z = z\,{}_0F_1\big(-;\frac{3}{2};\frac{-z^2}{4}\big) \qquad \cos z = {}_0F_1\big(-;\frac{1}{2};\frac{-z^2}{4}\big) \tag{2.13}$$

Bessel fonksiyonu

$$J_\alpha(z) = \big(\frac{z}{2}\big)^{\alpha}\,{}_0F_1\frac{\big(-;\alpha+1;\frac{-z^2}{4}\big)}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.14}$$

Hermite polinomları

$$H_n(x) = (2x)^n\,{}_2F_0\Big(\frac{-n}{2};\frac{(1-n)}{2};-;-x^{-2}\Big) \tag{2.15}$$

Laguerre polinomları

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1(-n;\alpha+1;x) \tag{2.16}$$

2.2 q-HİPERGEOMETRİK FONKSİYON

Gauss'un çalışmasından 33 yıl sonra, (Heine 1846, 1847, 1878) $c \neq 0,-1,-2,\cdots$ olmak üzere

$$1+\frac{(1-q^a)(1-q^b)}{(1-q)(1-q^c)}z+\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})(1-q^b)(1-q^{b+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^c)(1-q^{c+1})}z^2+\cdots \tag{2.17}$$

serisini tanıttı. Bu seri $|q|<1$ olduğunda $|z|<1$ için mutlak yakınsaktır ve

$$\lim_{q\to 1}\frac{1-q^a}{1-q}=a \tag{2.18}$$

olduğundan $q \to 1$ için Gauss serisine yakınsar. (2.17) serisine **Heine serisi** veya ***q* tabanında temel hipergeometrik serisi** olarak adlandırılır. Heine kendi serisi için Gauss'un notasyonuna benzer $\phi(a,b,c,q,z)$ notasyonunu kullanmıştır. Ayrıca q nun kuvvetleri olan a,b veya c nin 0 olması durumunu dikkate almıştır. Hipergeometrik serileri,

$$\phi(a,b;c;q,z) \equiv {}_2\phi_1(a,b;c;z) \equiv {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \\ c \end{matrix}\quad ;q;z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}z^n$$

q-kısmi faktöriyel ve $c \neq q^{-m}$ $(m=0,1,\cdots)$ olmak üzere

$$(a;q)_n=\begin{cases} 1 & n=0 \text{ ise} \\ \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}) & n=1,2,\cdots \end{cases}$$

biçimindedir. $(a;q)_n$ çarpımı için literatürde $(a)_{q,n}$, $[a]_n$ veya taban gösterilmediği zaman $(a)_n$ notasyonları kullanılır. ${}_r\phi_s$ hipergeometrik serisi $q \neq 0$ ve $r > s+1$ için

$$
\begin{aligned}
{}_r\phi_s(a_1,a_2,\cdots,a_r;b_1,b_2,\cdots,b_s;q,z) &= {}_r\Phi_s\left[\begin{array}{cc} a_1,a_2,\cdots,a_r & \\ & ;q;z \\ b_1,b_2,\cdots,b_s & \end{array}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_n(a_2;q)_n\cdots(a_r;q)_n}{(q;q)_n(b_1;q)_n(b_2;q)_n\cdots(b_s;q)_n} \\
&\cdot [(-1)^n q^{\binom{n}{2}}]^{1+s-r} z^n \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

yukardaki eşitlik elde edilir ve (2.11) ve (2.19) daki serilerin paydası 0 olamaz (Gasper & Rahman 2004, ss. 1-4).

Ayrıca q-ortogonol polinomların açılımı ise aşağıdaki şekildedir:

Birinci ve ikinci tür q-Tchebichef polinomları

$$C_n(x;q|q) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(x), \qquad x = \cos\theta$$

$$\lim_{\beta\to 1}\frac{1-q^n}{2(1-\beta)}C_n(x;\beta|q) = \cos n\theta = T_n(x), \qquad x = \cos\theta$$

q-Legendre polinomları $0 < q < 1$ için

$$P_n(x\,|\,q) = {}_2\phi_1\left(\begin{array}{c|c} q^{-n}, q^{n+1} & \\ & q;qx \\ q & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_k\,(q^{n+1};q)_k}{(q;q)_k}\,\frac{q^k x^k}{(q;q)_k}$$

q-Gegenbauer polinomları

$$C_n(x;q^m|q)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^m;q)_k(q^m;q)_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}\,e^{i(n-2k)\theta}$$

q-Jacobi polinomları

$$P_n(x;a,b;q)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_k(abq^{n+1})_k}{(aq;q)_k}\,\frac{(xq)^k}{(q;q)_k}$$

q-Bessel polinomu

$$J_v^{(1)}(z;q)=\frac{(q^{v+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^2{}_2\phi_1\left(\begin{matrix}0\,,\,0\\ \\ q^{v+1}\end{matrix}\middle|\,q;\frac{-z^2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_{v+n}}\left(\frac{-z^2}{4}\right)^n$$

q-Hermite polinomları ise $|r|<1$ için

$$H(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x|q)}{(q;q)_n}r^n=\prod_{k=0}^{\infty}(1-2xrq^k+r^2q^{2k})^{-1}$$

q-Laguerre polinomları ise $q\in(0,1)$ için

$$L_n^{\alpha}(x;q)=\frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_k\,(q^{\alpha+n+1}x)^k\,q^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k\,(q^{\alpha+1};q)_k}$$

Teorem 2.1 Hipergeometrik fonksiyonla q-hipergeometrik fonksiyon arasındaki eşitlik aşağıdaki şekildedir (Slater 1966, ss. 88-89):

$$\lim_{q\to 1} {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ \\ q^c \end{matrix} ;q;x\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right] \tag{2.20}$$

İspat. Bu eşitliği göstermek için ilk önce aşağıdaki eşitlik verilmelidir:

$$(a)_n = \lim_{q\to 1} \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} \tag{2.21}$$

$$(a)_n = \lim_{q\to 1} \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})\cdots(1-q^{a+n-1})}{(1-q)(1-q)(1-q)\cdots(1-q)}$$

Burada $\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan L'Hospital Kuralı uygulanırsa

$$(a)_n = \lim_{q\to 1} \frac{(-aq^{a-1})(-(a+1)q^a))\cdots(-(a+n-1)q^{a+n-2})}{(-1)(-1)\cdots(-1)}$$

$$(a)_n = \frac{(-1)^n(a)(a+1)\cdots(a+n-1)}{(-1)^n} = (a)_n$$

(2.21) elde edilir ve (2.20) eşitliği ise aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\lim_{q\to1} {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ \\ q^c \end{matrix} \quad ;q;x\right] = \lim_{q\to1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^a)_n(1-q^b)_n}{(1-q^c)_n(1-q)_n}x^n$$

pay ve paydayı $\frac{(1-q)^n}{(1-q)^n}$ çarpıp bölündüğünde

$$\lim_{q\to1} {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ \\ q^c \end{matrix} \quad ;q;x\right] = \lim_{q\to1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{(1-q)^n(1-q^a)_n}{(1-q)^n}\frac{(1-q)^n(1-q^b)_n}{(1-q)^n}}{(1-q)_n\frac{(1-q)^n(1-q^c)_n}{(1-q)^n}}x^n$$

$$\lim_{q\to1} {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ \\ q^c \end{matrix} \quad ;q;x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}x^n\frac{(1-q)^n}{(1-q)_n}$$

$$\lim_{q\to1} {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ \\ q^c \end{matrix} \quad ;q;x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{q\to1} {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ \\ q^c \end{matrix} \quad ;q;x\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ;x\right]$$

elde edilir.

2.3 GAMMA ve BETA FONKSİYONLARI

Bu bölümde Gamma ve Beta fonksiyonları ile ilgili temel bilgiler ve ${}_2F_1$ hipergeometrik serileri ile ilgili bazı eşitlikler gösterilmiştir.

Tanım 2.1 $\Gamma(z)$ ile gösterilen gamma fonksiyonu $z > 0$ için aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{2.22}$$

Yukardaki tanımdan yararlanarak aşağıdaki iki teoremi elde edebiliriz:

Teorem 2.1 $z > 1$ için $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ eşitliği geçerlidir (Lebedev 1966, s. 24):

İspat. (2.22) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa istenilen eşitlik elde edilir.

$$\Gamma(z) = \lim_{b\to\infty} [-t^{z-1}e^{-t}]_{t=0}^{t=b} + (z-1)\int_0^\infty t^{z-2}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(z) = (z-1)\int_0^\infty t^{z-2}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$$

Teorem 2.2 Eğer $z = n$ için n pozitif tamsayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir (Lebedev 1966, s. 24):

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.23}$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\
&= (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(2)(1)\Gamma(1)
\end{aligned}
$$

(2.22) eşitliğinde $\Gamma(z)$ için $z = 1$ seçilirse istenilen eşitlik elde edilir.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}|_{t=0}^{t=\infty} = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(2)(1)\Gamma(1) = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(2)(1)(1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Tanım 2.2 Beta fonksiyonu Euler integralinin birinci tipidir. $Re(x), Re(y) > 0$ için bu özel fonksiyonunun tanımı aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$B(x,y) = \int_0^\infty t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.24}$$

ve iki değişkenli beta fonksiyonu aşağıdaki biçimlerde de ifade edilebilir.

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta \tag{2.25}$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.26}$$

Teorem 2.3 $Re(c) > Re(b) > 0$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \tag{2.27} $$

İspat. Eşitliğin sağ tarafında ki integral üzerinden işlem yapıldığında

$$ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n t^n\right)dt $$

$$ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\left(\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt\right) $$

ve sağ taraftaki integrali (2.24) e göre düzenleyip daha sonra (2.26) da yerine yazıldığında

$$ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n B(n+b,c-b) $$

$$ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)} $$

$$ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} $$

$$ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt = {}_2F_1(a,b;c;z)\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} $$

ve eşitlikte içler dışlar çarpımı yapıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt $$

Teorem 2.4 $Re(c-a-b) > 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Gasper & Rahman 2004, s. 4):

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = \frac{B(b,c-a-b)}{B(b,c-b)} \tag{2.28} $$

İspat. (2.27) eşitliğinde $z = 1$ seçildiğinde istenilen eşitlik elde edilir.

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-t)^{-a}dt $$

$$ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt $$

sağ taraftaki integrali (2.24) e göre düzenleyip daha sonra (2.26) da yerine yazıldığında

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} B(b,c-a-b) $$

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} $$

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = \frac{B(b,c-a-b)}{B(b,c-b)} $$

Teorem 2.5 $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Gasper & Rahman 2004, s. 3):

$$ {}_2F_1(-n,b;c;1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{2.29}$$

İspat. (2.28) eşitliğinde $a = -n$ seçildiğinde

$$ {}_2F_1(-n,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+n)}$$

ve Pochammer Sembolünden $(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ olduğundan $\dfrac{\Gamma(c-b+n)}{c-b} = (c-b)_n$ ve $\dfrac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} = (c)_n$ şeklinde yazılıp yerine koyulduğunda eşitlik elde edilir.

$$ {}_2F_1(-n,b;c;1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$$

3. HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde ilk olarak pochammer sembolü ve hipergeometrik serileri ile igili bilgiler verilmiştir.

Tanım 3.1 a reel yada kompleks ve n sıfır yada pozitif tamsayı olmak üzere

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+n-1) & n \geq 1 \text{ ise} \\ \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan ifade **Pochammer Sembolü** olarak bilinir.

Önerme 3.1 Pochammer Sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{3.1}$$

$$(a)_{n+1} = a(a+1)_n \tag{3.2}$$

İspat. Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad (x > 0) \tag{3.3}$$

özelliğinden

$$
\begin{aligned}
\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) \\
&= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) \\
&\vdots \\
&= (a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)a\Gamma(a) \\
&= (a)_n\Gamma(a)
\end{aligned}
$$

Eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(a)$ ile bölünürse (3.1) ifadesi elde edilir. (3.2) eşitliği ise (3.1) ve (3.3) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
(a)_{n+1} &= \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma(a+n+1)}{a\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma((a+1)+n)}{\Gamma(a+1)} \\
&= \frac{a(a+1)_n\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1)} \\
&= a(a+1)_n
\end{aligned}
$$

istenilen eşitlik elde edilir. Özel olarak (3.1) de $n=0$ alırsak $(a)_0 = 1$ elde edilir.

Önerme 3.2

$$
(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n \\ \\ 0, & k > n \end{cases} \qquad k,n = 0,1,2\ldots \tag{3.4}
$$

İspat.

$$\begin{aligned}
(-n)_k &= (-n)(-n+1)\cdots(-n+k-1) \\
&= (-1)^k(n)(n-1)\cdots(n-k+1) \\
&= \frac{(-1)^k(n)(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

$k > n$ için $(-n)_k = (-n)(-n+1)\cdots(-n+k-1)$ eşitliğinin sağ tarafı mutlaka sıfır olacaktır.

Önerme 3.3 c reel yada kompleks sayı, k ve m doğal sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$(c+k)_m = \frac{(c)_{k+m}}{(c)_k} \tag{3.5}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
\frac{(c)_{k+m}}{(c)_k} &= \frac{(c)(c+1)(c+2)\cdots(c+k-1)(c+k)(c+k+1)\cdots(c+k+m-1)}{(c)(c+1)(c+2)\cdots(c+k-1)} \\
&= (c+k)(c+k+1)\cdots(c+k+m-1) \\
&= (c+k)_m
\end{aligned}$$

Önerme 3.4 m ve n doğal sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(2m+1)_n = \frac{(n+2m)!}{(2m)!} \tag{3.6}$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+2m)!}{(2m)!} &= \frac{(n+2m)(n+2m-1)\cdots(2m+1)(2m)(2m-1)\cdots(3)(2)(1)}{(2m)(2m-1)(2m-2)\cdots(3)(2)(1)} \\
&= (n+2m)(n+2m-1)\cdots(2m+1) \\
&= (2m+1)(2m+1+1)\cdots(2m+1+n-2)(2m+1+n-1) \\
&= (2m+1)[(2m+1)+1]\cdots[(2m+1)+n-2][(2m+1)+n-1] \\
&= (2m+1)_n
\end{aligned}
$$

3.1 HİPERGEOMETRİK SERİ ve HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Tanım 3.2 $R(n)$ rasyonel fonksiyonunda $c_n \neq -1, -2, \cdots$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = R(n), \qquad c_0 = 1 \tag{3.7}$$

olmak üzere

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3.8}$$

eşitliğine **hipergeometrik seri** denir ve $F(x)$ fonksiyonuna ise **hipergeometrik fonksiyon** denir. (3.7) eşitliği n kez kullanılarak c_n katsayıları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1}R(n-1) \\ c_{n-1} &= c_{n-2}R(n-2) \\ &\vdots \\ c_1 &= c_0R(0) \end{aligned}$$

ve $c_n = R(0)R(1)\cdots R(n-1)$ şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1 $R(t) \equiv 1$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n = 1$ olur ve

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

bir **geometrik seridir**.

Örnek 3.2 $R(t) = \dfrac{1}{1+t}$ ise

$$c_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

bulunur ve

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

bir **üstel fonksiyondur**.

Örnek 3.3 $R(n) = \dfrac{-1}{(2n+1)(2n+2)}$ ise

$$c_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{-1}{2!} \cdot \frac{1}{4!} \cdots \frac{1}{2n!} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

ve

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{(2n)!} = \cos\sqrt{x}$$

fonksiyonu elde edilir.

Tanım 3.3 $a_i \neq b_j$ ve b_j pozitif tamsayı olmayan ve $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ olmak üzere, $R(t)$ rasyonel fonksiyonu aşağıdaki biçimde seçilirse

$$R(t) = \frac{(t+a_1)(t+a_2)\cdots(t+a_r)}{(t+b_1)(t+b_2)\cdots(t+b_s)\cdot(t+1)} \tag{3.9}$$

ve $c_n = R(0)\cdot R(1)\cdots R(n-1)$ olduğundan

$$c_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(a_1+k)\cdot(a_2+k)\cdots(a_r+k)}{(b_1+k)\cdot(b_2+k)\cdots(b_s+k)\cdot(1+k)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{r} a_k\cdot(a_k+1)\dots(a_k+n-1)}{\prod_{k=1}^{s} b_k\cdot(b_k+1)\cdots(b_k+n-1)}\frac{1}{n!}$$

olur. Buradan Gauss tarafından tanımlanan aşağıdaki **hipergeometrik seri** elde edilir:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{r} a_k(a_k+1)\cdots(a_k+n-1)}{\prod_{k=1}^{s} b_k(b_k+1)\cdots(b_k+n-1)}\cdot\frac{x^n}{n!} \tag{3.10}$$

Bu seriye **Gauss hipergeometrik serisi** denir ve aşağıdaki eşitlikle ifade edilebilir:

$$F(x) = {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1,a_2,\cdots,a_r \\ b_1,b_2,\cdots,b_s\end{matrix};x\right] \tag{3.11}$$

Gauss serisi yardımıyla bazı özel fonksiyonların gösterilimi aşağıdaki örneklerle ifade edilmiştir:

Örnek 3.4

$${}_0F_0\left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix};x\right] = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

Örnek 3.5

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix}-n\\ -\end{matrix};-x\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-x)^k\,n!}{(n-k)!\,k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n $$

Örnek 3.6

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix}a\\ -\end{matrix};x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_nx^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{n!}x^n=\frac{1}{(1-x)^a} $$

Örnek 3.7

$$ x_0F_1\left[\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}\end{matrix};\frac{-x^2}{4}\right]=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{\left(2^{2k}\,\frac{(3)\cdot(5)\cdots(2k+1)}{2^k}\right)}\frac{1}{k!} $$

$$ =x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin x $$

Örnek 3.8

$$ {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\ \frac{1}{2}\end{matrix};\frac{-x^2}{4}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k2^{2k}\,k!}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}=\cos x $$

Örnek 3.9

$$ z\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1\\ 2\end{matrix};-z\right]=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k(1)_k}{(2)_k}\cdot\frac{(-z)^k}{k!} $$

$$ =\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z)^{k+1}}{(k+1)}=\log(1+z) $$

Örnek 3.10

$$z\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix};z^2\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k z^{2k+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k z^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}=\sin^{-1}(z)$$

Örnek 3.11

$$\lim_{a\to\infty}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ b\end{matrix};\frac{z}{a}\right]=\lim_{a\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(b)_k}\cdot\frac{z^k}{a^k k!}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)(a+1)\cdots(a+k-1)}{a^k}\cdot\frac{z^k}{k!}=e^z$$

Örnek 3.12

$$z\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\ \frac{3}{2}\end{matrix};-z^2\right]=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n(1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}\frac{(-z^2)^n}{n!}=\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}=\tan^{-1}(z)$$

Önerme 3.3 $Re(c-a-b)>0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Bailey 1964):

$$_2F_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}=\frac{\beta(b,c-a-b)}{\beta(b,c-b)} \tag{3.12}$$

İspat. (2.27) eşitliğinde $z = 1$ seçildiğinde istenilen eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-t)^{-a}dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt \end{aligned}$$

sağ taraftaki integrali (2.24) e göre düzenleyip daha sonra (2.26) da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} B(b,c-a-b) \\ {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} \\ {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = \frac{B(b,c-a-b)}{B(b,c-b)} \end{aligned}$$

Önerme 3.4

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n-k) \tag{3.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} B(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,n+k) \tag{3.14}$$

eşitlikleri geçerlidir (Rainville):

İspat. n ve k doğal sayı olmak üzere $0 \leq k \leq \infty$ ve $0 \leq n \leq \infty$ olur. Burada yeni indisler yerine $k = j$ ve $n = m - j$ alınırsa j ve m doğal sayılar olmak üzere $0 \leq j \leq m$ ve $0 \leq m \leq \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} A(j,m-j)$$

elde edilir. m,j indisleri yerine sırasıyla n,k indisleri konulursa $j=k$ ve $m-j=n$ den (3.13) elde edilir. $A(k,n-k)=B(k,n)$ alınırsa (3.14) elde edilir.

4. q-SERİ

Bu bölümde ilk olarak q nun bazı temel bilgileri, q-pochammer sembolü, q-türev ve q-binom teoremi ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

4.1 q-TÜREV

Reel değişkenli bir f fonksiyonunun q-diferansiyeli aşağıdaki şekildedir:

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

Teorem 4.1 f ve g reel fonksiyonlar için, f ve g fonksiyonlarının çarpımın q-diferansiyeli aşağıdaki şekildedir (Kac & Cheung 2001, s. 1):

$$d_q(f(x) \cdot g(x)) = f(qx) \cdot d_q g(x) + g(x) \cdot d_q f(x) \tag{4.1}$$

veya

$$d_q(f(x) \cdot g(x)) = g(qx) \cdot d_q f(x) + f(x) \cdot d_q g(x)$$

İspat. (4.1) in ispatı aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
d_q(f(x)\cdot g(x)) &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x)\\
&= f(qx)g(qx)-f(qx)g(x)+f(qx)g(x)-f(x)g(x)\\
&= f(qx)(g(qx)-g(x))+g(x)(f(qx)-f(x))\\
&= f(qx)\cdot d_q g(x)+g(x)\cdot d_q f(x)
\end{aligned}
$$

yada

$$
\begin{aligned}
d_q(f(x)\cdot g(x)) &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x)\\
&= f(qx)g(qx)-f(x)g(qx)+f(x)g(qx)-f(x)g(x)\\
&= g(qx)(f(qx)-f(x))+f(x)(g(qx)-g(x))\\
&= g(qx)\cdot d_q f(x)+f(x)\cdot d_q g(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Tanım 4.1 Eğer $x \neq 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun q-türevi aşağıdaki şekildedir (Agarval & Aral & Gupta 2013, s.3):

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(x)-f(qx)}{x(1-q)}$$

ve $(D_q f)(0) = f'(0)$ için $q \to 1$ iken $f(x)$ in diferansiyellenebilir fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \lim_{q\to 1} \frac{f(x)-f(qx)}{x(1-q)} = \lim_{q\to 1} \frac{xf'(qx)}{x} = f'(x)$$

ve a ve b birer sabit olmak üzere aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$D_q(af(x)+bg(x)) = aD_qf(x)+bD_qg(x)$$

Örnek 4.1 $f(x)=x^n$ in q-türevi için (4.1) tanımında yerine konulduğunda

$$D_qx^n = \frac{(xq)^n - x^n}{x(q-1)} = \frac{x^n(q^n-1)}{x(q-1)} = x^{n-1}[n]_q$$

Tanım 4.2 Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için q-benzeri aşağıdaki biçimdedir:

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} \tag{4.2}$$

ve $q \to 1$ iken

$$[n]_q = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 1+1+\cdots+1 = n$$

elde edilir ve $n!$ in q-benzeri ise aşağıdaki biçimdedir:

$$[n]_q! = \begin{cases} 1 & ,n=0 \text{ ise} \\ [n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [1]_q & ,n=1,2,\cdots \end{cases}$$

4.2 ÇARPIMIN ve BÖLÜMÜN q-TÜREVİ

Teorem 4.2 (4.1) eşitliğinden yararlanarak, f ve g fonksiyonlarının çarpımının q-türevi aşağıdaki şekildedir (Kac & Cheung 2001, s. 3):

$$D_q(f(x)\cdot g(x)) = f(qx)\cdot D_q g(x) + g(x)\cdot D_q f(x) \tag{4.3}$$

veya

$$D_q(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot D_q g(x) + g(qx)\cdot D_q f(x) \tag{4.4}$$

q nün bölüm türevini hesaplamak için, $f(x) = g(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}$ eşitliğine (4.3) uygulandığında

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(x)\cdot D_q f(x) - f(x)\cdot D_q g(x)}{g(x)\cdot g(qx)} \tag{4.5}$$

elde edilir yada (4.4) uygulanırsa,

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(qx)\cdot D_q f(x) - f(qx)\cdot D_q g(x)}{g(x)\cdot g(qx)} \tag{4.6}$$

elde edilir.

İspat. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonunun q-bölüm türevini uygulayıp ve eşitliğin sağ tarafına $f(x)g(x)$ ekleyip çıkartılırsa

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{f(qx)}{g(qx)} - \frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{f(qx)g(x) - g(qx)f(x)}{g(qxg(x))}\Big)$$

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{f(qx)g(x)-g(qx)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x)}{g(qxg(x))}\Big)$$

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{g(x)(f(qx)-f(x))-f(x)(g(qx)-g(x))}{g(qx)g(x))}\Big)$$

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(qx)g(x)}$$

yada eşitliğin sağ tarafına $f(qx)g(qx)$ ekleyip çıkartırsak

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{f(qx)g(x)-g(qx)f(x)+f(qx)g(qx)-f(qx)g(qx)}{g(qxg(x))}\Big)$$

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{g(qx)(f(qx)-f(x))-f(qx)(g(qx)-g(x))}{g(qx)g(x))}\Big)$$

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(qx)D_qf(x)-f(qx)D_qg(x)}{g(qx)g(x)}$$

elde edilir.

Tanım 4.3 $(x-a)_q^n$ polinomunun $n \in \mathbb{Z}$ için q-benzeri

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1 & ,n=0 \text{ ise} \\ \\ (x-a)_q(x-aq)_q \cdots (x-aq^{n-1})_q & ,n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{4.7}$$

ve $x=1$ seçildiğinde ise aşağıdaki biçimde yazılır:

$$(1-a)_q^n = \begin{cases} 1 & ,n=0 \text{ ise} \\ \\ (1-a)_q(1-aq)_q \cdots (1-aq^{n-1})_q & ,n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{4.8}$$

Yukardaki iki eşitlikten anlaşıldığı gibi $(1-a)_q^n = (a;q)_n$ dir.

Önerme 4.1 $\forall n \geq 1$ için $(x-a)_q^n$ polinomunun q-türev eşitliği aşağıdaki biçimdedir:

$$D_q(x-a)_q^n = [n]_q \cdot (x-a)_q^{n-1}$$

İspat. Önerme 4.1 için ilk önce $n=1$, $n=2$, $n=k$ ve $n=k+1$ için q-türev değerleri aşağıdaki biçimdedir:

$$D_q(x-a)_q^1 = 1$$

$$D_q(x-a)_q^2 = [2](x-a)_q^1$$

$$D_q(x-a)_q^k = [k]_q(x-a)_q^{k-1}$$

$$D_q(x-a)_q^{k+1} = [k+1]_q(x-a)_q^k$$

$(x-a)_q^n$ in q-benzeri tanımından

$$
\begin{aligned}
(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q(x-aq)_q\cdots(x-aq^{k-1})_q(x-aq^k)_q \\
&= (x-a)_q^k(x-aq^k)_q
\end{aligned}
$$

ve $(x-a)_q^{k+1}$ yerine yukardaki eşitliği yazıp q-türevi alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
D_q[(x-a)_q^k(x-aq^k)] &= (x-a)_q^k D_q(x-aq^k)_q + (xq-aq^k)D_q(x-a)_q^k \\
&= [k]_q(xq-aq^k)_q(x-a)_q^{k-1} + (x-a)_q^k \\
&= [k]_q\, q(x-aq^{k-1})_q(x-a)_q^{k-1} + (x-a)_q^k \\
&= [k]_q\, q(x-a)_q^k + (x-a)_q^k \\
&= (1+q[k]_q)(x-a)_q^k \\
D_q(x-a)_q^{k+1} &= [k+1]_q(x-a)_q^k
\end{aligned}
$$

elde edilir ve $D_q(x-a)_q^{k+1} = [k+1]_q(x-a)_q^k$ bu eşitlik geçerli olduğundan

$D_q(x-a)_q^k = [k]_q(x-a)_q^{k-1}$ bu eşitlikte geçerlidir.

Önerme 4.2 $\forall n > 0$ için $(x-a)_q^n$ q-polinomunun bazı özellikleri aşağıdaki biçimdedir:

$$
(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m(x-aq^m)_q^n
$$

İspat. $(x-a)_q^n$ q-polinom tanımından eşitliği yazıldığında

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q(x-aq)_q \cdots (x-aq^{m-1})_q(x-aq^m)_q \cdots (x-aq^{m+n-1})_q$$

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q(x-aq)_q \cdots (x-(aq^{m-1}))_q(x-(aq^m))_q \cdots (x-(aq^m)q^{n-1})_q$$

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m(x-aq^m)_q^n$$

istenilen eşitlik elde edilir ve özel olarak $m=-n$ seçilirse

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{-n+n} &= (x-a)_q^{-n}(x-aq^{-n})_q^n \\ 1 &= (x-a)_q^{-n}(x-aq^{-n})_q^n \\ (x-a)_q^{-n} &= \frac{1}{(x-aq^{-n})_q^n} \qquad (4.9)\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $m=-m'<0$ ve $n=-n'<0$ seçilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m(x-aq^m)_q^n &= (x-a)_q^{-m'}(x-aq^{-m'})_q^{-n'} \\ &= \frac{1}{(x-aq^{-m'})_q^{m'}(x-aq^{-m'-n'})_q^{n'}} \\ &= \frac{1}{(x-aq^{-m'-n'})_q^{n'}(x-q^{n'}(aq^{-m'-n'}))_q^{m'}} \\ &= (x-a)_q^{-m'-n'} = (x-a)_q^{m+n}\end{aligned}$$

Sonuç olarak $(x-a)_q^{m+n}$ eşitliği tüm tamsayılar için geçerlidir.

Önerme 4.3 $\forall n \in \mathbb{Z}$ için özel polinomun q-türevi aşağıdaki şekildedir:

$$D_q(x-a)_q^n = [n]_q(x-a)_q^{n-1} \qquad (4.10)$$

İspat. (4.10) eşitliği önerme 4.1 de $n \geq 1$ için eşitliği gösterilmişti. $n = -n' < 0$ seçilirse ve q-bölüm türevi uygulandığında yukardaki (4.10) eşitliği tüm tamsayılar için geçerli olduğu görülür:

$$D_q(x-a)_q^n = D_q\left(\frac{1}{(x-aq^{-n'})_q^{n'}}\right)$$

$$D_q(x-a)_q^n = \frac{-D_q(x-aq^{-n'})_q^{n'}}{(x-aq^{-n'})_q^{n'}\,(xq-aq^{-n'})_q^{n'}}$$

$$D_q(x-a)_q^n = \frac{-[n']_q\,(x-aq^{-n'})_q^{n'-1}}{(x-aq^{-n'})_q^{n'}\,(xq-aq^{-n'})_q^{n'}}$$

$$D_q(x-a)_q^n = \frac{-[n']_q}{(x-aq^{-1})_q}\frac{1}{(xq-aq^{-n'})_q^{n'}}$$

$$D_q(x-a)_q^n = \frac{-[n']_q}{(x-aq^{-1})_q^{n'}\,(x-aq^{-n'-1})_q^{n'}}$$

$$D_q(x-a)_q^n = \frac{[n]_q}{(x-aq^{-n'-1})_q^{n'+1}}$$

$$D_q(x-a)_q^n = [n]_q(x-a)_q^{n-1}$$

(4.10) elde edilir.

Önerme 4.4 $\forall n \in \mathbb{Z}$ için özel polinomun q-türevi aşağıdaki şekildedir:

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n]_q (x-aq^n)_q^{-n-1} \tag{4.11}$$

İspat. Yukadaki eşitlik için $(x-a)_q^{-n} = \dfrac{1}{(x-aq^{-n})_q^n}$ olduğundan $\dfrac{1}{(x-a)_q^n} = (x-aq^n)_q^{-n}$ yazılabilir ve aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} D_q (x-aq^n)_q^{-n} &= [-n]_q (x-aq^n)_q^{n-1} \\ D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} &= [-n]_q (x-aq^n)_q^{n-1} \end{aligned}$$

(4.11) elde edilir.

Önerme 4.5 $\forall n \in \mathbb{Z}$ için özel polinomun q-türevi aşağıdaki şekildedir:

$$D_q (a-x)_q^n = -[n]_q (a-xq)_q^{n-1} \tag{4.12}$$

İspat. (4.12) için ilk önce $n \geq 1$ için $(a-x)_q^n \neq (-1)^n (x-a)_q^n$ olmadığı gösterilirse

$$\begin{aligned} (a-x)_q^n &= (a-x)_q (a-xq)_q \cdots (a-xq^{n-1})_q \\ &= (a-x)_q q(aq^{-1}-x)_q \cdots q^{n-1}(aq^{-n+1}-x)_q \\ &= (-1)^n q^{\binom{n}{2}} (x-a)_q (x-aq^{-1})_q \cdots (x-aq^{-n+1})_q^n \\ &= (-1)^n q^{\binom{n}{2}} (x-aq^{-n+1})_q^n \end{aligned}$$

bulunur ve türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
D_q(a-x)_q^n &= D_q\big((-1)^n q^{\binom{n}{2}}(x-aq^{-n+1})_q^n\big) \\
&= (-1)^n q^{\binom{n}{2}}[n]_q(x-aq^{-n+1})_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1}(-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(x-q^{-n+2}(aq^{-1}))_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1}(aq^{-1}-x)_q^{n-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve $(aq^{-1}-x)_q^{n-1}$ açarsak

$$
\begin{aligned}
(aq^{-1}-x)_q^{n-1} &= (aq^{-1}-x)_q(aq^{-1}-xq)_q\cdots(aq^{-1}-xq^{n-2})_q \\
(aq^{-1}-x)_q^{n-1} &= q^{-1}(a-xq)_q q^{-1}(a-xq^2)_q\cdots q^{-1}(a-xq^{n-1})_q \\
(aq^{-1}-x)_q^{n-1} &= q^{-(n-1)}(a-xq)_q^{n-1}
\end{aligned}
$$

ve yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
D_q(a-x)_q^n &= -[n]_q q^{n-1} q^{-(n-1)}(a-xq)_q^{n-1} \\
D_q(a-x)_q^n &= -[n]_q\,(a-xq)_q^{n-1}
\end{aligned}
$$

istenilen eşitlik elde edilir.

4.3 q-FAKTÖRİYELİN BAZI ÖZELLİKLERİ

$\forall n,k \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir:

Önerme 4.6

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} \tag{4.13}$$

İspat. $n > 0$ için

$$(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})$$
$$(a;q)_n = \frac{(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})(1-aq^n)(1-aq^{n+1})\ldots}{(1-aq^n)(1-aq^{n+1})\ldots}$$
$$(a;q)_n = \frac{(1-a)^\infty}{(1-aq^n)^\infty}$$

(4.13) elde edilir.

Önerme 4.7

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_n = (a;q)_n(-a^{-1})^n q^{-\binom{n}{2}} \tag{4.14}$$

İspat.

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_n = (1-\frac{q^{1-n}}{a})(1-\frac{q^{2-n}}{a})\cdots(1-\frac{q^0}{a})$$
$$(a^{-1}q^{1-n};q)_n = (a^{-1})^n\,(a-q^{1-n})(a-q^{2-n})\cdots(a-q^0)$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_n = (a^{-1})^n q^{-(n-1)}(aq^{n-1}-1)\,q^{-(n-2)}(aq^{n-2}-1)\cdots q^0(a-1)$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_n = (a^{-1})^n(-1)^n q^{-\binom{n}{2}}(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_n = (-a^{-1})^n q^{-\binom{n}{2}}(a;q)_n$$

(4.14) elde edilir.

Önerme 4.8

$$(a;q)_{n-k} = \frac{(a;q)_n}{(a^{-1}q^{1-n};q)_k}(-qa^{-1})^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{4.15}$$

İspat. İlk olarak paydadaki $(a^{-1}q^{1-n};q)_k$ düzenlersek

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (1-a^{-1}q^{1-n})(1-a^{-1}q^{2-n})\dots(1-a^{-1}q^{k-n})$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = a^{-1}(a-q^{1-n})a^{-1}(a-q^{2-n})\dots a^{-1}(a-q^{k-n})$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k(a-q^{1-n})(a-q^{2-n})\dots(a-q^{k-n})$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k\left(a-\frac{q}{q^n}\right)\left(a-\frac{q^2}{q^n}\right)\dots\left(a-\frac{q^k}{q^n}\right)$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k q^{-nk}(aq^n-q)(aq^n-q^2)\dots(aq^n-q^k)$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k q^{-nk} - q^1(1-aq^{n-1}) - q^2(1-aq^{n-2})\cdots - q^k(1-aq^{n-k})$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k q^{-nk}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}(1-aq^{n-1})(1-aq^{n-2})\dots(1-aq^{n-k})$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k q^{-nk}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}(aq^{n-k};q)_k$$

(4.17) deki $(aq^n;q)_k = \dfrac{(a;q)_k(aq^k;q)_n}{(a;q)_n}$ eşitliğinde $n=n-k$ seçilip eşitlikte yerine konulduğunda

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k q^{-nk}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}\frac{(a;q)_k(aq^k;q)_{n-k}}{(a;q)_{n-k}}$$

(4.18) deki $(aq^k;q)_{n-k} = \dfrac{(a;q)_n}{(a;q)_k}$ eşitliği paydada yerine konulduğunda

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k q^{-nk}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} \frac{(a;q)_k(a;q)_n}{(a;q)_{n-k}(a;q)_k}$$

$$(a^{-1}q^{1-n};q)_k = (a^{-1})^k q^{-nk}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} \frac{(a;q)_n}{(a;q)_{n-k}}$$

olur ve yukarda bulunan değeri (4.15) te yerine konulursa

$$\frac{(a;q)_n}{(a^{-1}q^{1-n};q)_k}(-qa^{-1})^k q^{\binom{k}{2}-nk} = \frac{(a;q)_n(-qa^{-1})^k q^{\binom{k}{2}-nk}}{(a^{-1})^k q^{-nk}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} \dfrac{(a;q)_n}{(a;q)_{n-k}}}$$

$$\frac{(a;q)_n}{(a^{-1}q^{1-n};q)_k}(-qa^{-1})^k q^{\binom{k}{2}-nk} = (a;q)_{n-k}$$

(4.15) elde edilir.

Önerme 4.9

$$(a;q)_{n+k} = (a;q)_n(aq^n;q)_k \tag{4.16}$$

İspat. $(a;q)_n(aq^n;q)_k$ için (4.13) uygulandığında

$$\frac{(a;q)_\infty}{(aq^{n+k};q)_\infty} = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}\frac{(aq^n;q)_\infty}{(aq^{n+k};q)_\infty}$$

$$(a;q)_{n+k} = (a;q)_n(aq^n;q)_k$$

(4.16) elde edilir.

Önerme 4.10

$$(aq^n;q)_k = \frac{(a;q)_k(aq^k;q)_n}{(a;q)_n} \tag{4.17}$$

İspat.

$$(aq^n;q)_k = (1-aq^n)(1-aq^{n+1})\cdots(1-aq^{n+k-1})$$
$$(aq^n;q)_k = \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})(1-aq^n)\cdots(1-aq^{n+k-1})}{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}$$
$$(aq^n;q)_k = \frac{(a;q)_{n+k}}{(a;q)_n}$$
$$(aq^n;q)_k = \frac{(a;q)_k(aq^k;q)_n}{(a;q)_n}$$

(4.17) elde edilir.

Önerme 4.11

$$(aq^k;q)_{n-k} = \frac{(a;q)_n}{(a;q)_k} \tag{4.18}$$

İspat. Eşitliğin sol tarafını (4.13) formülünde yerine konulduğunda

$$(1-aq^k)_q^{n-k} = \frac{(aq^k;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$$

ve (4.13) eşitliği uygulandığında $(a;q)_k = \dfrac{(a;q)_\infty}{(aq^k;q)_\infty}$ ve $(a;q)_n = \dfrac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$ elde edilir. Eşitlikte yerine konulduğunda

$$
\begin{aligned}
(1-aq^k)_q^{n-k} &= \frac{(a;q)_\infty}{(a;q)_k}\frac{(a;q)_n}{(a;q)_\infty} \\
(aq^k;q)_{n-k} &= \frac{(a;q)_n}{(a;q)_k}
\end{aligned}
$$

(4.18) elde edilir.

Önerme 4.12

$$
(aq^{2k};q)_{n-k} = \frac{(a;q)_n(aq^n;q)_k}{(a;q)_{2k}} \tag{4.19}
$$

İspat. $(1-aq^{2k})_q^{n-k}$ (4.18) eşitliğinde yerine konulduğunda

$$
(1-aq^{2k})_q^{n-k} = \frac{(1-a)_q^{n+k}}{(1-a)_q^{2k}} = \frac{(1-a)_q^n(1-aq^n)_q^k}{(1-a)_q^{2k}} = \frac{(a;q)_n(aq^n;q)_k}{(a;q)_{2k}}
$$

(4.19) elde edilir.

Önerme 4.13

$$
(q^{-n};q)_k = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^n q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{4.20}
$$

İspat. Eşitliğin sağ tarafındaki paydaya (4.15) $(a;q)_{n-k} = \dfrac{(a;q)_n}{(a^{-1}q^{1-n};q)_k}(-qa^{-1})^k q^{\binom{k}{2}-nk}$

eşitliği uygulanırsa

$$\frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^n q^{\binom{k}{2}-nk} = \frac{(q;q)_n}{\dfrac{(q;q)_n}{(q^{-1}q^{1-n};q)_k}(-qq^{-1})^k q^{\binom{k}{2}-nk}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk}$$

$$\frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^n q^{\binom{k}{2}-nk} = (q^{-n};q)_k$$

(4.20) elde edilir.

Önerme 4.14

$$(aq^{-n};q)_k = \frac{(a;q)_k(qa^{-1};q)_n}{(a^{-1}q^{1-k};q)_n}q^{-nk} \tag{4.21}$$

İspat. (4.15) te $a = \dfrac{q}{a}$ verilsin ve içler dışlar çarpımı yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left(\frac{q}{a};q\right)_{n-k} = \frac{\left(\frac{q}{a};q\right)_n}{(aq^{-n};q)_k}(-a)^k q^{\binom{k}{2}-nk}$$

$$(aq^{-n};q)_k = \frac{\left(\frac{q}{a};q\right)_n}{\left(\frac{q}{a};q\right)_{n-k}}(-a)^k q^{\binom{k}{2}-nk}$$

paydada ki $\left(\dfrac{q}{a};q\right)_{n-k}$ (4.18) ye benzetmek için $a = \dfrac{1}{a}q^{1-k}$ verilsin.

$$(aq^{-n};q)_k = \frac{\left(\frac{q}{a};q\right)_n (a^{-1}q^{1-k};q)_k}{(a^{-1}q^{1-k};q)_n}(-a)^k q^{\binom{k}{2}-nk}$$

$(a^{-1}q^{1-k};q)_k$ için $k=n$ seçilirse (4.14) deki eşitlik olur ve yerine konulduğunda

$$(aq^{-n};q)_k = \frac{(qa^{-1};q)_n (a;q)_k}{(a^{-1}q^{1-k};q)_n} q^{-nk}$$

(4.21) elde edilir.

Önerme 4.15

$$(a;q)_{2n} = (a;q^2)_n (aq;q^2)_n \tag{4.22}$$

İspat.

$$(a;q)_{2n} = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{2n-2})$$

$$(a;q)_{2n} = [(1-a)(1-aq^2)(1-aq^4)\cdots(1-aq^{2n-2})]$$

$$\cdot[(1-aq)(1-aq^3)(1-aq^5)\cdots(1-aq^{2n-1})]$$

$$(a;q)_{2n} = (a;q^2)_n (aq;q^2)_n$$

(4.22) elde edilir.

Önerme 4.16

$$(a^2;q^2)_n = (a;q)_n(-a;q)_n \tag{4.23}$$

İspat.

$$(a^2;q^2)_n = (1-a^2)(1-a^2q^2)(1-a^2q^4)\cdots(1-a^2q^{2n-2})$$

$$(a^2;q^2)_n = [(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})][(1+a)(1+aq)\cdots(1+aq^{n-1})]$$

$$(a^2;q^2)_n = (a;q)_n(-a;q)_n$$

(4.23) elde edilir.

q-faktöriyellerin çarpımı çok sık kullanılacağından bu çarpımı daha basit bir notasyon ile aşağıdaki biçimde kullanılabilir:

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m;q)_n = (a_1;q)_n(a_2;q)_n\cdots(a_m;q)_n \tag{4.24}$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m;q)_\infty = (a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty\cdots(a_m;q)_\infty \tag{4.25}$$

4.4 q-BİNOM TEOREMİ

Klasik binom katsayıların bazı özellikleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k} \tag{4.26}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad (1 \leq k \leq n-1) \tag{4.27}$$

Yukardaki özelliklerin geçerli olması için $n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n > k$ olmalıdır.

Tanım 4.4 $n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n > k$ olmak üzere q-binom katsayısı aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!} \tag{4.28}$$

Ayrıca $q \to 1$ iken $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ q-binom katsayısı binom katsayısına dönüşür.

Önerme 4.17 $n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq k \leq n-1$ için q-Pascal olarak bilinen iki özellik ortaya çıkar:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{4.29}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{4.30}$$

İspat. $1 \leq k \leq n-1$ için

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} + q^k\frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k-1]_q!}$$

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[k]_q[n-1]_q! + q^k[n-k]_q[n-1]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = [n-1]_q!\frac{[k]_q + q^k[n-k]_q}{[k]_q![n-k]_q!}$$

paydadaki $[k]_q + q^k[n-k]_q = \dfrac{1-q^k}{1-q} + q^k\dfrac{1-q^{n-k}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = [n]_q$ olur ve eşitlikte yerine konulduğunda

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n-1]_q![n]_q}{[k]_q!\,[n-k]_q!} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

4.29 elde edilir.

(4.30) un ispatı için eşitliğin sağ tarafı aşağıdaki biçimde açıldığında:

$$q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!} + \frac{[n-1]_q!}{[k]_q!\,[n-k-1]_q!}$$

$$q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{q^{n-k}\,[k]_q[n-1]_q! + [n-k]_q[n-1]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

$$q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = [n-1]_q!\frac{q^{n-k}\,[k]_q + [n-k]_q}{[k]_q![n-k]_q!}$$

paydadaki $q^{n-k}[k]_q + [n-k]_q = q^{n-k}\dfrac{1-q^k}{1-q} + \dfrac{1-q^{n-k}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = [n]_q$ olur ve eşitlikte yerine konulduğunda

$$q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n-1]_q![n]_q}{[k]_q!\,[n-k]_q!} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

4.30 elde edilir.

Teorem 4.3 $n \geq 1$ için q-binom teoreminin iki gösterilişi vardır. İlki aşağıdaki biçimdedir (Kac & Cheung 2001, s. 15):

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k a^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \tag{4.31}$$

İspat. (4.31) için tümevarım uygulandığında

$n = 1$ için

$$(x+a)_q^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0 a^1 q^{\binom{1}{2}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q x^1 a^0 q^{\binom{0}{2}} = x + a$$

$n = 2$ için

$$(x+a)_q^2 = (x+a)(x+aq) = x^2 + ax(1+q) + a^2 q$$

$$(x+a)_q^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0 a^2 q^{\binom{2}{2}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q x^1 a^1 q^{\binom{1}{2}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q x^2 a^0 q^{\binom{0}{2}}$$

$$(x+a)_q^2 = x^2 + [2]_q ax + a^2 q$$

$$(x+a)_q^2 = x^2 + ax(1+q) + a^2 q$$

$n = s$ için aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim.

$$(x+a)_q^s = \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^k a^{s-k} q^{\binom{s-k}{2}}$$

$n = s + 1$ için doğruluğu aşağıdaki şekilde ispatlanır:

$$(x+a)_q^{s+1} = (x + aq^s)(x+a)_q^s$$

$$(x+a)_q^{s+1} = (x + aq^s) + \left(\begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^k a^{s-k} q^{\binom{s-k}{2}} \right)$$

$$(x+a)_q^{s+1} = \left(\begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} a^{s-k} q^{\binom{s-k}{2}} \right) + \left(\begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^k a^{s-k+1} q^{\binom{s-k}{2}+s} \right)$$

$$(x+a)_q^{s+1} = a^{s+1} q^{\binom{s}{2}+s} + \left[a^{s-k+1} x^k q^{\binom{s-k+1}{2}} \left(\begin{bmatrix} s \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q \right) \right] + x^{s+1}$$

$$(x+a)_q^{s+1} = (x+a)_q^{s+1}$$

$n = s + 1$ için bu eşitlik sağlandığı için $n = s$ içinde bu eşitlik geçerlidir. Sonuç olarak (4.31) elde edilir.

Teorem 4.4 $n \geq 1$ için q-binom teoreminin ikinci gösterilişi ise aşağıdaki biçimdedir (Kac & Cheung 2001, s. 15):

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} a^k q^{\binom{k}{2}} \tag{4.32}$$

İspat. (4.32) için tümevarım uygulandığında

$n = 1$ için

$$(x+a)_q^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^1 a^0 q^{\binom{0}{2}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q x^0 a^1 q^{\binom{1}{2}} = x+a$$

$n = 2$ için

$$(x+a)_q^2 = (x+a)(x+aq) = x^2 + ax(1+q) + a^2 q$$

$$(x+a)_q^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^2 a^0 q^{\binom{0}{2}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q x^1 a^1 q^{\binom{1}{2}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q x^0 a^2 q^{\binom{2}{2}}$$

$$(x+a)_q^2 = x^2 + [2]_q ax + a^2 q$$

$$(x+a)_q^2 = x^2 + ax(1+q) + a^2 q$$

$n = s$ için için aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim.

$$(x+a)_q^s = \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^k a^{s-k} q^{\binom{s-k}{2}}$$

$n = s + 1$ için doğruluğu aşağıdaki şekilde ispatlanır:

$$(x+a)_q^{s+1} = (x+aq^s)(x+a)_q^s$$

$$(x+a)_q^{s+1} = (x+aq^s)\left(\begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^k a^{s-k} q^{\binom{s-k}{2}}\right)$$

$$(x+a)_q^{s+1} = \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} a^{s-k} q^{\binom{s-k}{2}} + \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q x^k a^{s-k+1} q^{\binom{s-k}{2}+s}$$

$$(x+a)_q^{s+1} = x^{s+1} + \left[x^{s-k+1} a^k q^{\binom{k}{2}} \left(q^{s-k+1} \begin{bmatrix} s \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q\right)\right] + a^{n+1} q^{\binom{s}{2}+s}$$

$$(x+a)_q^{s+1} = (x+a)_q^{s+1}$$

$n = s + 1$ için bu eşitlik sağlandığı için $n = s$ içinde bu eşitlik geçerlidir. Sonuç olarak (4.32) elde edilir.

Teorem 4.5 Gauss'un binom formülü aşağıdaki biçimdedir (Kac & Cheung 2001, s. 29):

$$(1+x)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k q^{\binom{k}{2}}$$

İspat. Gauss binom formülünü elde etmek için (4.32) de $x = 1$ ve $a = x$ seçildiğinde istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 4.6 Heine'nin binom formülü aşağıdaki biçimdedir (Kac & Cheung 2001, s. 29):

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n]_q [n+1]_q \cdots [n+k-1]_q}{[k]_q!} x^k$$

İspat. Heine için ilk olarak Gauss binom eşitliğinde $n = -n$ ve $x = -xq^n$ seçilirse

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = (1-xq^n)_q^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k q^{\binom{k}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_q (-xq^n)^k q^{\binom{k}{2}}$$

$[-n]_q = \dfrac{1-q^{-n}}{1-q} = \dfrac{-1}{q^n}[n]_q = -q^{-n}[n]_q$ yazılır ve üstteki eşitlikte yerine konulduğunda

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-n]_q[-n-1]_q \cdots [-n-k+1]_q}{[k]_q!} (-1)^k x^k q^{nk} q^{\binom{k}{2}}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-q^{-n}[n]_q - q^{-n-1}[n+1]_q \cdots - q^{-n-k+1}[n+k-1]_q}{[k]_q!}$$

$$\cdot (-1)^k x^k q^{nk} q^{\binom{k}{2}}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{-(n+(n+1)+\cdots+(n+k-1))}[n]_q[n+1]_q \cdots [n+k-1]_q}{[k]_q!}$$

$$\cdot (-1)^k x^k q^{nk} q^{\binom{k}{2}}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n]_q[n+1]_q \cdots [n+k-1]_q}{[k]_q!} x^k$$

Heine binom formülü elde edilir.

Uyarı. Hipergeometrik seriler için en önemli toplam formüllerinden biri binom teoremi tarafından verilmektedir. $|z| < 1$ için aşağıdaki formül gerçeklenir:

$$ {}_2F_1(a,c;c;z) = {}_1F_0(a;-;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n = (1-z)^{-a} \tag{4.33} $$

Bu formülün q-benzeri ise teorem 4.6 da verilmiştir.

Teorem 4.7 $|z| < 1$ ve $|q| < 1$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir (Gasper & Rahman 2004, ss. 9-10):

$$ {}_1\Phi_0(a;-;q,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \tag{4.34} $$

İspat. Heine (4.34) aşağıdaki gibi ispatlamıştır:

$$ f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \tag{4.35} $$

$f_a(z)$ yukardaki biçimde tanımlansın. Bu seri $|z| < 1$ için yakınsaktır. Fonksiyonları terim-terime türetilirse

$$ f'_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a)_n}{n!} z^{n-1} $$

$$ f'_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}}{n!} z^n $$

$$ f'_a(z) = a f_{a+1}(z) \tag{4.36} $$

elde edilir. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
f_a(z) - f_{a+1}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n - (a+1)_n}{n!} z^n \\
f_a(z) - f_{a+1}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)_{n-1}[a-(a+n)]}{n!} z^n \\
f_a(z) - f_{a+1}(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+1)_{n-1}}{n!} z^n \\
f_a(z) - f_{a+1}(z) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(a+1)_n}{(n+1)n!} z^{n+1} = -z f_{a+1}(z) \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

bağıntısı gerçeklenir. (4.36) ve (4.37) birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki başlangıç koşulu ile verilen birinci dereceden diferensiyel denklem elde edilir:

$$
f_a'(z) = \frac{a}{1-z} f_a(z), \qquad f_a(0) = 1 \qquad (4.38)
$$

Bu koşullar altında (4.38) çözüldüğünde $|z| < 1$ için $f_a(z) = (1-z)^{-a}$ fonksiyonu elde edilir.

$$
h_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n \qquad (4.39)
$$

biçimde tanımlansın. $q \to 1$ için $h_{q^a}(z) \to f_a(z)$ olduğu açıkça görülmektedir. $f_{a+1}(z)$ nin q-benzeri $h_{aq}(z)$ olduğunda önce aşağıdaki fark hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
h_a(z) - h_{aq}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a;q)_n - (aq;q)_n}{(q;q)_n} z^n \\
h_a(z) - h_{aq}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{n-1}}{(q;q)_n} [1 - a - (1 - aq^n)] z^n
\end{aligned}
$$

$$h_a(z) - h_{aq}(z) = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{n-1}(1-q^n)}{(q;q)_n} z^n$$
$$h_a(z) - h_{aq}(z) = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{n-1}}{(q;q)_{n-1}} z^n$$
$$h_a(z) - h_{aq}(z) = h_{aq}(z)(-az) \tag{4.40}$$

elde edilir. Bu bağıntı (4.37) nin bir benzeridir. Türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$f'(z) = \lim_{q\to 1} \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z} \tag{4.41}$$

olduğundan aşağıdaki fark hesaplanır. Sonuç olarak

$$h_a(z) - h_a(qz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} [z^n - (zq)^n]$$
$$h_a(z) - h_a(qz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n (1-q^n)$$
$$h_a(z) - h_a(qz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_{n-1}} z^n$$
$$h_a(z) - h_a(qz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_{n+1}}{(q;q)_n} z^{n+1}$$
$$h_a(z) - h_a(qz) = (1-a)z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_n}{(q;q)_n} z^n$$
$$h_a(z) - h_a(qz) = (1-a)z h_{aq}(z) \tag{4.42}$$

elde edilir. (4.40) ve (4.42) birlikte düşünüldüğünde

$$h_a(z) - h_a(qz) = (1-a)z \frac{h_a(z)}{(1-az)}$$

$$h_a(z)\left[1-\frac{(1-a)z}{1-az}\right]=h_a(qz)$$

$$h_a(z)=\frac{(1-az)}{(1-z)}h_a(qz) \tag{4.43}$$

elde edilir. Bu bağıntı $n-1$ defa tekrarlandığında ve daha sonra $n\to\infty$ için limit alındığında $h_a(0)=1$ ve $n\to\infty$ için $q^n\to 0$ olduğunda

$$\begin{aligned}
h_a(z) &= \frac{(1-az)}{1-z}h_a(zq)\\
h_a(qz) &= \frac{(1-aqz)}{1-qz}h_a(zq^2)\\
&\vdots\\
h_a(q^{n-1}z) &= \frac{1-azq^{n-1}}{1-zq^{n-1}}h_a(zq^n)\\
h_a(z) &= \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}h_a(0)=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç. (4.34) ün çarpım formülünün sonuçlarından biri aşağıdaki biçimdedir:

$${}_1\Phi_0(a;-;q,z)\cdot{}_1\Phi_0(b;-;q,az)={}_1\Phi_0(ab;-;q,z) \tag{4.45}$$

İspat. (4.34) deki ${}_1\Phi_0(a;-;q,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$ eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
{}_1\Phi_0(a;-;q,z)\cdot{}_1\Phi_0(b;-;q,az) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b;q)_n}{(q;q)_n}(az)^n\\
{}_1\Phi_0(a;-;q,z)\cdot{}_1\Phi_0(b;-;q,az) &= \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\frac{(baz;q)_\infty}{(az;q)_\infty}
\end{aligned}$$

$$ {}_1\Phi_0(a;-;q,z)\cdot {}_1\Phi_0(b;-;q,az) = \frac{(baz;q)_\infty}{(az;q)_\infty} $$

$$ {}_1\Phi_0(a;-;q,z)\cdot {}_1\Phi_0(b;-;q,az) = {}_1\Phi_0(ab;-;q,z) $$

(4.45) elde edilir.

4.5 q-ÜSTEL FONKSİYON

Bu bölümde klasik üstel fonksiyonun q-üstel fonksiyonunda değerleri, q-türevleri ve bazı eşitlikleri incelenmiştir.

Uyarı. Üstel fonksiyonun sonsuz seri tanımı aşağıdaki biçimdedir:

$$ e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} $$

Teorem 4.8 E_q^x eşitliğini göstermek için ilk olarak $|q| < 1$ için aşağıdaki eşitliği göstermek gerekir (Kac & Cheung 2001, s. 29):

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q!} = (1+(1-q)x)_q^\infty \tag{4.46} $$

İspat. (4.46) ispatı için Gauss binom formülünü ele almak yeterlidir:

$$ (1+x)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k q^{\binom{k}{2}} $$

$\lim\limits_{n\to\infty}[n]_q = \dfrac{1}{(1-q)}$ olur ve eşitliğin sağ tarafına uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \lim_{n\to\infty}\frac{[n]_q[n-1]_q\ldots[n-k+1]_q}{[k]_q[k-1]_q\ldots[2][1]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\dfrac{1}{(1-q)}\dfrac{1}{(1-q)}\cdots\dfrac{1}{(1-q)}}{\dfrac{(1-q^k)}{(1-q)}\dfrac{(1-q^{k-1})}{(1-q)}\cdots\dfrac{(1-q)}{(1-q)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}$$

elde edilir. Gauss binom formülünde düzenleme yapılırsa ve $x=(1-q)x$ seçilirse

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}x^k q^{\binom{k}{2}}$$

$$(1+(1-q)x)_q^\infty = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(1-q)^k q^{\binom{k}{2}}}{(1-q^k)(1-q)^{k-1}\ldots(1-q)}$$

paydayı $\dfrac{(1-q)^k}{(1-q)^k}$ çarpıp böldüğünde

$$(1+(1-q)x)_q^\infty = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q!} = E_q^x$$

(4.46) elde edilir.

Tanım 4.5 (4.46) eşitliğinden q-üstel fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$E_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q!} \tag{4.47}$$

Teorem 4.9 e_q^x eşitliğini göstermek için ilk olarak $|q| < 1$ için aşağıdaki eşitliği göstermek gerekir (Kac & Cheung 2001, s. 30):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} \tag{4.48}$$

İspat. (4.48) için Heine binom formülünü ele almak yeterlidir:

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n]_q[n+1]_q \cdots [n+k-1]_q}{[k]_q!} x^k$$

$\lim\limits_{n\to\infty} [n]_q = \dfrac{1}{(1-q)}$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{1}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}$ olur ve eşitlikte yerine yazıldığında

$$\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}$$

ve $x = (1-q)x$ seçilip paydayı $\dfrac{(1-q)^k}{(1-q)^k}$ çarpıp böländüğünde

$$\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(1-q)^k}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}$$
$$\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!}$$

(4.48) elde edilir.

Tanım 4.5 (4.48) eşitliğinden q-üstel fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$e_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} \tag{4.49}$$

4.6 q-ÜSTEL FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

q-üstel fonksiyon olan e_q^x ve E_q^x in eşitliklerinden yararlanarak aşağıdaki eşitliklerin geçerliliği gösterilebilir:

Teorem 4.10 e_q^x ve E_q^x tanımlarından yararlanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir (Kac & Cheung 2001, s. 32):

$$e_q^{-x} E_q^x = E_q^{-x} e_q^x = 1 \tag{4.50}$$

İspat. (4.46) ve (4.48) eşitliklerinden yararlanarak ve $x = -x$ seçildiğinde

$$\begin{aligned}
E_q^x &= (1+(1-q)x)_q^\infty \\
e_q^x &= \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty} \\
e_q^{-x} &= \frac{1}{(1-(1-q)(-x))_q^\infty} = \frac{1}{(1+(1-q)x)_q^\infty} = \frac{1}{E_q^x} \\
E_q^x &= (1+(1-q)(-x))_q^\infty = (1-(1-q)x)_q^\infty = \frac{1}{e_q^x}
\end{aligned}$$

ise

$$e_q^{-x}E_q^x = \frac{1}{E_q^x}e_q^x = 1$$

$$E_q^{-x}e_q^x = \frac{1}{e_q^x}e_q^x = 1$$

(4.50) elde edilir.

Teorem 4.11 e_q^x in türevi aşağıdaki şekildedir (Kac & Cheung 2001, s. 31):

$$D_q e^x = e_q^x \tag{4.51}$$

İspat. İlk olarak (4.48) deki e_q^x in toplam eşitliği yazılırsa

$$e_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!}$$

ve türevi alıdnığında

$$D_q e^x = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q x^{k-1}}{[k]_q!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q x^{k-1}}{[k]_q [k-1]_q!}$$

$$D_q e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{[k-1]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} = e_q^x$$

(4.51) elde edilir.

Teorem 4.12 E_q^x in türevi aşağıdaki şekildedir (Kac & Cheung 2001, s. 31):

$$D_q E_q^x = E_q^{xq} \tag{4.52}$$

İspat. İlk olarak (4.46) daki E_q^x toplam eşitliği yazılırsa

$$E_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q!}$$

ve türevi alınırsa

$$D_q E_q^x = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q x^{k-1} q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q x^{k-1} q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q [k-1]_q!}$$

$$D_q E_q^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1} q^{\binom{k}{2}}}{[k-1]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k q^{\binom{k+1}{2}}}{[k]_q!}$$

$\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + k = \binom{k}{2} + k$ yazılabilir ve üstteki eşitlikte yerine konulduğunda

$$D_q E_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xq)^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_q!} = E_q^{xq}$$

(4.52) elde edilir.

Teorem 4.13 $e_{\frac{1}{q}}^x$ in eşitliği aşağıdaki şekildedir (Kac & Cheung 2001, s. 32):

$$e_{\frac{1}{q}}^x = E_q^x \tag{4.53}$$

İspat. (4.48) de $q = \dfrac{1}{q}$ seçilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$e^x_{\frac{1}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_{\frac{1}{q}}!}$$

(4.2) eşitliğinin $[k]_q = \dfrac{(1-q^k)_q}{(1-q)}$ olduğundan $q = \dfrac{1}{q}$ seçilirse $[k]_{\frac{1}{q}} = [k]_q q^{1-k}$ olur ve eşitlikte yerine yazılırsa

$$e^x_{\frac{1}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_{\frac{1}{q}}!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_{\frac{1}{q}}[k-1]_{\frac{1}{q}}\dots[2]_{\frac{1}{q}}[1]_{\frac{1}{q}}}$$

$$e^x_{\frac{1}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q q^{1-k}[k-1]_q q^{2-k}\dots[2]_q q^{-1}[1]_q q^0}$$

$$e^x_{\frac{1}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q! \, q^{-(0+1+\dots+(k-1))}}$$

$$e^x_{\frac{1}{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q! \, q^{-\binom{k}{2}}}$$

$$e^x_{\frac{1}{q}} = E^x_q$$

(4.53) elde edilir.

Teorem 4.14 Eğer $yx = qxy$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Kac & Cheung 2001, s. 32):

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q x^i y^{n-i} \tag{4.54}$$

İspat. Yukardaki eşitliği göstermek için tümevarım uygulanırsa:

$n = 1$ için

$$(x+y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0y^1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q x^1y^0 = x+y$$

$n = 2$ için

$$(x+y)^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0y^2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q x^1y^1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q x^2y^0$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$n = s$ için aşağıdaki eşitliğin doğru olduğu kabul edilsin

$$(x+y)^s = \sum_{i=0}^{s} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q x^iy^{s-i}$$

$n = s+1$ için doğruluğu aşağıdaki şekilde ispatlanır:

$$(x+y)^{s+1} = (x+y)(x+y)^s$$

$$(x+y)^{s+1} = (x+y)\Big(\sum_{i=0}^{s} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q x^iy^{s-i}\Big)$$

$$(x+y)^{s+1} = \Big(\sum_{i=0}^{s} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q x^iy^{s-i}x\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{s} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q x^iy^{s-i+1}\Big)$$

$$(x+y)^{s+1} = \Big(\sum_{i=0}^{s} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q x^i (q^{s-i} x y^{s-i})\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{s} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q x^i y^{s-i+1}\Big)$$

$$(x+y)^{s+1} = \Big(\sum_{i=1}^{s+1} q^{s-i+1} \begin{bmatrix} s \\ i-1 \end{bmatrix}_q x^i y^{s-i+1})\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{s} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q x^i y^{s-i+1}\Big)$$

$$(x+y)^{s+1} = x^{k+1} + \sum_{i=1}^{s} \Big(q^{s-i+1} \begin{bmatrix} s \\ i-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}_q\Big) x^i y^{s-i+1}\Big) + y^{s+1}$$

$$(x+y)^{s+1} = \sum_{i=0}^{s+1} \begin{bmatrix} s+1 \\ i \end{bmatrix}_q x^i y^{s+1-i}$$

elde edilir ve bu eşitlik $n = s$ içinde geçerlidir. Böylece (4.54) eşitliği elde edilir.

Teorem 4.15 Eğer $yx = qxy$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir (Kac & Cheung 2001, s. 32):

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y} \tag{4.55}$$

İspat.

$$e_q^x e_q^y = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{[n]_q!}\Big)$$

payı $\dfrac{[n]_q!}{[n]_q!}$ çarpıp böldüğünde

$$e_q^x e_q^y = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{[i]_q!} \frac{y^{n-i}}{[n-i]_q!}\Big) \frac{[n]_q!}{[n]_q!}$$

$$e_q^x e_q^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \Big(\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q x^i y^{n-i}\Big)$$

$$e_q^x e_q^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{[n]_q!}$$

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y}$$

(4.55) elde edilir.

5. q-HİPERGEOMETRİK FONKSİYON

Tanım 5.1 $R(t)$ paydası $t = 1, q, q^2, \ldots$ için paydası 0 olmayan rasyonel fonksiyon ve

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = R(q^n), \qquad c_0 = 1 \tag{5.1}$$

ise

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{5.2}$$

ifadesine ***q*-hipergeometrik seri** denir ve $\phi(x)$ fonksiyonuna da ***q*-hipergeometrik fonksiyon** denir. $n \geq 1$ için 5.1 eşitliği n kez kullanılarak c_n katsayıları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
c_n &= c_{n-1}R(q^{n-1}) \\
c_{n-1} &= c_{n-2}R(q^{n-2}) \\
&\vdots \\
c_1 &= c_0 R(q^0)
\end{aligned}$$

ve $c_n = R(1)R(q)R(q^2)\cdots R(q^{n-1})$ elde edilir.

$a_i \neq b_j$, $b_j \neq 1, q^{-1}, q^{-2}, \ldots$ ise

$$R(t) = \frac{(a_1 - t^{-1})(a_2 - t^{-1})\cdots(a_r - t^{-1})}{(b_1 - t^{-1})(b_2 - t^{-1})\cdots(b_s - t^{-1})}\frac{1}{(q - t^{-1})}$$

bulunur. (5.2) deki c_n ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\prod_{j=0}^{n-1}(a-q^{-j}) = \prod_{j=0}^{n-1}(-q^{-j})(1-aq^{j}) = \prod_{j=0}^{n-1}(-q^{-j})\prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^{j})$$
$$= (1)(-q^{-1})(-q^{-2})\cdots(-q^{-(n-1)})(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$$
$$= (-q^{-1})^{\binom{n}{2}}(1-a)_q^n = (-1)^n q^{-\binom{n}{2}}(1-a)_q^n$$

Ozaman

$$c_n = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(a_1-q^{-k})(a_2-q^{-k})\cdots(a_r-q^{-k})}{(b_1-q^{-k})(b_2-q^{-k})\cdots(b_s-q^{-k})}\frac{1}{(q-q^{-k})}$$

olur ve paydadaki $\frac{1}{(q-q^{-k})}$ hesaplarsak

$$\prod_{j=0}^{n-1}(q-q^{-j}) = \prod_{j=0}^{n-1}(-q^{-j})(1-q^{j+1})$$
$$= (-q^{0})(-q^{-1})\cdots(-q^{-(n-1)})(1-q)(1-q^{2})\cdots(1-q^{n})$$
$$= (-1)^n q^{-\binom{n}{2}}(1-q)_q^n$$

bulunur ve

$$c_n = \frac{[(-1)^n q^{-\binom{n}{2}}]^{r-s-1}}{(1-q)_q^n}\frac{\prod_{k=1}^{r}(1-a_k)_q^n}{\prod_{k=1}^{s}(1-b_k)_q^n} \tag{5.3}$$

elde edilir.

(5.3) deki sonucu (5.2) de yerine koyulduğunda q-hipergeometrik seri aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\phi(x) = {}_r\Phi_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} \; ; q; x \right]$$

$$\phi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n q^{-\binom{n}{2}}]^{r-s-1}}{(1-q)_q^n} \frac{\prod_{k=1}^{r}(1-a_k)_q^n}{\prod_{k=1}^{s}(1-b_k)_q^n} x^n \tag{5.4}$$

Örnek 5.1 Yukardaki (5.4) eşitliğinde $r = s = 0$ alınırsa

$${}_0\Phi_0 \left[\begin{matrix} - \\ \\ - \end{matrix} \; ; q; x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-1)^n q^{-\binom{n}{2}}]^{r-s-1}}{(1-q)_q^n} x^n = (1-x)_q^{\infty} = E_q^{\frac{-x}{1-q}}$$

Örnek 5.2 Yukardaki (5.4) eşitliğinde $r = 1$ ve $s = 0$ alınırsa

$${}_1\Phi_0 \left[\begin{matrix} 0 \\ \\ - \end{matrix} \; ; q; x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1-q)_q^n} = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = e_q^{\frac{x}{1-q}}$$

Örnek 5.3 $R(q^n) = \dfrac{1-q}{1-q^{n+1}}$ için $\phi(x)$ i hesaplanırsa

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \qquad , c_0 = c_1 = 1$$

$$c_2 = \frac{1-q}{1-q^2} = \frac{1}{[2]!}$$

$$c_3 = \frac{1-q}{1-q^3} = \frac{1}{[3]!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{1-q}{1-q^n} = \frac{1}{[n]!} \Longrightarrow \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} = e_q^x$$

Örnek 5.4 q-hipergeometrik serileri aşağıdaki gibi daha yalın halde yazılabilir:

$${}_1\Phi_0 \left[\begin{matrix} a & \\ & ;q;x \\ - & \end{matrix} \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-q)_q^n} x^n$$

Yukardaki örnekte $a = q^N$, $(N \in \mathbb{Z}^+)$ verilirse

$${}_1\Phi_0[q^N;q;x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^N)\cdots(1-q^{N+n-1})}{(1-q)\cdots(1-q^{n-1})} x^n$$

$${}_1\Phi_0[q^N;q;x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[N]\cdots[N+n-1]}{[n]!} x^n = \frac{1}{(1-x)_q^N} \tag{5.5}$$

Bu eşitlik bize **Heine Binom Formülünü** verir.

Teorem 5.1 Herhangi bir a için aşağıdaki eşitlik elde edilir (Kac & Cheung 2001, s. 45):

$$ {}_1\Phi_0[a;q;x] = \frac{(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} \tag{5.6} $$

İspat. (5.5) te $a = q^N$ ve $(N \in \mathbb{Z}^+)$ ise

$$ {}_1\Phi_0[q^N;q;x] = \frac{(1-xq^N)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} = \frac{(1-xq^N)(1-xq^{N+1}\cdots)}{(1-x)(1-xq)\cdots} = \frac{1}{(1-x)_q^N} $$

5.1 HEİNE BİNOM FORMÜLÜNÜN GENEL HALİ ve BAZI ÖNERMELER

Hatırlatma 5.1 Herhangi bir n sayısı için (4.13) te aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$ (a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} $$

Önerme 5.1 Herhangi bir α sayısı için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$ D_q(1+x)_q^\alpha = [\alpha]_q(1+xq)_q^{\alpha-1} $$

İspat. (4.13) eşitliğinden $(1+x)_q^{\alpha}$ yı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$D_q\left(\frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+xq^{\alpha})}\right)=\frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{f(qx)}{g(qx)}-\frac{f(x)}{g(x)}\Big)$$

$$D_q\left(\frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+xq^{\alpha})}\right)=\frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{(1+xq)_q^{\infty}}{(1+xq^{\alpha+1})_q^{\infty}}-\frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+xq^{\alpha})_q^{\infty}}\Big)$$

$\dfrac{1}{(1+xq^{\alpha+1})_q^{\infty}}$ ve $(1+x)_q^{\infty}$ genişletilirse

$$\frac{1}{(1+xq^{\alpha+1})_q^{\infty}}=\frac{(1+xq^{\alpha})}{(1+xq^{\alpha})(1+xq^{\alpha+1})\cdots}=\frac{(1+xq^{\alpha})}{(1+xq^{\alpha})_q^{\infty}}$$

$$(1+x)_q^{\infty}=(1+x)(1+xq)\cdots=(1+x)(1+xq)_q^{\infty}$$

ve elde edilen eşitlikler yerine yazılırsa

$$D_q\left(\frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+xq^{\alpha})}\right)=\frac{1}{x(q-1)}\left(\frac{(1+xq)_q^{\infty}(1+xq^{\alpha})}{(1+xq^{\alpha})_q^{\infty}}-\frac{(1+x)(1+xq)_q^{\infty}}{(1+xq^{\alpha})_q^{\infty}}\right)$$

$$D_q\left(\frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+xq^{\alpha})}\right)=\frac{1}{x(q-1)}\left(\frac{(1+xq)_q^{\infty}((1+xq^{\alpha})-(1+x))}{(1+xq^{\alpha})_q^{\infty}}\right)$$

$$D_q\left(\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+xq^\alpha)}\right)=\frac{(1+xq)_q^\infty}{(1+xqq^{\alpha-1})_q^\infty}\frac{(q^\alpha-1)}{(q-1)}$$

$$D_q\left(\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+xq^\alpha)}\right)=[\alpha]_q(1+xq)_q^{\alpha-1}$$

$$D_q(1+x)_q^\alpha=[\alpha]_q(1+xq)_q^{\alpha-1}$$

istenilen eşitlik elde edilir.

Önerme 5.2 Herhangi bir α sayısı için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$D_q\Big(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\Big)=\frac{[\alpha]_q}{(1-x)_q^{\alpha+1}}$$

İspat. $(1-x)_q^\alpha$ için (4.13) eşitliğindeki değeri yazıldığında

$$D_q\left(\frac{(1-xq^\alpha)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty)}\right)=\frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{f(qx)}{g(qx)}-\frac{f(x)}{g(x)}\Big)$$

$$D_q\left(\frac{(1-xq^\alpha)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty)}\right)=\frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{(1-xq^{\alpha+1})_q^\infty}{(1-xq)_q^\infty}-\frac{(1-xq^\alpha)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\Big)$$

$\frac{1}{(1-xq)_q^\infty}$ ve $(1-xq^\alpha)_q^\infty$ genişletilirse

$$\frac{1}{(1-xq)_q^\infty} = \frac{(1-x)}{(1-x)(1-xq)\ldots} = \frac{(1-x)}{(1-x)_q^\infty}$$

$$(1-xq^\alpha)_q^\infty = (1-xq^\alpha)(1-xq^{\alpha+1})\ldots = (1-xq^\alpha)(1-xq^{\alpha+1})_q^\infty$$

ve elde edilen eşitlikler yerine yazılırsa

$$D_q\Big(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{(1-x)(1-xq^{\alpha+1})_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} - \frac{(1-xq^\alpha)(1-xq^{\alpha+1})_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\Big)$$

$$D_q\Big(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\Big) = \frac{1}{x(q-1)}\Big(\frac{(1-xq^{\alpha+1})_q^\infty((1-x)-(1-xq^\alpha))}{(1-x)_q^\infty}\Big)$$

$$D_q\Big(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\Big) = \frac{(1-xq^{\alpha+1})_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\frac{(q^{\alpha-1})}{(q-1)}$$

$$D_q\Big(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\Big) = \frac{[\alpha]_q}{(1-x)_q^{\alpha+1}}$$

elde edilir.

5.2 $_2\Phi_1$ SERİLERİ İÇİN HEİNE'NİN DÖNÜŞÜM FORMÜLÜ

Verilen bir fonksiyon için hipergeometrik gösterilişi tek değildir. Çeşitli hipergeometrik gösterilişler arasında bir takım dönüşümler vardır. Bu sayede bir fonksiyonun birden fazla hipergeometrik gösterilişi olabilir. İlk olarak birçok formüllerin ispatında çok sık kullanılan klasik Heine'nin dönüşüm formülü aşağıdaki gibidir (Gasper & Rahman 2004, s. 14):

Teorem 5.2 $|z| < 1$ ve $|b| < 1$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) = \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} {}_2\Phi_1\left(\frac{c}{b}, z; az; q, b\right) \tag{5.7} $$

İspat. Bu dönüşüm formülünü kanıtlamak için, ilk olarak aşağıdaki q-binom teoreminden yararlanılmalıdır:

$$ \frac{(cq^n;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b};q)_m}{(q;q)_m}(bq^n)^m $$

$|z| < 1$ ve $|b| < 1$ için

$$ \begin{aligned} {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n} z^n \\ &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} \Big[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b};q)_m}{(q;q)_m}(bq^n)^m \Big] z^n \\ &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b};q)_m}{(q;q)_m}(b)^m \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}(zq^m)^n \\ &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b};q)_m}{(q;q)_m}(b)^m \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}(zq^m)^n \\ &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b};q)_m}{(q;q)_m}(b)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}(zq^m)^n \end{aligned} $$

Eşitliğin sağ tarafındaki toplama (5.6) uygulandığında aşağıdaki biçimde olur:

$$ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) = \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b};q)_m}{(q;q)_m}(b)^m \frac{(azq^m;q)_\infty}{(zq^m;q)_\infty} $$

ve (5.6) dan $(azq^m;q)_\infty = \dfrac{(az;q)_\infty}{(az;q)_m}$ ve $(zq^m;q)_\infty = \dfrac{(z;q)_\infty}{(z;q)_m}$ yazılır ve eşitlikte yerine konulduğunda

$$
\begin{aligned}
{}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(b;q)_\infty(az;q)_\infty}{(c;q)_\infty(z;q)_\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{c}{b};q)_m(z;q)_m}{(q;q)_m(az;q)_m}(b)^m \\
{}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\Phi_1\Big(\frac{c}{b},z;az;q,b\Big)
\end{aligned}
$$

(5.7) elde edilir.

$$
\frac{(cq^n;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{c}{b};q)_m}{(q;q)_m}(bq^n)^m
$$

Yukardaki eşitliği göstermek için (5.6) da $a = \dfrac{c}{b}$ ve $z = bq^n$ seçilirse

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{c}{b};)_m}{(q;q)_m}(bq^n)^m = \frac{(cq^n;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty}
$$

elde edilir.

Euler'in dönüşüm formülü ise aşağıdaki biçimdedir:

$$
{}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;z) \tag{5.8}
$$

Teorem 5.3 Heine (5.8) formülünün q-benzerini aşağıdaki biçimde göstermiştir:

$$
{}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) = \frac{(\frac{abz}{c};q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\Phi_1\Big(\frac{c}{a},\frac{c}{b};c;q,\frac{abz}{c}\Big) \tag{5.9}
$$

Yukardaki eşitliği göstermek için ilk iki değişkenini yer değiştirerek arka arkaya tekrar etmek yeterlidir.

İspat. (5.7) eşitliğinden yararlanarak

$$ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) = \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(\frac{c}{b},z;az;q,b\Big) $$

sağ tarafındaki ${}_2\Phi_1\Big(\frac{c}{b},z;az;q,b\Big)$ de $\frac{c}{b}$ ile z yer değiştirildiğinde

$$ \begin{aligned} {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(z,\frac{c}{b};az;q,b\Big) \\ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} \frac{(\frac{c}{b},bz;q)_\infty}{(az,b;q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(\frac{abz}{c},b;bz;q,\frac{c}{b}\Big) \\ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(\frac{c}{b},bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(\frac{abz}{c},b;bz;q,\frac{c}{b}\Big) \end{aligned} \tag{5.10} $$

(5.10) elde edilir.

İspat. (5.10) daki eşitliğin sağ tarafındaki ${}_2\Phi_1(\frac{abz}{c},b;bz;q,\frac{c}{b})$ de $\frac{abz}{c}$ ile b yer değiştirildiğinde

$$ \begin{aligned} {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(\frac{c}{b},bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(\frac{abz}{c},b;bz;q,\frac{c}{b}\Big) \\ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(\frac{c}{b},bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(b,\frac{abz}{c};bz;q,\frac{c}{b}\Big) \\ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(\frac{c}{b},bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty} \frac{(\frac{abz}{c},c;q)_\infty}{(bz,\frac{c}{b};q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(\frac{c}{a},\frac{c}{b};c;q,\frac{abz}{c}\Big) \\ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(\frac{abz}{c};q)_\infty}{(z;q)_\infty} {}_2\Phi_1\Big(\frac{c}{a},\frac{c}{b};c;q,\frac{abz}{c}\Big) \end{aligned} $$

(5.9) elde edilir.

5.3 GAUSS'UN TOPLAM FORMÜLÜNÜN *q*-BENZERİ

Gauss'un toplam formülünün q-benzerini elde etmek için $|b| < 1$ ve $|\frac{c}{a}| < 1$ varsayımları altında $z = \dfrac{c}{ab}$ seçmek yeterlidir. Buna göre aşağıdaki eşitlik elde edilir (Gasper & Rahman 2004, s. 15):

Teorem 5.4

$$ {}_2\Phi_1\left(a,b;c;q,\frac{c}{ab}\right) = \frac{(b,\frac{c}{b};q)_\infty}{(c,\frac{c}{ab})_\infty}\,{}_1\Phi_0\left(\frac{c}{ab};-;q,b\right) $$

İspat. İlk olarak (5.7) yazılırsa

$$ {}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) = \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\,{}_2\Phi_1\left(\frac{c}{b},z;az;q,b\right) $$

ve yukardaki (5.7) de $z = \dfrac{c}{ab}$ alınırsa

$$ {}_2\Phi_1\left(a,b;c;q,\frac{c}{ab}\right) = \frac{(b,\frac{c}{b};q)_\infty}{(c,\frac{c}{ab};q)_\infty}\,{}_2\Phi_1\left(\frac{c}{b},\frac{c}{ab};\frac{c}{b};q,b\right) $$
$$ {}_2\Phi_1\left(a,b;c;q,\frac{c}{ab}\right) = \frac{(b,\frac{c}{b};q)_\infty}{(c,\frac{c}{ab};q)_\infty}\,{}_1\Phi_0\left(\frac{c}{ab};-;q,b\right) $$

elde edilir.

Teorem 5.5 Yukardaki eşitliğin sağ tarafına (5.6) uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$ {}_2\Phi_1\left(a,b;c;q,\frac{c}{ab}\right) = \frac{(\frac{c}{a},\frac{c}{b};q)_\infty}{(c,\frac{c}{ab};q)_\infty} \tag{5.11} $$

İspat. (5.6) formülünde $a = \dfrac{c}{ab}$ ve $z = b$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
{}_1\Phi_0(a;-;q;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \\
{}_1\Phi_0\Big(\frac{c}{ab};-;q,b\Big) &= \frac{(\frac{c}{a};q)_\infty}{(b;q)_\infty}
\end{aligned}
$$

olur ve

$$
{}_2\Phi_1\Big(a,b;c;q,\frac{c}{ab}\Big) = \frac{(b,\frac{c}{b};q)_\infty}{(c,\frac{c}{ab};q)_\infty} {}_1\Phi_0\Big(\frac{c}{ab};-;q,b\Big)
$$

yukardaki eşitliğin sağındaki ${}_1\Phi_0$ değeri yerine konulduğunda

$$
{}_2\Phi_1\Big(a,b;c;q,\frac{c}{ab}\Big) = \frac{\Big(b,\frac{c}{b},\frac{c}{a};q\Big)_\infty}{\Big(c,\frac{c}{ab},b;q\Big)_\infty}
$$

$$
{}_2\Phi_1\Big(a,b;c;q,\frac{c}{ab}\Big) = \frac{\Big(\frac{c}{b},\frac{c}{a};q\Big)_\infty}{\Big(c,\frac{c}{ab};q\Big)_\infty}
$$

(5.11) elde edilir.

Teorem 5.6 Yukardaki eşitlikte $a = q^{-n}$ seçilirse (5.11) aşağıdaki sonlu duruma indirgenir:

$$
{}_2\Phi_1\Big(q^{-n},b;c;q,\frac{cq^n}{b}\Big) = \frac{\Big(\frac{c}{b};q\Big)_n}{(c;q)_n} \tag{5.12}
$$

İspat. (5.11) de $a = q^{-n}$ seçilirse

$$
{}_2\Phi_1\Big(q^{-n},b;c;q,\frac{cq^n}{b}\Big) = \frac{(cq^n;q)_\infty\Big(\frac{c}{b};q\Big)_\infty}{(c;q)_\infty\Big(\frac{cq^n}{b};q\Big)_\infty}
$$

ve (5.6) uygulandığında

$$
\begin{aligned}
(1-c)_q^{\infty} &= (1-c)_q^{n}(1-cq^n)_q^{\infty} \\
\left(1-\frac{c}{b}\right)_q^{\infty} &= \left(1-\frac{c}{b}\right)_q^{n}\left(1-\frac{cq^n}{b}\right)_q^{\infty}
\end{aligned}
$$

yukardaki eşitliği verir ve

$$
\begin{aligned}
{}_2\Phi_1\left(q^{-n},b;c;q,\frac{cq^n}{b}\right) &= \frac{(cq^n;q)_\infty(\frac{c}{b};q)_n(\frac{cq^n}{b};q)_\infty}{(c;q)_n(cq^n;q)_\infty(\frac{cq^n}{b};q)_\infty} \\
{}_2\Phi_1\left(q^{-n},b;c;q,\frac{cq^n}{b}\right) &= \frac{(\frac{c}{b};q)_n}{(c;q)_n}
\end{aligned}
$$

(5.12) elde edilir.

(5.12) deki toplamların sırası yer değiştirildiğinde

$$
{}_2\Phi_1(q^{-n},b;c;q,q) = \frac{(\frac{c}{b};q)_n}{(c;q)_n}b^n \tag{5.13}
$$

elde edilir. Hem (5.12) hemde (5.13) Vandermonde formülünün q-benzeridir. Bu formüller diğer önemli formülleri türetmek için kullanabilir. Örneğin, Jackson (1910) ispat ettiği dönüşüm formülü aşağıdaki gibidir:

Teorem 5.7

$$
\begin{aligned}
{}_2\Phi_1(a,b;c;q,z) &= \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,\frac{c}{b};q)_k}{(q,c,az;q)_k}(-bz)^k q^{\binom{k}{2}} \\
&= \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\Phi_2\left(a,\frac{c}{b};c,az;q,bz\right)
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

İspat. İlk olarak (5.12) de

$$ {}_2\Phi_1\left(q^{-n}, b; c; q, \frac{cq^n}{b}\right) = \frac{(\frac{c}{b};q)_n}{(c;q)_n} $$

$b = \dfrac{c}{b}$ seçildiğinde

$$ \sum_{n=0}^{k} \frac{(q^{-k};q)_n(\frac{c}{b};q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}(bq^k)^n = \frac{(b;q)_k}{(c;q)_k} $$

elde edilir. $(q^{-k};q)_n$ de (4.20) eşitliği kullanıldığında

$$ \begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(a;q)_k(\frac{c}{b};q)_n}{(q;q)_k(q,c;q)_n} \frac{z^k(bq^k)^n(q;q)_k}{(q;q)_{k-n}}(-1)^n q^{\binom{n}{2}-kn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(a;q)_k(\frac{c}{b};q)_n}{(q;q)_{k-n}(q,c;q)_n} z^k(-b)^n q^{\binom{n}{2}} \end{aligned} $$

$k = n+k$ seçildiğinde ve $(a;q)_{n+k}$ için (4.16) eşitliği kullanıldığında

$$ \begin{aligned} &= \frac{(a;q)_{n+k}(\frac{c}{b};q)_n}{(q;q)_k(q,c;q)_n} z^k(-bz)^n q^{\binom{n}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(\frac{c}{b};q)_n}{(q,c;q)_n}(-bz)^n q^{\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq^n;q)_k}{(q;q)_k} z^k \end{aligned} $$

eşitliğin sağ tarafına (5.6) uygulanıp ve genişletildiğinde

$$ \begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(\dfrac{c}{b};q)_n}{(q,c;q)_n}(-bz)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{(azq^n;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\left(\frac{(az;q)_n}{(az;q)_n}\right) \\ &= \frac{(az;\,q)_\infty}{(z;\,q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a, \dfrac{c}{b};q)_k}{(c,\, az;q)_k}(-bz)^k q^{\binom{k}{2}} \end{aligned} $$

(5.14) elde edilir.

(5.14) formülü aşağıdaki Pfaff-Kummer dönüşüm formülünün q-benzeridir:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}{}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{(z-1)}\right) \tag{5.15} $$

KAYNAKÇA

Kitaplar

Agarval R.P & Aral A. & Gupta V., 2013. *Applications of q-Calculus in Operator Theory* Heidelberg Dordrecht London: Springer New York .

Anabby, M. H. & Mansour Z. S., 2012. *q-Fractional calculus and equations.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Bailey, W. N., 1964. *Generalized hypergeometric series.* New York and London : Stechert-Hafner Service Agency.

Bell, W. W., 1968. *Special functions for scientist and engineers.* Frome and London : Printed in Great Britain by Butler & Tanner Ltd.

Ernst, T., *A comprehensive treatment of q-calculus.* New York Dordrecht London: Springer Basel Heidelberg .

Euler, L., 1748. *Introductio in Analysis Infinitorum.* Lausanne: M-M Bousquet.

Gasper, G. & Rahman, M., 1990. *Generalized basic hypergeometric series* Cambridge : Cambbridge University Press.

Kac, V. G. & Cheung, P., 2002. *Quantum calculus.* New York: Universitext, Springer-Verlag.

Koekoek R. & Lesky P. A. & Swarttouw R. F., 2010. *Hypergeometric Orthogonol Polynomials and Their q-Analogues.* New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Slater, L. J., 1966. *Generalized hypergeometric functions.* Cambridge: Printed in Great Britain at the University Printing House.

Süreli Yayınlar

Al-Omari, S. K., 2016. On q-analogues of Mangontarum transform of some polynomials and certain of H-functions. *Nonlinear Studies.* **Vol. 23** (1), pp. 51-61.

Brennan, J. P. & Van Gorder, R. A., 2015. The generalized lucky tiket problem, perfect matchings, and closure relations satisfied by the Chebyshev and q-Hermite polynomials. *Ramanujan J.* **37**, pp. 269-289.

Floreanini, R. & Vinet, L., 1995. A model for the continuous q-ultraspherical polynomials. *J. Math. Phys..* **36** (7), pp. 3800-3813.

Gauss, C. F. 1813. Disquisitiones generales circa seriem infinitam ... , *Comm. soc. reg. sci. Gött. rec.,* **Vol. II**, pp. 123-162.

Heine, E., 1846. Über die Reihe ... , *J. reine angew. Math.* 32, pp. 210-212.

Heine, E., 1847. Untersuchungen über die Reihe ... , *J. reine angew. Math.* 34, pp. 285-328.

Heine, E., 1878. Handbuch der Kugelfunctionen, *Theorie und Anwendungen,* Vol. 1, Reimer, Berlin.

Jackson, F. H. 1910a. Transformations of *q*-series, *Messenger of Math.* 39, pp. 145-153.

Vandermonde, A. T. 1772. Memoire sur des irrationnelles de differens ordres avec une application au cercle, *Mem. Acad. Roy. Sci. Paris,* pp. 489-498.

Driver, K. & Jordaan, K., 2013. Inequalities for extreme zeros of some classical orthogonal and q-orthogonal polynomials. *Math. Model. Nat. Phenom.* **Vol. 8** (1), pp. 48-59.

Van Assche, W., 2008. Little q-Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series. pp. 1-15.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Semra HARDAL

Sürekli Adresi : Hisartepe Mahallesi Koruk Sokak Akça Caddesi Hardal Apartmanı B Blok Daire: 7 Kat: 5 Bursa / Gemlik

Doğum Yeri ve Yılı : Almanya / Brühl (1991)

Yabancı Dili : İngilizce

İlk Öğretim : 100. Yıl İlkokulu (2002)

Orta Öğretim : Hamidiye Ortaokulu (2005)

Lise : Anadolu Gemlik Lisesi (2009)

Lisans : Okan Üniversitesi Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Bölümü (2014)

Yüksek Lisans : Bahçeşehir Üniversitesi (2016)

Enstitü Adı : Fen Bilimleri Enstitüsü

Program Adı : Uygulamalı Matematik