T.C
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

HALİD AKİF TUNCAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. HANDAN DEMİRCİOĞLU

SİVAS - 2015

MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

H. Akif TUNCAY

Cumhuriyet Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Yrd. Doç. Dr. HANDAN DEMİRCİOĞLU

SİVAS

EKİM, 2015

KABUL VE ONAY

Halid Akif TUNCAY'ın hazırlamış olduğu "Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, 04.09.2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından, "Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı"nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd.Doç. Dr.Handan DEMİRCİOĞLU (Danışman, Jüri Başkanı)

Yrd.Doç.Dr. Mesut BÜTÜN (Üye)

Yrd.Doç.Dr. Yasin GÖKBULUT (Üye)

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../

Prof.Dr.Zafer CİRHİNLİOĞLU

Enstitü Müdürü

ETİK SÖZÜ

Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

04.09.2015

İmza

H. Akif TUNCAY

ÖZET

TUNCAY, Halid Akif, Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi,

Yüksek Lisans, Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı

Sivas, 2015

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini incelemektir.

Araştırma, 2013-2014 eğitim öğretim döneminde, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalında 5. sınıfta eğitim ve öğretimine devam eden iki matematik öğretmen adayı, Mersin Silifke ilçesindeki bir Anadolu lisesinde kadrolu iki matematik öğretmeni ve bir üniversitede doktora yapmakta olan bir akademisyen olmak üzere toplam beş katılımcı ile gerçekleşmiştir.

Katılımcıların matematiksel düşünme süreçlerinin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden birisi olan durum çalışması kullanılmıştır. Veriler görüşmelerde yapılan video kayıtları incelenerek deşifre edilmiş, yazılı hale getirilmiş, katılımcıların teslim ettikleri çözüm kâğıtları ile birlikte bilgisayar ortamına aktarılarak elde edilmiştir.

Akademisyen, öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçleri göz önüne alındığında genel olarak alınan eğitim ve matematiksel düşünmenin tüm boyutları düşünüldüğünde; önemli bir başarı, başarısızlık ve alınan eğitim seviyesi ile orantılı bir ilişkiden söz etmek mümkün değildir. Düşünme sürecinde kimi boyutları, özellikle ispat tekniğini akademisyen daha sık kullanırken, kimi boyutlarda ise özellikle özelleştirme de öğretmen adayları daha fazla çözümler üretmişlerdir.

ANAHTAR KELİMELER: Matematiksel Düşünme, Özelleştirme, Genelleme, Varsayımda Bulunma, İspat.

ABSTRACT

TUNCAY, Halid Akif, The Investıgatıon Of Mathematıcal Thınkıng Processes,

Master Secandary Education Science And Mathematics Depertment.

Sivas, 2015

The aim of this research is to investigate the mathematical thinking processes of candidate teachers, teachers who are at different stage of teaching and academician, during the period of problem solving.

The research is carried out by five participants; two of them are the candidate teachers who are continuing their education at Sivas Cumhuriyet University secondary education Mathematical teaching, two of them are teachers who are working at Anatolian high school in Silifke and one of them is an academician working at a University.

In this research at which the mathematical thinking processes of the participonts is investigated, case study which is a qualitative observation is used. Datas are gathered from watching the recorded video items, make written, are transferred along with the solution papers that participants submitted.

Considering the mathematical thinking process of academician, teachers and condidate teachers, it is impossible to mention a proportional relationship between a significant success, failure and received education level. During the thinking process on the one hand academicians use frequently proof technique especially in customization; on the other hand teacher canditates produce more solutions.

Key Words: Mathematical Thinking, Customization, Generalisation, Conjecturing, Proof.

ÖNSÖZ

Araştırmalarımın başından sonuna kadar yardımını esirgemeyip, değerli fikir ve tecrübeleriyle bana destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Handan DEMİRCİOĞLU'na ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Halid Akif TUNCAY

SİVAS – 2015

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

EKLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

M.D: Matematiksel Düşünme

Sö. V: Sözel Varsayım

Sa. V: Sayısal Varsayım

İ.Ö: İkinci Öğretim

N.Ö: Normal Öğretim

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde; problem durumu, araştırmanın problemi, alt problemler, araştırmanın amacı ve önemi, araştırmanın sınırlılıkları, araştırmanın varsayımları, araştırmanın süreci, tanımlar ve kısaltmalar başlıkları yer almaktadır.

1.1.Problem Durumu

İnsanlar hem kendi aralarında hem de diğer canlılar arasından düşünme yeteneklerinin gelişmişlik düzeyleri sayesinde ayrılırlar. Yerinde ve zamanında üretilen, doğru sonuca ulaşılmayı sağlayan düşünce bireyi, hayatının tüm dönemlerinde aktif bir konumda olmasını sağlar. Düşüncenin değerli olabilmesi için, insanın hayatını anlamlı hale getirerek olumlu gelişme göstermesine katkı sağlamasıdır. Bunun sonucunda insan, yaşadığı topluma uyum sağlar ve bu toplum içerisinde ki gelişiminde etkin olur (Alkan ve Bukova Güzel, 2005). Bunun yanı sıra düşünme süreçlerini etkili kullanan kişiler, yaşamları boyunca bir anlam arayışı içinde ve yaşamlarını kendileri için anlamlı olanlar etrafında kurmaya, özümsedikleri bu anlamlara göre hayatlarını devam ettirmeye yatkın olurlar (Berkant, 2007).

Düşünme Türk Dil Kurumu'na (2014) göre; "zihinden geçirmek, göz önüne getirmek, bir sonuca varmak gereğiyle inceleme, karşılaştırma ve aradaki ilgilerden yararlanma gibi zihin işlemlerinden geçirmek, muhakeme etmek, zihin ile arayıp bulmak, bir şeye karşı ilgili ve titiz davranmak, tasarlamak, hatırına getirmek, tasalanmak, ayrıntıları iyice incelemek" şeklinde açıklanmıştır. Gerçek anlamda düşünme, bir olayı hatırlama, hayal kurma ya da özlemlerimizi göz önünde canlandırmaktan çok, bir sorunu aydınlatma, bir problemi çözme, ya da beklentimize ters düşen bir gözlemi açıklama çabasıdır.

Tural'a (2005) göre düşünmeyi geliştiren en önemli araçlardan birisi de matematik iken Umay'a (1992) göre de düşünme dili demektir. Dolayısıyla matematik ile düşünme arasında çift yönlü bir ilişkiden söz etmek mümkündür.

Matematik, konusu nesneler olan kavramsal bir bilimdir. Umay'a (2003) göre matematik hayatta muhakeme etme, problem çözme becerisi kazandırma, olaylar arası ilişki kurma ve düşünme gibi beceriler kazandırır. Dolayısıyla sadece sayıları, işlemleri öğretmekle yetinmez. Ayrıca matematik, düşünmeyi öğrenmenin, kesinliğe ulaşma ve evrensel doğruları bulmayı sağlamaktadır.

Düşünme ve matematik arasında ki ilişkiden yola çıkılırsa, matematiğe özgü bir düşünme yani matematiksel düşünme ortaya çıkmaktadır. Pek çok kimse matematiksel düşünmeyi bilimsel ve günlük düşünmeden farklı sanmaktadır. Aksine matematiksel düşünme sağduyuya dayalı günlük düşünmeden temelde farklı olmayan bir düşünme sürecidir. (Yıldırım, 2012). Bunun yanı sıra bilim dallarının tümünde de matematiksel düşünmeden yararlanılmaktadır (Aydın ve Köğce, 2008).

Her düşüncenin yararlı olmayacağı varsayımından da yola çıkarak matematiksel düşünmeyi Alkan ve Bukova Güzel (2005) "düşüncenin yararlılığı, gereksinimlerin karşılanmasında kullanımı ve problemlerin çözümünde üretken olması ile ölçülür. Bu nitelikteki düşünmeye, kısaca Matematiksel Düşünme (MD) denir" şeklinde tanımlamışlardır. Liu (2003) ise, matematiksel düşünmeyi "tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analoji, formal ve informal olmayan usavurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi" olarak tanımlamıştır.

Matematiksel düşünme yeteneği, bir problemle ilgilenme, deneyimler üzerinde düşünme ve kurgulanan bir problem sürecini çalışma gibi çeşitli etkinlikler sonucunda ilerletilebilir (Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2003). Bundan dolayı, matematiksel düşünmenin en önemli özelliği problem çözmedir. Problem çözme, öğrencilerin soyutlama, açıklama, sembolleştirme, genelleme, ispatlama ve yeni sorular ortaya atma gibi genel matematiksel stratejiler konusunda deneyimler kazanmalarını sağlar (Busbridge ve Özçelik, 1997). Dolayısıyla problem çözmenin var olduğu her durumda matematiksel düşünme de gerçekleşmektedir (Yeşildere, 2006; Akt: Arslan ve Yıldız, 2010).

Bu açıdan, bir problemle uğraşırken süreç boyunca neler düşünüldüğü önem kazanmaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada problem çözme süreci boyunca akademisyen, matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçleri incelenmeye, benzerlikler ve farklılıklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini incelemektir.

1.3. Araştırmanın Problem Cümlesi

Araştırmanın problem cümlesi "matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme boyutlarına göre düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?" olarak ifade edilmiştir. Bu probleme cevap verebilmek için aşağıdaki alt problemler oluşturulmuştur.

1.4. Araştırmanın Alt Problemleri

1. Matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme boyutlarından "<u>özelleştirme</u>" boyutundaki düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?"
2. Matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme boyutlarından "<u>genelleştirme</u>" boyutundaki düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?"
3. Matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme boyutlarından "<u>ispat</u>" boyutundaki düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?"
4. Matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme boyutlarından "<u>varsayımda bulunma</u>" boyutundaki düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?"

1.5. Araştırmanın Önemi

Düşünme sürekli gerçekleşen bir süreçtir. Matematikte ise daha sık gerçekleşmektedir. Matematiksel düşünme ise matematiğin temelini oluşturmaktadır. Matematik sayıları, işlemleri, cebiri, geometriyi, orantıyı, alan hesaplamayı ve daha birçok konuyu öğretirken doğası gereği örüntüleri keşfetmeyi, akıl yürütmeyi, tahminlerde bulunmayı, gerekçeli düşünmeyi, sonuca ulaşmayı da öğretir (Pilten, 2008). Bu özelliklerden dolayı, matematik ve matematiksel düşünme hayatımız da önemli bir yer tutar.

Ayrıca yapılan araştırmalar günlük hayatta problemlerle başa çıkabilme becerisinin matematik problem çözme becerisinin ve dolayısıyla matematiksel düşünmenin önemini vurgulamaktadır. Matematiği öğrenmek; temel kavram ve becerilerin öğrenilmesinin yanı sıra matematikle ilgili düşünmeyi, genel problem çözme yöntemlerini kavramayı ve matematiğin gerçek yaşamda önemli bir araç olduğunu fark etmeyi içermektedir (MEB, 2009). Matematiksel düşünmenin gelişimi ile de eğitim sistemlerinin daha iyi bir şekilde ilerlemesi, uyum sağlamasında temel bir dayanak noktasıdır. (Olkun ve Toluk, 2007; Akt: Karakoca, 2011). Günlük yaşamda matematiksel düşünmenin de pek çok yararı bulunmaktadır. Matematiksel düşünme ile günlük yaşamda karşılaşılan herhangi bir sorun karşısında uzun süre unutulmayacak çözümler üretilmektedir. Bu çözümler ile ilgili örneğin: Trafiğin kapalı olduğunu düşünelim. Böyle bir durumda en kısa ve kolay şekilde gideceğiniz yolu çıkarmak, hesaplamak için matematiksel bir düşünce, bunun sonucunda bir çözümleme yapmak gerekmektedir. Burada matematiksel düşünme bu çözümlemeyi daha kolay yapmamızı sağlayacaktır (Clarke, 2001).

Bu nedenle her bireyin matematik düşünme becerisine sahip olması veya bu doğrultuda bir yaşantı geçirmiş olması gerekmektedir. Bu gereklilik doğrultusunda bir model önerebilmek, rehber olabilmek de önem taşımaktadır. Bu nedenle Matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin problem çözme sürecinde düşünme süreçlerini karşılaştırmak, benzerlik ve farklılıklarını ortaya koyabilmek önem arz etmektedir. Bu çalışmanın bulgularının öğrencilerine matematiksel düşünme becerisi kazandırmak isteyen öğretmenlere ve öğretim programlarına ışık tutabileceği ön görülmektedir.

Bunun yanı sıra bu araştırma matematiksel düşünmenin ne olduğu, matematiksel düşünmenin boyutlarının neler olduğu hakkında bilgi vermesi açısından önem taşımakta ve akademisyen, öğretmen, öğretmen adaylarına ve öğrencilere matematiksel düşünme süreçlerine ilişkin bir farkındalık yaratması ve bu süreçlerin matematik öğretiminde neden önemli olduğunu ortaya koyması açısından önemlidir.

1.6. Sayıltılar

Bu araştırmada aşağıdaki sayıltılardan hareket edilmiştir.

1. Araştırmaya katılan matematik öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyen süreç boyunca yapılan gözlem, görüşmelerde soruları samimi olarak cevaplandırmışlar ve doğal davranmışlardır.
2. Araştırmanın uygulama sürecinde, katılımcılar kontrol altına alınamayan (konsantrasyon, motivasyon, öz güven eksikliği…) bazı istenmeyen etkenlerden eşit düzeyde etkilenecekleri ve aralarında olumsuz etkileşim olmadığı düşünülmektedir.

1.7. Sınırlılıklar

1. Araştırma Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören 5. Sınıf öğretmen adayları, lisansüstü eğitim almış matematik öğretmeni, deneyimli matematik öğretmeni ve matematik alanında eğitim veren akademisyen ile sınırlıdır.

2. Araştırmanın verileri akademisyen, öğretmenler ve öğretmen adaylarının verdikleri bilgiler ve performansları ile sınırlıdır.

3. Çalışmanın bulguları süreç boyunca toplanacak verilerle sınırlıdır.

1.8. Tanımlar

Araştırmada sıkça geçen bazı tanımlar aşağıda ifade edilen anlamlarıyla kullanılmıştır.

Matematiksel düşünme; problem çözümünde dolaylı veya doğrudan matematiksel yöntemlerin, kavramların ve süreçlerin uygulanmasıdır (Henderson vd, 2002). Diğer bir ifade ile bir problemin çözümü için farklı boyutları birbirleri ile ilişkili bir biçimde veya tek başına kullanarak sonuca ulaşmadaki sürecidir.

Özelleştirme; bir problem durumunu anlamak ve anlamlandırabilmek için belirli ya da sistematik örnekleri seçmek ve problem üzerinde bu örekleri incelemektir (Keskin, Akbaba Dağ ve Altun, 2013).

Genelleme; matematiksel düşünme ve problem çözme yoluyla elde edilen sonuçların etki alanını daha geniş uygulayabilir şekilde ifade edilmesidir (Mason, vd. 2010). Birbirine benzer ve süreklilik içeren olayların en geniş kapsamda ele alınması sürecine genelleme denir.

Varsayımda bulunma; deneyle kanıtlanmamış olmakla birlikte kanıtlanabileceği umulan yargıdır (Karasar, 2006).

İspat; bir iddianın doğruluğunu araştırma, niçin doğru olduğunu açıklama ve genelleme koşullarını kontrol etme aşamalarından oluşan bir süreçtir (Baki, 2008).

BÖLÜM II

ÇALIŞMANIN KAVRAMSAL ÇERÇEVESİ

Bu bölümde; çalışmanın temelini oluşturan teorik yapılardan bahsedilmiştir. Özellikle matematiksel düşünmenin literatürde yer alan ve farklı yönlerini vurgulayan tanımlarına, boyutlarına, matematiksel düşünmeyi ölçmek için uygulanan yöntem ve araçlara yer verilmiştir.

2.1. Matematik

Yaşamımızın çoğu alanında matematiği farkında olsak da olmasak da kullanmaktayız. En basitinden örnek verecek olursak gündelik hayatta kullandığımız, zaman ve zaman dilimleri, ayakkabı numaramız, boyumuz ölçüsü… gibi neredeyse her kavramda matematiksel ifadeler yer almaktadır. Umay (2003), insanlar okula ilk başladığı yıllarda adlarını ve anlamlarını bilmedikleri çoğu matematiksel kavrama sahiptirler. Örneğin; sofra kurarken bir çatalın eksik olduğunu fark eden bir çocuk "bire-bir", bisikletinin tekeri eğrildiğinde düzeltebilen bir çocuk "çember" kavramlarını biliyor demektir. Bu kadar matematik ile içli dışlı iken; matematiğin tam olarak ne diye tanımlayabiliriz diye sorduğumuz da birçok kaynakta matematiği farklı şekillerde tanımlanmıştır.

Umay'a (2007) göre matematik; yaşadığımız dünyanın belirli yönleri ve kaçınılması olanaksız yanlışlarından uzak; sadece bireylerin istekleri için, onların düşüncelerinde var olan; kendine has kuralları olan; kendi kavramlarını somut nesnelermiş gibi herkese onaylattıran; son derece tutarlı, kararlı, duyarlı; başka hiçbir bilim dalının olamayacağı kadar kesin, akılcı, üstelik son derece de renkli, eğlenceli bir oyun olarak tanımlamaktadır.

Baykul (2009) ise "Matematik nedir?" sorusunun cevabını "İnsanların matematiğe yönelmedeki hedeflerine, belli bir amaç için kullandıkları matematik konularına… gibi birden fazla çeşitli görüşlerini; 1) Matematik, günlük hayattaki problemleri çözmede kullanılan sayma, hesaplama, ölçme ve çizmedir; 2) Matematik, bazı sembolleri kullanan bir dildir; 3) Matematik, insanda mantıklı düşünmeyi geliştiren mantıklı bir sistemdir; 4) Matematik, dünyayı anlamamızda ve yaşadığımız çevreyi geliştirmede başvurduğumuz bir yardımcıdır biçiminde dört grupta toplamıştır. Bir başka şekilde ise Ardahan (1990) da bireyin yüzleştiği her türlü problemi çözmek için kullandığı düşünceler sistemi biçiminde açıklamıştır.

Einstein'a göre matematik aklın (zekânın) kendisidir. Zekânın bir ürünü de tabi ki matematiktir. Ancak zekâyı destekleyen, onu geliştiren daha da önemlisi zekâyı ve onun ürünü olan düşünce yapısını sistemleştiren en önemli etkenin matematik olduğunu söyleyebiliriz (Sevgen, 2002). Matematiğin tanımına, görüldüğü gibi farklı düşünürlerin hem fikir olduğu net bir cevap verilememiştir. Körlerin dokunarak tanımlamaya çalıştıkları fil gibi. Kimisine göre kuralları belli satranç türünden bir zekâ oyunu, kimisine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim; kimisine göre bilim ve pratik yaşam için yararlı bir hesaplama tekniği (Yıldırım, 2012). Türk Dil Kurumunda (2014) ise "Aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adı." şeklinde tanımlanmıştır.

Yukarıda verilen tanımlamalardan da anlaşıldığı gibi matematik kendi içinde bir dünya ve kendi dünyasını ifade etmek için de kendine has bir dili olan bilim olduğunu söyleyebiliriz.

2.2. Matematik Öğretiminin Önemi ve Amacı

Günümüz toplumun da matematik ile arası iyi olan insanlar genellikle başarılı, zeki diye nitelendirilmişlerdir. En basitinden örnek verecek olursak; ilköğretim veya ortaöğretimde okuyan bir öğrencinin yılsonunda karnesine göre başarısını ölçmek için, öğrenciye ilk sorulacak sorulardan bir tanesi genellikle "matematiğin kaç?" şeklinde olmaktadır. Bu ise bize matematiğin, öğrencinin başarısını değerlendirmede bir ölçüt olarak kullanıldığının göstergesidir. Aynı zamanda geçmişten günümüze zamana adını altın harfler ile yazdırmış; Isaac Newton, Arşimet, Galileo Galilei, Pisagor gibi bilim insanları anıldıkları bilim dallarının yanın da iyi de birer matematikçilerdi.

Şuan ise teknolojinin ilerlemesi ile önceki insanların karşılaşmadığı yeni problemlerle karşılaşılan günümüz dünyasında, matematiğe önem veren, matematiksel düşünme gücü yüksek, matematiği modelleme ve problem çözmede kullanabilen bireylere daha çok ihtiyaç olduğu görülmektedir (MEB, 2013).

Matematik eğitimi ile de matematik yaparak formül nasıl çıkarılır, tanımlara nasıl ulaşılır, genellemelere nasıl varılır, genellemeler nasıl doğrulanır, nasıl akıl yürütülür gibi öğrencideki birçok önemli beceri geliştirilmiş olur (Olkun ve Toluk, 2007). Bu kapsamda ortaöğretim matematik öğretim programı ile öğrencilerin; problem çözme ustalıklarını ilerletmeleri, matematiksel düşünme maharetine sahip olmaları, matematiğin kendine özgü lisanını ve anlamlarını doğru ve müessir bir şekilde uygulayabilmeleri, matematiğe ve matematik öğrenimine önem vermelerinin sağlanması amaçlanmıştır (MEB, 2013).

Bir başka şekilde matematik öğretiminin hedeflerinde bireye gündelik yaşantısında lazım olan matematiksel bilgi ve yetenekleri sahiplendirmek, problem çözmeyi aşılamak ve bir durum, olay karşısında problem çözme havası içinde ele alınan bir düşünme şekli kazandırmaktır (Alkan ve Altun, 1998). Ersoy (1991) ise Matematik öğretiminin temel amacında; güzel ve faydalı değerleri geliştirme, öğrencilerde mantıksal düşünme yeteneği geliştirme, mümkün olduğu durumlarda bilgiyi kantitatif veriler ile meydana çıkarma huyu edindirme, yaşantısında yüzleştiği problemlerin çözümünde var olan şartları faydalı olacak şekilde değerlendirme, öğrencilere soyutlama yapma alışkanlığı edindirme; bu işlemler ile zihinsel bağımsızlığı ve yaratıcılığı geliştirme, öğrencilere özelleştirme ve genelleştirme yapma alışkanlığı kazandırma; bu yolla sezgisel düşünceyi geliştirme, bir problemin değişik yöntemlerle çözülebileceğinden yola çıkarak, farklı fikir ve düşüncelere zihnen kapalı olmadan ve onlara saygı duyma alışkanlığı kazandırma şeklinde sıralanabileceği belirtmiştir.

Anlaşıldığı gibi matematik öğretimi ile genellikle öğrencilerde düşünme yapısı geliştirilmek istenmektedir. Matematik, hesaplama becerilerini öğretmekten ibaret değildir. Düşünme matematiğin temelini oluşturmaktadır (Umay, 2003). Aynı zamanda matematik öğretimi insanların düşünme becerilerini ve dünya görüşünü değiştiren önemli bir faktördür.

2.3. Düşünme

Bilimde yapılan birçok buluşun düşünme sonucu ortaya çıktığı aşikârdır. Örneğin Toriçelli'nin "doğa boşluktan hoşlanmaz ilkesi ile yola çıkarak nasıl olurda su belli bir düzeyi aşıp boşluğu doldurmuyor diyerek, Newton'un kafasına elmanın düşmesi sonucu düşünmenin başlayarak buluşların olması. Gerçek anlamda düşünme, bir olayı hatırlama hayal kurma ya da özlemlerimizi göz önünde canlandırmaktan çok, bir sorunu aydınlatma bir problemi çözme, ya da beklentimize ters düşen bir gözlemi açıklama çabasında kendini gösterir. Hangi konuda ya da düzeyde olursa olsun düşünme en belirgin biçimi ile bir sorun ya da problem çözme etkinliğidir (Yıldırım, 2012).

Krulik ve Rudnick (1999) düşünmeyi “hatırlama”, “olağan düşünme”, “eleştirel düşünme” ve “yaratıcı düşünme” gibi basitten karmaşığa, şeklinde ifade etmiştir. Türk Dil Kurumu’na (2014) göre ise; “düşünmek durumu tefekkür; duyum ve izlenimlerden, tasarımlardan ayrı olarak, aklın kendine özgü ve bağımsız durumu; (felsefede), karşılaştırma yapma, ayırma, birleştirme, bağlantıları ve biçimleri kavrama yetisi, duyum ve izlenimlerden, tasarımlardan ayrı olarak aklın bağımsız ve kendine özgü eylemi; zihnin bir konu ile ilgili bilgileri karşılaştırarak, aralarında ki bağlantıları inceleyerek bir yargıya ya da karara varma etkinliği; (eğitimde) karşılaştırmalar yapma, ayırma, birleştirme ve biçimleri kavrama yetisi” gibi birçok anlamı içermektedir.

Psikolojik yönden bakıldığında düşünme daha çok algı ve zekâyla ilişkilendirilmekte, karar verme ve problem çözme durumlarında değerlendirilmektedir. Düşünme farklı şekillerde akıl yürütmeden ziyade, sezme veya hayal etme şeklinde de görünebilmektedir. Düşünme hareketlerinin oluşabilmesi için bireyin dış dünyada ve kendi iç dünyasında olanlardan bilgisi olması gereklidir. Sonuçta insan gördükleri, duydukları, hissettikleri, bildikleri hakkında yola çıkarak düşüncesini oluşturmaktadır. Şüphesiz ki düşünmeyi durdurmayı istesek bile bunu beceremeyeceğizdir. Tıpkı çalışan kalbimiz gibi düşünmede istem dışı bir faaliyet gösterir. Düşünmenin ana iki temel öğesi vardır.

1-Yeter sebep (Neden- Sonuç) her şeyin varlığının bir nedeni olmasına dayanır. Bu da onu var olduran kaynak ya da niçin ve neden öyle olduğunu anlatandır. Dolayısıyla, var olan şeylerin bir amacı olduğu görüldüğü gibi, her olayın bir nedeni olduğu durumu da meydana gelmektedir. Neden-sonuç arasında ki ilişki genellikle nedensellik biçiminde de ifade edilmektedir. Neden, bir varlığa veya olaya etki eden, oluşturan, meydana getiren şey. Aynı zamanda kelime anlamı olarak ise, bir durumun ortaya çıkışı, var oluşu için mecburi ve yeterli olan şey (Cevizci, 1999) şeklinde anlamlarına da gelmektedir.

2-Aynılık (Özdeşlik), her şeyin kendi kendisinin eşiti olduğu esasına dayanır. Bu ilke doğrultusunda, bir şeyin aynı koşullar içinde ve aynı zamanda hem var, hem yok olamaz sonucu ortaya çıkar.

Düşünme ile ilgili yapılan araştırmalarda genellikle düşünme stilleri üzerine yoğunlaşılmıştır. Düşünme stili; yapılan durum ya da düşünmenin tercih edilen şekli ve bir yetenek olarak değil, bireylerin sahip olduğu yeteneğin kullanımında bir tercihtir

(Sternberg, 1997) Literatür incelendiğinde düşünme stilleri konusunda en detaylı çalışmaların Sternberg (1993, 1994, 1997) ve Zhang (2001a, 2001b, 2004a, 2004b, 2004c, 2005a, 2005b) tarafından yapıldığı görülmektedir (Akt: Merdin, 2010). Sternberg (1997) düşünme stili yaklaşımın da, işlevsel açıdan (özerk, kuralcı, yargısal düşünenler), biçimsel açıdan (tekilci, aşamalı, eşdeğerci, kuralsız düşünenler), düzey açısından (bütüncül, ayrıntıcı düşünenler), kapsam açısından (içe dönük, dışa dönük düşünenler) ve eğilim açısından (yenilikçi, gelenekçi düşünenler) şeklinde beş ana başlık altında ele almıştır.

Düşünme stilleri dışında yapılan araştırmalarda farklı düşünme çeşitleri karşımıza çıkmaktadır. Alternatif Düşünme (Arda, 2011), Analojik Düşünme (Kuru, 2012), Anlamlı Nedensel Düşünme (Berkant, 2009), Bilimsel Düşünme (Gündoğdu, 2001), Bilişsel Düşünme (Ersoy, 2012), Üst Düzey Bilişsel Düşünme (Ersoy,2012) Cebirsel Düşünme (Palabıyık, 2010), Coğrafi Düşünme (Şenaslan, 2010), Tarihsel Düşünme (Güngör Akıncı, 2011), Derinlemesine Düşünme (Kurt, 2002), Empatik Düşünme (Cooper ve Dilek, 2007), Mantıksal Düşünme (Kılıç, 2009), Metaforik Düşünme (Ulubay, 2002), Olumlu Düşünme (Karagöz, 2011), Rasyonel Düşünme (Bacakoğlu, 2002), Soyut Düşünme (Ağaç, 2013), Somut Düşünme (Tunalı, 2007), Yansıtıcı Düşünme (Semerci, 2007), Yaşantısal Düşünme (Barca, 2002), Konvaryasyonel Düşünme (Zeytun, vd., 2010), Psikolojik Düşünme (Demir, 2005), Operasyonel Düşünme (Yazgan, 2007), Stratejik Düşünme (Atmaca, 2007), Uzamsal Düşünme (Olkun ve Altun, 2013), Sezgisel Düşünme (Şen, 2010), Yakınsak Düşünme (Atasoy, vd., 2007), Iraksak Düşünme (Artar, 1993), Geometrik Düşünme (İlhan, 2011), Eleştirel Düşünme (Cooper ve Dilek, 2007), İrdeleyici Düşünme (Altuğ, 1995), Yapılandırmacı Düşünme (Tosun ve Karadağ, 2008), Yoğun Düşünme (Seçer, 2003), Kritik Düşünme (Balta, 2009), Kişisel Düşünme (Şahin, 2000), Yaratıcı Düşünme (Öztürk, 2013), Geleneksel Düşünme (Atalay, 2006) ve Matematiksel Düşünme (Umay, 1992) şeklindedir.

MEB'in (2007) ilköğretim programın da yer alan düşünme türleri ise Şekil 2.1. de ki gibi ifade edilmiştir.

Şekil 2.1. Düşünme Eğitimi Dersi Öğretim Programında Yer Alan Düşünme Türleri (MEB, 2007:8)

Bu çalışmada matematiksel düşünme temele alındığından dolayı diğer düşünme çeşitleri üzerinde fazla açıklamaya yer verilmemiştir.

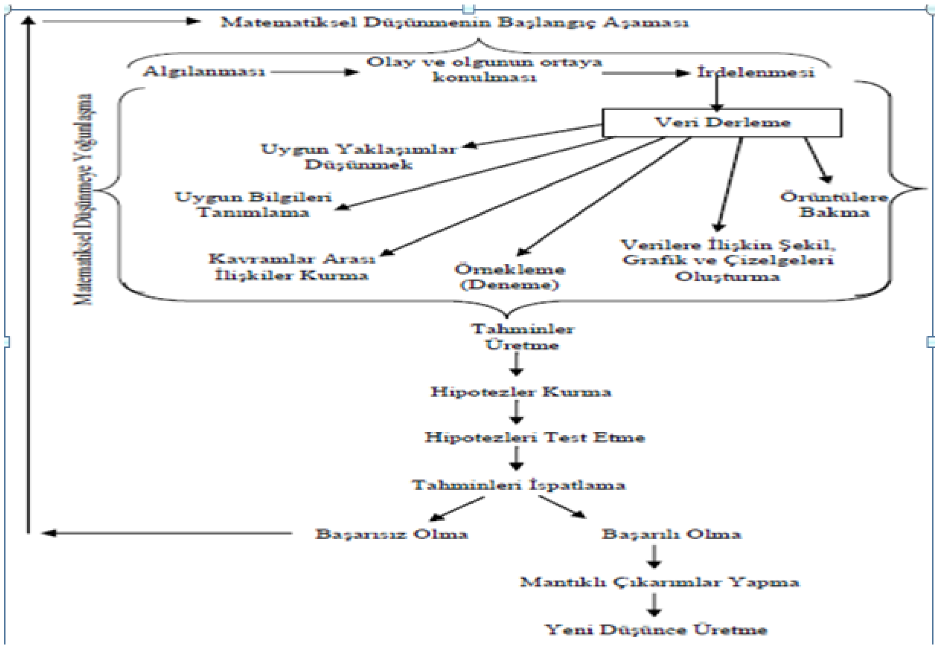
2.4. Matematiksel Düşünme

Matematik ve düşünmenin çift yönlü ilişkisinden yola çıkarak matematiğe özgü bir düşünme yani matematiksel düşünmeden bahsedilebilmektedir. Matematiksel düşünmenin oluşumu "insanın etrafındaki objeleri idrak etme ve bunlar arasında ki ilişkileri manalı eyleme çabası ile oluşmaya başladığı" şeklindedir (Tall, 1995).

Şüphesiz her düşünme matematiksel olmayabilir, ama problem çözmede matematiksel düşünmenin yardımı da inkâr edilemez (Umay, 1996). Matematiksel düşünmenin, düşünme ve problem çözmede ki etkisi büyüktür. Her düşüncenin faydalı olmayacağı varsayımından yola çıkarak matematiksel düşünmeyi Alkan ve Bukova Güzel (2005) "düşüncenin yararlılığı, gereksinimlerin karşılanmasında kullanımı ve problemlerin çözümünde üretken olması ile ölçülür. Bu nitelikteki düşünmeye, kısaca matematiksel düşünme denir "şeklinde tanımlamışlardır. Matematiksel düşünmenin günümüze kadar gelen tanımlarından bazıları; problem çözme de özgül sorunların çözümü için kullanılan bir bilişsel sürece odaklanmıştır (Mason, Burton ve Stacey, 2010). Diğer tanımlar ise doğrudan matematikte kavramsal anlamanın gelişimi ile ilgilidir (Tall, 1991).

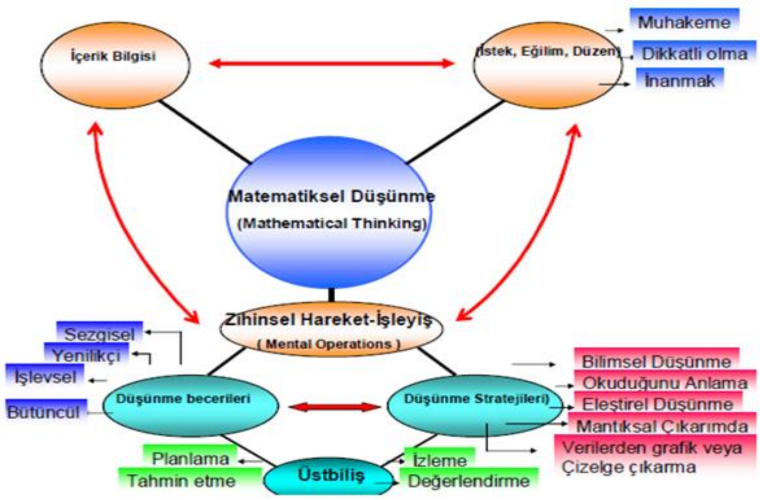
Matematiksel düşünme, doğrudan kavramsal anlamanın gelişimiyle sınırlandırılmayıp, gündelik hayatta da pek çok problem karşısında matematiksel düşünme eylemini gerçekleştirmekteyiz. Yıldırım (2012) " pek çok kimse, matematiksel düşünmenin yalnız günlük düşünmeden değil, bilimsel düşünmeden de farklı, hiçbir düşünce alanında bulunmayan bir açıklık ve kesinlik içeren, kendine özgü bir düşünme türü olduğu görüşündedir. Ancak matematiksel düşünmenin, temelde günlük ve bilimsel düşünmeden farklı olmadığı da ileri sürülebilir.” Örneğin, akşam karanlığında eve giren bir kişinin yapacağı ilk işlerden biri lambayı açmak olacaktır. Yanmadığını fark ettiği zaman ise kısa bir bocalama geçirdikten sonra düşünerek duruma çözüm arar ve aklına: Elektrikler mi kesik? Sigorta da mı bir problem var? Ampul mü yandı? Diğer odaların ışıkları yanıyor mu?... gibi birçok soru gelebilir. Bu soruların hepsi bizi çözüme götüren bir hipotez niteliği taşımaktadır. Bu hipotezlerden herhangi biri denenir ve sonucunda bizi çözüme götürmezse hipotez yanlış demektir ve bu durumda bir diğer hipotezi denemeye koyuluruz. Kişinin karşılaştığı bu problem karşısında sergilediği tutum da matematiksel düşünmeye örnek olarak verilebilir.

O halde insan, yüzleştiği olay ve olguları inceler ve kullanır. Bu olay ve olgular ile ilgili varsayımlarda bulunur, hipotezler kurar ve kurduğu hipotezleri test eder. Doğal olarak bunlardan, hayatında faydalı olacak ve ilerideki yaşantısını yönlendirecek anlamlar çıkarır, bilgiler üretir. Bu tür bir süreci uygulayan, düşünme üretiminin gerekliliği, farklı zamanlarda ve biçimlerde ifade edilmiştir (Polya, 1964; Burton, 1984; Dreyfus, 1990; Greenwood, 1993; Dunlap, 2001 ve Henderson vd, 2001) ve özel olarak “Matematiksel Düşünme (MD)” olarak adlandırılmıştır (Akt: Alkan, Bukova Güzel, 2005). Buradan yola çıkarak Alkan ve Bukova Güzel (2005) matematiksel düşünmeyi şematik olarak Şekil 2.2. deki gibi ifade etmişlerdir.



Şekil 2.2.Matematiksel Düşünmenin Oluşum Süreci (Alkan ve Bukova Güzel, 2005)

Aynı zamanda matematiksel düşünme döngüsel olarak da devam eden bir süreçtir (Blitzer, 2003). Bu sürecin girdilerine baktığımızda ise; düşünen kişi, sorun, sorun ile ilgili veriler ve verileri yorumlama yöntemi (düşünme tekniği) vardır. Bu girdiler niteliksel olarak ne kadar yeterli ise matematiksel düşünme o düzeyde nitelikli olur (Yıldırım, 2012). Matematiksel düşünmenin nitelikli olması için Tuna (2011) MD'nin bileşenlerini; içerik bilgisi, istek-eğilim ve zihinsel hareket şeklinde, Şekil 2.3. de şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Matematiksel Düşünmenin Bileşenleri (Tuna, 2011).

Bir başka şekilde MD'yi Dunlap (2001) sıradan olmayan bir durumu, *öğrencinin derste öğrendiğinden farklı bir çözüm şekli aramak için matematiksel düşünmeye yönlendirmesini gerektiren bir problem* olarak tanımlamıştır. Bu tanımla Dunlap (2001) da MD ile problem çözmeyi bir arada ifade etmektedir. Bu tarz problemler öğrencinin birbirleri ile ilişki içerisinde ki problemlerin algoritmaların parçalarını birleştirerek o probleme ait bir çözüm şekli geliştirmesini gerektirir. Bir problemin çözümünün bir ve birden fazla çözüm şekli vardır. Bu taraz problemler, öğrencilerin bilgiyi sentezlemelerini ve hangi çözüm şeklinin faydalı olacağını hangilerinin faydalı olmayacağını belirlemede içgüdüsel davranmaları gerekir ve öğrencileri MD'ye zorlar. Dolayısıyla problem çözmede öğretmen, sadece problemin sonucunu değil, sonuca ulaşmadaki yöntemleri de ele alması, incelemesi gerekmelidir (Dunlap, 2001). Ayrıca bir problemle yüzleşildiğinde problemin sonucunun ne olduğunu bulmaktan öte, problemin farklı boyutları ile ele alınarak incelenmesi matematiksel düşünceyi gerektirmektedir (Yeşildere ve Türnüklü, 2007).

Matematiksel düşünmeyi tanımlayabilmek için araştırmacılar MD'nin boyutlarından hareket etmişlerdir.

2.5 Matematiksel Düşünmenin Boyutları

Liu (2003) MD, "tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, betimleme, genelleme, örnekleme, biçimsel ve biçimsel olmayan usa vurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi" şeklinde ifade etmiş. Yeşildere (2006) bir problemin çözümü özelleştirme, genelleme, tahmin etme, hipotez üretme, hipotezin doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünme becerilerini gerektiriyorsa, matematiksel düşünme gerçekleşeceğini belirtmiştir.

Literatür incelendiğinde, farklı araştırmacıların MD'nin bileşenlerini ortaya koymaya çalıştıkları görülmektedir. Tablo 2.1. de birkaç araştırmacının hangi boyutları ele aldıkları özetlenmiştir.

Tablo 2.1. MD'nin Boyutları (Bileşenleri)

YAZARLAR→ BOYUTLAR↓	Alkan ve Bukova Güzel (2005)	Tall (2002)	Mason, Burton ve Stacey (2010)	Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar (2003)	Liu (2003)	Arslan ve Yıldız (2010)
Tahmin Etme	X					
Genelleme	X	X	X	X	X	X
Varsayımda Bulunup Test Etme	X					
Varsayımda Bulunma			X			X
Soyutlama	X	X				
Muhakeme Etme	X					
İspatlama İle Yeni Bir Bilgi Ya Da Kavrama Ulaşma	X					
İspat		X				X
Sentezleme		X				

Modelleme		X				
Problem Çözme		X				
Özelleştirme			X			X
Doğrulama Ve İkna Etme						
Doğrulama					X	
İkna Etmek				X		
Tahmin Etmek				X	X	
Ayrıntılamak (Özelleştirmek)				X		
Tümevarım					X	
Tümdengelim					X	
Örnekleme					X	
Analoji					X	
Formal Ve İnformal Olmayan Usa Vurma					X	

Tablo 2.1. incelendiğinde, matematiksel düşünmenin bileşenleri için farklı araştırmacıların eşanlamlı kelimeler (doğrulama ve ikna etme / doğrulama ve inandırma / ispatlama, örnekleme / ayrıntılamak / özelleştirme… gibi) kullandıkları görülmektedir. Bu durumun yanı sıra matematiksel düşünmede daha çok özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama bileşenlerinin daha sık kullanıldığı görülmektedir (Arslan ve Yıldız, 2010) . Bu nedenle bu çalışmada matematiksel düşünme sürecinin daha çok özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamaları kullanıldığı için bu boyutlar üzerinde incelemeler yapılmıştır. Aşağıda kısaca bu boyutlardan bahsedilmiştir.

2.5.1. Özelleştirme

Birey özelleştirme yaparken; özel değerleri düzensiz bir şekilde seçer (problemi anlayabilmek için), düzenli şekilde, artan veya azalan bir biçimde yani sistematik olarak seçer (özel durumu genişletmek için) ve bu genişletme sonucu elde ettiği genelleme veya kuralın doğruluğuna kendini ikna etmek için (genellemeyi kendine ikna etmek için) seçme anlamındadır (Mason vd., 2010). Özel durumları rastgele seçmek, problemin anlamlandırma açısından ve bir problemin ya da varsayımın doğru olup olmadığını sezme açısından faydalı bir düşünce olabilir. Ama bir ilişki inceleniyorsa ve başarı elde etme düşünülüyorsa özel durumların sistemli olarak seçilmesi daha faydalı olacaktır. (Mason vd., 2010). Özel değerler seçilirken birden fazla örnek verme, bir durumu, problemi tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme veya bulma gibi eylemlerden bahsedilir. Dahası bulunulan durum için karşıt veya ilgili örnek bulma, istenilenleri doğru bularak sonucu değişik biçimlerde ifade etme gibi eylemler de özelleştirmede yapılabilir (Arslan ve Yıldız, 2010).

2.5.2. Genelleme

Genelleme matematikte ve günlük hayatta çok sık kullandığımız bir boyuttur. Matematikte ve diğer bilimlerde de ileri adımlar atılmasına imkân sağlamaktadır (Biber ve Argün, 2012). Örnek olarak güçlü bir soğutma altında belli bir su kütlesinin böyle ortamda hemen neden donduğunu açıklamak yerine, suyun her zaman ve her yerde neden donduğunu açıklamak gerekmektedir (Ströker, 2005). Bu ise genelleme ile olmaktadır. Her biri bir olgu olan, "suyun içinde bulunduğu kabın şeklini alması" "zeytinyağının içinde bulunduğu kabın şeklini alması" "gaz yağının içinde bulunduğu kabın şeklini alması" .... gibi "farklı sıvıların içinde bulundukları kabın şeklini almaları" sayılan bütün maddelerin sıvı olduğu düşünülerek, “sıvılar içinde bulundukları kabın şeklini alır” biçiminde ifade edilir. Böylece değişik maddelerle ayrı ayrı gözlenen bir özellik daha büyük bir guruba genellenmiş olur (Gücüm, 1998). Dolayısıyla bilim açıklama işlevini yerine getirirken, genellemelere başvurmaktadır.

Matematiğin “genelleme ve soyutlama bilimi” olduğu düşüncesinden yola çıkılarak, matematikle uğraşmak demek sayı, nokta, küme, fonksiyon gibi elle tutulup gözle görülmeyen nesnelerin özelliklerini ve birbirleri ile ilişkilerini ortaya koymak, genellemeler yapmak demektir (Bekdemir, 2012). Genelleme ileri seviyede bir bilişsel ustalık olarak kabul edildiği için (Krutetskii, 1976) gerek matematikte gerekse matematik eğitiminde önem verilen bir eylemdir.

Tanım olarak genelleme “bireyin öğrendiği bir davranışı öğretim koşulları dışındaki farklı koşullar altında da yapması (Özyürek, 2004; Tekin-İftar ve Kırcaali-İftar, 2001), bulunan bir çözüm yolunun benzer diğer durumlarda da uygulanır olduğunun anlaşılması (Olkun vd., 2009), özel değerlerden yola çıkarak daha geniş olaylar hakkında varsayımlarda bulunma (Mason vd.,2010; Tall, 2002), bazı temel bağlantılara ait sezgileri net bir biçimde açıklamaya çalışmak (Mason vd.,2010;), Kaput (1999) özel örnek veya örneklerin ilerisinde bir usa vurma ve haberleşme durumu gerçekleştirerek örnek durumlar arasındaki benzer özellikler ile sınırlanması veya ortaya koyulması, ya da usa vurma ve haberleşme durumunu örnek durumların ötesinde bir seviyeye, örnek durumlar arasındaki bir örüntüye, yapıya veya ilişkiye taşımak şeklinde ifade edilmiştir.

Matematiksel genellemelerde yapılan özel durumlar, belirli işlemler sonucunda bulunulan öneri hakkında çıkarımda bulunulmaya çalışılır. Bu durum, genelleme sırasında özel değerler ve belirli işlemler yapıldığından özelleştirme işleminin de gerçekleştiğini göstermektedir. Bu bileşen, matematik için çok önemli bir durumdur; çünkü özellikli sonuçların faydalı olabilmesine karşın, matematiksel sonuçlar tipik olarak geneldir. Dolayısıyla genelleme, bireyi “Doğru olması mümkün görünen şey nedir, niçin ve nerede doğrudur?” sorularına götürür (Mason vd., 2010).

Genelleme düşünülürken örüntü kavramından da sık sık bahsedilmektedir. Örüntü yapmak ve bulmak genelleme yapmada etkin rol durumundadır. Palabıyık (2010) genellemeleri ifade etmek için sayı örüntülerini kullanmak matematik programlarında en çok tercih edilen yöntemlerden biridir şeklinde ifade etmiştir. Buna benzer şekilde genelleme sırasında sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma yapma, benzerlik ve farklılıkları belirleme, iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel veya sözel olarak ifade etme, olabilecek bütün ihtimalleri tanımlama gibi eylemler de söz konusudur (Hacısalihoğlu, vd. 2003; Mason, vd., 2010.; Akt: Arslan ve Yıldız, 2010).

Genelleme için yaşanılan zorlukların nedeni Baştürk’e (2005) göre özel eğitim kurumlarında ve okullarda ele alınan matematik, sorunun ve sorunun çözümünün nedenlerini çok incelemeden yani detaya inmeden, soruları cevaplandırmak ve doğru cevabı ulaşmaktan yana olduğu için, öğrencilere yalnızca kullanacakları formüllerin ve temel bilgilerin nasıl ezberleneceğinin öğretildiğini ifade ediyorlar" şeklindedir. Bu durum öğrencilerin genelleme yapmalarında ki zorlukların nedenini belirtiyor. Matematiksel düşünme ile öğrenciler ezberledikleri formül ve benzer problemlerin dışında karşılaştıkları sorularda özelleştirme ve genelleme boyutları sayesinde problemin sonucuna, çözüm yoluna ulaşabileceği düşünülmüştür.

Günümüzde genelleme (Biber ve Argün, 2012) ile ilgili olarak da çok fazla çalışmaya ulaşılamamış olmasına rağmen örüntülü genelleme ve cebirsel genelleme ile ilgili (Çayır, 2013; Yeşildere ve Akkoç, 2010; Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Tanışlı ve Köse, 2011) oldukça fazla çalışma vardır.

2.5.2.1. Genelleme Türleri ve Stratejileri

Genellemeyi Yıldırım (2012) tümevarım yoluyla elde edilen genellemeler (olgusal (ampirik) genelleme), tümdengelim yoluyla elde edilen genellemeler: (akıl yürütme kurallarına göre oluşturulan) şeklinde iki şekilde incelemiştir.

Tümdengelimsel çıkarımda, genel bir sonucuna ulaşmak için genelleme yapılır. Böyle bir genellemenin doğruluğu ancak tekbir zıt örneğin gözlemlenmesi ile reddedilebilir. Yıldırımın bu açıklamasana karşın Radford'un (2006) teorik görüşünde öne çıkan özelliklerden bir tanesi genellemede bulunma ve tümevarım arasında farklılık olduğuna dair söylemidir. Radford (2006) bu eylemler arasındaki farka dikkat edilmediğine değinmiştir. Tümevarım da genel terimin, özel terimlerin ortak özelliklerinden yola çıkılarak bulunmasından farklı olarak, deneme yanılma şeklinde bulunduğunu belirtmektedir. Bu yüzden tümevarım ile tümevarımlı genelleme birbirine karıştırılmamalıdır. Diğer taraftan Reigeluth (1999) ise süreç genellemeleri ve nedensel genellemeler olarak iki tür genelleme olduğunu belirtmiştir.

Genelleme stratejileri ise; literatürde öğrencilerin genelleme problemlerinde yaygın bir şekilde kullandığı ifade edilen yöntemlerdir. Bunlardan bazıları;

1. *Oran stratejisi*; yalnızca tek bir adımdan yola çıkarak genellemeye varılmasıdır. Mesela 4, 7, 10, 13, … şeklinde ilerleyen bir dizide, öğrencinin 3. Terim 10 ise 30. terimin 100 olduğunun ifade edilmesi.

2. *Yinelemeli strateji*; öğrenci bir terimden diğer terime nasıl gidileceğini fark eder. Bu şekilde önceki veya bir sonraki terimi bulabilir, ancak terimlerin genel yapısını göremez.
3. *Fark ile çarpma stratejisi*; Özellikle lineer bağlantıların genellemesinde görülen bu durumda, öğrenci terimler arasındaki sabit ilişkinin (kuralın) farkındadır. n. terimi farkla n'nin çarpılması şeklinde ifade eder. Bu yaklaşım 3, 6, 9, … şeklindeki bir dizi için geçerli (3n) iken, 3, 7, 11, … şeklindeki bir dizi için geçersiz (4n) olacaktır.
4. *Tahmin Etme Stratejisi*; Problem durumunu temsilen bir cebirsel ilişki (kural) ortaya konulur. Bu süreçte ortaya konulan kuralın neden geçerli olacağını düşünme şeklinde bir çaba yoktur. Oluşturulan cebirsel yapı genellikle problem durumu ile ilgili sayıları ve işlemleri içerir.
5. *İlişkileri arama stratejisi*; Problemde verilen duruma dayalı olarak genelleme yapılmaya çalışılır.

şeklinde belirtilmiştir (Stacey, 1989; Zazkis ve Liljedahl, 2002; Lannin, Barker ve Townsend, 2006; Amit ve Neria, 2008; Sasman, Olivier ve Linchevski, 1999; Akt: Çayir, 2013) ve öğrencilerin kullandıkları genelleme stratejilerini; Parçaları sayma veya modelleme, yinelemeli veya eklemeli, fark ile çarpma, orantı, tahmin ve kontrol, fonksiyonel veya kesin strateji olarak ifade etmiştir (Çayir, 2013).

Bu çalışmada ise matematiksel düşünmenin genelleme boyutunu ele alarak incelenmiş genellemenin alt boyut ve stratejilerine derinlemesine yer verilmemiştir.

2.5.3. Varsayımda Bulunma

Varsayım, doğruluğu tam olarak gösterilmemiş fakat mantıklı görünen bir durumdur. Varsayımın, tahmin, hipotez, sanı şeklinde birçok eş anlamı bulunmaktadır. Varsayım, TDK'da (2015) deneylerle henüz bireyi ikna edecek derecede doğrulanmamış ancak doğrulanacağı sanılan teorik düşünce şeklinde ifade edilmiştir. Varsayımda bulunma ise düşünme sonucu gerçekleşen bir fiildir. Varsayımda bulunma matematiğin omurgasını oluşturmaktadır (Mason, vd., 2010).

Özelleştirme ve genelleme süreçlerinde farkında olmadan veya farkında olarak kullanıp uyguladığımız varsayımda bulunma ise, bir önermenin doğru olabileceğini tahmin ederek doğruluğunu araştırma sürecidir. Varsayımda bulunma sürecinde sayısal veya sözel matematiksel olarak tahminde bulunma, matematiksel iddiaları formüle etme, önermelerden sonuç çıkarma, hipotez kurma ve test etme gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, vd., 2013). Varsayımda bulunma ile matematiksel düşünme yaparak sorunun doğru olduğu hissine sahip olunmaktadır (Mason, vd., 2010). Daha sonra ise varsayımın niçin doğru olduğuna veya varsayım yanlış ise onun nasıl düzeltileceğine incelenir. Eğer varsayımda düzeltme veya değiştirilme yapılamıyorsa yeni bir varsayımda bulunulur. Bu şekilde döngüsel bir süreç takip edilir (Arslan ve Yıldız, 2010).

2.5.4. İspat

İspat, yaygın anlamıyla da bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2012). Bu çaba ise insanlığın varoluşundan beri kullanılmıştır. Çünkü bilimde çoğu icat buluş ve teoremler ortaya atıldıktan sonra hep bir doğrulama ispatlama çabası içerisinde olunmuştur. Günümüz de bile bilimsel ispatın yanı sıra gündelik hayatımız da bizi sevdiğini düşündüğümüz birine "beni seviyor musun?" diye sorduğumuzda, belirli ispat yöntemlerini (evet seviyorum, çünkü seni üzmüyorum (doğrudan) veya sevmesem seninle konuşur muydum (dolaylı), diyelim ki sevmiyorum o halde sana şunu almazdım... gibi (olmayana ergi) kullanarak bize cevap verdiğini görmüşüzdür. Yargılama sürecinde sanığın suçunu ya da suçsuzluğunu kanıtlamaya yönelik tartışmalarda tipik ispatlama girişimleridir (Yıldırım, 2012).

İspat kavramını matematiğe Antik Yunanlılar getirmiştir. İspatın ilk kullanımı genellikle M.Ö 6. yüzyılda yaşamış Miletli Thales'e dayandırılmaktadır. M.Ö 5. yüzyılda yaşayan Pisagor, bir veya birkaç önermeden mantık yoluyla yeni önermeler üretmek anlamına gelen dedüksiyon yöntemini kullanmış, M.Ö 4. yüzyılda yaşayan Hippocrates ''Elements of Geometry'' kitabında teoremleri kendinden öncekilerden çıkarılacak biçimde mantıksal sıraya koymuştur. M.Ö 3. Yüzyılda yaşayan Euclid ise aksiyomlara dayalı ispat kavramını getirmiştir. Bugün aslında matematiğin bütün dalları aksiyomatik sisteme dayanmaktadır (Bloch, 2011).

TDK'ya (2014) göre "usa vurma, muhakeme, bir şeyin doğruluğunun gösterimi" dir. Usa vurma; bilinen veya doğru olarak kabul edilen belirli önermelerden başka önermeler çıkarma olarak tanımlanmaktadır. Muhakeme ise, bütün faktörleri dikkate alarak düşünüp mantıklı bir sonuca ulaşma sürecidir (Umay, 2003). Matematikte muhakeme ve onun alt ve daha özelleşmiş bir kavramı olarak da ispat öne çıkmaktadır (Arslan ve Yıldız, 2010). Ayrıca insanın diğer canlılardan ayrılan en önemli vasfı; muhakeme yapabilme yeteneğidir (Umay, 2003).

Matematiğin yapı taşlarından biride ispattır. Çünkü ispatlar öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasını ve sonuçların akla daha yatkın olmasını sağlamaktadır. Ayrıca, matematiksel düşünce yapısını geliştirmektedir (Gökkurt ve Soylu, 2012). Matematiği diğer bilim dallarından ayıran en önemli özelliklerden bir tanesidir (Hanna ve Jahnke, 1996).

Kayagil (2012) bir ispatın iki şekilde yapılabileceğini belirtmiştir, ilki bir ifadenin doğruluğunun gösterimi, diğeri ise bir ifadenin neden doğru olduğunun açıklanması şeklindedir. Matematikte, bir önerme, teorem ya da bir ifadenin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verme ispat yapma adı verilen bir süreç sonrasında olur (Yeşildere vd., 2006). Matematik soyut bir kavram olup temeli aksiyom ve teoremlere dayandırılarak oluşturulmuştur ve her bir teoremin bir ispatı vardır veya ispatlanmaya çalışılmıştır, doğruluğu ispatlanmadığı takdirde ise bir sorunla karşılaşıldığının farkına varılıp yeni keşiflere bir nevi yelken açılmıştır. Örneğin; $\sqrt{2}$ gibi irrasyonel sayıların ortaya çıkması matematiksel bunalımın giderilmesi yolunda ki çalışmalar, mantıksal ispat yönteminin belirginlik kazanmasında başlıca etkenlerden biri olmuştur ve Eudoxus $\sqrt{2}$ nin rasyonel bir sayı olmayacağına verdiği yöntem bir ispattır (Yıldırım, 2012). O halde İspat ve ispatlama hem matematiksel düşünmenin (ve tabi ileri matematiksel düşünmenin) geliştirilmesinde hem de matematik yapmada, matematiksel bilginin yapısını, doğasını, tarihsel gelişimini kavramada, matematiksel nesnelerin türlerini, geliştirilme yollarını, bireyler ve toplumlarca ne şekilde paylaşıldığını algılamada merkezi bir öneme sahiptir (Uğurel ve Moralı, 2010).

O halde matematiksel ispat, teorimi ya da problemi çözmekten ziyade matematiğin doğasını anlamak için kullanılıp ve olayın, problemin veya teoremin nedenini, niçinini bilmek için yapılan adımlar diyebiliriz. Aynı zamanda matematiksel ispat bireylerin matematiksel kavramları, çözümleri daha iyi anlamalarını sağlamaktadır (Hersh, 1993).

İspat matematiğin öğrenilmesinde ki öneminin yansıra (Knuth, 2002) matematiksel düşünme için de önemlidir. İspatlama yapılırken, bir önermeyi izah etme, niçin doğru veya yanlış olduğunu açıklama, farklı mantıksal düşünme yollarını ve ispat çeşitlerini belirleme, kullanma gibi fiillerden bahsedilmektedir.

İspat öğrenciye birçok beceri kazandırmaktadır. Bunlardan bazılarını, ispat sürecinde öğrenciler formül ve kuralların son durumlarının yeterli olmadığını ve açıklanması gerektiğini öğrenirler, ispat ile öğrenciler matematiksel bilginin gelişmesinde ve kolay ilerlemesinde aktif rol üstlenirler, matematiksel bilginin daha iyi anlaşılması gerçekleşir, matematikçilerin problemleri çözerken yaptığı işlemlerin ne anlama geldikleri daha net ve açık bir şekilde anlaşılır olur, matematiksel bilgiler olgunlaşır, öğrencilerin kritik düşüncelerinde ilerleme gerçekleşir ve problem çözme sırasında yeni strateji ve yöntemler geliştirirler… şeklindedir (Fawcett, 1938; Kitcher, 1984; Hanna, 1991; Rav, 1999; Güven vd., 2005; Stylianides, 2007; İmamoğlu, 2010; Doruk ve Kaplan, 2013).

Yeşildere ve diğerleri (2006) ise matematiksel ispatın önemini öğrencilerin öğrenmeleri beklenen matematiksel bilgilerin dayanaklarını anlamaları öğrenmeyi kalıcı hale getirmelerinde yararlı olacak, kendilerine verilen bir problem için geliştirdikleri çözüm yolunu matematiksel ifadelerle savunmalarına da katkıda bulunacağını söylemiştir.

Matematiksel ispatlar üç aşamada gerçekleşmektedir. Bu aşamalar; doğrulama, açıklama ve soyutlama şeklindedir (Baki, 2008). İlk aşamada savın doğruluğu incelenir, fakat genel olarak “ne” sorusunu cevaplandırmak kolayken, ”neden” sorusu diğerine göre zordur (Hacısalihoğlu, vd., 2003; Mason vd., 2010). İkinci aşamada, savın “neden doğru” olduğu söylenir. Doğru olduğuna inandığımız düşünceleri kendimize ve daha önemlisi başkalarına ayrıntılı bir şekilde açıklamalıyız. Bunlar tahminlerimizin, varsayımlarımızın doğru bir şekilde ilerlemesine ve oluşmasına katkı sağlarlar. Son aşamada ise, matematiksel dil ile genelleme koşulları kontrol edilir ve en kısa yoldan soyutlama eylemi gerçekleştirilir (Baki, 2008).

Balacheff (1987, 1988a, 1988b) ise matematik de ispatı, pragmatik ispat, entellektüel ispat ve demonstrasyon olmak üzere üç seviyeye ayırmıştır. Bu seviyeler;

en alt seviye ‘pragmatik ispatlar’, örnek vererek yapılan gösterimler, orta düzey ‘entellektüel ispat’, formülasyona dayalı olarak yapılan ispatlar ve en ileri seviye ‘demonstrasyon’, bir teoriyle organize edilmek zorunda olan veya bir topluluk tarafından kabul edilen bilgileri kullanan ispatlardır.

Miyazaki (2000) ise ispatı, ispat A, ispat B, ispat C ve ispat D olarak dört gruba ayırmıştır. Bu gruplar ise; tümdengelimsel muhakeme içeren, demonstrasyonun fonksiyonel dili kullanılan ispatı ispat A, tümdengelimsel muhakeme içeren, diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objeler kullanılan ispatı ispat B, tümevarımsal muhakeme içeren, diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objeler kullanılan ispatı ispat C, tümevarımsal muhakeme içeren, demonstrasyonun fonksiyonel dili kullanılan ispatı, ispat D olarak belirtmiştir (Akt: Özer ve Arıkan, 2000).

Tablo 2.2. Miyazaki’nin İspat Düzeyleri

İçerikler / Gösterim	Tümevarımsal Muhakeme	Tümdengelimsel Muhakeme
Fonksiyonel dilin kullanılması	İspat D	İspat A
Diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objelerin kullanılması	İspat C	İspat B

Literatür incelendiğinde Matematikte kullanılan birçok ispat teknikleri (yöntemleri) de bulunmaktadır; Bu ispat tekniklerini; Tümdengelim **(**1-doğrudan ispat, 2-dolaylı ispat, 3-olmayana ergi,4-çelişki bulma),Tümevarım (MEB, 2005) şeklinde sınıflandırmıştır.

Yapılan çalışmalarda ise olmayana ergi ile çelişki bulma durumunu eş bulmuşlardır. O halde ispat teknikleri doğrudan ispat, ters durum ispatı, olmayana ergi (çelişki) yöntemiyle ispat, tümevarım yöntemiyle ispat olmak üzere 4 ana başlık altında toplanabilir (Topkaya, 2013).

Doğrudan ispat; bilinen veya bize teoremde verilen bilgileri kullanarak istenilen sonuca ulaşmaya çalışılan bir tekniktir.

<u>Önerme</u>; Bir tek ve bir çift tamsayının toplamı tektir (Bloch, 2011).

<u>İspat</u>**:** Önce m ve n gibi iki tane tamsayıyi göz önüne alalım. Önermede de belirtildiği gibi bunlardan birinin tek, diğerinin çift olduğunu kabul ederek, toplamlarının tek olduğunu göstereceğiz.

k bir tamsayı olmak üzere; m-tek ve n-çift tamsayılarını oluşturalım; m=2k+1 ve n=2k olsun.

Şimdi ise (m+n)'nin tek olduğunu gösterecek olursak;

m + n = 2k + 1 + 2k

m + n = 4k + 1 $(k \epsilon Z)$

olduğundan, 4k'nın da çift olduğu bilindiğine göre m + n tektir. İspat tamamlanır.

Dolaylı ispat (ters durum ispat); Bize verilen kabullerden yararlanarak istenileni bulmak yerine, istenilenin olmaması durumunda, kabullerimizin de olmayacağını göstermeye dayanan bir ispat tekniğidir.

Önerme; Eğer bir x sayısı pozitif ise ardışığı da pozitiftir.

İspat: Bizden önermede $x > 0$ ise $x + 1 > 0$ olduğunu göstermemizi istiyor. Ters durum ispat tekniği ile bunu ispatlayalım. Önermenin tersini alırsak önermemiz $x \leq 0$ ise $x + 1 \leq 0$ şekline dönüşmüş olur. O halde;

$x + 1 \leq 0 \rightarrow x + 1 - 1 \leq 0 - 1$

$\rightarrow x \leq -1$

$\rightarrow x \leq -1 < 0$ ($-1 < 0$ olduğu açıktır.)

$\rightarrow x \leq 0$

$x + 1 \leq 0$ ise $x \leq 0$ şartını sağladığını gösterdik. Böylece $x > 0$ olduğunda $x + 1 > 0$ olduğunu da göstermiş olduk. İspatımızı tamamladık.

Olmayana ergi (çelişki) yöntemiyle ispat; Bu ispat tekniğinde hipotez aynen alınırken, hükmün bir parçası olumsuz alınır ve bir çelişki ortaya çıkarılır. O zaman yanlışın baştaki kabule dayandığı söylenerek ispat yapılır.

Önerme; $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını gösterelim.

İspat; Önermede bizden $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel bir sayı olmadığını göstermemiz isteniyor. Olmayana ergi yöntemi ile ispat yapalım. a ve b aralarında asal sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere ; $\frac{a}{b}$ rasyonel bir sayı olsun. Önermemize göre hükmümüz $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ olduğunu ifade ediyor. Çelişki yöntemiyle ispat tekniğine göre hükmümüzü olumsuz kabul edelim. Yani $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ olsun. O halde;

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{a}{b})^2$

$\rightarrow 2 = \frac{a2}{b2}$

$\rightarrow 2b^2 = a^2$

$\rightarrow a^2$ çifttir. (a^2 çift ise a da çifttir.)

$\rightarrow$ a çifttir. ($k \varepsilon$ Z olmak üzere, a = 2k alırsak)

$\rightarrow a = 2k$ ($k \varepsilon$ Z)

$\rightarrow a^2 = 4k^2$, (bu sonucu $2b^2 = a^2$ yerine yazarsak.)

$\rightarrow 2b^2 = a^2 = 4k^2$

$\rightarrow 2b^2 = 4k^2$ (eşitliğin her iki tarafını ikiye bölelim.)

$\rightarrow b^2 = 2k^2$

$\rightarrow b^2$ çifttir. (b^2 çift ise b de çifttir.)

$\rightarrow$ b çifttir.

Burada a ve b'nin birer çift tamsayı olduğu görülür. Bu a ve b'nin aralarında asal kabul edilmesi ile çelişkidir. O halde $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı değildir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Tümevarım yoluyla ispat; ispatın yapılacağı kümede, eleman sayısının sayılabilir sonsuzlukta olması durumunda, bir p özelliğinin "n=1" için doğru olduğu gösterilir. Sonra "n=k" için özelliğin doğru olduğu kabul edilir ve "n=k+1" için özelliğin ispatı yapılır. Açıklayacak olursak "k" yı en kötü durumda "1" olarak ele aldığımızda ve "1" için ispatın gerçekleştiğini göstermiş olduğumuzdan, önermenin "k" için doğru olduğunu kabul etmemiz yanlış bir kabul olmayacaktır. Sonra "k+1" için sağlandığını ispatladığımızdan "2" için de sağlandığı gösterilmiş olur. Bu sefer "2" için sağlandığından, "k" yı "2" gibi düşünürsek "k+1" yani "3" için de ispat sağlanacak, "3" için sağlandığından yine aynı mantıkla "4" için de sağlanacaktır. Bu şekilde genel bir ispat yapılmış olacaktır. İlk başlangıç adımının her zaman "1" olması zorunlu değildir, "3" ten büyük tamsayılar için önermenin sağlandığını gösterin" gibi bir durumda başlangıç adımını "3" gibi bir sayı da seçebiliriz. Sonra yine aynı şekilde "k" için doğru olduğunu kabul edip,"k+1" için doğruluğunu göstererek ispatı genelleriz (Topkaya, 2013).

<u>Önerme</u>; 1 + 3 + 5 + … + 2n – 1 biçiminde ki sayıların toplamının $n \epsilon Z^+$ her biri için n^2 olduğunu gösteriniz? (Day, 2015).

İspat; Tümevarım tekniği ile ispatı yapılabilen toplam serileri üzerine iyi bilinen örneklerden birisidir. Tekniğe göre ilk adım olarak "1" için önermenin doğruluğunu göstermek ile başlanır.

$n = 1$ için: bakacak olursak, serinin toplamı 1 olacaktır. Sonuçta

$1 = 1^2$ olduğundan,

$n = 1$ için önerme doğrudur.

$n = k$ için önerme doğru olsun: Yani;

$1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 = k^2$ (*)

olur. $n = k + 1$ için: önermenin doğru olup olmadığını göstermek için;

$1 + 3 + 5 + \ldots + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2$ (**)

İfadesinin doğru olduğunu göstermeliyiz. Şimdi (**) eşitliğinin sol tarafında ki en son terimden bir önceki terimi yazalım.

$1 + 3 + 5 + \ldots 2k - 1 + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2$ (***)

Eşitliğinin doğru olduğunu göstermek istiyoruz. (*) da ki kabulümüzden dolayı;

$1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 = k^2$ olduğunu biliyoruz. Bunu (***) denklemimiz de yerine yazarsak;

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1}_{k^2} + 2(k + 1) - 1 = k^2 + 2(k + 1) - 1$$

olur. Böylece;

$k^2 + 2(k+ 1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

olarak buluruz. Böylece önermenin k için doğru olduğunu kabul ederek $k + 1$ için de sağlandığını göstermiş olduk.

2.6. İlgili Yayın ve Araştırmalar

Bu bölümde araştırmayla ilgili olduğu düşünülen yurt içinde ve dışında yapılan araştırmalara, bu araştırmaların bulgu ve sonuçlarına yer verilmiştir.

2.6.1 Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Literatür taraması sonucuna yurt içinde yapılan çalışalar matematiksel düşünme ve boyutları aşağıda alt başlıklar halinde yazılmıştır.

2.6.1.1. Matematiksel Düşünme İle İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Keskin vd., (2013) çalışmasında sekizinci ve on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarındaki yaşantı farklılıklarını incelemiştir. Bu doğrultuda 14 sekizinci sınıf ve 11 on birinci sınıf öğrencisine matematiksel düşüncenin üzerinde durulan aşamalarını içeren 2 çalışma yaprağı uygulanmıştır. Veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Çalışma yapraklarından ve uygulama sırasında yapılan gözlemlerden elde edilen sonuçlar; sekizinci sınıf öğrencilerinin daha fazla olmakla birlikte her iki grubun da ispat aşamasına doğru ilerledikçe kendilerini hem matematiksel olarak hem de sözel olarak ifade etmek de zorlandıklarını sonucu görülmüştür.

Arslan ve Yıldız (2010) çalışmasında, nitel araştırma yaklaşımı kullanılarak 11. sınıf öğrencilerinin, matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Matematiksel düşünmenin aşamalarını uygulamasında kullanan ve her biri dokuzar sorudan oluşan çalışma yaprakları geliştirilmiş ve 24 ortaöğretim öğrencisine uygulamıştır. Çalışmanın sonuçlarında matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat aşamalarında sırasıyla ilerledikçe öğrenci başarısının azaldığı görülmüştür. Bu bakımından, öğrencilerin özelleştirmede iyi performans sergiledikleri, ispatlamada ise büyük sıkıntı çekmektedirler. Ayrıca, genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında öğrencilerin cevaplarının sözel ve cebirsel, ispatlama aşamasında ise aritmetik, geometrik ve cebirsel kodları altında toplandıkları belirlenmiştir.

Bulut (2009), araştırmasında İşbirliğine Dayalı Yapılandırmacı Öğrenme Ortamlarında Kullanılan Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin (BCS) , Üniversite birinci sınıf "Genel Matematik" dersindeki türev uygulamaları konusunun öğretiminde öğrencilerin akademik başarı, matematiksel düşünme, kavramsal anlama, işlemsel beceri, problem çözme becerileri ve cinsiyet farkı üzerindeki etkisini incelemiştir. Araştırmanın örneklemini İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nın birinci sınıflarından bir şube oluşturmuştur. Genel matematik konularına yönelik hazır bulunuşlukları, matematiğe yönelik ön tutumları ve cinsiyet bakımından birbirine denk seviyede olacak şekilde sınıf iki gruba ayrılarak deney grubu ve kontrol grubu oluşturmuştur. Deney grubunda 22 öğrenci, kontrol grubunda 21 öğrenci almıştır. BCS' nin etkisini gözlemlemek amacıyla deney grubuna yapılandırmacı yaklaşıma dayalı

BCS (Maple) destekli öğretim yapılırken kontrol grubuna sadece yapılandırmacı yaklaşıma dayalı öğretim yapmıştır. 7 haftalık (42 ders saati) uygulama sonucunda son test ve son tutum ölçekleri uygulamıştır. Elde edilen nicel veriler uygun analiz edilerek yorumlamıştır. Son test sonuçları genel olarak değerlendirildiğinde deney grubundaki öğrencilerin kontrol grubundakilerden istatiksel olarak daha başarılı olduğu ortaya çıkmıştır. Son test sonuçları alt boyutlarına göre incelendiğinde ise grupların kavramsal anlama ve problem çözme becerisini gerektiren sorularda birbirine yakın ortalamalara ulaştıkları, işlemsel becerileri ölçen sorularda ise BCS desteğinden yararlanan deney grubu lehine anlamlı bir farklılık olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin matematiğe yönelik tutumları incelendiğinde ise deney ve kontrol grubunun arasında az bir fark olsa da istatistiksel olarak matematiğe yönelik tutumlarının aynı kaldığını görmüştür. BCS desteğinin matematiğe yönelik tutuma anlamlı düzeyde olumlu bir etkisinin olmadığı belirlemiştir. "Genel Matematik" dersinde türev kavramının uygulamalarının öğretiminde BCS destekli öğretimin, öğrencilerin akademik başarılarını, işlemsel becerilerini ve matematiksel düşünmelerini pozitif yönde etkilediği saptamıştır.

Taşdemir (2008) araştırmasında yapılandırmacı öğrenme temelli matematiksel düşünme etkinliklerini içeren öğretim ile yapılandırmacı öğrenme ve normal öğretimini devam ettiren grupların akademik başarı, tutum ve problem çözme becerileri üzerine etkilerini araştırmıştır. Ayrıca matematiksel düşünme becerileri farklı düzeydeki öğrencilerin problem çözme yaklaşımlarını ve problem çözümlerindeki hata kaynaklarını belirlemeye çalışmıştır. Araştırma sonucunda; matematiksel düşünme etkinliklerini içeren yapılandırmacı temelli öğretimin öğrencilerin akademik başarılarını, tutumlarını ve problem çözme becerilerini geliştirmede ve bunun devamının sağlanmasında önemli bir etkisinin olduğu belirlenmiştir. Bunun yanında deney grubu öğrencilerinin bilişsel düzeyde kavrama ve uygulama düzeyindeki sorularda diğer grup öğrencilerinden daha yüksek oranda doğru sonuca gittiği ayrıca tüm problemlerde kavramsal bilgi, işlemsel bilgi, akıl yürütme ve iletişim becerilerini yüksek düzeyde kullandıkları ve bu becerilerinin birbirini destekler nitelikte olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca Fen ve Teknoloji dersi sorularında matematiksel süreçleri ileri seviyede kullanan öğrenciler problem çözme süreçlerini etkin olarak kullanmışlardır. Problemlerde matematiksel süreçleri orta ve düşük düzeyde sergileyen öğrenciler; problemi kısmen tanıyıp belirlemişler, problem çözümünde büyük kavram ve hesap hataları yapmışlar ve matematiksel akıl yürütme ve formülasyon kullanmadan sezgisel çözüm kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Fen problemlerinde matematiksel süreçleri gösteremeyen öğrencilerin ise bilgiyi düzenleme ve matematik kavramları arasındaki ilişkiyi bulmaya yönelik belirgin çabalarının olmadığı görülmüştür.

Bukova Güzel (2008) araştırmasında yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine olan etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırma kontrol gruplu ön test-son test modeline dayalı yarı deneysel bir çalışmadır. Deney ve kontrol grupları Analiz-I dersini alan matematik öğretmen adayları arasından seçilmiştir. Deneklerin matematiksel düşünme süreçlerinin karşılaştırılmasında açık-uçlu problemler kullanılmıştır. Verilerin analizinden, yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının, matematiksel düşünme süreçlerine daha fazla katkı sağladığı görülmüştür. Deney grubu deneklerinin tahmin etme, genellemeleri ve hipotezleri doğrulamak için matematiksel modeller oluşturma, bu modeller arasında bağlantı kurmada kontrol grubu katılımcılarına göre daha başarılı oldukları ortaya çıkmıştır.

Yeşildere (2006) çalışmasında farklı matematiksel güce sahip ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçlerini incelemiştir. Matematiksel gücü yüksek ve düşük olan öğrencilerin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçleri birbirleriyle karşılaştırılarak öğrencileri matematiksel olarak güçlü yapan yönler tartışılmıştır. Matematiksel güç ölçeğinden elde edilen veriler öğrencilerin matematiksel güçlerinin düşük olduğunu göstermiştir. Bunun sebebini ise öğrencilerin soruda var olan bilgilerden değil öznel görüşlerine dayanarak usa vurmaları, düşüncelerini ispatlayarak ve açıklamalar yaparak ifade edememeleri ve var olan bilgiler arasında ilişkilendirme yaparak problemleri çözmemeleri olarak özetlenmiştir. Ayrıca farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin matematiksel düşünme ve bilgi elde etme yolları arasında bazı farklılıkların olduğu görülmüştür. Düşük matematiksel güce sahip öğrencilerin bilgi oluşturmada yavaş ve sorunlu bir süreçten geçtikleri gözlemlenirken; yüksek matematiksel güce sahip öğrencilerin önceden oluşturulan bilgileri tanımada, kullanmada ve oluşturmada daha başarılı oldukları görülmüştür.

Alkan ve Bukova Güzel (2005) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmen adaylarının MD gelişimini ölçmek amaçlanmıştır. Çalışmanın katılımcılarını, 2003-2004 öğretim yılında BEF Matematik Öğretmenliği birinci sınıfında öğrenim gören 64 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırma iki adımdan oluşmuştur. İlk adımda öğretmen adaylarının MD gelişimini ölçmek için bir araç geliştirilmiştir. İkinci adımda ise matematik öğretmen adaylarının, ön öğrenmelerinde var olduğu belirlenen eksiklikleri ortadan kaldırılmaya çalışılmış ve daha sonra oluşturulan ölçme aracında yer alan problemleri çözmeleri istenmiştir. Katılımcıların çözüm yaklaşımları, MD ölçütlerine uygun biçimde gruplandırılarak incelenmiştir. Problemleri çözme sırasında iyi olanların ortaya çıkması için, MD ölçütleri göz önüne alınarak geliştirilen dereceli puanlama anahtarı (rubric) kullanmıştır. Ölçüm verileri çözümlenerek, örneklemi oluşturan değişik gruplar arasında var olan benzerlik ve farklılıklar bulunmaya çalışılmış ve yorumlanmıştır. Çözümleme sonuçları, genel anlamıyla öğretmen adaylarının MD gelişmişliğinin düşük seviyede olduğunu ortaya çıkarmıştır. MD'nin seviyesi bakımından gruplar arasında anlamlı farklılıklar gözlenmiştir.

Umay (1992) tarafından yapılan çalışmada matematikte yalnızca sonucun değil, sürecin de ölçülmesinin, problem çözme becerisinin geliştirilmesine matematik öğretimi yönünden katkı getirebileceği görüsünden yola çıkarak 81 lise öğrencisi üzerinde problem çözme sürecini ölçen test ve doğrudan sonucu yoklayan testler arasında bir karşılaştırma yapmayı amaçlamıştır. Matematiksel düşünmede, problemi çözüp sonucu bulmanın, aynı problemin çözüm sürecini izlemekten daha kolay bulunduğu anlaşılmıştır. Ayrıca sonucu doğru olarak bulabilen pek çok kişinin süreci aynı doğrulukla izleyemedikleri ve matematiksel düşünme sürecinin çoktan seçmeli testlerle de ölçülebileceği sonuçlarına ulaşılmıştır.

Yapılan çalışmalardan görüldüğü üzere matematiksel düşünmenin problem çözme beceresine etkisi, MD gelişimi ve MD'nin boyutları üzerine araştırmalarda bulunulmuştur.

2.6.1.2. Özelleştirme İle İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Bu boyuta özel ayrıca yapılmış bir çalışmaya rastlanmamıştır.

2.6.1.3. Genelleme İle İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Çayir (2013) çalışmasında Balıkesir ili merkezinde öğrenim gören, temel eğitimini tamamlamış olan 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel genelleme problemlerini çözme başarıları cinsiyet ve okul türü değişkenleri açısından incelenmiş ve bu öğrencilerin hangi genelleme stratejilerini kullandıkları belirlenmiştir. Araştırmada nitel ve nicel araştırma yöntemleri kullanılmıştır. 9. Sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme başarılarının cinsiyet ve okul türü değişkeni açısından incelenmesini betimlemek amacıyla tarama yöntemi kullanılmıştır. 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözerken kullandıkları genelleme stratejilerinin belirlenmesi amacıyla verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemlerinden içerik analizi tekniği benimsenmiştir. Araştırmada farklı okullarda okuyan 425 tane 9. sınıf öğrencilerinin genelleme problemlerini çözme başarıları Cebirsel Problem Çözme Testi ile belirlenmiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin cebirsel genelleme problemlerini çözme başarıları arasında cinsiyet değişkenine göre anlamlı bir fark yokken, okul türü değişkeni bakımından anlamlı bir fark gözlemlemiştir. Tüm problemlerde öğrenci başarı düzeyleri, kuralı bulma ve örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme strateji seçimlerinde etkili bir rol oynamıştır. Ortalamanın üstünde matematiksel yeteneklere sahip olan öğrenciler problemleri çözerken çeşitli yaklaşımlar sergileyebilmişlerdir. Ayrıca öğrenciler, yakın ve uzak terimleri ya artarda sayıları yazarak ya da terimler arasındaki farkı bulup bir önceki terime ekleyerek elde etmeye çalıştığından, bu öğrenciler yakın terimi bulmada uzak terimi bulmaya göre daha başarılı olmuşlardır. Araştırma verileri öğrencilerin uzak terimleri bulma problemlerinde yetersiz olduğunu göstermiştir. Araştırmada ayrıca öğrencilerin çoklu temsil biçimlerini (grafik, tablo, sembol) kullanmayı tercih etmedikleri ve bu temsil biçimlerini etkin bir şekilde kullanamadıkları görülmüştür.

Akkan ve Çakıroğlu'nun (2012) çalışmasının amacı 6-8. sınıf öğrencilerinin doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerle ilgili genelleştirme stratejilerini belirlemek ve karşılaştırmaktır. Araştırma 6, 7 ve 8. sınıfta eğitimine devam eden gören toplam 18 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Veri toplama aracı 4 sorudan oluşmuştur. Elde edilen veriler, önceden var olan çalışmalardaki genelleştirme stratejileri dikkate alınarak gruplandırılmıştır. Veri toplama aracında ki 4 sorudan ilk ikisi doğrusal örüntü, diğer ikisi ise ikinci dereceden örüntü problemidir. Ayrıca her problem kendi içinde dört ayrı alt probleme ayrılmıştır. Sonuç olarak doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerin tümünde, 6-8. sınıf öğrencilerinin öğrenim seviyesi arttıkça örüntü genelleştirme stratejilerindeki çeşitlilik ve doğru genellemeye ulaşma yeterliliklerinin arttığı görülmüştür. Öğrenciler genel olarak yinelemeli veya eklemeli stratejiyi kullanırken, fonksiyonel stratejiyi kullanan öğrencilerin sayısı oldukça azdır.

Biber ve Argün (2012) yaptıkları çalışmada; matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların limiti kavram bilgisi yardımı ile yürüttükleri soyutlama ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmeyi amaçlamışlardır. Çalışmanın katılımcılarını bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alan Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı ikinci sınıfında öğrenim gören 52 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilere açık uçlu soruları içeren bir anket uygulanmıştır. Çalışmanın analizinde ise konu ile bağlantılı üç soruya öğrencilerin verdikleri cevaplar incelenerek yapılmıştır. Sonuç olarak, adaylar var olan bilişsel yapılarını ve düşüncelerini koruyarak kullandıkları genellemelerde oldukça başarılı olabilmektedirler. Ancak adayların tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitini bulabilmek için kullandıkları hiç bir yöntemin, iki değişkenli bir fonksiyonun limitinin incelenen nokta etrafında yapılacak her türlü yaklaşım şeklinden bağımsız olması gerektiği düşüncesine ulaşmada adaylara yardımcı olmadığı tespit edilmiştir.

Tanışlı ve Köse (2011) çalışmalarında sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme stratejilerini incelemişlerdir. Çalışmanın örneklemeni toplam 16 sınıf öğretmeni adayı oluşturmuştur. Araştırma verilerinin toplanmasında, nitel araştırma yöntemlerinden biri olan klinik görüşme tekniği kullanılmış ve görüşmeler video kameraya çekilmiştir. Verilerin analizi nitel olarak gerçekleşmiştir. İncelemeler sonucunda, bazı öğretmen adayları lineer şekil örüntüsünü yakın/uzak bir adıma devam ettirmede ve örüntünün kuralını belirlemede sadece şeklin yapısına odaklanılan görsel ve şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürüldüğü sayısal yaklaşımı benimsemişler, bu yaklaşımlar altında da toplam 26 strateji kullanmışlardır. Örüntüleri genellerken adaylar sayısal yaklaşım altında sadece terimler arası ilişkinin araştırıldığı yinelemeli, görsel yaklaşım altında ise hem yinelemeli hem de değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı fonksiyonel stratejileri kullanmışlardır.

Baş, Erbaş ve Çetinkaya'nın (2011) çalışması Cebirsel düşünme üzerinden gidilmiştir. Çalışmalarının amacı, ortaöğretim matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin cebirsel düşünme yapıları üzerindeki bilgi ve düşüncelerini belirlemek ve bu bilginin gerçekte öğrencilerin düşünme yapılarını ne ölçüde yansıttığını belirlemektir. Araştırmanın katılımcıları, 49 dokuzuncu sınıf öğrencisi ve 3 matematik öğretmenidir. Çalışmada ilk olarak öğrencilerin, bir genelleme etkinliği üzerinden cebirsel düşünme yapıları belirlenmiş, daha sonra öğretmenlerin bu düşünme yapısı üzerine bilgileri ve beklentileri araştırılmıştır. Veriler, öğretmenlerle yapılan görüşmeler ve öğrencilerin çözüm kâğıtlarından oluşmaktadır. Verilerin incelenmesi ardından, öğretmenlerin ve öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili beklentileri ile öğrencilerin gerçek başarıları arasında önemli farklar olduğu, fakat cevap kağıtlarını sistemli bir şekilde incelediklerinde, öğretmenlerin ve öğrencilerin düşünme yapılarını daha iyi anladıkları görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel düşünme yollarıyla ilgili neticeleri genel olarak incelendiğinde dikkat çeken sonuçlardan biri öğrencilerin farklı sorulara değişik çözüm stratejileriyle yaklaşmaları olmuştur. Araştırmanın sonucuna göre ise öğrenciler aritmetik düşünme eğilimindedirler.

Yeşildere (2011) bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerindeki, genelleme süreçlerini incelemek ve bu ilerlemede model kullanımında seçtikleri görsel kalıplar belirlenmiştir. 145 ilköğretim matematik öğretmen adayına lineer olan ve lineer olmayan şekil örüntülerini genellemeye yönelik dört tane açık uçlu soru yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının problemlere verdikleri cevaplar, örüntüyü, genelleme süreçleri ve şekil örüntülerini bu süreçte nasıl kullandıkları incelemeye yöneliktir. Cebirsel genelleme sürecinin analizinde Radford (2006) tarafından ortaya konulan kuramsal çerçeve kullanmıştır. Çalışmanın incelenmesi sonucunda ise öğretmen adaylarının genelleme sürecinde lineer şekil örüntülerinden lineer olmayanlara göre daha fazla faydalandıkları görülmüştür.

Yeşildere ve Akkoç (2010) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebirsel genelleme stratejilerini belirleyen çalışmalarında 147 öğretmen adayına beş tane açık uçlu örüntü problemi sormuştur. Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüler içeren sorularda örüntülerin genel terimlerini bulmayı amaçlamıştır. Öğrencilerin yanıtları incelerken ise; matematiksel modelleri kullanmaları, bunları uygularken kullandıkları stratejileri ve açıklamaları dikkate almıştır. Bunun yanında, seçtikleri stratejilerin problemlerin zorluğuna göre nasıl çeşitlendiği de incelenmiştir. Verilerin analizi sonucu; öğretmen adaylarının en fazla kullandığı stratejinin, elde edilen bir kural yardımıyla istenen bir basamaktaki eleman sayısının çabuk bir şekilde hesaplanmasını sağlayan strateji olduğunu ortaya koymuştur. Bununla birlikte, birçok örüntü çalışmasında vurgulanan, terimler arasındaki sabit farklara dayanarak kurallar yazma durumu da görülmüştür. Örüntülerin doğrusal olmadığı zamanlarda bu stratejilerin kullanılamaması öğrencileri tekrarlı stratejiye yöneltmiştir. Bu strateji de öğrencilerin bir sonraki terimi bulmalarını sağlarken, örüntünün genel yapısını görmelerini engelleyen bir durum oluşturmuştur. Bir diğer sonuç da, öğretmen adaylarının görsel modelleri sadece bir aksesuar gibi kullanmaları ve bu modellerden örüntülerin genel terimlerini bulmakta yararlanmamaları olarak ifade edilmiştir.

Olkun, Şahin, Akkurt, Dikkartın ve Gülbağcı (2009) ilköğretim 3. 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin rutin olmayan sözel toplamsal bir problemi çözerken modelleme ve genelleme sürecini incelemesini yapmışlardır. Araştırma yöntemi olarak kontrol grubu olmayan deneysel yöntem kullanılmıştır. Çalışmanın evrenini 7 farklı ilköğretim okulundan toplam 278 öğrenci ile oluşturmaktadır. Öncelikle öğrencilere rutin olmayan bir problem sorulmuş ve ön başarı seviyeleri tespit edilmiştir. Daha sonra benzer fakat daha küçük sayılar içeren problemleri modellemeye dayalı bir etkinlik çalışma kâğıdı uygulanmıştır. Son olarak ilk problemin eş yapı ve zorluk düzeyinde ayrı bir soru sorulmuştur. Bu tip bir soru öğrencilerin başarı düzeylerinin oldukça düşük olduğunu göstermiştir. Deneysel müdahale sonucunda yalnızca 5. sınıflar önemli ölçüde bir gelişme kaydetmişlerdir.

Gençmehmetoğlu (2009) tarafından yapılan araştırmada ilköğretim sekizinci sınıf İnkılâp Tarihi Dersinde yer alan olgu, kavram ve genellemelerin öğretimi ve önemi incelenmiştir. Araştırmada veri toplama aracı olarak olgu, kavram ve genelleme çıkarımı ile ilgili çalışma yaprakları, gazi-savaş-barış ve egemenlik kavramıyla ilgili karikatür çalışması ve öğrencilerin İnkılâp Tarihi dersinde önemli görülen kavramları ne derece öğrendikleriyle ilgili yirmi beş soruluk bir kavram testi kullanılmıştır. Ayrıca araştırma sürecinde öğretmenlerle görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonunda öğrencilerin olgu, kavram ve genellemeler hakkında bilgi sahibi olmadıkları, verilen çalışmalarda olguları belirlemekte güçlük çektikleri, olgular arasından kavramları seçemedikleri ve genelleme yapmakta zorlandıkları belirlenmiştir. Ayrıca araştırmada seçilen dört kavramı anlatan karikatürlerde, ilçe merkezindeki öğrencilerin resme bakarak kavramı anlamlandırabildikleri, köy okullarındaki öğrencilerin ise anlamlandırma güçlerinin zayıf olduğu belirtilmiştir.

Kılıç (2007) tarafından yapılan çalışmada araştırmanın amacı kavram analizi ve genelleme analizi temel alınarak yapılan öğretimin, bir kavramın içerik öğelerinin açıklanmasının; kavramların, genellemelerin öğrenilmesine ve bilişsel esnekliğe etkisi şeklindedir. Araştırma, ön test-son test kontrol gruplu deneme modeline göre desenlemiştir. Çalışmada ki, deney grupları toplamda 92 katılımcıdan oluşturulmuştur. Gruplar; üç farklı test ve ön test sonuçları dikkate alınarak dengelenmiştir. Araştırmada birinci deney grubunda öncelikle bir kavramın içerik öğelerinin ne olduğu açıklanarak daha sonra analizi yapılan kavram ve genellemelere göre düzenlenen öğretim gerçekleştirilmiştir. İkinci deney grubunda sadece analiz yapılan kavram ve genellemelere göre düzenlenen öğretim uygulanmıştır. Kontrol grubunda ise ders kitaplarında sunulan içeriğe dayalı öğretim yapılmıştır. Araştırma sonunda gerçekleşen öğretim sonucu bu iki farklı gruptaki öğrencilerin bilişsel yapılarında değişme ve gelişme olduğu gözlemlenmiştir. Deney-1 grubundakiler, dersin iyi bir şekilde geçtiği değerlendirmesinde bulunurken, konuyu iyi anladıklarını ve açıklamaların çok faydalı olduğunu belirtirken, deney-2 grubundaki öğrenciler ise konunun oldukça zor ve karmaşık olduğunu verilen örnekler dışında daha fazla örneğe ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir.

Genelleme sürecinde yapılan çalışmalar görüldüğü üzere; örüntü, genelleme analizi, genellemelerin öğretimi, genelleme stratejileri ve cebirsel düşünme üzerine araştırmalardır.

2.6.1.4. Varsayımda Bulunma İle İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Bu boyuta özel ayrıca yapılmış bir çalışmaya rastlanmamıştır.

2.6.1.5. İspat İle İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Topkaya (2013) de matematikte ispat tekniklerinin üzerinde çalışılmıştır. Mantığın bize sağladığı; Önermelerin ifadelerinde belirli aşamalarda çıkan sonuçların, tutarlı olup olmadığını ve ispat aşamasındaki hatalı kısımların bulunup bulunmadığını değerlendirmemizi sağlar. Öncelikle mantıksal önermelerle ilgili temel bilgiler ön hazırlık olması amacıyla kısaca verilmiştir. İspat teknikleri dört ana başlık altında anlatılmıştır. Bunlar doğrudan ispat, ters durum ispatı, olmayana ergi(çelişki) yöntemiyle ispat, tümevarım yöntemiyle ispat teknikleridir. Bu ispat teknikleri kullanılarak bazı ispatlar verilmiştir. Sonra ispat teknikleri yardımıyla bazı özel sayıların (Euler sayısı, Pi sayısı, Altın oran) irrasyonel oldukları ispat edilmiştir. İspat tekniklerinin yardımıyla Fibonacci sayısının nereden çıktığı, elde edilişi ve Binet formülünün tümevarım yöntemiyle ispatı verilmiştir. Sonra Altın oran ve Pascal üçgeninin Fibonacci sayısı ile ilişkisi verilmiştir. Son olarak ispat tekniklerini kullanmadan, geometri yardımıyla Pisagor teoreminin ispatına ulaşılmıştır. Pisagor teoreminin ispatı, çeşitli geometrik şekiller üzerinde gösterilerek verilmiştir.

Doruk ve Kaplan (2013) çalışmasının amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerilerini incelemektir. Araştırmanın katılımcılarını, Doğu Anadolu Bölgesi'ndeki bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören 6 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri yarı yapılandırılmış mülakat formu yardımıyla elde edilmiştir. Verilerin incelenmesi sonucunda ise, öğretmen adaylarının ispat değerlendirmede başarısız oldukları ortaya çıkmıştır. Bu durumun nedenini, ispatlardaki kilit düşüncelere dikkat edilmemesi ve öğretmen adaylarının ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmeden sadece ezberleme yoluna gittikleri göze çarpmaktadır. Ayrıca, ilgili dersten elde edilen akademik başarı ile ispat değerlendirme becerileri arasında bir ilişkinin olmadığı düşünülmektedir.

Köğce (2013) çalışmasını ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematik öğretimine katkısı ile ilgili görüşlerini ve ispat düzeylerini belirlemek amacıyla yapılmıştır. Araştırmanın yöntemi betimsel analizin, özel durum çalışması şeklindedir. Katılımcılar ise; 2010 – 2011eğitim öğretim yılında Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda öğrenim gören toplam 99 birinci sınıf öğretmen adayından oluşmaktadır. Veriler iki açık uçlu sorudan oluşan bir anket formu uygulanarak elde edilmiştir. Verilerin incelenmesinde; ispat yapabilme düzeyleri Miyazaki'nin (2000) ispat ile ilgili gruplandırması dikkate alınmış, ispatın matematik öğretimindeki faydası ve öğrenmeye etkisi ile ilgili görüşlerinden elde edilen veriler ise öğretmen adaylarının cevaplarının benzerlik ve farklılıklarına göre tematik olarak gruplandırılarak incelenmiştir. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının çoğu tümdengelimsel muhakeme ihtiva eden ve ispatlama gerçekleşirken işlevsel dilin kullanıldığı İspat A türüne uygun ispatı tercih ettikleri ortaya çıkmıştır. Ayrıca, çok az öğretmen adayı hariç önemli bir kısmının ispat yapmanın matematik öğretimine etki etmeyeceğine inandıkları görülmüştür.

Kayagil (2012) bu çalışmasında amaç ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini belirlemek ve bu görüşlerin cinsiyet, mezun olunan lise türü, sınıf ve matematikle ilgili bilimsel bir etkinliğe katılma durumu değişkenlerine göre farklılık gösterip göstermediğini incelemektir. Araştırmanın örneklemini 2011-2012 eğitim öğretim yılında Ankara il merkezinde bulunan bir üniversitedeki eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalında 1. 2. 3. ve 4. sınıflarda okumakta olan 357 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmanın veri toplama aracı, Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere'nin (2006) Türkçe'ye çevrilen ve Almeida'nın (2000) ispata ilişkin görüş ölçeği kullanılmıştır.

Veriler bu uygulanan ölçekten elde edilmiştir. Sonuç olarak elde edilen bulgulara göre; öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik ne olumlu ne de olumsuz görüşleri vardır. Öğretmen adaylarının bu görüşleri arasında cinsiyete ve matematikle ilgili bilimsel etkinliğe katılma durumuna göre anlamlı farklılık yoktur. Buna ilaveten sınıflara ve mezun olunan lise türüne göre gruplar içi ve gruplar arası anlamlı fark yoktur.

Gökkurt ve Soylu (2012) araştırmalarının konusu; fen bilgisi ve ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşlerinin ne olduğu şeklindedir. Katılımcılar, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümünde 2011-2012 eğitim öğretim yılları arasında öğrenim görmekte olan 150'si fen bilgisi, 94'ü matematik öğretmenliğinde olmak üzere, toplam 244 birinci sınıf öğrencisinden oluşmaktadır. Çalışmada, nicel yaklaşımın deneysel olmayan desenlerinden betimsel yöntemdir. Verilerin toplanmasında ise likert tipi ölçek kullanılmıştır. Verilerin analizinde kısmında, frekans ve yüzde dağılımları ile bağımsız t-testi kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda, her iki bölümde öğrenim gören öğrencilerin ispata yönelik görüşleri arasında anlamlı bir farklılığın olmadığı ve ispatla ilgili düşüncelerinin yetersiz olduğu görülmüştür.

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri, matematiksel ispat hakkındaki görüşleri incelenmiş ve aralarındaki ilişki araştırmışlardır. Araştırmanın örneklemini, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üç ve dördüncü sınıflarında öğrenim gören toplam 151 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri İspat Görüş Anketi, Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi (MTBT) ve yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Araştırma bulgularına göre, öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu, ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı ve ispat hakkındaki görüşleriyle tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri arasında istatistiksel olarak pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu saptanmıştır.

Güler ve Dikici (2012) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri incelemiştir. Araştırmanın katılımcılarını, Doğu Anadolu Bölgesi'nde bulunan bir üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü dördüncü sınıfında öğrenim gören 12 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri yarı-yapılandırılmış 'Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu' (MİGMF) yardımıyla elde edilmiştir. Araştırma bulgularına göre, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematiksel ispata yönelik olumlu görüşlere sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca araştırma sonuçları ilgili alan yazında yer alan çalışmalarla karşılaştırılarak tartışılmış ve konuyla ilgilenen araştırmacılara öneriler sunulmuştur.

Özer ve Arıkan (2000) ise Miyazaki'nin (2000), çalışmasını ve bu konuda yapılan diğer bazı çalışmaları da göz önüne alarak araştırma yürütmüştür. Bu araştırmada lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerileri tespit edilmiş ve öğrencilerin ispat düzeylerini incelemişlerdir. Ayrıca materyal kullanarak ispat yapıp yapamadıkları gözlemlemişlerdir. Bu amaçla 2000-2001 eğitim öğretim yılında toplam 110 öğrenci üzerinde araştırma yapılmıştır. Ayrıca 3 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Açık uçlu sorulara öğrenciler tarafından verilen yanıtlar sonucunda aldıkları puanlar gruplandırılarak tablolar oluşturulmuştur. Görüşme sırasında farklı zamanlarda 3 öğrencinin verdikleri cevaplar kasetlere kaydedilmiş ve bu kayıtlar yazılı görüşme metinlerine dönüştürülmüştür. Araştırma sonucunda lise 2 öğrencilerinin istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak ispat yapamadıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları saptanmıştır.

Uğurel ve Moralı (2010) çalışmaları bir ortaöğretim sınıfının matematik dersinde uygulanan ispat yapma etkinliği esnasındaki iletişim durumlarının incelenmesini kapsamaktadır. Söz konusu iletişim sürecinde tüm sınıf bazında yapılan tartışmalara odaklanılarak özellikle öğrencilerin söylemleri analiz edilmiştir. Özel durum çalışması niteliğindeki bu nitel araştırmada söylem çözümlemesi gerçekleştirilmiştir. Söylem çözümlemesi, araştırmanın tasarımında, veri toplama aşamasında, verilerin analizinde ve raporlaştırılmasında metodolojik çerçeveyi oluşturmaktadır. Çalışmanın örneklemi özel bir fen lisesinin on birinci sınıfındaki 11 öğrenci ve o sınıfın matematik öğretmeninden (toplam 12 kişi) oluşmaktadır. *Teşvik edilmiş söylem* (TES) aracılığıyla öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgileri ve anlamaları hakkında kayda değer bulgular elde edilmiştir.

Yeşildere vd. (2006) çalışmalarında, matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya hakkında ki görüşleri araştırmışlardır. Araştırmada ki amaç, ispata ilişkin görüşler öğretmen adaylarının ispat becerilerine ilişkin varsa sorunları ortaya çıkarma ve gidermede ilk adımı oluşturacak veriyi sağlamaktır. Veriler, geliştirilen bir ölçek ile toplanmıştır. Elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik ya görüşlerinin olmadığını ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Altıparmak ve Öziş (2005) tarafından yapılan çalışmada matematiksel ispat ve muhakeme üzerinde durulmuştur. Konuyla ilgili olarak NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) standartları doğrultusunda, okulöncesi, ilköğretim ve lise seviyelerinde matematiksel ispat kavramı ile ilgili bilgiler ve örnekler verilmiştir. Okul öncesi, ilköğretim ve lise yıllarında muhakemenin gelişimi incelenmiştir. Okul öncesi dönemde sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma, sıralama kavramları çocuklarda muhakemenin oluşumu için temel kavramlardır. Bu bazda önermeler verilerek, mantıklı düşünmenin oluşması istenmiştir. İlköğretim döneminin birinci kademesinde, birey somut düşünme dönemdedir. Bu doğrultuda parça-bütün ilişkileri ele alınarak, tümevarım ilkeleri için örnekler verilmiştir. İkinci kademede ise muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri istenmektedir. Lise yılları soyut düşünebilme evresinin geliştiği yıllardır bu yıllarda tümdengelim ve tümevarım oluşmuştur. Bu doğrultuda ispat çeşitleri incelenerek, örnekler verilmiştir.

İspat boyutunda çokça çalışmaya rastlanmıştır. Bu çalışmalar ise daha çok ispat teknikleri, katılımcıların ispat yapma hakkındaki görüşleri, ispatın matematiğe etkisi şeklinde araştırmalardır.

2.6.2. Yurt Dışında Yapılan İlgili Çalışmalar

Literatür taraması sonucuna yurt içinde yapılan çalışalar matematiksel düşünme ve boyutları aşağıda alt başlıklar halinde yazılmıştır.

2.6.2.1. Matematiksel Düşünme İle İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Mubark (2005) çalışmasında matematiksel düşünmenin önemli yönlerini tanımlamayı amaçlayarak; öğrencilerin matematiksel düşünme ve matematik başarısı arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca cinsiyet ve okulun bulunduğu yerleşim birimi açısından matematiksel düşünme ve matematik başarı arasındaki ilişki araştırılmıştır. Geliştirilen iki değerlendirme aracı ile rastgele seçilen 20 okuldan veriler toplanarak 13 öğretmen ile bireysel görüşülmüş ve dört grup öğrenci ile onların görüşleri ve matematikteki düşünmenin farklı metotları hakkında bilgi elde etmek amacıyla odak grup görüşmesi yapılmıştır. Öğretmen görüşleri, test sonuçları ve cevap verenlerin görüşleri arasında tutarlılık ve tutarsızlıkların tanımlanması için kullanılmıştır. Matematiksel düşünme; genelleme, tümevarım, tümdengelim, sembolleri kullanma, mantıksal düşünme ve matematiksel ispat olmak üzere altı boyutta tanımlanmıştır.

Toplam test skorlarında ve matematiksel düşünmenin altı boyutunun üçünde kız öğrenciler erkek öğrencilere göre anlamlı derecede yüksek ortalamaya ulaşmışlardır. Şehir çevresindeki yerleşim yerlerinden katılan öğrencilerin, kırsal ve şehir merkezinde bulunan öğrencilere göre 6 boyutun 4 ünde ve toplam test ortalamalarında daha anlamlı olduğu görülmüştür. Kullanılan çoklu regresyon analizlerinde matematiksel düşünmenin altı boyutunun öğrencilerin matematik başarılarında önemli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Matematiksel ispat ve Genellemenin matematiksel düşünmenin en önemli boyutlarından olduğu ve bunu Sembol Kullanımı ve Mantıksal Düşünmenin takip ettiği Tümdengelim ve Tümevarımın ise diğerlerine göre daha az öneme sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Matematiksel düşünmenin altı boyutu, cinsiyet ve okulun bulunduğu yerleşim birimi Matematik başarısındaki yaklaşık varyansın yüzde 70'ini oluşturduğu ve matematiksel düşünmenin boyutları ve test skorları ile öğretmen görüşleri arasında yüksek düzeyde tutarlılık olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Pape, Bell ve Yetkin (2003) tarafından yapılan çalışmada ortaokul matematik sınıfında öğrencilerin matematiksel düşünme ve öz denetimlerinin gelişimini destekleyen bağlamları tanımlayabilmeyi amaçlanmıştır. Öz denetime sahip olanlar kendi öğrenmelerine aktif olarak katılan, bir dizi strateji arasından seçim yapabilen ve bu stratejileri hedeflerine giden yolda kullanırken ilerlemelerini izleyen kişilerdir. Bu amaçla yedinci sınıf matematik sınıflarında bir matematik öğretmeni, üniversitede bir akademisyen ve bir ortaokul sınıfındaki öğrencilerin matematiksel düşünmelerini ve öz denetimlerini geliştirmek amacıyla işbirliği yapılmıştır. Bu gelişimde; çoklu ifade etme ve zengin matematik ödevleri, sınıf içi söylemler, stratejik davranış platformu ve anlaşılırlık ve destek ihtiyacı gibi bazı faktörlerin büyük öneme sahip olduğu belirlenmiştir.

Cai (2003) tarafından yapılan çalışmada Singapurlu dördüncü, besinci ve altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözme ve problem durumlarındaki matematiksel düşünmelerini incelenmiştir. Araştırmanın sonuçları, 4., 5. ve 6. sınıf öğrencilerinin problem çözümlerinde, uygun çözüm stratejilerini seçebildiklerini ve çözüm sürecinde seçilmiş olan çözümleri temsil edecek tarzda açık bir iletişimi de kullanabildiklerini göstermiştir. Birçok Singapurlu öğrenci problem durumundaki başlangıç figürlerini resmedebilmiştir. İstatistiksel açıdan anlamlı farklılık 4. ve 5. sınıf öğrencileri arasında görülmekteyken; besinci ve altıncı sınıf öğrencileri arasında anlamlı farklılık oluşmamıştır.

Cai (2000) tarafından yapılan çalışmada Amerika ve Çin'deki 6. sınıf öğrencilerine 6 kapalı uçlu; 6 açık uçlu toplam 12 soru sorarak matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerini incelemiştir. Kapalı uçlu sorularda Çin'deki öğrenciler lehine anlamlı fark oluşurken, açık uçlu sorularda Amerikalı öğrenciler lehine anlamlı fark oluşmuştur. Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerine ulaşabilmek için probleme yaklaşım şekilleri incelenmiştir. Ayrıca öğrencilerin cevaplarının nitel analizini Amerika ve Çinli öğrencilerin matematiksel düşünme anlayışları sağlamıştır. Nitel araştırma sonuçları; Çin'deki öğrencilerin rutin algoritmaları ve sembolik ifadeleri kullanmayı, Amerika'da öğrenim gören öğrencilerin ise görsel planlamayı kullanmayı tercih ettiklerini göstermiştir.

Yapılan çalışmalar daha çok matematiksel düşünmenin önemi, matematiksel düşünmenin eğitime katkısı, matematiksel düşünme becerilerinin incelenmesi şeklindedir.

2.6.2.2. Özelleştirme İle İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Lane (2011) tarafından yapılan nitel çalışmada öğrencilerin matematiksel düşünme ile algıları ile birlikte özelleştirme stratejileri incelenmiştir. Veriler öğrencilerin yazılı cevapları, gözlemler, 2 öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşme yolu ile toplanmıştır. Öğrencilerin matematiksel düşünme tanımları literatürde yer alan tanımlarına göre kodlanmıştır. Özelleştirme becerileri ise, Mason vd (2010) yer verilen özelleştirme tanımına dayalı olarak geliştirilen bir rubrik yoluyla kodlanmıştır. Elde edilen bulgular öğrencilerin sık sık sistematik tahmin et ve kontrol et stratejisinin kullanıldığı görülmüştür. Buna ilaveten kısa bir eğitimden sonra özelleştirme seviyelerinde bir gelişme görülmüştür.

2.6.2.3. Genelleme İle İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Chua ve Hoyles'un (2010) çalışmalarının amacı öğretmen ve öğrencilerin örüntü genelleme konusunda seçtiği stratejileri karşılaştırmaktır. Çalışmada bir genelleme problemini çözmek için çeşitli yaklaşımlar göz önüne alındığında öğretmenler sınıfta öğrencilere göstermek için hangi stratejileri kullanır, hangi strateji öğrencilerin çalışmasında en iyi yardımcıdır, strateji seçiminin altında yatan gerekçeler nelerdir gibi sorulara cevap aranmaktadır. Çalışmada veriler bir çalışma yaprağı ve bir anket aracılığıyla 16 ortaöğretim matematik öğretmeni ve 13 yaşındaki 47 ortaöğretim birinci sınıf öğrencisinden toplanmıştır. Bir şekilsel genelleme probleminin çözümü için farklı stratejiler tartışılmadan önce her öğretmene doğum günü partisi dekorasyonu probleminin bulunduğu çalışma yaprakları dağıtılmıştır. Öğretmenlere sınıflarında kullanacakları strateji, aynı zamanda bunu nasıl gerekçelendirdikleri sorulmuştur. Daha sonra doğum günü partisi dekorasyonu problemi ile birlikte olası dört öğrenci çözümünü içeren bir anket her bir öğretmene dağıtılmıştır. Öğretmenler öğrencilere fonksiyonel bir kural oluşturmada en çok yardımcı olacağını düşündükleri yöntemi seçmeli ve benzer şekilde en iyi yardımcı yöntem seçimi için gerekçeler sunmalıdır. 47 öğrencinin 28 i akademik açıdan daha başarılıdır. Bu öğrencilere de doğum günü partisi dekorasyonu probleminin bulunduğu çalışma yaprakları ve doğum günü partisi dekorasyonu problemi ile birlikte olası dört öğrenci çözümünü içeren anket dağıtılmıştır. Sonuç olarak en iyi yardımcı genelleme stratejisine ilişkin öğretmen ve öğrencilerin yargılarında farklılıklar saptanmıştır. Öğretmenler örüntünün altında yatan fonksiyonel kuralı bulmada sayısal yöntemin öğrencilere daha çok yardımcı olacağını düşünürken öğrenciler biçimsel yöntemlerin kuralı daha hızlı bulmalarını sağladığını belirtmişlerdir.

Amit ve Neria (2008) çalışmalarında lineer ve lineer olmayan (kuadratik) örüntü problemlerinin çözümünde yetenekli ön cebir öğrencileri tarafından kullanılan genelleme yöntemleri üzerinde durulmuştur. Araştırmada kullanılan üç problemin çözümünün nitel analizi, genelleme için, yinelemeli (recursive) – yerel ve fonksiyonel – genel olmak üzere iki yaklaşım ortaya koyulmuştur. Araştırmanın katılımcısı olan 139 öğrenci, 11-13 yaş arası Kidumatica adı verilen okul sonrası matematik kulübünün üyeleri arasından seçilmiştir. Bu öğrenciler kendi sınıflarının en başarılı öğrencileridir. Araştırmada kullanılan problemler; resimsel bir lineer genelleme problemi, resimsel bir lineer olmayan genelleme problemi ve sözel olarak sunulan bir lineer olmayan günlük yaşam genelleme problemi olmak üzere üç tanedir. Seçilen problemler rutin olmayan, öğrencileri hazır bir çözüm stratejisinden yoksunken bir strateji geliştirmeye zorlayan görevlerdir. Elbette hiçbir benzer soru okul kitaplarında bulunmamaktadır. Araştırmada daha önceden yapılmış çalışmalarına dayanarak genelleme süreci dört adımda izlenmiştir. Araştırmada öğrenciler resimsel, sözel ve sayısal temsiller arasında sorunsuz geçişler ve daha etkili çarpımsal stratejiler lehine toplamsal çözüm yaklaşımlarını terk ederek zihinsel esneklik gösterilmiştir. Bu çalışma, yetenekli öğrencilerin genellemeyi çağrıştıran örüntü görevleri ile karşı karşıya kaldıklarında yüksek matematiksel yetenekler sergilediklerini göstermiştir. Öğrenciler karmaşık örüntüleri genellemede ve yerel genellemeler için yinelemeli yöntem ve genel genellemeler için fonksiyonel yöntem bulmada yetkin görünmüştür.

Lannin (2005) yaptığı araştırmada 25 tane altıncı sınıf öğrencisinin örüntülerle ilgili görevler içeren durumlarda genellemeler yapmalarını, genellemelerini gerekçelendirmelerini ve bunları yaparken kullandıkları akıl yürütme şekillerini incelenmiştir. Ayrıca bunu yaparken MS Excel benzeri bir tablolama yazılımı kullanılmıştır. 10 ders saati süren deneyde 25 kişilik gruptan süreç öncesinde yapılan ön testlerde, özellikle yetenekleri diğer öğrencilere göre daha üst düzey olan dört öğrenci izlenmiştir. Deneyde beş adet görev yer almıştır. Çalışmada öğrenciler genelleme oluşturma açısından çok belirgin gelişmeler göstermişler ancak aynı genellemeyi çok farklı stratejiler ve gerekçelendirmelerle oluşturmuşlardır. Araştırmacı, çalışmada örüntü etkinliklerinin ve öğrencilerin geçerli bir gerekçelendirme yapmak için uğraşırken gösterdikleri çabaların genellemeyi daha iyi anlamalarına yardımcı olduğun belirtmiştir. Sınıfta örüntü etkinlikleri kullanılırken öğrencilerin oluşturdukları genellemelerinin geçerliğini ya da doğruluğunu anlamalarının çok önemli olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacı son olarak, öğrencilerin matematiksel olarak kabul edilebilen ve güçlü olan gerekçelerin türlerini anlamaya gerek duyduklarını belirtmiştir.

Janet, Wilson ve Bills (2003) öğrencilerin genelleme yapmasına odaklanan çalışmalarında öğrencilere genellemelere ulaşabilecekleri sorular vermiş ve genellemeleri işlemler üzerinden yapanlarla, genellemeyi içeriğe bağlı olarak yapanları incelemiştir. Çalışmaya iki grup öğrenci katılmıştır. Grup A, altıncı sınıf sonundaki cebirle ilgili eğitim almış öğrencilerden, Grup B, altıncı sınıfa yeni başlamış öğrencilerden oluşmuştur. A grubunda iki farklı okuldan 12’şer toplam 24 öğrenci, B grubunda ise yine aynı okullardan 14’er toplam 28 öğrenci yer almıştır. Öğrenciler öğretmenleri tarafından, araştırmaya katılmak isteyenler arasından, birbirine benzer becerilere sahip olanlar çift oluşturacak şekilde seçilmiştir. Örüntülerle ilgili çalışmalarda sıklıkla kullanılan “Masalar ve Sandalyeler” sorusu öğrencilere yöneltilmiş ve öğrenci yanıtları incelemek için kaydedilmiştir. A grubundaki bütün çiftler az ya da çok cebirsel etkinlikte bulunmuşlardır. B grubundaki çiftlerden çok azı cebirsel dili kullanma becerisi gösterirken yine de çoğunluğu A grubundaki çiftler kadar cebirsel etkinlik ortaya koyabilmiştir. B grubundaki çiftlerden üçü masalar ve sandalyeler arasındaki ilişkiye yönelik bir tanımlama yapamazken, yedi çift ise işlemsel genellemeler yaparak kurallar yazmışlar ama cebirsel dil kullanmamışlardır. Genelleme yaparken kurallar yazanlar gerekli işlemsel genellemeyi yapabilenlerdir. Dolayısıyla içeriğe dayalı genelleme öğrencilerin sembolik bir kural yazabilmeleri için yeterli olmamıştır. Araştırmacılar "Masalar ve Sandalyeler" sorusunun bu tarz ilişkilerin çok çeşitli şekillerde genellenebileceği sonucunu verdiğini fakat genellemeyi sadece içeriğe odaklanarak yapanların anlamlı bir sembolik dil geliştirmelerinin zor olduğunu belirtmişlerdir.

Zaskis ve Liljedahl (2002) tarafından öğretmen adayları üzerine kapsamlı bir araştırma yapılmıştır. Bir grup ilköğretim öğretmen adayının sayı örüntülerini genelleme yapma yolları incelenmiştir. Çalışmada bir grup ilköğretim öğretmen adayının tekrarlanan bir görsel sayı örüntüsünü genelleme süreçleri ve görsel modelleri bu süreçte nasıl kullandıkları incelenmektedir. Öğretmen adaylarını aritmetik veya cebirsel genellemeye götüren süreç derinlemesine analiz edilmektedir. Öğretmen adaylarından bir çözüme ulaşıncaya kadar geçirdikleri düşünme süreçlerini ve yaptıklarını kaydetmeleri istenmiştir. Öğretmen adayları çözümlerini sunduktan sonra 4 öğretmen adayı ile de klinik mülakat yapılmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının şekil örüntüleri genelleme sürecinde ortak özelliği nasıl belirlediklerini ortaya koymak, belirledikleri ortak yönün genelleme sürecine ne ölçüde yardımcı olduğunu belirlemek ve nasıl genelleme yaptıklarını tespit etmek amaçlanmaktadır. Araştırmanın sonuçları öğrencilerin sözlü olarak genellemeyi ifade yeteneklerinin cebirsel gösterime eşlik etmediğini ve bağlı olmadığını göstermiştir. Bununla birlikte katılımcıların çoğu tam ve doğru çözümlerinde yetersiz olarak cebirsel semboller kullanmıştır.

Orton (1997) tarafından kibrit çöpleri ile oluşturulan örüntüler yardımıyla öğrencilerin genelleme becerilerini incelemek üzere bir çalışma yapılmıştır. 9–13 yaşlarında, beceri olarak birbirinden farklı 30 öğrenciyle yaptığı çalışmada öğrencilere kibrit çöpleriyle hazırlanmış örüntüler vermiş ve onların verdikleri yanıtlar üzerine bireysel görüşmeler yapılmıştır. Bir sonraki adımı bulma sorusunda sadece bir öğrenci dışında hiçbir öğrenci sorun yaşanmamıştır. Öğrenciler yanıtlarını genellikle "4 fazla, 3 ekle, 2 daha" gibi genel farka odaklanarak vermişlerdir. Yirminci şekildeki kibrit sayısını öğrencilerin %70'i, yüzüncü şekildeki kibrit sayısını ise %53'ü doğru yanıtlamıştır. Araştırmacı daha önceki çalışmalarda rastlanan öğrencilerin yanıtlarını kontrol etmemeleri durumunu engellemek adına görüşmeler esnasında "Kuralın, ikinci adıma uyuyor mu?" gibi sorular sorularak öğrencilerin kurallarını sorgulamalarını sağlamaya çalışılmıştır. Araştırmacı çalışmanın genelleme ile ilgili birçok engeli ortaya koyduğunu belirtmiştir. Bunlar aritmetik yetersizlik, şekil sayısı ile kibrit sayısının karıştırılması, sonraki adımlar (20.adım, 100.adım) için kısa yöntemler bulmaya çalışma, farklara ya da yinelemelere odaklanma, öğrencilerin kendilerine özel geliştirdikleri yöntemlere takılıp kalmaları, bilinmeyenle işlem yapma becerisinin yokluğu, vb. olarak sıralanmıştır. Araştırmacı kibrit çöpleri ile daha birçok örüntü oluşturulabileceğini, bu yolla genelleme becerisinin geliştirilmesine yardımcı olabileceğini de ifade etmiştir.

Lee (1996) cebire girişte örüntülerin ve örüntü kuralı genellemenin önemine vurgu yapan araştırmasında genelleme etkinliklerinin bulunduğu bir öğretim uygulanmıştır. Uygulamasıyla katılımcılara sembol duyusu kazandırmayı amaçlamıştır. Öncesinde yaptığı araştırmalardan sonra altı kişilik bir gruba bu öğretim deneyini uygulamıştır. Grup üyeleri otuzlu yaşların ortalarında olan kişiler olup cebirle ilgili en son derslerini ortaöğretimde veya üniversite yıllarında almışlardır. Araştırmacı öğretimde daha önceki araştırmalarda kullandığı problemleri kullanmış ve önceki araştırmalarda ortaöğretim öğrencilerinin verdiği yanıtlarla bu deneydeki katılımcıların yanıtları arasında ilişkiler aramıştır. Deney öncesinde yaptığı çalışmalardan yola çıkarak fonksiyonların, modellemenin, problem çözmenin ve genelleme etkinliklerinin cebire girişte öğrenciler için çok önemli olduğunu belirten araştırmacı deney sonrasında bu görüşlere ek olarak örüntü etkinliklerinin hem öğretmen hem de öğrenciler için çok heyecan verici ortamlar oluşturduğunu belirtmiştir. Araştırmacı çalışma sonucunda, çalışmada öğrenci katılımının çok yüksek olduğunu, öğrencilerin çok zayıf cebirsel yeteneklerini geliştirecek yaratıcı ortamlar oluştuğunu, öğrencilerin kendilerini, oluşan matematik ikliminin bir parçası gibi hissettiklerini, eğlendiklerini ve birbirlerini hiç tanımamalarına rağmen çok samimi sosyal ilişkiler içine girdiklerini ifade etmektedir.

Stacey (1989) lineer örüntülere odaklandığı araştırmasında merdiven veya ağaçların imgesel genişletilmesini sunmuştur. Lineer örüntüler ile ilgili olarak; Stacey (1989) yakın genelleme görevleri ile uzak genelleme görevleri arasında ayrım yapmış. Yakın genelleme görevleri, sayarak, çizerek veya bir tablo oluşturarak ulaşılabilen sonraki örüntü veya elemanı bulma; uzak genelleme görevleri ise genel kuralı anlayarak örüntüyü bulma şeklinde ifade etmiştir. Katılımcılara 20 veya 1000 basamaklı bir merdiven yapmak için veya belirli bir boyuttaki Noel ağacının ışıklarının sayısı için gerekli eşleşme sayısı sorulmuştur. Bu örüntüler lineer örüntülerdir çünkü n. Eleman an+b olarak ifade edilebilir. Bu problemleri 9-13 yaş öğrencileri için zorlu bulmuştur. Araştırma sonunda, tüm yaş grubundaki öğrencilerin, genel olarak sayma stratejisi (counting method), farkın çarpım stratejisi (difference method), bütüne genişletme stratejisi (whole-object method) ve lineer yöntem (linear method) olmak üzere dört strateji kullandıkları görülmüştür. Bütün yaş gruplarında genel olarak aynı stratejilerin ve her iki grupta da en çok sayma stratejisinin kullanıldığı belirlenmiştir. Örüntülerde sabit farklılık özelliğinin, genel olarak öğrenciler tarafından fark edildiği ve özellikle 12-13 yaş grubunda yer alan, ilköğretim ikinci basamak öğrencilerinin büyük çoğunluğunun doğru bir şekilde kullandığı görülmüştür. Sabit fark özelliği büyük ölçüde kabul görmüş ve f(x)‟den f(x+1)'i geçmek için öğrencilerin büyük bir çoğunluğu tarafından doğru olarak kullanılabilmiştir. Ancak, genelleme çabası içinde, öğrencilerin önemli bir kısmı farkın n. katları olarak n. elemanı belirlemek için hatalı bir orantı yöntemi kullanmıştır. Bazı sorularda ise, öğrencilerin birden fazla strateji kullandıkları da belirlenmiştir. Ayrıca ilköğretim birinci basamak öğrencilerinin genelleme yapmada isteksiz oldukları, onların genelleme yaparken lineer yöntem yerine daha çok doğru orantı yöntemini kullandıkları görülmüştür. Bunların dışında kimi öğrencilerin lineer yöntem olarak tanımlanan "örüntünün son teriminden sonra sonlu terime kadar toplam farkı bulup son terime ekleme" stratejisini kullanarak, örüntülerin 100. ve 1000. adımındaki terimleri buldukları belirlenmiştir. Öğrenciler sayma yöntemini kullanmanın mümkün olmadığına karar verdiklerinde tam bir lineer yöntem kullanmakta veya doğru orantılı durumlarda geçerli, basit ilişkilerin birini genelleme için kullanmayı seçtikleri gözlenmiştir. Genelleme stratejisi seçimindeki tutarsızlık üç doğrusal genelleme probleminde de büyük ölçüde görülmüştür. Öğrenciler basit kuralın çekiciliğine kapılarak, sorunun zorlayıcı bölümünde lineer yöntem yerine doğru orantı yöntemini seçmişlerdir.

Yapılan çalışmalar daha çok lineer ve lineer olmayan örüntüleri örüntü genellemeleri ve sayı örüntülerini genelleme yapma şeklindedir.

2.6.2.4. Varsayımda Bulunma İle İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Bu boyuta özel ayrıca yapılmış bir çalışmaya rastlanmamıştır

2.6.2.5. İspat İle İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Almeida (2000) çalışmasında geniş bir katılımcı ile matematik lisans öğrencilerinin ispat konusundaki algılarını açıklamaya yardımcı olacak nicel bir uygulama ve bu nicel çalışma sonucundan seçilmiş bazı öğrenciler ile ispat çalışmalarını içeren nitel bir çalışma yapmıştır. Çalışma sonuçlarına göre öğrenciler sorulan ispat sorularını üniversiteye girerken öğrendikleri formal matematiksel ispat kavramlarına dayanarak çözmüşlerdir. Ayrıca yapılan görüşmelerde öğrencilerin bu formal pozisyondan ayrıldıkları gözlenmiştir. Öğrenciler ispatın formal olmayan metotlarına karşı eğilim gösterip açıklamalarında bu metotlara yer vermişlerdir. Ayrıca öğretmen adaylarının hem öğretim biçiminden hem de programdan kaynaklanan ispat yapmada eksikliklerinin uygun eğitim ile giderilebileceğini, öğrencilerin bu konuda bir yeteneklerinin olduğunu ortaya koymuştur.

Almeida (2003) bir diğer çalışmasında ise öğrencilerin ispat anlayışındaki eksiklikler sebebiyle öğretmen adaylarına günümüz matematiğinin tarihsel başlangıcına dayanan bir eğitim tasarımı önererek ispatı öğrenmelerini hedef alınmıştır. Özellikle böyle bir tasarım ile öğretmen adaylarının ispat algılarını keşfetmelerine imkan sağladığı tartışılmıştır. Böylece öğrencilere yönlendirilmiş matematik etkinlikleri ile varsayımda bulunmuş ve bu varsayımları doğrulamak için ispat yapmışlardır. Böylece öğrencilerin ispat algılarına katkıda bulunmuştur.

Stylianides, Stylianides ve Philippou (2007) tarafından ele alınan araştırmada ise ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispatı faydalı bir şekilde öğretebilmeleri için alan bilgileri hakkında veri toplanmak istenmiştir. Çalışmanın verileri toplanırken önce 95 katılımcının yazılı cevapları incelenmiş, bu cevaplar içerisinden 11 katılımcının cevabı seçilmiş ve yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu veriler doğrultusunda elde edilen bulgulara göre katılımcıların tümevarımsal metodun temel aşamasında ve diğer adımlarında zorluklarla karşılaştıkları ortaya çıkmıştır. Tümevarımsal metodun aşamalarında ise yaşanan zorluklar matematik öğretmen adaylarına verilen eğitimde ispata yönelik kavramlar üzerinde yeterince durulmadığını ortaya çıkarmıştır.

Larsen ve Zandieh (2007) Lakatos'un *Proof and Refutation* kitabındaki keşif metotlarını, matematik öğretiminde daha kullanılabilir yapabilmek için yeniden elden geçirmiştir. Araştırma örneklemini matematik bölümünde okuyan ve soyut cebir dersi alan öğrenciler oluşturmuştur. Soyut cebir dersinin seçilmesinde Lakotos'un anlattığı içeriğe benzerlik olmasıdır. Yapılan çalışma sonucunda Lakotos'un metotlarının sınıf içi matematiksel aktiviteler için güzel bir çerçeve olduğu soucuna ulaşılmıştır.

Jones (2000) ise çalışmasının amacı ise öğrencilerin üniversite seviyesindeki matematiksel ispat deneyimlerini değerlendirme şeklindedir. Üniversite öğrencilerinin örneklemi oluşturduğu araştırmada, öğrencilerin çok az sayıda ispat gösterimleri yaptıklarını gözlenmiştir. Bu sonuçlara göre üniversite öğrencilerinin etkili matematik eğitimi almamış olduğuna dikkat çekilmiştir.

McCrone ve Martin (2004) yaptıkları çalışmada lise öğrencilerinin düşüncelerinin ispat kuralları ile uyuşmasını ve ispat yapma becerilerini araştırmışlardır. Veriler "İspat Kuralları Anketi" ve "İspat Oluşturma Başarı Testi" ile toplanmıştır. Elde edilen veriler öğrencilerin formal ispatın mantıksal gerektirmelerinin farkında olmadıklarını göstermiştir. Öğrenciler ispatın genel olması gerektiği düşüncesinde olmalarına rağmen, tek bir örnekten elde ettikleri yargıdan kolay bir şekilde etkilenebildiklerini vurgulamışlardır. Bazı öğrenciler prototip bir örneğin genel kuralları gerektirdiğini savunmuşlardır.

Knuth (2002) araştırmasında 17 ortaöğretim matematik öğretmeninin, ortaöğretim matematiği bağlamında ispat konusundaki düşüncelerini ve ortaöğretim matematiğinde ispatın nasıl oluştuğunu belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmaya göre öğretmenler ispatı her öğrencinin değil sadece belli bir düzeye gelmiş öğrencilerin kavrayabileceği düşüncesinde olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğretmenler ispatın bir konu olabileceğini değil matematiği çalışabilecekleri ve matematiksel iletişim kurabilecekleri bir araç olarak gördükleri sonucuna ulaşılmıştır.

Martin, McCrone, Bower ve Dindyal (2005) tarafından yapılan çalşıma bir başka öğretmenler ile yapılan çalışmadır. Bu çalışmada ispat anlayışının gelişmesine etki eden faktörler araştırılmıştır. Çalışmada bir öğretmen ve öğrencilerinin davranışları 4 ay süre ile sınıf ortamında öğrencilerin matematiksel varsayımları, gerekçelendirme sürecini ve öğrencinin oluşturduğu ispatları incelendiği süreçte belirlenmiş ve bu davranışlar yorumlanmıştır. Sonuçta öğretmenin pedagojik seçimleri ve davranışlarının öğrencilerin sınıf ortamında ispat ve akıl yürütme becerilerinin gelişimini etkilediği belirlenmiştir. Ayrıca öğretmenin seçtiği açık uçlu sorular, öğrencilerin akıl yürütmelerini geliştirecek diyaloglar kurgulamak, öğrencilerin ifadelerini analiz etmek; öğrencilerin varsayımlar oluşturmaları, gerekçelendirmeler yapmaları ve akıl yürütme dizileri oluşturmaları için ortam sağladığı görülmüştür. Böyle bir ortamda ders aktivitelerine etkin bir şekilde katılan öğrencilerin ispat yapma becerileri gelişmekte olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Yapılan çalışmalardan görüldüğü üzere genellikle öğretmen ve öğretmen adaylarına ispat anlayışlarının gelişmesine, ispat hakkında ki görüşlerine, algılarına ve ispat becerilerine değinilmiştir.

BÖLÜM III

ARAŞTIRMANIN YÖNTEMİ

Bu bölümde araştırmanın deseni, katılımcılar ile ilgili kişisel bilgiler, veri toplama araçları, araştırmanın uygulanması ve toplanan verilerin analiz ve yorumlanmasından bahsedilmiştir.

3.1. Yöntem

Akademisyen, matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme becerilerinin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır.

Nitel araştırmalar, algıların ve olayların doğal ortamında gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2000). Diğer bir ifade ile Ergün'ün (2005) belirttiği gibi nitel araştırmada "Niçin?", " Nasıl ?" ve "Ne şekilde ?" sorularına yanıt aranmaktadır. Nitel araştırmalar, araştırmacılara gözlem yapma, olaylar arasında ilişki kurma, yapılan bir doğrunun veya yanlışın nedenini en ince ayrıntılarına kadar araştırma kolaylığı sağlamaktadır. En önemlisi de nitel çalışmalar, önceden kurulmuş olan hipotezi veya varsayımları test etmek yerine var olan olgunun yapısının en ince ayrıntısına kadar anlaşılmasını sağlamaktadır.

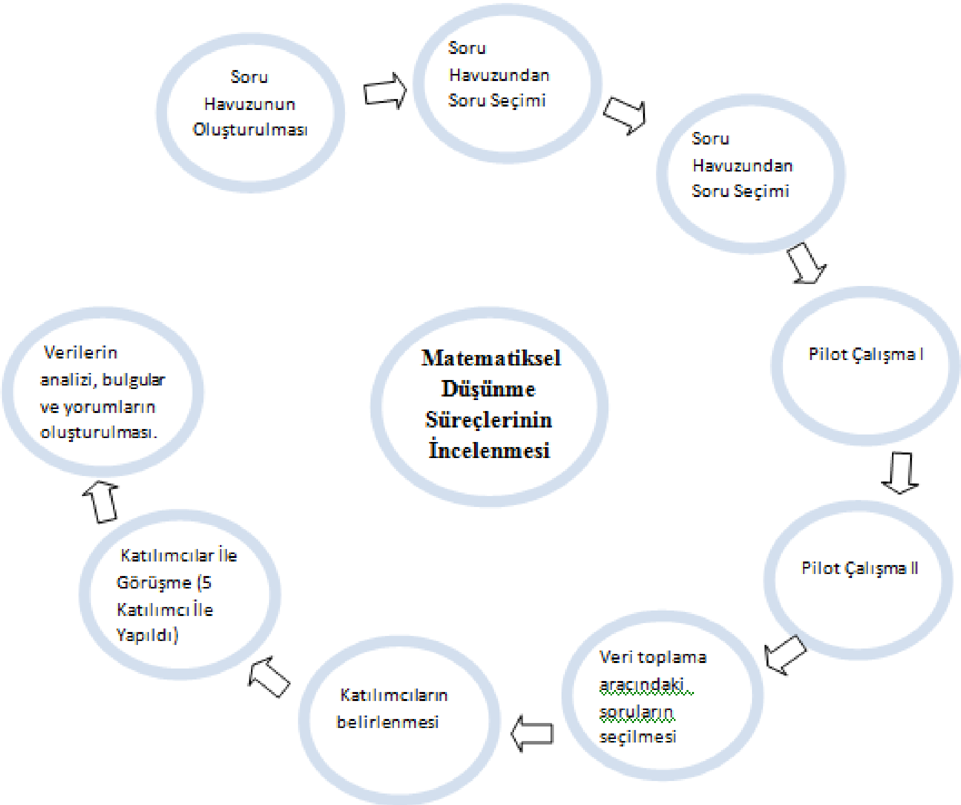
Ayrıca nitel araştırma yaklaşımında; araştırmacının kendisinin veri toplama aracı olması ile araştırmayı kendi bütünlüğü içinde ve doğal ortamında, verilerin bütün bir derinliği ve zenginliği içinde betimleyerek, örüntüleri ortaya çıkartıp, verilerin çokluluk ve farklılık arayışı ile kuram ve denence oluşturarak son bulması şeklinde bir yaklaşım benimsenmektedir. Son olarak ise nitel çalışmada araştırmacının rolü; olay ve olgulara dâhil, öznel perspektifi olan, empatik bir biçimdedir (Glesne ve Peskin, 1992).

Nitel bulgular üç farklı veri toplama şeklinden meydana gelmektedir. Bunlar derinlemesine, açık uçlu mülakatlar, doğrudan gözlem ve yazılı dokümanlardır (Patton, 2014). Çalışmanın verileri toplanırken bu üç durum dikkate alınmıştır.

Durum çalışması çoğunlukla nitel araştırma yöntemleri içerisinde görülmektedir (Stake, 1995). Yıldırım ve Şimşek'e (2000) göre "nasıl" ve "niçin" sorularının öncelikli olduğu, araştırmacının kontrol edemediği bir olgu ya da olayı derinliğine incelemesine imkân sağlayan araştırma yöntemidir. Durum çalışması, özellikle bireysel yürütülen çalışmalar için uygun bir yöntem olarak düşünülmektedir (Çepni, 2001).

Durum çalışmalarının eğitim araştırmalarında ki öneminden, araştırmacının, geneli temsil edebilecek özelin, bir resmini sunarak, ayrıntılı resme bakılarak genel hakkında bilgi sahibi olunmaya ve genel anlaşılmaya çalışılacak şeklinde ifade edebiliriz (Bütün, 2005). Dolayısıyla bu çalışmada katılımcılara ait veriler sınırlı bir zamanda elde edildiğinden ve veri toplama araçlarında var olan matematiksel konu ya da kavramlarla sınırlı olduğundan ve çalışmada zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu, çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları (gözlemler, görüşmeler, görsel-işitseller, dokümanlar, raporlar) ile bir fenomenin bir ya da birkaç örneğinin derinlemesine çalışıldığı, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı nitel bir yaklaşım olan durum çalışması dikkate alınmıştır (Creswell, 2007; Given, 2008).

Durum çalışmasında izlenen süreç; (1) Araştırma sorularının geliştirilmesi, (2) araştırmanın alt problemlerinin geliştirilmesi, (3) analiz birimin saptanması, (4) çalışılacak durumun belirlenmesi, (5) araştırmaya katılacak bireylerin seçilmesi, (6) verilerin toplanması ve toplanan verinin önermelerle veya alt problemlerle ilişkilendirilmesi, (7) verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması ve (8) durum çalışmasının raporlaştırılması şeklindedir (Yıldırım ve Şimşek, 2000).Bu durum dikkate alınarak araştırmanın süreci genel hatları ile Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1. Araştırma Süreci

Araştırmanın ilk aşamasında çalışmada kullanılacak literatür taraması gerçekleştirilmiştir. Gerçekleşen literatür taraması sonucunda çalışmada kullanılması düşünülen soruları içeren soru havuzu oluşturulmuş ve bu soru havuzundan birinci pilot çalışma ile soruların seçilmesi gerçekleştirilmiştir. Seçilen bu sorular ile ikinci bir pilot çalışma yapılarak (Tuncay ve Demircioğlu, 2014) araştırmacının tecrübe kazanması sağlanmıştır. Daha sonra araştırmanın amacı ve konusuna uygun rastgele seçilen örneklem yöntemi ile belirlenen katılımcılara, pilot çalışmalar sonucunda son halini alan sorular ve edinilen tecrübeler doğrultusunda her bir katılımcı ile görüşmeler tek tek gerçekleştirilmiş. Gerçekleşen görüşme süreleri Tablo 4.1. de gösterilmiştir. Görüşmeler 24 ile 45 dk arasında sürmüştür. Son olarak ise elde edilen veriler, veri analizi yapılarak, bulgular ve yorumlar oluşturulmuştur.

3.1.1. Pilot Çalışma

Pilot çalışma, araştırmada kullanılan veri toplama araçlarının son halini alması, bu araçların geçerliliğinin oluşturulması ve asıl çalışma öncesinde ön çalışma niteliğinde bir çalışma yapılarak araştırmacının tecrübe ve deneyim kazanması açısından önemlidir. Ayrıca elde edilen verilerin doğru bir şekilde yorumlanması ve açıklanmasında pilot çalışma ayrı bir önem arz etmektedir (Bütün, 2005). Bu doğrultuda araştırma öncesinde veri toplama kâğıdında sorulacak soruların seçimi için pilot çalışma-I ve araştırmacının verileri analiz ederken daha tecrübeli olması açısından pilot çalışma-II gerçekleşmiştir.

3.1.1.1. Pilot Çalışma-I

Asıl çalışmada kullanılan soruların seçimi I. pilot çalışma yardımıyla gerçekleşmiştir. Pilot-I çalışmadaki amaç öğretmen adaylarının amaçlandığı şekilde problemi anlayıp anlamadığını belirlemek, katılımcıların problemde biçimsel olarak anlamakta zorlandığı yerleri tespit ederek düzeltmek ve yoğun ilgi gören, cevaplandırılan soruları belirleyerek soruları seçmektir. Bunun için öncelikle veri toplama aracındaki sorular belirlenirken Mason vd. (2010) tarafından yazılmış olan "Thinking Mathematically" adlı kaynaktan özelleştirme, genelleme ve varsayımda bulunma boyutlarını içeren toplamda 62 sorudan oluşan bir soru havuzu oluşturulmuştur. Soru havuzu oluşturma aşamasından sonra uzman görüşü alınarak özelleştirme, genelleme ve varsayımda bulunma sorularına yönelik 12 soruluk bir veri toplama aracı hazırlanmıştır. Daha sonra hazırlanan veri toplama aracından problemleri seçme ve test etmek için 18.03.2014 tarihinde Cumhuriyet Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği 4. sınıf (İ.Ö) öğrencilerine (23 kişi), 19.03.2014 tarihinde ise 4.sınıf (N.Ö) öğrencilerine (25 kişi) toplamda 48 öğrenciye uygulanmıştır. Sorular önceden araştırmacı tarafından çözülüp tahmini soruların çözümü için yeterli süre olarak her bir soru için 4-5 dakika düşünülmüş ve soru kâğıtları öğrencilere dağıtılarak bir ders süresi (40-50 dakika) içerisinde çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerin soruları çözmeleri sırasında araştırmacının gözlemleri doğrultusunda ve öğrencilerin soruları çözdükten sonra toplanan cevap kâğıtlarının incelenmesi sonucu en çok cevaplandırılan ve beklenilen düşünme sürecinin gerçekleştiği düşünülen sorular belirlenerek veri toplama aracındaki soruların seçimi gerçekleşmiştir.

Araştırmacının gözlemlerinden bazıları aşağıdaki gibidir;

"*soru çözüm sırasında öğrenciler etraflarında ki somut materyalleri kulandılar, özellikle kağıt şerit sorusunun çözümünde çoğu öğrenci defterlerinden bir yaprak yırtmış veya soru kâğıtlarını kullanmıştır. Ayrıca bu sorunun çözümüne de anlaşılan ilgi bir hayli büyüktü. Bu ilgi sınıfta ki kâğıt sesinden anlaşılabiliyordu ve bazı* *arkadaşlarının bu soruda özellikle somut olarak soruyu çözmeye çalıştığını gören bazı öğrencilerde arkadaşlarından etkilenerek soruyu somut şekilde çözmeye çalıştılar."*

"6. ve 5. sorularda anlamakta sıkıntı çekildiğini gördüm. Çünkü öğrenciler sıkça bu sorular hakkında bilgi istediler."

"*Sınıftan en erken 28 dakika içinde 3 öğrenci aynı anda çıktı, çözüm kağıtlarına baktığım da bu öğrencilerin soruların hepsini çözmediğini gözlemledim."*

Buradan görüldüğü üzere araştırmanın birinci sorusu olan *kâğıt şerit* sorusu veri toplama kâğıdına seçilmiştir. Bu duruma benzer şekilde pilot-I çalışmasından elde edilen bulgular ile soruların seçimi gerçekleşmiştir.

3.1.1.2. Pilot Çalışma-II

Gerçekleşen Pilot çalışma-I sonunda belirlenen sorular araştırmacının tecrübe ve deneyim kazanması için 2013-2014 eğitim-öğretim yılının Bahar döneminde Cumhuriyet Üniversitesinin Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği programının 5. sınıfında öğrenim gören N.Ö ve İ.Ö toplam 40 öğretmen adayına uygulanmıştır. Bu pilot çalışmaya bu araştırmaya katılan 5. Sınıftaki iki öğretmen adayı dâhil edilmemiştir. Bu uygulama sonucunda elde edilen bulgular (Tuncay ve Demircioğlu, 2014) doğrultusunda çalışmaya geçilmiştir.

3.2.Çalışmanın Katılımcıları

Çalışmanın katılımcılarını 2013-2014 eğitim öğretim bahar döneminde, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda 5. sınıfta eğitim ve öğretimine devam eden gönüllü iki matematik öğretmen adayı, Mersin Silifke ilçesinin Göksu Anadolu lisesinde kadrolu iki matematik öğretmeni ve bir akademisyen olmak üzere toplam 5 katılımcı oluşturmaktadır.

Çalışmanın amacı ve yöntemi dikkate alındığında, öncelikle öğretmen adaylarının, öğretmenlerin ve akademisyenin süreç boyunca tüm etkinliklere katılmaya istekli ve gönüllü olmalarına özen gösterilmiştir. Gönüllü olan öğretmen ve öğretmen adaylarının seçiminde cinsiyet ve eğitim durumları dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda öğretmen ve öğretmen adaylarından bir bayan bir erkek çalışmaya katılmıştır. Aynı şekilde akademisyenin doktora tez aşamasında olmasına paralel olarak öğretmenlerden birisinin yüksek lisans yapmış olması dikkate alınmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyenin hiçbir şekilde isimlerinin deşifre edilemeyeceği söylenmiştir. Çalışmanın etiği açısından katılımcıların ismi gizli tutulmuştur. Öğretmen adayları için ÖA1 ve ÖA2, öğretmenler için Ö1 ve Ö2 ve akademisyen için A1 şeklinde isimlendirme yapılmıştır. Tablo 3.1. de çalışmanın katılımcıları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tablo 3.1. Çalışmanın Katılımcıları

Katılımcı	**Hizmet Yılı**	**Eğitim Durumu**	**Mesleği**	**Cinsiyeti**
A1	5	Doktora (Tez Aşaması)	Araştırma görevlisi	Erkek
Ö1	13	Yüksek lisans	Öğretmen	Erkek
Ö2	12	Lisans	Öğretmen	Bayan
ÖA1	-	5. Sınıf	-	Erkek
ÖA2	-	5. Sınıf	-	Bayan

Tablo 3.2. den görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğretmenlerin hizmet yılı birbirine çok yakındır.

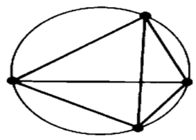
3.3. Verileri Toplamak İçin Kullanılan Sorular

Pilot-I ve Pilot-II çalışmasından elde edilen bulgular hem araştırmacı için bir çerçeve hem de bu çerçevede asıl çalışmanın verileri analiz edilirken bir temel oluşturmuştur.

Soruların anlaşılırlığı, çözüm için gerekli süre, düşünme süreçlerini daha net yansıtma, zorluk, kolaylık, farklı çözüm yolları içermesi ve anlaşılabilir olması gibi kriterler dikkate alınarak uzman görüşleri ile veri toplama aracı son halini almıştır. İspat boyutundaki sorular ise analiz, soyut matematik gibi kitaplarda yer alan ispatlar arasından seçilmiştir.

En son olarak genelleme, özelleştirme, varsayımda bulunma ve ispat boyutlarının her birine yönelik 2 soru olmak üzere toplam 8 sorudan oluşan veri toplama aracı oluşturulmuştur. Araçta yer alan 8 soru, katılımcıların birden fazla strateji üreterek çözebileceği soru çeşidindendir. Dolayısıyla Cai'nin (1997) ifade ettiği gibi bu tür sorular katılımcıların matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerini değerlendirebilme adına avantaj sağlamaktadır. Tablo 3.3. de bu sorular verilmiştir.

Tablo 3.2. Veri Toplama İçin Kullanılan Sorular

Özelleştirme	**Kağıt şerit** Bir kâğıdı uçlarından tutup sağ ucunu sol ucunun üstüne getirip bastırın, ikiye katlansın. Aynı kâğıt üzerinde iki kez aynı işlemi tekrarlayın. Kaç tane iz oluşmuştur? Bu işlemi artarda 10 kez yaparsanız toplamda kaç tane iz oluşmuş olur? (Mason vd., 2010) **Palindromik Sayılar** 12321 şeklinde tersten okunuşu da aynı olan sayılara palindromik sayılar denir. Dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğu sizce doğru mudur? Açıklayınız. (Mason vd., 2010)
Genelleme	**Çember ve Noktalar** Bir çember etrafına “n” nokta yerleştiriniz ve her çift noktayı düz çizgilerle birleştiriniz. Çemberin bölünebildiği en fazla bölgenin sayısı nedir? Örneğin aşağıdaki şekilde 4 nokta varken 8 olası bölge oluşur (Mason vd., 2010)  **Kısa Yoldan Çarpma Kuralı** n є N olmak üzere (n5) şeklinde 5 ile biten sayıların karelerini hesaplayabilmenin kısa bir kuralı var mıdır?

Varsayımda bulunma	**Boyalı lastikler** Bir bisiklet şekil deki gibi 6 inç genişliğindeki ıslak boyalı bir şeritten geçiyor. Bir süre düz gittikten sonra lastiklere yapışan boyanın yola bıraktığı izlere baktığınız da sizce sonuç ne olur? (Mason vd., 2010)  **En iyi boydaki aynalar** Aynı anda hem saçınızı hem ayakkabınızı görebildiğiniz en kısa duvar aynasının boyu nedir? (Mason vd., 2010).
İspat	$\sqrt{8}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayabilir misiniz? 1+2+3+…+n = $\frac{n\,(n+1)}{2}$ olduğunu gösteriniz?

"Kağıt şerit" sorunun sorulmasının amacı katılımcıların özelleştirmeyi neden kullanacaklarını yani kaç özel durum alacaklarını, bu özel durumları alma nedenleri (soruyu anlama, sorunun ne istediğini fark etme, örüntü arama,…) görmek ve karşılaştırmalar yapmak içindir. Palindromik sayılar sorusu kâğıt şerit sorusundan oldukça farklıdır. Çünkü kâğıt şerit sorusunda kâğıt gibi somut bir materyal ile özel durumlara bakılabileceği gibi aynı zamanda kâğıt üzerinde şekil çizilerek de veya zihinden katlama yapılarak da çözülebilecek bir soru tarzındadır. Palindromik sayılar sorusu ise sayısal örnekler yardımı ile özel durumlardan yola çıkılarak çözülebileceği gibi direk cebirsel ifade (abba) yazılarak da çözülebilmektedir. Bu anlamda bu iki soru farklılaşmaktadır.

Genellemenin ilk sorusu çok sık sorulan veya kaynaklarda rastladığımız (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, vd., 2013) sorulardan bir tanesidir. Bu soruda Mason vd.'nin (2010) ifade ettiği gibi ilk beş durumdan yola çıkmak "6 nokta için 32 bölge oluşacaktır" şeklinde yanlış bir varsayıma neden olacaktır. Bu nedenle bu sorunun sorulmasının amacı katılımcıların birkaç özel durumdan hareketle durumların geniş bir sınıfı için tahminler yaparken yani genelleme sürecinde nasıl davranacaklarını görmektir. Diğer soru ise çarpma işleminin kısa yolu olarak ifade edilen kurallardan bir tanesidir. Bu sorunun sorulma amacı ise kural olarak bilinen bir ifadenin çıkarılması aşamasında nasıl düşünecekleri, kurala nasıl ulaşabildikleri ve bu süreç içerisinde katılımcıların davranışları arasında ne türlü benzerlikler veya farklılıklar olabileceğini görmektir.

"Boyalı lastikler" sorusu Mason vd.'nin (2010) ifade ettiği gibi açık uçlu bir sorudur. Ön ve arka tekerleğin bırakacağı izler açısından değerlendirildiğinde farklı cevapların çıkması muhtemeldir. Ayrıca bu soruda ön ve arka tekerleğin arasında uzaklığa göre de cevaplar farklılaşabilmektedir. Elbette ne kadar zaman yol aldığı da ele alınabilecek boyutlardan bir tanesidir. Dolayısıyla bu sorunun seçilmesinin nedeni katılımcıların neleri dikkate alarak varsayımlarda bulunduklarını gözlemlemektir. En iyi boydaki aynalar sorusunun boyalı lastikler sorusundan farkı ise hiçbir sayısal verinin verilmemiş olmasıdır.

İspat sorularından birincisi $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğinin ispatına benzerliğinden dolayı seçilmiştir. Diğer soru ise geleneksel tümevarım yöntemi (Day, 2015) ile yapılan bir ispattır.

3.4. Araştırmanın Geçerlilik ve Güvenirliği

Veri toplama kâğıdının (açık uçlu sorular) geliştirilmesi ve geçerliliğinde dört aşama izlenmiştir. Birinci aşamada literatür taramasına, ikinci aşamada soru havuzunun oluşturulmasına, üçüncü aşamada yapılan pilot çalışmalar ile soru havuzundan seçme ve test etme, dördüncü aşamada ise uzman görüşlerinin değerlendirilmesine yer verilmiştir.

Güvenirlik de ise; yapılmış olan bir çalışmanın başka bir araştırmacı tarafından aynı biçimde tekrar edildiğinde, aynı veya benzer sonuçları vermesi ile ilgilidir (Demircioğlu, 2008). Bu çalışmada güvenirliği arttırmak için, araştırmacı takip ettiği süreçleri açık bir biçimde tanımlamış ve ilgili dokümanlar (Mason, vd., 2010) ile desteklemiştir. Ayrıca güvenirliğinin sağlanması için aşağıdaki önlemler alınmıştır;

- Araştırmanın veri kaynağı olan öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyen açık bir biçimde tanımlanmıştır.

- Araştırmanın yöntemi, aşamaları, veri toplama ve analiz yöntemleri ile bulguları yorumlama ve sonuçlara ulaşma konusunda neler yapıldığı açıklanmıştır.

- Gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla açıklanmıştır.

- Görüşme yöntemiyle elde edilen bulgular, gözlem ve doküman analizi yöntemleriyle elde edilen bulgularla teyit edilerek, sonuçlar değerlendirilmiştir.

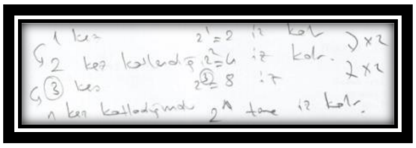
3.5. Verilerin Analizi

Verilerin toplanması, 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar döneminde ve tek oturumda toplanmıştır. Her bir oturum katılımcıların uygun olduğu zaman dilimlerinde randevu alınıp her bir katılımcı ile ayrı ayrı görüşülerek yapılmıştır. Katılımcılara veri toplama süreci boyunca oturumun kameraya alınacağı belirtilmiş ve hiçbir katılımcı tedirginlik duymamıştır. Sadece kamera kayıtlarında yüzleri çekilmemeye özen gösterilmiştir. Oturum boyunca kâğıt ve kalem hazır olarak verilmiştir. Veri toplama aracı katılımcılara verildikten hemen sonra gerekli bilgilendirmeler yapılmıştır ve "*istediğiniz sorudan başlayabilirsiniz*" şeklinde açıklamasında bulunulmuştur. Çözüm süreci boyunca düşündükleri her şeyi ifade etmeleri istenmiştir. Soruların çözümlerini yaptıkları kâğıtları alınmıştır.

Görüşmelerde yapılan video kayıtları incelenerek deşifre edilmiş, yazılı hale getirilmiş, katılımcıların teslim ettikleri çözüm kâğıtları ile birlikte bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Araştırma sürecini daha iyi yansıtabilmek, katılımcıların süreç içindeki düşünme yaklaşımlarını daha iyi izleyebilmek ve karşılaştırmalar yapabilmek için matematiksel düşünmenin boyutları temele alınarak her bir boyut için bulgular ayrı ayrı verilmiştir ve katılımcılar arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu sayede benzerlikler ve farklılıklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Verilerin analizinin nasıl yapıldığını açıklamak adına A1'in veri toplama kağıdının birinci sorusuna verdiği cevabın analiz örneği aşağıda ki gibi ve Tablo 3.3.'de verilmiştir.

Tablo3.3. Özelleştirmenin Kâğıt Şerit Sorusu Kodlama Örneği

	A1'den Elde Edilen Bulgular
Özelleştirme 1 (soruyu anlama)	A1 soruyu okuduktan sonra eline bir kağıt alarak, soruyu somutlaştırmaya çalışmıştır. Bu işlem sırasında sağ uç ile sol ucu nasıl katlayacağını "*kastımız uçlarından tutup şu şekilde değil mi? Yoksaaa şu şekilde değil mi sağ ucu ile sol ucunu üst üste getirip bastırın*" şeklinde ifade etmiştir. Katlama sonucu kâğıtta oluşan katlanma izlerini saymış "*bir defa katlamada 1 tane iz bırakır*" diyerek soruyu bir kez katlama ile anlamlandırmaya anlamaya çalışmıştır.  
Özelleştirme 2 (soruyu anlama) Yanlış katlama soruyu anlamama	"*Sonra yine aynı şekilde ikiye katladığımızda*" diyerek Şekil 4.3. de ki gibi ikinci katlama işlemini gerçekleştirmiştir. İkinci kez katlama sonucu elde ettiği katlanma izlerini sayarak; "*Bir dakika bakalım şöyle bir katladım orta noktadan tekrar sağ ucunu sol ucunu üzerine katladığımızda şöyle bir şekil oluşur. Katlanma izleri 4 tane olur*" şeklinde ifade etmiştir. İkinci katlama esnasında dikkat çeken durum, soruda ifade edilen "*sağ ucundan tutup sol ucuna katlayınız*" eylemini art arda yapmak yerine, kağıdın altı ile üstünü birleştirip ve kağıdı çevirerek farklı konumlara getirmiştir. Bu esnada herhangi bir müdahale yapılmamıştır. Nedeni ise çıkan sonuçlar doğrultusunda oluşacak örüntüyü etkilememektir. 2. Katlamayı yine soruyu anlamak için kullanıyor .Başka bir dikkat çeken durum ise sayma esnasında Şekil 4.4. de görüldüğü üzere oluşan izleri sayarken, başlangıç noktası olarak katlanma izinin orta noktasını referans almasıdır. Bu ise oluşan örüntüyü ve sonucu değiştirmektedir.  
Genelleme-n katlama için varsayımda bulunma-varsayımını doğrulama (doğrulamak için aldığı özel durumları kullanma farklı özel durum almama) n=10 alma cevabı söyleme	Daha sonra A1 katlanma izlerinin farklı sonuçlar ve anlamlı bir ilişki içermemesinden dolayı daha önce yapmış olduğu ifadesini "*bence iki kez katlandığında 4 parça, 4 iz kalır, bir kez katladığımda 2 iz kalır, dolayısıyla n-kez katladığımda… üç kez katladığımda 8 iz olacak. Çarpı 2, çarpı 2"* şeklinde değiştirmiş, cevap kağıdına şekil 4.5. deki gibi yazmıştır.  Burada üç kez katlamada 8 iz oluşacağını sözel olarak ifade etmiş, birinci ve ikinci katlamalarda ki gibi üçüncü katlamayı kâğıt üzerinde gösterme gereksinimi hissetmemiştir. Bunu da düşüncelerini dile getirirken iki kez katlamada oluşan 4 tane izi göstererek "*2'nin karesidir bu*" demiştir. Daha sonra cevap kâğıdı üzerine yazdığı üç katlamada 8 iz olur yanıtını göstererek "*buda 2'nin küpüdür. Dolayısıyla n-kez katladığımda 2^n tane, çünkü n=3 için 2^3 dedik. n=n için 2^n tane iz kalır. Dolayısıyla <u>genellemeye</u> giderek n-kez katladığımda 2^n tane iz bıraktığını gördüm. n=10 dediği için 2^{10} tane iz bırakır"* şeklinde ifade etmiştir. Görüldüğü gibi 1. ve 2. katlamayı da soruyu anlamak için yapıp elde edilen iz sayılarını kâğıdına yazmış ve sonrasında n kez katlama için oluşacak iz sayısı için bir varsayımda bulunmuş ve varsayımın doğruluğunu denemeden 10 katlama için oluşacak iz sayısını kuralda n yerine 10 koyarak ifade etmiştir. Bu aşamada araştırmacı "*Böyle bir genel kanıya ulaşmak için yapılan iki katlama yeterli midir?*" diye sormuştur. Bu soruya bir müddet düşündükten sonra "*iki defa katlama yeterli mi diyorsun. Şu 4 dediğimde 2'nin kuvveti şeklinde yazdım. Dolayısıyla 2 tane katlama yeterlidir bence bu soru için*" şeklinde cevap vermiştir. Görüldüğü gibi katılımcı varsayımının doğruluğunu göstermek için farklı özel durumlara bakmamıştır.

Yukarıdan da görüldüğü üzere araştırmanın bulguları elde edilirken veri analizi bu şekilde gerçekleşmiştir.

3.6. Arastırmacının Rolü

Araştırmacı yüksek lisans ders döneminde nitel dersler almıştır. Bu anlamda nitel araştırma ile ilgili yeterli bilgiye sahiptir. Ayrıca problem durumu ile ilgili yapılan birçok çalısmaya ulaşmış ve bu çalısmalarda ulaşılan sonuçlar doğrultusunda çalışmanına yön vermiştir. Bu anlamda da matematiksel düşünme ile ilgili yeterli bilgisi oluşmuştur.

Bunlara ek olarak asıl çalışma öncesi iki pilot çalışma yapmıştır. Bu çalışmaların sonuçları bir sempozyumda sunulmuştur. Dolayısıyla hem yöntem hem de matematiksel düşünme süreçlerinin yoklanması ile ilgili yeterli deneyim yaşamıştır. Bu nedenle araştırmacı hem nitel araştırma hem de matematiksel düşünme ile ilgili yeterli bilgi ve deneyime sahiptir.

Nitel arastırmalarda araştırmacının rolü, nicel arastırmalarda oldugu gibi veriyi toplayıp istatiksel sonuçlara ulasan kisi degildir. Aksine süreci katılımcılarla birlikte yaşayan, doğrudan görüşen ve katılımcılarla etkileşim içinde olan kişidir. Bu nedenle tüm süreç arastrmacı tarafından yürütülmüştür. Araştırma raporunu yazarken de inandırıcılığa ve süreci detaylı bir şekilde aktarmaya özen göstermiştir. Arastırmacı her bulguyu veri kaynaklarından doğrudan alıntı yaparak desteklemistir. Böylelikle okuyucuların verilere oldugu şekli ile ulaşmasına ve sonuçların geçerliligini yargılayabilmesine olanak sağlamıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR ve YORUM

Bu bölümde; araştırmada elde edilen verilerin, dördüncü bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri ve deşifreleri sonucunda ulaşılan bulgulara yer verilmiştir.

“Matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme boyutlarına göre düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?” olarak ifade edilen probleme cevap verebilmek için her bir boyut ayrı ayrı incelenmiştir. Her bir boyut bir alt başlık altında ele alınmış ve katılımcılar karşılaştırılmıştır. Buradaki analizler kişiye özeldir. Elde edilen bulgular ise literatür ile karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

4.1.Tüm Süreçten Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Bu bölümde tüm görüşme süreci göz önüne alınarak katılımcıların veri toplama aracındaki soruları hangi sıra ile çözdükleri her soruya ne kadar süre ayırdıkları incelenmiş ve bu bulgular Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1. Katılımcıların Her Bir Soru İçin Ayırdıkları Süreler

		Özelleştirme		Genelleme		Varsayımda Bulunma		İspat		
	Sorulara göz gezdirme süreleri	1.soru	2.soru	3.soru	4.soru	5.soru	6.soru	7.soru	8.soru	**TOPLAM**
A1		04:13	08:10	10:10	03:03	09:52	03:28	03:45	02:26	45:07
Ö1	3:01	04:43	**02:02***	05:09	**00:43***	04:41	04:27	**02:39***	01:57	29:24
Ö2		02:50	02:07	04:51	03:44	**03:03***	**01:01***	03:59	02:40	**24:15***
ÖA1		05:20	06:59	**04:01***	08:43	06:31	09:23	08:08	**01:52***	50:57
ÖA2		**02:18***	06:23	06:42	03:46	03:05	01:50	05:51	03:21	33:16
TOPLAM		19:24	25:41	30:53	19:59	27:12	20:09	24:22	12:16	2:59:56
*ile en kısa süreler gösterilmiştir.										

Burada birinci ve ikinci soru özelleştirme boyutuna, üçüncü ve dördüncü soru genelleştirme boyutuna, beşinci ve altıncı soru varsayımda bulunma boyutuna, yedinci ve sekizinci sorular ise ispat boyutuna yönelik sorulan sorulardır.

Tablo 4.1'den görüldüğü gibi her bir soru ayrı ayrı incelendiğinde hiçbir soruyu A1 en kısa zamanda çözmemiştir. Sorulara ayrılan toplam sürelere bakıldığında ise, en kısa sürede Ö2'nin çözmeye çalışırken en uzun sürede ÖA1'in çözmeye çalıştığı görülmektedir. *Özelleştirme* boyutunun birinci sorusu için Ö2 ile ÖA2 kısa bir süre ayırırken A1 ile Ö1 ve ÖA1 daha uzun süre ayırmışlardır. Özelleştirme boyutunun ikinci sorusu için ise Ö1 ve Ö2 daha kısa süre ayırırken A1, ÖA1 ve ÖA2 daha uzun süre ayırdığı görülmektedir. Özetlemek gerekirse Ö2 her iki soruda da en kısa süre ayırmıştır. *Genelleştirmenin* birinci sorusu için A1 en uzun süreyi ayırırken diğer katılımcılar daha kısa süre ayırmışlardır. Ayrıca ÖA1 dışında ki katılımcıların en çok süre ayırdığı soru olmuştur. Genelleştirme boyutunun ikinci sorusuna Ö1 bir dakikadan daha kısa bir süre ayırmıştır. A1, Ö2 ve ÖA2 yaklaşık eşit süre ayırırken, ÖA1 ise en uzun süreyi ayırmıştır. *Varsayımda bulunmanın* birinci sorusuna Ö2 ve ÖA2 diğer katılımcılardan daha az süre ayırmıştır. Varsayımda bulunma boyutunun ikinci sorusuna ise Ö2 en kısa süreyi ayırırken en uzun süreyi ise ÖA1'in ayırdığı görülmektedir. *İspat* boyutunun birinci sorusuna en kısa süreyi Ö1 ayırırken, en uzun süreyi ÖA1 ayırmıştır. İspatın ikinci sorusuna ise katılımcıların her birinin yaklaşık aynı süre ayırdığı görülmektedir. Katılımcıların aynı boyuttaki sorulara daha uzun veya kısa süre ayırmaları boyutlar bazında incelemeler sırasında açıklanmıştır.

Katılımcıların soruları hangi sıra ile çözdükleri bakıldığında ise, soru kâğıdı katılımcılara verildikten hemen sonra gerekli bilgilendirmeler yapılmıştır ve "*istediğiniz sorudan başlaya bilirsiniz.*" şeklinde açıklamada bulunulmuştur. Bu açıklama doğrultusunda katılımcılar soruları sırasıyla;

A1; soru numarası = 7-8-6-2-3-4-5-1,

Ö1; soru numarası = 4-7-5-6-3-2-1-8,

Ö2; soru numarası = 1-2-3-4-5-6-7-8,

ÖA1; soru numarası = 1-2-3-4-5-6-7-8,

ÖA2; soru numarası = 1-2-3-4-5-6-7-8

şeklinde çözmüşlerdir. A1 ile Ö1 dışındaki katılımcılar verilen sıra ile soruları çözmüşlerdir. Ö1 soruları cevaplandırmaya başlamadan önce yaklaşık üç dakika soruların tümüne göz gezdirmiştir. "*Bildiklerimden başlayayım o zaman*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Yukarıda görüldüğü gibi karışık sırada çözmüştür. Buna rağmen varsayımda bulunma ve özelleştirme sorularını art arda çözmüştür. A1 ise önce ispat sorularını cevaplandırmaya başlamıştır. Bu durum karşısında araştırmacı ile A1'in arasında aşağıda ki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: "Niye 8. sorudan başladınız hocam?"

A1: "Daha böyle bir yakın geldi bana"

Tüm süreç göz önüne alındığında A1'in soruları cevaplandırma sırası ile sorulara ayırdığı süreler arasında, sonlara doğru cevaplandırdığı sorulara daha çok süre ayırdığı şeklinde bir ilişki görülmektedir. Diğer soruları cevaplandırma sırası ile cevaplandırma süresi arasında anlamlı bir ilişki dikkat çekmemektedir. Ayrıca A1 ve Ö1 özelleştirme boyutunun birinci sorusunu sırası ile en son ve sondan bir önce cevaplandırdıkları görülmektedir. Ö2 soruları sıra ile cevaplandırmasına karşın, cevaplandırma süreleri arasında diğer katılımcılara göre çok dalgalanmalar (farklar) görülmemektedir. Bu soruları cevaplandırma süre ve sıraları katılımcıların boyutlara vermiş oldukları cevaplar incelenirken detaylı bir şekilde nedenleri ile açıklanmıştır.

4.2. Özelleştirme Boyutundan Elde edilen Bulgular ve Yorum

Araştırmanın birinci alt problemi "Matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme boyutlarından özelleştirme boyutundaki düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?" olarak ifade edilmiştir. Bu alt probleme cevap verebilmek için katılımcılara iki soru yöneltilmiştir. Burada ki amaç katılımcıların özelleştirme yaparak, sorunun anlaşılırlığını mı, yoksa özel örnekler deneyerek sistematik bir şekilde mantıklı çıkarıma ulaşılıp ulaşılamayacağını incelemektir. Bu süreçte var olan farklılıkları da katılımcılara göre değerlendirmektir. Katılımcılara yöneltilen her bir probleme ilişkin bulgular da ayrı ayrı verilmiş ve daha sonra karşılaştırmalar yapılmıştır.

4.2.1. Özelleştirme Boyutunun Birinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Özelleştirmeye yönelik yöneltilen ilk soru "*Bir kâğıdı uçlarından tutup sağ ucunu sol ucunun üstüne getirip bastırın, ikiye katlansın. Aynı kâğıt üzerinde iki kez aynı işlemi tekrarlayın. Kaç tane iz oluşmuştur? Bu işlemi artarda 10 kez yaparsanız toplamda kaç tane iz oluşmuş olur?*" şeklindedir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır.

4.2.1.1. A1’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soru kâğıdını kısa bir süre inceledikten sonra, “*daha bildik, tanıdık sorudan başladım…*” şeklinde ifade de bulunmuş ve soruları cevaplandırma sırası göz önüne alındığında en son olarak özelleştirmenin birinci sorusunu cevaplandırmıştır. A1 soruyu okuduktan sonra Şekil 4.1.’deki gibi eline bir kâğıt alarak, soruyu somutlaştırmaya, anlamaya çalışmıştır.

Şekil 4.1. A1’in Soruyu Okuduktan Sonra Anlamaya Çalışması

Bu işlem sırasında sağ uç ile sol ucu nasıl katlayacağını “*kastımız uçlarından tutup şu şekilde değil mi? Yoksaaa şu şekilde değil mi sağ ucu ile sol ucunu üst üste getirip bastırın*” şeklinde ifade etmiştir. Biraz düşündükten sonra Şekil 4.2. deki gibi ilk katlamayı gerçekleştirmiştir.

Şekil 4.2. A1’in Kâğıdı İlk Katlaması

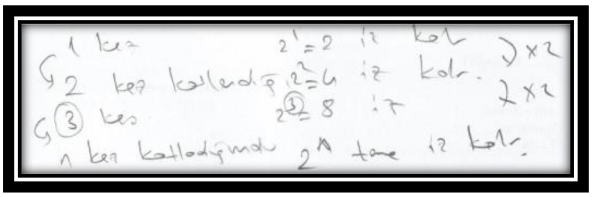
Katlama sonucu kâğıtta oluşan katlanma izlerini saymış “*bir defa katlamada 1 tane iz bırakır*” diyerek soruyu bir kez katlama ile anlamlandırmaya çalışmıştır. Yani ilk özelleştirmeyi soruyu anlamak için yapmıştır. “*Sonra yine aynı şekilde ikiye katladığımızda*” diyerek Şekil 4.3. de ki gibi ikinci katlama işlemini gerçekleştirmiştir.

Şekil 4.3. A1’in Kâğıdı İkinci Katlaması

İkinci kez katlama sonucu elde ettiği katlanma izlerini sayarak; "*Bir dakika bakalım şöyle bir katladım orta noktadan tekrar sağ ucunu sol ucunu üzerine katladığımızda şöyle bir şekil oluşur. Katlanma izleri 4 tane olur*" şeklinde ifade etmiştir. İkinci katlama esnasında dikkat çeken durum, soruda ifade edilen "*sağ ucundan tutup sol ucuna katlayınız*" eylemini art arda yapmak yerine, kâğıdın altı ile üstünü birleştirip ve kâğıdı çevirerek farklı konumlara getirmiştir. Bu esnada herhangi bir müdahale yapılmamıştır. Nedeni ise çıkan sonuçlar doğrultusunda oluşacak örüntüyü etkilememektir. Burada ikinci katlamayı da soruyu anlamak için yapmıştır fakat ilk katlamadan farklı bir katlama gerçekleştirmiştir. Eğer üçüncü katlamayı gerçekleştirmiş olsaydı bir sıkıntı olduğunun farkına varacağı söylenebilir. Burada başka bir dikkat çeken durum ise sayma esnasında Şekil 4.4. de görüldüğü üzere oluşan izleri sayarken, başlangıç noktası olarak katlanma izinin orta noktasını referans almasıdır. Bu ise oluşan örüntüyü ve sonucu değiştirmektedir.

Şekil 4.4. Başlangıç Noktası Olarak Katlanma İzinin Orta Noktasını Referans Alması

Daha sonra A1 katlanma izlerinin farklı sonuçlar ve anlamlı bir ilişki içermemesinden dolayı daha önce yapmış olduğu ifadesini "*bence iki kez katlandığında 4 parça, 4 iz kalır, bir kez katladığımda 2 iz kalır, dolayısıyla n-kez katladığımda... üç kez katladığımda 8 iz olacak. Çarpı 2, çarpı 2"* şeklinde değiştirmiş ve cevap kâğıdına Şekil 4.5. deki gibi yazmıştır. Görüldüğü gibi ilk katlamasındaki 1 iz olmasını da dikkate almamıştır. Yalnızca 2. katlamasındaki 4 iz cevabından yola çıkarak bir kural oluşturmuştur.



Şekil 4.5. A1'in Sorunun Çözümü İçin Yaptığı Çözüm

Burada üç kez katlamada 8 iz oluşacağını sözel olarak ifade etmiş, birinci ve ikinci katlamalarda ki gibi üçüncü katlamayı kâğıt üzerinde gösterme gereksinimi hissetmemiştir. Yani iki özel duruma bakmış fakat bir özel durumdan yola çıkarak üçüncü özel durum için bir tahmin yapmıştır. Fakat ikinci katlamayı da farklı yaptığı için oluşacak iz sayısını da bulurken hata yapmıştır. Düşüncelerini dile getirirken de iki kez katlamada oluşan 4 tane izi göstererek "*2'nin karesidir bu*" demiştir. Daha sonra cevap kâğıdı üzerine yazdığı üç katlamada 8 iz olur yanıtını göstererek "*buda 2'nin küpüdür. Dolayısıyla n-kez katladığımda 2^n tane, çünkü n=3 için 2^3 dedik. n=n için 2^n tane iz kalır. Dolayısıyla genellemeye giderek n-kez katladığımda 2^n tane iz bıraktığını gördüm. n=10 dediği için 2^{10} tane iz bırakır"* şeklinde ifade etmiştir. Görüldüğü gibi 1. ve 2. katlamayı da soruyu anlamak için yapıp elde edilen iz sayılarını kâğıdına yazmış ve sonrasında n kez katlama için oluşacak iz sayısı için bir varsayımda bulunmuş ve varsayımın doğruluğunu denemeden 10 katlama için oluşacak iz sayısını kuralda n yerine 10 koyarak ifade etmiştir.

Bu aşamada araştırmacı "*Böyle bir genel kanıya ulaşmak için yapılan iki katlama yeterli midir?*" diye sormuştur. Bu soruya bir müddet düşündükten sonra "*iki defa katlama yeterli mi diyorsun. Şu 4 dediğimde 2'nin kuvveti şeklinde yazdım. Dolayısıyla 2 tane katlama yeterlidir bence bu soru için*" şeklinde cevap vermiştir. Görüldüğü gibi katılımcı varsayımının doğruluğunu göstermek için farklı özel durumlara bakmamıştır. Süreci kontrol etmediği içinde ikinci katlama sonucu oluşan iz sayısının hatalı olduğunu fark edememiştir.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; A1 ilk başta birinci kez katlamada 1 iz oluşur yanıtını vermiştir. Daha sonra ikinci kez katlamayı gerçekleştirip 4 iz oluşur yanıtını vermiştir. Bu aşamaya kadar kâğıt üzerinde yalnızca 2 deneme yapmıştır. Bu aşamadan sonra üçüncü katlama için çıkarımda bulunmuş "n" için genelleme yapmıştır. En son olarak da onuncu katlama sorulduğu için n=10 alarak yanıt vermiştir. A1'in iki kez katlama sonucu oluşan *iz sayısı ile katlama sayısı arasında bir ilişki aradığı* ve 2^n şeklinde bir *genelleme düşündüğünü* belirtebiliriz. Bunu da ilk iki katlama işlemi gibi üçüncü katlama işlemini gerçekleştirmeden 8 iz oluşur cevabını ve ilk önce bir kez katlamada 1 iz oluşur yanıtını vermişken, daha sonra bir kez katlamada 2 iz oluşur şeklinde değiştirmesini gösterebiliriz. Bu süreçte A1'in yaptığı özelleştirmelerin problemi anlamlandırmak için olduğu, ikinci adımdan sonra genelleme yaptığı şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla A1'in genelleme düşüncesi ile hareket etmeye başladığı söylenebilir. Buradan görüldüğü üzere A1'in gerçekleştirdiği ilk özelleştirme düşünme yaklaşımı soruyu *anlamlandırmak* içinken daha sonra ki gerçekleştirdiği katlamalar yani özelleştirme (n=2 ve n=3) *genel kuralının mantıklı olduğunun gösterimi* (varsayımını doğrulama) için olduğu söylenebilir.

4.2.1.2. Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 soruyu okuduktan sonra sağ ucu ile sol ucu hakkında dönüt alma ihtiyacı duymuştur. Bu aşamada araştırmacı ile aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Ö1: "alttan mı bahsediyor, üsten mi bahsediyor"

Araştırmacı: "şimdi hocam sağ sol kavramımız var sadece, alt üst kavramımız yok, yani anladığınıza göre yapabilirsiniz"

Bu diyalogdan sonra Şekil 4.6. gibi boş bir kâğıdı alıp katlama işlemini gerçekleştirmektedir. Bunu yaptıktan sonra da alt uç ile üst ucu düşünerek Şekil 4.7. gibi katlama işlemini gerçekleştirmiş, "*Zaten bu köşeden yaparsam saçma oluyor*" şeklinde ifade etmiştir.

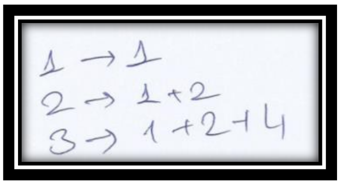
Şekil 4.6. Ö1'in Soruyu Anlamak İçin Yaptığı İlk Katlama

Şekil 4.7. Ö1'in Soruyu Anlamak İçin Yaptığı İkinci Katlama

Bu süreçte aslında Ö1 katlama şekilleri ile oluşacak izlerin bir kural oluşturup oluşturmadığını incelemiş ve soruda verilen katlamanın Şekil 4.6. gibi olacağı kanısına varmıştır. Bu aşamada özelleştirmeyi soruyu anlamak için kullandığı söylenebilir. Bu aşamadan sonra Şekil 4.8. ‘deki gibi birinci, ikinci ve üçüncü katlamayı artarda gerçekleştirmiştir.

Şekil 4.8. Ö1’in Soruyu Çözmek İçin Yaptığı Katlamalar

Bu katlamaları yaptıktan bir müddet sonra *“bu işlemi 10 kez yaparsam kaç bükülme izi olur. Kesin olmasa da”* şeklinde ifade ederek katlama sayısı ve katlanma izleri arasındaki ilişkiyi Şekil 4.9. deki gibi kâğıda yazmıştır. Bu aşamada bu yaptığı üç katlama işlemini bir örüntü arama, katlama sayısı ile oluşacak iz sayısı arasında bir ilişki görmek için yaptığı söylenebilir.

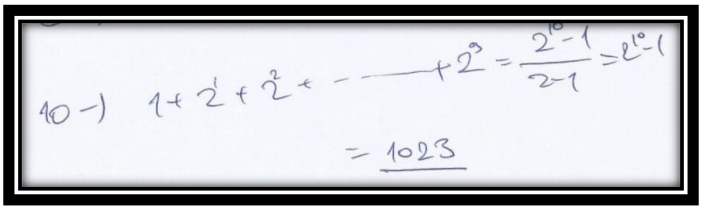


Şekil 4.9. Ö1’in Yaptığı Katlamalar Sonucu Yazdıkları

Katlama sayısı ile oluşan iz arasında ki ilişkiyi yazarken aynı zamanda; “*Birinci katlamada 1 tane olur. Bu şekilde düşünelim bakalım, ikinci katlamada 2 tane burada (kâğıt üzerinde sayarak) 1 tanede önceden vardı 2 tane yeni oluştu. Üçüncü kez katlamada daha önceki izler vardı 4 tane daha oluştu*” şeklinde ifade etmiştir. Bu aşamada katılımcının ne düşündüğünü daha iyi anlamak için araştırmacı “*nerden gördünüz hocam o dört katlamayı”* şeklinde soru yöneltmiştir. Ö1 ise **“***şu köşedekileri saysan yetiyor* (Şekil 4.10.). *Yani diğerleri var elimde bunlar yeni çıkıyor. Şu köşede kaç tane varsa*” diyerek kâğıt katlanmış şekildeyken oluşan izleri saymıştır.

Şekil 4.10. Ö1’in 3. Katlama İçin Çıkarımda Bulunması

Görüldüğü gibi katılımcı katlama sayısı ile oluşacak köşe sayısı arasında bir ilişki kurup kağıt üzerine bulduğu ilişkiyi kayıt etmiştir. “*Artış hep 2’nin kuvvetleri şeklinde gelecek o zaman bu*” ifadesinde bulunmuş, onuncu katlamada oluşan iz hakkında kâğıdına Şekil 4.11. de ki gibi yazmıştır.



Şekil 4.11. Ö1’in 10. Katlama İçin Kâğıda Yazdıkları

Şekil 4.11. den görüldüğü gibi toplam formülü ile sonuca ulaşmıştır. Fakat sonuca ulaşırken genel bir kurala (2^n-1 gibi) durumu bağlamamıştır. Yani n için bir kural yazıp n=10 almamıştır.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; Ö1 soruyu anlamak için her iki şekilde de kâğıdı katlamış fakat bir kural verecek şekilde olanı seçmiştir. Bu aşamada özelleştirmeyi soruyu anlamak için kullanmıştır. Bu aşamadan sonra her bir katlama ile önceki izlere ek olarak gelen kat sayılarını ifade etmiş, yani ekleyerek gitmiştir. Her bir katlamanın 2^n gibi ek bir iz getireceğini düşünmüştür. Deneme kâğıdını birinci, ikinci ve üçüncü kez katlama içinde kullanmış ve sonrasında onuncu katlamada oluşacak iz sayısını ifade etmiştir. Ö1 denediği katlama şekilleri ile oluşacak izlerin düzgün olup olmadığına bakarak, doğru katlamanın Şekil 4.6 da ki gibi olacağını anlamıştır. Dolayısıyla *izler arasında bir ilişki* olacağı düşüncesine varmıştır. Özelleştirmenin amaçlarından *olan sorunun ne olduğu hissi*ne sahip olup, soruyu *anlamlandırıp*, çözüm için *kendine güven kazandığı* söylenebilir. Ö1’in bu davranışı Mason vd. (2010) “başvurulan en iyi denemelerden biri sorunun sizden ne istediğini özümsemek ya da kendi cümlelerimizle soruyu yorumlamaktır” sözüyle paralellik içermektedir. Burada dikkat çeken başka bir durum ise Ö1’in “*kesin olmasa da…*” şeklinde ifadesidir. Ö1 kâğıt ile on kez katlamayı gerçekleştiremeyeceği bilincinde olup, özel olarak denediği birinci, ikinci ve özellikle üçüncü kez katlama sonucundaki izler arasında ki ilişki yardımı ile on kez katlamada ki iz sayısı hakkında bir sonuca varma düşüncesindedir. Bu düşünceye ise özel olarak gerçekleştirmiş olduğu katlamalar sayesinde ulaştığı söylenebilir. Ayrıca soruda verilen bilgi dışında kâğıdı üçüncü kez katlaması da dikkat çekicidir. Bunun yanı sıra katlamaları *sistematik* bir şekilde gerçekleştirdiği görülmektedir.

4.2.1.3. Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu okuma işlemini gerçekleştirirken eline bir kâğıt alarak uçlarından tutup Şekil 4.12. deki gibi katlamıştır.

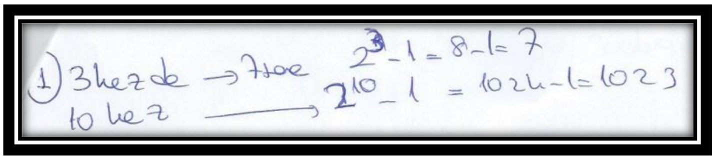
Şekil 4.12. Ö2'nin Kâğıdı İlk Katlaması

Sırası ile gerçekleştirdiği birinci, ikinci ve üçüncü kez katlamalar sonucu oluşan izleri Şekil 4.13. ve Şekil 4.14. deki gibi katladığı kâğıdı açarak saymıştır.

Şekil 4.13. Ö2'nin Kağıdı 2. Katlaması

Şekil 4.14. Ö2'nin Kâğıdı 3. Katlaması

Bu katlamalar sonucu oluşan izleri saydıktan bir süre sonra katlama sayısı ile oluşan iz sayısı arasında ki ilişkiyi kâğıdına Şekil 4.15. deki gibi yazmıştır.



Şekil 4.15. Ö2'nin 10. Katlama İçin Kâğıda Yazdıkları

Kâğıdına yazmış olduğu bu ifadeyi ve gerçekleştirmiş olduğu eylemleri ise "*Şimdi (kâğıt üzerinde) bu 1 'di, şu 2, sonra bir daha katladım 3, ondan sonra, açtım dedim ki (katlama izlerini sayarak) 1-2-3-4-5-6-7 tane bükülme izi oldu. Yani dedim ki* *üç kez de 2^3 -1 = 7 tane iz oluyorsa, on kez katlarsam* genelleştirirsem *yani 2^{10} – 1 diye düşündüm."* şeklinde açıklamıştır.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; Ö2 ilk önce bir kez katlama da 1 iz, iki kez katlamada 3 iz ve üç kez katlamada 7 tane iz oluşacağını belirtmiştir. Üçüncü katlamadan sonra çıkarımda bulunmuş onuncu katlama sonucu oluşan iz sayısı sorulduğu için onuncu kez de "2^{10}-1 = 1023" yanıtını vermiştir. Görüldüğü gibi Ö2 katlama işlemini yaparken sağ uç ile sol ucu arasında herhangi bir anlam sıkıntısı yaşamadan doğrudan katlama işlemi gerçekleştirmiştir. Burada üçüncü katlamayı gerçekleştirmesi dikkat çekicidir. Sonuca ulaşırken özelleştirmeden yararlanmıştır ve özel değerleri *sistematik* bir şekilde gerçekleştirmiştir.

4.2.1.4. ÖA1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

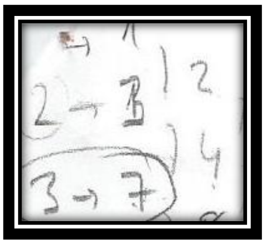
ÖA1 özelleştirme boyutunun birinci sorusunu ilk olarak cevaplandırmaya başlamıştır. Soruyu okurken aynı zaman da soruyu somutlaştırarak bir kâğıt üzerinde sırasıyla Şekil 4.16. daki gibi üç kez katlama işlemi gerçekleştirmiştir.

Şekil 4.16. ÖA1'in Kâğıdı İlk 3 Katlaması

Katlama işlemlerini gerçekleştirdikten sonra yaptığı işlemleri aşağıda ki şekilde açıklamış ve Şekil 4.18. deki gibi kâğıdına yazmıştır; "*1-2-3-4-5-6-7 tane. İki kez katladığımızda ne oluşmuştu 1 izdi. Yani aslında 2-kere katladığım da 1 olmuştu. Yok pardon bir kez kere katladığımda 1 iz olmuştu* (Şekil 4.18.) *Bir kez katladım 1 iz oldu,(aynı kağıt üzerinde katlamaları tekrar gerçekleştirerek) şimdi bir daha katlıyorum, ortaları görmeyeceğim tabi, şöyle katladığımı düşünürsem* (Şekil 4.17.) şeklinde açıklama yapmıştır.

Şekil 4.17. ÖA1'in Son Katlaması

"1-2-3 tane olacak, üç kez katladığımda az önce 7 tane demiştim. 1-3-7 yani her seferinde (Şekil 4.18.) *2-4 şeklinde artıyor"* şeklinde açıklamalarına devam etmiştir.

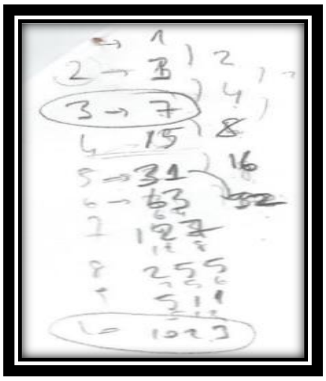


Şekil 4.18. ÖA1'in Sorunun Çözümü İçin İlk 3 Adımda Yazdıkları

Şekil 4.18. dekini ifade ederek *"böyle aritmetik gideceğini düşünürsek onuncu kez katlamada ne olur. 6-7-8-9-10 desek. En iyisi hesaplayarak gitmek ya dördüncü katlamada 6 artacak, beşinci kez katlamada 8 artacak en iyisi hesaplayarak gitmek ya. hmmm 2-4-6 diye mi gidecek? Yoksa 2'nin kuvvetleri şeklinde mi artarak gidecek? yani 2-4-16 falan diyerek mi gidecek. Bunu bir daha katladığımızı düşünsek (*kâğıt üzerinde dördüncü kez katlamasını gerçekleştirmiş) *ne olacak her seferinde 2 tane daha mı gelmiş olacak yoksa dur bakalım. Bir daha katladık dördüncü kez katlamadayım, eğer benim yazdığım doğruysa 13 tane olmalı 1-2-3…-15 oldu hah!*" demiştir.

Dördüncü kez katlama sonrası oluşan iz sayısının beklediğinden farklı çıkması sonucu bir müddet duraksayıp düşünmüştür. Daha sonra düşüncülerini "*Daha bir tuhaf oldu 8 oldu. 2 kat 2 kat artıyor desek; 4-8 muhtemelen de öyle artacaktır, çünkü her seferinde 2'ye katlıyorum ben bunu 2-artacak 4 artacak 8 artacak, o zaman 16 artacak, 32 artacak diyelim, bu şekilde gidecek, her seferinde 2 kat 2 kat artacak o sayı"* şeklinde açıklamıştır.

Daha sonra ilk başta katlayarak hesaplamış olduğu ve kâğıdına yazdığı katlanma izleri üzerinde Şekil 4.19. daki gibi hesaplamalar yapmıştır. Bu hesaplamaları *"8 arttırdım 15, 16 arttırdım 31 oldu, ondan sonra ne yapıyorum 31 daha sonra 32 arttıracağım 63 oldu bu sefer bunu 64 arttıracağım, yani 1 fazlası kadar arttırıyorum öylemi!"* şeklinde açıklamıştır.



Şekil 4.19. ÖA1'in Sorunun Çözümü İçin Yazdıkları

Bundan sonra "*10 kez yaptığımda ise 1023 tane, o zaman 2'nin kuvvetinin 1 eksiğiymiş aslında, hmm o zaman formülü $2^n - 1$ miş. Zaten de hepsi de öyle. 4'üncü kuvvetinin 1 eksiği 5'inci kuvvetinin 1 eksiği kadarmış"* biçiminde ifade etmiştir.

En son olarak yaptığı işlemleri "*ilk başta birkaç adımı kağıdı kullanarak yaptım garanti olsun diye sayılarım. Ondan sonra ilk gördüğüm şey aslında 2-4-6-8 diye gitmesiydi orda acaba öyle mi diye düşündüm. İkinci düşündüğüm şey ise 2-4'den sonra acaba 2'nin üsleri şeklin de mi gidecek. Bir o vardı birde 2-4-8 şeklinde mi gidecek diye. O zaman dördüncü adımı da yaptım 8 olduğunu gördüm, muhtemelen 2'nin katları şeklinde gidecek, ilerleyecektir diye düşündüm. Ekleye ekleye geldikten sonrada şunu fark ettim. Aslında burada ki katlama sayılarını "n" olarak alırsak $2^n - 1$ formülüyle de katlama sayısına göre bükülme izi oluşmasını hesaplayabiliyormuşuz."* şeklinde kendince özetleyerek açıklamıştır.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; ÖA1 bir kâğıt alarak soruyu somutlaştırmıştır. Sırası ile birinci, ikinci ve üçüncü kez katlama sayılarını gerçekleştirmiştir. Bu üç katlama sonunda oluşan izleri sırasıyla 1,3,7 şeklinde kâğıdına yazmıştır. Kâğıdına yazmış olduğu iz sayılarına uzunca bir süre bakmış ve bu katlanma izlerinin sayıları arasında bir öncekilere ek olarak gelen iz sayılarının "2-4-6" şeklinde artacağını ifade etmiştir. Buradan görüldüğü üzere iz sayıları arasında ki artışı "2n" şeklinde bir kurala bağlamıştır. Bu oluşturduğu kuralın doğruluğunu göstermek adına dördüncü kez katlama sonucunda 13 iz oluşacağını ifade etmiştir. Bu ifadesini kanıtlamak adına ise dördüncü katlama işlemini gerçekleştirmiştir. Bu katlama ile oluşan 15 iz sonucu, bir süre sesiz bir şekilde düşünmüştür. Bu sırada kâğıdına yazmış olduğu iz sayılarını incelemiştir. Bu incelemeler sonucunda izler arasında ki artışın 2'nin katları şeklinde değil, 2'nin kuvvetleri şeklinde artacağı düşüncesini dile getirerek onuncu kez katlama sonucu oluşacak iz sayısını tek tek hesaplayarak 1023 yanıtını vermiştir. Sonuca ulaştıktan sonra ise katlama sayıları ve oluşan iz sayıları arasında 2^n - 1 genellemesinde bulunmuştur.

Görüldüğü gibi ÖA1 katlama işlemini yaparken sağ uç ile sol ucu arasında herhangi bir anlam sıkıntısı yaşamadan direk olarak katlama işlemi gerçekleştirmiştir. ÖA1 ilk 3 katlamayı gerçekleştirdikten sonra *izler arasında bir ilişki düşünüp*, bu düşüncesini *anlamlandırmak* için dördüncü katlamayı gerçekleştirmesi dikkat çekmektedir. Dolayısıyla gerçekleştirmiş olduğu birinci, ikinci ve üçüncü kez katlamalar soruyu *anlamlandırmak* içinken, dördüncü katlama ise *genellemesini ispatlama*, kuralının geçerli olup olmadığını *kontrol etmek* için olduğu söylenebilir. ÖA1 yukarıda ki ifadesine bakıldığında onuncu kez katlamada kaç iz oluşacağını tek tek hesapladıktan sonra genellemeye varmıştır. ÖA1 *sistematik* bir yol izleyerek ve verilen sayılar arasında ki ilişkiyi belirleyip, en son istenen sayıyı doğru bulduğu görülmektedir.

4.2.1.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 veri toplama aracında ki soruları sırasıyla çözdüğü için özelleştirme boyutunun birinci sorusunu ilk olarak çözmeye başlamıştır. ÖA2 soruyu okuduktan sonra sağ ucu ile sol ucu hakkında dönüt alma ihtiyacı duymuştur. Bu aşamada araştırmacı ile aşağıdaki diyalog geçmiştir.

ÖA2: "*bir kağıdı sağ ucundan tutup sol ucuna… ama hangisi olacak bu mu* (Şekil 4.20.)*, bu mu* (Şekil 4.21.)*?*"

Araştırmacı: "*iki şekilde de düşünebilirsiniz*"

Şekil 4.20. ÖA2'nin Soruyu Anlamak İçin Yaptığı İlk Katlama

Şekil 4.21. ÖA2’nin Soruyu Anlamak İçin Yaptığı İkinci Katlama

Bu diyalogdan sonra Şekil 4.21. deki gibi üst uçları birleştirerek katlama işlemlerini gerçekleştirmeye karar vermiştir. En son soruyu cevaplandırdıktan sonra ise; “*Bir de diğer türlü* (Şekil 4.21.) *deneyelim mi? O zaman ama kare olması lazım”* ifadesinde bulunmuştur.

Şekil 4.22. ÖA2’nin Soruyu Anlamak İçin Yaptığı Diğer Katlama

Daha sonra Şekil 4.22. deki gibi katlama işlemini gerçekleştirmiş *“yok böyle olmaz*” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Katlama biçimini “ *üst uçlar olsun. Diyelim ki üstü üste olsun, Sağ üst sol üst olsun”* şeklinde ifade etmiş, Şekil 4.23. ve Şekil 4.24. ile göstererek ve açıklayarak katlama işlemini gerçekleştirmiştir.

ÖA2; *bunu bir kere yaptım.* (Şekil 4.23.) *Sonra bir kere daha yaptım* (Şekil 4.24.) *sonuç olarak katlama izim 1-2-3. Yani* 2^n *- 1 olur mu? Olur.*”

Şekil 4.23. ÖA2’nin Çözüm İçin Yaptığı 4. Katlama

Şekil 4.24. ÖA2’nin Çözüm İçin Yaptığı 5. Katlama

ÖA2'nin gerçekleştirdiği katlamalar sonucu birden cevabı genel bir kurala bağlaması üzerine aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

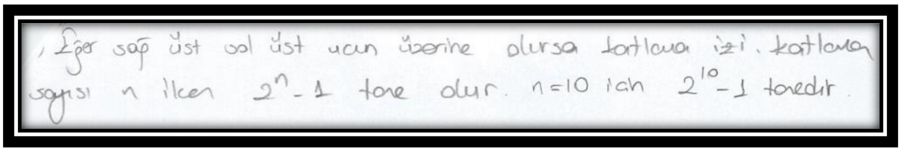
ARAŞTIRMACI: "*hemen öyle söyleyebilir misin?*"

ÖA2: *bir daha katlasam, yine aynısı 7 iz olacak çünkü* (3. kez katlıyor, Şekil 4.25). (Şekil 4.26 daki gibi sayarak*) 1-2-3-4-5-6-7 gördün mü yine aynısı oldu.*"

Şekil 4.25. ÖA2'nin Sonucu açıklarken Yaptığı 6. Katlama

Şekil 4.26. ÖA2'nin Sonucu Açıklarken Yaptığı İzleri Sayma

Bu diyalogdan sonra kâğıdına Şekil 4.27. deki gibi sonucunu açıklayarak yazmıştır.



Eğer sağ üst sol üst ucun üzerine olursa katlama izi, katlama sayısı n iken 2^n-1 tane olur. n=10 için $2^{10}-1$ tanedir.

Şekil 4.27. ÖA2'nin Sorunun Çözümü İçin Kâğıda Yazdıkları

Şekil 4.27. de görüldüğü üzere onuncu katlama sonucu oluşacak iz sayısını n=10 için almış, $2^{10}–1$ şeklinde soruyu cevaplandırmıştır.

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulgular özetlenirse; ÖA2 soruyu okuduktan sonra her iki şekilde de kâğıdı katlamıştır. Daha sonra sağ üst ucu ile sol üst ucun üst üste geleceği düşüncesinden hareketle *sistematik* bir şekilde birinci ve ikinci kez katlama işlemlerini gerçekleştirmiştir. Katlanmalar sonucu oluşan iz sayıları ile katlama sayıları arasındaki ilişkiyi çok kısa bir sürede $2^n–1$ gibi bir şekilde çıkarımda bulunmuştur. Bu çıkarımının doğruluğunu göstermek için, üçüncü kez katlama işlemeni gerçekleştirmiştir. Üçüncü kez katlama sonucu oluşan iz sayısı ile beklentisinin, yani oluşacak iz sayısının aynı olması üzerine, n=10 için $2^{10}–1$ tane iz oluşur cevabını vermiştir.

Tüm süreç göz önüne alınırsa ÖA2 kâğıdı nasıl katlayacağı konusunda ilk başta tereddüt yaşamıştır. Bu tereddüdünü soruyu anlamlandırmak için yapmış olduğu özel birinci ve ikinci katlama işlemlerini gerçekleştirerek ortadan kaldırmıştır. Dolayısıyla gerçekleştirmiş olduğu özelleştirme ÖA2'nin soruyu anlamasına yardımcı olduğu söylenebilir. Daha sonra oluşan izler ile katlama sayısı arasında çok kısa bir sürede 2^n-1 çıkarımında bulunması (genellemesine ulaşması) dikkat çekidir. Bu genellemeyi ise iki özel değer ile gerçekleştirmiştir. Daha sonra bu çıkarımının doğruluğunu göstermek adına üçüncü özel değerini kâğıt üzerinde denemiş, özelleştirme aşamasını; düşüncesinin doğruluğuna kendini ikna etmek için gerçekleştirdiği söylenebilir. Son olarak ise özelleştirme işlemini başarı ile gerçekleştirmiş, doğru sonuca ulaşmıştır.

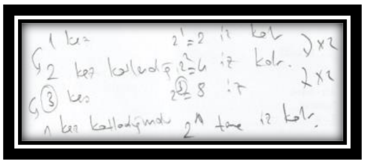
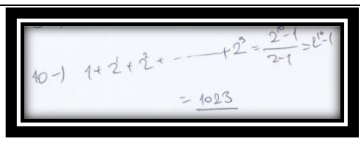
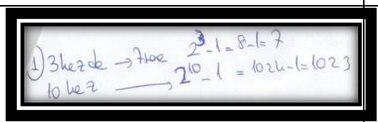
4.2.1.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulguların Karşılaştırılması ve Yorum

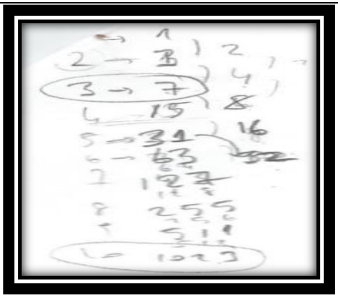
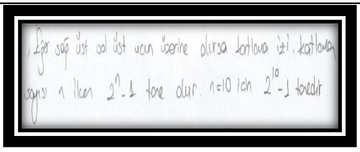
Mason ve vd. (2010) kâğıt şerit sorusunun çözümünü vermemiştir. Bunun yerine bir kâğıt parçası alarak soruyu özelleştirin, iki katlamadan sonra kat yerlerini sayarak zihinsel olarak özelleştirin, bir diyagram yapmak zihinsel imaj oluşturmak için yardım edebilir, 3-4 kere katlamayı deneyin bir örüntü arayın şeklinde yönergeler vermiştir. Bu sorunun sorulmasının amacı katılımcıların özelleştirmeyi neden kullanacaklarını yani kaç özel durum alacaklarını, bu özel durumları alma nedenleri (soruyu anlama, sorunun ne istediğini fark etme, örüntü arama,…) görmek ve karşılaştırmalar yapmak içindir. Bu nedenle katılımcıları birlikte değerlendirmek, süreç boyunca benzer ya da farklı davranışları ortaya çıkarmak için önemlidir.

ÖA2 ve Ö2 en kısa sürede sonuca ulaşan kişiler olmuştur. Bunun nedeni sonuca ulaşırken özel değerler ile bu özel değerler arasında doğru ilişkiler kurmaları, hızlı şekilde genel kural bulmaları olduğu söylenebilir. Bu kural ile de diğer katılımcılara göre soruyu hızlı cevaplandırmışlardır. Bunun yanı sıra A1 de genel bir kurala ulaşarak soruyu cevaplandırmış, fakat yanlış kural çıkarımında bulunmuş olduğu için farklı sonuç bulmuştur. Aslında bunun nedeni özelleştirme yaparken iki durum göz önüne alması ve ikinci durumda da iz sayısını yanlış bulması ve hemen genelleme yapmaya çalışmış olmasıdır. Bu nedenle de yanlış sonuca ulaşmış olduğu söylenebilir. Buradan yola çıkarak A1, Ö2 ve ÖA2'nin öncelikle genel bir kurala ulaştıkları söylenebilir. Ö1 ve ÖA1 ise farklı olarak, genel bir kurala ulaşmadan doğru sonuca ulaşmışlardır, bu nedenle cevaplama süreleri Ö2 ve ÖA2 göre yaklaşık iki katı kadar sürmüştür. Ayrıca A1 ve ÖA1 soruyu diğerlerine göre geç cevaplandırmasındaki diğer bir etken ise özel değerler ile buldukları sonuçlar arasında sırası ile anlamlı bir ilişkiyi oluşturamaması ve birden çok ilişki kurmuş olmasından kaynaklandığı söylenebilir. Diğer taraftan Ö1 ise diğer katılımcılara nazaran soruya en şüpheci yaklaşan kişi olmuştur. Doğru sonuca ulaşmasına rağmen bir genellemede bulunmamış, "*kesin olmasa…*" ifadesinde bulunmuş, soruyu cevaplandırmıştır.

Katılımcıların kâğıt katlama sayıları, diğer bir ifade ile gerçekleştirdikleri özel değerler dikkate alındığında; A1 iki, Ö1,Ö2,ÖA2 üç ve ÖA1 ise dört özel değer vererek çözümü gerçekleştirmiştir. Fakat ÖA1'in dördüncü ve ÖA2'nin üçüncü vermiş olduğu özel değerleri, bulmuş oldukları genel kurallarını ispatlama düşüncesinden hareketle gerçekleştirdikleri söylenebilir. Tüm katılımcıların özel değerleri sistematik bir şekilde almaları başka bir dikkat çekici ortak durum olmuştur. Elde edilen bu veriler ortak bir şekilde değerlendirildiğinde ise karşımıza Tablo 4.2. deki gibi bir durum ortaya çıkmaktadır.

Tablo 4.2. Özelleştirmenin 1. Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Katılımcı	**Kullanılan Özel Değer Sayısı**	**Süreç içindeki davranışlar**	**Ulaşılan Sonuç**	**Verdiği cevap**	**Özelleştirme Kullanma Amacı**
A1	2	2 katlama (2. de yanlış katlama) n için kural bulma n=3 için ve n=10 için cevabı söyleme	2n		Soruyu anlama - Anlamlandırma İlişki- örüntü arama Kuralı doğrulatma -kendini ikna etme (güven kazanma)
Ö1	5	2 katlama anlamak için 3 katlama ilişki aramak için 10 katlama için cevabı söyleme <u>(n katlama için kural ifade edilmemiştir.</u>	2^{10} - 1 sonra 1023		Soruyu anlama - Anlamlandırma İlişki- örüntü arama Kuralı doğrulatma -kendini ikna etme (güven kazanma)
Ö2	3	3 katlama 10 katlama için cevabı söyleme <u>n için kural ifade edilmemiştir.</u>	2^{10} – 1 sonra 1023		Soruyu anlama - Anlamlandırma İlişki- örüntü arama Kuralı doğrulatma -kendini ikna etme (güven kazanma)

ÖA1	4	3 katlama yanlış kural bulma 4. katlamada yanlış olduğunu görme 10 katlama için bulma n için genelleme yapma	1023 sonra 2^{10} - 1		Soruyu anlama - Anlamlandırma İlişki- örüntü arama Kuralı doğrulatma -kendini ikna etme (güven kazanma) Tüm olası durumları göz önüne alma
ÖA2	6	3 katlama anlamak için 2 kez katlama n için kuralı söyleme n=10 alma cevabı söyleme sağlama yapmak için 6. katlama	2^{10} - 1		Soruyu anlama - Anlamlandırma İlişki- örüntü arama Kuralı doğrulatma -kendini ikna etme (güven kazanma)

Tablo 4.2.'den görüldüğü gibi her bir katılımcı sonuca ulaşırken farklı bir düşünme şekli gerçekleştirmiştir. Fakat görüldüğü gibi A1, ÖA1 ve ÖA2 n için bir genelleme yaparken Ö1 ve Ö2, n için bir kural ifade etmemişlerdir. Öğretmenlerin çözümleri farklı olmasına rağmen problem çözme davranışları paralellik göstermektedir. Her iki öğretmen de 10. adım sorulduğu için direk olarak sorulan adıma yoğunlaşmışlardır. Buna rağmen akademisyen ve öğretmen adayları n için bir genelleme yapmışlardır. A1 ve ÖA2 iki katlamadan sonra hemen kural söylemelerine rağmen A1 yanlış bir kural ifade ettiği için sonucu yanlış söylemiştir. Cevabın doğru olduğunu test etmek içinde 3. katlamayı yapmamıştır. ÖA2 ise 3. katlamayı cevabının doğru olduğunu göstermek için yapmıştır. ÖA1 ise 3 katlama ile yanlış kural bulup 4. kez cevabının doğru olup olmadığını kontrol etmiş, bunun sonucu olarak doğru yanıta ulaşmıştır. Tüm katılımcılar soruyu anlamak, anlamlandırmak, bir örüntü aramak veya varsayımlarının doğruluğunu kontrol etmek amacı ile özel durumlara bakmışlardır. Fakat yalnızca A1 özel durumları yeterince incelemediği için yani özelleştirmeyi yeterince yapmadığı için farklı sonuca ulaşmıştır.

4.2.2. Özelleştirme Boyutunun İkinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Özelleştirmeye yönelik sorulan ikinci soru *"12321 şeklinde tersten okunuşu da aynı olan sayılara palindromik sayılar denir. Dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğu sizce doğru mudur? Açıklayınız*" şeklindedir.

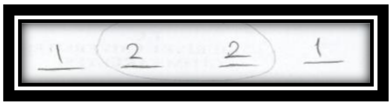
4.2.2.1. A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soruyu hızlıca okumuştur. Okuduktan sonra palindromik sayının basamak sayısı hakkında dönüt alma ihtiyacı duymuştur. Bu aşamada araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

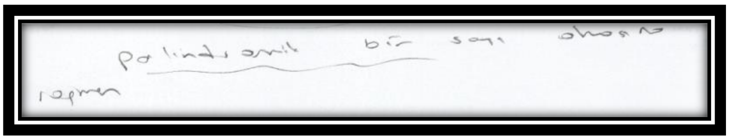
A1: *"Bu soruyu bir düşünürsek. Burada basamak sayısının dört basamaklı olması kesin değil mi?"*

ARAŞTIRMACI: "*evet hocam"*

Bu diyalogdan sonra A1 bir müddet düşünmüştür. Düşüncelerini "*Acaba <u>ters bir örnek</u> bulabilir miyiz bu soruda. Yani dört basamaklı olup palindromik olup 11 ile bölünemeyen bir sayı olabilir mi. Şöyle bir düşünürsek... mesela 1221 sayısını aldığımızda, tersten okunuşu da aynıdır. Ama 11 ile bölünemeyen bir sayıdır"* şeklinde ifade etmiştir. İfadesinde belirtmiş olduğu özel değeri ve düşüncesini sırası ile cevap kâğıdına Şekil 4.28. ve Şekil 4.29. daki gibi yazmıştır.



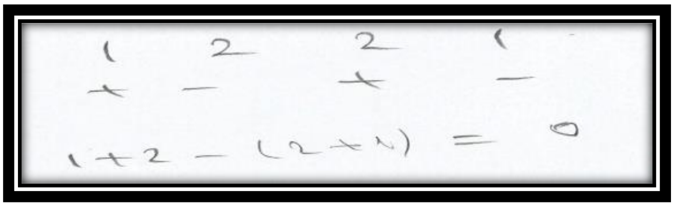
Şekil 4.28. A1'in İncelediği İlk Örnek



Şekil 4.29. A1'in İncelediği İlk Örnek İle İlgili Kâğıda Yazdığı

Daha sonra özel olarak almış olduğu sayının ters örnek olup olmadığını aşağıda ki şekilde kontrol etmiştir.

A1: *11 ile bölünebilme kuralı +-+- diyorduk. Dolayısıyla 1+2- dediğimizde* (Şekil 4.30.) *11 ile bölünebilen bir sayı çıktı. Burada bir sıkıntımız görünmüyor.*



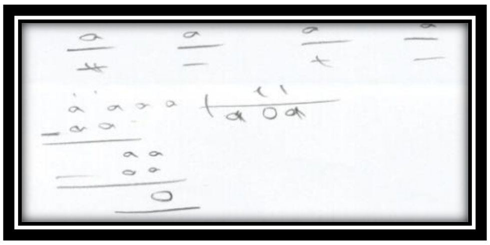
Şekil 4.30. A1’in İncelediği İlk Örneğe 11 İle Bölünebilme Kuralını Uygulaması

Almış olduğu özel değerin beklentisini karşılamaması üzerine bir müddet düşünmüştür. Düşüncelerini aşağıda ki şekilde ifade etmiş, aynı zamanda araştırmacı işlemlerin anlaşılırlığı için A1’e bazı sorular yöneltmiştir.

A1: *şimdi rakamların hepsi aynı olsa zaten bir sıkıntımız yok, hepsi 11 ile bölünebilir.*

ARAŞTIRMACI: *bu kanıya nerden vardınız?*

A1: *şimdi baktığımız anda aaaa yani bütün a’lar birer rakam olmak üzere* +-+- *verdiğimizde. Aynı 11 ile bölünebilme kuralını görebiliriz, ya da herhangi bir aaaa sayısını 11 ile böldüğümüzde, normal bölme yaptığımızda* (Şekil 4.31.) *a0a defa var.*



Şekil 4.31. A1’in Cebirsel İfadeye 11 İle Bölünebilme Kuralı ve Bölme İşlemi Uygulaması

“Tam bölünebilir. Dolayısıyla palindromik sayıda şu ikinci ve üçüncü rakamlarda aynı olması, yani bir kere ne olması lazım dört basamaklı sayıda palindromik olarak ifade edile bilmesi için birinci basamakla son basamağın bir kere aynı olması lazım, aynı harfler ile sembolize etmemiz lazım, aynı rakam olarak ifade edilebilmesi için... Palindromik sayı olduğu için dolayısıyla bu ikinci basamak ile üçüncü basamağın aynı rakamları ifade etmesi lazım, o da bb çünkü okunuşunun aynı olabilmesi için (Şekil 4.32.) *buradan da ve buradan da okunuşları aynı olabilmesi için rakamların. Dolayısıyla bu, 11 ile bölünebilme kuralı gereği, 11 ile bölünebilen bir sayıdır. Dolayısıyla 4 basamaklı palindromik sayıların 11 ile bölünebildiğini bu şekilde görebiliriz”*

Şekil 4.32. A'in Palindromik Sayıyı Cebirsel Gösterimi

Yukarıda da görüldüğü gibi A1 problemi çözerken dört basamaklı palindromik sayıyı cebirsel olarak ifade etmiştir. Daha sonra bu cebirsel ifadeyi Şekil 4.31. deki gibi 11 ile bölme ve bölünebilme "kuralı" gereği +,-,+,-, şeklinde gruplandırmış, 4 basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebileceği sonucuna ulaşmıştır. Fakat burada bir genelleme söz konusudur. Sonuçta kurallar bir genellemenin ürünüdür. A1'in kural ile sonuca ulaşması sonucunda, kural dışında farklı çözümlere ulaşabilmek için araştırmacı A1 ile aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleştirmiştir.

***ARAŞTIRMACI**: peki hocam kural ile bunu söyledik, bu kurallar, bir şekilde yapılmış bulunmuş, biz bu kuralı bilmiyoruz, duymadık, yani başka farklı bir çözüm yapabilir misiniz?*

***A1**: genel kurala bağlamıyor muyuz bu şekil de!*

***ARAŞTIRMACI**: 11 ile bölünebilme kuralını bilmiyoruz!*

***A1**: hmmm (düşünüyor) dolayısıyla şöyle bir baktığımızda soruya. Hmmm (uzunca düşünüyor) yeni öğrenen bir kişi için 11 ile bölünebilme kuralı olmadan nasıl ifade edersin diyorsun?*

***ARAŞTIRMACI**: evet*

Bu konuşmadan sonra A1 uzunca bir süre (yaklaşık 1,5 dakika) düşünmüştür. Daha sonra araştırmacının "*ne düşünüyorsunuz hocam?*" sorusu üzerine A1; "*acaba rakamların tersten düze okunması ile bir bağlantı kurmaya çalışıyorum ama farklı şeyler söylersek, ne diyebiliriz başka ya!*" şeklinde ifadede bulunarak düşünmeye devam etmiştir.

Ardından A1 "*4 basamaklı 11 ile bölünebilen en küçük rakamı bulsak. Mesela bir sayı versek, mesela 1100 tamam mı?*" ifadesinde bulunmuştur. Bu ifade de verilen özel değerin palindromik olmaması araştırmacının dikkatini çekmiştir. Bunun üzerine A1'in açıklamada bulunması için araştırmacı ile aşağıda ki şekilde bir diyalog gerçekleşmiştir.

***ARAŞTIRMACI**: bu sayıyı neye göre verdiniz?*

***A1**: 11 ile bölünebilmesine göre.*

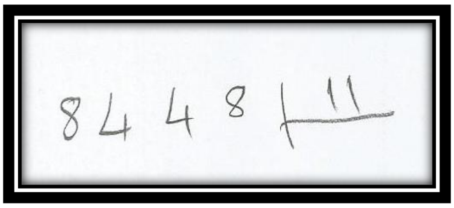
***ARAŞTIRMACI**: normal bir sayı!!!*

***A1**: normal bir sayı verdim*

Gerçekleşen konuşmadan bir müddet sonra A1 duraksamış "*ama bir dakika !!! palindromik sayı olmasıyla çelişecek. Dolayısıyla buradan 1111, 1133* (Şekil 4.33.) *aldığımızda 11 ile bölünebilir ama palindromik olmasıyla çelişir, biz şurada* (Şekil 4.33(a).) *verdiğimiz gibi bütün rakamları aynı olmasını ifade edebiliriz. Tersten okunuşunun aynı olması için. Onun dışında nasıl ifade edebiliriz"* şeklinde açıklamada bulunmuştur.

Şekil 4.33(a). A1'in Kâğıdına Yazdığı Çelişen Örneği

Daha sonra araştırmacı bir önceki yazılanları göstererek "*o kanıya vardık 1111, 2222 gibi sayıları cebirsel olarak söylediniz."* Bunun üzerine A1 *" evet bütün rakamlar aynı olduğunda bir sıkıntı olmadığını gördük."* şeklinde ifade de bulunmuştur. Son olarak ise "*şimdi şurada baktığımız da 1. ve 2. rakamların birbirlerinden farklı olması mesela 84 verelim tersten de okunuşunun aynı olabilmesi için ne olması lazım son rakamın 8, 3.rakamının 4 olması lazım palindromik bir sayı yani (8448) yine bölme yaparak gösterebilirsin* (Şekil 4.33(b).)*"* diyerek hızlı bir şekilde bir sonraki soruyu okumaya başlamıştır.



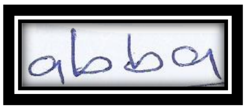
Şekil 4.33(b). A1'in Cevap Kâğıdına Yazdığı Son Özel Değer

A1 'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; A1'in burada birden fazla farklı düşünme gerçekleştirdiği görülmektedir. Soruyu irdeledikten sonra ilk önce gerçekleştirdiği "*ters bir örnek bulabilir miyiz*" şeklinde ifadesi olmuştur. Bu ifadeden görüldüğü üzere A1 ispatın çelişki bulma tekniği yaklaşımında bulunduğu söylenebilir. Bu düşünme ile sonucun doğruluğunu göstermek içinse "1221" şeklinde palindromik bir özel değer almıştır. Fakat bu özel değerin 11 ile bölünemeyen bir sayı olduğu düşüncesiyle hareket etmiş, tüm dört basamaklı palindromik sayılar 11 ile tam bölünemez tahmininde bulunmuştur. Daha sonra vermiş olduğu özel değeri 11 ile bölünebilme kuralı kullanarak, sayının 11'e bölünüp bölünemediğine bakmaya karar vermiştir. Almış olduğu sayının 11 ile bölünebilme kuralı kullanarak, tam olarak bölünebildiği sonucuna ulaşmasından sonra düşünmüş olduğu strateji ve vermiş olduğu özel değer ile sayısının 11 ile bölünemeyen bir sayı olduğunu gösterememiştir. Dolayısıyla A1 farklı düşünme yaklaşımı ile hareket etmiş olsa da, bu düşüncesinin doğru veya yanlış olduğu kanısına özelleştirme kullanarak gösterimde bulunmuş olduğu söylenebilir. A1 çıkan sonucun beklentisinden farklı olduğunu görünce duraksamış ve düşünmeye başlamıştır. Daha sonra dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile tam bölünebileceğini söylemiştir. Araştırmacının "*bu kanıya nasıl vardınız*" sorusu üzerine, A1 bir müddet düşündükten sonra ilk gerçekleştirdiği düşünmeden farklı bir düşünme yaklaşımı gerçekleştirmiştir. Bunu da vermiş olduğu özel değerden faydalanarak dört basamaklı palindromik sayıları genelleyerek cebirsel olarak ifade etmiştir. Cebirsel ifadesini normal bölme işlemi ve kural (+,-) kullanarak 11'e tam olarak bölünebileceğini göstermiştir. Daha sonra Araştırmacı "*kural dışında farklı bir şekilde 11 ile tam olarak bölünüp bölünemeyeceğini nasıl söyleyebiliriz?*" şeklinde soru yöneltmiştir. Burada amaç sorunun çözümü esnasında ilk akla gelen kuralın dışına çıkıp beklenilen özelleştirmeyi gerçekleştirilip gerçekleştirilemeyeceğini incelemektir. Bu soru üzerine, A1 uzunca bir süre düşündükten sonra beklenileni; "*4 basamaklı 11 ile bölünebilen* en küçük *sayıyı bulsak"* şeklinde ifade etmiştir. Bu ise özelleştirmeden genellemeye ulaşma şeklinin temel düşünme biçimi olan sistematik özel değerlerden yola çıkma biçimi olduğunu söyleye biliriz. Fakat bu ifadesi ile bu düşüncesini gerçekleştirmek adına vermiş olduğu dört basamaklı özel sayı, 11 ile tam olarak bölünebilen en küçük palindromik bir sayı olmamıştır. Aksine A1 11 sayısının etkisinde kalarak 11 ile başlayan dört basamaklı palindromik olmayan sayılar aldığı söylenebilir. Daha sonra bu almış olduğu sayıların palindromik sayılar olmadığını fark etse de belirtmiş olduğu en küçük 4 basamaklı palindromik sayı düşüncesinden uzaklaşmıştır. Ardından palindromik sayı biçimini ifade etmiş, tekrar rastgele "8448" şeklinde bir palindromik özel sayısını almıştır. Almış olduğu bu sayıyı ise "*11 ile normal bölme yaparak gösterebiliriz*" şeklinde ifade etmiştir. Bu ifadesinden sonra ise hiç beklemeden diğer soruyu okumaya başlamıştır. A1’in böyle bir davranışı kurallar dışında başka düşünme şekli aklına gelmediğinden ve soruya 8 dakikadan fazla bir süre ayırıp sıkıldığından gerçekleştirdiği söylenebilir.

Görüldüğü üzere A1 bu soruda özelleştirmeyi, palindromik sayı mantığını anlama ve açıklamada kullanmıştır. Bu özel değerler ile dört basamaklı palindromik sayı şeklini “aaaa, abba” keşfetmiştir. Bu keşfin doğru olup olmadığını test etmek için başka bir özel değer (8448) vermiştir. Ayrıca ispat tekniği olan çelişki bulma ile de özel değer alarak gösterimde bulunmuştur. Şüphesiz özelleştirme tüm boyutlarda çok sık kullanılan ve iç içe olan bir düşünme boyutudur.

4.2.2.2. Ö1’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 soruyu okuduktan hemen sonra ilk olarak cevap kâğıdına Şekil 4.34. deki gibi dört basamaklı palindromik sayının cebirsel ifadesini yazmıştır.

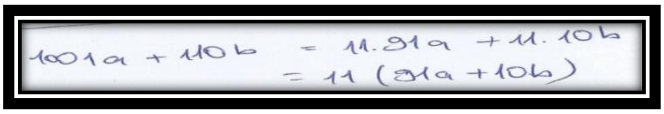


Şekil 4.34. Ö1’in Kâğıdına İlk Yazdığı Palindromik Cebirsel İfadesi

Daha sonra problemde istenilen “*dört basamaklı palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğu doğru mudur?*” sorusu üzerine Şekil 4.35. deki gibi kâğıdına yazmış olduğu cebirsel ifadeyi 11 ile bölünebilme kuralı gereğince +,- biçiminde gruplandırarak “*doğrudur, çünkü 11’e bölünmesi için kalan 0 çıkar.*” şeklinde ifade de bulunmuştur.

Şekil 4.35. Ö1’in Palindromik Cebirsel İfadesine 11 İle Bölünebilme Kuralı Uygulaması

Ö1’in bu ifadesinden sonra araştırmacının “*bunu kâğıda açıklayarak yazabilir misiniz?*” sorusu üzerine, Ö1 bir önceki ifadesinden, 11 ile bölünebilme kuralı yerine farklı bir gösterimle Şekil 4.36. daki gibi çözümleme yapmıştır.



Şekil 4.36. Ö1’in Palindromik Cebirsel İfadesini Çözümlemesi

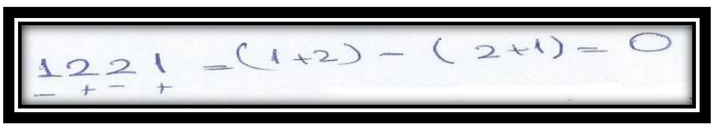
Ö1’in ifade etmiş ve yazmış olduğu işlemlerden sonra araştırmacının “*önce sayıyı cebirsel şekilde ifade edip 11’e bölünebilme kuralından +- şeklinde gruplandırdınız, daha sonra çözümleme yaparak soruyu cevaplandırdınız, başka aklınıza farklı bir çözüm yolu geliyor mu?*” sorusu üzerine, Ö1 “ *başkada gelmiyor açıkçası*” şeklinde yanıtlayarak diğer soruya geçmiş, çözümü sonlandırmıştır.

Ö1 ‘in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak dört basamaklı palindromik sayıları “abba” biçiminde cebirsel olarak genellemiştir. Fakat bu genellemeyi özelleştirme gerçekleştirmeden yapmıştır. Daha sonra yazmış olduğu cebirsel ifadesini, 11 ile bölünebilme kuralı kullanarak 11’e tam bölünebileceğini ifade etmiştir. Bu ifadesini kâğıdına yazarken ise “abba” şeklinde ki cebirsel ifadesini çözümleyerek farklı bir çözüm gerçekleştirmiştir.

Bu verilerden yola çıkarak, diğer katılımcılar arasından bu soruyu 2 dakika gibi en kısa sürede cevaplandıran Ö1 olmuştur. Bunu da dört basamaklı palindromik sayıyı hızlı bir şekilde “abba” şeklinde cebirsel olarak (genelleyerek) ifade etmesinden dolayı olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra ne soruyu anlamlandırmak ne de genel ifadesinin doğruluğunu göstermek adına özel değer kullanmaması dikkat çekmektedir. Oysaki gerek cebirsel ifade olsun gerekse 11 ile bölünebilme kuralı olsun birer genellemedir. Genellemeler ise özelleştirmelerin birer ürünüdür. Dolayısıyla Ö1 mevcut genel kuralların özelleştirmenin önüne geçtiğini, hatta araştırmacının “*bu çözümler dışında başka nasıl gösterebiliriz*” şeklinde sorusu üzerine Ö1’in “ *aklıma başka bir şey gelmiyor*” şeklinde ifadesinden özelleştirmeye engel olduğu söylenebilir.

4.2.2.3. Ö2’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu hızlıca okuduktan sonra bir müddet düşünmüştür. Düşüncelerini ise “*dört basamaklı… tersten okunuşları…* (soruda verilen örneğe bakarak) *bu beş basamaklı… tamam, dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğunu… hmmm sizce doğru mudur açıklayınız diyor.*” şeklinde dile getirmiştir. Daha sonra cevap kâğıdına 11 ile bölünebilme kuralından faydalanarak Şekil 4.37. deki ifadeyi yazmıştır.

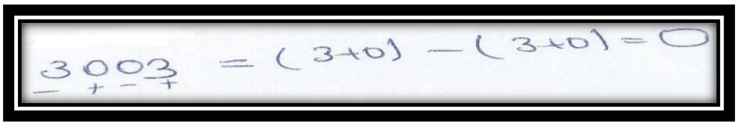


Şekil 4.37. Ö2’nin İncelediği İlk Örneğe 11 İle Bölünebilme Kuralını Uygulaması

Bu ifadeyi yazarken aynı zamanda “*Evet doğru çünkü farkları “0” ediyor. “0”da 11’e bölünür.”* şeklinde açıklamada bulunmuştur. Daha sonra sorunun çözümünü sonlandırdığını düşünmüş ve araştırmacıya bakmıştır. Araştırmacı çözümü derinlemesine incelemek adına Ö2 ile aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleştirmiştir.

Araştırmacı: *peki hocam, Sizce 1 tane örnek yeterli midir?*

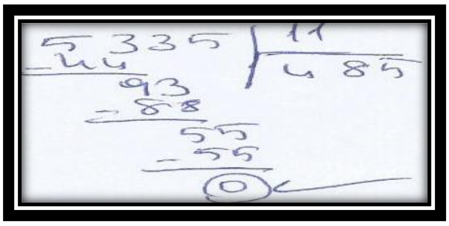
Ö2: *Yeterli değildir. Mesela 3003 diyelim.* (Şekil 4.38.) *Artı, eksi, artı, eksi, diyelim. Yine 0 çıkıyor. Her halükarda zaten 0’ı verecekler çünkü dört basamaklı.*



Şekil 4.38. Ö2’nin İncelediği İkinci Örneğe 11 İle Bölünebilme Kuralı Uygulaması

ARAŞTIRMACI: *Peki. Farklı şekilde çözebilir misiniz hocam? Aklınıza başka bir şey geliyor mu*?

Araştırmacının bu sorusu üzerine Ö2 bir müddet düşünmüş, soruyu tekrar okumuştur. Bu sırada araştırmacı “*Yani bir iki tane örnek vererek mi çözebiliriz*?” şeklinde soru yöneltmiştir. Bunun üzerine, Ö2 “*Direk bölebilirsin. Mesela başka bir sayı 5335 olsun.”* ifadesinde bulunmuş ve Şekil 4.39. daki gibi 11 ile normal bölme işlemi gerçekleştirmiştir.



Şekil 4.39. Ö2’nin İncelediği 3. Örneğe 11 İle Bölme Uygulaması

İşlemi bitirdikten sonra “*Her hâlükârda kalan sıfır olduğu için tam bölünür.*” açıklamasında bulunmuş, soruyu tekrar okumuş ve var olan sonucu “*doğrumu dur doğrudur* (Şekil 4.40.) *diyeceğiz*” şeklinde ifade ederek cevabı sonlandırmıştır.

Şekil 4.40. Ö2’nin Örnekler Sonucu Kâğıdına Yazdığı Cevabı

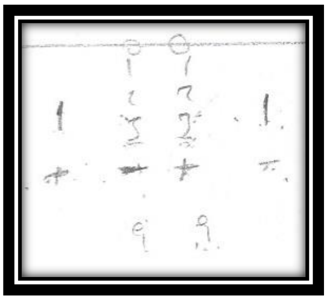
Ö2 ‘in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak “1221” özel sayısını almıştır. 11 ile bölünebilme kuralını kullanmış, bu sayının 11’e tam olarak bölünebileceğini ifade etmiştir. Araştırmacının “*bir örnek yeterli mi*” sorusu üzerine, Ö2 “*yeterli değildir*” yanıtını vermiş başka bir özel değer (3003) daha almış ve aynı şekilde kural kullanarak o sayınında 11 ile bölünebileceğini ifade etmiştir. Daha sonra araştırmacının *“kural dışında başka bir çözüm şekli ile gösterebilir misiniz?*” sorusu üzerine, Ö2 tekrar farklı bir özel değer alarak bu sefer normal 11 ile bölme işlemini gerçekleştirmiştir. İşlemini bitirdikten sonra ise “*dört basamaklı tüm palindromik sayılar 11 ile tam bölünür. Evet, doğrudur*” şeklinde ifade etmiş ve soruyu sonlandırmıştır.

Görüldüğü üzere Ö2 almış olduğu özel değerleri soruyu *anlamlandırmak* ve *doğruluğunu göstermek* adına rastgele seçmiş olduğu söylenebilir. Kural dışında farklı bir çözüm arayışı içerisine girdiği zaman ise yine rastgele özel bir değer almış ve normal bölme işlemi gerçekleştirmiştir. Ayrıca 2 dakika gibi kısa bir sürede soruyu cevaplandırmıştır. Tabii diğer katılımcılara göre bu kadar kısa sürede cevaplandırmasının sadece iki özel değer için, 11 ile bölünebilme kuralını ve bir özel değer içinde normal bölme işlemi gerçekleştirmesinden dolayı olduğu söylenebilir. Kısacası Ö2 özelleştirmeyi sadece soruyu anlamlandırma ve bir iki tane özel değerin tüm dört basamaklı palindromik sayıların genel durumunu kapsayacağı düşüncesini açıklamak için kullandığı söylenebilir. 11 ile bölünebilme kuralı dışına çıkamamıştır. Dolayısıyla beklentimiz olan sistematik özel değerler ve artış miktarına göre örüntü oluşturup genel kanıya varmada bulunmamıştır.

4.2.2.4. ÖA1’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okumuştur. Daha sonra bir müddet sessizce düşünmüş ve düşüncelerini; “*aslında 3 basamaklı olsa şey vardı, sağ ile solların toplamı eğer ortada ki sayıyı veriyorsa, ya da sağ ile solun toplamı 11’i geçiyorken, 11 eksiği ortada ki sayıyı veriyorsa, o sayı 11’e bölünüyordu ama 4 basamaklı sayılarda bunu hiç düşünmedim. Dört basamaklı palindromik sayı nasıl olabilir ki başta ve sonra aynı olacak bir kere baştaki sayı 1 ise sonda ki sayıda 1 olmak zorunda. 4 basamaklı bir sayı o zaman şuraya (iki tane 1’in arasını göstererek) ne yazarsak*” şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacının bu düşüncelerini kâğıda yazmasını istemesi üzerine ÖA1 kâğıdına Şekil 4.41. deki gibi açıklamada bulunarak yazmıştır.

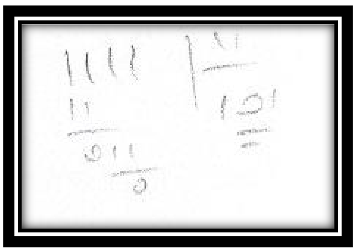
ÖA1: *Başta 1 varsa sonda da 1 vardır dedik tersten aynı okunabilmesi için, sonra şurada ki sayıyla şurada ki sayıda aynı olmalı (onlar ve yüzler basamağını göstererek) rakamları farklı demiyor sanırım. Yok, rakamları farklı demiyor, yani şu araya* (Şekil 4.41.*) en azından 11,22,33… 99 kadar geleceğim.*



Şekil 4.41. ÖA1'in İncelediği İlk Özel Palindromik Sayılar

Daha sonra yazmış olduğu bu sayıların 11 ile bölünüp bölünemeyeceğini; "*tabi şimdi burada 11 ile bölünebilme kuralını oluşturmam lazım yoksa her bir sayı için 9 kere deneyeceğim birde "00" da var tabi hatta 10 kere deneyeceğim. Bunu 9 kere buradan 90 tane sayı gelecek muhtemelen. Evet 90 tane sayının teker teker 11 ile bölünebiliyor mu diye denemek çok saçma. Bunun için bir yöntem bulmak lazım. O yüzden 11 ile bölünebilme kuralı neydi?"* şeklinde ifade ederek açıklamıştır. Bu açıklamasından sonra 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışmıştır. Hatırlama aşamasını ise *"+,-,+,- diye yazıyorduk. 7 ile bölünebilme kuralında mıydı bu yoksa 11 ile bölünebilme kuralında mıydı? O 321'miydi!! Yok*" biçiminde gerçekleştirmiştir (*kuralı hatırlamak için sesli düşünüyor, bu sırada anlamsız cümleler kuruyor yani 7 ve 11 ile bölünebilme kurallarını irdeliyor).*

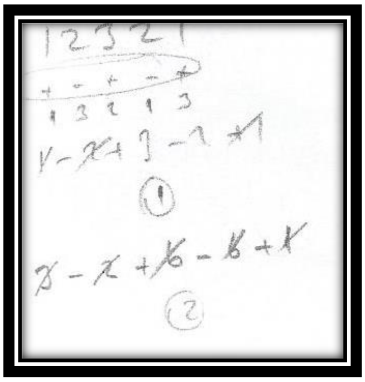
Burada 7 ve 11 ile bölünebilme kuralını karıştırmıştır. 11 ile bölünebilme kuralının hangisi olduğunu hatırlamak adına kâğıdına Şekil 4.42. deki gibi özel bir sayı alarak 11'e bölmüştür.



Şekil 4.42. ÖA1'in 11 İle Bölme Uyguladığı Birinci Örneği

Araştırmacı ÖA1'in yaptığı bu işlemleri açıklaması için "*şuan ne yapıyorsunuz?"* sorusunu yöneltmiştir.

ÖA1: *11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışıyorum. 7 ve 11 de biz bunu yapıyorduk +,-,+,- yapıyorduk, fakat bir tanesinde gruplayıp soldan sağa doğru 3-1-2-3-1-2 diye yazıyorduk. Ondan sonra bunları çarpıyorduk. O 7 ile bölünebilme kuralında mıydı, 11 ile miydi sanırım, 11 de direk +,- yazıyorduk, 3-2-1 diye gitmiyorduk*" şeklinde cevaplamıştır. Daha sonra 11 ve 7 ile bölünebilme kuralını sırasıyla +,- ve 1-3-2 gruplandırma metodunu Şekil 4.43. deki gibi soruda verilen beş basamaklı palindromik sayıya uygulamıştır. Dolayısıyla kuralı doğru hatırlayıp hatırlamadığını emin olmak adına özelleştirme gerçekleştirdiği söylenebilir.



Şekil 4.43. ÖA1'in İncelediği 5 Basamaklı Palindromik Sayı

Bu uygulama sonucunda ÖA1 **"***sadece 11 ile bölünebilme kuralını elde etmeye çalışıyorum*." ifadesinde bulunmuştur.

Yaptıkları bu işlemlerden sonra, "+,-" olan kısmı göstermiş ve *"muhtemelen buydu*" diyerek, 11 ile bölünebilme kuralının "+,-" gruplama metodunun olduğunu belirtmiştir. Daha sonra "*bunun üzerinden devam etsek, +,- olarak yazdığımızı düşünsek, dört basamaklı bir sayıda +,-,+,- diye yazdığımda ne olacak, şununla şu sayısal değer olarak şununla da ortada ki birbirini götürecek ve "0" oluşacak, muhtemelen, o zaman her palindromik sayı "0" olduğu için 11 ile bölünecek*." şeklinde dört basamaklı her palindromik sayının 11 ile tam olarak bölünebileceğini ifade etmiştir.Söylenenleri teyit etmek ve toparlamak adına araştırmacı ile ÖA1 arasında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI*: cevabın doğru olduğunu 11 ile bölünebilme kuralından mı söylüyorsunuz?*

AÖ1*: evet, 11 ile bölünebilme kuralı +,- idi dört basamaklı bir palindromik sayı elde edebilmek için, başa ne yazdıysam sona da bir kere aynısını yazmak zorundayım ki tersten okunuşu da aynı olsun, dört basamaklı bir sayıda (ortaları göstererek) buraya da mecburen aynı sayıları yazmak zorundayım ortada ki iki taneyi, yani onlar ve yüzler basamağında aynı sayıyı yazmak zorundayım. O zaman ne olacak altına bir artı bir eksi yazarak 11 ile bölünebilme kuralını düşünsem, sağ sol birbirini götürmüş olacak, toplam her türlü sayısal değer olarak "0" olacak, yani ne olacak rakamlar toplamı "0" eşit olacak bu kurala göre düşündüğümüz zaman, o zamanda 11 ile bölünebilme kuralını sağlayacak, demek ki bütün sayılar 11 ile tam bölünebiliyormuş.*

Yukarıda ki açıklamadan sonra araştırmacı 11 ile bölünebilme kuralı dışında farklı bir düşünme beklentisinden "*peki biz 11'ile bölünebilme kuralını bilmiyoruz, o zaman nasıl çözebiliriz bu soruyu?*" şeklinde soru yöneltmiştir. ÖA1 bu soru üzerine ilk başta bulmuş olduğu 90 palindromik sayı ifadesini göstererek "*90 tanesini denemekte bir yol ama çok uzun bir yol, 11 ile bölünebilme kuralını bilmezsek…*" şeklinde ifade de bulunmuş ve düşünmeye başlamıştır.

Bir müddet düşündükten sonra "*çözümleme yapsak acaba olur mu diye düşünüyorum ama muhtemelen çözümlemede de çok fazla bir şey çıkmayacak gibi. abcd dört basamaklı sayı, olamaz… abba 4 basamaklı sayısı ancak olabilir palindromik kuralını sağlaması için. O zaman bunu çözümlesek*" diyerek kâğıdına Şekil 4.44. deki gibi yazmıştır.

Şekil 4.44. ÖA1'in İncelediği Cebirsel İfade ve Çözümlemesi

Devamında "*Burada ki sayılar (1001 ve 110) 11'in bir katı olduğu için, a'dan b'den bağımsız zaten her türlü 11 ile bölünecek.*" şeklinde açıklamıştır. Araştırmacının "*daha başka, farklı çözümler aklınıza geliyor mu?*" sorusuna ÖA1 "*valla 90'nını da yazıp denerim, başka 3. yolda o olur. Başkada ciddi ciddi aklıma bir şey gelmiyor*" şeklinde cevap vermiş ve soruyu sonlandırmıştır.

ÖA1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA1 soruyu okuduktan sonra "*3 basamaklı olsaydı, hemen cevaplandırırım, kuralını biliyorum*" şeklinde ifadede bulunmuş, “*acaba o kural 4 basamaklılarda da geçerli mi?”* diyerek bir müddet düşünmüştür. Görüldüğü üzere ÖA1 soruyu okuduktan sonra 3 basamaklı sayıların 11 ile tam olarak bölerken uyguladığı yöntemi açıklamıştır. Bu açıklamasında aslında 11 ile bölünebilme kuralını açıkladığı söylenebilir. Fakat bahsettiği kuralın 11 ile bölünebilme kuralı olduğunu belirtmemiş daha sonra 11 ile bölünebilme kuralı arayış çabası içerisine girmiştir. Buradan ÖA1 üst bilişsel olarak kuralın farkında olmadığı söylenebilir.

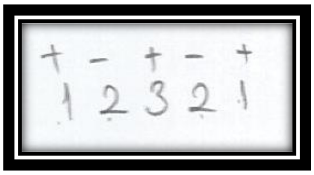
Daha sonra bu ifadesinden yola çıkarak dört basamaklı sayılar içinde aynı kuralın geçerli olup olmayacağını kendince sorguladığı görülmektedir. Daha sonra dört basamaklı palindromik sayının tanımını ifade etmiş ve Şekil 4.41. deki gibi palindromik sayıların bir kısmını yazmıştır. Bir müddet düşündükten sonra dört basamaklı palindromik sayı sistemini irdeleyerek Şekil 4.43. deki gibi özelleştirme gerçekleştirmiştir. Şekil 4.43. deki özel değerleri yazarken, *en küçük dört basamaklı palindromik sayıyı yazması dikkat çekicidir.* Yani palindromik sayıları sistematik bir şekilde yazmıştır. Şekil 4.41. göstererek 90 tane böyle sayı yazılabileceğini belirtmiştir. Muhtemelen bunu, yazmış olduğu özel değerlerden yola çıkarak tüm rakamlar için palindromik kuralını uygulayarak bu sonuca vardığı söylenebilir. Fakat bu sayıların 11 ile bölünebilir olduğunu göstermemiştir. Bu yüzden 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalıştığı söylenebilir.

Araştırmacının bu düşüncelerini açıklayarak kâğıda yazmasını istemesi üzerine ÖA1 11 ile bölünebilme kuralından bahsetmeye başlamıştır. Fakat kuralı tam olarak hatırlayamamıştır. Kısa bir süre düşündükten sonra 11 ve 7 ile bölünebilme metodundan (+,- ve 1-3-2 gruplandırması) bahsetmiştir. Fakat hangi metodun hangi bölünebilme kuralına ait olduğunu tam olarak belirtememiştir. Bunun üzerine hatırlamış olduğu kuralları birer özel değer alarak, Şekil 4.43. deki gibi uygulamıştır. Burada ise var olan genel bir kuralı *anlamlandırmak* adına özelleştirme kullanmadığı söylenebilir. Uygulama sonunda 11 ile bölünebilme kuralının +,- şeklinde gruplama metodu olduğuna karar vermiştir. Daha sonra dört basamaklı palindromik sayı tanımıyla birlikte 11 ile bölünebilme kuralını açıklamış, dört basamaklı palindromik sayıların 11 ile tam olarak bölünebileceğinin doğru olduğunu belirtmiştir. Araştırmacının “*farklı şekillerde, kural kullanmadan cevaplandırabilir misiniz*” sorusu üzerine “*90 sayının hepsini denerim*” şeklinde cevap vermiştir.

Daha sonra bir müddet düşünmüş ve çözümleme yaparak göstermeye karar vermiştir. Çözümleme yapabilmek için 4 basamaklı sayıyı "abcd" şeklinde cebirsel olarak ifade etmiştir. Fakat kısa bir süre sonra almış olduğu sayının palindromik olmadığını fark etmiş ve cebirsel ifadesini "abba" şeklinde düzeltmiştir. Şekil 4.44. deki gibi "abba" ifadesini çözümledikten sonra cebirsel terimlerin katsayılarını "1001 ve 110" olduğunu belirtmiş, 11 ile bölünebileceğini söylemiştir. Araştırmacının "*başka farklı çözümler var mı?*" sorusu üzerine ÖA1 "*Başkada ciddi ciddi aklıma bir şey gelmiyor*" ifadesinde bulunmuş ve cevabını sonlandırmıştır.

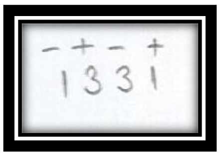
4.2.2.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 soruyu hızlıca okumuş, okuduktan sonra ilk düşüncesini "+,-,+,- demi 11 ile bölünebilme kuralı oydu" şeklinde 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışmıştır. Daha sonra kuralın "+,-" şeklinde olacağı düşüncesiyle Şekil 4.45 deki gibi özel bir sayıya uygulamıştır.



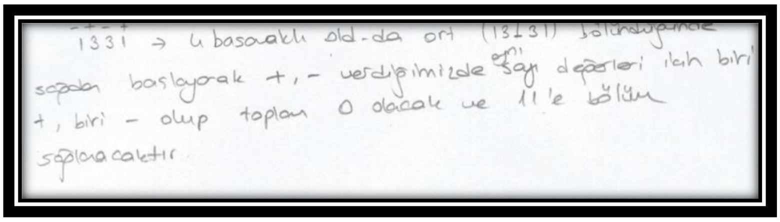
Şekil 4.45. ÖA2'nin İncelediği İlk Özel Değeri

Almış olduğu özel değere bakarak "*hayır… 11 ile bölünebilme kuralı bu muydu? 5-4 oluyor, 5-4=1 11 ile bölünmüyor, 0 çıkmadı. 0 çıkması gerekmiyor muydu?*" şeklinde kendine sorular yöneltmiştir. Gerçekleştirdiği işlemlere baktıktan bir müddet sonra "*Aaa!!! Dört basamaklı diyor burada, ben beş basamaklı aldım. Dikkat etmedik. Mesela...*" ifadesinde bulunmuş, vermiş olduğu özel değeri silmiş, yerine Şekil 4.46. deki sayıyı yazmıştır.



Şekil 4.46. ÖA2'nin İncelediği (Değiştirdiği) İkinci Özel Değeri

Daha sonra bu düşüncelerini Şekil 4.47. deki gibi kâğıdına açıklayarak yazmıştır.



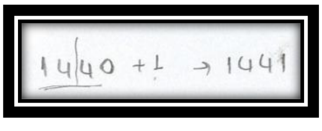
Şekil 4.47. ÖA2'nin İncelediği İkinci Örnek İle İlgili Kâğıda Yazdığı

Yapılan işlemlerin anlaşılırlığı ve özetlenmesi adına araştırmacı ile ÖA2 arasında aşağıda ki diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI: *yani senin için 1331 sayısı 11 ile bölünebilme kuralıyla +,- yaptığımız zaman kalan "0" 11'in katı olduğu için bölünebildiğini söyledin bunu tüm palindromik sayılar için de söyleyebiliyorsun öyle mi*?

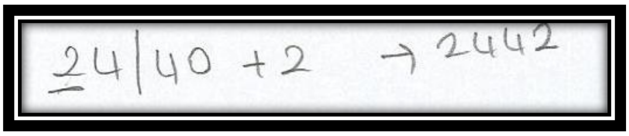
ÖA2: *öyle olduğuna inanıyorum. Çünkü dediğim gibi dört basamaklı olduğu için ortadan ikiye böldüğüm zaman, iki sağda iki solda yaptığım zaman, bu sayıların değerleri aynı olacak ki zaten ortadan ikiye böldüğümde… aynı olacak çünkü palindromik sayı olabilmesi için, o şekilde olması gerek. Yani ortadan ikiye böldüğüm de sağlı sollu, nasıl deyim… Ayna gibi düşün ortadan ikiye böldüğümüz zaman, yansıması gibi olması gerekiyor. Böyle olduğunda da sağdan başladığım zaman +,- bence hepsi sağlar yani.*

Araştırmacı 11 ile bölünebilme kuralı dışında farklı bir düşünme yaklaşımı beklentisinden hareketle**;** "*Sende ilk başta söyledin 11 ile bölünebilme kuralı dedin. Peki, sen bu kuralı bilmesen, bilmiyor olsan. Dört basamaklı palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olup, olmadığını söyleyebilir misiniz bana. Başka bir şey geliyor mu aklına*" şeklinde ÖA2'ye soru yöneltmiştir. Bu soru üzerine ÖA2 bir süre düşünmüş, daha sonra "*10 bölünebilen sayıların, +1 eklenmiş şekilde, ama o zaman hem sağına hem soluna eklemem lazım*" ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadesini açıklaması istendiğinde "*Yani 10 bölünen bir sayı bulacağım önce. Atıyorum* (Şekil 4.48.) *1440 10'a bölünüyor, bunun palindromik sayı olabilmesi için +1 olması lazım ki bölünebilsin. Yani böyle olması lazım*" ifadesinde bulunmuştur.



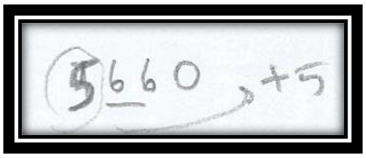
Şekil 4.48. ÖA2'nin Kuralı İçin İncelemiş Olduğu Birinci Özel Değer

Daha sonra belirtmiş olduğu bu yeni kuralını, başka bir özel değer alarak ve Şekil 4.49 deki gibi kâğıdına yazmış "*2440 mesela 10 bölünüyor, binler basamağındaki sayıyı eklediğim zaman yine bölünüyor olması lazım*." şeklinde açıklamıştır.



Şekil 4.49. ÖA2'nin Kuralı İçin İncelemiş Olduğu İkinci Özel Değeri

Daha sonra araştırmacı "*başka şeyler geliyor mu aklınıza*" sorusunu yöneltmiştir. ÖA2 bir önceki kendi geliştirmiş olduğunu düşündüğü kuraldan yola çıkarak "*Yada 12'ye bölünebilme desem ama o karışık olur çünkü 12'ye bölünebilmesi için hem3'e hem 4'e bölünecek. Orada bir sürü çok fazla işlem yapmamız lazım. Hepsini kontrol edebilmek için yani"* ifadesinde bulunmuştur. Araştırmacı "*peki bunu her zaman kullana bilir miyiz?"* sorusu üzerine, ÖA2 "*Hayır. Burada o özel sayıyı yakalamaya çalışıyorum ben."* açıklamasında bulunmuştur. Ayrıca ÖA2 bu düşüncesini şimdi geliştirdiğini belirtmiştir. Kendince geliştirmiş olduğu bu düşüncesinden emin olmak için Şekil 4.50. deki gibi başka bir özel sayı daha alarak deneme yapmış ve cevabı sonlandırmıştır.



Şekil 4.50. ÖA2'nin Kuralı İçin İncelemiş Olduğu Üçüncü Özel Değer

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak 11 ile bölünebilme kuralını hatırlamaya çalışmıştır. Bölünebilme kuralını hatırlamak için ise önce beş basamaklı palindromik sayı almış ve emin olamayarak hatırlamış olduğu kuralı bu sayıya uygulamıştır. Çıkan sonuç beklentisini karşılamayınca duraksamış ve vermiş olduğu sayının dört basamaklı palindromik olmadığını fark ederek başka bir özel sayı (1331) almıştır. Bu sayıya tekrar 11 ile bölünebilme (+,-) kuralını uygulamış ve çıkan sonuç beklentisini karşılayınca kuralın bu olduğu kanaatine varmıştır. Daha sonra Şekil 4.47. deki gibi ifade ederek soruyu cevaplandırmıştır. Araştırmacının "*başka farklı biçimlerde çözebilir misiniz?*" sorusu üzerine, ÖA2 yeni bir kural geliştirmiştir ve bu kuralını göstermek adına farklı özel değerler alarak kuralını açıklamıştır.

Görüldüğü üzere, ÖA2'nin soruyu okuduktan sonra ilk olarak aklına gelen 11 ile bölünebilme kuralı olmuştur. Bu düşüncesinden hareketle 11 ile bölünebilme kuralını hatırlama arayışı içine girdiği söylenebilir. Daha sonra bu arayış esnasında "12321" ve "1331" şeklinde özel değerler alarak emin olmayarak hatırlamış olduğu kuralı sayılar üzerinde uygulamıştır. Burada ÖA2 düşüncelerinin doğruluğunu göstermek, emin olmak adına özelleştirme gerçekleştirdiği söylenebilir. 10 ile bölünebilme kuralından yola çıkarak 11 ile bölünebilen ve dört basamaklı palindromik sayılar inşa etmeye başlamıştır. Bu inşa ettiği sayıları (düşüncesini) özel değerler kullanarak göstermiştir. Kısacası ÖA2 özelleştirmeyi daha çok, var olan düşüncelerini göstermek adına gerçekleştirdiği söylenebilir.

4.2.2.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulguların Karşılaştırılması ve Yorum

Bu soru kağıt şerit sorusundan oldukça farklıdır. Çünkü kağıt şerit sorusunda kağıt gibi somut bir materyal ile özel durumlara bakılabileceği gibi aynı zamanda kağıt üzerinde şekil çizilerek de veya zihinden katlama yapılarak da çözülebilecek bir soru tarzındadır. Palindromik sayılar sorusu ise sayısal örnekler yardımı ile özel durumlardan yola çıkılarak çözülebileceği gibi direk cebirsel ifade yazarak da çözülebilmektedir.

Mason vd. (2010) ifade ettiği gibi bu soruda özelleştirme, soruyu anlamak, bir palindromik sayı hakkında fikir edinmek, verilen ifadenin doğruluğunu test etmek, 4 basamaklı bir palindromik sayıyı keşfetmek, en küçük palindromik sayı ile bir sonraki palindromik sayı arasındaki ilişkiyi görmek, iddianın doğruluğu ile ilgili güven kazanmak için yardımcı olabilir. Bununla birlikte sistematik özelleştirmede bir örüntü bulmada, sonucun niçin doğru olduğu hakkında fikir sahibi olmada daha sonrasında ise örüntünün doğru olup olmadığını test etmede kullanılabilir. Bunun yanı sıra dört basamaklı palindromik sayıyı ABBA şeklinde yazarak da kolaylıkla çözülebilir. Bu tarzdaki çözümler, dört basamaklı palindromik sayılara genel bir argüman uygulandığı için özelleştirmenin delillerini sunmayacaktır. Ayrıca Mason vd. (2010) ifade ettiği gibi bu sorunun başka önemli yönleri de vardır. Öncelikle randomdan ziyade, sistematik özelleştirme örüntü bulma açısından önemlidir.

Tüm bunlar göz önüne alındığında katılımcıları birlikte değerlendirmek, süreç boyunca benzer ya da farklı davranışları ortaya çıkarmak için önemlidir. Katılımcıların sorunun çözümü esnasında kullandıkları düşünme yaklaşımları ve gerçekleştirdikleri yöntemler sırası ile;

A1: Ters örnek bulmaya çalışma – ters örneği özelleştirme (1221) – özel değere 11 ile bölünebilme kuralını uygulama–palindromik sayıyı cebirsel ifade (aaaa-abba) etme–cebirsel ifadeye 11 ile bölünebilme kuralını uygulama–sistematik özelleştirme düşüncesi ve özelleştirme

Ö1: palindromik sayıyı cebirsel ifade (abba)–cebirsel ifadeye 11 ile bölünebilme kuralı uygulama–çözümleme yapma

Ö2: palindromik sayıyı özelleştirme (1221)–özel değere 11 ile bölünebilme kuralını uygulama–özel değeri 11 ile bölme-farklı örnekler ile gösterme (3003-5335)

ÖA1: Palindromik sayıyı özelleştirme yaparsa çok sayı denemesi gerektiğini fark etme–11 ile bölünebilme kuralı hatırlama için özelleştirme–palindromik özel değere 11 ile bölünebilme kuralını uygulama (+,-,+,-) – palindromik sayıyı cebirsel ifade (abba)– çözümleme

ÖA2: 11 ile bölünebilme kuralını hatırlama için özelleştirme–palindromik sayıyı özelleştirme (1331)–palindromik sayıya 11 ile bölünebilme kuralı uygulama (+,-,+,-) –yeni kural bulma–kuralı özelleştirme– özel değere kuralını uygulama.

Buradan görüldüğü üzere Ö1 palindromik sayıyı cebirsel (genel) olarak ifade etmiş hiçbir özel değer almamış yani özelleştirme yapmamıştır. Aynı şekilde ÖA1 de bakılacak örnek sayısının fazla olmasında yola çıkarak 11 ile bölünebilme kuralındaki (+,-,+,-) işaretlemesinden yola çıkarak sonuca ulaşmıştır. Bu anlamda iki katılımcıda benzer şekilde özel örneklere yer vermeden özelleştirme yapmadan sonuca ulaşmışlardır. Burada sistematik özelleştirmeyi sadece ÖA1 in gerçekleştirdiği söylenebilir. ÖA1 dışında katılımcılar almış oldukları özel değerleri ise rastgele seçmişlerdir.

Ö1 ve ÖA1'in aksine Ö2 de birkaç özel değer almış cebirsel ifade hiçbir şekilde kullanmamıştır. A1 ile ÖA2 ise benzer şekillerde çözmeye çalışmışlardır. Özel bir örnekten yola çıkarak 11 ile bölünebilme kuralını uygulayıp cebirsel ifade ile sonuca ulaşmışlardır. Burada A1 diğerlerinden farklı olarak ters bir örnek bulma (aksi örnek bulma) ile sorunun çözümüne yaklaşmıştır.

Ayrıca katılımcıların ilk akıllarına gelen düşüncelerinden sonra araştırmacının "sorunun çözümünü daha başka şekillerde cevaplandırabilir misiniz?" sorusu üzerine, katılımcıların verdikleri cevaplar ve düşünceleri sırası ile;

A1: sistematik özelleştirme,

Ö1: çözümleme,

Ö2: 11 ile bölme,

ÖA1: cebirsel ifade ve çözümleme,

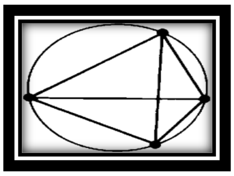
ÖA2: 10 ile bölünebilme ve palindromik sayıdan yola çıkarak farklı bir kural geliştirme şeklinde olmuştur.

4.3 Genelleme Boyutundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Araştırmanın ikinci alt problemi "İzlenen matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme boyutlarından "genelleme" boyutundaki düşünmeleri, yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?" olarak ifade edilmiştir. Bu alt probleme cevap verebilmek için katılımcılara iki soru yöneltilmiştir. Genelleme sorularında ki amaç katılımcıların genelleştirme yaparak sonuca ulaşma şekilleri, genelleştirmeye ulaşılırken kullanılan özel değer sayıları ve genelleştirmeye yaklaşımını (yani şüphecimi yaklaşıyor, emin mi) incelemektir. Bu süreçte var olan farklılıkları da katılımcılara göre değerlendirmektir. Katılımcılara yöneltilen her bir probleme ilişkin bulgular da ayrı ayrı verilmiş ve daha sonra karşılaştırmalar yapılmıştır.

4.3.1. Genelleme Boyutunun Birinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Genellemeye yönelik ilk soru, "*Bir çember etrafına "n" nokta yerleştiriniz ve her çift noktayı düz çizgilerle birleştiriniz. Çemberin bölünebildiği maksimum bölgenin sayısı nedir? Örneğin aşağıdaki şekilde 4 nokta varken 8 olası bölge oluşur"*



şeklindedir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır.

4.3.1.1. A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

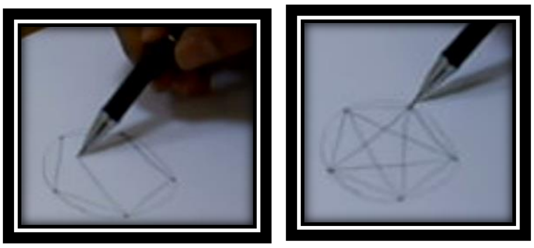
A1 soruyu okuduktan sonra dönüt almak için araştırmacıyla arasında aşağıdaki gibi diyalog gerçekleşmiştir.

***A1**: yani noktalara ile bölge arasında bir uyum mu yakalamaya çalışacağız?*

***ARAŞTIRMACI**: evet, aşağıda bir tane örneğimiz verilmiş.*

Daha sonra A1 "*bunu mesela herhangi bir 5 nokta için oluşturmaya çalışsak nasıl bir şey olur* " ifadesinde bulunmuş ve Şekil 4.51. deki gibi kâğıdına, üzerinde 5 nokta bulunan çember çizmiş, Şekil 4.52. deki gibi sırayla noktaları birleştirmiştir.

Şekil 4.51. A1'in Çözüm İçin Çizdiği Birinci Çember

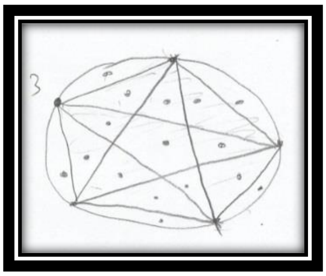


Şekil 4.52. A1'in Çember Üzerinde Noktaları Birleştirmesi

Çember üzerinde oluşan bölgeleri saymada bir müddet sıkıntı çekmiştir. Oluşan bölgelerin hangilerini sayacağını tamamlamak adına Şekil 4.53. deki gibi soruda verilen örneği incelemiş, örnekte oluşan bölgeleri saymıştır.

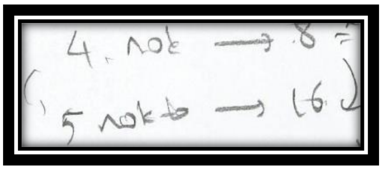
Şekil 4.53. A1'in Soruyu Anlamak İçin Verilen Örneği İncelemesi

Soruda verilen örnek çemberi inceledikten sonra A1 çember üzerinde 5 nokta almış ve çizmiş olduğu bölgeleri Şekil 4.54. deki gibi işaretleyerek saymıştır.



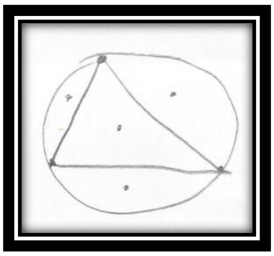
Şekil 4.54. A1'in Çember Üzerinde Oluşan Bölgeleri Sayması

Oluşan bölgeleri sayma işleminden sonra "*O halde, 4 nokta için 8 olası bölge ifade ederken, 5 nokta için 16 mı? Şekilden öyle çıktı, acaba nokta sayısı arttıkça ki ben bide burada 3 noktayı denemek istiyorum."* ifadesinde bulunmuştur. Araştırmacının "*neden 3 noktayı deniyorsunuz*" sorusu üzerine A1 "*noktalar birer arttıkça acaba* (Şekil 4.55.) *noktalar arası bir uyum var mı diye bakacağım*"



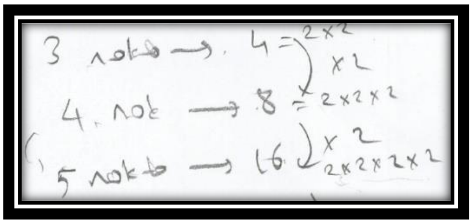
Şekil 4.55. A1'inOluşan Bölgeler Arası İlişkiyi İncelemesi

Şeklinde cevap vermiş ve Şekil 4.56. deki çemberi çizmiş, oluşan bölgeleri saymıştır.



Şekil 4.56. A1'in İncelediği İkinci Çember

Özel olarak almış olduğu noktaları ve bu noktalar sonucu oluşan bölge sayılarını Şekil 4.57. deki gibi kâğıdına "*Yani 3 nokta için 4 olası bölgemiz var. Dolayısıyla noktalar birer artıkça, olası bölgelerinde 2şer kat arttığı görülüyor*." açıklamasında bulunarak yazmıştır.



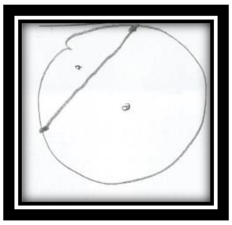
Şekil 4.57. A1'in Oluşan Bölge Sayıları Arasındaki İlişkileri İncelemesi

Daha sonra araştırmacı "*peki yeterli mi bizim için bu 3 deneme*" şeklinde soru yöneltmiştir. Bu soru üzerine aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

A1: *3 deneme yeterli midir? Zaten sen 2 nokta verdiğin anda, çemberin ne oluşur 2 bölge oluşturursun.*

ARAŞTIRMACI: *Şekil üzerinde gösterebilir misiniz?*

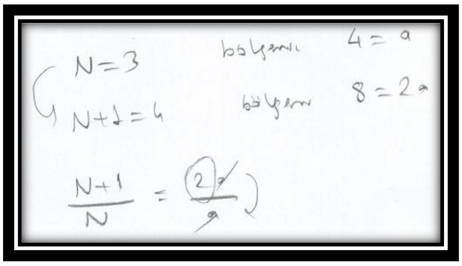
A1: Şekil 4.58. *deki gibi farklı iki nokta verdiğin anda bölgeyi iki noktaya ayırdı. 3 nokta verdiğin anda 4 bölgeye ayırdı, dolayısıyla aritmetik bir şekilde, ifade ettiğimizde noktalar birer artıkça, bölgelerin 2şer kat arttığını gördük. Dolayısıyla n-nokta verdiğinde…*" açıklamasında bulunmuş ve almış olduğu çemberler örneklerini inceleyerek düşünmeye başlamıştır.



Şekil 4.58. A1'in İncelediği Üçüncü Çember

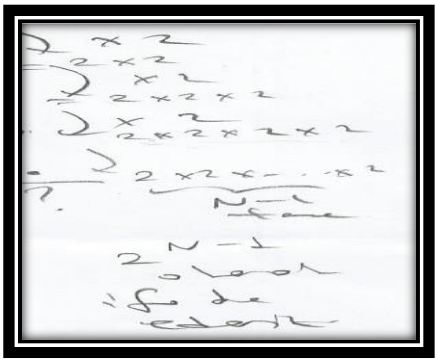
Araştırmacının "*ne düşünüyorsunuz"* sorusu üzerine "*bağlantı kurmaya çalışacağım. n-nokta verdiğim de acaba o ilişkiyi nasıl görebiliriz. n-nokta için acaba ilişkimiz nasıl olur*?" şeklinde bir düşüncelerini ifade etmiş ve ilişki aramıştır. Bu arayışını aşağıda ki gibi sesli bir biçimde açıklayarak gerçekleştirmiştir.

A1: *genel bir yargıya varmak istiyorum burada. n-nokta için bu sayıları nasıl gösterebiliriz? Bölgemiz neydi, n=3 seçelim mesela tamam mı, bölgemiz neydi 3nokta için neydi 4 tü, onu da "a" olarak ifade ettim. Şimdi, diğerinde noktamız ne oldu "n+1" oldu yani 4 oldu, bölgemiz ne oldu, 4-nokta için, 8 oldu yani oda ne oldu "2a" oldu. Dolayısıyla ben taraf tarafa oranlama yaparsam* (Şekil 4.59.), *dolayısıyla oran 2 çıkıyor;*



Şekil 4.59. A1’in İncelediği Nokta Sayıları ve Bölgeler Arasındaki İlişki

Devamında *“n-nokta olursa 2n mi acaba. Noktalar ile bölgeler arasında ki oranın, birer artıkça oranın 2 kat arttığını gördük. hımm acaba n-nokta olduğunda bölgesel anlamda kaç bölge olduğunu n-cinsinden nasıl ifade edeceğiz.*” ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadeden sonra bir müddet daha düşünmüştür. Daha sonra “*n-ye bağlı bir sayı ifade edeceğiz*” demiştir ve noktalar ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramaya devam etmiştir. Sonuç olarak “*2 ile bölgeler arasında bağlantı, oran kurabilir miyim diye düşünüyorum da, dolayısıyla nokta sayısı 5 iken 4tane 2’nin çarpımı var. n-tane nokta olduğunda 2x2x2x2x...x2, (n-1) tane bölge oluşacak onu da 2^{n-1} olarak ifade ederiz*” şeklinde açıklamada bulunmuş, kağıdına Şekil 4.60. daki gibi yazmış, çözümünü sonlandırmıştır.



Şekil 4.60. A1’in Oluşan Bölgeler Onucunda Çıkarımda Bulunması

A1‘in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; A1 soruyu okuduktan sonra çember üzerinde 5 nokta almıştır. Alınan bu noktaları birleştirerek oluşan bölge sayılarını saymıştır. Almış olduğu 5 nokta ile soruda verilen 4 nokta sonucu oluşan bölge sayılarını karşılaştırmıştır (ilişkilendirme). Daha sonra çember üzerinde 3 nokta almaya karar vermiştir. Almış olduğu bu noktalar sonucu oluşan bölge sayılarını Şekil 4.57. deki gibi kâğıdına yazarak bölge sayıları arasında bir ilişki aramıştır (araştırma). Bu ilişkiyi ararken araştırmacının *“bir ilişki kurma açısından 3 nokta bizim için yeterli mi?*” sorusu üzerine, çember üzerinde 2 nokta alarak oluşan bölgelere bakmıştır. Ardışık farklı iki nokta sayısını ve oluşan bölge sayısını oranlayarak arada ki artış miktarının 2 kat olduğunu belirtmiş ve bir müddet düşündükten sonra, nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında 2^{n-1} şeklinde (Genelleme) genel bir kural olacağını ifade etmiştir.

Görüldüğü üzere, A1 burada sırası ile n=5,4,3,2 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramış ve n-nokta için sonucu 2^{n-1} şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Dolayısıyla özel durumlar için yaptığı gözlemleri genişleterek genel bir kural olarak ifade de bulunduğu söylenebilir.

Genelleme yaparken kullandığı strateji örnekler oluşturma, varsayımlarını test etmek için örnekler verme (2. noktayı alması), örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme ve genellemeye ulaşma şeklindedir. Ayrıca A1'in en uzun sürede cevaplandırdığı soru olmuştur. Sebebi ise nokta sayıları ile oluşan bölge sayıları arasında ki ilişkiyi belirlemesi uzun sürdüğünden diyebiliriz.

4.3.1.2. Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 soruyu okuduktan sonra bir müddet düşünmüştür. Daha sonra ilk olarak kağıdına Şekil 4.61. deki çemberler çizerek, bu çemberler üzerinde sırası ile nokta sayısını 2,3,4 olarak almıştır. Bu noktaları birleştirerek oluşan bölge sayılarını çemberlerin altlarına yazmıştır.

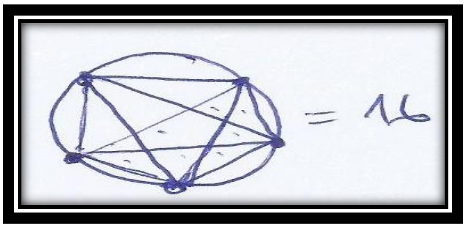
Şekil 4.61. Ö1'in Çember Üzerinde Sırası İle Aldığı Noktalar

Kâğıdına çizmiş olduğu çemberleri ve yaptığı işlemleri ise "*iki nokta varken 2 bölge çıkar. 3 nokta varken 4 bölge çıkar. Dairenin bölünebildiği bölge sayısı 2 bölge var 4 bölge var. 4 nokta içinde 8 bölge zaten. 2'nin kuvvetleri olma olasılığı yüksek 2^n diye düşünüyorum şuan*" şeklinde açıklamıştır. 2^n genellemesini teyit etme açısından araştırmacı ile Ö1 arasında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI: *2^n tane olur diyorsunuz.*

Ö1: *yoo!!! 2^{n-1} çünkü 2 noktada bir bölge oluyor. 2^{n-1} oluyor. 2 noktadan 2 bölge çıkıyor, 3 noktadan 4 nokta çıkıyor. ama nasıl ispatlarım.*

Bu diyalogdan sonra Ö1 2^n genellemesini 2^{n-1} şeklinde değiştirmiştir. Fakat şüpheci bir şekilde yaklaştığından dolayı araştırmacı "*niye emin değilsiniz hocam*" şeklinde Ö1'e soru yöneltmiştir. Ö1 "*çünkü kural oluşturmadık henüz.*" şeklinde yanıtlamış ve *"biraz daha düşünelim. 3 noktadan 4 noktaya geçerken neler değişiyor ona bir bakmam lazım, 3 noktada 4 bölge var 4. noktayı eklediğimizde 3 tane artıyor yani, çizdiğimden artı 1 geldi* (şekiller üzerinde göstererek)" ifadesinde bulunmuş, çember üzerinde 5 nokta almış Şekil 4.62. deki gibi oluşan bölge sayısını incelemiştir.



Şekil 4.62. Ö1'in İncelediği Çember Üzerinde ki 5 Noktalı Örneği

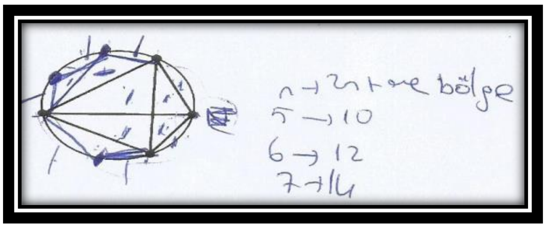
Araştırmacının "*16 nokta oluşuyor, yani kuraldan emin misiniz?"* sorusu üzerine Ö1 oluşan bölge sayılarını tekrar sayarak "*yazdığımız formül doğru gözüküyor. Sebebini tam açıklayamasak ta*" şeklinde ifadesinde bulunmuş ve soruyu sonlandırmıştır.

Ö1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak şekil çizmiş, şekil üzerinde sırası ile n=2,3,4 noktalarını alarak oluşan bölgeleri ve bu bölgeler arasında ki ilişkileri incelemiştir (ilişkilendirme-araştırma). İnceleme sonucu önce 2^n şeklinde bir kurala ulaşmıştır (genelleme). Araştırmacının emin olmak için sorular yöneltmesi üzerine Ö1 bir müddet düşünerek kuralını 2^{n-1} şeklinde değiştirmiştir. Daha sonra bu kuralını ispatlama düşüncesiyle hareketle, (emin olmak için) çember üzerinde 5 nokta almış, oluşan bölge sayısını şekil üzerinde saymış, aynı zamanda söylemiş olduğu kural ile de hesaplamıştır. Dolayısıyla şüpheci ve emin olmayan bir yaklaşım ile "*yazdığımız kural doğru gözüküyor, yani n nokta için 2^{n-1} bölge*" oluşacağı yanıtını vermiş soruyu sonlandırmıştır.

Görüldüğü üzere, Ö1 sırası ile n=2,3,4,5 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramış ve n-nokta için sonucu 2^{n-1} şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Dolayısıyla özel durumlar için yaptığı gözlemleri genişleterek genel bir kural olarak ifadede bulunduğu söylenebilir. Genelleme yaparken kullandığı strateji; örnekler oluşturma, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme, varsayımlarına test etmek için örnekler verme (5. noktayı alması) ve genellemeye ulaşma şeklindedir. Ayrıca Ö1 diğer sorulara göre bu soruya daha fazla süre ayırmıştır. Sebebini ise soruyu cevaplandırdıktan sonra şüpheci yaklaşmasından dolayı daha fazla özel değerler vermesinden olduğu söylenebilir.

4.3.1.3. Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak oluşan bölge sayısını sonsuz olarak belirtmiş. Bunu ise "*Sonsuz tane olmaz mı? Bir çember etrafına n-tane nokta yerleştiriyorsun*" şeklinde açıklamıştır. Daha sonra bir müddet düşünmüş ve soru da verilen örnek çemberden faydalanarak kâğıdına Şekil 4.63. deki gibi sırası ile 5 ve 6 nokta almış, oluşan bölge sayılarını karşılarına yazmıştır.



Şekil 4.63. ÖA2'nin İncelemiş Olduğu Çemberler ve Çıkarımları

Kâğıda yazdıklarını "5-*nokta olursa 10 bölge olur. Şöyle 6-nokta alalım onu da sayalım. 6-nokta için 12 bölge oldu. O zaman n-tane için "2n" tane bölge oluyor*" şeklinde açıklamıştır. Araştırmacının söylenenleri doğrulamak adına "*Yani n-tane koyduğumuz da 2n bölge mi oluşur diyorsunuz?*" sorusu üzerine Ö2 "*evet öyle düşünüyorum.* (Şekil 4.63.) *1tane daha yapalım 7 tane bölge olsun, onları da birleştirelim. 2 tane gelecek zaten, 1 tane 2 taneye bölünecek böylelikle 2 tane gelmiş olacak. Dolayısıyla 14 tane olmuş olacak*" cevabını vermiştir.

Ö2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 soruyu okuduktan sonra soruda verilen örnek çemberden faydalanarak n=5,6 nokta almış, bu noktaları birleştirmiştir. Bu noktalar sonucu oluşan bölge sayılarını sırası ile 10,12 şekline belirtmiştir. Almış oldukları nokta sayısı ve oluşan bölge sayıları arasında ki ilişkiye (ilişkilendirme - araştırma) bakarak "2n" varsayımında bulunmuştur (genelleme). Bu kuralının doğruluğunu göstermek adına aynı çember üzerinde 7. noktayı alarak bölgeleri saymıştır. Şekil üzerinde 14 bölge oluştuğunu göstererek. Kuralının doğru olduğunu ifade etmiştir.

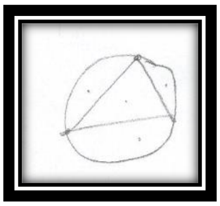
Görüldüğü üzere, Ö2 sırası ile n=4,5,6,7 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramış ve n-nokta için sonucu 2n şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Dolayısıyla özel durumlar için yaptığı gözlemleri genişleterek genel bir kural olarak ifadede bulunduğu söylenebilir.

Genelleme yaparken kullandığı strateji; örnekler oluşturma, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme, varsayımlarına test etmek için örnekler verme (7. noktayı alması) ve genellemeye ulaşma şeklindedir.

Ayrıca Ö2 diğer sorulara göre bu soruya daha fazla süre ayırdığı söylenebilir. Sebebini ise genellemesinin doğruluğunu göstermek için farklı özel değerler alması olduğu söylenebilir.

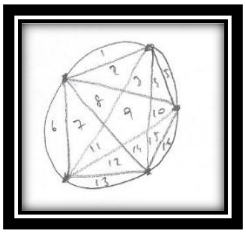
4.3.1.4. ÖA1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okuduktan sonra "*oluşabilecek bölge sayısından kasıt nedir?*" şeklinde araştırmacıdan dönüt alma gereksinimi duymuştur. Araştırmacı soruda verilen örneği göstererek açıklamada bulunmuştur. Daha sonra ÖA1 *" "n" ye ben 1 desem, 1 tane noktam var zaten onunla da hiçbir şekil oluşturamam. O yüzden burada ki sayı benim için "0" bölge diyelim. "n" şimdi 2 alalım, 2 noktadan 1 doğru geçer, başkada bir şansı yok. O yüzden 2 bölge oluşur diyelim. Gerçi 1 nokta varsa bölge tamamıdır, o zaman 1 bölge oluşur diyebilirim oraya. Bölge çemberin kendisi olur sonuçta çizgi çizemediğim için. 2 noktaya 2 demiştik çünkü sonuçta 2'ye bölecek. "n" yi 3 alsak, 3 alarak düşünsek. Deneyelim bakalım (*Şekil 4.64.)



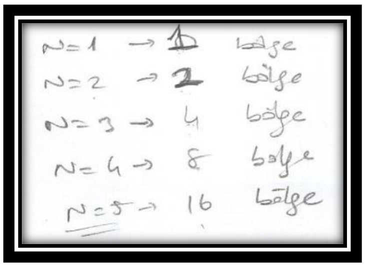
Şekil 4.64. ÖA1'in İncelediği Birinci Çember

Daha sonra "*4 bölge olmuş oldu. Bu soruda da 4 tane için 8 bölge olduğunu söylemiş. Yani ne olmuş oldu acaba 2'nin katları şeklinde mi gitmiş oldu."* şeklinde sırası ile n=0,1,2 ve 4 noktalarını alarak oluşan bölgeleri hesaplamıştır. Nokta ve bölge sayıları arasında ki ilişkileri inceleyerek "2n" genel kuralı olabileceğini belirtmiştir. Bu varsayımından sonra "*Olur mu ki. 5 tane versek 10 bölgeden çok fazla çıkacak. Acaba 2 kat 2 kat gitse 16 mı? Merak ettim deneyeceğim biraz uzun olacak ama*" diyerek çember üzerinde Şekil 4.65. deki gibi 5 nokta alarak oluşan bölge saymıştır.



Şekil 4.65. ÖA1'in İncelediği İkinci Çember

Bir müddet düşündükten sonra "*16 tane oldu hep 2 ile çarpılarak gidiyor, diğerinde 32, diğerinde 64 o şekilde muhtemelen gidecek tabi "n" bağlı bir şey görmem lazım benim. Her seferinde 2 katı olarak gidiyor ama 1 için 1, 2 için 2, 3 için 4'ü, 4 için 8'i, 5 için 16 verecek*" şeklinde ifadede bulunmuş Şekil 4.66. deki gibi kâğıdına yazmıştır.



Şekil 4.66. ÖA1'in İncelediği Nokta Sayıları ve Bölgeler Arasındaki İlişki

Nokta ve bölge sayısı arasında ki ilişkiyi ise n-nokta için "*2^{n-1} desek. "n" ye 1 verdiğim zaman 2^0 'dan 1 gelecek, 2 verdiğimde 2^1 den 2, 3 verdiğim zaman 4, 4 verdiğim zaman 2^3den 8, 5 verdiğimde 16 gelecek. O zaman 2^{n-1} taneymiş.*" Biçiminde açıklamada bulunmuş ve soruyu sonlandırmıştır.

ÖA1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA1 soruyu okuduktan sonra soru ile ilgili bilgi almak açısından araştırmacıya sorular yöneltmiş ve araştırmacı açıklamalarda bulunmuştur. Daha sonra ÖA1 sırası ile n=0,1,2,3 ve 4 noktaları sonucu oluşan bölge sayılarını hesaplamıştır(ilişkilendirme). Bu bölgeler arasında "2n" kuralı olabileceği veya 2'şer kat artacağı (Araştırma) varsayımlarında bulunmuştur. Bu varsayımlardan sonra n=5 noktası için oluşan bölge sayısını hesaplamıştır (araştırma) ve nokta sayısı ile oluşan bölge sayılarını Şekil 4.66. daki gibi kâğıda yazmıştır. Bir müddet kâğıdına bakarak düşünmüş ve 5-nokta için 32, 6 nokta için 64…n-nokta için 2^{n-1} tane bölge oluşacağı (genelleme) yanıtını vermiştir.

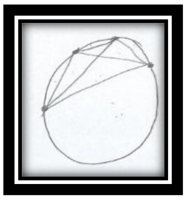
Görüldüğü üzere, ÖA1 sırası ile n=0,1,2,3,4,5 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramıştır. Fakat n=0,1,2 için oluşan bölge sayısını şekil çizmeden aklından hesaplamış daha sonra 3.nokta sonucu oluşan bölgeler için kağıdına şekil çizmiştir. Ve n-nokta için sonucu 2^{n-1} şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Dolayısıyla özel durumlar için yaptığı gözlemleri genişleterek genel bir kural olarak ifadede bulunduğu söylenebilir.

Genelleme yaparken kullandığı strateji; örnekler oluşturma, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme, varsayımlarına test etmek için örnekler verme (5. noktayı alması) ve genellemeye ulaşma şeklindedir.

Ayrıca Ö2 diğer sorulara göre bu soruya daha fazla süre ayırdığı söylenebilir. Sebebini ise genellemesinin doğruluğunu göstermek için farklı özel değerler alması olduğu söylenebilir.

4.3.1.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 soruyu okurken aynı zamanda Şekil 4.67. deki gibi kâğıdına çember çizerek, çember üzerinde 4 nokta almış ve bu noktaları birleştirmiştir.



Şekil 4.67. ÖA2'nin İncelediği Birinci Çember

Daha sonra çizmiş olduğu çemberde oluşan bölgeleri sayma sonucu 7 bölgenin oluştuğunu belirtmiştir. Soruda verilen örnek ile kâğıdına çizdiği çemberi kıyaslayarak oluşan bölge sayısı hakkında *"bende 1 tane bölge eksik, seçtiğim noktalara bağlı olarak değişiyor o zaman. Mesela 7 de çıkabiliyor*." açıklamasında bulunmuştur. Araştırmacının "*her noktayı birleştirdiniz mi*" sorusu üzerine ÖA2 kâğıdına tekrar bakarak, "*şurayı birleştirmemişim*." demiş ve soruda verilen örnek ile kendi çemberinde ki bölge sayısını eşit bulmuştur. Daha sonra "*tamam o zaman bu durumda 2 nokta bir bölgeye ayıracak. Pardon 1 nokta bir kere birleştirdiğim de 2 bölgeye ayırmış olacak. Bu geometri dersinde yapıyorduk ya işte noktaları birleştirdiğim zaman düzlemi 2 ayrı parçaya ayırır gibi bir şey diyorduk. Mesela böyle 2 parçaya ayırmış oldu. O zaman her nokta 2 bölgeye ayıracak. Eee Sonuç olarak n-tane diyor, sayımız belli değil. O zaman*

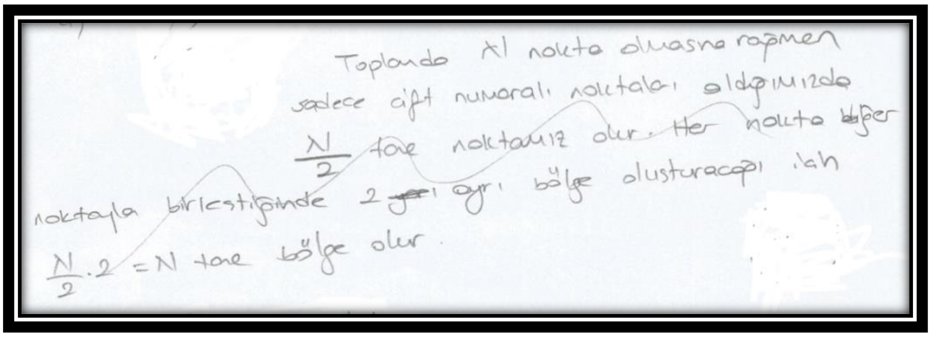
2n-olur.” şeklinde açıklamada bulunarak n-nokta için “2n” sonucuna ulaşmıştır. Araştırmacının emin olmak adına aşağıda ki şekilde sorular yöneltmesi üzerine;

***ARAŞTIRMACI**: 2n. 2 çarpı “n” mi.*

***ÖA2**: hıhı “n” tane nokta var çiftleri aldığımız için yine “n” kadar olur yani “n/2” kadar noktayı birleştirmiş olacağız.*

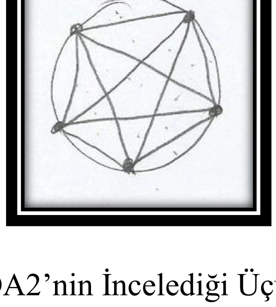
***ARAŞTIRMACI**: Hmm onu ifade edecek olursak*

şeklinde ÖA2 ile araştırmacı arasında diyalog gerçekleşmiştir. Bu diyalog sonunda ÖA2 Şekil 4.68. deki gibi kâğıdına açıklamada bulunmuştur.



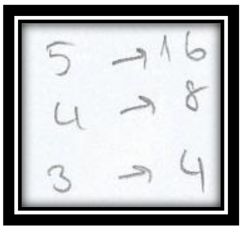
Şekil 4.68. ÖA2’nin Sorunun Çözümü İçin Yazdıkları

Açıklamasını bitirdikten sonra ÖA2 birden “*dur bir dakika*” diyerek çember üzerinde n=3 nokta almaya karar vermiştir. Bir çember daha çizerek *“Haaa olmadı 3 tane nokta var 4 bölge oldu*.” ifadesinde bulunmuştur. Daha sonra Araştırmacının “*3’noktayı denemek nereden aklına geldi. Niye 3’ü denemek istedin*.” sorusu üzerine; “ *bilemem belki bu örnek çift sayı olduğu için, “n” çift sayı olduğu için her biri tek tek birleşiyor ya, çift sayı oldu için iki-iki birleştirdiğimde, belki o yüzden öyle olmuştur yani. Tek bir sayı için ne olur diye düşündüm*.” yanıtını vermiştir. Daha önce 3 nokta alarak çizmiş olduğu çember üzerine 2 nokta daha eklemiş ve Şekil 4.69. deki gibi n=5 nokta için bölgeler oluşturmuştur.



Şekil 4.69. ÖA2’nin İncelediği Üçüncü Çember

Ardından 5 nokta için oluşan bölge sayılarını sayarak 16 bölge oluştuğunu hesaplamıştır. Kâğıdına ise Şekil 4.70. deki gibi nokta sayısı ile hesaplamış olduğu oluşan bölge sayılarını yazmıştır.

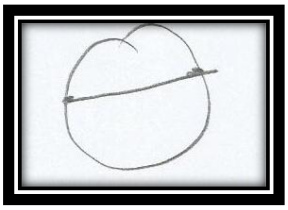


Şekil 4.70. ÖA2'nin İncelediği Nokta Sayısı ve Bölge Sayıları

Bir müddet düşündükten sonra "*Hmmm 2 üzeri bir şey olabilir o zaman. Buldum* 2^{n-1} *tane olur*" ifadesinde bulunmuş, yani 2^{n-1} bölge oluşacağını belirtmiştir. İlkyazmış olduğu kuralın ve "2n" sonucunun ise üzerini çizmiştir. Daha sonra araştırmacı ile aralarında aşağıda ki şekilde bir diyalog gerçekleşmiştir.

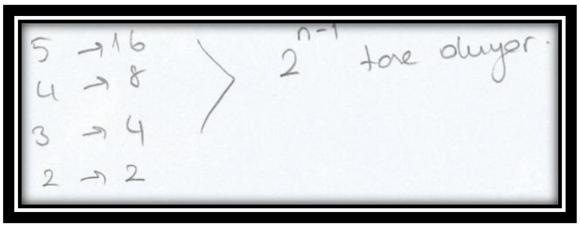
ARAŞTIRMACI*: yeterli mi peki 3 tane örnek.*

ÖA2*: ben genelde 3 tane ile genellenebilirliğine inanırım. Sonuçta tümevarımda da öyle yapmıyor muyuz? K=1 için, k=n için, k=n+1 için. Bir tane daha veriyim mi? çok olacak o zaman ama 32 tane olacak. Ben 2 nokta için de 2 bölge oluyor,* (Şekil 4.71.) *onu göstereyim.*



Şekil 4.71. ÖA2'nin İncelediği Dördüncü Çember

Şeklinde açıklamada bulunmuştur. Son olarak ise almış olduğu noktaları toplu bir biçim de Şekil 4.72. deki gibi kâğıdına yazarak soruyu sonlandırmıştır.



Şekil 4.72. ÖA2'nin İncelediği Nokta Sayısı ve Bölge Arası İlişki

ÖA2‘nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 soruyu okurken aynı zamanda kâğıdına çember çizerek çember üzerinde 4 nokta almış ve bu noktaları Şekil 4.68. deki gibi birleştirmiştir. Oluşan bölge sayısını ilk durumda 7 olarak bulmuştur. Dolayısıyla noktalar farklı yerlerde alınırsa bölge sayısı değişeceği düşüncesini söylemiştir. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog sonucunda herhangi iki noktayı birleştirmediğini fark etmiştir. Bu noktaları da birleştirdikten sonra 4 noktada 8 bölge oluşacağını belirtmiştir. Kendi yapmış olduğu çember ile soruda verilen örnekte oluşan bölge sayılarını karşılaştırmıştır. n=4 noktasından ve oluşan bölge sayısından yola çıkarak 2n şeklinde kural oluşacağını belirtmiş fakat kağıdına Şekil 4.68. deki gibi açıklamada bulunmuştur. Daha sonra birden n=3 nokta için oluşan bölge sayısını hesaplamaya karar vermiştir. Araştırmacı ÖA2’ye birden böyle bir karar almasının nedenini sorunca “*bilemem belki bu örnek çift sayı olduğu için, “n” çift sayı olduğu için her biri tek tek birleşiyor ya, çift sayı oldu için iki-iki birleştirdiğimde, belki o yüzden öyle olmuştur yani. Tek bir sayı için ne olur diye düşündüm.*” (araştırma) şeklinde açıklamada bulunmuştur. Daha sonra kâğıdına çember çizerek sırası ile 3 ve 5 noktaları sonucu oluşan bölge sayılarını hesaplamış (ilişkilendirme) ve Şekil 4.69. deki gibi yazmıştır. Bir müddet düşündükten sonra (araştırma) nokta sayısı ile bölge sayısı arasında ki ilişkiyi 2^{n-1} şeklinde ifade etmiş (genelleme) ve n-nokta için 2^{n-1} tane bölge oluşacağını belirtmiştir. Araştırmacının bunun için “*3 özel nokta denememiz yeterlimi*” sorusu üzerine ÖA2 “*ben genelde 3 tane ile genellenebilirliğine inanırım. <u>Sonuçta tümevarımda da öyle yapmıyor muyuz. k=1 için, k=n için, k=n+1 için</u>. Bir tane daha veriyim mi? çok olacak o zaman ama 32 tane olacak. 2 için de 2 bölge oluyor*” yanıtını vermiştir.

Görüldüğü üzere, ÖA2 sırası ile n=4,3,5,2 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramıştır. Fakat n-için almış olduğu noktalar sistematik bir şekilde değildir. Ama daha sonra kâğıdına Şekil 4.71. deki gibi sistematik şekilde yazmıştır. Buna rağmen özel durumlar için yaptığı gözlemleri genişleterek genel bir kural olarak ifadede bulunduğu söylenebilir.

Sorunun çözümü sırasında çember üzerinde almış olduğu son nokta sayısı varsayımında bulunduğu nokta-bölge sayısı ilişkisinin doğruluğunu göstermek için olduğu söylenebilir.

Genelleme yaparken kullandığı strateji; örnek oluşturma, kural varsayımında bulunma, varsayımını (2n) test etmek için örnekler verme (3. ve 5. noktaları alması) sistematik bir şekilde yazma, örnekler arasında ki ilişkileri inceleme, tekrar varsayımda bulunma kuralını değiştirme (2^{n-1}), varsayımını test etmek için örnek verme (2 nokta) ve genellemeye ulaşma şeklindedir. Diğer katılımcılardan farklı bir strateji sıralaması gerçekleştirmiştir.

Ayrıca ÖA2 diğer sorulara göre bu soruya daha fazla süre ayırdığı söylenebilir. Sebebini ise farklı genellemelerde bulunma ve genellemesinin doğruluğunu göstermek için farklı özel değerler alması olduğu söylenebilir.

Araştırmacının "*genel bir kural için 3 özel nokta denememiz yeterlimi*" sorusu üzerine ÖA2 "*ben genelde 3 tane ile genellenebilirliğine inanırım. Sonuçta tümevarımda da öyle yapmıyor muyuz? K=1 için, k=n için, k=n+1 için* " yanıtından anlaşılacağı üzere bir kuralı ispatlamak ile bir kural oluşturmanın benzer bir düşünme yaklaşımı doğuracağından hareketle böyle davrandığı söylenebilir.

4.3.1.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulguların Karşılaştırılması ve Yorum

Bu soruda beklenti katılımcıların genellemeye ulaşma aşamalarını ve nokta sayısı ile bölge sayısı arasında ki ilişkiye yaklaşım şekilleri incelemektir.

Genelleştirmenin bu sorusunda n=6 noktadan sonrası için alınan nokta sayısı ve oluşan bölge sayısı arasında bir örüntü olmadığı dolayısıyla n-nokta için oluşacak bölge sayısı genel bir kural ile ifade edilemeyeceği görülmektedir. Fakat 6'dan az noktalar alındığı takdirde oluşacak bölge sayısı ile alınan nokta sayısı arasında 2^{n-1} genel kuralı oluşmaktadır. Mason vd.'nin (2010) ifade ettiği gibi ilk beş durumdan yola çıkmak bu soruda "6 nokta için 32 bölge oluşacaktır" şeklinde yanlış bir varsayıma neden olacaktır. Zaten genelleme süreci de birkaç özel durumdan hareketle durumların geniş bir sınıfı için tahminler yapmaktır.

Katılımcıların Ö2 haricinde diğerlerinin almış oldukları özel noktalar ise hep 6'dan az olmuştur. Dolayısıyla A1, Ö1, ÖA1 ve ÖA2 genel kuralı oluşturarak n tane nokta için oluşan maksimum bölge sayısını "2^{n-1}" şeklinde belirtmişlerdir. Fakat ÖA1 ve ÖA2 bu genel kuralı söylemeden önce sırası ile "2n" ve "2n, n/2" şeklinde kurallar bulmuşlardır. Daha sonra genellemelerini 2^{n-1} şeklinde değiştirmişlerdir. Ö2 ise "2n" kuralı olduğunu belirterek n tane nokta için "2n" bölge oluşacağı yanıtını vermiştir.

Bunun sebebini Ö2'nin soruda belirtilen her noktayı birleştirin ifadesini gerçekleştirmediğinden kaynaklandığı söylenebilir.

Katılımcılar bu genellemeye ulaşırken ise almış oldukları nokta sayıları ÖA1 6 farklı nokta diğerleri ise 4 farklı nokta şeklinde olmuştur. Fakat bu noktaları alırken ;

A1: 5,4,3,2 -Ö1: 2,3,4,5 -Ö2:4,5,6,7 -ÖA1:0,1,2,3,4,5 -ÖA2:4,3,5,2 sıralaması şeklindedir.

Dikkat çeken durum ise A1'in almış olduğu noktalar aritmetik azalan şeklinde iken, Ö1,Ö2 ve ÖA1'in almış olduğu noktalar ise aritmetik artan şeklindedir. ÖA2'nin almış olduğu noktalar arasında ise aritmetik bir düzen bulunmamaktadır. Fakat katılımcılar genel kurala ulaşırken, kâğıtlarına ÖA2 aritmetik azalan, diğerleri ise aritmetik artan şeklinde noktaları sistematik olarak organize etmişlerdir.

Bir başka dikkat çeken durum, A1 dışında ki katılımcıların almış oldukları son noktalar, bulmuş oldukları kurallarının doğruluğunu göstermek içinken, A1'i ise ilişki varsayımından emin olmak için son noktayı denemiştir.

Katılımcılar ise genellemeye ulaşırken kullandıkları stratejiler benzerlik göstermektedir. Mevcut sıralama Tablo 4.3. deki gibidir.

Tablo 4.3. Genellemenin 1. Sorusunda Bulunan Sonuçlar, Kullanılan Stratejiler ve Özel Değerler

Katılımcı	Almış olduğu nokta sayısı ve sırası	Varsayımda bulunduğu kural(lar)	Genellemeye stratejisi ve sırası
A1	n=5,4,3,2	2^{n-1}	• Örnek oluşturma • İlişki varsayımında bulunma • Varsayımdan emin olmak için örnek verme • Örnekleri sistemli organize etme • İlişki arama • Kural oluşturma • Genelleme
Ö1	n=2,3,4,5	2^{n-1}	• Örnek oluşturma • Örnekleri sistemli organize etme • İlişki arama • Kural varsayımında bulunma (kural oluşturma) • Kuralı test etme • Genelleme
Ö2	n=4,5,6,7	2n	• Örnek oluşturma • Örnekleri sistemli organize etme • İlişki arama

			• Kural varsayımında bulunma (kural oluşturma) • Kuralı test etme • Genelleme
ÖA1	n=0,1,2,3,4,5	$2n-2^{n-1}$	• Örnek oluşturma • Örnekleri sistemli organize etme • İlişki arama • Kural varsayımında bulunma (kural oluşturma) • Kuralı test etme • Genelleme
ÖA2	n=4,3,5,2	$2n-\frac{n}{2}-2^{n-1}$	• Örnek oluşturma • Kural varsayımında bulunma (kural oluşturma) • Varsayımı test etme • Örnekleri sistemleştirme • İlişki arama • Kural varsayımında bulunma (kural oluşturma) • Kuralı test etme • Genelleme

Her katılımcının bir genellemeye ulaşmasına rağmen sonuca en şüpheci yaklaşan Ö1 olmuştur. ÖA2 ise almış olduğu noktaların kendisine genel bir kural oluşturmak için yeterli olduğunu belirtmiştir. Ayrıca genel kuralların ispat şekli olan tümevarım ile var olan durumunu ilişkilendirmiştir.

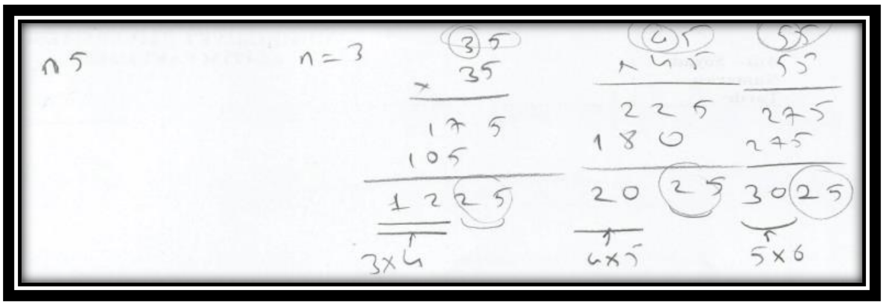
4.3.2. Genelleme Boyutunun İkinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Genellemeye yönelik yöneltilen ikinci soru "*n є N olmak üzere (n5) şeklinde sonu 5 ile biten sayıların karelerini hesaplayabilir misiniz?*" şeklindedir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır.

4.3.2.1. A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soruyu iki defa art arda okumuştur. Soruyu okuduktan sonra **"***mesela bir genellemeye gidersek n=3 için bir şey oluşturmaya çalışalım*" söyleminde bulunmuş 35'in karesini (Şekil 4.73.) hesaplamıştır. Daha sonra bir müddet düşünmüş ve "*45'in karesini alalım (*Şekil 4.73.) *bakayım bir şey görebileceğim mi?"* açıklamasında bulunarak art arda 35 ve 45'in karelerini hesaplamıştır. 35'den sonra 45'in karesini hesaplamak istemesini ise "*ya hani 1'er artırdığımda acaba nasıl bir bağlantı kuracağız.*" şeklinde açıklamıştır.

Hesaplamış olduğu bu iki sayının sonuçlarına bakarak “*baktığımızda son rakamı 25 elde ediliyor. Hmm bir tane daha denemek istiyorum*” şeklinde belirtmiştir. Daha sonra “*55 verdiğimizde* (55 karesini alarak- Şekil 4.73.) *şimdi baktığım anda 35-45-55 onlar basamağını birer artırdığımda sonuçlar arasında ki ilişkiyi inceledim. Son iki rakamının hep 25 olduğunu gördüm*” ifadesinde bulunmuş ve bu açıklamalarını Şekil 4.73. deki gibi gösterimde bulunmuştur.



Şekil 4.73. A1’in İlk Olarak Karelerini Hesaplamış Olduğu Sayılar

Son basamağının 25 olacağı kanısına vardıktan sonra bir müddet düşünmüş ve bu düşüncelerini **“***n=3 verdiğimde* (1225, binler ve yüzler basamağının altını çizerek) *3*4 olan 12 verdi n=4 verdiğimde 4*5 olan 20’yi verdi. n=5 verdiğimde de 5*6 olan 30’u verdi. Dolayısıyla n5 verdiğimde bunun karesini alığımda son iki rakamının 25 olduğunu görecem,* (birler ve onlar basamağı dışında) *burası da n*n+1 olan sayı olacak*” şeklinde açıklayarak sonu 5 ile biten sayıların karesinin hesaplanabileceğini ve hesaplama yönteminin ise Şekil 4.74. deki gibi olacağını belirtmiştir.

Şekil 4.74. A1’in Çıkarımda Bulunması

A1‘in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; A1 soruyu anlamak açısından birçok defa okumuştur. Daha sonra bir genellemeye ulaşılacağı düşüncesinden hareketle n=3 alarak 35’in karesini hesaplamıştır. Daha sonra sistematik bir şekilde giderek n=4’ü almış yani 45’in karesini hesaplamış ve almış olduğu bu iki sayı inceleyerek sayıların son basamaklarının 25 ile biteceği kanısına varmıştır. Bu varsayımını doğrulamak açısından n=5 için 55 sayısının karesini hesaplamış ve kendinden emin bir şekilde "*baktığım anda 35-45-55 onlar basamağını birer artırdığımda sonuçlar arasında ki ilişkiyi inceledim. Son iki rakamının hep 25 olduğunu gördüm*" açıklamışında bulunmuştur. Özel olarak almış olduğu ve kâğıdına yazmış oldukları sayıları bir müddet inceledikten sonra ise almış olduğumuz "n" sayısının bir ardışığı ile çarpımının sonucumuzun ilk basamaklarını vereceği açıklamasında bulunmuş, dolayısıyla sonu 5 ile biten tüm sayıların karelerinin Şekil 4.74 deki gibi hesaplanabileceğini belirtmiştir.

Görüldüğü üzere, A1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak genellemeyle hareket ettiği görülmektedir. Genellemeye ulaşmak için ise n=3,4,5 özel değerlerini alarak sırası ile 35,45,55 sayılarının karelerini hesaplamıştır. Fakat burada dikkat çeken durum ilk önce 35 ve 45 özel sayılarını hesaplamış daha sonra ise bu iki sayının sonucundan hareketle sayıların son iki basamağının 25 olacağını belirlemiştir. Bunu ise almış olduğu iki sayı arasındaki ortak özelliği inceleyerek ulaştığı söylenebilir (ilişkilendirme). Bu varsayımının doğruluğunu göstermek adına ise 55 sayısının karesini hesaplamıştır.

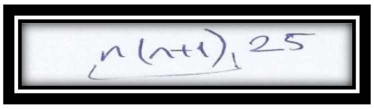
Almış olduğu bu 3 özel değerin karelerini bir müddet inceledikten sonra ilk basamaklara bakarak bir kural aradığı söylenebilir (araştırma) ve bu kuralı ise "n x n+1" şeklinde ifade etmiştir (genişletme).

Genelleme sırasında kullanmış olduğu stratejiler sırası ile örnek oluşturma, örnekleri sistemli organize etme, ilişki arama, ilişki varsayımından emin olmak için örnek verme, ilişki arama, genel kurala ulaşma, genelleme, (kuralı test etme yok) şeklinde olmuştur.

4.3.2.2. Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

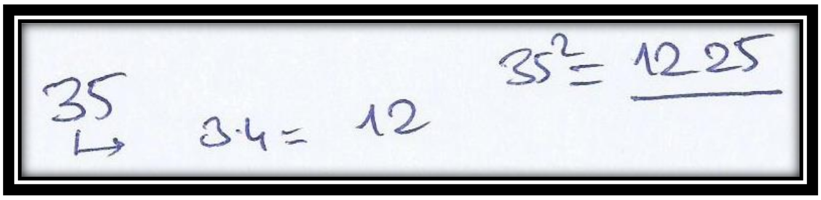
Ö1 soru kâğıdına ilk olarak bu soruyu çözmüştür. Sebebini ise; "*Şu 4. soruyu kural olarak bende biliyorum aslında, çocuklara basit yol olarak anlatıyorum.*" şeklinde açıklamıştır.

Daha sonra çözümünü "*sonu 5 olan sayıların karesini bulmak için, öndeki sayıya 1 ekle sonra kendisiyle çarp diyorum. Bulduğunuz sayıyı, sayı çıkacak devamına da 25 yaz diyorum*" biçiminde ifade etmiş, kâğıdına Şekil 4.75. deki gibi yazmıştır.



Şekil 4.75. Ö1'in Çıkarımda Bulunması

Yukarıda söylemiş olduğu ifadeyi ise Şekil 4. 76. deki gibi örneklendirerek göstermiştir.

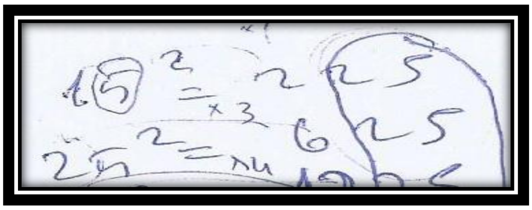


Şekil 4.76. Ö1'in İncelemiş Olduğu Örnek

Görüldüğü üzere**,** Ö1 43 saniye gibi kısa bir sürede soruyu cevaplandırmıştır. Sebebini ise daha önceden böyle bir soru ile karşılaşmış olmasından dolayı olduğu söylenebilir. Buna rağmen çözüm sırasında açıklamada bulunurken genel olarak biliyor olduğu kuralı 35 özel değeri için gösterimde bulunmuştur. Yani Ö1'in bu soruda genellemeden ziyade kuralı bilmesinden dolayı kuralın gösterimi için özelleştirme eyleminde bulunduğu söylenebilir.

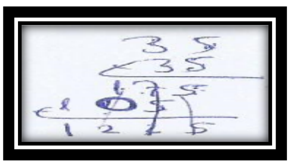
4.3.2.3. Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu okuduktan sonra "*basamak önemli değil herhalde*?" şeklinde araştırmacıya soru yöneltmiştir. Araştırmacı "*hayır sonu 5 ile biten sayılar olması yeterlidir*" yanıtını vermiştir. Daha sonra Ö2 "*mesela* 15^2 *=225, mesela* 25^2 *=625* (Şekil 4.77.)*, hesaplayabilir misiniz derken <u>belli bir kuralı çıkarmamızı mı istiyor</u>*" şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir



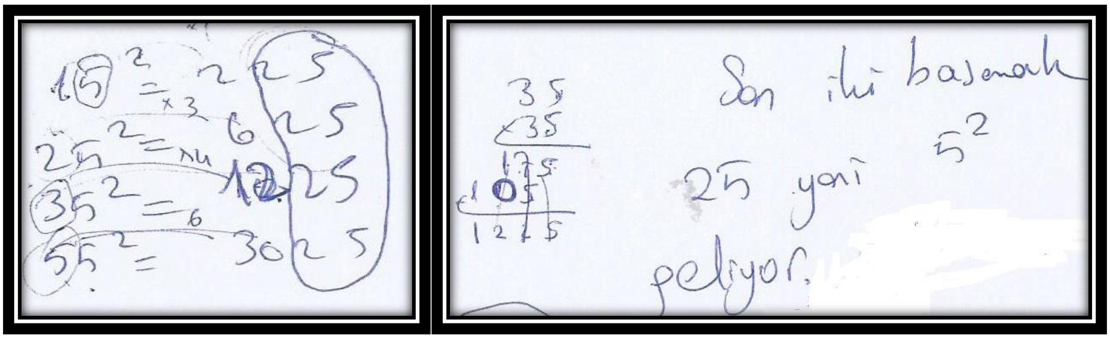
Şekil 4.77. Ö2'in İncelmiş Olduğu İlk İki Özel Değer

Kâğıdına yukarıda Şekil 4.77. deki gibi 15 ve 25 'in karelerini hesapladıktan sonra **"***sonları hep 25 geliyo*r" diyerek ardından, "*mesela* 35^2 *=1225,yanlış olmasın*" şeklinde 35'in karesini Şekil 4.78. deki gibi hesaplamıştır.



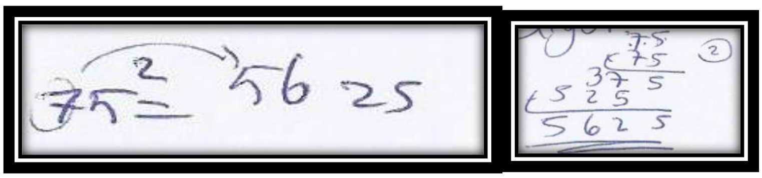
Şekil 4.78. Ö2'nin İncelemiş Olduğu 3. Özel Değer

35’in karesinden sonra ise “*55^2 = 3025 galiba*” ifadesinde bulunmuş kağıdına Şekil 4.79 daki gibi hesaplamış olduğu 15,25,35 ve 55’in karelerini alt alta yazmıştır. Ve yazmış olduğu sayılara bakarak “*Ne olursa olsun son iki basamağı bulabiliriz*” şeklinde sayıların karelerinin sonlarının hep 25 olacağını belirtmiştir.



Şekil 4.79. Ö2’nin İncelediği Tüm Özel Değerler ve Çıkarımda Bulunması

Araştırmacının “*diğer basamaklar hakkında bir şey söyleyebilir miyiz*?” sorusu üzerine Ö2 bir müddet düşündükten sonra verdikleri örnekler üzerinde ilişkilere bakarak “*1’in 2 katı geliyor, 3’ün 4 katı geliyor, n’in n+1 katı geliyor diyebilirim.*” şeklinde bir kural ifade etmiştir. Bu ifadesini ise “*Yani 15’in karesinde 225, son basamak 5’in karesi burasıda şura n-dersem (1’ de n- dersem) yani 1 iken 1 fazlası ile çarpıyorsun. 2 iken bir fazlası 3 le çarpıyorsun, 3ken 4 le çarpıyorsun, 5 iken 1fazlasıyla çarpıyorsun 6 ile çarpıyorsun, diyebiliyoruz.*” şeklinde açıklamıştır. Son olarak ise “*Mesela 75’in karesini de deneyelim.*” ifadesini kâğıdına Şekil 4.80. deki gibi 75’in karesini sırası ile söylemiş olduğu genel kural ile ve normal çarpma işlemi yaparak hesaplamıştır. Dolayısıyla sonu 5 ile biten sayıların kareleri kolaylıkla hesaplanabileceğini söylemiştir.

; 

Şekil 4.80. Ö2’nin Son Olarak İncelediği Özel Değer

Ö2‘nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö2 soruyu okuduktan sonra sorunun anlaşılırlığı açısından araştırmacıyla aralarında diyalog gerçekleşmiştir. Daha sonra Ö2 15 ve 25 özel sayılarını alarak karelerini hesaplamıştır. Hesaplama sonucunda sayıların son iki basamaklarının 25 olacağı kanısına varmıştır ve bu varsayımının doğruluğundan emin olmak için ise sırası ile 35 ve 55 sayılarının da karelerini hesaplamıştır. Araştırmacının “*diğer basamaklar hakkında bir şey* *söyleyebilir miyiz?"* sorusu üzerine hesaplamış olduğu sayılara bakarak bir müddet düşünmüş ve "*n'in n+1 katı geliyor"* şeklinde genel bir kurala varmıştır. Bu kuralının doğruluğundan emin olmak içinse 75 sayısını hem kural hem de normal çarpma işlemi gerçekleştirerek incelemiştir. Sonuç olarak sonu 5 ile biten sayıların karelerinin rahatlıkla hesaplana bileceğini söylemiştir.

Görüldüğü üzere, Ö2 ilk olarak sırası ile n=1,2,3,5,7 sayıları için 15,25,35,55,75 sayılarının karelerini hesaplamıştır. (sistematik bir şekilde sıralama gibi ama arada 45 ve 65 yok) Fakat burada dikkat çeken durum ilk önce 15 ve 25 özel sayılarını hesaplamış daha sonra ise bu iki sayının sonucundan hareketle sayıların son iki basamağının 25 olacağını belirlemiştir. Bunu ise almış olduğu iki sayı arasındaki ortak özelliği inceleyerek ulaştığı söylenebilir (ilişkilendirme). Bu varsayımının doğruluğunu göstermek adına ise 35 ve 55 sayısının karesini hesaplamıştır.

Almış olduğu bu 4 özel değerin karelerini bir müddet inceledikten sonra ilk basamaklara bakarak bir kural aradığı söylenebilir.(araştırma) Ve bu kuralı ise "n x n+1" şeklinde ifade etmiştir(genişletme). Bu kural varsayımının doğruluğunu göstermek adına ise 75 sayısının karesini hesaplamıştır.

Genelleme sırasında kullanmış olduğu stratejiler sırası ile örnek oluşturma, örnekleri sistemli organize etme, ilişki arama, ilişki varsayımından emin olmak için örnek verme, ilişki arama, genel kurala ulaşma, kural varsayımını emin olmak için örnek verme, genelleme, şeklinde olmuştur.

4.3.2.4. ÖA1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okuduktan sonra "*bunun bir yolu vardı ya. Sonu 5 ile biten sayıların kareleri çok rahat hesaplanabiliyordu*." söyleminde bulunmuştur. Bunun üzerine araştırmacı ile aralarında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

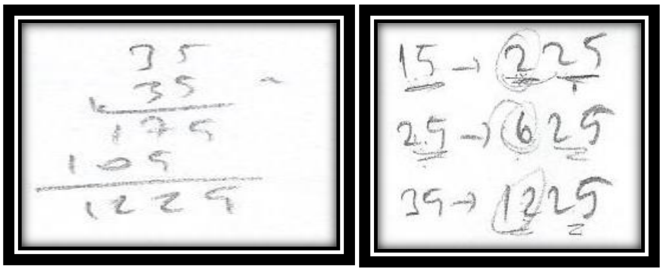
ARAŞTIRMACI*: önceden bir yerde görmüş müydün, yoksa!!*

ÖA1*: bunu, yanlış hatırlamıyorsam lise-1 ya da 2 de, ben bir sayının karesini almaya çalışıyordum sonu 5 ile bitiyordu bu şekilde iki basamaklı bir sayıydı. Babam kafadan alıp tak diye söylemişti şaşırmıştım. O da söylemişti hatta yöntemini, şu şekilde çok rahat yapabilirsin diye, yanlış hatırlamıyorsam 65'in mi karesini almıştı neydi. Hemen söylemişti ama nasıl bir şeydi hadi gel onu hatırla.*

ARAŞTIRMACI*: babanın yaptığını yapmaya çalış.*

***ÖA1**: bende onu deneyeceğim.*

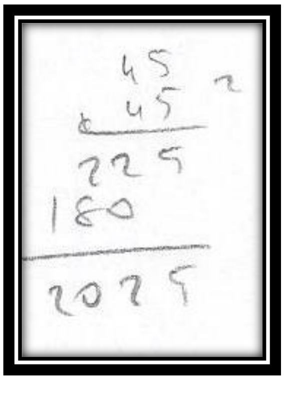
Konuşmadan sonra ÖA1 hızlı bir şekilde 15 ve 25’in karelerinin sonuçlarını söylemiştir. Bunu ise “*15’in karesi 225, 25’in ki 625 bunlar ezberden geliyor. Tabi 35’e çıkamıyorum*” şeklinde açıklamıştır. Bu açıklamasından sonra sayıların sonlarının hep 25 ile bittiğini belirtmiştir. İlk basamakların ise nasıl oluşacağını “*şu 2 ve 6 buradan nasıl geliyordu. Aradaki farkı alsak 2 ile çarpsak (25 için denedi 5-2=3 3*2=6 fakat 15 için 5-1=4 4*2 eşit değil 2) 6 desek şimdi aradaki farkı alsak 4, 2 ile çarpsak. Demek öyle değilmiş*” şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir. Daha sonra “*35 için denesek neymiş ki*” diyerek kâğıdına Şekil 4.81. deki gibi 35’in karesini hesaplamıştır.



Şekil 4.81. ÖA1’in İncelediği İlk Değer ve Diğer Özel Değerler

Hesaplamış olduğu bu sayı değerlerini ise Şekil 4.81. deki gibi sırası ile alt alta yazmıştır.

Bir müddet sırası ile yazmış olduğu sayılara bakarak düşünmüştür. Daha sonra Şekil 4.82. deki gibi 45’in karesini de hesaplamıştır.



Şekil 4.82. ÖA1’in İncelediği Son Özel Değer

Araştırmacının ÖA1’e neden bu iki veya daha fazla özel sayı alarak hesapladığını sorması üzerine, ÖA1 “*yani 3-4 tane sayı görürsem, belki hani bir örüntü yakalaya bilirim diye düşünüyorum.*” açıklamasında bulunmuştur. Daha sonra ÖA1 hesaplamış olduğu sayılara bakmış ve "*4kere 5 20 desek o zaman 3kere5 15 olmalıydı (45^2=2025 bakarak 4*5=20 ise 3*5 olmalıydı yani 1525 olmalıydı 35 için diyor) bunu sonradan ekliyorduk ya (25'in karesi için) 600'ü bulup sonuçta 25 mi alıyorduk. Öyle bir şey miydi? Ne yapıyorduk ya (*anlamsız işlemler yapmaya başlıyor, dahası örüntü arayış içerisinde, yaptıklarını anlamlandırmaya çalışıyor, düşünüyor*)bunu düşünemedim öyle pat deyince. Sonu her türlü 25 ile bitecek, o tamam da şunlarda* (ilk basamakları göstererek) *sıkıntı var* (gülümseyerek düşünüyor) *bu soruya sonra tekrar dönsek, vakit olursa*" şeklinde düşüncelerini dile getirmiştir. Ardından oturumu sonlanmadan hemen önce soruya tekrar dönmüştür.

Soruyu tekrar okuduktan sonra "*Ya bunun bir kuralı gelecek ondan eminim. Kuralı yoktur diye bir cevap yok burada. Çünkü vakti zamanın da babam karşım da yaptı bunu onu söyledim. Ve ben üstüne üstlük birkaç defa denedim. Elime hesap makinesi aldım, o zaman 85'i söyle, 95'i söyle diye. Gerçekten söyledi. Yani ezberden söylemiş olduğunu hiç düşünmüyorum*" diyerek düşünmeye başlamıştır. Bu düşüncelerini ise;

***ÖA1**: yani babamdan öğrenmeden de çok düşünsem belki bulurum da, (düşünüyor) bunun karesini nasıl alıyordu, toplamlarından, farklarından filan mı gidiyordu, nereden gidiyordu ya. (sayılara bakarak) sayının toplamlarından gidiyor desem 6,7,8,9 diye gidiyor. Sayı toplamlarından gidebileceğini, hiç düşünmüyorum. Sayının toplamıyla çarpsam diyeceğim. Nereye gidecek bu saçmalıyorum gibime geldi. (düşünüyor) şu 25'leri sonradan ekleme gibi bir kural var mı acaba, hatırlamıyorum. Öyle düşünsem bile 15ken 225 elde etmem lazım bu sefer. 25ken 600 elde etmem lazım bu sefer. Oda imansız gibi görünüyor. Şu ikisinin toplamı ile şu ikisinin farkı filan diye bir şey gördüm o diğerinde olmadı* (gülümsüyor) *düşündüğüm şey oydu. Hadi ama o kadarda zor olamaz görmeliydim bunu*." şeklinde dile getirmiş ve bir sonuca ulaşamadan soruyu sonlandırmıştır.

ÖA1'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA1 soruyu okuduktan sonra böyle bir soruyla daha önce karşılaştığını fakat cevabının nasıl olduğunu hatırlamadığını söylemiştir. Ardından sırası ile n=1, 2, 3, 4 almış ve 15, 25, 35 ve 45 sayılarının karelerini hesaplamıştır. İlk olarak ezbere söylemiş olduğu 15 ve 25'in karelerinin sonuçlarından sayıların sonlarının 25 ile biteceği kanısına varmıştır. Daha sonra hesaplamış olduğu bu sayıları ve sonuçlarını sistematik bir şekilde kâğıdına yazmıştır. Yazmış olduklarına bakarak bir örüntü yakalayabileceği düşüncesinde olduğunu belirtmiştir. Sonuca götürmeyen farklı örüntü arayışları içinde bulunduktan sonra ise sonuca ulaşamadan soruyu sonlandırmıştır.

Görüldüğü üzere, ÖA1'in kullanmış olduğu noktalar sırası ile n=1,2,3,4 şeklinde 15,25,35,45 sayılarını *sistematik* bir biçimde yazmıştır. Bu durum ÖA1'in bir örüntü arayışı içinde olduğunun göstergesi diyebiliriz. Ayrıca 15 ve 25 sayılarının karelerini sonuçları doğrultusunda (İlişkilendirme) sayıların sonun 25 ile biteceği kanısına varmıştır. Fakat 45 ve 55 sayılarını hesapladıktan sonra ise bu 4 sayı arasında (Araştırma) içerisinde olsa da genişletmeye varamamıştır.

Genellemeye ulaşamamış olsa bile genelleme arayışı içerisinde bulunmuş ve bu esnada kullanmış olduğu stratejiler sırası ile örnek oluşturma, örnekleri sistemli organize etme, ilişki arama, genel kurala ulaşmaya çalışma. (genellemeye ulaşamıyoruz) şeklinde olmuştur.

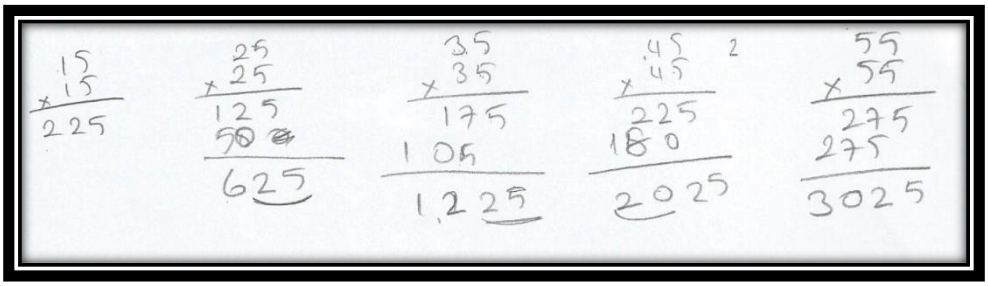
4.3.2.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak "*ha evet onun bir şeyi vardı. Ortada toplamları... dur hatırlayacağım. Mesela 15*15=225* (Şekil 4.83. deki ilk sıradaki özel değer)*"* Diyerek düşünmeye başlamıştır. Bir müddet düşündükten sonra araştırmacı ile aralarında aşağıda ki diyalog gerçekleşmiştir;

ARAŞTIRMACI*: hatırlamaktan çok bulmaya çalışsan.*

ÖA2*: tamam onu yapacağım, zaten şuan hatırlayamadım.*

Bu sırada ÖA2 25'in karesini de hesaplayarak (Şekil 4.83.) sayılarının sonlarının hep 25 ile biteceğini söylemiştir**.** Ardından 35'in karesini de hesaplamış (Şekil 4.83.) "*evet sonu 25 ile bitecek*" şeklinde ifade etmiştir. Bir müddet düşündükten sonra ise "*ilk basamakları nasıl olacak acaba! şuan uydurayım mı?*" diyerek mırıltılı bir şekilde hesaplamış olduğu 3 sayının karelerine bakmış, sayıları incelemiştir. İncelemeler sonucuna ise araştırmacının "*ne düşünüyorsunuz?*" sorusu üzerine ÖA2 *"(ilk basamaklara bakarak.) 3'ün4 katı, 2'nin 3 katı, 1'in 2 katı, yani 1 fazlası. Hmm bide 45'i deneyim*" cevabını vermiş, 45'in karesini (Şekil 4.83.) hesaplamıştır. 45'in karesini hesapladıktan sonra ise "*eveeet buldum bak bununda (4'ün) 5 katı. Tamam oldu. Bulabiliyormuşum yani*." açıklamasında bulunmuştur. Daha sonra ise bulmuş olduğu yöntem ile önce 55'in karesini söylemiş sonra sonucu şekil 4.83. deki gibi kâğıdında hesaplamıştır. Ardından sonu 5 ile biten sayıların karelerinin bu şekilde hesaplana bileceğini söylemiştir.



Şekil 4.83. ÖA2'nin Sırası İle İncelediği Özel Değerler

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 soruyu okuduktan sonra sorunun çözümünün bir yöntemi olduğunu fakat hatırlayamadığını belirtmiştir. Daha sonra 15 ve 25'in karelerini hesaplayarak sayıların son basamaklarının 25 ile biteceğini söylemiştir. Ve bu söyleminin doğruluğunu 35'in karesini hesaplayarak göstermiştir. Ardından ilk basamaklar için nasıl bir kural söyleyebiliriz düşüncesinden hareketle 45'in karesini de hesaplamıştır. Bir müddet düşündükten sonra sayılar ile sayıların karesinin sonuçları arasında, sayının bir fazlası ile sayının kendisinin çarpımının ilk basamakları vereceğini söylemiştir. Bu söylemini göstermek adına ise 55'in karesini söylemiş olduğu kural ile hesaplamış, daha sonra ise normal çapma işlemi yaparak sonuçları karşılaştırmıştır. Kuralının doğruluğundan emin olduktan sonra ise sonu 5 ile biten sayıların karelerinin bu şekilde hesaplanabileceğini belirtmiştir.

Görüldüğü üzere, ÖA2 sorunun çözümünün bir kural ile gerçekleşeceği daha önceden biliyor olmuş olmasına rağmen, kuralı hatırlayamadığı için kuralı oluşturma çabası içerisinde olduğu söylenebilir. Bunun için ise sırası ile n=1,2,3,4,5 saylarını alarak 15,25,35,45 ve 55 sayılarının karelerini hesaplamıştır. Fakat bu hesaplama sırasında öncelikle 15 ve 25'in karesini alarak bu iki sonuç arasında (İlişkilendirme) ilişki doğrultusunda sayıların sonlarının 25 ile biteceğini söylemiştir. Ardından bu varsayımını göstermek adına ise 35'in karesini hesaplamıştır.

İlk basamaklar hakkında ise bir kurala ulaşmak için n=4 alarak 45'inn karesini hesaplamıştır. Hesaplamış oldukları bu sayıları inceleyerek (araştırma) bir müddet sonra sayılar ile sonuçları arasındaki ilişkiyi n x (n+1) ve sonu 25 ile biteceği varsayımında bulunmuştur.(genişletme) bu varsayımını ise 55 özel değerini alarak gösterimini gerçekleştirmiştir.

Genelleme sırasında kullanmış olduğu stratejiler sırası ile örnek oluşturma, örnekleri sistemli organize etme, ilişki arama, ilişki varsayımından emin olmak için örnek verme, ilişki arama, genel kurala ulaşma, kural varsayımını emin olmak için örnek verme, genelleme, şekline olmuştur.

4.3.2.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulguların Karşılaştırılması ve Yorum

Bu soruda beklenti katılımcıların genellemeye ulaşma aşama ve biçimlerini incelemektir.

Genelleştirmenin bu sorusunda sonucumuz "n" doğal sayı değerleri için sonu 5 ile biten sayıların karelerinin, [n x (n+1)]25 biçiminde hesaplanabileceği şeklindedir. Katılımcılardan genellemeye ulaşanlar ise A1,Ö1,Ö2,ÖA2'dir ÖA1 ise sonuca ulaşamamıştır. Fakat genelleme düşüncesi ile hareket ettiği (kullanmış olduğu stratejilerden) söylenebilir.

Katılımcılar bu genellemeye ulaşırken; A1 üç, ÖA1 dört, ÖA2 ve Ö2 ise beş farklı özel değer almışlardır. Ö1 ise sorunun çözümünü önceden bildiği için çözüm için değil, kuralın gösterimi için sadece bir özel değer almıştır. Katılımcılar "n" için almış oldukları bu değerleri ise sırası ile A1: 2,3,4 -Ö1: 3 -Ö2:1,2,3,5,7 -ÖA1:1,2,3,4 -ÖA2:1,2,3,4,5 şeklindedir.

Katılımcıların hepsi "n" değerlerini artan şekilde seçmişlerdir. Bunun yanı sıra A1, ÖA1 ve ÖA2 ise almış oldukları sayıları *sistematik* ve *ardışık* seçerken, Ö2 ise ilk 3 değeri sistematik daha sonra ise rastgele artan şekilde seçtiği görülmektedir.

Katılımcıların bu değerleri alırken ise dikkat çeken durum tüm katılımcıların almış oldukları ilk iki değer sonucunda sayıların son basamaklarının 25 ile biteceği kanısına varmış olmalarıdır. Daha sonra ise A1 ve ÖA2 üçüncü, Ö2 ve ÖA1 ise üç ve dördüncü özel değerlerini bu varsayımlarından emin olmak için aldıkları görülmektedir. A1 bu 3 değer ile Ö2 ise bu 4 değer ile genellemeye ulaşırken, ÖA1 ise genellemeye ulaşamamıştır. Ö2 genellemeye ulaşmadan önce ise bir özel değer daha almıştır.

Ayrıca Ö2 ve ÖA2 genelleme sonuçlarından emin olmak için birer özel değerler daha alarak sonuçlarını test etmişlerdir. Bunların yanı sıra Ö1 ise genellemeyi doğrudan söylemiş sadece bir özel değer alarak önceden biliyor olduğu kuralın gösteriminde bulunmuştur. Katılımcıların genellemeye ulaşırken kullandıkları stratejiler, ulaştıkları sonuçlar ve mevut sıralama Tablo 4.4. deki gibidir.

Tablo 4.4. Genellemenin 2. Sorusunda Bulunan Sonuçlar, Kullanılan Stratejiler ve Özel Değerler

Katılımcı	**"n" için almış oldukları değerler ve sıralaması**	**Sırası ile Varsayımda bulunduğu kural(lar)**	**Genellemeye ulaşma stratejisi ve sırası**
A1	n=2,3,4	Son basamakları 25 ile biter ve İlk basamakları [n x (n+1)]	• Örnek Oluşturma • Örnekleri Sistemli Organize Etme, • İlişki Arama, • İlişki Varsayımından Emin Olmak İçin Örnek Verme, • İlişki Arama, • Genel Kurala Ulaşma, • Genelleme.
Ö1	n=3	Direk ilk basamakları [n x (n+1)] ve son basamakları 25 ile biter	• Genellemede bulunma • Genellemenin gösterimi için örnek verme
Ö2	n=1,2,3,5,7	Son basamakları 25 ile biter ve İlk basamakları [n x (n+1)]	• Örnek Oluşturma • Örnekleri Sistemli Organize Etme, • İlişki Arama, İlişki Varsayımından Emin Olmak İçin Örnek Verme • İlişki Arama, • Genel Kurala Ulaşma • Kural Varsayımını Emin Olmak İçin Örnek Verme, • Genelleme
ÖA1	n=1,2,3,4	Son basamakları 25 ile biter	• Örnek Oluşturma • Örnekleri Sistemli Organize Etme • İlişki Arama • Genel Kurala Ulaşmaya Çalışma.
ÖA2	n=1,2,3,4,5	Son basamakları 25 ile biter ve İlk basamakları [n x (n+1)]	• Örnek Oluşturma • Örnekleri Sistemli Organize Etme • İlişki Arama • İlişki Varsayımından Emin Olmak İçin Örnek Verme • İlişki Arama • Genel Kurala Ulaşma • Kural Varsayımını Emin Olmak İçin Örnek Verme • Genelleme

Tablo 4.4 incelendiğinde katılımcıların genellemeye ulaşırken kullandıkları stratejiler benzerlik göstermektedir.

Tüm katılımcılar genelleme yapmışlardır. Fakat Ö1 kuralı önceden biliyor olduğundan araştırma için gerekli veriler elde edilememiştir. ÖA1 dışında ise diğer katılımcılarda genellemeyi gerçekleştirerek sonuca ulaşmışlardır.

4.4. Varsayımda Bulunma Boyutundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Araştırmanın üçüncü alt problemi "*İzlenen matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme boyutlarından "varsayımda bulunma" boyutundaki düşünme şekilleri, varsayımda bulunurken sonuca etki edeceğini düşündükleri parametre sayıları, yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır*?" olarak ifade edilmiştir. Bu alt probleme cevap verebilmek için katılımcılara iki soru yöneltilmiştir. Varsayımda bulunma sorularında ki amaç katılımcıların sorunun çözümüne ulaşabilmek için olası durumların sayısını ve bu olası durumlara yaklaşım şekilleri (sayısal veya sözel varsayım yaklaşımında bulunup bulunmadıklarını) incelemektir. Bu süreçte var olan farklılıkları da katılımcılara göre değerlendirmektir. Katılımcılara yöneltilen her bir probleme ilişkin bulgular da ayrı ayrı verilmiş ve daha sonra karşılaştırmalar yapılmıştır.

4.4.1. Varsayımda Bulunma Boyutunun Birinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Varsayımda bulunmaya yönelik yöneltilen birinci soru "*Bir bisiklet şekildeki gibi 6 inç genişliğindeki ıslak boyalı bir şeritten geçiyor. Bir süre düz gittikten sonra lastiklere yapışan boyanın yola bıraktığı izlere baktığınız da sizce sonuç ne olur?*"

şeklindedir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır. Burada sözel varsayım Sö.V ile sayısal varsayım Sa.V ile gösterilmiştir.

4.4.1.1. A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soruyu yavaşça ve irdeleyerek okumuştur. Soruyu okuduktan sonra ilk olarak "*Yani çemberin çevresi ile mi ilgili (Sö.V-1)*" şeklinde düşüncesini ifade etmiş.

Ardından araştırmacının "*çemberin çevresi derken!"* sorusu üzerine, A1 problemde ki şekli göstererek "*bisikletin tekerinin çevresi 2πr (Sa.V-1)*" açıklamasında bulunmuştur. Daha sonra soruyu tekrar okuyarak "*6 inç genişliğinde. Dolayısıyla çemberin çevresi kadar, yani bisikletin bu tekerleğinin çevresi kadar bir iz bırakmaz mı yere! (Sa.V-1)*" şeklinde belirtmiştir.

Bir müddet düşündükten sonra ise "*ben burada* boyanın genişliği ile kaldırıma bıraktığı izin uzunluğu *arasında bir ilişki mi kuracağım?*" şeklinde araştırmacıya soru yöneltmiştir. Araştırmacı probleme müdahale etmeden "*nasıl anladıysanız hocam, aklınıza hangi ilişkiler geliyorsa söyleyebilirsiniz*" açıklamasında bulunmuştur.

Bu kısa diyalogdan sonra A1 sorudaki *"hemen hemen 6 inç genişliğin de ki, 6 inç genişliğinde ki…*" kısmı tekrar ederek düşünmeye devam etmiştir. Daha sonra ise "*şimdi öncelikle ön tekerlek ile o boyanın üzerinden geçtiğimizi düşünürsek. Dolayısıyla o, boya kadar iz bırakmaz mı yere. Yani bütün tekerleğin çevresi boya olacağı için. Doğrumu (Sö.V-2)*" açıklamasında bulunmuştur. Bu söylem üzerine araştırmacı A1'e "*bütün tekerleğin boya olacağı kanısına nasıl vardınız?*" sorusunu yöneltmiştir. A1 elinde ki kalemini tekerlek gibi çevirerek "*yok, bütün tekerleğin boyası. Tekerlek boyayı geçtiği anadan itibaren* (elindeki kalemi tekerlek gibi çeviriyor*) boya bırakmaya başlar doğrumu!"* şeklinde açıklamada bulunmuştur.

Bir müddet düşündükten sonra ise "*Bir dakika, 6 inç genişliğinde ki ıslak boya (*düşünüyor) *tekerleğin yarıçapıyla* (daha önce yazdığı "2 π r" deki "r" yi yuvarlak içine alıyor)**….** *acaba boyanın genişliği arasında bir ilişki kurabilir miyim? (Sö.V-3)"* ifadesinde bulunmuş, Şekil 4.84. deki gibi yarıçap olan "r"'yi yuvarlak içine almış ve düşünmeye başlamıştır.

Şekil 4.84. A1'in Düşünme Aşamasında Sergilediği Davranış

Uzunca bir müddet düşündükten sonra araştırmacının "*ne düşünüyorsunuz*" sorusu üzerine A1, **"***acaba bunun tekerleğin boyu kadar, tekerleğin çevresi kadar bırakacağı için buna 6 inç diyebilir miyiz (çevreyi 6 inç gibi düşünüyor) 6 inç diyebilir* *miyiz yani boya kadar döneceği için. 6 inç ıslak boyadan geçtiği için*" açıklamasında bulunmuş ve kâğıdına Şekil 4.85. deki gibi $2\pi r = 6$ (Sa.V-2)eşitliğini yazmış daha sonra silmiştir.

Şekil 4.85. A1'in Önceki Sayısal Varsayımının Cevap Kâğıdına İfadesi-1

Ardından "*6 inç boyayı alır tekerlek. Dolayısıyla acaba orada ki genişliği, boyanın genişliğini, tekerleğin yarıçapı olarak alabilir miyiz.(Sa.V-2)"* şeklinde düşüncesini dile getirmiştir. Bu düşüncesini ise Şekil 4.86. daki gibi kâğıdına yazmış araştırmacı ile aralarında aşağıda ki şekilde diyalog geçmiştir.

***A1**: 2 π.6 = 12 π desek yani tekerlek bu kadar yol alabilir diyebiliriz.*

Şekil 4.86. A1'in Sonraki Sayısal Varsayımının Cevap Kâğıdına İfadesi-2

***ARAŞTIRMACI**: Yani sizin burada değiştirdiğiniz yarıçap mı?*

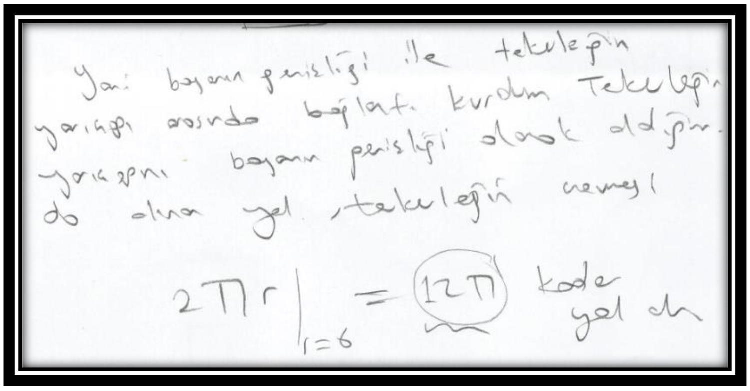
***A1**: yarıçap, yarıçap ile ıslak boyanın genişliği ve ön tekerleğin aldığı yol arasında ki ilişki.*

***ARAŞTIRMACI**: Tamam hocam başka bir şey diyebilir misiniz?*

***A1**: başka ne diyebiliriz.*

***ARAŞTIRMACI**: o dediğinizi kağıda madde olarak yazabilir misiniz hocam*

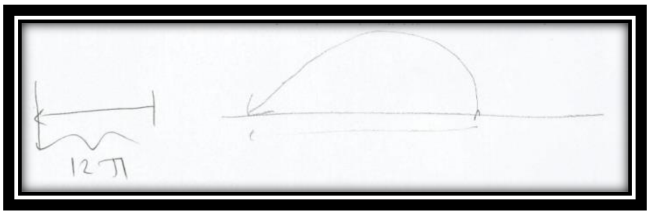
***A1**: yani.. (*kâğıda yazarak-Şekil 4.87.)



Şekil 4.87. A1'in Diyalog Sonrası Çıkarımı

Daha sonra araştırmacı A1'e bu izeler hakkında başka düşünceleri olup olmadığını sormuştur. Bunun üzerine A1 "*acaba izin bitmesi ya da devam etmesi konusunda (Sö.V-4) neler söyleyebiliriz.*" biçiminde düşünce geliştirmiştir. Bir müddet düşündükten sonra ön tekerlek ile arka tekerlek arasında ki ilişkiden (Sö.V-5), Şekil 4.88. deki gibi kâğıdına çizerek, açıklamada bulunmuştur.

A1: *Ön tekerlek 12 π kadar yol alınca arka tekerlek devam etmeye başlıyor. Yani (şekil çizerek) bu 12π kadar yol alıp bitirdiğinde, arka tekerlek 12π daha yol alır dolayısıyla 12 π kadar yol aldı bitirdi, arka tekerlekte 12π kadar yol alır (Sa.V-3).*



Şekil 4.88. A1'in Açıklamalarını Şekil İle İfade Etmesi

Son olarak ise bu açıklamasını "*benim düşünceme göre, ön tekerleğin çevresi kadar yolu bitirdiğimde, arka tekerleğin o boyayı almaya başladığı ve 12 π kadar yol almaya devam ettiği söylenebilir. Başkada bir şey düşünmüyorum*." açıklamasında bulunmuş soruyu sonlandırmıştır.

A1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; A1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak bisikletin teker boyutundan (Sö.V-1) bahsetmiştir. Daha sonra tekerin çevresi ile oluşacak izler arasında bir ilişki olduğunu ve bu ilişkiyi tekerin çevresini 2πr (Sa.V-1) alarak kâğıdına yazmıştır. Bu verilerden yola çıkarak A1 oluşacak izin "*öncelikle ön tekerlek ile o boyanın üzerinden geçtiğimizi düşünürsek. Dolayısıyla o, boya kadar iz bırakmaz mı yere. Yani bütün tekerleğin çevresi boya olacağı için* (Sö.V-2)" varsayımında bulunmuştur. Daha sonra duraksayarak düşünmeye başlamış ve boyanın genişliği (Sö.V-3) ile izler arasında bir ilişki olup olmayacağı düşüncesiyle hareket etmiştir. Bu düşüncesini ise tekerin yarıçapını boyanın genişliği kadar alarak kâğıdına Şekil 4.86.(Sa.V-2) daki gibi yazmıştır.

Araştırmacının başka neler söyleyebilirsiniz sorusu üzerine A1 oluşacak izler hakkında "*izin bitmesi ya da devam etmesi* (Sö.V-4) *konusunda neler söyleyebiliriz.*" düşüncesinde bulunmuştur. Ayrıca ön tekerlek ve arka tekerlek arasında ki ilişkiden (Sö.V-5) de "*ön tekerlek 12 π kadar yol alınca arka tekerlek devam etmeye başlıyor. Yani (şekil çizerek) bu 12π kadar yol alıp bitirdiğinde, arka tekerlek 12π daha yol alır dolayısıyla 12 π kadar yol aldı bitirdi, arka tekerlekte 12π kadar yol alır* (Sa.V-3)" biçiminde açıklamada bulunmuştur.

Görüldüğü üzere, A1 sorunun çözümü sırasında 5 sözel 3 sayısal varsayımda bulunmuştur. Ayrıca, öncelikle teker boyutundan bahsedip daha sonra matematiksel işlemler yapmış (denklem kurma) yani başka bir deyişle, sözel varsayımdan yola çıkarak sayısal varsayım düşünme aşaması sergilediği söylenebilir. Fakat bazı varsayımları ise sadece sözel varsayım aşamasında kalmıştır. Sözel ve sayısal varsayımları Tablo 4.5. de gösterilmiştir. Ayrıca bu soruya en fazla süre ayıran katılımcı olmuştur.

Tablo 4.5. A1'in Varsayımda Bulunmanın 1. Sorusundaki Varsayımları

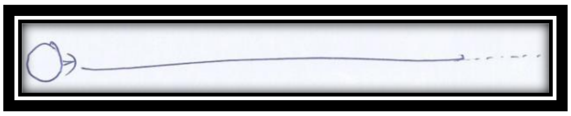
<table>
<tr><th>Varsayımda bulunma sayısı</th><th colspan="2">SÖZEL VARSAYIM</th><th>SAYISAL VARSAYIM</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Teker boyutu</td><td>Tekerin çevresi 2πr</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Lastiğin ne kadarının boyanacağı</td><td>Tamamı</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Boyanın genişliği (bu sabit parametre aslında)</td><td>Boyanın genişliği tekerin çapı kadarsa r=6 inç</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Oluşan izlerin devamlılığı veya bitmesi</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Ön tekerlek ile arka tekerleğin izleri arasındaki ilişki</td><td>Ön tekerlek 12π yol alır, arka tekerlekte 12π yol alır Şekil 4.88 deki izler oluşur</td></tr>
<tr><td>TOPLAM</td><td colspan="2">5</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="4">NOT: sözel sayısal ilişkili tablo</td></tr>
</table>

Not: r=6 inç alıyor soru boyut değiştiriyor.

4.4.1.2. Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

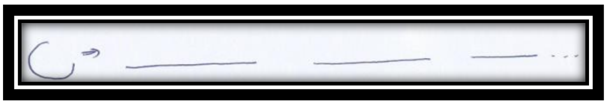
Ö1 soruyu okuduktan sonra araştırmacıya boyanın düz bir çizgimi yoksa dağılmış bir çizgi şeklinde olduğunu sormuş, sorusunun cevabını beklemeden, lastiğin bir kısmının boyanacağını söylemiştir. Daha sonra soruyu tekrar okumuş ve araştırmacıya "*İstediği şey ne peki benden sonuç ne olur derken, şekil olarak mı*?" şeklinde başka bir soru daha yöneltmiştir. Araştırmacı "istenilen *bisikletin boyadan geçtikten sonra oluşan izler hakkında ki düşünceniz hocam."* yanıtını vermiştir.

Ö1 bir müddet düşünmüş ve "*yani boyanın… Lastik tamamıyla boyadan geçiyorsa bu düz bir çizgi olacaktır. Eğer lastikte boşluk kalıyorsa boyanmayan yer kalır* (Sö.V-1) " şeklinde düşüncelerini açıklamıştır. Ö1'in bu söylemi üzerine araştırmacı "*çizginin boyu hakkında bir şey söyleyebilir misiniz*" şeklinde soru yöneltmiş ve Ö1 "*bir süre sonra biter ama nerede*" diyerek düşünmeye başlamıştır. Düşüncelerini Şekil 4.89. (Sö.V-1) deki gibi kâğıdına çizmiş ve "*Lastik tamamen boyanmışsa şekil bu olacak* (çizerek) *bir yerde biter bu. Eğer Bir defa en az 6 inç olacak, iz 6 inç 'den büyük* (Sa.V-1) *olacak. Bir tur gider yani en azından*" şeklinde açıklamıştır.



Şekil 4.89. Ö1'in Kâğıdına Çizdiği 1. Lastik İzi

Daha sonra diğer durumu ise "*Eğer lastik de bazı yerlerde boşluk varsa* Şekil 4.90. *daki gibi şekil değişik olacak yani, kesik kesik olacak bir tur gittiğinde*" biçiminde açıklamıştır (Sa.V-1).



Şekil 4.90. Ö1'in Kâğıdına Çizdiği 2. Lastik İzi

Bir müddet düşündükten sonra "*Ama arkada ki tekerinde lastiği boyanacak* (Sö.V-2)" ifadesinde bulunmuş ve arka tekerinde çizginin şeklini belirleyeceğini söylemiştir. Ardından araştırmacı ile aralarında aşağıda ki gibi diyalog gerçekleşmiştir.

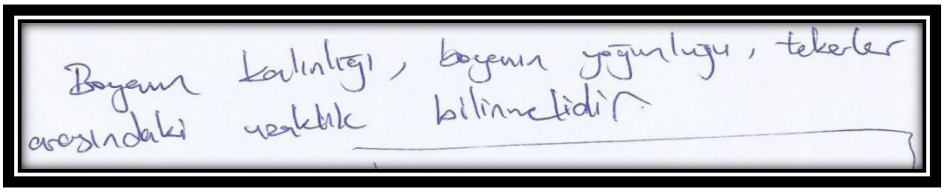
ARAŞTIRMACI: *Arkada ki tekerlekte demi önemli*

Ö1: *yani araları doldurabilir oda var. Arka teker şu boşlukları doldurabilir. Ama ne kadarı…. o zaman lastiklerin arasında ki uzaklığı da bilmek gerekiyor* (Sö.V-3).

ARAŞTIRMACI: *o da önemli, o zaman onları bir yazarsanız hocam etken olarak.*

Daha sonra Ö1 izlerin şekline etki eden parametreleri sözel olarak kâğıdına Şekil 4.91. deki gibi yazmış ve soruyu sonlandırmıştır.

Ö1: (Şekil 4.91.) *boyanın kalınlığı, boyanın yoğunluğu* (Sö.V-4)*, tekerler arası uzaklık bilinse aradaki boşluklar dolup dolmaz mı hepsi hesaplanabilir ya, yani bunları bilseydik kesin bir sonuç söylerdik.*



Şekil 4.91. Ö1'in Cevap Kâğıdına Yazdığı Varsayımlar

Ö1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 problemi okuduktan sonra araştırmacıya bazı sorular sormuştur. Ardından oluşan izler hakkında ilk olarak lastiğin bir kısmının boyanacağını söylemiştir. Daha sonra ise lastiğin eğer boyanın tamamına değmesi durumunda, oluşan izin düz bir çizgi şeklinde olacağını belirtmiştir. Araştırmacının "*çizginin boyu hakkında bir şeyler söyleyebilir misiniz?*" sorusu üzerine Ö1 bir müddet düşünmüştür. Ardından tekrar tekerin tamamının boyaya temas etmesi ve etmemesi durumunda oluşacak izleri Şekil 4.89. ve Şekil 4.90. deki gibi kâğıdına çizmiş, lastiğin çevresinin 6 inç 'den büyük ve küçük olmasına göre değişeceğini belirtmiştir. Daha sonra oluşacak izlere arka tekerin ve arka teker ile ön teker arasında ki mesafenin de etki edeceğini söylemiş soruyu sonlandırmıştır.

Görüldüğü üzere Ö1 sorunun çözümü sırasında 4 sözel 1 sayısal varsayımda bulunmuştur. Ayrıca öncelikle sözel varsayımdan yola çıkarak sayısal varsayım düşünme aşaması sergilediğini söyleyebiliriz. Fakat bazı varsayımları ise sadece sözel aşamasında kalmıştır. Ö1'in sözel ve sayısal varsayımları Tablo 4.6. da gösterilmiştir.

Tablo 4.6. Ö1'in Varsayımda Bulunmanın 1. Sorusundaki Varsayımları

Varsayımda bulunma sayısı	***SÖZEL VARSAYIM***		***SAYISAL VARSAYIM***
1	Lastiğin ne kadarının boyanacağı	Tamamı	Teker çevresi > 6 inç
		Bir kısmı	Teker çevresi < 6 inç
2	Arka tekerlek		
3	Ön arka tekerler arası mesafe		
4	Oluşan izlerin devamlılığı veya bitmesi (boyanın yoğunluğu)		
TOPLAM	4		1
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo			

4.4.1.3. Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 ilk olarak problemi okurken, aynı zamanda şeklide incelemiştir. Problemde verilen şekil üzerinde boyalı kısmı göstererek "*6 inç, genişlik olarak sayısal veri mi yoksa…"* ifadesinde bulunmuş, araştırmacıya problem hakkında soru sormuştur. Araştırmacı 6 inç 'in boyanın genişliğini veren sayısal veri olduğunu belirtmiştir. Daha sonra Ö2 problemde verilen şekil üzerinde çizimler yapmış (Şekil 4.92.) **"***sonuçta şurası* (boyanın uzunluğu) *6 inç ama bir noktada geçiyorsun şuradan geçiyorsun* (kâğıt üzerinde boyalı kısmın az ilerisi) *şu değdiği kısmın* (bisikletin tekerinin boyayla temas yeri) *bisikletin şuraya değdiği kısımlarının izi çıkar, diye düşünüyorum. Yani bir tek iz dersek sadece değdiği noktada olur. Ama burada şöyle devam ediyorsun sürüyorsun bisikleti, gidiyorsun* (şekil üzerinde temas yeri gösteriliyor) *şununla şunun çevresi kadar diye düşünüyorum, bisiklet gidiyor çünkü. Doğru anladıysam*." açıklamasında bulunmuştur.

Ardından sorunun son kısmını tekrar okumuş ve bir müddet düşünmüştür. Daha sonra düşüncelerini ise Şekil 4.92. üzerinde göstermiş ve "*şöyle bir şey olabilir yani ilk* (boya üzerine) *buraya bastım, burayı geçtim, geçtikten sonra teker dönecek yol alacak, sonra tekrar dönecek yol alacak*." şeklinde gösterimini açıklamıştır.

Şekil 4.92. Ö2’nin Düşüncelerini Şekil Üzerinde Gösterimi

Araştırmacının “*bu şekilde izler mi oluşur*?” sorusu üzerine ise Ö2 “y*ani ben öyle düşünüyorum*” cevabını vermiş ve bir sonra ki soruyu okumaya başlamış soruyu sonlandırmıştır.

Ö2‘nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö2 problemi okuduktan sonra bilgi almak için araştırmacıya soru yöneltmiştir. Ardından oluşan izler hakkında “*Bisikletin tekerinin boyalı kısma değdiği yerin izleri oluşur. Yani tek bir iz oluşur oda tekerin boyaya değdiği kısımdır* (Sö,V-1)” Daha sonra “*teker ilerledikçe tekerin çevresi kadar aralıklar oluşacak ve dolayısıyla izler Şekil 4.92. (Sö.V-2) deki gibi olacaktır*” şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir.

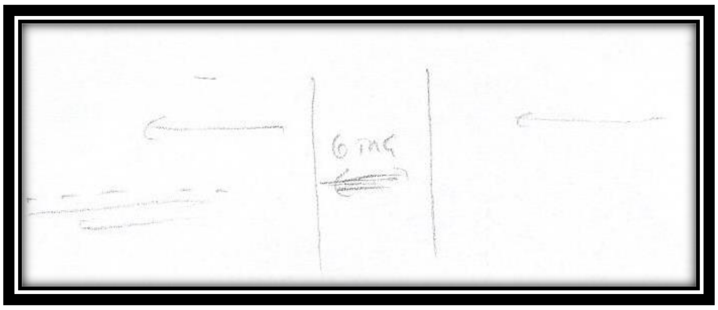
Görüldüğü üzere, Ö2 diğer katılımcılara göre bu soru için daha az süre ayırmıştır. Sebebini ise bulunmuş olduğu varsayımların sayısının azlığından dolayı olduğu söylenebilir. Bu varsayımlar ise sözel varsayımlar şekildedir. Ayrıca ikinci varsayımın, birinci varsayım ile ilişkili olduğu söylenebilir. Sebebi birinci ve ikinci varsayımda oluşacak izlerin tekerin boyalı kısma tek bir nokta da temas ederek geçtiği düşüncesinden hareketle kesik kesik çizgiler şeklinde oluşacağıdır. Ö2’nin sözel ve sayısal varsayımları Tablo 4.7. da gösterilmiştir.

Tablo 4.7. Ö2’nin Varsayımda Bulunmanın 1. Sorusundaki Varsayımları

Varsayımda bulunma sayısı	***SÖZEL VARSAYIM***		***SAYISAL VARSAYIM***
1	Lastiğin ne kadarının boyanacağı	Bir kısmı	
2	Tekerin çevresi		
TOPLAM	2		0
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo			

4.4.1.4. ÖA1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

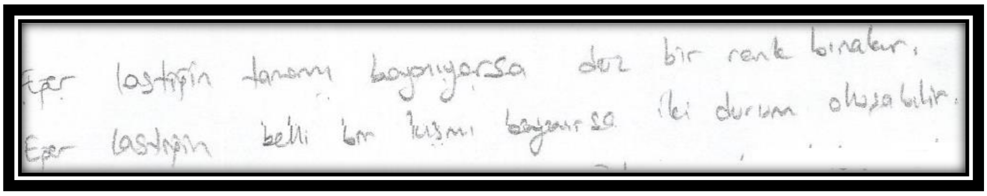
ÖA1 problemi okurken araştırmacıya inç 'in ne olduğu hakkında soru sormuştur. Araştırmacı "inç" 'in bir uzunluk ölçü birimi olduğu yanıtını vermiştir. Bu cevap üzerine ÖA1 "*ha tamam o kadar önemli değil yani*" ifadesinde bulunmuş ve soruyu okumaya devam etmiştir. Ardından kâğıdına aşağıda Şekil 4.93. deki gibi düşüncelerini çizerek açıklamıştır.



Şekil 4.93. ÖA1'in Düşüncelerini Şekil Üzerinde Gösterimi

"*Bisiklet (ok işaretleri) şuradan şuraya geliyor ve şuradan şöyle geçiyor. Şurada bir iz bırakmış oluyor bu iz hakkında ne söyleyebilirim diyor*." Daha sonra düşünmeye başlamış, bir müddet sonra ise "*tek bir tekerlek dönüyor olsa çizgi bırakır. Çünkü hani tekerlek şurada ne kadar döndüyse, tabi tekerleğin tamamının dönmesi (yani tekerin tamamının boyaya temas etmesi) ihtimali (Sö.V-1) de var ama 6 inç de çok büyük bir şey değil tekerleğin tamamını döndürecek kadar uzunlukta bir şey değil (Sa.V-1). O zaman ne olacak tekerleğin belli bir kısmı boyanacak*." biçiminde düşüncelerini açıklamıştır.

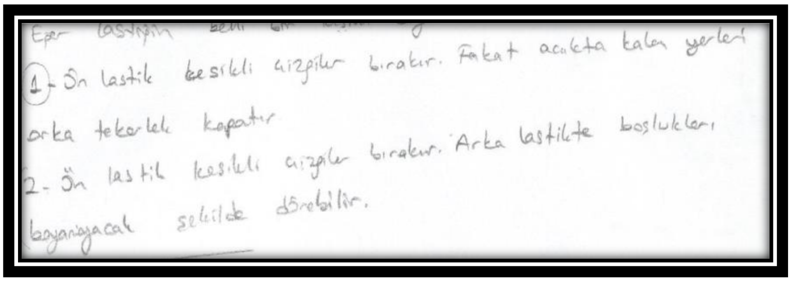
ÖA1'nin bu düşünceleri doğrultusunda araştırmacı "*niye tekerleğin tamamının boya da döndüğünde ki uzunluğun da olamaz*." şeklinde soru yöneltmiştir. ÖA1 "*Hmm bisikletin boyuna göre de değişir. Şimdi bunun bir çocuk bisikleti olduğunu filan düşünsek, küçük lastikli bir şey olduğunu düşünsek*." cevabını vermiştir. Bu düşüncelerini ise kâğıda Şekil 4.94. deki gibi yazmıştır.



Şekil 4.94. ÖA1'in İlk Düşüncelerini Cevap Kâğıdına Yazması

Daha sonra araştırmacı “*lastiğin tamamı nasıl boyanır? Belli bir kısmı nasıl boyanır? Neye dayanarak onu söylüyorsunuz?”* sorusunu yöneltmiştir. ÖA1 “*şimdi lastiğin tamam mı boyanıyorsa dediğim şey şu; bisiklet oldukça küçük bir bisiklet, bisikletin lastiğinin çevresi 6 inç' den daha küçük, 6 inç' den daha küçük bir bisiklet lastiği oluştura bilirsem ben, o zaman lastiğin tamamını boyarım buradan geçene kadar ben. Lastiğin tamamını boyarsam da, lastiğin tamamı boyalı olduğu için geçtiği zaman bana dümdüz bir çizgi çizmeye başlar. Eğer ki lastiğin çevresi 6 inç' den büyükse* (Sa.V-1) *belli bir kısmı boyanmaya başlayacak, hmm o zamanda iki ihtimal var ya kesik kesik çizgi bırakacak. Ya da tam o kesik çizgi bıraktığı yerde, sonuçta arka tekerlek* (Sö.V-2) *de boyanacak, tam oradan arka tekerlek geçip o da kalan kısmı boyayabilir. Ya da yine aynı yer denk gelip kalan kısmı boyamaya da bilir. Hadi şimdi onu hesapla bakalım boyar mı boyamaz mı?*” açıklamasında bulunmuştur.

Ardından uzunca bir süre düşünmüş, daha sonra bu söylemiş olduklarını düzenleyerek Şekil 4.95. deki kâğıdına yazmıştır



Şekil 4.95. ÖA1'in Düşüncelerini Kâğıda Yazması

Son olarak ise “Yani bu durum için de yani lastiğin ebadına göre baya bir değişiklik olacak. Bence bu soru burada kalır. Yani bundan sonrasına gidebileceğimi düşünmüyorum. İki ihtimalim var ya kesikli çizgi yaparım, ya da düz bir çizgi bırakırım.” ifadesinde bulunmuş soruyu sonlandırmıştır.

ÖA1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA1 problemi okuduktan sonra araştırmacıdan inç' in ne olduğu hakkında dönüt almıştır. Ardından oluşacak izler hakkında tekerin boyaya temas etme durumuna göre tahminlerde bulunmuştur. Daha sonra tekerin boyutu ile 6 inç arasında ilişki kurmuştur. Dolayısıyla tekerin çevresi 6 inç' den büyükse (tekerin bir kısmı boyanırsa) veya küçükse (tekerin tamamı boyanırsa) ifadesinde bulunmuş ve oluşan izlerin değişeceği yanıtını vermiştir. Ardından ön tekerlek ile arka tekerlek arasında ki ilişkinin izlere etki edeceğini belirtmiş ve kâğıdına Şekil 4.95. deki gibi yazmış, soruyu sonlandırmıştır.

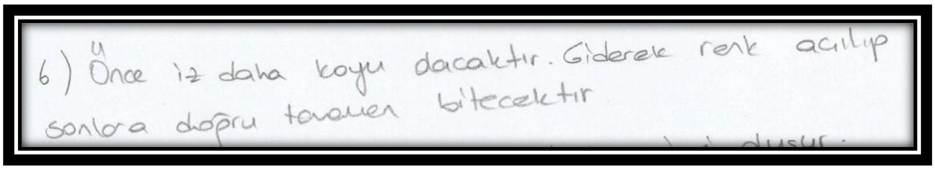
Görüldüğü üzere, ÖA1 soruyu okuduktan sonra 6 inç hakkında dönüt almış ardından 6 inç' in çok önemli olmadığı düşüncesinde bulunmuştur. Buradan sayısal verinin soruya etki etmeyeceği düşüncesinde olduğu söylenebilir. Fakat çözümünün ilerleyen aşamalarında 6 inç ile teker arasında bir ilişki kurduğu gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra 2 farklı varsayımda bulunmuştur bu varsayımlar Tablo 4.8. deki gibidir.

Tablo 4.8. ÖA1'in Varsayımda Bulunmanın 1. Sorusundaki Varsayımları

Varsayımda bulunma sayısı	***SÖZEL VARSAYIM***		***SAYISAL VARSAYIM***
1	Lastiğin ne kadarının boyanacağı	Tamamı	Teker çevresi > 6 inç
		Bir kısmı	Teker çevresi < 6 inç
2	Arka tekerlek		
TOPLAM	2		1
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo			

4.4.1.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

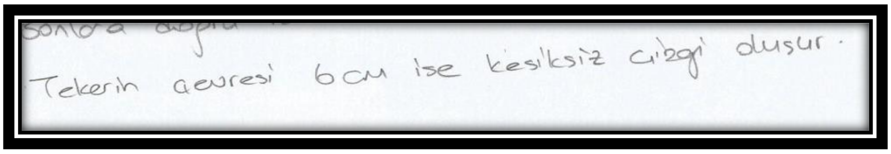
ÖA2 soruyu art arda iki kez okumuştur. Daha sonra bir müddet düşünmüş ve "*ilk başta daha yoğun olacak çizgiler* (Sö.V-1*) olur.*" ifadesinde bulunmuş ve kâğıdına Şekil 4.96. daki gibi yazmıştır.



Şekil 4.96. ÖA2'nin İlk Düşüncelerini Kâğıda Yazması

Ardından 6 inç genişliğini göstererek "*hmm ama 6 inç genişliğinde… Sadece genişliğini* (Sö.V-2) *mi vermiş*!" biçiminde araştırmacıya soru yöneltmiş ve araştırmacı "b*ize sadece boyanın 6 inç genişliğinde olduğunu belirtmiş. Onun dışında rakamsal verimiz yok.*" yanıtını vermiştir.

ÖA2 bir süre düşündükten sonra düşüncelerini "*6 inç kadar yani tekerleğe sürülmüş olacak. Tekerleğin çevresine de bağlı olacak* (Sa.V-1)*. Yani 6 inç boyalı olmuş olacak. Tekerim mesela 6 inç' den uzunsa çevresi kesiksiz olacak çizgi.*" şeklinde açıklamış ve kâğıdına Şekil 4.97.deki gibi yazmıştır.



Şekil 4.97. ÖA2'nin İkinci Düşüncelerini Kâğıda Yazması

Daha sonra tekerin çevresinin 6 inç den büyük olması (Sa.V-1) durumunu ise "*Diyelim ki 10inç ise 6 inç'i boya olacak 4 inç'i boyasız kalacak, o zaman işte çizgilerim ilk 6 inç' den sonra başlayacak, bir 4 inç boş olacak 6 inç daha az boyalı olacak sonra tekrar 4 inç boş, o şekilde ilerleyecek o zaman. Bitti.*" Açıklamış ve soruyu sonlandırmıştır.

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 soruyu birden çok kez okumuştur. Ardından oluşacak izlerin şeklinden önce yoğunluğundan bahsetmiştir. Daha sonra soruda verilen 6'inç kelimesini birkaç defa tekrarlayarak tekerin çevresi ile 6'inç arasında ilişki kurmuştur. Bu ilişkiyi ise "*teker 6 inç genişliğinde ise kesiksiz çizgi oluşacaktır. 6'inç den büyük ise (*sayısal örnek vererek*) kesikli çizgi oluşacaktır*" şeklinde açıklamıştır.

Görüldüğü üzere, ÖA2 diğer katılımcılara göre bu soru için daha az süre ayırmıştır. Toplamda 3 varsayımda bulunmuştur. Bu varsayımların ikisi sözel bir tanesi ise sayısal varsayım şeklinde olduğu söylenebilir. Dikkat çeken durum ise sayısal varsayımın ortaya çıkması ise sözel varsayımının devamı şeklinde olduğu görülmektedir. Bu varsayımlar Tablo 4.9. daki gibidir.

Tablo 4.9. ÖA2'nin Varsayımda Bulunmanın 1. Sorusundaki Varsayımları

<table>
<tr><th>Varsayımda bulunma sayısı</th><th colspan="2">SÖZEL VARSAYIM</th><th>SAYISAL VARSAYIM</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Lastiğin ne kadarının boyanacağı</td><td>Tamamı</td><td>Teker çevresi > 6 inç</td></tr>
<tr><td>Bir kısmı</td><td>Teker çevresi < 6 inç</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Oluşan izlerin devamlılığı veya bitmesi (boyanın yoğunluğu</td><td></td></tr>
<tr><td>TOPLAM</td><td colspan="2">2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">NOT: sözel sayısal ilişkili tablo</td></tr>
</table>

4.4.1.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulguların Karşılaştırılması ve Yorum

Katılımcılar tek tek incelendikten sonra birlikte değerlendirmek, süreç boyunca benzer ya da farklı davranışları ortaya çıkarmak için önemlidir. Varsayımda bulunmanın birinci sorusunun çözümüne tüm katılımcılar sözel varsayımda bulunmuşlardır. Bunun yanı sıra A1,Ö1, ÖA1 ve ÖA2 sayısal varsayımlarda da bulunmuşlardır. Katılımcıların bulundukları varsayım şekilleri ve sayıları Tablo 4.10. da gösterilmiştir.

Tablo 4.10. Tüm Katılımcıların Varsayımın 1. Sorusuna Yaklaşımları

KİŞİLER	Sözel Varsayımlar	Sayısal Varsayımlar	TOPLAM
A1	• Teker boyutu • Lastiğin Ne kadarının boyanacağı • Boyanın genişliği • Oluşan izlerin devamlılığı (boyanın yoğunluğu) • Ön tekerlek ile arka tekerlek arası ilişki	• Tekerin çevresi=2πr • r=6 inç • Ön teker ve arka tekerin 12 π yol alması	8
Ö1	• Lastiğin ne kadarının boyanacağı • Arka tekerlek • Arka teker ile ön teker arası ilişki • Oluşan izlerin devamlılığı (boyanın yoğunluğu)	• Teker çevresi < 6 inç ve teker çevresi > 6 inç	5
Ö2	• Lastiğin ne kadarının boyanacağı • Tekerin çevresi		2
ÖA1	• Lastiğin ne kadarının boyanacağı • Arka tekerlek	• Teker çevresi < 6 inç ve teker çevresi > 6 inç	3
ÖA2	• Lastiğin ne kadarının boyanacağı • Oluşan izlerin devamlılığı (boyanın yoğunluğu)	• Teker çevresi < 6inç ve teker çevresi > 6 inç	3
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo			

Tablo 4.10. dan görüldüğü üzere, A1 en fazla varsayımda bulunan katılımcı olurken, Ö2 ise en az varsayımda bulunan katılımcı olmuştur. Bu varsayımlar sırası ile A1; 5 sözel, 3 sayısal, Ö1; 4 sözel, 1 sayısal, Ö2; 2 sözel, ÖA1; 2 sözel, 1 sayısal, ÖA2; 2 sözel, 1 sayısal şeklindedir. Dolayısıyla sözel varsayımda bulunmada A1 en fazla; en az ise Ö2, ÖA1 ve ÖA2 eşit sayıda parametreden bulunmuşlardır. Sayısal varsayımda ise A1 en fazla, Ö2 hiç sayısal varsayımda bulunmamıştır.

Dikkat çeken başka bir durum ise Ö1,ÖA1 ve ÖA2'nin sayısal varsayımlarının benzerlik göstermesidir. Bunun yanı sıra Ö2 ise sayısal hiçbir varsayımda bulunmamıştır Sözel varsayımda bulunan katılımcıların hepsi ortak olarak "lastiğin ne kadarının boyanacağı" düşüncesinde olmuştur. Başka bir durum ise ÖA2 dışında diğer katılımcıların problemi canlandırma yaparak, şekil üzerinde veya yeni şekil çizerek çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. Ö2 ve ÖA2 sorunun çözümüne aynı süreyi ayırdıkları görülmüştür. Buna rağmen Ö2 daha fazla varsayımda bulunmuştur.

4.4.2. Varsayımda Bulunma Boyutunun İkinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Varsayımda bulunmaya yönelik yöneltilen ikinci soru "*Aynı anda hem saçınızı hem ayakkabınızı görebildiğiniz en kısa duvar aynasının boyu nedir?*" şeklindedir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır;

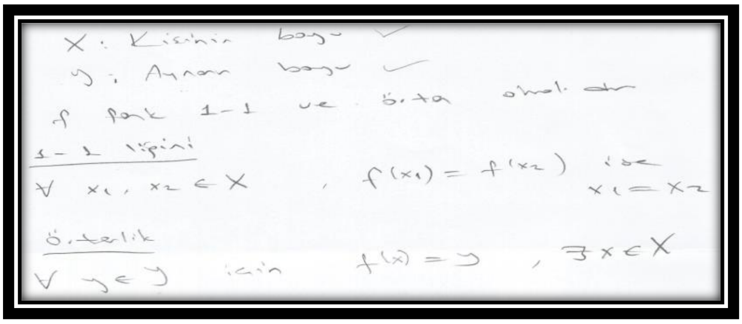
4.4.2.1. A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soruyu hızlı bir şekilde okumuştur ardından "*Hmm bir fonksiyon sorusuyla özdeşleştirdim bunu*" ifadesinde bulunmuş ve kâğıdına Şekil 4.98. de ki gibi yazmıştır.

Şekil 4.98. A1'in Soruyu Fonksiyon İle Özdeşleştirmesi

Daha sonra belirtmiş olduğu fonksiyonda ki x ve y 'yi Şekil 4.99. daki gibi ve aşağıda ki biçimde açıklayarak kâğıdına yazmıştır.

"*Dolayısıyla, X den kastım benim burada kişinin boyu, Y'den kastımsa aynanın boyu. Dolayısıyla kişi kendi boyunu tam anlamıyla anada görebilmesi için f fonksiyonu 1-1 ve örten olması lazım. Hmm f fonksiyonu 1-1 ve örten olmalıdır yani 1-1 'liginden kastı nedir dersek hmm her x1 elemandır x2 elamandır aldığımızda yani kişinin boyunda aldığımız iki farklı nokta için*"



Şekil 4.99. A1'in Almış Olduğu Fonksiyonu Açıklaması

Ardından A1'in bu yazdıkları üzerine araştırmacı ile A1 arasında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI: *bu x_1 ve x_2 farklı noktalar derken hocam?*

A1: *mesela kişinin, vücudu üzerinde ki herhangi iki farklı nokta seçebiliriz. o şekilde düşündüğümüz de eğer bunların, fonksiyon altında ki görüntüleri birbirlerine eşitse bu durumda, o iki nokta birbirlerine eşit olmak zorundadır* (Sa.V-1). *Aynı şekilde örtenlikten kastım, Aynanın boyunda alacağım her nokta için f-altında ki görüntüsü bu aynanın üzerin de ki noktayı verecek biçim de kişinin kendi boyunda en az bir nokta vardır* (Sa.V-1). *Dolayısıyla 1-1 ve örtenlik şartı altında kişinin kendi boyunun ayna boyunun üzerine örtüştüğünü ve dolayısıyla kendi boyunu çok rahat şekilde gördüğünü görebiliriz.*

ARAŞTIRMACI: *Peki başka aklınıza gelen çözümler var mı?*

A1: *hmm* (soruyu okuyarak*) aynaya yaklaşma, uzaklaşma olabilir. Daha farklı bir şey düşünemiyorum şuan da ya. Sonra bir daha baksak bu soruya*.

Diyalog sonrası A1 probleme tekrar dönmek üzere çözümünü sonlandırmıştır. Fakat daha sonra geri soruya dönmek istememiştir.

A1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; A1 soruyu okuduktan sonra var olan matematiksel bilgileri ile soruyu özdeşleştirmiştir. Bu durumunu yapılandırmacı düşünme yaklaşımı şeklinde olduğu söylenebilir.

Tablo 4.11. A1'in Varsayımda Bulunmanın 2. Sorusundaki Varsayımları

Varsayımda bulunma sayısı	*SÖZEL VARSAYIM*	*SAYISAL VARSAYIM*
1	-	Ayna ve kişi arasında 1-1 ve örtenlik özelliğinin olması ve gösterimi
TOPLAM	0	1
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo		

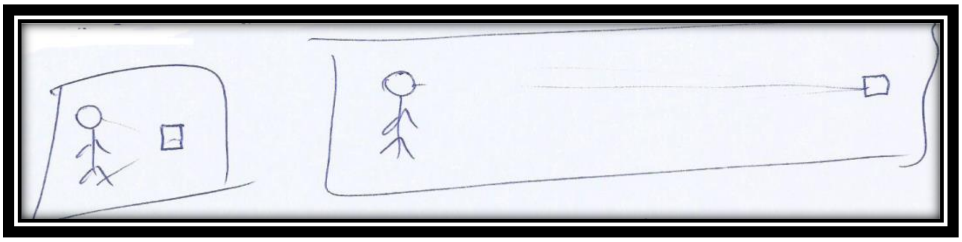
Tablo 4.11. de görüldüğü üzere A1, 1-1 ve örtenlik kavramlarını kullanarak sayısal varsayımda bulunmuş ve çözümünü sonlandırmıştır.

4.4.2.2. Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 soruyu okuduktan sonra bir müddet sessizce düşünmüştür. Ardından "*aynı anda derken ikisini birden göremeyeceğim haliyle*." şeklinde araştırmacıya problem hakkında soru yöneltmiştir. Araştırmacı "*yok aynaya baktığınız anda, ayrı ayrı değil aynı anda saçınızı ve ayakkabınızı görebileceğiniz bir ayna*" yanıtını vermiştir.

Daha sonra Ö1 bir müddet daha *"en kısa duvar aynasının*" cümlesini tekrarlayarak düşünmüştür. Düşüncelerini "*Şimdi bu ayna ile aramda ki mesafe var burada o mesafeyi uzattıkça (Sö.V-1) aynanın boyu da kısalabilir diye düşünüyorum*" şeklinde ifade etmiştir. Ardından "*problemde bu mesafe hakkında bir bilgi verilmemiş*" söyleminde bulunmuş ve kâğıdına Şekil 4.100. deki gibi çizimler yapmıştır.

Ö1: *şöyle bir taslak bir şey çizsem* (Şekil 4.100.) *Adam, bu ayakları da belli olsun* (gülümseyerek) *şimdi aynada yaklaşık şu kadar olsun, yani buradan ayaklarını görebilir ama saçını göremez. Ama bu aynayı uzaklaştırınca, adam yine bu, aynanın boyutu yine bu kadar ama buradan baktığında hem ayaklarını hem saçını görme ihtimali var.*



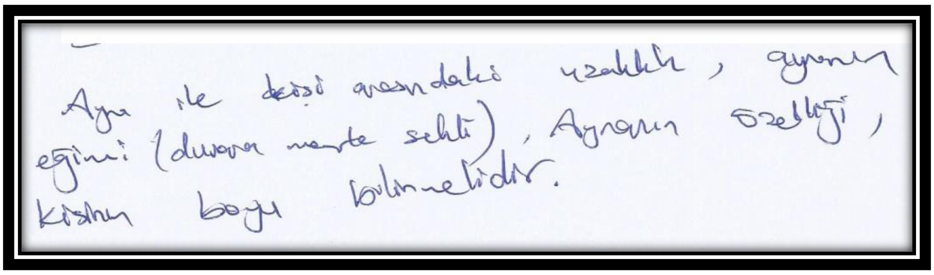
Şekil 4.100. Ö1'in Varsayımda Bulunurken Çizdiği Resim

Resmi çizdikten ve düşüncelerini ifade ettikten sonra "*Aynayı biraz yukarıya taşımak (Sö.V-2) gerekiyor*" düşüncesinde bulunmuştur. Bu düşünce üzerine Ö1 ile araştırmacı arasında aşağıda ki gibi diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI: *yani aynanın aşağıda yukarıda olması fark eder.*

Ö1: *Yani saçını görmek için yukarıda olmak zorunda biraz, mecburen yukarıda olacak öyle değil mi. Saçını görmek istiyorsan aynı hizada olmak zorundalar ama ayakları için sanki gözün…*(düşünüyor*).*

Ardından bu diyalog sırasında Ö1 "*bu aynayı eğik falan da tutabilirsin (Sö.V-3)*" şeklinde başka bir varsayımda bulunmuştur. Bir müddet düşündükten sonra "*ayna derken düz aynamı demi yani*" şeklinde araştırmacıya soru yöneltmiştir. Araştırmacının "*olabilir*" cevabı üzerine Ö1 "*o zaman aynanın özelliği (Sö.V-4) çukur tümsek. Başka ne gerekir. Kişinin boyu (Sö.V-5)*" açıklamasında bulunmuş, aynanın boyunu etkileyecek parametreleri söylemiş ve bunları Şekil 4.101. deki gibi kâğıdına yazmıştır.



Şekil 4.101. Ö1'in Sorunu Çözümünü Etkileyeceğini Düşündüğü Parametreleri Kâğıdına Yazması

Ardından "*bu yazdıklarımız bilindiği takdir de aynanın boyu hakkında bir şeyler söyleyebiliriz*" söyleminde bulunarak soruyu sonlandırmıştır.

Ö1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 problemi okuduktan sonra araştırmacıya problemin anlaşılması adına birkaç soru yöneltmiştir. Ardından çözüm için bazı varsayımlarda bulunmuştur. Bu varsayımlardan sırası ile Tablo 4.12 de verilmiştir. Dikkat çeken durum ise Ö1'in varsayımlarda bulunurken, aynanın boyuna etki edecek parametreleri söyledikten sonra açıklamada bulunurken başka bir parametrenin etki edeceğini söylemesidir. Bunu aynanın duvara monte şeklinin yüksekliğini açıklarken, birden aynanın özelliği ve aynanın konum şekli varsayımlarında bulunmasından da açıkça görülmektedir.

Tablo 4.12. Ö1'in Varsayımda Bulunmanın 2. Sorusundaki Varsayımları

<table>
<tr><th>Varsayımda bulunma sayısı</th><th colspan="2">SÖZEL VARSAYIM</th><th>SAYISAL VARSAYIM</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Ayna ile kişi arası UZAKLIK</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Yer ile ayna arası YÜKSEKLİK</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Aynanın duvara monte şekli (EĞİM)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">AYNANIN ÖZELLİĞİ (çeşidi)</td><td>Tümsek ayna</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Çukur ayna</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">KİŞİNİN BOYU</td><td></td></tr>
<tr><td>TOPLAM</td><td colspan="2">5</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="4">NOT: sözel sayısal ilişkili tablo</td></tr>
</table>

4.4.2.3. Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu iki defa yavaş bir şekilde okumuştur. Ardından "*düşünelim bakalım*" diyerek gözünü kapatmış düşünme davranışları sergilemiştir. Daha sonra "*boyum kadar olması (Sö.V-1) gerekmez* mi" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bu söylemini kâğıt üzerine Şekil 4.102. deki gibi yazarak

Şekil 4.102. Ö2'nin Sorunun Çözümüne Vermiş Olduğu Cevabı

"*Yani… Duvar aynam olsaydı belki daha rahat düşünürdüm*" diyerek soruyu sonlandırmış ve diğer soruyu okumaya başlamıştır.

Probleme verilen cevaptan da görüldüğü üzere Ö2 katılımcılar arasında soruya en az vakit ayıran kişi olmuştur (1dakika gibi bir süre). Ayrıca veri toplama aracında ki diğer sorular içerisinde en kısa süreyi bu soruya ayırmıştır. Buna rağmen Tablo 4.13. de görüldüğü üzere bir sözel varsayım da bulunmuştur.

Tablo 4.13. Ö2'in Varsayımda Bulunmanın 2. Sorusundaki Varsayımları

Varsayımda bulunma sayısı	***SÖZEL VARSAYIM***	***SAYISAL VARSAYIM***
1	KİŞİNİN BOYU	
TOPLAM	1	0
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo		

4.4.2.4. ÖA1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okurken aynı zamanda "*O ne ya!! Saçımı nasıl görecem ya!! Duvar aynasının belirtmesinin nedeni eğimli koymayacak olmam mı aynayı.*" şeklinde yorumda bulunmuştur. Ardından araştırmacıya **"***duvar aynasını duvara dik koyarsın her halde değil mi? Duvara eğimli (Sö.V-1) şekilde duvar aynası mı olur*." sorusunu yöneltmiştir. Araştırmacı "*duvar aynası dediği duvara monte edilebilen bir ayna*" biçiminde açıklamada bulunmuştur.

Bu diyalogdan sonra ÖA1 Şekil4.103. deki gibi elini ayna olarak kullanmaya çalışmış, "*yani sonuçta ben yine de istesem de şöyle bir açıda (*Şekil 4.103.*) koyabilirim* *yani. Şunun* (elinin) *ayna olduğunu düşünsem. Atıyorum şöyle 45 derecelik bir açıyla koyabileceğim yani aynayı, karşıma dikebileceğim onu.*" açıklamasında bulunmuştur.

Şekil 4.103. ÖA1'in Sorunun Çözümü Sırasında ki 1. Davranışı

Daha sonra ÖA1 bir müddet düşünmüş ve bu sırada araştırmacı "*İlk başta söylediğim gibi bu sorularda doğru yanlış aramıyoruz.*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bunun üzerine ÖA1 aşağıda ki gibi düşüncelerini dile getirmiştir.

"ÖA1: *doğru yanlış değil, daha çok nasıl düşündüğüne dair de… dur bakalım neler aklımıza gelecek şimdi. Farklı durumlara ayırsak duvar aynasına dik bir şekilde, tam duvara yapıştıracak şekilde düşünsek, dik bir şekilde koyduk. Hem saçımı görebileceğim hem de ayakkabımı göreceğim. Yani Tüm vücudumu görecem sonuçta, sorunun amacı o. tüm vücudumu görebileceğim ayna… Bir kere eğer ayak hizamdan başlarda boy almaya başlarsam o zaman sıkıntı olur, kafama kadar çıkartmam lazım aynayı, en kısasını soruyor bana. O zaman, acaba boyuma göre mi* (Sö.V-2), *tam boy hizamda mı almalıyım, boyumdan yukarısını alsam ayağımı görmenin imkânı yok zaten* (zihninde canlandırmalar yaparak sesli düşünüyor).

Ardından "*Muhtemelen boy hizamda tutacağım* (Sö.V-3). *Atıyorum boy hizamda değil, göğüs hizasında tutsam bu sefer saçı istesem de görür müyüm ki!!* " söyleminde bulunmuştur. Daha sonra bu söylemini Şekil 4.104. deki gibi elini ayna gibi düşünerek somutlaştırmaya çalışmıştır.

Şekil 4.104. ÖA1'in Sorunun Çözümü Sırasında ki 2. Davranışı

Bulunduğu konum gereği (oturarak hem saçını hem ayağını göremeyeceği düşüncesinden hareketle) düşüncesinin tam hayal edememesini “*Yok, çünkü neden aşağıya doğru bakıyorum sonuçta.*” şeklinde açıklamış ve Şekil 4.105. deki gibi ayağa kalkarak düşüncelerini canlandırmaya başlamıştır. Bu düşüncelerini ise “*deneyelim şimdi şöyle dursam, aynada şurada olsa* (Şekil 4.105.) *ben oradan saçımı görebilir miyim acaba*.” biçiminde ifade etmiştir.

Şekil 4.105. ÖA1’in Sorunun Çözümü Sırasında ki 3. Davranışı

Varsayımlarını denemelerinin ardından “*Hiç zannetmiyorum burada aşağıda bir yerde dururken saçımı görebileceğimi. Bence en mantıklısı en azından belli bir seviyeye kadar yukarda tutmak.”* açıklamasında bulunmuş, aynanın büyüklüğünün boyum kadar olması durumunda her türlü saçını ve ayağını görebileceği “Kafa hizamdan gelecek, boyuma kadar olsa zaten her türlü görürüm” şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir. Fakat soruyu tekrar okuyarak “*Önemli olan aynayı küçültmek. Aynayı küçültüyorsam ve dik koyarsam bu çok zor, o halde muhtemelen yine eğimli koyacağım ben bunu yapabilmem için.”* şeklinde tekrar aynanın boyutundan ziyade konumu hakkında düşünmeye ve düşüncelerini dile getirmeye başlamıştır. Bu düşüncelerini ise Şekil 4.106. daki gibi canlandırmış ve “*Nasıl bir eğimli koyacağım, aynanın küçük olmasını istiyorum yani karşıma koyarsam, ayağımı görebilmem için aynanın hafif şöyle (*Şekil 4.106.) *durması lazım mı acaba. Aynan hafif söyle duracak, bana doğru yükselerek duracak ki, ben oradan baktığım zaman yansımadan ayağımı görebileceğim. Ama bana doğru çok yatırırsam bu sefer saçımı göremem.*

Şekil 4.106. ÖA1'in Sorunun Çözümü Sırasında ki 4. Davranışı

Daha sonra duraksamış ve "*Zaten ben işin eğimi ile uğraşmıyorum ki, tamam eğim yapacağım da aynanın boyu ne kadar olmalı diyor*" şeklinde ifadede bulunmuştur. Ardından uzunca bir süre düşünmeye başlamıştır. Düşüncesini ise "*aslında küçük bir ayna mı alsam*" ifade etmiş, aynanın elinin içine sığacak kadar bir ayna olması yeterli düşüncesiyle Şekil 4.107. deki gibi avucunun içinde ayna varmışçasına düşünmeye devam etmiştir.

Şekil 4.107. ÖA1'in Sorunun Çözümü Sırasında ki 5. Davranışı

Düşüncelerini ise "*Ben o zaman görür müyüm ki hem saçımı hem ayağımı. Şimdi elime yetecek kadar bir ayna cevabı da vermek istemiyorum*" biçiminde ifade etmiştir. Araştırmacının "*neden böyle bir yanıt vermek istemiyorsun*" sorusu üzerine ÖA1 "*ya ne bileyim biraz saçma geldi açıkçası, elime ana alsam söyle hafif kendim tutsam, hem ayağımı hem saçımı görebilir miyim acaba yani hani elimle kaldırabileceğim küçük bir ayna olsun yeter mi desem acaba diyorum. Ama… Var mı bir ayna ya deneyebilir miyiz?"* açıklamasında bulunmuş ve araştırmacıdan ayna talep etmiştir. Talebine olumsuz yanıt almasından sonra ÖA1 bir müddet düşünmüş ve "*Muhtemelen olayın benim boyumla ilgili, işte boyumun yarısı, boyumun 4'te biri filan tarzı bir şeyler söylemem gerekiyor*." şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir. ÖA1 bu ifadesi üzerine araştırmacı ile aralarında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

***ARAŞTIRMACI**: senin boyun aynanın boyunu etkiliyor mu yani.*

***ÖA1**: muhtemelen benim boyumda bunu etkileyecek diye düşünüyorum. Yani 1.60 isem ayrı 1.80 isem ayrı, yani, burada boyuma n desem "n" bağlı bir formül buluyormuşuz gibi bir şey olacak, ama o kadara da karmaşık bir şey olmasa gerek.*

***ARAŞTIRMACI**: olabilir niye olmasın. Dediğin gibi sende söylüyorsun öyle bir şey düşünüyorsun.*

***ÖA1**: çok şey düşünüyorum da, düşünmeler arasında sıkıntı yok zaten fikrimi söylüyorum*

***ARAŞTIRMACI**: saçma, doğru, yanlış olarak düşünme yani, düşüncelerini, serbestsin.*

***ÖA1**: yok özgürce ifade ediyorum düşüncelerimi, ama her biri ondan sonra kendime mantıksız geliyor bu sefer. Bu kadar karmaşık bir şey de düşünebilir miyiz ki. Hem saçımı hem ayağımı nasıl göreceğim. Benim boyum kadar ise her türlü görürüm. Yani o sıkıntı değil.*

Daha sonra ÖA1 tekrar aynanın büyüklüğünün boyu kadar olduğunu düşünerek hem saçını hem ayağını görebileceği konumu "*benim boyum kadar aynada ben böyle bakarım dümdüz. Saçımı da görürüm, hafif şöyle gözümü kaydırsam, kafam sabit durmak şartıyla, gözümü aşağıya indirsem oradan yine ayağımı da görürüm zaten ayağıma kadar ayna geliyor sonuçta*." biçiminde ifade etmiştir. Ardından sorunun soruluş amacını "*Acaba hani burada en kısa diye, illa beni düşünmeye yitip, illa ki benim boyum kadar mı olmalı ayna. Hani daha küçüğü kabul edilemez bir şey mi. Hani düşünsün, bunun olmayacağını görsün, en azı yine benim boyum kadar olur desin mi. Ben bu soruya girersem bir gün boyunca düşünürüm bir şey çıkaramam gibi geliyor. En sonunda soru içinde kelime oyunu aramaya başladım. Tamam, artık soru, soru olmaktan çıktı*" şeklinde sorgulamaya başlamıştır.

Son olarak ise "*yani net bir şey söyleyemiyorum yani en kısasını bilemem de, benim boyum kadar ise garanti görürüm. En azından öyle söyleyeyim*." Söyleminde bulunmuş ve soruyu sonlandırmıştır.

ÖA1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak aynanın duvara nasıl konulması gerektiği hakkında düşüncelerini dile getirmiştir. Soruda verilen kelimeleri irdeler bir şekilde duvar aynasının duvara düz konulması mı gerekli olup olmadığını araştırmacıya sormuş ve araştırmacı "*duvar aynası duvara monte edilebilen bir ayna şeklinde* " açıklamada bulunmuştur. Ardından ÖA1 elini ayna gibi kullanarak düşüncelerini canlandırmaya çalışmıştır. Canlandırma sırasında elini farklı açılarda almış ve oluşacak görüntü hakkında açıklamalarda bulunmuştur. Daha sonra katılımcı sesiz bir şekilde düşünürken araştırmacı "*doğru, yanlışa bakmıyoruz düşüncelerini rahatça söyleyebilirsin*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Ardından" *aynanın boyutunun benim boyum kadar olması yeterli*" ifadesinde bulunmuş ve bu ifadesini açıklamaya, canlandırmaya çalışmıştır. Fakat tekrar soruyu okumuş ve soruda ki "*en küçük duvar aynası*" kelimesini tekrarlayarak verdiği "*boyum kadar ayna*" cevabını sorgulamıştır. Daha sonra aynayı küçültebilmek için ilk başta belirttiği gibi aynanın eğimi hakkında tekrar düşünmeye ve düşüncelerini dile getirmeye başlamıştır. Aradan bir müddet geçtikten sonra ise eğimin sonuca etkisini bırakıp aynanın boyutuna tekrar dönmüş düşünmeye başlamıştır. Bu düşüncelerini ise "*Muhtemelen olayın benim boyumla ilgili, işte boyumun yarısı, boyumun 4'te biri filan tarzı bir şeyler söylemem gerekiyor"* biçiminde ifade etmiştir. Boyuna bağlı bir denklem kurması gerektiği düşüncesini ileri sürmüştür. Fakat bu düşüncesini devam ettiremeyip, "a*ynanın boyu benim boyum kadar olsa kesin hem saçımı hem ayağımı görürüm"* cevabı vererek soruyu sonlandırmıştır.

Görüldüğü üzere, ÖA1'in diğer katılımcılar ve çalışma kâğıdında ki diğer sorular içerisinde en fazla süreyi ayırdı soru olmuştur. (09:23) aynı zamanda toplam oturumun yaklaşık 5'te 1'lik zaman dilimini bu soruya ayırmıştır. Bu kadar uzun bir süre ayırması dikkat çekici bir durumdur.

Başka dikkat çeken durumlar ise ÖA1 düşüncelerini dile getirirken "atıyorum" şeklinde varsayımlarını söylemesidir.

Aynanın boyutunu etkileyecek parametreleri ise sırası ile Tablo 4.14. de gösterilmiştir. Fakat problemin çözümü sırasında aynanın eğimi ve boyutu arasındaki ilişki çok uzunca bir süre irdeleyerek ve canlandırarak düşünmüştür.

Tablo 4.14. ÖA1'in Varsayımda Bulunmanın 2. Sorusunda ki Varsayımları

Varsayımda bulunma sayısı	***SÖZEL VARSAYIM***	***SAYISAL VARSAYIM***
1	Aynanın duvara monte şekli (EĞİM)	
2	Yer ile ayna arası YÜKSEKLİK	
3	KİŞİNİN BOYU	
TOPLAM	3	0
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo		

4.4.2.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 hızlı bir şekilde soruyu okuduktan sonra uzaklara bakar bir şekilde bir müddet düşünmüştür. Ardından araştırmacı katılımcıya "*ne düşünüyorsunuz şuan?*" sorusunu yöneltmiştir. Bu soru üzerine ÖA2 gülümseyerek " (gülümseyerek) *vitrinler*" cevabını vermiştir. Daha sonra "*deneme kabinleri. Aynı anda hem saçımı görüyorum, ama benim, benim boyuma da bağlı olarak değişecek*" açıklamasında bulunmuş ve gündelik yaşantısıyla problemi özdeşleştirmiştir. Ardından düşüncelerini "*Şimdi ayna var önümde. Ama nasıl tutuğuma (Sö.V-1) da bağlı*" ifadesinde bulunmuş ve etrafında düşüncesini gerçekleştirecek somut bir nesne aramış. Cebinden telefonunu çıkararak telefonunu ayna gibi düşünmüştür. Telefonunu eline aldıktan sonra Şekil 4.108. deki gibi tutmuş ve "*şöyle tutuğumda da kendimi görebiliyorum ama böyle tutuğumda da kendimi görebiliyorum mesela, ama ayaklarım görülmüyor işte*." açıklamasında bulunmuştur.

Şekil 4.108. ÖA2'nin Sorunun Çözümü Sırasında ki Davranışı

Daha sonra sesiz bir şekilde bir müddet düşünmüş ve kendi kendine "*Düz ayna olmak zorunda mı?*" sorusunu yöneltip "*Duvar aynası diyor. Düz olmak zorunda*" biçiminde kendi sorusunu kendisi cevaplandırmıştır. Ardından tekrar düşünmeye başlamış ve "*boyumun yarısı (Sö.V-2) kadar gibi bir şey herhalde*" ifadesinde bulunarak soruyu sonlandırmıştır.

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak problemi gündelik yaşantısıyla bağdaştırmıştır. Ardından düşüncelerini canlandırarak Şekil 4.108. deki gibi denemiştir. Bu düşüncelerinden yola çıkmış ve aynanın boyutunun kişinin boyu ile ilişkili olduğu varsayımında bulunmuştur. Ayrıca aynanın çeşidi hakkında düşüncede bulunsa da bu düşüncesini incelemeyip vazgeçmiştir ve aynanın düz ayna olması durumunu incelemiştir.

Tablo 4.15. ÖA2'nin Varsayımda Bulunmanın 2. Sorusunda ki Varsayımları

Varsayımda bulunma sayısı	***SÖZEL VARSAYIM***	***SAYISAL VARSAYIM***
1	Aynayı Tutuş Şekli	
2	KİŞİNİN BOYU	
TOPLAM	2	0
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo		

4.4.2.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulgu Ve Yorumların Karşılaştırılması

Varsayımda bulunmanın ikinci sorusunun çözümüne katılımcılardan Ö1, Ö2, ÖA1 ve ÖA2 sadece sözel varsayımlar ile yaklaşırken, A1 ayrıca sayısal varsayımda da bulunmuştur. Ayrıntılı olarak tüm katılımcıların buldukları varsayımlar ve sayıları Tablo 4.16 da gösterilmiştir.

Tablo 4.16. Tüm Katılımcıların Varsayımın 2. Sorusuna Yaklaşımları

KATILIMCILAR	Sözel Varsayımlar	Sayısal Varsayımlar	TOPLAM
A1	-	Ayna ve kişi arasında 1-1 ve örtenlik özelliğinin olması	1
Ö1	• Ayna ile kişi arası UZAKLIK • Yer ile ayna arası YÜKSEKLİK • Aynanın duvara EĞİMİ • Aynanın ÖZELLİĞİ (ÇEŞİDİ) • Kişinin BOYU		5
Ö2	• Kişinin BOYU		1
ÖA1	• Aynanın duvara EĞİMİ • Yer ile ayna arası YÜKSEKLİK • Kişinin BOYU		3
ÖA2	• Kişinin BOYU		1
NOT: sözel sayısal ilişkili tablo			

Sözel varsayımda bulunan katılımcıların hepsi ortak olarak kişinin boyunun aynanın boyutuna etki edeceği düşüncesinde olup, Ö1 ve ÖA1'in kişinin boyunun yanı sıra aynanın yerden yüksekliği ve eğiminin de aynanın boyutuna etki edeceğini belirtmişlerdir.

Dikkat çeken başka durum ise katılımcılardan ÖA1 ve ÖA2 problemi canlandırma yaparak çözmeye çalışırken Ö1 ve şekil çizmeyi, Ö2 sadece açıklamada bulunmayı, A1 ise matematiksel yöntemler ile çözüme ulaşmaya çalışmışlardır.

Ayrıca A1, Ö1, ÖA1 ve ÖA2 varsayımlarda bulunduktan sonra bu varsayımlarının mantıklı olup olmadıkları düşünme, canlandırma ve açıklamalarda bulunarak kendilerini ikna etmeye çalışırken, Ö2 bir açıklamada bulunmamıştır.

Ö2 ve ÖA2 bayan katılımcılar problemin çözümüne kısa bir zaman ayırırken ÖA1 en uzun süreyi ayırmıştır.

Genel olarak tüm katılımcılar varsayımlarda bulunmuşlardır. Özellikle A1'in gerçekleştirmiş olduğu varsayım beklentilerin dışında gerçekleşen bir varsayım olmuştur. Bu durumu akademik geçmiş ve yaşantısından kaynaklandığı söylenebilir.

Dikkat çeken başka bir durum ise Ö1, ÖA1 ve ÖA2'nin varsayımda bulunduğu durumu açıklarken başka varsayımlarda (aynanın boyutuna etki eden) bulunmalarıdır. Dolayısıyla bu katılımcılar bir varsayımda bulunurken bu varsayımdan yola çıkarak başka varsayımlarda bulundukları söylenebilir.

4.5. İspat Boyutundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

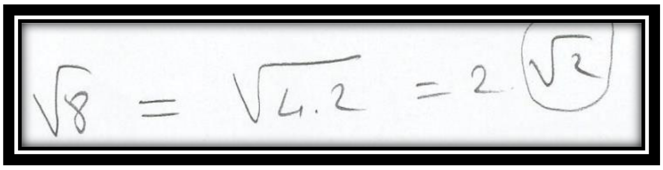
Araştırmanın dördüncü alt problemi "İzlenen matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme boyutlarından "ispat" boyutundaki düşünme şekilleri, yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar nasıldır?" olarak ifade edilmiştir. Bu alt probleme cevap verebilmek için katılımcılara iki soru yöneltilmiştir. İspat boyutunda ki sorularda amaç birinci soruda tümdengelim, ikinci soruda ise tümevarım ispat tekniği yaklaşımlarını incelemektir. Bu süreçte var olan farklılıkları da katılımcılara göre değerlendirmektir. Katılımcılara yöneltilen her bir probleme ilişkin bulgular da ayrı ayrı verilmiş ve daha sonra karşılaştırmalar yapılmıştır.

4.5.1. İspat Boyutundan Birinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

İspata yönelik yöneltilen ilk soru " $\sqrt{8}$ *sayısının rasyonel olmadığını veya irrasyonel olduğunu ispatlayabilir misiniz?*" şeklindedir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır. Ayrıca bu soru ile katılımcıların ispat boyutunun tümdengelim yönteminin, çelişki bulma tekniği ile sorunun çözümüne yaklaşmaları beklenmektedir.

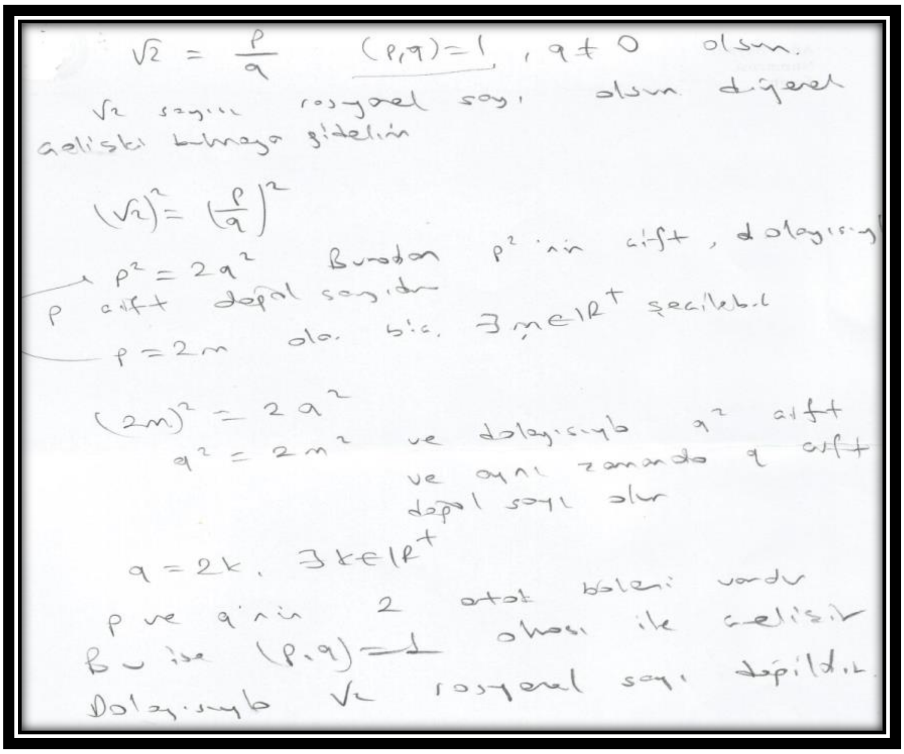
4.5.1.1. A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soru kâğıdına göz gezdirdikten sonra ilk olarak ispat sorusunun birinci sorusu olan bu sorudan başlamıştır. Araştırmacının "*niye bu sorudan başladınız hocam*" sorusu üzerine A1, "*Daha böyle bir yakın geldi bana*" yanıtını vermiştir. Ardından sorunun çözüm aşamasına geçmiştir. İlk olarak kâğıdına Şekil 4.109. deki gibi $\sqrt{8}$ 'i $2\sqrt{2}$ biçiminde yazmıştır.



Şekil 4.109. A1'in $\sqrt{8}$ Sayısını $2\sqrt{2}$ Biçimine Gösterimi

Ardından "*Çelişki yaratmaya çalışacağız öncelikle tamam mı? Yani* $\sqrt{2}$ *sayını rasyonel sayı olarak kabul edeceğiz*." açıklamasında bulunmuştur. Daha sonra ise cevap kâğıdına sorunun çözümünü Şekil 4.110. daki gibi açıklayarak yazmaya başlamıştır ve soruyu sonlandırmıştır.

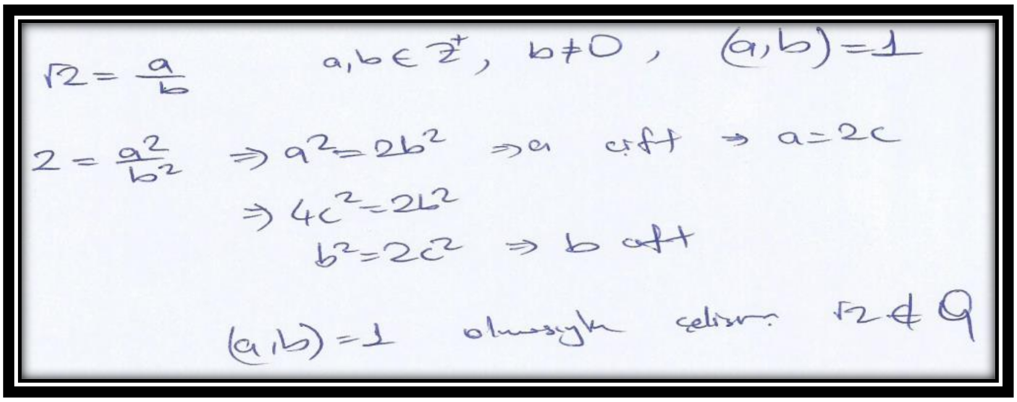


Şekil 4.110. A1'in Sorunun Çözümü İçin Vermiş Olduğu Cevap

A1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse olursa; A1 sorunun çözümü sırasında düşünmek için ekstra bir süre harcamamıştır. Soruyu okur okumaz hemen çözüm için yapılması gerekeni hızlı bir şekilde belirtmiş ve ispatın, tümdengelim tekniğinin, çelişki bulma yöntemi ile soruyu çözmüştür. Fakat daha önce $\sqrt{8}$ 'i $2\sqrt{2}$ biçiminde yazmış, dolayısıyla dolaylı ispat yaklaşımında bulunduğunu da belirtebiliriz. Dikkat çeken durum ise A1'in ilk olarak ispat sorusundan başlaması ve "*daha böyle bir yakın geldi bana*" ifadesinde bulunmasıdır. Bu durumu akademik geçmişi ve bulunduğu konumdan dolayı olduğu söylenebilir.

4.5.1.2. Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 sorulara uzunca bir süre (3:00dk) sorulara göz gezdirdikten sonra ilk olarak ispat boyutunun birinci sorusunu çözmeye başlamıştır, bu durumu "*hemen yapayım olmazsa, bildiğim şeyler olduğu için, $\sqrt{8}$ 'i $2\sqrt{2}$ olarak düşünüp, $\sqrt{2}$ 'yi bir rasyonel sayı olsun diyerek başlıyoruz*" şeklinde açıklamıştır. Açıklamasının ardından sorunun çözümünü ise Şekil 4.111. deki gibi kâğıdına yazmıştır.



Şekil 4.111. Ö1'in Sorunun Çözümünü İçin Kâğıdına Yazdığı İfade

Ö1'in çözüm esnasında kullandığı tekniği açıklamamasından dolayı ve yazmış olduğu çözümden yola çıkarak araştırmacı "b*ir çelişki buluyorsunuz yani. Çelişki bulmadan yapabilir misiniz hocam*?" sorusunu yöneltmiştir. Bu soru üzerine Ö1 bir müddet düşünmüştür, ardından "*bunun hangi aralıkta olduğunu, yaklaşık değerini tespit ederiz ki bu sonsuza kadar gider. İmkânsız*" yanıtını vermiş ve soruyu sonlandırmıştır.

Ö1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 ilk olarak ispatın birinci sorusu ile başlamıştır. "*bildiğim bir soru*" açıklamasında bulunarak hızlı bir şekilde çözümü gerçekleştirmiştir. Öncelikle $\sqrt{8}$ 'i $2\sqrt{2}$ biçiminde yazmıştır. (dolaylı ispat) ardından tümdengelim tekniğinin, çelişki bulma metodunu kullanmıştır. Ayrıca çözüm esnasında düşünmek için fazla süre kullanmamıştır.

4.5.1.3. Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu okumuş daha sonra bir müddet düşünmüştür. Ardından "$\sqrt{8}$ *hiç sevmediğim şeyler*" şeklinde açıklama yapmış ve duygularını belirtmiştir. Daha sonra Şekil 4.112. deki gibi "$\sqrt{8}$ ' $2\sqrt{2}$ *dir*." ifadesinde bulunmuştur.

Şekil 4.112. Ö2'nin $\sqrt{8}$ Sayısını $2\sqrt{2}$ Biçiminde Gösterimi

Kısa bir süre sessizce düşündükten sonra düşüncelerini "*Neydi bunlar lineer cebir miydi*." söyleminde bulunmuş ve diğer soruya geçmek istemiştir. Fakat diğer soruya geçmekten vazgeçip, çözüme devam etmiştir. Ardından "$\sqrt{8}$ *'i* $2\sqrt{2}$*'ydi rasyonel değil, nasıl ispatlayacağız."* şeklinde daha önce söylemiş olduğu ifadeyi tekrarlamış ve bir uzunca bir süre düşünmüştür. Düşüncelerini açıklaması adına araştırmacı ile aralarında aşağıda ki gibi bir diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI: *ne geliyor aklınıza hocam, yani lineer cebir dediniz güzel, buradan mı aklınıza bir şeyler geliyor.*

Ö2: *ispat dediğim zaman benim öğretmenim aklıma geliyor.*

ARAŞTIRMACI: *üniversitede ki mi?*

Ö2: *evet sürekli ispat yaptığım için üniversitede*

ARAŞTIRMACI: *oralardan* (üniversite dönemlerinden) *bir şey geliyor mu aklınıza*

Ö2: *yok hiçbir şey gelmiyor hem de, ezberlediğimiz için hep*

ARAŞTIRMACI: *peki kullanıyor musunuz hocam bu tür ispatları,*

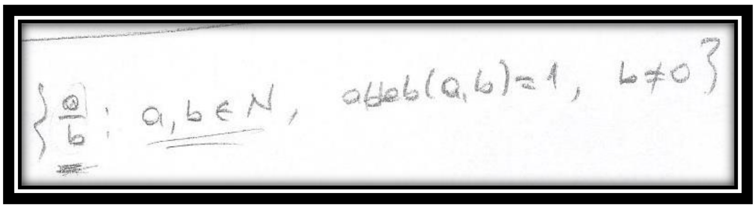
Ö2: *hayır kullanmıyoruz, çünkü sınav sisteminin getirisinden dolayı öğrencilere zaman kaybı olduğunu düşündüğümüz için. Mesela* (sınavlarda) *bu tarz sorular sorulsa, mesela şuan bizim şuan yaptığımız gibi bir sınav olsa, oturup tek tek ispatlarsınız. Ama maalesef.*

Bu diyalogdan sonra Ö2 tekrar diğer soruya geçmek istemiş ve soruyu bu şekilde sonlandırmıştır.

Ö2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö2 bu tarz soruları geçmiş yaşantısında üniversite dönemlerinden hatırladığını fakat hiç sevmediğini belirtmiştir. Ardından $\sqrt{8}$ 'i $2\sqrt{2}$ şeklinde ifade etmiş fakat rasyonel olup olmadığını gösterememiştir. Üniversite eğitiminde ise bu tarz da ki soruları ezberleyerek ispatladığını belirtmiştir. Dolayısıyla ispatın tümdengelim tekniğinde bir düşünme yaklaşımı sergilediğini söyleyemeyiz.

4.5.1.4. ÖA1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak "*$\sqrt{2}$'yi göstersem yeterli*" ifadesinde bulunmuştur. Araştırmacının "*neden*" sorusu üzerine, ÖA1 "*$2\sqrt{2}$ sonuçta $\sqrt{8}$ dediğim şey. Ha ama yeter mi ki. Hocamıza sormak lazım. Bunu öğrettiydi ama Nasıldı hadi gel hatırla şimdi. Ezberden sınav sorusu çözersen olacağı bu. Soruları ezberle git sınava oldu.*" açıklamasında bulunmuştur. Ardından sorunun çözümüne "*şimdi bir kere rasyonel sayının tanımına bakarsan a/b şeklinde yazılabilen diyoruz ama a ile b aralarında asal olmak zorunda bu arada b sıfırdan farklı olmak zorunda*" şeklinde devam etmiştir. Bu söylemini ise kağıdına Şekil 4.113 deki gibi yazmıştır.



Şekil 4.113. ÖA1'in Rasyonel Sayı Tanımını Kâğıdına İfadesi

Kâğıdına yazmış olduğu ifadeyi göstererek "B*u şekilde yazılabiliyorsa rasyonel olacak. Demek ki $\sqrt{8}$ böyle yazılamıyor.*" açıklamasında bulunmuştur. Bir müddet düşündükten sonra $\sqrt{8}$'in değerini "*$2\sqrt{2}$ yani 2 ile 3 arasına bir değer mi? yaklaşık olarak, öyle bir şey. $\sqrt{2}$, 1,6 idi sanırım 2 ile çarparsak 3,2 oluyor yok o zaman 3 ile 4 arasında bir değer.*" ifadesinde bulunmuş, yaklaşık olarak hesaplamaya çalışmıştır. Daha sonra bu çözümünden vazgeçerek tekrar yazmış olduğu rasyonel sayı kümesine dönmüştür. Bu rasyonel sayı kümesine bakarak; "*rasyonel olup olmadığını? a/b şeklin de yazılamadığını? niye yazılamıyor k? Demek ki bu şekil de yazılabilmenin de bir şartı var? Ve kök8 bunu sağlamıyor. Hmm peki madem öyle bu şekilde yazılabilmenin şartı ne. Biz ne zaman sayıları a/b şekilde yazabiliriz. Nasıl bir şey düşünürsek ki şimdi, kök8 neden rasyonel değil. (düşünüyor) şuan kümeye sadece bakıyorum.*" şeklinde düşüncelerini sesli bir biçimde dile getirmiştir. Ardından sessizce bir müddet düşünmüştür. Daha sonra araştırmacının "*aklınızdan neler geçiyor hocam, neler düşünüyorsunuz*" sorusu üzerine ÖA1 "*kendime sorduğum soru; nedir bunun kuralı, $\sqrt{8}$'in sağlamadığı kural ne, niye yazılamıyor a/b şeklinde*" cevabında bulunmuştur.

Önceden söylemiş olduğu rasyonel sayı kümesi şartının cümlelerini (a'da b'de doğal sayı olacak. Demek ki iki doğal sayının oranı şeklinde yazamayacağım ben $\sqrt{8}$. Niye?) yineleyerek ve hesap makinesi kullanarak $\sqrt{8}$ 'in irrasyonel olduğunu gösterebileceğini, aşağıda ki konuşmasında açıklamıştır.

"*Hani bir hesap makinesi olsa elimde tamam onu hallederim. Sonuçta rasyonel sayı a/b şeklinde yazılacak. Rasyonel değil de irrasyoneldir diye yola çıksak. Ee oradan nasıl yapacağız. Bunun eğer irrasyonel olduğunu söylesem rasyonel olmadığını söylemiş olurum. Oradan gitsem. İrrasyonel olabilmesi için yine böyle yazılamaması lazım diyeceğim aynı kapıya çıkacağım. Ya da devirli ondalıklı sayı şeklinde yazılmaması lazım diyeceğim. Demek ki $\sqrt{8}$'i eğer gerçekten hesap makinesi ile hesaplayabilirsek belli bir devir kuralına göre gitmiyor sonucu. Ama şimdi hesap makinesi kullanmadan bunu nasıl söyleyeceğim*."

Bu açıklamasının ardından "*hesap makinem varsa her türlü söylerim. Belli bir devir kuralına göre gitmiyor. Tamam, o zaman da irrasyoneldir, irrasyonelse de rasyonel olma şansı yok.*" ifadesinde bulunmuş ve soruyu sonlandırmıştır.

ÖA1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse olursa; ÖA1 problemi okuduktan sonra $\sqrt{8}$ 'i rasyonel olup olmadığını gösterebilmek için $\sqrt{2}$'nin rasyonel olup olmadığını göstermenin yeterli olacağını söylemiştir. Ardından $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunun gösterimini geçmiş yıllarda ki sınavlarından hatırladığını fakat o dönemlerde gösterim şeklini ezberlediğini şuan ise hatırlayamadığını belirtmiştir. Buna rağmen çözüm için geçmiş bilgilerini hatırlamak için uğraşmamıştır. Daha sonra Rasyonel sayıların tanım kümesini yazmış, soruyu çözmek için çaba sarf etmiştir. Fakat rasyonel sayı kümesi üzerinden sorunun çözümü için uğraşmadan önce $\sqrt{2}$ sayısının yaklaşık değerini söylemiş ve bu değerden yola çıkarak $\sqrt{8}$'in değerini açıklamıştır. Bir müddet sonra ise bu düşüncesinden vazgeçmiş ve yazmış olduğu rasyonel sayı kümesine bakarak bazı varsayımlarda bulunmuş, kendine sorular sormuştur, bu sorular sırası ile

- *rasyonel olup olmadığını?*
- *a/b şeklin de yazılamadığını?*
- *niye yazılamıyor ki?*
- *Demek ki bu şekil de yazılabilmenin de bir şartı var?*
- $\sqrt{8}$ *bunu sağlamıyor. Hmm peki madem öyle bu şekilde yazılabilmenin şartı ne?*

- *Biz ne zaman sayıları a/b şekilde yazabiliriz?*
- $\sqrt{8}$ *neden rasyonel değil? Şeklindedir.*

Bu tip soruların aynı zamanda düşünmenin temelini oluşturan sorular olduğunu söyleyebiliriz.

ÖA1 Bu şekilde düşüncelerini sorguladıktan sonra sesiz bir şekilde uzunca bir süre düşünmüştür. Araştırmacının "*ne düşünüyorsunuz*" sorusu üzerine rasyonel sayı tanım kümesini açıklayarak yinelemiştir. Ardından farklı bir yaklaşım ile hesap makinesini kullanarak $\sqrt{8}$'in değerini hesaplayabileceğini ve bu değerin devirli ondalıklı olmadığından dolayı rasyonel sayı olmayıp, irrasyonel sayıdır şeklinde ifade edebileceğini söyleyerek soruyu sonlandırmıştır.

Görüldüğü üzere, ÖA1 diğer katılımcılara göre bu soruya en uzun süreyi (8:08) ayıran kişi olmuştur. ÖA1 burada önce doğrudan ispat tekniği ile sorunun çözümüne yaklaşmıştır. Uzunca bir süre düşüncelerini dile getirdikten sonra çelişki bulma tekniği düşünce yapısının başlangıç aşamasında ki gibi hareket etse de matematiksel olarak ispatı gerçekleştirememiştir.

4.5.1.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak "*bıktım bu sorulardan*" şeklinde serzenişte bulunmuştur. Araştırmacının "*neden böyle dediniz hocam?*" sorusu üzerine ÖA2 "*sürekli aynı sorular denk geliyor çünkü. Bunu analiz-1 de yapıyorduk ya p/q diyorduk oradan yapıyorduk yani.*" biçiminde gülerek cevap vermiştir. Daha sonra "*Analiz-1 hiç aklıma gelmiyor*" diyerek düşünmeye başlamıştır. Uzunca bir süre düşündükten sonra araştırmacı ÖA2'ye "*p/q' yu $\sqrt{8}$ için mi yapıyordun.*" şeklinde soru yöneltmiştir. ÖA2 "*hayır $\sqrt{2}$ için yapıyordum. Yanlış mı hatırlıyorum. $\sqrt{8}$'de zaten $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu bulurum. Zaten onun tam sayı ile çarpımı yine irrasyonel olur.*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bu açıklamasını kâğıda dökmesi istendiğinde ise sadece Şekil 4.114. deki ifadeyi yazmıştır.

Şekil 4.114. ÖA2'nin $\sqrt{8}$ Sayısını $2\sqrt{2}$ Biçiminde Gösterimi

Daha sonra "*şimdi işte, p'ler q'lar vardı. p/q şeklinde yazılabiliyordu, yazılamıyordu*" şeklinde ifadede bulunmuştur. Ardından araştırmacı ile aralarında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI: *niye öyle diyoruz p/q*

ÖA2: *bilmem ki işte, bize de öyle üniversite birinci sınıfta hocamız öyle gösterdi bizde öyle öğrendik.*

ARAŞTIRMACI: *yani, ezbere dayanarak mı söylüyorsun bunları yoksa mantıken, bir şeyler bildiğin için mi?*

Diyalog sonrası ÖA2 rasyonel sayının ne demek olduğunu "*şimdi rasyonel sayı ne demek. Ondalıklı şekilde yazılabilen demek, mesela 1/2 rasyonel sayımı? Evet, 0,5 şeklinde de yazılabilir. Yani ondalıklı halinde de yazılabilir. Peki, bu köklerin her birinin gerçek değeri var mı? Mesela $\sqrt{2}$ 1,7 mi 1,3 mi öyle bir şeye denk geliyordu? Ama şey devirli mi devirsiz mi? ….*" şeklinde düşüncelerini ifade ederek sorgulamıştır. Ardından "*Nasıl ifade edeceğimi bilmiyorum yani, dediğim gibi bize Analiz-1 de p/q denildi, orada gördüğünüz yere… Ezberlemişim zaten*" diyerek soruyu sonlandırmıştır.

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 problemi gördükten sonra ilk olarak tepkisi "*bıktım bu tip sorulardan*" şeklinde olmuştur ve bu tarzda ki sorularla üniversite eğitimi süresince çok sık karşılaştığını söylemiştir. Bu süreç boyunca bu tarz sorular ile karşılaşmasına rağmen çözüme yaklaşım şekli incelendiğinde ezbere bir mantıkla hareket ettiği söylenebilir.

Ayrıca problemin sonunda bu tarz soruları sınavlar boyunca hep ezberleyerek sınavlara girmiş olduğunu da belirtmiştir. Buna rağmen ÖA2 sorunun çözümüne ilk olarak "$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, *$\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu bulurum, dolayısıyla $\sqrt{8}$'inde irrasyonel olduğunu gösteririm"* şeklinde yaklaşımı ile ispatın tümdengelim yaklaşımının doğrudan ispat tekniğini kullandığı söylenebilir. Fakat $\sqrt{2}$ irrasyonel olduğunu matematiksel yöntemler ile ispatlayamamıştır. Dolayısı ile beklenilen çelişki bulma tekniğini gerçekleştirememiştir. Buna rağmen rasyonel sayının diğer bir tanımı olan ondalıklı gösterim şeklinde yine doğrudan ispat tekniği ile düşünmüş problemi çözmeye çalışmıştır. Fakat bu sefer var olan devirli ve devirli olmayan ondalıklı sayı arasında ikilem yaşayarak, "*nasıl ifade edeceğimi bilemiyorum*" söyleminde bulunmuş ve problemi sonlandırmıştır.

4.5.1.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulguların Karşılaştırılması ve Yorum

İspatın birinci sorusundan beklentimiz katılımcıların tümdengelim tekniğinin doğrudan ve çelişki bulma metodu ile çözüme yaklaşmalarıdır.

Katılımcılardan A1 ve Ö1 ispat tekniğini net bir şekilde sorunun çözümü için kullanmışlardır. Ö2, ÖA1 ve ÖA2 ise doğrudan ispat tekniği ile soruya yaklaşmışlar (işlem bilgisi) fakat çelişki bulma metodunu kullanarak soruyu sonlandıramamışlardır. Burada dikkat çeken durum ise A1 ve Ö1'in lisansüstü eğitim almış olmaları ve problemin sonucuna ulaşmaları olmuştur.

Bunun yanı sıra tüm katılımcılar $\sqrt{8}$'in $2\sqrt{2}$'ye eşit olması ve $\sqrt{2}'nin$ irrasyonel olduğunun gösterilmesi durumunda $\sqrt{8}'$ inde irrasyonel olacağı düşüncesinde olmasıdır. Buda ispatın tümdengelim tekniğinin doğrudan ispat metodudur.

Ayrıca Ö2, ÖA1 ve ÖA2'ni soruyu okuduktan sonra ilk olarak sorunun çözümü ile ilgili değil soru hakkında duygu ve düşüncelerini ifade etmeleri ise dikkat çekmiştir.

Tüm katılımcılar probleme bir yerlerden aşina olduklarını aşağıda ki sorunun başlarında söyledikleri cümlelerle belirtmişlerdir.

A1: Daha böyle bir yakın geldi bana

Ö1: hemen yapayım, bildiğim şeyler olduğu için…

Ö2: $\sqrt{8}$ *hiç sevmediğim şeyler… Neydi bunlar lineer cebir miydi?*

ÖA1: Hocamıza sormak lazım. Bunu öğrettiydi ama Nasıldı hadi gel hatırla şimdi. Ezberden sınav sorusu çözersen olacağı bu. Soruları ezberle git sınava oldu.

ÖA2: Bıktım bu sorulardan, Bunu analiz-1 de yapıyorduk…

Özellikle A1 ve Ö1 in veri toplama kâğıdında ki ilk çözdüğü sorunun bu soru olması ise ayrı bir dikkat çekici durumdur. Bunun yanı sıra diğer katılımcılar ise en son olarak ispat sorularını çözmüşlerdir.

Başka bir dikkat çeken durum ÖA1 ve ÖA2 $\sqrt{2}'$nin yaklaşık değerini söyleyerek doğrudan ispat metodu ile $\sqrt{8}'$in yaklaşık değerini, hesaplamaya çalışmaları olmuştur.

Ö2, ÖA1 ve ÖA2 çözüm sırasında "ezber" kelimesini kullanarak, düşünme boyutlarını arka plana attıkları görülmektedir.

Ö2; *şuan aklıma hiçbir şey gelmiyor,* ***<u>ezberlediğimiz</u>*** *için hep*

ÖA1; ***Ezberden*** *sınav sorusu çözersen olacağı bu. Soruları* ***ezberle*** *git sınava oldu.*

ÖA2; *Nasıl ifade edeceğimi bilmiyorum yani, dediğim gibi bize analiz-1 de p/q denildi orada gördüğünüz yere…* ***ezberlemişim*** *zaten*

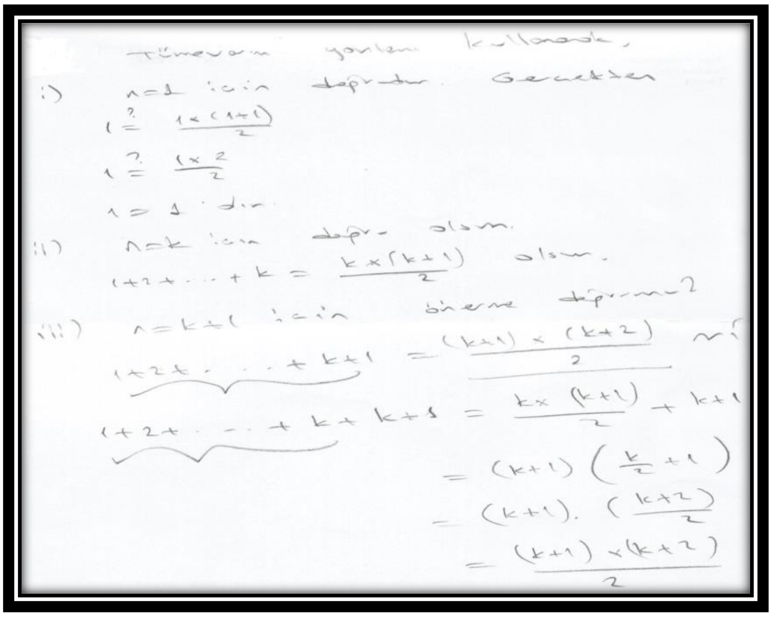
ÖA1 sorunun çözümünde bulunamasa da ispatın yanı sıra düşünmenin temel sorularını kendine sorduğu görülmektedir.

4.5.2. İspat Boyutundan İkinci Sorusundan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

İspata yönelik yöneltilen ikinci soru ” $1+2+3+\ldots+n = \frac{n\,x\,(n+1)}{2}$ *olduğunu gösteriniz?*” şeklindedir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır. Ayrıca bu soru ile katılımcıların ispat boyutunun tümdengelim yönteminin, çelişki bulma tekniği ile sorunun çözümüne yaklaşmaları beklenmektedir

4.5.2.1. A1’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1’in veri toplama kâğıdında ki problemler arasında ilk sıralarda çözdüğü sorulardan bir tanesi de bu soru olmuştur. A1 problemi gördükten sonra ilk olarak “*Tümevarım yöntemiyle soruyu çözebiliriz*” söyleminde bulunmuştur. Ardından tümevarım ispat tekniği aşamasını açıklamış cevap kâğıdına Şekil 4.115 deki gibi çözümünü gerçekleştirmiş ve soruyu sonlandırmıştır.


tümevarım yöntemi kullanarak,

i) n=1 için doğrudur. Gerçekten

$1 \overset{?}{=} \frac{1\times(1+1)}{2}$

$1 \overset{?}{=} \frac{1\times 2}{2}$

$1 = 1$ dir.

ii) n=k için doğru olsun.

$1+2+\ldots+k = \frac{k\times(k+1)}{2}$ olsun.

iii) n=k+1 için önerme doğru mu?

$\underbrace{1+2+\ldots}+k+1 = \frac{(k+1)\times(k+2)}{2}$ mi?

$\underbrace{1+2+\ldots+k}+k+1 = \frac{k\times(k+1)}{2}+k+1$

$= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$

$= (k+1).\left(\frac{k+2}{2}\right)$

$= \frac{(k+1)\times(k+2)}{2}$

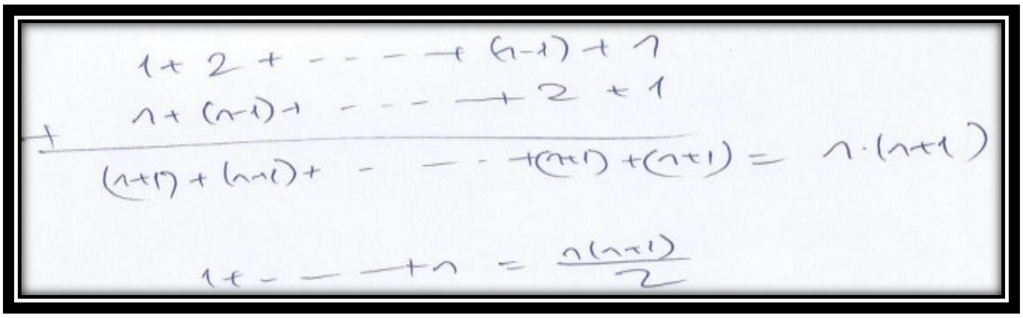
Şekil 4.115. A1’in İspatın 2. Sorusuna Verdiği Cevap

A1'den elde edilen bulgular özetlenecek olursa görüldüğü gibi; A1 bu soru A1'in çözüm kâğıdına ikinci sırada çözdüğü soru olmuştur. Ayrıca diğer sorular arasında en kısa süreyi bu soruya ayırmış olması da dikkat çekicidir. Sorunun çözümünde ise kullanmış olduğu düşünme şekli ve tekniği beklenilen şekilde (tümevarım tekniği) gerçekleştiği görülmektedir.

4.5.2.2. Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 soruyu okuduktan sonra geçmiş yaşantılarında ve öğrencilerine bu tarz soruları çözdüğünü, çözüm şeklini ise Şekil 4.116. daki gibi gerçekleştirdiğini aşağıda ki diyalog da açıklamıştır.

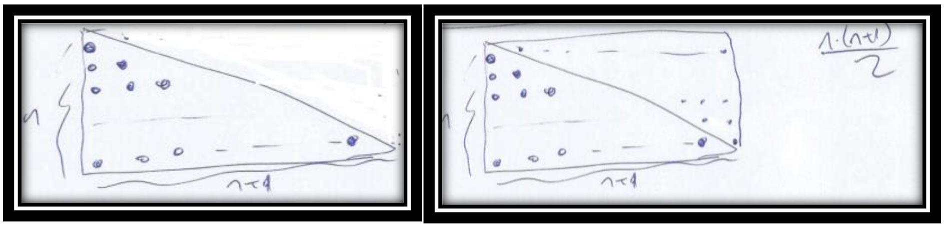
"*Valla ben şöyle anlatıyorum bunu, bir önceki terim bu bide bunu tersten yazıyorum çocuğa, sonra bunları taraf tarafa topla diyorum her birinden (n+1) gelecek Burada kaç tane terim var? Zaten n-tane olduğu belli bunların toplamı n.(n+1) olur, 2'sinin toplamı bu olduğuna göre bir tanesinin toplamı da işte n.(n+1)/2 dir diyorum*"



Şekil 4.116. Ö1'in İspatın 2. Sorusuna Yaklaşımı

Bu çözümün ardından araştırmacı "*peki faklı yollarda gösterimi var mıdır hocam*" sorusunu yöneltmiştir. Bu soru üzerine Ö1 bir müddet düşündükten sonra "*dikdörtgenle de ispatı vardı*" ifadesi ile ve cevap kâğıdına Şekil 4.117. deki gibi sırasıyla çizimde bulunmuş ve soruyu sonlandırmıştır.

"*şimdi buraya bir top yerleştirdim, buraya 2 top, buraya 3 top yerleştirdim.* (Şekil 4.117.) *Devam ettim buraya da n-tane top yerleştirdim. Bunu aynı şekilde diğer tarafa da yerleştiririm.*(Şekil 4.117.) *Burada oluşan dikdörtgende ki nokta sayısı burada n-tane şurada n+1 tane nokta var. Dikdörtgenin alanı buda bunun yarısı kadar. Aynı şey geliyor zaten.*"

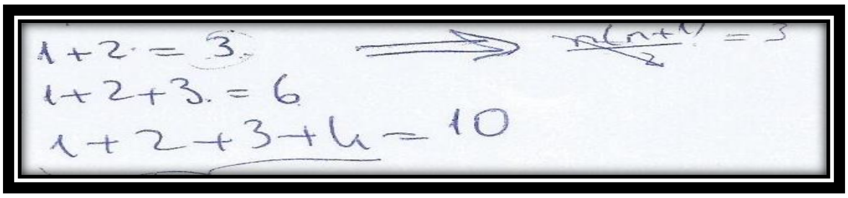


Şekil 4.117. Ö1'in Çözüme Şekil İle Yaklaşması

Ö1'den elde edilen bulgular ve yorumlar su şekilde ifade edilebilir; Ö1 soruyu okuduktan sonra bu tarz soruları öğrencilerine çözdüğünü söylemiştir. Dolayısıyla bir düşünme aşaması tam olarak sergilediğini söyleyemeyebiliriz. Fakat çözüm sırasında kullanmış olduğu ispat tekniği beklenildiği gibi tümevarım şekline olmamıştır. Sorunun çözümünde özelleştirme yaklaşımı sergileyerek belirli şekil (dikdörtgen şekli) ve bu soruya özel pratik çözüm yöntemlerini kullandığı dikkat çekmektedir.

4.5.2.3. Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu okuduktan sonra bu kuralı "*şöyle göstermiş olabilirler*" söyleminde bulunmuş ve cevap kâğıdına Şekil 4.118. deki gibi n=2,3 ve 4 değerlerini hesaplamıştır.



Şekil 4.118. Ö2'nin Sorunun Çözümü İçin Özel Değerler Kullanması

Daha sonra yazmış olduğu ifadeyi "*Çünkü 1 den 2 ye kadar "k" diyorsun "n.(n+1)/2" en son gittiğin noktaya göre çalışıyorsun. 1 den başladığı için… eğer başlamasaydı bir öncekini çıkarıyorsun. Mesela son sayıyı 3 olarak aldım, diyorum ki 3x4=12, bu sonucu 2'ye böleyim, eşitliğin diğer tarafını da tek tek toplayayım, sonuç zaten değişmez diyorum*" şekline açıklamada bulunmuş çözümünü sonlandırmıştır.

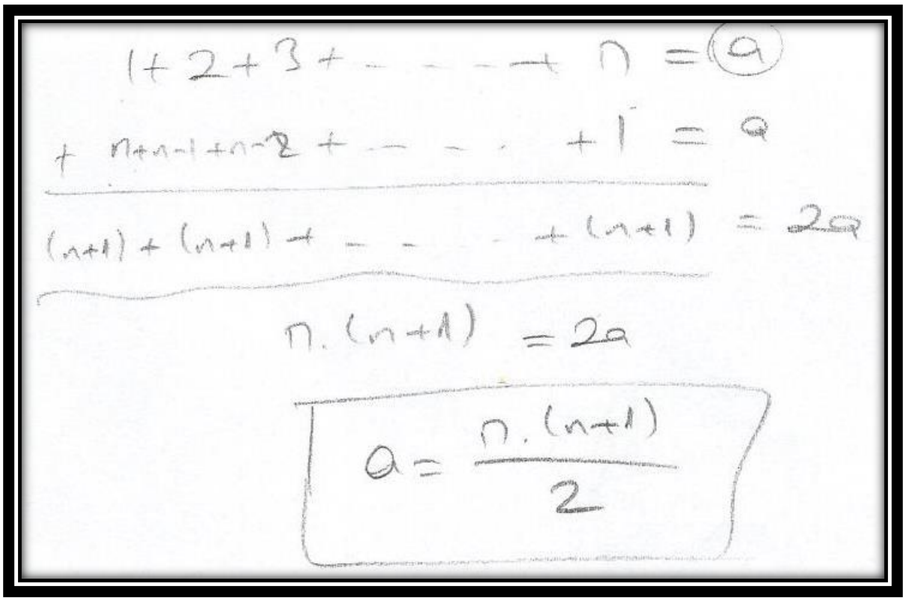
Ö2'den elde edilen bulgular özetlenecek olursa görüldüğü gibi; Ö2'nin problemi gösterim şekli incelendiğinde beklenilen tümevarım tekniği ile soruya yaklaşmamıştır. n=2,3,4 değerlerini alarak var olan kural üzerinde gösterimlerde bulunmuştur. Şüphesiz özel değerler sonucu genel kurallara ulaşılır ve tümevarım tekniğinin ilk aşamaları özelleştirme boyutu yakından ilişkilidir. Buradan yola çıkarak Ö2'nin tümevarım tekniğinin ilk aşamalarını kullanmış fakat sonuca ulaşamamıştır. Soruda ki kuralı sadece özel değerler için doğru olduğunun gösteriminde bulunduğu söylenebilir.

4.5.2.4. ÖA1’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okuduktan sonra bu tarz bir kural hakkında önceden bir hikaye duyduğunu belirtmiş ve “*bunu ilk 50 sayının toplamı olarak düşünen kişi kimdi?* “ şeklinde kendine soru yöneltmiştir. Daha sonra bu hikâyeden kısaca aşağıda ki şekilde bahsetmiştir.

“bir öğrenciye *ilk 50 tane sayıyı toplamasını istemiş sanırım bir öğretmeni. 50 tane sayıyı tersten geri yazıp, alt alta toplayıp ondan sonra hızlıca işlem bulan biri vardı. Bu matematikçi kimdi hatırlayamadım şimdi ama onun yöntemini kullansak*.”

Anlatmış olduğu hikâyenin ardından cevap kâğıdına Şekil 4.119. daki gibi yazmıştır.



Şekil 4.119. ÖA1’in Sorunun Çözümü İçin Vermiş Olduğu Cevap

ÖA1’in bu yazdıkları doğrultusunda araştırmacı ile aralarında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiş ve soruyu sonlandırmıştır.

***ARAŞTIRMACI**: (gülümseyerek) sen şanslısın bu hikâye sana anlatılmış. Anlatılmasa*

***ÖA1**: bayağı bir uğraşırdım herhalde o olurdu. Bunu genel bir şekilde bu şekilde düşüneceğimi hiç zannetmiyorum. O zaman da zaten öğrenci bayağı bir zekiymiş demiştik biz arkadaşlarla.*

***ARAŞTIRMACI**: başka bir şey gelmiyor mu aklına.*

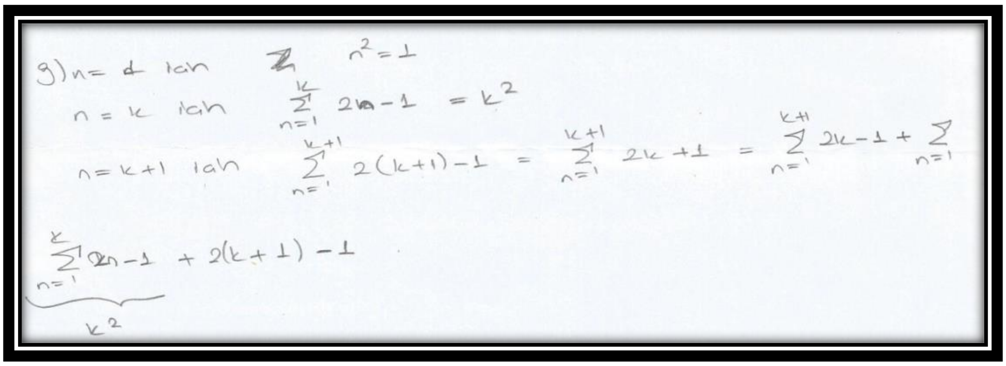
***ÖA1**: bu hikâyeden yola çıkarak bunu söyleye bilirim. Bundan daha kısada bir yol yoktur bence. Ne güzel bulmuş işte bence fazla zorlamamak lazım. Ne güzel bulunmuş bir şey var burada*

ÖA1'den elde edilen bulgular ve yorumlar su şekilde ifade edilebilir; ÖA1 bu tarz bir sorunun ilk 50 özel değeri için daha önce bir yerde gördüğünü ifade etmiştir, bunun üzerine duymuş olduğu hikâyeden bahsetmiştir. Ardından bu hikâyeden yola çıkarak Şekil 4.119 deki gibi cevap kâğıdına soruyu çözmüştür. Dikkat çeken durum ise beklenilenin aksine yani tümevarım metodundan farklı olarak çözümü gerçekleştirmiştir.

4.5.2.5. ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

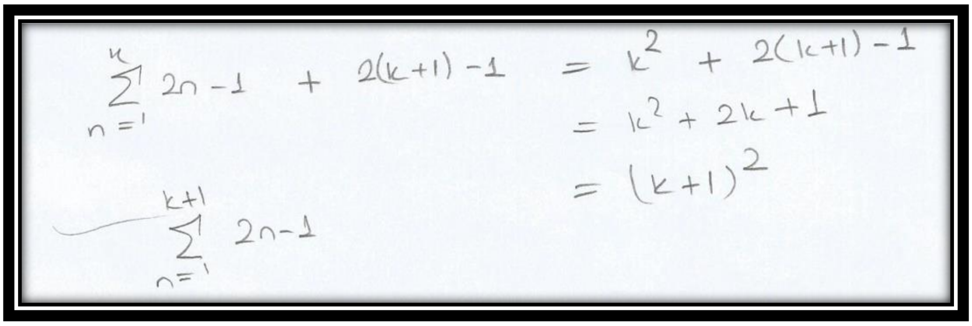
ÖA2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak "*Tümevarımdan yapayım*" şeklinde ifadede bulunmuştur. Ardından tümevarım tekniğinin aşamalarını Şekil 4.120. ve Şekil 4.121. deki gibi kâğıdına açıklayarak yazmış ve soruyu sonlandırmıştır.

***"**n=1 için (yazıyor) evet toplamını soruyu. n=1 için bir tane zaten 1 oluyor. N=k için n=1 den "k" ya kadar (kâğıda yazıyor) n=k+1 için doğru mudur bakalım (işlemleri kağıda yazıyor)*



Şekil 4.120. ÖA2'nin Tümevarım Yöntemini Kullanması

(işlemleri yaparken n=k için ile n=k+1 için iki denklem arasında ilişki arıyor) eee tümevarım yapmayı unutmuşum. Şimdi bunun öyle olduğunu kabul ettim. K+1 eklemem gerekiyor sadece. Ha her iki tarafına da şey ekliyorum demi. (yazarak) Toplamı da böyle oluyor. Yani göstermiş olduk.



Şekil 4.121. ÖA1'in Tümevarım Gösterimini Tamamlaması

ÖA2'den elde edilen bulgular ve yorumlar su şekilde ifade edilebilir; ÖA2 soruyu okuduktan hemen sonra ilk olarak sorunun çözümüne tümevarım tekniği ile yaklaşması gerektiğini belirtmiştir. Ardından başarılı bir şekilde çözümü gerçekleştirdiği görülmektedir.

4.5.2.6. Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulgu ve Yorumların Karşılaştırılması

Katılımcıların ispat boyutunun ikinci sorusuna verdikleri cevaplar toplu bir şekilde incelendiğinde Tablo 4.17. deki biçimde karşımıza çıkmaktadır.

Tablo 4.17. Tüm Katılımcıların İspatın 2. Sorusuna Yaklaşımları

Katılımcılar	Kullanılan Yaklaşımı
A1	Tümevarım
Ö1	Özelleştirme - Genelleme
Ö2	Özelleştirme
ÖA1	Özelleştirme - Genelleme
ÖA2	Tümevarım

A1 ve ÖA2 beklenilen teknik olan tümevarım tekniği ile sorununun çözümünü gerçekleştirirken, Ö1, Ö2 ve ÖA1 ise beklenilenin aksine farklı şekillerde gösterimde bulunarak ve özelleştirme boyutu yaklaşımı sergilemişlerdir. Buradan akademik geçmişten uzaklaştıkça ispat tekniklerinden bir azalma söz konusu olduğu söylenebilir.

Ayrıca var olan sınav sisteminde ispat teknikleri şeklinde öğrencilere sorular yöneltilmemesinden dolayı MEB'de çalışan öğretmenlerimiz bu tarz bir düşünme yaklaşımını öğrencilerine aktarmadıkları dile getirdiklerini görülmektedir. Aynı zamanda Ö1 ve Ö2'nin ispat tekniği yaklaşımı kullanmadan sorunun çözümüne yaklaşmasından da görülmektedir.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Araştırmanın bu bölümünde alt problemlere ait bulgular yardımıyla ulaşılan sonuçlar ve bu sonuçlara yönelik önerilere yer verilmektedir.

5.1.Araştırma Sorularından Elde Edilen Bulgular İle İlgili Sonuç ve Tartışma

Akademisyen, öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinin incelendiği bu çalışmada ilk olarak tüm süreç ele alındığında yalnızca Ö1 tüm soruları önce okuyup (3dk 01 sn) sonra çözmeye geçtiği, en fazla sürede ÖA1'in (50 dk 57 sn) çözmeye çalışırken en kısa sürede ise Ö2 (25 dk 15 sn) çözmeye çalıştığı görülmüştür. Her soru ayrı ayrı incelendiğinde; A1 hiçbir soruyu en kısa zamanda çözmemiştir. Ö1 ve Ö2 ise hiçbir soruda en uzun sürede çözmemişlerdir. Bu bulgu yapılan meslek ile sorulara ayrılan süre arasında bir ilişki olduğu şeklinde yorumlanabilir. Buna paralel olarak ÖA1 dört soruda, A1 üç soruda ve ÖA2 bir soruda en uzun sürede çözen katılımcı olmuşlardır. Dolayısıyla bu üç katılımcı da üniversite ortamında bulunmaktadır. Tersine Ö1 üç soruda Ö2; ÖA1 iki soruda ve ÖA2 bir soruda en kısa zamanda çözen katılımcı olmuştur. En kısa sürede çoğunlukla (5 soruda) öğretmenler tarafından olmuştur. Matematiksel düşünmenin boyutlarına göre incelenirse; Ö2 sadece varsayımda bulunma ile ilgili olarak yöneltilen her iki soruda en kısa sürede çözen katılımcı olmuştur. Diğer boyutlarda ise ne en uzun neden en kısa sürede çözen kişi olmuştur. A1 ispat, Ö1 varsayımda bulunma, Ö2 özelleştirme ve genelleme, ispat; ÖA2 ise genelleme, varsayımda bulunma ile ilgili olarak yöneltilen her iki soruda da ne en kısa nede en uzun çözen katılımcı olmuştur. Arslan ve Yıldız (2010) tarafından yapılan çalışmada da öğrencilerin özelleştirme ile ilgili soruları kısa sürede yaptıkları gözlenmiştir.

A1 ile Ö1 dışındaki katılımcılar verilen sıra ile soruları çözmüşlerdir. Ö1 soruları cevaplandırmaya başlamadan önce yaklaşık üç dakika soruların tümüne göz gezdirmiştir. "*Bildiklerimden başlayayım o zaman*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Ö1 varsayımda bulunma ve özelleştirme sorularını art arda çözerken, A1 ise önce ispat sorularını cevaplandırmaya başlamıştır. Bu ise A1 in ispat ile çok daha fazla uğraştığından kendisine yakın olan sorulara yöneldiği şeklinde yorumlanabilir. Bu yorumu da bu soruları daha az zamanda çözmüş olması desteklemektedir.

Özelleştirme boyutuna yönelik sorulan ilk soruda A1, ÖA1 ve ÖA2 n için bir genelleme yaparken Ö1 ve Ö2, n için bir kural ifade etmemişlerdir. Her iki öğretmen de 10. adım sorulduğu için direk olarak sorulan adıma yoğunlaşmışlar ve sonucu söylemişlerdir. 2. soruda ise ÖA1 ve Ö1 cebirsel olarak ifade etmiş özelleştirme yapmamıştır. Ö2 de sadece özelleştirme yapmış cebirsel ifade hiçbir şekilde kullanmamıştır. A1 ile ÖA2 ise benzer şekillerde çözmeye çalışmışlardır. Özel bir örnekten yola çıkarak 11 ile bölünebilme kuralını uygulayıp cebirsel ifade ile sonuca ulaşmışlardır. Sonuç olarak özelleştirme boyutundaki düşünme yaklaşımları ve sergiledikleri davranışlar göz önüne alındığında ilk soruda akademisyen ile öğretmen adayları benzerlik gösterirken, 2. soruda bir öğretmen adayı ile akademisyen aynı şekilde çözmeye çalışmışlardır. Öğretmenler ise ilk soruda benzerlik gösterirken diğer soruda farklı çözmüşlerdir.

Diğer taraftan özelleştirmenin ikinci sorusunda önceden var olan (bilinen) bir genellemenin (genel kuralın) katılımcıların düşünme şeklini etkilediği, beklenilen düşünme yapısından uzaklaştırdığı sonucuna varılmıştır. Mason vd. (2010) çalışmalarında bu durumdan bahsedilmektedir. Bunun dışında öğretmen ve öğretmen adaylarımız diğer sorularda beklenilen düşünme süreçlerinin yanı sıra özelleştirmeyi de kullandıkları görülmüştür. Bu durum matematiksel düşünmenin tüm boyutlarını birbirlerinden bağımsız olarak incelenmesinin zor olduğunu da doğrular niteliktedir. Dikkat çeken başka bir durum ise ilk problemde katılımcıların özelleştirme sorularını cevaplandırırken vermiş oldukları örnekler sistematik bir şekildeyken, ikinci problemde örneklerin çoğu kuralının açıklamasını yapmak için seçilmiş rastgele örneklerden ibaret olmasıdır. Oysaki özelleştirmede başarılı sonuca ulaşmadaki en büyük etken örnekleri sistematik bir şekilde vermektir. Bu durum Arslan ve Yıldız (2010), öğrencilerin sistematik bir yol izlediği ve verilen sayılar arasındaki ilişkiyi belirleyip verilmeyen sayıları doğru buldukları görülmektedir bulgusu ile tam olarak benzememektedir. Dolayısıyla özelleştirme aşaması sırasında sistematik özel değerler ve bu özel değerlerin sayısı arttıkça doğru sonuca ulaşma arasında bir ilişkiden de söz edilebilir. (A1 1. Soruda 2 özel değer alarak yanlış sonuca ulaşırken, diğer katılımcılar daha fazla özel değerler ile doğru sonuca ulaşmışlardır) .Bu sonuç Mason vd., (2010) çalışmasıyla uyum içerisindedir.

Katılımcıların vermiş oldukları cevaplar ele alındığında, genellikle özelleştirmeyi sorunun çözümünün yanı sıra problemi anlamlandırabilmek için kullandıkları görülmüştür. Özellikle ikinci problemde bu durum daha belirgin seviyededir. Genelleştirilmiş ve kuralları bilinen problem ve soru kalıpları öğretmen adaylarının farklı düşünme davranışında bulunmalarını sınırlamaktadır. Oysaki kurallar birer genelleme ve genellemeler ise özelleştirmelerin ürünüdür. Bu durum Mason (2010) çalışması ile paralellik göstermektedir. Ayrıca "öğrencilere çözümü, işleme bağlı sıradan problemler verip bunları çözmelerini istemek yerine onlara geliştirebilecekleri çeşitli problemler verilmesi öğrencilerin Matematiksel Düşünmelerini teşvik etmeyi sağlar (Dunlap, 2001)" görüşünü destekler niteliktedir.

Genelleme de katılımcıların hepsi soruların çözümüne benzer şekillerde yaklaşmışlardır fakat öğretmen adaylarımızın sonuca ulaşır iken öğretmenler ve akademisyene göre zorlandıkları gözlemlenmiştir. Akademisyen ve yüksek lisans eğitimi görmüş deneyimli öğretmen genelleme sorularının çözümü sırasında "*kural bulacağız, genelleme yapacağız*" şeklinde ifadeler kullanmışlardır. Alkan ve Bukova Güzel'in (2005) bireylerin yaşam biçimi ve öğrenim derecelerine göre değişik düzeyde MD'ye sahip olabilecekleri yani MD'nin hem bireyin gelişimi hem de aldığı eğitim ile doğrudan ilişkili olduğu görüşünü desteklemektedir.

Genelleme yaklaşımına bütün olarak bakıldığına ise katılımcıların almış oldukları eğitim seviyesi düşünmeleri arasında bir doğru orantı söz konusudur. Genelleme düşünme yaklaşımı sergilerken başlangıç aşamasında zorlanmayıp, kuralı genelleme açısında çok az sıkıntı çekmiş olsalar da katılımcıların çoğunun bir sonuca ulaştığı görülmektedir. Bu durum tam olarak Alkan ve Bukova Güzel (2005) çalışmasıyla benzerlik göstermese de, biraz olsun öğretmen adaylarının sıkıntı çektiğini konusunda ortak sonuca ulaşılmıştır. Ayrıca katılımcıların çözüm sırasında sözel ifadelerden yanı sıra matematiksel gösterimlerde de bulundukları ve çok zorlanmadıkları görülmüştür. Bu durum Arslan ve Yıldız (2010) çalışması ile farklılık göstermektedir. Bu farklılığın alının eğitim ve deneyim ile ilişkili olduğu söylenebilir.

Varsayımda bulunma ile ilgili olarak katılımcılarının çoğunun varsayımlarını sözel şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Fakat akademisyenimiz olaya farklı bir matematiksel varsayımla yaklaştığı da dikkat çekmiştir. Bu durum katılımcılarımızın varsayımda bulunma konusunda düşünme aşaması olarak olumlu fakat sonuca ulaşma açısında yeterli olmadıklarını göstermektedir. Bu durum Arslan ve Yıldız (2010), Uğurel ve Moralı (2010), Keskin, vd., (2013) çalışmaları ile benzerlik göstermektedir.

İspat da akademisyenin diğer katılımcılara göre gerek ispat sorularında gerekse diğer sorularda ispat tekniklerini daha sık kullandığı açık bir şekilde görülmektedir. Bunun yanı sıra yüksek lisans mezunu öğretmen de ispat da tümdengelim yaklaşımını beklenilen ispat tekniğini kullanmıştır. Diğer öğretmen adayı ve öğretmenimiz ise geçmişten akıllarında kalan ve şimdiki ispat ile ilgili düşüncelerini dile getirmekle yetinmişler bir sonuca ulaşamamışlardır. Bu durum ise Yeşildere, vd., (2006) ile Özer ve Arıkan'ın (2002) çalışmaları ile uyum içerisindedir. İspat da öğretmen adayları ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmeden ezberleme yoluna gittikleri bu durumu da zamanında girmiş oldukları sınavlarda hep ezber yöntemi ile hareket ettiklerini sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum Doruk ve Kaplan (2013) çalışması ile benzer bir sonuç içermektedir. Ayrıca birden fazla çözümün var olduğu problemde katılımcıların, bir ve birkaç cevap vererek esnek düşünme becerilerini yeterli düzeyde kullanamadıkları görülmüştür.

5.2 Öneriler

Matematiksel düşünme süreçlerinin incelendiği bu çalışmada elde edilen bulgular ışığında yapılacak çalışmalar için rehber olması amacıyla sunulacak öneriler aşağıdaki gibidir.

Öğrencilere ve öğretmen adaylarına yönelik olarak gerek ders içi gerekse ders dışı etkinliklerle matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat boyutlarına yönelik çalışmalar yapılmalıdır.

Sınıf içinde farklı düşünme yaklaşımları vurgulanarak ve örneklerle desteklenerek matematiksel düşünme süreci desteklenebilir.

Bu çalışmadan elde edilen bulgular, öğretmen adayı, öğretmen ve akademisyen ile sınırlı olduğundan öğrencilerinde dahil edildiği çalışmalar yapılıp sonuçların karşılaştırılması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

Ağaç, G. (2013). 8. sınıf öğrencilerinin matematiğe yönelik; problem çözme, soyut düşünme, inanç, öğrenilmiş çaresizlik puanlarının bazı değişkenler açısından incelenmesi ve aralarındaki ilişki. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Alkan, H. ve Altun, M. (1998). Matematik öğretimi. Ankara: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Akkan, Y. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması, *Education*, 37(165).

Alkan, H. ve Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221-236.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' ınteraction with proof: Some ımplications form mathematics education. *International Journal of Mathmetaical Education in Science and Technology*, 31 (6), 869-890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.

Altuğ, F.B. (1995). Gençlerde anne-baba tutumunun irdeleyici düşünme ve özdeğer duygusu gelişmesine etkileri. Uzmanlık tezi, Selçuk Üniversitesi Tıp Fakültesi, Konya

Amit, M., ve Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented prealgebra students. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 40, 111- 129.

Arda, T.B. (2011). Alternatif düşünme stratejilerinin desteklenmesi programının okul öncesi çocuklarının sosyal becerileri üzerinde etkililiğinin değerlendirilmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir.

Ardahan, A. (1990). Matematik öğretimi. Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 4.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010) 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35 (156).

Artar, M. (1993). Okul öncesi çocukta serbest oyunun ıraksak düşünce becerisine etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü: Ankara.

Atalay, V. (2006). Soy kütüğü geleneksel düşünme yollarına karşı çıkış. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Atasoy, B., Kadayıfçı, H. ve Akkuş, H. (2007). Öğrencilerin çizimlerinden ve açıklamalarından yaratıcı düşüncelerinin ortaya konulması (çizimler ve açıklamalar yoluyla yaratıcı düşünceler). *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 5(4), 679-700.

Atmaca, İ.L. (2007). Türk kamu yönetiminde stratejik düşünme ve reform çalışmalarının stratejik düşünce bakış açısıyla incelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmit.

Aydın M. ve Köğce D. (2008). Öğretmen adaylarının denklem ve fonksiyon kavramlarına ilişkin algıları. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* 5.1, Van.

Bacakoğlu, H. (2002). Görmeyen çocuklarda benlik kavramı ve rasyonel düşüncenin gelişiminde rasyonel duygusal eğitimin etkisi. Yayımlanmamış Doktora Tezi. İstanbul.

Baki, A. (2008). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies In Mathematics* 18, 147-146.

Balacheff, N. (1988a). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics'in d. pimm, mathematics, tecahers and children. Hodder ve Stoughton, London. 216-230.

Balacheff, N. (1988b). Thèse:une ètude des processus de preuve en mathèmatique chez les élèves de collège'. Universite Joseph Fourier, Grenoble.

Balta, N. (2009). Kritik düşünme gerektiren fizik soruları ve bunların öğrencilerin başarısına etkisi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Baştürk, S. (2005, Mart). Üniversite matematik bölümü öğrencilerinin Türkiye'deki matematik eğitimi hakkındaki çağrışımları: Lise, dershane ve üniversite boyutunda. Sözel bildiri, Fen ve Matematik Öğretmenleri Sempozyumu, İstanbul.

Baykul, Y. (2009). İlköğretim de matematik öğretimi 6.-8. sınıflar için. Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Bekdemir, M. (2012). Öğretmen Adaylarının Çember ve Daire Konularında Kavram ve İşlem Bilgilerinin Değerlendirilmesi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 43, 83-95

Baş, S., Erbaş, A. K. ve Çetinkaya, B. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. *Eğitim ve Bilim*,36 (159), 41-55.

Berkant, H. G. (2007). Dokuzuncu sınıf biyoloji dersinde yapıcı öğrenme temelli hazırlanan anlamlı nedensel düşünmeye dayalı öğretimin öğrencilerin anlamlı nedensel düşünmelerine, akademik başarılarına, kalıcılığa ve günlük yaşam davranışlarına etkisi. Yayınlanmamış doktora tezi Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Berkant, H. G. (2009). Öğrencilerin anlamlı nedensel düşünme becerilerinin akademik başarı, okuduğunu anlama ve cinsiyet açısından incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri,* 9 (3), 1125-1165.

Biber, A. Ç., ve Argun, Z. (2012). Matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavram bilgilerini kullanarak yürüttükleri bazı genelleme ve soyutlamalar. K*astamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 655-668.

Blitzer, R. (2003), Thinking Mathematically, New Jersey 07458, Prentice Hall.

Barca, M. (2002). Stratejik açı: Stratejik düşünme düzeyi, tarzı ve gerekliliği. *Stratejik Boyutuyla Modern Yönetim Yaklaşımları*, 9-26.

Bloch, E. D. , (2011). Proof and fundamentals a first course in abstract mathametics. Second Edition, San Francisco Usa. 47-53 P.

Bukova Güzel, E. (2008). Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımına dayalı matematik öğreniminin bilimi tanıma, yaşam ile ilişki kurma, öğrenmeyi öğrenme, sorgulayarak ve iletişim kurarak öğrenme üzerindeki etkisinin belirlenmesi. Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi. 8(1), 135-149.

Bulut, M. (2009). İşbirliğine dayalı yapılandırmacı öğrenme ortamlarında kullanılan bilgisayar cebir sistemlerinin matematiksel düşünme, öğrenci başarısına ve tutumuna etkisi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Busbridge, J. ve Özçelik, D. A. (1997). İlköğretim matematik öğretimi. YÖK/Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi, Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi, Ankara: Ajans-Türk Basın ve Basım A.Ş.

Bütün, M. (2005). İlköğretim matematik öğretmenlerinin alan eğitimi bilgilerinin nitelikleri üzerine bir çalışma. Yayınlanmamış Yüksek Lisans tezi, Karadeniz Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Trabzon.

Cai, J. (1997). Beyond computation and correctness: Contributions of open-ended tasks in examining U.S. and Chinese students mathematical performance. *Educational Measurement: Issues and Practice,* 16(1), 5–11.

Cai, J. (2000). Understanding and representing the arithmetic averaging algorithm: an analysis and comparison of us and chinese students' responses. *International Journal of Mathematical Education In Science and Technology*, 31(6), 839-855.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study. I*nternational Journal of Mathematical Education In Science and Technology*, 34(5), 719-737.

Cevizci, A. (1999). Felsefe terimleri sözlüğü. İstanbul: Paradigma.

Chua, B. L. ve Hoyles, C. (2010). Teacher and student choices of generalising strategies: a tale of two views?. 5th East Asia Regional Conference On Mathematics Education, Tokyo.

Clarke, D. (2001). Understanding, assessing, and developing young children's mathematical thinking. Research As A Powerful Tool For Professional Growth 24th Annual Merga Conference, Sydney, July 2001.

Cooper, H. ve Dilek, D. (2007). Türkiye ve İngiltere'de ilköğretim öğrencilerinin tarihsel sorgulama süreçleri üzerine karşılaştırmalı bir çalışma: Empatik, eleştirel ve yaratıcı düşünme. Web: http://acikerisim.sinop.edu.tr. 6 Haziran 2014 tarihinde alınmıştır.

Çayır, M. Y. (2013). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme başarılarının ve kullandıkları genelleme stratejilerinin belirlenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Çepni, S. (2001). Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş. Erol Ofset, Trabzon.

Day, M. V. (2015). An ıntroduction to proofs and the mathematical vernacular. Blacksburg, Virginia 24061. 17-20 p.

Demir, C. (2005). Romantik ilişkilerin bireysel belirleyicileri: nesne ilişkileri ve psikolojik düşünmeye yatkınlık. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Demircioğlu, H. (2008). Matematik öğretmen adaylarının üstbilişsel davranışlarının gelişimine yönelik tasarlanan eğitim durumlarının etkililiği. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Eğitim Bilimler Enstitüsü. Gazi Üniversitesi. Ankara.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2 (1), 231-240.

Dunlap, J. (2001). Mathematical Thinking. Web: http://Ctzalehamn-Mathematical thinking. 10 Nisan 2013'de alınmıştır.

Ergün, M. (2005). Bilimsel Araştırma Yöntemleri, Nitel Araştırma Web: http://www.egitim.aku.edu.tr/nitelarastirma.ppt. 9 Eylül 2014'de alınmıştır

Ersoy, E. (2012). Probleme dayalı öğrenme sürecinde üst düzey bilişsel düşünme becerileri ve duyuşsal kazanımlardaki değişim. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Ersoy, Y. (1991). Matematik öğretimi. Ankara: Anadolu Üniversitesi Yayını.

Fawcett, H. P. (1938). The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof. (Nctm Year Book 1938). New York: Teachers' College, Columbia University.

Gençmehmetoğlu, R. (2009). “8. sınıf Türkiye Cumhuriyeti inkılâp tarihi ve Atatürkçülük dersinde yer alan olgu, kavram ve genellemelerin öğretimi ve önemi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Erzurum.

Glesne, C. ve Peskin, A. (1992). Becoming qualitative researchhers: An introduction. White Plains, NY: Longman.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.

Greenwood J. J. (1993), Teaching and Assessing Mathematical Power and Mathematical Thinking, The Aritmetic Teacher, Nov 1993, 41,3: ProQuest Education Complete pg.144.

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. Kastamonu Eğitim Dergisi, 20(2), 571-590.

Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.

Gündoğdu, M. (2001). Üniversite öğrencilerinin bilimsel düşünme becerilerinin yordanması. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Güngör Akıncı, B. A. (2011). İlköğretim sosyal bilgiler öğretiminde temsilî resim kullanımıyla tarihsel düşünme becerilerinin geliştirilmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*. 30, 319.

Hacısalihoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A. (2003). Matematik öğretimi: matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. Hingham, Ma: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. ve Jahnke, H. N. (1996). Proof And Proving In Ed. A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C. Laborde, International Handbook Of Mathematics Education (Pp. 877-908). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Henderson, P.B., Baldwin, D., Dasigi, V., Dupras, M., Fritz, S. J., Ginat, D., vd. (2001). Striving for Mathematical Thinking. ITiCSE 2000 Working Group Report, SIGCSE Bulletin - Inroads, Vol. 33, No. 4, (Dec 2001) s. 114-124. Erişim tarihi: 30.03.2010

Henderson, P. B., Fritz, S. J., Hamer, J., Hitcher, L., Marion, B., Riedesel, C. ve Scharf, C. (2002). Materials development in support of mathematical thinking. ITiCSE 2002 working group report ACM SIGCSE Bulletin Vol. 35 , Is. 2 (June 2003) s. 185 – 190. Web: http://portal.acm.org/citation.cfm?id=783001. 9 Eylül 2014'de alınmıştır.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. educational studies in mathematics, 24(4), 389-399. Web: http://Link.Springer.Com/Article/10.1007 /Bf01273372. 9 Eylül 2014'de alınmıştır.

İlhan, M. (2011). İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin çeşitli değişkenler açısından incelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dicle Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Diyarbakır.

İmamoğlu, Y. (2010). Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi.

Yayınlanmamış Doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Janet, A., Wilson, K. and Bills, L. (2003). Generalising the context and generalising the calculation. International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 2, 9-16.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55-85.

Kaput, J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 265–281.

Karagöz, Y. (2011). Olumlu düşünme eğitim programının ergenlerin geleceğine yönelik iyimserlik, depresyon ve bilişsel çarpıtma düzeylerine etkisinin incelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Karakoca, A. (2011). Altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözmede matematiksel düşünmeyi kullanma durumları. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Karasar, N. (2006). Bilimsel Arastırma Yöntemi. Ankara: Nobel.

Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazi değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends In Arts, Sports & Science Education (IJTASE*), 1(2), 134-141.

Keskin, M., Akbaba Dağ, S. ve Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences*. 33-50.

Kılıç, D. (2009). Öğrencilerin genetik kavramları anlama düzeyleri ile mantıksal düşünme yetenekleri ve öğrenme yaklaşımları arasındaki ilişki. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kılıç, F. (2007). Mikro düzeyde içerik düzenleme stratejilerinin kavramların, genellemelerin öğrenilmesine ve bilişsel esnekliğe etkisi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Kitcher, P. (1984). The nature of mathematical knowledge. New York: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61-88.

Köğce, D.(2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Electronic Turkish Studies* 8.12.

Krulik, S. ve Rudnick, J. A. (1999). Innovative tasks to improve critical and creative thinking skills. Developing Mathematical Reasoning İn Grades K-12, 61, 138.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in School Children, University of Chicago Press, Chicago.

Kurt, M. (2002). İngilizce okuma becerilerinin kazandırılmasında derinlemesine düşünme stratejisinin uygulanması. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kuru, H. (2012). Ortaöğretim 9. sınıf öğrencilerinin analojik düşünme durumlarının saptanması ve biyoloji öğretiminde analoji kullanımının öğrenci başarısına etkisi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Lane,C.P.(2011) Mathematical Thinking and the Process of Specializing. **Unpublished** doctoral dissertation. Department of Curriculum and Instruction of the College of EducationUniversity of Cincinnati

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking And Learning*, 7(3), 231-258

Lannin, J. K., Barker, D. D. And Townsend, B. E. (2006). Recurcive and expicit rules: how can we build student algebraic understanding?" *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 299-317.

Larsen, S. & Zandieh, M. (2007). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*. 67 (3) 205-216.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. N. Bednarz (Ed.), Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching içinde (87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *The Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.

Mubark, M. (2005). Mathematical Thinking and Mathematics Achievement of Students in the Year 11 Scientific Stream in Jordan. Unpublished PhD thesis, The University of Newcastle, Australia

Mason, J., Burton, L. ve Stacey, K. (2010). Thinking Mathematically. Second Edition.

Martin, T. S., Mccrone, S. M. S., Bower, M. L. W. ve Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, *Educational Studies in Mathematics,* 60: 95–124.

Mathematical Thinking The Definitions of Burton (1984) and Drayfus (1984) http://www.cst.cmich.edu/users/manou1a/761.mathematicalthinking.doc.
4 Kasım 2013'de alınmıştır.

McCrone, S. M. S ve Martin, T. S. (2004). Assessing High School Stuedents' Understanding of Geometric Proof, Canadian *Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 4(2), 223-242.

Merdin, S. (2010). Lise öğrencilerinin düşünme stilleri. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Aydın.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lover secondary school mathematics. Educational Studies İn Mathematics. 41, 47-68. Kulwer Academic Publishers. Printed İn The Netherlands.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim Ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2005); Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10 ve 11. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara

Milli Eğitim Bakanlığı Talim Ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2007); İlköğretim Matematik Dersi (6,7 Ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim Ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2009); İlköğretim Matematik Dersi (6,7 Ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim Ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013); Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 Ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.

Olkun, S. ve Toluk, Z. (2007). İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi. Ankara: Anı Yayıncılık.

Olkun, S. ve Altun, A. (2003). İlköğretim öğrencilerinin bilgisayar deneyimleri ile uzamsal düşünme ve geometri başarıları arasındaki ilişki. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *2*(4), 86-91.

Olkun, S., Şahin, Ö., Akkurt, Z., Dikkartın, F. T. ve Gülbağcı, H. (2009). Modelleme yoluyla problem çözme ve genelleme: ilköğretim öğrencileriyle bir çalışma. *Eğitim ve Bilim*, 34(151), 65-73.

Orton, J. (1997). Matchsticks, Pattern and Generalisation. *Education* 3-13,25(1), 61-65.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2000).Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *Educational Studies in Mathematics,* 41, 47-68.

Öztürk, Ç.Ç. (2013). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilimsel süreç, eleştirel düşünme ve yaratıcı düşünme becerileri arasındaki ilişkinin incelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Özyürek, M.(2004). Bireyselleştirilmiş eğitim programı temelleri ve geliştirilmesi. Ankara: Kök Yayıncılık.

Palabıyık, U. (2010). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Pape, S. J., Bell, C. V. and Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning: a teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies İn Mathematics*, 53(3), 179-202.

Patton, M. Q. (2014). Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri. (Çev. M. Bütün ve S. B. Demir) Pegem Akademi Yayınları. Ankara.

Pilten, P. 2008, Üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerine etkisi. Yayınlanmamış Doktora tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Polya G. (1964), How to solve ıt anew aspects of mathematical method. Londra, England: Penguin Books.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. (eds: J. L. C. S. Alatorre, M. Sa´iz and A. Me´ndez), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter (Vol. 1),* Mexico: Me´rida, 2-21.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. Philosophia Mathematica-Series 3, 7(1), 5-41.

Reigeluth, C. M. (1999). What is instructional design theory and how is it changing? In C. M. Reigeluth (Ed.), Instructional-Design Theories and Models (Vol. 2). Hillsdale, NJ: Lawrence-Erlbaum Associates

Sasman, M. C., Linchevski, L. and Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children’s generalisation thinking processes. *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for research in Mathematics and Science Education*, Harare, Zimbabwe, 406-415.

Seçer, Z.Ş. (2003). Yoğun düşünme (reflection) eğitimi programının çocukların ahlaki yargılarına etkisinin incelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Konya.

Semerci, Ç. (2007). Öğretmen ve öğretmen adayları için yansıtıcı düşünme eğilimi (YANDE) ölçeğinin geliştirilmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*,*7*(3), 729-754.

Sevgen, B. (2002). Matematiksel düşünce yapısı ve gelişimi. V. Ulusal Fen Bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, 16-18 Eylül 2002, Ankara.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers’ knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 145-166.

Sternberg, R. J. (1993). Sternberg triarchic abilities test. Unpublished Test.

Sternberg, R. J. (1994a). Allowing for thinking styles. *Educational Leadership*, 52, (3), 36-40.

Sternberg, R. J. (1994b). Thinking styles: Theory and assessment at the ınterface between intelligence and personality. In R. J. Sternberg and P. Ruzgs (Eds), Personality and Intelligence. (P. 105-127) Cambridge University Press: New York.

Sternberg, R. J. (1997). Thinking styles. Cambridge Universty Press: New York.

Ströker E. (2005). Bilim kuramına Giriş., (Çev. Doğan Özlem), İstanbul: İnkılap Kitabevi Yayınları.

Stylianides, A. J. (2007). “The Notion of Proof in The Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1-20.

Şahin, S. (2000). Okul başarısızlığı olan ilköğretim çağı çocuklarının kişisel düşünme modelleri ile bilişsel süreçleri arasındaki ilişki. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Şen, N. (2010). İlköğretim altıncı sınıf matematik dersinde bilgisayar destekli sezgisel düşünme kontrollü olasılık öğretiminin öğrencilerin akademik başarı ve sezgisel düşünme düzeylerine etkisi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Şenaslan, E.O. (2010). Ortaöğretim coğrafya dersinde deprem konusunda coğrafi düşünme becerilerinin ölçülmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara

Stake, R. E. (1995). The Art of Case Study Research, London: Sage.

Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In Pme Conference (Vol. 1, Pp. 1-61). The Program Commıttee Of The 18th Pme Conference.

Tall, D. (2002). “Advanced Mathematical Thinking. Usa: Kluwer Academic Publishers.

Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Education,* 36(160).

Taşdemir, A. (2008). Matematiksel düşünme becerilerinin ilköğretim öğrencilerinin fen ve teknoloji dersindeki akademik başarıları, problem çözme becerileri ve tutumları üzerine etkileri. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Tekin-İftar, E. ve Kırcaali-İftar, G. (2004). Özel eğitimde yanlışsız öğretim yöntemleri. (2. Baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Topkaya, H. (2013). Matematiksel mantık, ispat teknikleri, fibonacci sayısı, pisagor teoremi ispatı. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Tosun, Ü. ve Karadağ, E. (2008). Yapılandırmacı düşünme envanterinin Türkçe’ye uyarlanması dil geçerliği ve psikometrik incelemesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 8*(1), 225-264

Tuna, A. (2011). Trigonometri öğretiminde 5e öğrenme döngüsü modelinin öğrencilerin matematiksel düşünme ve akademik başarılarına etkisi. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Tunalı, S. (2010). Somut İşlemsel Dönemdeki Üstün Ve Normal Zekâlı Çocukların Somut Düşünme Yeteneklerinin İncelenmesi Ve Raven Standart İlerleyen Matrisler Testi' Nin 8- 9 Yas Çocukları Üzerinde Geçerlilik, Güvenilirlik, Ön Norm Çalışması. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Tuncay, H. A. ve Demircioğlu, H. (2014, 11-14 Eylül). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel düşünme becerilerinin incelenmesi. XI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunuldu, 507-508. Adana.

Tural, H. (2005). İlköğretim matematik öğretiminde oyun ve etkinliklerle öğretimin erişi ve tutuma etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Türk Dil Kurumu (2014), www.tdk.gov.tr adresinden 14 Ocak 2014'de alınmıştır.

Türk Dil Kurumu (2015), www.tdk.gov.tr adresinden 10 Haziran 2015'de alınmıştır.

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135-154.

Ulubay, M. (2002) Bilişsel Dilbilim ve İdeoloji Çözümlemesi: Zihnin Kategorileri Ve Metaforik Düşünme Üzerindeki İdeolojik Etkisi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Umay, A. (1992). Matematiksel düşünmede süreci ve sonucu yoklayan testler arasında bir karşılaştırma. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Umay, A. (1996). Matematik Eğitimi ve Ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi* 12.1, 145-149.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.

Umay, A. (2007). Eski arkadaşımız okul matematiğinin yeni yüzü. Ankara: Aydan Web Tesisleri.

Yazgan, A.D. (2007). İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin formal operasyonel düşünme becerileri ile fen ve teknoloji dersi başarıları arasındaki ilişkinin incelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Çanakkale.

Yeşildere, S. (2006). Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Yeşildere, S., Moralı, S., Uğurel, I. ve Türnüklü, E. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. Kastamonu Eğitim Dergisi, 14 (1), 147,160

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Fakültesi* Dergisi, 40(1), 181-213.

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2010). Matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi. Ondokuz *Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi*, 29(1), 125-149

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi, 30, 141-153.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2000). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık (2. Baskı).

Yıldırım, C. (2012). Matematiksel Düşünme. İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zaskis, R. & Liljedahil, P. (2002). Generalization Of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking And Algebraic Notation. *Educational Studies İn Mathema*tics, 49, 379-402.

Zeytun, A. Ş., Çetinkaya, B. ve Erbaş, A. K. (2010). Matematik Öğretmenlerinin Kovaryasyonel Düşünme Düzeyleri ve Öğrencilerinin Kovaryasyonel Düşünme Becerilerine İlişkin Tahminleri. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *10*(3).

Zhang, L. F. (2001a). Do styles of thinking matter among hong komg secondary school students?. Personality And ındividual Differeces, 31(3), 289-301.

Zhang, L. F. (2001b). Do thinking styles contribute to academic achievement beyond self-rated abilities?. The Journal of Psychology, 135(6), 621-637.

Zhang, L. F. (2004a). Do university students thinking styles matter in their preferred theaching approaches?. Personality And Individual Differences, 37, 1551-1564.

Zhang, L. F. (2004b). Revisiting the predictivive power of thinking styles for academic performance. The Journal of Psychology, 138, 351-370.

Zhang, L. F. (2004c). Thinking styles: University students' preferred teaching styles and their conceptions of effective teachers. The Journal of Psychology, 138 (3), 233-252.

Zhang, L. F. (2005a). Does teaching for a balanced use of thinking styles styles enhance student's achievement?. Personalitiy and Individual Differences, 38 (5), 1135-1147.

Zhang, L. F. (2005b). Validating the theıry of mental self-goverment ın a non-academic setting. Personalitiy and Individual Differences, 38 (8), 1915-1925.

EKLER LİSTESİ

EK-1: Katılımcılara Uygulanan Veri Toplama Kâğıdı

Sevgili katılımcı,
Bu araştırmanın amacı, matematiksel düşünme süreçlerini incelemektir. Bu amaca yönelik olarak aşağıda verilen problemlerde, düşünme şeklinizi ortaya koymanız ve problemi çözme sürecinizi ayrıntılarıyla açıklamanız beklenmektedir. Cevaplarınız da şekiller kullanabilirsiniz. Problemlerin tamamını cevaplamanız ve açıklamanız çok önemlidir. Ayıracağınız zaman ve araştırmaya katkılarınız için teşekkür ederim.

Cinsiyetiniz: ( ) Kız ( ) Erkek

Ösym yerleşme puanınız : ….

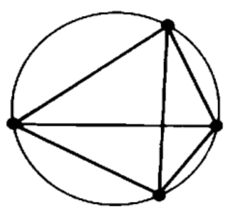
Lisans GNO'nuz : ….

SORULAR

1-) Bir kâğıdı uçlarından tutup sağ ucunu sol ucunun üstüne getirip bastırın, ikiye katlansın. Aynı kâğıt üzerinde iki kez aynı işlemi tekrarlayın. Kaç tane bükülme izi oluşmuştur? Bu işlemi artarda 10 kez yaparsanız toplamda kaç bükülme izi oluşmuş olur?

2-) 12321 şeklinde tersten okunuşu da aynı olan sayılara palindromik sayılar denir. Dört basamaklı tüm palindromik sayıların 11 ile bölünebilir olduğu sizce doğrumudur? Açıklayınız.

3-) Bir çember etrafına "n" nokta yerleştiriniz ve her çift noktayı düz çizgilerle birleştiriniz. Çemberin bölünebildiği en fazla bölgenin sayısı nedir? Örneğin aşağıdaki şekilde 4 nokta varken 8 olası bölge oluşur



4-) n ϵ N olmak üzere (n5) şeklinde sonu 5 ile biten sayıların karelerini hesaplayabilir misiniz?

5-) Bir bisiklet şekil deki gibi 6 inç genişliğindeki ıslak boyalı bir şeritten geçiyor. Bir süre düz gittikten sonra lastiklere yapışan boyanın yola bıraktığı izlere baktığınız da sizce sonuç ne olur?

6-) Aynı anda hem saçınızı hem ayakkabınızı görebildiğiniz en kısa duvar aynasının boyu nedir?

7-) $\sqrt{8}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayabilir misiniz?

8-) 1+2+3+…+n = $\frac{n\,(n+1)}{2}$ olduğunu gösteriniz?