T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

YOL CEBİRLERİ VE MONOMİYAL İDEALLER

Yüksek Lisans Tezi

ECEM TUĞÇE CESUR

İSTANBUL, 2016

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK

YOL CEBİRLERİ VE MONOMİYAL İDEALLER

Yüksek Lisans Tezi

ECEM TUĞÇE CESUR

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Atabey KAYGUN

İSTANBUL, 2016

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

Tezin Adı : Yol Cebirleri ve Monomiyal İdealler
Öğrencinin Adı Soyadı : Ecem Tuğçe CESUR
Tez Savunma Tarihi : 08-01-2016

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç. Dr. Nafiz ARICA
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI
Program Koordinatörü

Bu tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli bulunmuştur.

Jüri Üyeleri	İmzalar
Tez Danışmanı	
Doç. Dr. Atabey KAYGUN	....
Üye	
Doç. Dr. Müge KANUNİ	
ER	....
Üye	
Yard.. Doç. Nigar TUNCER	....

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken yardımlarını ve desteğini benden hiç bir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Atabey KAYGUN' a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim. Hayatım boyunca yanımda olan sevgili aileme sonsuz destekleri için çok teşekkür ederim.

İstanbul, 2016

Ecem Tuğçe CESUR

ÖZET

YOL CEBİRLERİ VE MONOMİYAL İDEALLER

CESUR, Ecem Tuğçe

Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Atabey Kaygun

Ocak 2016, 57 sayfa

Bu tezde yol cebirleri ve onların monomiyal idealleri ele alınmıştır. Çizgeler kombinatorik nesneler olup birçok uygulamaları vardır. Yol cebirleri çizgelerden elde edildikleri için bu kombinatorik yapıların bir çok özelliklerini kendilerine taşırlar. Bu çalışmada önce bir çizgedeki tüm yolların oluşturduğu poset ve kafes yapılarını inceledik. Ardından bu analizi çizgedeki yolların posetindeki ideallerin kümesine uyguladık. Bu analizleri yol cebirleri ve bunların (cebirsel) ideallerine de taşıdık. Bu çalışmanın sonunda bir çizgenin poset idealleri kafesi ile ve yol cebirlerinin monomiyal idealler kümesi arasında bir kafes izomorfizması olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Çizge, Yol Cebirleri, Poset İdeal, Kafes , Monomiyal idealler .

ABSTRACT

PATH ALGEBRA AND MONOMİAL İDEALS

CESUR, Ecem Tuğçe

Applied Mathematics Graduate Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Atabey Kaygun

Ocak 2016, 57 page

In this thesis, we are going to investigate path algebras and their monomial ideals. Graphs are combinatorial objects with many applications. Path algebras are obtained from graphs, and therefore, carry some of the nice combinatorial structures they inherit from graphs. We investigate the poset and lattice structures on the set of all paths of a given graph. Then we repeat the same analysis on the set of order ideals of the poset of paths. We do a similar study for the path algebras and their (algebraic) ideals. We show at the end that there is a poset and lattice isomorphism between the set of order ideals and the set of monomial ideals of a path algebra.

Keywords: Graphs, Path Algebra, Order İdeal, Lattice, Monomial İdeals.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

$\cong$	: İzomorfizm
$\Rightarrow$	: Gerektirmenin ispatı
$\Leftarrow$	: Yeterliliğin ispatı
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter koşul
$A \subseteq B$	: A, B nin alt kümesi
$A \cap B$	: A ve B kümelerinin kesişimi
$A \cup B$	: A ve B kümelerinin birleşimi
A x B	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
A[x,y]	: İki değişkenli polinom halkası
A[x]	: Tek değişkenli polinom halkası
$A[x_1,...,x_n]$	: n –değişkenli polinom halkası
b | a	: b, a yı böler
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
Dim (k)	: k nın krull boyutu
I(A)	: Poset ideal kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}_m$	: Tam sayıların mod m kalan sınıfları kümesi
ϕ	: Boş Küme

1 GİRİŞ

Bu tez soyut cebir üzerine yapılmış bir çalışmadır. Tezin temel problemi poset idealler kafesi ile yol cebirlerinin monomiyal idealleri kümesi arasında bir kafes izomorfizması olduğunun gösterilmesidir.

Bu çalışmada ilk olarak poset ve kafes yapıları incelendi ve ardından ideallerinden bahsedildi. Bu yapıların incelenme sebebi kafesler ve posetler arasındaki ilişkiyi anlayabilmekti. Daha sonra çizge kavramına giriş yapıldı, tanımlara ve örneklere yer verildikten sonra çizgelerin yol posetlerinden bahsedildi. İdealler arasındaki ilişkiyi göstermek istenildiğinden halkalar ve idealleri konusuna özellikle konuyla ilişkili yerlere değinildi. Halkalar konusundaki bölüm artinyen ve nötheryen halkaların tanımlar ve ilgili teoremlerle bitirildi. Öklid bölme halkaları, grobner bazı ve krull boyutu idealler hakkında yol gösterici olduğu için bunlarla ilgili önemli tanım, teorem ve lemmalara değinildi. Genel amaç monomiyal türden cebirsel ideallerin yapısını kavrayabilmek olduğu için, cebirler ve halkalar arasında ilişkiye değinilip cebir kavramı açıklandı. Asıl konu yol cebirlerinin idealleri olduğu için yol cebirleri hakkındaki tanım, teorem ve lemmaları ayrıntılı bir şekilde verildi. Daha sonra idealler ve monomiyal idealleri tanımlanıp çeşitli örnekler verildikten sonra asıl istenilen problemin çözümüne ulaşıldı.

Tezde yer alan bütün örnekler ve teorem ispatları açıkça yapıldığı için tez Türkçe literatür anlamında yol cebirleri ve idealleri konusunda ayrıntılı bir referans olacaktır. Konu az çalışılan bir konu olması Türkçe ve uluslararası literatürde geniş olarak incelenmediği için verimli bir çalışma olmuştur.

2 LİTERATÜR ÖZETİ

Ortaya koyduğumuz problem literatürde özellikle üzerinde durulmuş bir konu değildir. Türkçe literatür bu konuda eksik olsa da yabancı literatürde kısmi sıralı kümeler, kafesler, yol cebirleri ya da monomiyal idealler üzerinde ayrı ayrı yapılmış çalışmalar mevcuttur. 2009 yılında Jing (Jane) He ve Adam Van Tuyl'un "Yol İdealleri Ağacının Cebirsel Özellikleri" (Algebraic Properties Of The Path Ideal Of A Tree) adlı çalışması yol idealleri, monomiyal idealler ve ideal boyutları konusunda benzer bir çalışmadır. Ardından 2015 yılında M.C Iovanov un üzerinde çalıştığı "Tam Yol Cebirleri ve Rasyonel Modülleri" (Complete Path Algebras and Rational Modules) adlı çalışmasında yol cebirlerine değinmiştir. Yine 2015 yılında Ali Alilooee "Monomiyal İdeallerin Cebirsel Özellikleri" (Algebraic Properties Of Monomial Ideals) çalışmasında bu tezde olduğu gibi yol idealleri, çizgeler ve monomiyal ideallere değinmiştir.

3 POSETLER VE KAFESLER

3.1 KISMİ SIRALI KÜMELER (POSETLER)

3.1.1 Tanımlar ve Örnekler

Tanım 3.1.1. A kümesinde bir $\leqslant$ bağıntısı tanımlansın. Sözü edilen bağıntı yansıma (reflexive), ters simetrik (anti-symmetric) ve geçişlilik (transitive) özelliklerini sağlıyorsa bu kümeleye kısmi sıralı küme (poset) denir.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayılar kümesinde $x \leqslant y$ bağıntısını x elemanı y elemanını böler şeklinde tanımlayalım. Sözü edilen bağıntının yansıma, ters simetrik ve geçişkenlik özelliklerini sağladığını gösterelim.

1. Yansıma özelliği için $x \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $x \leqslant x$ bölme algoritmasına göre $x = x \cdot k$ anlamına gelir. Bu eşitliğin sağlanması için $k = 1$ olmak zorundadır.

2. Ters simetrik özelliği için $x, y \in \mathbb{Z}^+$ olduğunda $x \leqslant y$ ve $y \leqslant x$ olsun. Tanım gereği $x \leqslant y$ olduğunda $y = x \cdot k$ ve $y \leqslant x$ olduğunda $x = y \cdot k$ olur. Bu iki eşitliğin aynı anda sağlanmasının tek şartı $k = 1$ ya da başka bir deyişle $x = y$ olması gerekir.

3. Geçişkenlik özelliği için $x \leqslant y$ ve $y \leqslant z$ olsun. Tanım gereği $x \leqslant y$ için $y = x \cdot k$ ve $y \leqslant z$ için $z = y \cdot k$ olur. Bu iki eşitliği ele alalım. $z = y \cdot k$ eşitliğinde y yerine $y = x \cdot k$ yazarsak $z = y \cdot k = (x \cdot k).k = x \cdot k_1$ olur. Yani $z = x \cdot k_1$ olur. Bu da $x|z$ anlamına gelir. Yani $x \leqslant z$ dir.

Yukarıda da görüldüğü gibi $x \leqslant y$ için yansıma ve geçişlilik özelliklerinden dolayı $x < y$ ya da $x = y$ şartlarından birini sağlamak zorundadır.

Lemma 3.1.3. *$x < x$ olacak şekilde x ler bulunmayan bir poseti ele alalım. Bu durumda $x < y$ ve $y < z$ iken $x < z$ dir.*

İspat: $x < x$ olacak şekilde x ler bulunmayan bir poset ele alalım. Tanım gereği $x < y$ x,y nin içindedir anlamına gelir. Yine benzer şekilde $y < z$ de y, z nin içindedir anlamına gelir. Bu durumda x, y nin; y de z nin içinde olduğuna göre x, z nin içindedir. Bu da $x < z$ demektir. □

Lemma 3.1.4. *Eğer* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant x_1$ *ise* $x_1 = x_2 = ... = x_n$ *dir.*

İspat: $x_1 \leqslant x_2$ ve $x_2 \leqslant x_1$olsun. Bu durumda geçişme özelliğinden $x_1 = x_2$ olduğunu söylebiliriz. Bu şekilde adım adım ilerleyerek $x_1 = x_2 = ... = x_n$ i elde ederiz. Genelleme olarak $x_1 \leqslant x_i$ ve $x_i \leqslant x_1$ iken $x_1 = x_i$ denilebilir. □

Tanım 3.1.5. P ve Q iki poset olsun. Elimizde

$$\theta : P \to Q$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x \leqslant y$ olduğunda $\theta(x) \leqslant \theta(y)$ ise sıra koruyan olarak isimlendirilir. Eğer bu sıra koruyan fonksiyonun iki taraflı tersi varsa izomorfizm adını alır. Eğer izomorfizm P posetinden kendisine tanımlanıyorsa otomorfizm adını alır.

Teorem 3.1.6. *X sonlu bir poset olsun. X in bir maksimal ve minimal elemanı vardır.*

İspat: $x \in X$ maksimal eleman olsun. Eğer $x \leqslant y$ ise $x = y$ dir. Burada bir tane maksimal eleman vardır. $x_1 \in X$ ve x_1 maksimal eleman olmasın. Bu durumda başka bir $x_2 \in X$ vardır. Ve $x_1 < x_2$ dir. x_2 nin de maksimal eleman olmadığını kabul edelim. Bu şekilde devam edersek $x_1 < x_2 < ... < x_n$ elde ederiz. $<$ işlemi transitive olduğu için $x_i < x_j$ iken $i < j$ dir. Yani bütün elemanlar birbirinden farklıdır. X kümesi sınırlı olduğu için bir adımda durmak zorundadır. Yani maksimum elemanı vardır.
$x \in X$ minimal eleman olsun. Eğer $x \leqslant y$ ise $x = y$ dir. Burada bir tane minimal eleman vardır. $x_1 \in X$ ve x_1 minimal eleman olmasın. Bu durumda başka bir $x_2 \in X$ vardır. Ve $x_1 > x_2$ dir. x_2 nin de minimal eleman olmadığını kabul edelim. Bu şekilde devam edersek $x_1 > x_2 > ... > x_n$ elde ederiz. $>$ işlemi geçişkenlik özelliği olduğu için $x_i > x_j$ iken $i > j$ dir. Yani bütün elemanlar birbirinden farklıdır. X kümesi sınırlı olduğu için bir adımda durmak zorundadır. Yani minimal elemanı vardır. □

En küçük eleman minimum, en büyük eleman maksimum eleman olmak zorundadır. Fakat tersi doğru değildir.

Bir kümenin en küçük elemanı aynı zamanda o kümenin bir elemanıdır. Fakat minimum bir alt sınırdır. Ve kümenin elemanı olmak zorunda değildir. Kümenin elemanı ise en küçük eleman minimumdur. Fakat minimum eğer kümenin elemanı değilse ona en küçük eleman diyemeyiz. Tam tersine bir kümenin en büyük elemanı aynı zamanda o kümenin bir elemanıdır. Fakat maksimum bir üst sınırdır. Ve kümenin elemanı olmak zorunda değildir. Kümenin elemanı ise en büyük eleman maksimumdur. Fakat maksimum eğer kümenin elemanı değilse ona en büyük eleman diyemeyiz. Örnek olarak (0,1] aralığını ele alalım. Bu aralığın infimumu 0 dır. Minimum eleman ise aralığın elemanı olmalıdır. Ama alt sınır açık aralık olduğu için en küçük eleman yazılamaz. Bu yüzden bu aralığın minimumu yoktur.

Tanım 3.1.7. Açık aralık $(x, y) = \{z \in P : x < z < y\}$ olarak tanımlanır. $x, y \in P$ eğer $x < y$ iken $x < z < y$ olan $z \in P$ yok ise y, x'i örter denir.

Tanım 3.1.8. P posetinde a, b yi kaplıyor (örtüyor) olsun. Bu $a > b$ anlamına gelir. Fakat $a > x > b$ olacak şekilde x yoktur.

Tanım 3.1.9. X, P nin herhangi bir alt kümesi olsun. Her $x \in X$ için $a \leqslant x$ olacak şekilde bir $a \in X$ var ise a ya en küçük eleman denir.Her $x \in X$ için $x \leqslant b$ olacak şekilde bir $b \in X$ var ise b ye en büyük eleman denir.

Tanım 3.1.10. Verilen bir kısmi sıralı küme P'nin Hasse diyagramı $a < b$ şeklinde olan ve b'nin a'yı örttüğü durumdaki çiftleri birleştiren çizgedir.

Her sıralı kümenin Hasse diyagramı olmak zorunda değildir. Örneğin reel sayılar kümesini düşünelim. Posettir fakat Hasse diyagramı yoktur. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi tanımlanan bağıntıya göre karşılaştırılabildiği için "den küçük eşit($\leqslant$)" bağıntısı ile tam sıralı bir kümedir.Hasse diyagramı için tanım gereği her $x \in P$ için $\{y \in P | y > x\}$ kümesinin en küçük elemanı olmak zorundadır. Ama reel sayılar kümesinde $\{y \in P | y > x\} = (x, \infty)$ kümesinin en küçük elemanı yoktur.$(x \notin (x, \infty))$

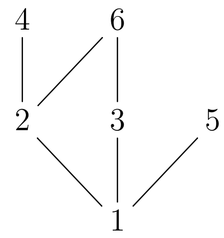
Lemma 3.1.11. *Eğer $(P, <)$ bir sonlu poset ise Hasse diyagramı vardır.*

İspat: $(P, <)$ sonlu bir poset olsun. Bu durumda Teorem 3.1.6 da söylediğimiz gibi maksimum ve minimum elemanı vardır. Hasse diyagramında da minimum elemanın en alta maksimum elemanın en üste yazıldığı göz önüne alındığında sonlu posetin Hasse diyagramı çizilebilir. □

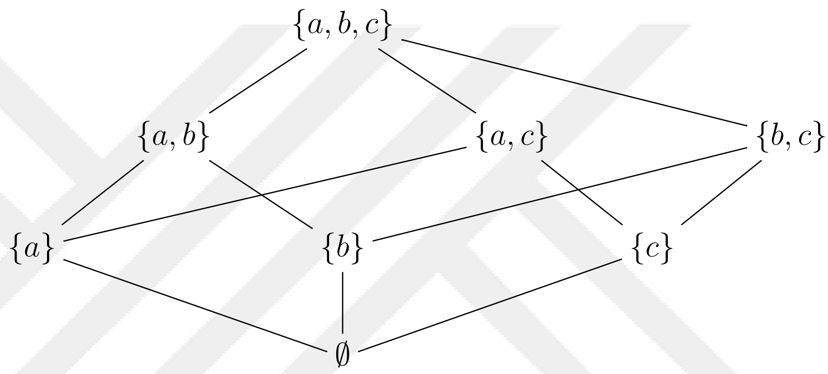
Örnek 3.1.12. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesini ve bölünebilme bağıntısını göz önüne alalım. A kümesinin bölünebilme bağıntısına göre sıralanmasının Hasse diyagramını çizelim. Bu bağıntının elemanları şunlardır:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

O zaman biz bu bağıntının Hasse diyagramını şu şekilde çizebiliriz:

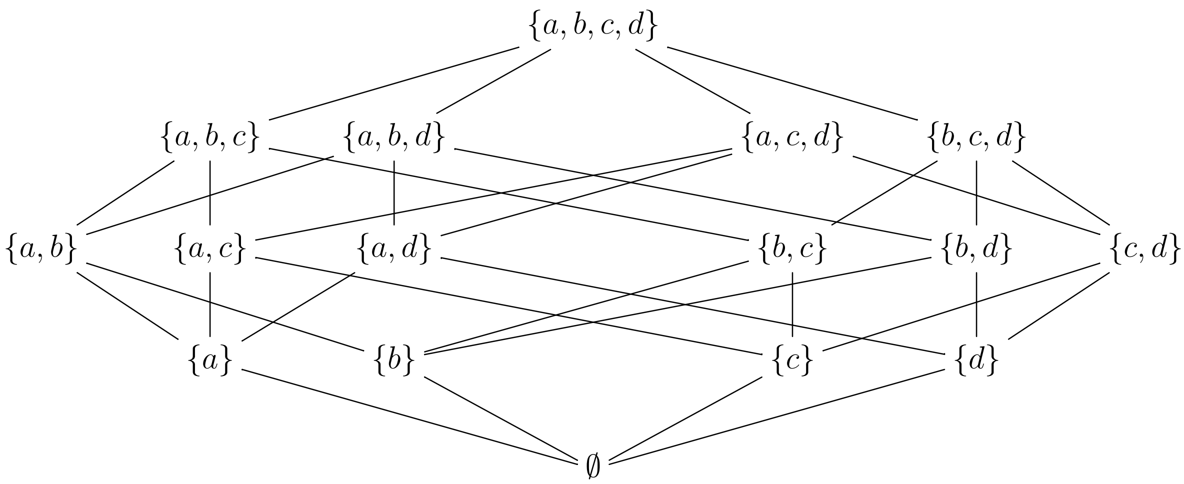


Örnek 3.1.13. {a,b,c} kümesinin alt küme bağıntısına göre sıralanmasının Hasse diyagaramını çizelim.

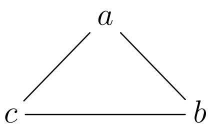


Yukarıdaki hasse diyagramına bakıldığında; Minimal eleman $\emptyset$ ve maksimal eleman $\{a, b, c\}$ olduğu açıkça görülür.

Örnek 3.1.14. $\{a, b, c, d\}$ kümesinin alt küme bağıntısına göre sıralanmasının Hasse diyagramını çizelim.



Örnek 3.1.15. Şu aşağıdaki çizgenin bir sıralı kümenin Hasse diyagramı olduğunu düşünelim.

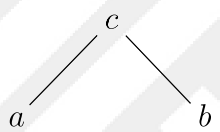


$a \leqslant b$ ve $b \leqslant a$ olduğundan $a = b$ olmalıdır. Fakat $a \neq b$ dir. Bu yüzden bir poset değildir.

Tanım 3.1.16. (Zincir) $(X, \leqslant)$ bir kısmi sıralı küme (poset) ve $A \subseteq X$ olsun. Bu A alt kümesinden alınan her x, y için $x \leqslant y$ ya da $y \leqslant x$ tir.

Tanım 3.1.17. (Karşı Zincir) $(X, \leqslant)$ bir kısmi sıralı küme (poset) ve $B \subseteq X$ olsun. Bu B alt kümesinden alınan her x, y için $x \nleqslant y$ ve $y \nleqslant x$ tir.

Örnek 3.1.18.



çizgesini ele alalım. Burada a ve c ile b ve c birer zincir örneğidir. Fakat a ve b karşı zincirdir.

3.2 KAFESLER

3.2.1 Tanımlar ve Örnekler

Tanım 3.2.1. Bir kısmi sıralı kümede $a \vee b$ elemanını a ve b'den büyük olan en küçük eleman olarak tanımlayacağız. Yine benzer şekilde $a \wedge b$ elemanını a ve b'den küçük olan en büyük eleman olarak tanımlayacağız. Ancak bu elemanların kümede var olup olmayacağı kesin değildir.

Tanım 3.2.2. A; üzerinde $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri tanımlanan boş olmayan bir küme olsun. Eğer $(A, \vee, \wedge)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir kafestir:

1. $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$ (İdempotent)
2. $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$ (Değişme)
3. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$; $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ (Birleşme)

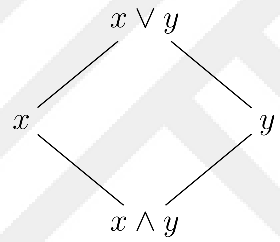
4. $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$ (Yutma)

Tanım 3.2.3. A kısmi sıralı kümesinde her a ve b için $a \vee b$ ve $a \wedge b$ var ise A kümesine kafes (latis) denir. Yani kafes yapılarının supremum ve infimumları vardır. Sembolik olarak bir X kafesi $(X, \vee, \wedge)$ şeklinde gösterilir.

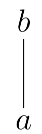
Örnek 3.2.4. $P(A)$, A kümesinin alt kümelerinin kümesi olsun. $\cup$ birleşme işlemi ve $\cap$ kesişim işlemi olmak üzere $(P(A), \cup, \cap)$ yapısı bir kafestir.

Örnek 3.2.5. Tam sayılar kümesini bölme aksiyomuyla düşünelim.$(N, |)$ sıralı kümesi; ekok (a, b) en küçük ortak kat ve ebob(a, b) en büyük ortak bölen bağıntılarıyla ele alındığında $(\mathbb{N}$, ekok, ebob$)$ yapısıda bir kafes örneğidir.

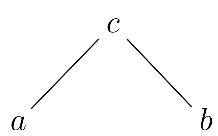
Örnek 3.2.6. Kafes için Hasse diyagramı aşağıdaki gibi çizilebilir:



Örnek 3.2.7.



$a \leqslant b$ ve $b \leqslant b$ olduğu için bizim için bir kafes örneğidir. $a \wedge b = a$ ve $a \vee b = b$'dır. Fakat



Bizim için $a \wedge b$ tanımsız olduğu için bir kafes örneği değildir.

Tanım 3.2.8. Dağılma özelliğini, yani

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

özelliğini sağlayan kafeslere dağılmalı kafes denir.

Tanım 3.2.9. Verilen bir $(P, \leqslant)$ posetinde $U(x) = \{y | y \leqslant x\}$ şeklinde tanımlayalım. O zaman P'nin ters poseti P^{op}'te $U^{op}(x) = \{y | y \leqslant x\}$ olur.

Her $a \in P$ elemanı için $U(a) = \{x \in P | a \leqslant x\}$ şeklinde tanımlanmış kümeler için $U(a) \cap U(b)$ kümesi a ve b'den büyük olan bütün elemanların kümesidir. Eğer $a, b \in P$ çifti için bu kümenin sadece bir tane en küçük elemanı varsa o zaman $a \vee b := \min(U(a) \cap U(b))$ şeklinde tanımlanabilir. Benzer şekilde, P nin ters poseti P^{op} posetinde $U^{op}(a) \cap U^{op}(b)$ kümesi a ve b'den küçük olan bütün elemanların kümesidir. Eğer her $a, b \in P$ çifti için $U^{op}(a) \cap U^{op}(b)$ kümesi sadece bir tane en küçük elemanı içeriyor ise o zaman $a \wedge b$ ters poset P^{op} içinde $\min(U^{op}(a) \cap U^{op}(b))$ şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 3.2.10. Elimizde $(Y, \wedge, \vee)$ kafesi ve X kümesi Y'nin bir altkümesi olsun. X'in alt kafes olabilmesi için her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ olması gerekir.

Lemma 3.2.11. *Eğer 0, P'nin alt sınırı ise her $x \in P$ için $0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$ olur. Eğer I, P nin üst sınırı ise $x \wedge I = x$ ve $x \vee I = I$ olur.*

İspat: İspatı üst sınır için vereceğiz. Altsınır için verilecek ispat P^{op} kullanılarak elde edilebilir. P nin üst sınırı I olsun. Her $x \in P$ için $x \leqslant I$ dır. Yani P de olan her eleman I dan daha küçüktür. Tanım gereği $\wedge$ operasyonu küçük olanı; $\vee$ operasyonu da büyük olanı seçmemize yarar. Bu durumda $x \wedge I$ x ve I'dan küçük olan demektir. $x \leqslant I$ olduğu için $x \wedge I = x$ dır. Aynı şekilde $x \vee I$ da x ve I dan büyük olan anlamına gelir. Tanım gereği $x \vee I = I$ olur. □

Lemma 3.2.12. *Sonlu kafeslerde her zaman sadece bir tane maximum ve sadece bir tane minimum vardır.*

Teorem 3.2.13. *[10] (BİRKOFF TEOREMİ) L sınırlı dağılmalı bir kafes olsun. O zaman öyle bir X kümesi vardır ki L kafesi $(P(X), \cup, \cap)$ kafesinin bir alt kafesine izomorftur.*

3.3 İDEALLER

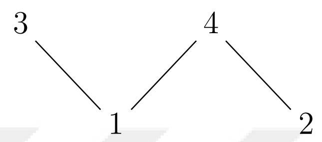
Tanım 3.3.1. (POSET İDEAL) $I \subseteq P$ olsun. I' nın bir poset ideal olması demek her $x, y \in P$ için eğer $x \leqslant y$ ise ve $x \in I$ ise o zaman $y \in I$ olması demektir. P kümesine ait poset ideal kümesini $I(P)$ olarak göstereceğiz.

Önerme 3.3.2. *P bir poset olsun. Herhangi bir $I \subset P$ kümesinin poset ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x \in I$ için $U(x) \leqslant I$ dir.*

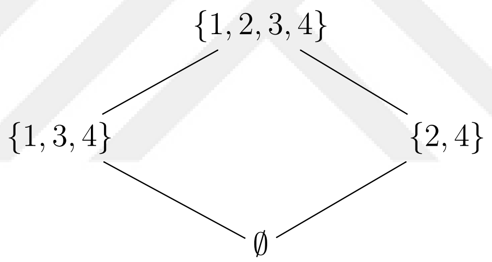
İspat: $\{\Rightarrow\}$ I'nin bir poset ideali olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in I$ için $U(x) \subseteq I$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Tanım gereği $x \leqslant y$ ve $x \in I$ ise $y \in I$'dır. Anımsayalım ki $U(x) = \{y | x \leqslant y\}$. Bir $y \in U(x)$ alalım. O zaman $x \leqslant y$ olur. O zaman $y \in I$ dır. Yani $U(x) \subseteq I$'dır.

$\{\Leftarrow\}$ Her $x \in I$ için $U(x) \leqslant I$ olsun. I'nın bir poset ideali olduğunu gösterelim. $\{y|x \leqslant y\} \leqslant I$ ve $x \leqslant y$ olduğunda tanım gereği $y \in U(x)$ tir. Bu durumda $U(x) \leqslant I$ hipotezinden dolayı $y \in I$. Yani I bir poset idealdir. $\square$

Örnek 3.3.3.



çizgesine ait poset ideal kümesi; $I(X) = \{\emptyset, \{2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ şeklindedir. Bu da bize aşağıdaki Hasse diyagramını verir:



Görüldüğü gibi Hasse diagramı verilen bir posetin idealler posetini yazabiliriz.

Önerme 3.3.4. *$U(x)$ her x için bir poset idealdir.*

İspat: Her x, y için $x \in U(x)$ ve $x \leqslant y$ ise $y \in U(x)$ tir. Her y, z için $y \in U(x)$ ve $y \leqslant z$ ise $z \in U(x)$ tir. $x \leqslant y$ ve $y \leqslant z$ ise geçişkenlik özelliğinden $x \leqslant z$ olur ve $z \in U(x)$ olur. $\square$

Tanım 3.3.5. x_i ler $(A, \leqslant)$ posetinin elemanları olsun. Her $x_i \in X; i = 1, 2, ...$ için eğer $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant ...$ zinciri sonlu bir adımda duruyorsa yani öyle bir $N \in \mathbb{N}$ varsa ki her $n \geqslant N$ için $x_n = x_N$ ise bu posete nötheryen poset denir.

Tanım 3.3.6. Eğer $(A^{op}, \leqslant)$ poseti nötheryen ise o zaman $(A, \leqslant)$ posetine artinyen bir poset diyeceğiz.

Teorem 3.3.7. *P artinyendir ancak ve ancak P^{op} nötheryendir.*

İspat: ($\Rightarrow$) P artinyen olsun. $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n > \cdots$ azalan bir dizi ise öyle bir m vardır ki $m > n$ için $a_m = a_n$ olur. P artinyen olduğu için azalan bir dizidir. P azalan bir dizi bir olduğu için P^{op} artan bir dizidir. Ve P artinyen olduğu için bir noktada durmak zorundadır. Bu durumda P^{op} de bir nokta da duran azalan bir dizidir. Yani tanım gereği P^{op} nötheryendir.
($\Leftarrow$) P^{op} nötheryen olsun. P^{op} artan bir dizi olduğu için P azalan bir dizidir. P^{op} nötheryen olduğu için bir noktada durmak zorundadır. Yani P de bir noktada duran azalan bir dizidir. Tanım gereği P artinyendir. □

Teorem 3.3.8. *Eğer $(P, \leqslant)$ artinyen bir poset ise o zaman her $I \subset P$ poset ideali için*

$$I = \bigcup_{m \in min(I)} U(m)$$

Bir $x \in P$ elemanının $x \in \min(I)$ olabilmesi için her $y \leqslant x$ için $y = x$ olması gerekir.

İspat: Varsayalım ki I bir artinyen poset olsun. min $I \neq \emptyset$ ve $x_0 \in$ I olsun. İki olasılık vardır: $x_0 \in \min(I)$ ya da $x_0 \notin \min(I)$. Eğer $x_0 \in$ I ise birşey yapmamıza gerek yoktur. Olmayana ergi yöntemini kullanarak $\min(I) \neq \emptyset$ olduğunu ispatlayalım. Öyleyse $x_0 \notin \min(I)$ olduğunu varsayalım. Bu da demektir ki öyle bir $x_1 \in I$ vardır ki $x_0 > x_1$. O zaman $x_1 \notin$ min (I) olmalıdır. Bu şekilde devam edersek $x_i \neq x_{i+1}$ olacak şekilde

$$x_0 > x_1 > \ldots > x_n$$

bir dizi elde ederiz. Eğer x_i bir minimum eleman olsaydı o zaman $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_j$ olurdu ve aradığımız minimum elemanı bulmuş olurduk. Var sayalım ki bu dizi tekrar etmeden azalsın. Ancak P artinyen bir posettir. Demek ki bir nokta da durmak zorudadır. Durduğu noktada ki eleman $x_n \in \min(I)$ olmak zorundadır. □

Lemma 3.3.9. *I ve J iki ideal olsun.* $\min(I) = \min(J)$ *olması için gerek ve yeter koşul $I = J$ olmasıdır.*

İspat: $I = \bigcup_{m \in \min(I)} U(m)$ olduğunu biliyoruz.(Bakınız Teorem (3.3.8))
($\Leftarrow$) $I = J$ olsun. Yani $I = \bigcup_{x \in min(I)} U(x) = \bigcup_{y \in \min(J)} U(y) = J$ olur. Bu da $x \in \min(I)$ ise en az bir tane $y \in J$ vardır ki $x \in U(y)$ anlamına gelir. Bu da tanım

gereği $y \leqslant x$'dir. Kabul gereği $y = x$ tir. Bu da bize $\min I \subseteq \min J$ olduğunu gösterir. Bunun tersi de doğrudur. Yani $y \in \min(J)$ alarak başlayıp en son $y \in \min(I)$ elde ederiz, bu da $\min(J) \subseteq \min(I)$ demektir. Sonuç olarak $\min(I) = \min(J)$ elde edilir. $(\Rightarrow)$ I ve J iki ideal ve $\min(I) = \min(J)$ olsun. Ancak $I = \bigcup_{m \in \min(I)} U(m) = \bigcup_{m \in \min(J)} U(m) = J$ olduğu için I ve J idellerinin eşit olduğunu görürürüz. □

Teorem 3.3.10. *Elimizde $(P, \leq)$ şeklinde bir poset olsun. O zaman P'nin idealleri kümesi ile P'nin içindeki karşı zincirler kümelerinin eleman sayıları aynıdır. Yani kümeler arasında bire-bir ve örten bir fonksiyon vardır.*

$$\{\text{P'nin idealleri}\} \rightleftharpoons \{\text{P'nin karşı zincirleri}\}$$

İspat: Bize P nin idealleri olan I verilmiş olsun. Teorem 3.3.8 da gösterdiğimiz gibi

$$I = \bigcup_{x \in \min(I)} U(x)$$

şeklinde karşı zincirleri elde edebiliriz. Lemma 3.3.9 bize bu fonksiyonun bire-bir olduğunu söyler. Ters yöndeki fonksiyon için, var sayalım ki m bir karşı zincir olsun. Bu durumda bu karşı zincirlerin kümelerinin birleşimi ile

$$U(m) = \bigcup_{x \in m} U(x)$$

I ideallerine ulaşılır. Bu durumda

$$\min\left(\bigcup_{x \in m} U(x)\right) = m$$

olacağı için diğer yöndeki fonksiyon da bire-birdir. □

3.4 KAFESLER VE POSETLER ARASINDAKİ İLİŞKİ

Kafesler ve posetler arasında bir bağlantı vardır. Kafeste elimizde bir küme ve iki bağıntı vardır. Bu bağıntılar $\vee$ ve $\wedge$ dir. Poset ise bir küme ve üzerinde bir yansıma, antisimetri ve geçişkenlik özelliklerini sağlayan bir sıralama bağıntısıdır.

$a \vee b$ ve $a \wedge b$ operasyonlarının kafes olup olmadığını ayrı ayrı inceleyelim:

i) $a \wedge b$ için;

1. $a \wedge b = b \wedge a$ olduğu için değişme özelliği sağlanır.
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ olduğu için birleşme özelliği sağlanır.
3. $a \wedge (a \vee b) = a$ olduğu için yutan elemana sahiptir.

ii) $a \vee b$ için;

1. $a \vee b = b \vee a$ olduğu için değişme özelliği sağlanır.
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ olduğu için birleşme özelliği sağlanır.
3. $a \vee (a \wedge b) = a$ olduğu için yutan elemana sahiptir.

$a \vee b$ ve $a \wedge b$ yapıları yukarıdaki şartları sağladığı için bir kafes belirtirler.

L bir kafes olsun. Bunun üzerine bir sıralama bağıntısı yaratalım.
$a < b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$
L kafesi üzerindeki bu bağıntının bir poset yarattığını gösterelim.

a, b den küçük olduğunda a ve b den büyük olan b; a ve b den küçük olan a bağıntısının bir kafes olduğunu göstereceğiz.

1. Tanım gereği $a \wedge a = a$ yani a ve a dan küçük olan a ve $a \vee a = a$ yani a ve a dan büyük olan a olduğu için yansıma özelliği sağlanır.

2. Tanım gereği $a \wedge b = a$ ve $b \wedge a = b \Rightarrow a = b$. Yani a ve b den küçük olana önce a daha sonra b diyoruz. Hem a hem de b küçük olamayacağına göre $a = b$ dir. $a \vee b = a$ ve $b \vee a = b \Rightarrow a = b$ olduğu için yani a ve b den büyük olana önce a daha sonra b diyoruz. Hem a hem de b büyük olamayacağına göre $a = b$ dir. Bu da antisimetri özelliği sağlanır demektir.

3. Tanım gereği geçişme özelliği sağlanması için ; $a \leqslant b$ ve $b \leqslant c$ olduğunda $a \leqslant c$ olmalıdır.$a \wedge b = a$ ve $b \wedge c = b$ olduğunda $a \wedge c$ yi inceleyelim. $a \wedge c = a \wedge b \wedge c = a \wedge b = a$ olduğunda $\wedge$ için geçişme özelliği sağlanır. $a \vee b = b$ ve $b \vee c = c$ olduğunda $a \vee c$ yi inceleyelim. $a \vee c = a \vee b \vee c = b \vee c = c$

olduğundan $\vee$ için de geçişme özelliği sağlanır.
Yansıma, antisimetri ve geçişme özelliklerini sağladığından bu bağıntı bir posettir.

Örnek 3.4.1. X bir küme ve $P(X)$ bunun kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ in kesişim ve birleşim operasyonlarıyla bir kafes yarattığını gösterelim.

1. $Y, Z \in P(X)$ olsun. Bu durumda

$$Y \cap Z = \{a \in X | a \in Y \text{ ve } a \in Z\} = \{a \in X | a \in Z \text{ ve } a \in Y\} = Z \cap Y$$

olur. Ayrıca

$$Y \cup Z = \{a \in X | a \in Y \text{ veya } a \in Z\} = \{a \in X | a \in Z \text{ veya } a \in Y\} = Z \cup Y$$

olduğu için değişme özelliği sağlanır.

2. $Y, Z, T \in P(X)$ olsun. Bu durumda

$$(Y \cap Z) \cap T = \{a \in X | (a \in Y \text{ ve } a \in Z) \text{ ve } a \in T\}$$

olur. Y, Z ve T aynı X kümesinin alt kümesi olduğu için

$$(Y \cap Z) \cap T = \{a \in X | a \in Y \text{ ve } (a \in Z \text{ ve } a \in T)\} = Y \cap (Z \cap T)$$

şeklinde yazılabildiği için ve

$$(Y \cup Z) \cup T = \{a \in X | (a \in Y \text{ veya } a \in Z) \text{ veya } a \in T\}$$

olur. Y, Z ve T aynı X kümesinin alt kümesi olduğu için

$$(Y \cup Z) \cup T = \{a \in X | a \in Y \text{ veya } (a \in Z \text{ veya } a \in T)\} = Y \cup (Z \cup T)$$

şeklinde yazılabildiği için iki aksiyom için de birleşme özelliği sağlanır.

3. $Y \in P(X)$ olsun. Bu durumda

$$Y \cup Y = \{x | x \in Y \text{ veya } x \in Y\} = \{x | x \in Y\} = Y$$

ve

$$Y \cap Y = \{x | x \in Y \text{ ve } x \in Y\} = \{x | x \in Y\} = Y$$

olduğu için yutma özelliği de sağlanır.

Örnek 3.4.2. X bir topolojik uzay olsun. $C(X), X$ içindeki kapalı kümeler ve $O(X), X$ içindeki açık kümeler olsun. Bunların kesişim ve birleşim operasyonları ile bir kafes tanımladığını gösteriniz.

İspat: Kapalı kümeler olan $C(X)$ ve açık kümeler olan $O(X)$; kuvvet kümesi olan $P(X)$ in alt kümeleridir. Ve biz $(P(X), \cap, \cup)$ in bir kafes olduğunu biliyoruz. Bu sebepten dolayı bahsedilen açık ve kapalı kümelerin $\cap$ ve $\cup$ operasyonları altında kapalı olduğunu göstermek kafes olduğunu göstermek için yeterlidir. Her $U, V \in C(X)$ için $U \cap V \in C(X)$ kapalı kümeler sonlu kesişim altında kapalıdır. Her $U, V \in O(X)$ için $U \cup V \in O(X)$ açık kümeler sonlu birleşim altında kapalıdır. O halde verilen yapı bir kafestir. $\square$

Örnek 3.4.3. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olsun. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesini düşünelim.

1. $(a, b) \vee (c, d) = (max(a, c), max(b, d))$

2. $(a, b) \wedge (c, d) = (min(a, c), min(b, d))$

operasyonlarının bir kafes tanımladığını gösteriniz.
Yukarıda verilen operasyonların kafes tanımlaması için değişme, birleşme ve yutan eleman özelliklerini sağlaması gerekir.

1. Tanım gereği $(a, b) \vee (c, d) = (max(a, c), max(b, d))$
   $(c, d) \vee (a, b) = (max(c, a), max(d, b))$
   $max(a, c) = max(c, a)$ ve $max(b, d) = max(d, b)$ olduğu için $(a, b) \vee (c, d) = (c, d) \vee (a, b)$ dir.Değişme özelliği sağlanır.

2. Tanım gereği $[(a, b) \vee (c, d)] \vee (e, f) = (max(a, c), max(b, d)) \vee (e, f)$
   $=max(max(a, c, e), max(b, d, f))$
   $=max(a, b) \vee [max(c, e), max(d, f)]$
   $=(a, b) \vee [(c, d) \vee (e, f)]$ olduğu için birleşme özelliği sağlanır.

3. Tanım gereği $max((a,b), min((a,b),(c,d)) = (a,b)$ olduğu için yutan eleman özelliği sağlanır.

Belirtilen özellikler sağlandığı için verilen operasyonlar bir kafes tanımlar.

Önerme 3.4.4. $(P, \wedge, \vee)$ *ve* $(Q, \wedge, \vee)$ *iki kafes ise* $P \times Q$ *kümesi üzerinde bir kafes yapısı vardır.*

İspat: İspat yukarıdaki örnekle aynıdır. □

Maalesef her sıralı kümeden kafes yaratamıyoruz. Mesela elimizde P diye bir poset olsun. P üzerinde bir kafes yaratabilmemiz için şu elemanların tanımlı olması gerekir:

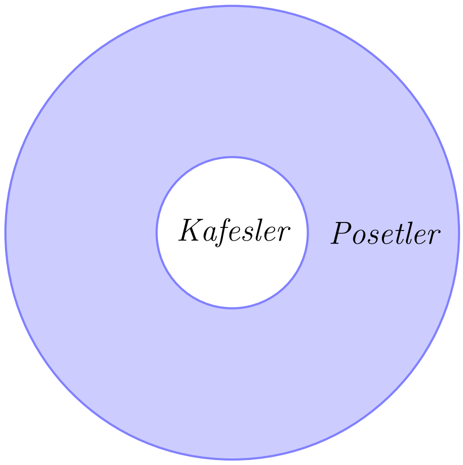
1. $a \vee b = a$ ve b den büyük olan elemanlar kümesinin içindeki en küçük eleman

2. $a \wedge b = a$ ve b den küçük olan elemanlar kümesinin içindeki en büyük eleman

Tanım 3.4.5. L bir kafes ve $A \subset L$ olsun. A nın kafes ideali olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ ve $x \in L$ için $a \wedge x$ elemanı A nın içinde olmalıdır. Yani A kümesi poset idealiyse $\wedge$ operasyonuna göre yutandır. A nın ters ideal olması için her $a \in A$ ve $x \in L$ için $a \vee x$ elemanı A nın içinde olmalıdır. Yani A kümesi ters poset ideali ise $\vee$ operasyonuna göre yutandır.

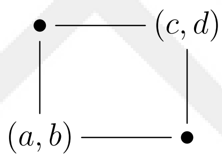
Yani $a \wedge x$ tanım gereği a ve x elemanlarından küçük en büyük eleman olduğu için A ideal ise içinden bir eleman seçersek (mesela $a \in A$) o zaman bu a dan küçük her eleman yine A kümesi içine düşer. Ters ideal durumunda da A daki her a elemanı için a dan büyük her eleman A nın içine düşer.

Önerme 3.4.6. *Her kafes yapısı bir posettir. Ama her poset bir kafes değildir. Buna verilebilecek en güzel örnek yollar poseti olan* $P(G)$ *dir.* $P(G)$ *bir poset ama kafes değildir.*



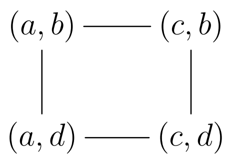
Örnek 3.4.7. $\mathbb{R}^2$ de ;
$(a,b) \vee (c,d) = (a,b)$ ve (c,d) nin çizdiği dikdörtgenin sağ üst köşesi ;
$(a,b) \wedge (c,d) = (a,b)$ ve (c,d) nin çizdiği dikdörtgenin sol alt köşesi şeklinde tanımlanan bir kafes ele alalım. Dört farklı durum söz konusudur.

1.



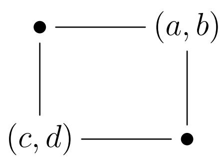
$(a,b) \vee (c,d) = (c,d)$
$(a,b) \wedge (c,d) = (a,b)$

2.



$(a,b) \vee (c,d) = (c,b)$
$(a,b) \wedge (c,d) = (a,d)$

3.



$(a,b) \vee (c,d) = (a,b)$
$(a,b) \wedge (c,d) = (c,d)$

4.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
(c,d) \arrow[r] \arrow[d] & (a,d) \arrow[d] \\
(c,b) \arrow[r] & (a,b)
\end{tikzcd}$$

$(a,b) \vee (c,d) = (a,d)$
$(a,b) \wedge (c,d) = (c,b)$

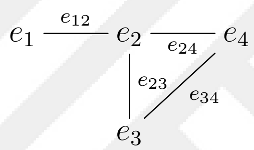
4 ÇİZGELER

4.1 TANIMLAR VE ÖRNEKLER

Bir çizge basitçe düğüm olarak isimlendirilen köşelerden ve bu noktaları birleştiren kenarlardan oluşur. Yani bir çizge $G = (V, E)$ şeklinde bir ikili olup, V sonlu bir küme ve $E \subseteq V \times V$ şeklinde bir alt kümedir.

$$0 \longrightarrow 1$$

Örnek 4.1.1. Aşağıdaki çizgeyi göz önüne alalım.



$G = (V, E)$ için $V = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $E = \{e_{12}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ dir.

Tanım 4.1.2. Elimizde $G = (V, E)$ şeklinde bir çizge olsun. Bu çizge içinde verilen herhangi bir köşe dizisi $(v_0, \ldots, v_n)$'nde eğer $\{v_i, v_{i+1}\}$ eğer bir kenar ise o zaman biz bu diziye bir yol diyeceğiz.

Tanım 4.1.3. Verilen bir çizge ve bu çizge içindeki bir yol $\alpha = (v_0, \ldots, v_n)$ için bu yolun uzunluğunu bu yol içindeki kenarların sayısı olarak alacağız.

Tanım 4.1.4. E ile simgelenen kenarlar yönlü ya da yönsüz olabilir. Kenarların yönü belirtilmediyse yönsüz kenarlardır. Bu durum da (e_{12}, e_{23}) ile (e_{23}, e_{12}) arasında bir fark yoktur. Eğer kenarlar ok şeklinde gösterilmişse yönlü kenarlardır.

Tanım 4.1.5. $\binom{V}{n}$ gösterimi V kümesinin n elemanlı alt kümelerinin kümesi anlamına gelir.

Tanım 4.1.6. Yönsüz çizgelerde $E \subseteq \binom{V}{2}$ dir.

Tanım 4.1.7. Bir köşe kenarla kendine bağlanıyorsa bukle (loop) adını alır.

Örnek 4.1.8. Aşağıda a köşesini kendine bağlayan bir bukle örneği verilmiştir.

Tanım 4.1.9. Bir köşeye bağlı olan kenarların sayısına o köşenin derecesi (degree) adı verilir.

Örnek 4.1.10.

$$
\begin{tikzcd}
 & & x_1 \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
x_2 \arrow[dr] & & x_3 \arrow[dr] & & x_4 \arrow[dl] \\
 & x_5 \arrow[dr] & & x_6 \arrow[dl] & \\
 & & x_7 & &
\end{tikzcd}
$$

herhangi bir yönlü çizge olsun.

x_1 in derecesi: 3 ; x_2 nin derecesi: 2 ; x_3 ün derecesi: 2 ; x_4 ün derecesi: 2 ; x_5 in derecesi: 2 ; x_6 nın derecesi: 3 ; x_7 nin derecesi: 2 dir.

Tanım 4.1.11. Bütün köşelerin dereceleri eşit olduğunda o çizgeye düzenli çizge adı verilir.

Tanım 4.1.12. Başlangıç ve bitiş yerleri aynı olan çizgeler döngü(cycle) adını alır.

Teorem 4.1.13. *G sonlu bir çizge olsun. Eğer G içinde döngü yoksa o zaman $P(G)$ sonludur.*

İspat: G sonlu bir çizge ve G nin tüm yollarının kümesi olan $P(G)$ sonsuz olsun. $|G| = n$ olsun. $P(G)$ sonsuz ise herhangi bir tam sayı olan m den daha uzun yollara sahiptir. Ama o zaman öyle bir α bulabiliriz ki $|\alpha| = n + 1$ olur. Bu da güvercin yuvası prensibine göre en az bir köşe iki ya da daha fazla tekrar eder anlamına gelir. Bu çizge de döngü olması demektir. Yani çelişki oluşturur. $\square$

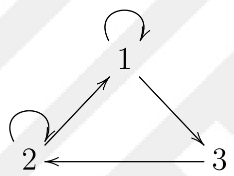
Sonuç 4.1.14. Eğer G içinde döngü olmayan sonlu bir çizge ise o zaman $P(G)$ nin Hasse diyagramı sonlu bir çizgedir.

4.2 ÇİZGELERİN YOL POSETLERİ

Bir çizgeden Hasse diyagramı oluşturmak yani yol posetlerini çizmek için ilk önce çizgede bulunan noktalar en alta yazılır. Daha sonra küçük(kısa) yollardan başlayarak tüm yollar sırasıyla yazılır. Aynı uzunlukta olan yolların aynı hizada (yükseklikte) yazılmasına dikkat edilir. Hasse diyagramı bir nevi sıralamadır. Yukarı çıktıkça daha büyük(uzun) yollar yazılır.

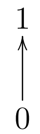
Tanım 4.2.1. G sonlu bir çizge ve $P(G)$ de bu çizgenin bütün yollarının kümesi olsun. Bu küme üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlayacağız. Bize verilen her $\alpha, \beta \in P(G)$ için eğer α nın β içinde kesintisiz bir alt dizi olarak görüntüsü var ise $\alpha < \beta$ diyeceğiz.

Örnek 4.2.2.

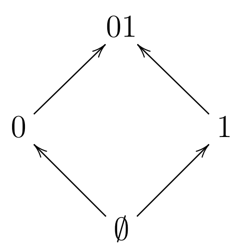


Verilen çizgeye göre;
α =1132211321113 olsun. β =213 ve γ =2132 şeklinde seçelim. β, α nın içinde verilen sırasıyla yer almadığı için $\beta \not< \alpha$ dır. Fakat γ verilen sırasıyla α nın içinde yer aldığı için $\gamma < \alpha$ dır.

Örnek 4.2.3. G:



şeklinde olan bir çizge olsun. Bu çizgeye ait yollar poseti $P(G) = \{\emptyset, 0, 1, 01\}$ şeklindedir. Bu yollar posetine göre hasse diyagramı



şeklinde çizilebilir.Bu hasse diyagramı da bir çizgedir. Ve bu iki çizge birbirine benzemek zorunda değildir.

Örnek 4.2.4.

$$\begin{tikzcd}
6 \arrow[r, "67"] & 7 \arrow[r, "78"] & 8 \\
3 \arrow[u, "36"] \arrow[r, "34"] & 4 \arrow[u, "47"'] \arrow[r, "45"'] & 5 \arrow[u, "58"'] \\
0 \arrow[u, "03"] \arrow[r, "01"'] & 1 \arrow[u, "14"] \arrow[r, "12"'] & 2 \arrow[u, "25"']
\end{tikzcd}$$

Verilen posetin bütün elemanlarını yazalım.

$$\begin{aligned}
P(G) = \{&0, 01, 012, 0125, 01258, 014, 0147, 01478,\\
&\quad 03, 034, 0347, 03478, 036, 0367, 03678,\\
&1, 14, 145, 1458, 147, 1478, 12, 125, 1258,\\
&2, 25, 258,\\
&3, 34, 345, 3458, 347, 3478, 36, 367, 3678,\\
&4, 47, 478, 45, 458,\\
&5, 58,\\
&6, 67, 678,\\
&7, 78,\\
&8\}
\end{aligned}$$

Tanım 4.2.5. Bir posetin ideallerini gösterirken kullanacağımız notasyon $|e_0\rangle$; e_0 ile biten anlamındadır.

Örnek 4.2.6.

$$e_0 \xleftarrow[e_{01}]{} e_1$$

çizgesinde bulunan ideallerin tabanlarını yazalım.

Elimizdeki poset $\{e_0, e_{01}, e_1\}$ elemanlarından oluşur. Bu posetin poset idealleri ise şunlardır:

1. $|e_0\rangle = \{e_0, e_{01}\}$
2. $|e_1\rangle = \{e_1\}$

3. $|e_0, e_1\rangle = \{e_0, e_{01}, e_1\}$ çünkü $1_{\mathscr{A}} = e_0 + e_1$

4. $|e_{01}\rangle = \{e_{01}\}$

5. $|e_0, e_{01}\rangle = \{e_0, e_{01}\}$

6. $|e_1, e_{01}\rangle = \{e_1, e_{01}\}$

7. $|e_0, e_1, e_{01}\rangle = \{e_0, e_1, e_{01}\}$

Örnek 4.2.7. A aşağıdaki çizge olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & & e_2 \arrow[dr, "b"] & \\
e_0 \arrow[r, "d"] & e_1 \arrow[ur, "a"] & & e_3 \arrow[ll, "c"]
\end{tikzcd}$$

çizgesinde bulunan ideallerin tabanlarını yazalım.
$|e_0\rangle = e_0$
$|e_1\rangle = d, e_1, c, bc, acbc, cabcabc, \{abc\}^n, c\{abc\}^n, d\{abc\}^n$
$|e_2\rangle = a, bca, abca, abcabca, \{bca\}^n, a\{bca\}^n, ca\{bca\}^n, d\{bca\}^n$
$|e_3\rangle = b, ab, cab, cabcab, \{cab\}^n, d\{cab\}^n, b\{cab\}^n, ab\{cab\}^n$
Biz burada sadece köşeleri içeren idealleri yazdık. Halbuki 2^8 tane değişik olabilecek ideal yazılabilir. Bunların bir kısmı eşit olabilir.

Örnek 4.2.8. G aşağıdaki çizge olsun.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

$P(G)$ nin bütün elemanlarını yazınız. Hasse diyagramını çizip tek eleman tarafından gerilen $U(x)$ ideallerini yazınız.

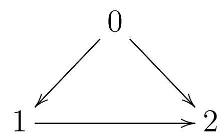
$P(G) = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, e_{012}\}$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & e_{012} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & e_{01} \arrow[dl] \arrow[dr] & & e_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
e_0 & & e_1 & & e_2
\end{tikzcd}$$

Hasse diyagramına bakarak tek eleman tarafından gerilen $U(x)$ ideallerini şu şekilde yazabiliriz:

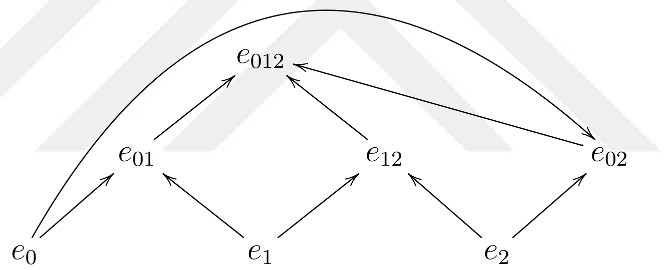
$$\{\{e_0, e_{01}, e_{012}\}, \{e_2, e_{12}, e_{012}\}, \{e_1, e_{01}, e_{12}, e_{012}\}, \{e_{01}, e_{012}\}, \{e_{12}, e_{012}\}, \{e_{012}\}\}$$

Örnek 4.2.9. H aşağıdaki çizge olsun.



$P(H)$ nin bütün elemanlarını yazınız. Hasse diyagramını çizip tek eleman tarafından gerilen $U(x)$ ideallerini yazınız.

$P(H) = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, e_{02}, e_{012}\}$



$$\{\{e_0, e_{01}, e_{02}, e_{012}\}, \{e_2, e_{12}, e_{02}, e_{012}\}, \{e_1, e_{01}, e_{12}, e_{012}\},$$
$$\{e_{01}, e_{012}\}, \{e_{12}, e_{012}\}, \{e_{02}, e_{012}\}, \{e_{012}\}\}$$

Teorem 4.2.10. *G sonlu bir çizge olsun. $P(G)$ bu çizgelerin yollarının sıralı kümesi olsun. $P(G)$ artinyendir.*

İspat: G sonlu bir çizge olsun. Yolların kümesi olan $P(G)$ nin kısmi sıralı küme olduğunu biliyoruz. $P(G)$ nin elemanları uzunlukları farklı olan yollardır. Var sayalım ki elimizde sürekli azalan $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n > \cdots$ şeklinde sonsuz bir dizi olsun. $len(\alpha_1) > len(\alpha_2) > ... > len(\alpha_n) > ... > 0$ dizisi doğal sayılar içinde azalan bir sonsuz dizi olduğu için sabitlenir. Bu da tanım gereği artinyen olduğu anlamına gelir. $\square$

Örnek 4.2.11. G bir çizge ve $P(G)$ yollardan oluşan poset olsun. Ve G çizgesi

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\
& 3 &
\end{tikzcd}$$

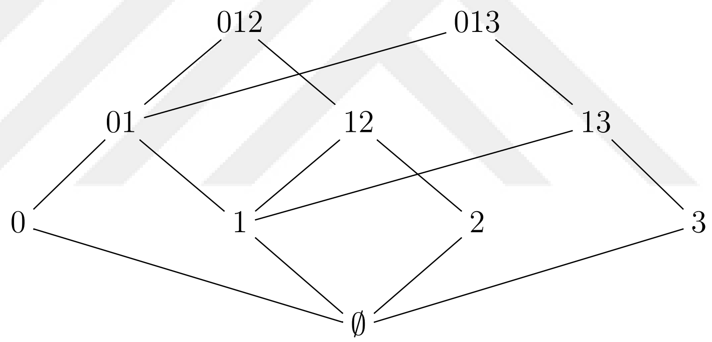
olsun. Burada $P(G) = \{\emptyset, 0, 1, 2, 3, 01, 12, 13, 012, 013\}$ dir.

$0 < 01 < 012$

$1 < 12 < 012$

$2 < 12 < 012$

şeklinde devam ederek elamanlar arasında sıralama yapılabilir. Bu sıralamalardan yola çıkarak G çizgesi için Hasse diyagramı yapılabilir. Bu diyagram aşağıdaki gibidir:



Bu Hasse diyagramına bakarak tek eleman tarafından gerilen $U(x)$ ideallerinin kümesini şu şekilde yazabiliriz:

{∅,{0,01,012,013},{2,12,012},{1,01,12,13,012,013},{3,13,013},{01,012,013},{12,012},
{13,013},{012,013} }

Örnek 4.2.12.

$$\begin{tikzcd}
d & & e & & f \\
& b \arrow[ul] \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& & a \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

şeklinde verilen bir çizgeyi ele alalım.

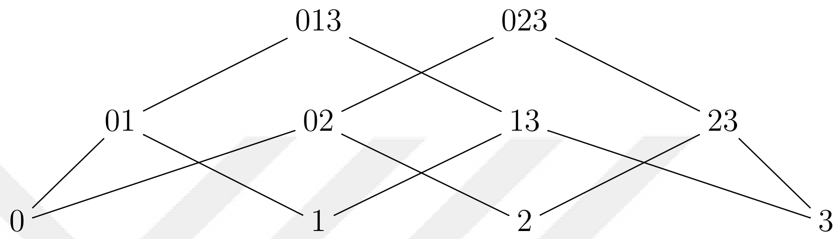
Poset ideal kümesini şu şekilde yazabiliriz:

$\{\{a, b, c, d, e, f\}, \{b, d, e\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}\}$

Örnek 4.2.13. G aşağıdaki çizge olsun.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "13"] & 3 \\ 0 \arrow[u, "01"] \arrow[r, "02"] & 2 \arrow[u, "23"'] \end{tikzcd}$$

$P(G)$ posetine ait Hasse diyagramını çizelim ve poset ideallerini yazalım. $P(G)$ posetine ait Hasse diyagramı şu şekildedir:



Hasse diyagramına bakarak tek eleman tarafından gerilen $U(x)$ ideallerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:
{{0,01,02,013,023},{1,01,13,013},{2,02,23,023},{3,13,23,013,023},{01,013},{02,023}
,{13,013},{23,023},{013,023}}

5 HALKALAR VE İDEALLER

Aşağıdaki sonuçlarda ağırlıklı olarak Prof. Dr. Dursun TAŞÇI 'nın Soyut Cebir kitabından yararlanılmıştır.

5.1 TANIMLAR VE ÖRNEKLER

Tanım 5.1.1. $(R, +, \cdot)$ şeklinde verimiş aşağıdaki şartları sağlayan bir üçlüye halka denir.

1. Toplama işlemine göre $(R, +)$ değişmeli gruptur.
2. Çarpma işlemine göre $(R, \cdot)$ yapısının birleşme özelliği vardır.
3. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Yani her $x, y, x \in R$ için

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) =& x \cdot y + x \cdot z \\ (y + z) \cdot x =& y \cdot x + z \cdot x \end{aligned}$$

   sağlanır. Eğer öyle bir $1 \in R$ varsa ki her $x \in R$ için $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ sağlanıyor ise o zaman $1 \in R$ elemanına R'nin birim elemanı R'ye de birimli halka denir.

Örnek 5.1.2. Tam sayılar kümesi bir halka oluşturur.

Örnek 5.1.3. Reel sayılar halkası birimli bir halkadır.

Tanım 5.1.4. Eğer her $x, y \in R$ ve $x \cdot y = y \cdot x$ ise R ye değişmeli halka denir.

Tanım 5.1.5. R bir halka ve A da R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. A nın bir alt halka olması için gerek ve yeter şartlar şöyle tanımlanabilir:

1. Her $a, b \in A$ için $a - b \in A$
2. Her $a, b \in A$ için $a.b \in A$

Tanım 5.1.6. $I \subseteq R$ alt halka eğer her $r \in R$ ve $x \in I$ için $rx \in I$ ise I ya sol ideal denir. $xr \in I$ ya sağ ideal denir. Bir ideal hem sağ ideal hem sol ideal ise idealdir denir.

Yani $I \subseteq A$ bir ideal olsun. $AI = \{ai|a \in Ai \in I\}$ ve $IA = \{ia|i \in Ia \in A\}$ şeklinde tanımlansın.

(a) Eğer I sol ideal ise $AI \subseteq I$;

(b) Eğer I sağ ideal ise $IA \subseteq I$;

(c) Eğer I hem sol hem sağ ideal ise $AIA \subseteq I$ dır.

Lemma 5.1.7. *Bir halkaya ait olan iki idealin kesişimi yine bir idealdir.*

İspat: Herhangi bir A halkasını ele alalım. Bu halkanın iki ideali I_1 ve I_2 olsun. $I_1 \cap I_2$ kümesi boş değildir. Çünkü A halka olduğundan toplama işlemine göre birim elemanı olduğu için $0_A \in I_1 \cap I_2$ dir. $a, b \in I_1 \cap I_2$ ve $r \in A$ olsun. $a, b \in I_1 \cap I_2$ demek $a, b \in I_1$ ve $a, b \in I_2$ demektir. I_1 ve I_2 birer ideal olduğundan $a - b \in I_1$ ve $a - b \in I_2$ yazılabilir. Yani $a - b \in I_1 \cap I_2$ dir. Aynı şekilde $a \in I_1 \cap I_2$ olması $a \in I_1$ ve $a \in I_2$ anlamına gelir.$a \in I_1$,$r \in A$ ve I_1 bir ideal olduğundan $a.r \in I_1$ ve $r.a \in I_1$ dir. Aynı şekilde $a \in I_2$,$r \in A$ ve I_2 bir ideal olduğundan $a.r \in I_2$ ve $r.a \in I_2$ dir. Böylece $a.r \in I_1 \cap I_2$ ve $r.a \in I_1 \cap I_2$ yazılabilir. □

Lemma 5.1.8. *Bir halkaya ait olan iki idealin toplamı yine bir idealdir.*

İspat: R bir halka ve $I_1, I_2; R$ nin iki ideali olsun. $I_1 + I_2 = \{a + b|a \in I_1, b \in I_2\}$ olduğunu biliyoruz. Bu kümenin ideal olduğunu göstermek için her $x, y \in I_1 + I_2$ için $x - y \in I_1 + I_2$ ve her $x \in I_1 + I_2$ ve her $r \in R$ için $r.x \in I_1 + I_2$, $x.r \in I_1 + I_2$ olduğunu göstermemiz gerekir. $x \in I_1 + I_2$ ise $x = a_1 + b_1$; $a_1 \in I_1$ ve $b_1 \in I_2$ olduğunu biliyoruz. $y \in I_1 + I_2$ ise $y = a_2 + b_2$; $a_2 \in I_1$ ve $b_2 \in I_2$ olduğunu biliyoruz. Buna göre ; $x - y = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = a_1 + b_1 - a_2 - b_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$ dir. I_1 ve I_2 ideal olduğundan $(a_1 - a_2) \in I_1$ ve $(b_1 - b_2) \in I_2$ dir. Yani $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I_1 + I_2$. O halde $x - y \in I_1 + I_2$ dir. Böylelikle ilk şartımız sağlanmış oldu. İkinci şart için $r \in R$ ve $x \in I_1 + I_2$ ve $x = a_1 + b_1$,$a_1 \in I_1$ ve $b_1 \in I_2$ olsun.$r.x = r.(a_1 + b_1) = r.a_1 + r.a_2$ dir. I_1 ve I_2 ideal olduğundan $r.a_1 \in I_1$ ve $r.a_2 \in I_2$ dir. Yani $r.a_1 + r.a_2 \in I_1 + I_2$ dir. O halde $r.x \in I_1 + I_2$ dir. Benzer şekilde $x.r \in I_1 + I_2$ olduğu da gösterilebilir. Böylelikle ikinci şartımızda sağlanmış oldu. □

Lemma 5.1.9. *A bir halka ve $P(A)$ da A nın bütün halka ideallerinden oluşan küme olsun. $(P(A), \cap, +)$ bir kafestir. Burada varsayalım ki $(G, +)$ bir değişmeli grup ve $A, B \subset G$ için;*

$$A + B = \{a + b|a \in A, b \in B\}$$

ve

$$A \cap B = \{a | a \in A \ ve \ a \in B\}$$

dir.

Örnek 5.1.10. Lemma 5.1.9 de bahsedilen A halkası $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. $\mathbb{Z}$ esas ideal bölgesi olduğu için $P(Z)$ kümesini şöyle ifade edebiliriz:
$P(\mathbb{Z}) = \{< n >= n\mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}\}$.

1. $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} || n|x$ ve $m|y\}$ şartını sağlayan en küçük tam sayı = ekok $(n, m)\mathbb{Z}$
2. $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = x = na + mb$ şeklinde yazılabilecek en küçük pozitif tam sayı = ebob $(n, m)\mathbb{Z}$

olduğu için $(P(\mathbb{Z}), \cap, +)$ yapısı bir kafestir.

Tanım 5.1.11. Bir tane maksimal ideali olan R halkasına lokal (yerel) halka denir.

Tanım 5.1.12. R bir halka ve $a \in R$ olsun $(a \neq 0)$. $a \cdot b = b \cdot a = 0$ olacak şekilde sıfıra eşit olmayan $b \in R$ varsa a ya sıfır bölen denir.

Örnek 5.1.13. $\mathbb{Z}_6$ kümesini ele alalım. $2 \in \mathbb{Z}_6$ ve $3 \in \mathbb{Z}_6$ dır. $2 \cdot 3 = 6 = 0$ dır. $(2, 3), \mathbb{Z}_6$ nın sıfır bölen çiftidir.

Tanım 5.1.14. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya tamlık bölgesi denir.

Örnek 5.1.15. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tam sayılar halkası, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rasyonel sayılar halkası ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kompleks sayılar halkası birer tamlık bölgesidir.

Tanım 5.1.16. Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya bir cisim denir.

Örnek 5.1.17. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları birer cisimdir. Fakat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkası ters eleman özelliğini sağlamadığından bir cisim oluşturmaz. Örneğin $5 \in \mathbb{Z}$ yi ele alalım.5 in çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{5}$ tir. Fakat $\frac{1}{5}$ tam sayılar kümesinin elemanı değildir.

Lemma 5.1.18. *Her cisim bir tamlık bölgesi olmasında karşın bunun tersi doğru değildir. Buna verilebilecek en güzel örnek $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasıdır. Bir tamlık bölgesi olmasına rağmen bir cisim değildir.*

Tanım 5.1.19. Bir tek eleman tarafından doğurulmuş ideale esas ideal denir. R birimli, değişmeli bir halka ve $a \in R$ ise bir a elemanı tarafından doğrulmuş esas ideal $< a >= \{ra|r \in R\}$ dir.

Tanım 5.1.20. Her ideali esas ideal olan değişmeli bir halkaya esas ideal halkası denir. Esas ideal halkası olan bir tamlık bölgesine esas ideal bölgesi denir.

Tanım 5.1.21. R halkasının kendisi ve $\{0\} \neq I$ ve $R \neq I$ olan I idealine öz ideal denir.

Örnek 5.1.22. F bir cisimse öz ideali yoktur.

Tanım 5.1.23. H bir değişmeli halka ve A da onun özideali olsun. Eğer $x, y \in H$ ve $xy \in A$ olunca daima $x \in A$ veya $y \in A$ oluyorsa, A ideali H nin bir asal idealidir denir. Eğer H nin A yı kapsayan, A dan başka,hiç özideali yoksa, A ya H nin bir maksimal ideali denir.

Lemma 5.1.24. *Her sonlu tamlık bölgesi bir cisimdir.*

İspat: Sonlu bir tamlık bölgesini ele alalım. $A = \{1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ olsun. Tamlık bölgesi birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz olduğu için burada 1, A nın birim elemanıdır. Sıfırdan farklı her elemanının tersinin olduğunu gösterdiğimizde ispat tamamlanmış olacak. Bu $a.b = 1$ olacak şekilde bir b olduğu anlamına gelir. $a \cdot D = \{a \cdot 1, a \cdot a_2, a \cdot a_3, ..., a \cdot a_n\}$ kümesini ele alalım. D sıfır bölensiz olduğundan $a.D$ kümesinin elemanlarının hiçbir tanesi sıfır olmaz. $a1, aa_2, aa_3, ..., aa_n$ birbirinden farklı n-tane eleman olduğundan $D = aD$ yazarız. Böylece ya $a1 = 1$ ya da $aa_i = 1$ olduğu anlamına gelir. Hangisinin olduğu önemli değildir. Sonuç olarak $a \cdot b = 1$ formunda bir b sayısı bulunabiliyor. Bu da D nin çarpımsal bir terse sahip olduğunu gösterir. □

Lemma 5.1.25. *R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R' nin P ideali asaldır ancak ve ancak R/P bir tamlık bölgesidir.*

İspat: ($\Rightarrow$) P, R nin bir asal ideali olsun.R/P nin tamlık bölgesi olduğunu göstermek için birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz olduğunu göstermeliyiz. Tanım gereği R birimli ve değişmeli olduğu için R/P de birimli ve değişmeli bir halkadır. $(x+P), (y+P) \in R/P$ olmak üzere $(x + P) \cdot (y + P) = 0$ olduğunda $(x + P) \cdot (y + P) = xy + P$ eşitliğinden $xy + P = 0$ yazabiliriz. $xy + P = 0 + P$ olması ve P nın asal ideal olmasından dolayı $x \in P$ ya da $y \in P$ olmalıdır. Eğer $x \in P$ ise $x + P = 0 + P$ ve

$y \in P$ ise $y+P=0+P$ olur. Yani ya $x=0$ ya da $y=0$ dır. Böylelikle sıfır bölensiz olduğunu da göstermiş olduk. O halde R/P bir tamlık bölgesidir.

($\Leftarrow$) R/P halkasının bir tamlık bölgesi olduğunu kabul edelim. Eğer $xy \in P$ ise $(x+P)\cdot(y+P) = xy+P = 0+P$ olur. R/P bir tamlık bölgesi olduğu için $x+P=0+P$ yada $y+P=0+P$ yani $x \in P$ yada $y \in P$ olur. O halde P, R nin bir asal idealidir. $\square$

Lemma 5.1.26. *R birimli ve değişmeli bir halka ve m, R nın ideali olsun. m maksimal idealdir ancak ve ancak R/m cisimdir.*

İspat: ($\Rightarrow$) Birimli ve değişmeli bir R halkasını ele alalım. m, R halkasının maksimal ideali olsun. R/m nin cisim olduğunu göstermek için birimli, değişmeli ve çarpma işlemine göre tersi olduğunu göstermeliyiz. R birimli ve değişmeli olduğundan R/m de birimli ve değişmelidir. $x+m \in R/m$ ve $x+m$ sıfır olmayan bir eleman olsun. $1, R$ nin birim elemanı olmak üzere $x = 0 + x \cdot 1 \in m + xR$ yani $m \neq m + xR$ dir. Oysa ki m, R nin maksimal ideali olduğundan $R = m + xR$ dir. Yani $n + xy = 1$ dir. $1 - xy = n \in m$, $xy + 1 = 1 + m$, $1 + m = (x+m)\cdot(y+m)$ dir. Bu da $x+m$ nin çarpmaya göre tersinin olduğu anlamına gelir. Bahsedilen tüm özellikler sağlandığına göre R/m cisimdir.
($\Leftarrow$) Şimdi de R/m nin cisim olduğunu kabul edelim. Göstermemiz gereken m nin R halkasının maksimal ideali olduğudur. J nin $m \subseteq J \subseteq R$ olacak şekilde R nin bir ideali olduğunu varsayalım ve $J \neq m$ olsun. $J \neq m$ olduğunda $x \neq m$ olacak şekilde $x \in J$ vardır. $(x+m), (y+m) \in R/m$ için $(x+m)\cdot(y+m) = 1+m$ olduğundan $(x+m)\cdot(y+m) = xy+m = 1+m$ ve $xy-1 \in m \subseteq J$ yazarız. Eğer $1 = xy - t \in J$ yazarız. Ayrıca $1 \in J$ olması $J = R$ olması demektir. Bu da m nın maksimal ideal olduğu anlamına gelir. $\square$

Lemma 5.1.27. *Birimli ve değişmeli bir halkada her maksimal ideal bir asal idealdir.*

İspat: R birimli ve değişmeli bir halka ve I da R'nin maksimal ideali olsun. Lemma 5.1.26 den R/I bir cisimdir. Her cisim bir tamlık bölgesi olduğundan R/I bir tamlık bölgesidir. Teorem 5.1.25 dan R/I bir tamlık bölgesi olduğundan I ideali R'nin bir asal idealidir. $\square$

Önerme 5.1.28. *Bir cismin $\{0\}$ dan ve kendinden başka ideali yoktur.*

Tanım 5.1.29. R değişmeli bir halka olsun. $P_1 \supseteq P_2 \supseteq ... \supseteq P_l ...$ azalan bir asal idealler zinciri olsun. Bu ideal zinciri için iki olasılık vardır. Ya bir N noktasında sabitleşir ya da hiç bir nokta da sabitleşmez. Eğer bu dizi de N, dizinin sabitleştiği ilk nokta ise o noktaya bu dizinin uzunluğu diyeceğiz. Eğer dizi herhangi bir noktada sabitlenmiyorsa bu dizinin uzunluğuna ∞ denir.

Tanım 5.1.30. $a_0, a_1, ..., a_n$ bir H halkasının elemanları olsun. Bu elemanları katsayı kabul eden bir $f(x)$ polinomu şu şekilde tanımlanır:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

5.2 NÖTHERYEN VE ARTİNYEN HALKALAR

Tanım 5.2.1. R halkasının ideallerinin her artan

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n \subseteq ...$$

zinciri sonlu bir adımda durursa, R ye Nöther halkası ya da nötheryen halka denir. Bu özelliğe kısaca ARTAN ZİNCİR KOŞULU da denir.

A bir cebir ve $I(A)$ da A nın ideal poseti olsun. Eğer $I(A)$ nötheryen ise A ya nötheryen denir.

Teorem 5.2.2. *R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *R nötheryen halkadır.*
2. *R nin her ideali sonlu üretilmiştir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2):$ R nötheryen bir halka ve R halkasına ait herhangi bir I ideali sonlu üretilmemiş olsun. Bir $a_1 \in I$ aldığımızda bir $a_2 \in I/(a_1)$ bulunabilir. $I \neq (a_1, a_2)$ olduğu için I nın içinde bir $a_3 \in I/(a_1, a_2)$ bulunabilir. Bu şekilde devam edersek bir $a_{k+1} \in I/(a_1, ..., a_k)$ bulunabilir. Böylece R nin idealleriyle

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset ... \subset (a_1, ..., a_k) \subset ...$$

zinciri elde edilir. I sonlu üretilmediği için bu zincir de sonsuzdur. Aynı zamanda R halkasını nötheryen kabul ettiğimiz için bahsedilen ideal zinciri bir yerde sabitlenmek zorundadır.Yani çelişki elde ederiz. O halde I sonlu üretilmiştir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n \subseteq ...$ şeklinde bir ideal zincirini ele alalım. $I = \bigcup_{i \geqslant 0} I_i$ bir idealdir. R nin her ideali sonlu üretildiği için $I =< a_1, ..., a_l >$ şeklinde yazılabilir. $(\exists a_l \in R)$. Yani $a_1 \in I_{n_1}, a_2 \in I_{n_2}, ..., a_l \in I_{n_l}$ dir. Eğer n =max$\{n_1, ..., n_l\}$ şeklinde seçersek $I_{n_i} \subseteq I_n$ olur. Hem $I \subseteq I_{n_i}$ hem de $I_{n_i} \subseteq I_n$ olduğu için $I = I_n$ dir. Yani R halkası nötheryendir. □

Örnek 5.2.3. Her temel ideal bölgesi bir nötheryen halkadır. Özel olarak $\mathbb{Z}$ bir nötheryen halkadır.

Tanım 5.2.4. R halkasının içinde her azalan ideal zinciri

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$$

sonlu bir adımda durursa, R ye Artinyen halkası denir. Bu özelliğe AZALAN ZİNCİR KOŞULU ismi de verilir.

A bir cebir ve $I(A)$ da A nın ideal poseti olsun. Eğer $I(A)$ artinyen ise A ya artinyen cebir denir.

Teorem 5.2.5. *[7] (Hopkins-Levitski Teoremi) Her artinyen halka nötheryendir. Fakat tersi doğru değildir.*

Örnek 5.2.6. Her cisim artinyen ve nötheryen bir halkadır. Çünkü 0 ve kendisinden başka ideali yoktur. Dolayısıyla ideallerden oluşan her zincir sonlanır.

Örnek 5.2.7. Her $n \geqslant 1$ için $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir idealidir.

$$\mathbb{Z} \supseteq 2\mathbb{Z} \supseteq \cdots \supseteq n\mathbb{Z} \supseteq \cdots$$

azalan zinciri yazılabilir. Fakat bu azalan zincir bir noktada sabitlenip durmaz. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası artinyen değildir.

Örnek 5.2.8. Sonlu boyutlu bütün halkalar artinyendir. Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi halkalara ait azalan ideal zincirleri yazılabilmektedir. Artinyen olması için bu ideal zincirleri bir yerde sabitlenip durmak zorundadır. Bu sabitlenmeyi sağlayacak olan da halkanın sonlu boyutlu olmasıdır.

Teorem 5.2.9. *Sonlu boyutlu bütün cebirler hem artinyen hem de nötheryendir.*

İspat: Sonlu boyutlu cebirler hem alttan hem de üstten sınırlıdır. Yani yazılacak olan ideal zincirleri hem alttan hem de üstten sınırlı olacağı için iki yöndede sabitlenip durmak zorunda kalacaktır. Bu da hem artinyen hem de nötheryen olması demektir. □

5.3 ÖKLİD BÖLME HALKALARI

Tanım 5.3.1. R değişmeli bir halka olsun. $\varphi : R \setminus \{0_R\} \to \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu ele alalım.

1. $a, b \in R$ $a \cdot b \neq 0$ ve $a \neq 0$ ise $\varphi(a) \leqslant \varphi(a \cdot b)$
2. $a, b \in R$ ve $b \neq 0$ ise $a = bq + r$ ise $r = 0$ veya $(r \neq$ ve $\varphi(r) < \varphi(b))$

oluyorsa R ye öklid halkası denir. Tamlık bölgesi olan öklid halkasına öklid bölgesi denir. φ ise öklid fonksiyonu adını alır.

Her a ve $b \neq 0$ tamsayıları için $a = qb + r$ ve $0 \leq r < |b|$ olacak şekilde q ve r tamsayıları tek türlü belirlenebilir. r sayısı a'nın b ile bölümünden kalandır. $r = 0$ durumunda b, a'yı böler denir ve $b|a$ ile gösterilir.

Teorem 5.3.2. *Elimizde a, b, q ve $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olsun. a ve b sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü (a, b) şeklinde gösterilmek üzere $a = bq + r$ ve $0 \leqslant r < q$ ise*

$$(a, b) = (b, a - qb) = (b, r)$$

dir.

Örnek 5.3.3. $\mathbb{Z}[5]$ te iki tane polinom ele alalım. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ ve $g(x) = x^2 - 3x + 2$ olsun. Bu polinomlar için $3x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = (x^2 - 3x + 2) \cdot (3x^2 + 10x + 25) + 68x - 45$ yazabiliriz. Bu durumda $q = 3x^2 + 10x + 25$ ve $r = 68x - 45$ olduğu görülür.

Örnek 5.3.4. Reel sayılar bir öklid bölme halkasıdır.

Örnek 5.3.5. k bir cisim olmak üzere $k[x]$ bir öklid bölme halkasıdır.

Örnek 5.3.6. $\mathbb{Z}_7[x]$ de verilen $f(x) = 3x^2 + 2$ ve $g(x) = x^4 + 5x^2 + 2x + 2$ polinomlarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

Verilen polinomların en büyük ortak bölenini(ebob) bulmak için öklid algoritmasını kullanabiliriz. Öklid algoritması gereği derecesi büyük olan polinomu derecesi küçük olan polinoma böleriz. Daha sonra böleni işlemin kalanına böleriz. Bu işlemi kalan sıfır elde edene kadar devam ettiririz. Kalan sıfır olduğunda bir önceki işlemin kalanı bize ebob u verir. Bu durumda;

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 = (x^3 - x^2 + x - 1).(x^2 + 1) + (-x + 1)$$

$$(x^3 - x^2 + x - 1) = (-x + 1).(-x^2 - 1) + 0$$

Bu durumda ebob $(-x + 1)$ dir.

Teorem 5.3.7. *R bir öklid bölme halkası olsun. Eğer $h = gcd(f, g)$ ise o halde $\exists x, y \in R$ için $xf + yg = h$ dır.*

Lemma 5.3.8. $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle gcd(f, g)\rangle$

İspat: $u \in < f(x), g(x) >$ olduğunda teorem gereğince $u = af(x) + bg(x)$ yazılabilir. $(\exists a, b)$ Yani $gcd(f, g) \in < f, g >$ dir. O halde $< gcd(f, g) \subseteq < f, g >$ dir. $af + bg \in < f, g >$ olduğunu biliyoruz. $\alpha = gcd(f, g), f = \alpha \cdot f'$ ve $g = \alpha \cdot g'$ olsun. Bu durumda $af + bg$ yerinde $a \cdot \alpha \cdot f' + b \cdot \alpha \cdot g'$ yazılabilir. Bu ifade α ortak parantezine alınırsa $\alpha(af' + bg')$ şeklinde yazılabilir. $\alpha(af' + bg') \in < gcd(f, g) >$ dir. O halde $< f, g > \subseteq < gcd(f, g) >$ dir. Hem $< gcd(f, g) \subseteq < f, g >$ hemde $< f, g > \subseteq < gcd(f, g) >$ olması $< f(x), g(x) >=< gcd(f, g) >$ olduğunu gösterir. □

Lemma 5.3.9. $f_1, ..., f_n \in k[x]$ *olsun.* $< f_1, ..., f_n >=< gcd(f_1, ..., f_n) >$ *dir*

5.4 POLINOM HALKALARI

Tanım 5.4.1. F bir cisim ve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in F$ olsun. x bilinmeyenine bağlı polinom $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots a_{n-1}x^{n-1}$ şeklinde tanımlanır. Notasyon olarak

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 5.4.2. Polinomlar üzerinde toplama işlemi

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.4.3. Polinomlar üzerinde çarpma işlemi $k = i + j$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

öyle ki

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

şeklinde tanımlanır. Yani $ax^i \cdot bx^j = (ab)x^{i+j}$ şeklindedir.

Tanım 5.4.4. Bütün katsayıları sıfır olan polinoma sıfır polinom denir.

Tanım 5.4.5. Tek değişkenli polinom $k[x]$, iki değişkenli polinom $k[x, y]$ ve genellersek n değişkenli polinom $k[x_1, x_2, ..., x_n]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.4.6. *Tek değişkenli polinomlar halkasinda her ideal tek eleman tarafından gerilir.*

İspat: I tek değişkenli polinom halkasi $k[x]$'de bir ideal olsun. Bu idealden sıfır olmayan bir f elemanını alalım. Bunu bölme algoritmasının tanımı gereğince $h = q.f + r$ şeklinde yazabiliriz. Yine bölme algoritması gereğince biliyoruz ki ya $r = 0$ olmalıdır ya da $deg(r) < deg(f)$ olmalıdır. Eğer $r = 0$ ise $h = q.f$ dir. Yani I ideali f tarafından gerilmektedir. $(I \subseteq \langle f \rangle)$ O halde bizim göstermemiz gereken $r \neq 0$ olduğunda çelişki elde ettiğimizdir. Bunun için $r \neq 0$ olsun. Bu durumda $r = h-q.f \in I$ olur. $r = 0$ şartı sağlanmadığına göre $deg(r) < deg(f)$ şartı sağlanmalıydı. Ama açıkça görüldüğü gibi $deg(f) < deg(r)$ dir. Bu da çelişki oluşturur. O halde $r = 0$ dır. □

Teorem 5.4.7. *F bir cisim ve $a(x), b(x)$ ve $c(x)$ $F[x]$' ten alınan polinomlar olsun. $a(x)$ sıfır olmayan bir polinom ve $a(x) \cdot b(x) = a(x) \cdot c(x)$ ise $b(x) = c(x)$ dir.*

İspat: F bir cisim, $a(x), b(x)$ ve $c(x)$ $F[x]$' ten alınan polinomlar ve $a(x) \cdot b(x) = a(x) \cdot c(x)$ olsun. $a(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot c(x) = 0$ ve $a(x) \cdot (b(x) - c(x)) = 0$ olur. $a(x) \neq 0$ olduğu için $b(x) - c(x) = 0$ olması gerekir. Bu da $b(x) = c(x)$ demektir. □

Tanım 5.4.8. Herhangi bir k cisminden alınan birbirinden bağımsız $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılmasıyla çok değişkenli polinomlar elde edilir.

Teorem 5.4.9. *F bir cisim ise $F[x]$ bir esas ideal bölgesidir.*

Örnek 5.4.10. F bir cisim olmak üzere, $F[X]$ bir nötheryen halkadır. Fakat $F[X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...]$ bir nötheryen halka değildir. Gerçekten ideal zincirini $(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset ... \subset (X_1, X_2, ..., X_n, ...) \subset ...$ şeklinde yazarsak sonsuz bir zincir olduğunu görürüz. Bir yerde sabitlenip durmayacağından nötheryen bir halka değildir.

5.5 MONOMİYAL İDEALLER

Tanım 5.5.1. $A = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ de bir I idealinin monomiyal ideal olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir:

1. Monomiyal idealler tarafından gerilmesi gerekir.
2. $f = \sum k_\alpha x^\alpha \in I$ olduğunda $x_\alpha \in I$ ve $k_\alpha \neq 0$ olmalıdır.

Tanım 5.5.2. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ negatif olmayan tam sayılar olsun. Monomiyaller notasyon olarak

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.....x_n^{\alpha_n}$$

şeklinde gösterilir. Bu monomiyalin toplam derecesi $\alpha_1 + ... + \alpha_n$ dir.

Örnek 5.5.3. $f = \frac{1}{2}x^2y^2z^3 + \frac{3}{4}x^2yz^3 + 5xyz$ polinomunu ele alalım. Toplam derece bizim için $2 + 2 + 3 = 7$ dir.

Tanım 5.5.4. $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (0, 0, ..., 0)$ olduğunda $x^\alpha = x_1^0.x_2^0....x_n^0$ yani $x_\alpha = 1$ olur.

Tanım 5.5.5. Polinomlar; monomiyallerin lineer kombinasyon şeklinde yazılmasıyla elde edilir.

Örnek 5.5.6. $X_1^{a_1}.....X_n^{a_n}$ monomiyaldir. Fakat $X_1 + X_2$ monomiyal değildir.

Tanım 5.5.7. $k[x_1, x_2, ..., x_n]$, n değişkenli polinomlardan $f_1, f_2, ..., f_k$ polinomlarını ele alalım.

$$< f_1, ..., f_k >= \left\{ \sum_{i=0}^{k} h_i f_i : h_1, ..., h_k \in k[x_1, ..., x_n] \right\}$$

kümesi $k[x_1, ..., x_n]$' in $f_1, f_2, ..., f_k$ tarafından gerilen idealidir.

Tanım 5.5.8. Monomiyal I ideali notasyon olarak $A \subseteq \mathbb{N}^n$ iken $I =< x^\alpha, \alpha \in A >$ şeklinde gösterilir.

Lemma 5.5.9. *I bir monomiyal ideal olsun.$I =< x^\alpha, \alpha \in A >$ şeklinde gösterelim. $x^\beta \in I$ olması için gerek ve yeter şart x^β nın x^α tarafından bölünmesidir.*

İspat: $x^\beta \in I$ olsun. Bu durumda $x^\beta | x^\alpha$ koşulunun sağlandığını gösterelim. $x^\beta | x^\alpha$ demek $x^\beta = x^\alpha \cdot k$ olacak şekilde bir k sayısı vardır anlamına gelir. Bunu tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

1. $k = 1$ ise $x^\beta = x^\alpha \cdot 1$ yani $x^\beta = x^\alpha$ demektir. Bu da $\beta = \alpha$ anlamına gelir.
2. $k = n$ için doğru olsun. Bu da $x^\beta = x^\alpha \cdot n$ yani $x^\beta - x^\alpha \cdot n = 0$ demektir.
3. $k = n + 1$ için doğru mudur?

$$x^\beta = x^\alpha \cdot (n+1)$$

$$x^\beta = x^\alpha \cdot n + x^\alpha$$

$$x^\beta - x^\alpha \cdot n = x^\alpha$$

2.adımdan $x^\beta - x^\alpha \cdot n = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $0 = x^\alpha$ olur. Ki bu da $\alpha = 0$ Yani $k = n + 1$ içinde doğrudur.

□

Lemma 5.5.10. *İki monomiyal idealin aynı olması için gerek ve yeter şart aynı monomiyaller tarafından gerilmeleridir.*

İspat: Var sayalım ki iki monomiyal ideal için $\langle x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n} \rangle = \left\langle x^{\beta_1}, \ldots, x^{\beta_m} \right\rangle$ olsun. Lemma 5.5.9 yüzünden $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi ile $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ kümelerinin aynı olması gerekir. □

Tanım 5.5.11. $\alpha \in A$ olduğunda x^α için $A \subseteq \mathbb{Z}^n_{>0}$ monomiyal idealdir.

Örnek 5.5.12. $I = \langle x^3 \rangle$ olduğunda I monomiyal ve $A = \{n \in Z | n \geqslant 3\}$ dir.

Örnek 5.5.13. $I = \langle x^2 y, x y^3 \rangle$ için;

$$(a, b) + \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0} = \{(a, b) + (x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2 x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$

olduğundan

$$A = ((2, 1) + \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}) \cup ((1, 3) + \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0})$$

dır. Ve I monomiyal idealdir.

Tanım 5.5.14. Çok değişkenli polinomları ele alalım. $f_1, f_2, ..., f_n$ polinomlarının monomiyallerinin en küçük ortak katı I yı geren idealleri verir.

Örnek 5.5.15. $f_1 = X^3, f_2 = Y^2, g_1 = X^4, g_2 = Y^3$ olsun.

1. ekok$(f_1, g_1) = X^4$
2. ekok$(f_1, g_2) = X^3Y^3$
3. ekok$(f_2, g_1) = X^4Y^2$
4. ekok$(f_2, g_2) = Y^3$

olduğundan $\{X^4, X^3Y^3, X^4Y^2, Y^3\}$, I' yı geren ideallerdir.

5.6 GROBNER BAZI

Tanım 5.6.1. $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ nın bir I ideali tarafından içerilen ve sıfırdan farklı elemanlara sahip bir $G = \{g_1, g_2, ..., g_t\}$ kümesi verilmiş olsun. Eğer her $f \in I - \{0\}$ ve en az bir $i \in \{1, 2, ..., t\}$ için $Im(g_i)/Im(f)$ ise G kümesine bir grobner bazı denir.

Tanım 5.6.2. $f, g \in k[x_1, ..., x_n]$ şeklinde polinomlar olsun. f polinomonun ilk terimini $LT(f)$, g polinomunun ilk terimini $LT(g)$ notasyonu ile ve x^y de $ekok(LT(f), LT(g))$ şeklinde gösterilirse grobner bazı aşağıdaki formülle hesaplanabilir:

$$S(f, g) = \frac{x^y}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^y}{LT(g)} \cdot g$$

Burada ilk terimden kastımız en büyük dereceli terimdir.

Tanım 5.6.3. K bir cisim olmak üzere $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ ve $G = \{g_1, g_2, ..., g_t\} \subseteq I$ olduğunda aşağıdaki ifadeler denk olarak tanımlanır:

1. G bir grobner bazıdır.
2. $LT(I) = LT(G)$

Önerme 5.6.4. *K bir cisim olmak üzere $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ nin her idealinin bir grobner bazı vardır.*

İspat: I ideali tarafından içerilen ve sıfırdan farklı elemanlara sahip bir $G = \{g_1, g_2, ..., g_t\}$ kümesi verilmiş olsun. Bu durumda $LT(I), g_1, g_2, ..., g_t$ polinomlarının gerdiği

$\{LT(g_1), LT(g_2), ..., LT(g_t)\}$ küme sonlu üreteçli olduğu için $g_1, g_2, ..., g_t \in I$ dır. Yani $LT(G) = LT(I)$ dır. Buda tanım gereği G nin grobner bazı olması demektir. $\square$

Grobner bazını hesaplarken polinomların terimlerini sıralamamız gerekecek. Bunun için iki tane sıralama kuralı belirtebiliriz.

1. Gr sıralaması için terimlerin toplam sıralamasına bakmalıyız. Toplam derecesi büyük olan terim büyük terim olarak kabul edilir.
2. $Grlex$ sıralaması için önemli olan sözlük sıralamasıdır. Terimleri üsleri doğrultusunda çarpım şeklinde açıp alfabetik olarak önce olan terim büyük terim olarak kabul edilir.

Farklı sıralama tarzlarının kullanılması farklı grobner bazı elde etmemize sebep olur.

Örnek 5.6.5. $\mathbb{R}[x, y]$ den iki polinom alalım. $f = x^3y^2 - x^2y^3$ ve $g = 3x^4 + y^2$ olsun. Grlex sıralamasına göre grobner bazını hesaplayalım. Grlex bizim için sözlük sırası demektir. Bunun için terimleri açmamız gerekir. $f = x^3y^2 - x^2y^3$ polinomu $f = xxxyy - xxyyy$ şeklinde ve aynı şekilde $g = 3x^4 + y^2$ polinomu $g = 3xxxxy + yy$ şeklinde yazılır. Alfabetik olarak bakıldığında f polinomu birinci terimi ikinci terimden aynı şekilde g polinomunun birinci terimi ikinci teriminden büyüktür. Bu durumda $LT(f) = x^3y^2$ ve $LT(g) = 3x^4y$ dir. x^y yi hesaplamak için $ekok(LT(f), LT(g))$ ye ihtiyacımız vardır. $ekok(x^3y^2, 3x^4y) = x^4y^2$ dir. O halde

$$S(f, g) = \frac{x^y}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^y}{LT(g)} \cdot g$$

$$= \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g$$

$$= x \cdot f - (-1/3) \cdot y \cdot g$$

$$= -x^3y^3 - (1/3)y^3$$

dir.

Önerme 5.6.6. *Tek değişkenli polinomlarda iki polinomun aynı ideal tarafından gerilmesi için biri diğerinin tam sayı katı olmalıdır. İki değişkenli polinomlarda ise aynı ideal tarafından gerilmesi için aynı grobner bazına sahip olması gerekir. Yani, polinom cebirlerinde grobner bazı ideallerin üreteçlerini verir.*

5.7 KRULL BOYUTU

Tanım 5.7.1. R değişmeli ve nötheryen bir halka olsun. R nin krull boyutu, R nin içerisinde bulabileceğimiz en uzun asal ideal zincirinin uzunluğudur. Eğer asal zincirlerin en uzunu yoksa o zaman bu halkanın Krull boyutu ∞ diyeceğiz.

Örnek 5.7.2. Eğer k bir cisim ise $kr.dim(k) = 0$

Örnek 5.7.3. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası esas ideal bölgesidir. Yani tek eleman tarafından üretilmiştir. Bu sebepten dolayı $kr.dim(\mathbb{Z}) = 1$. Hatta genellersek bütün esas (temel) ideal halkalarının (bölgelerinin) krull boyutu 1 e eşittir.

Lemma 5.7.4. *Her artinyen tamlık bölgesi bir cisimdir.*

İspat: $x \in A$ ve $x \neq 0$ olsun. Bu durumda $< x > \supseteq < x^2 > \supseteq \cdots$ bir azalan ideal dizisidir. O zaman öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $(x^n) = (x^{n+1})$ olur. Yani öyle bir $a \in A$ vardır ki $x^n = a \cdot x^{n+1}$ olur. Ama o zaman $0 = a \cdot x^{n+1} - x^n = x^n(ax - 1)$ olur. A bir tamlık bölgesi olduğu için $x^n \neq 0$ dır. O yüzden $ax - 1 = 0$ olur. Yani x terslenebilirdir. O halde A bir cisimdir. □

Lemma 5.7.5. *R, artinyen bir halka olsun. R nin her asal ideali maksimaldir.*

İspat: p bir asal ideal olsun. R/p, R artinyen olduğu için artinyen, p asal olduğu için tamlık bölgesidir. Yani R/p artinyen tamlık bölgesidir. Bu da lemma 5.7.4 den dolayı p nin aynı zamanda maksimal olduğunu gösterir. □

Lemma 5.7.6. *R, artinyen bir halka olsun. R nin krull boyutu sıfırdır.*

İspat: Lemma 5.7.5 te ispatladığımız gibi R nin her asal ideali maksimaldir. Bu yüzden pozitif uzunlukta bir asal ideal zinciri oluşturmamız mümkün değildir. Bu da krull boyutunun sıfır olduğu anlamına gelir. □

Teorem 5.7.7. *R nin artinyen olması için gerek ve yeter şart R nin nötheryen ve* $dimR = 0$ *olmasıdır.*

İspat: ($\Rightarrow$) R artinyen bir halka olsun. Hopkins-Levitzki teoremi bize R nin aynı zamanda nötheryen olduğunu söyler. Aynı zamanda lemma 5.7.6 den $dimR = 0$ dır. ($\Leftarrow$) R nötheryen bir halka ve $dimR = 0$ olsun. Bu durumda R nin tüm asal idealleri maksimaldir. Bu da sınırlı sayıda maksimal ideali olduğunu gösterir. R nin maksimal ideallerinin kümesi $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ şeklinde olsun. Bu aynı zamanda tüm asal ideallerinin kümesidir. $\eta = m_1 \cap \cdots \cap m_n = m_1. \cdots .m_n$ dir. O halde $m_1^l ... m_n^l = 0$ dır. Bu da η nın nilpotent olduğunu gösterir. Bu da R nin artinyen olduğu anlamına gelir. □

Teorem 5.7.8. *A nötheryen bir yerel halka ise dimA sınırlıdır.*

İspat: A bir nötheryen bir halka olsun. A halkasının asal ideallerinin supremumu olan p asal idealini ele alalım. Halka nötheryen olduğu için idealleri;

$$p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_r = p$$

şeklinde yazabiliriz. Krull boyutu bizim için asal ideal zincirinin uzunluğu olduğu için tanım gereği $dimA = r$ dir. Yani $dimA$ sonludur. □

Teorem 5.7.9. *A nötheryen ise* $dim(A[T]) = dim(A)+1$ *dir. O halde* $dim(k[T_1, ..., T_n]) = n+dimk$ *yazılabilir. Hatta k bir cisim olduğunda* $dimk = 0$ *olduğu için* $dim(k[T_1, ..., T_n]) = n$ *dir.*

Örnek 5.7.10. $R = k[x]/(x^3)$ ü ele alalım. $R = Span\{1, x, x^2\}$ dir. Dolayısıyla R nin içindeki bütün ideallerinin uzunluğu 3 ten büyük olamaz. O halde krulldim(R) $\leqslant$3 dir.

Önerme 5.7.11. *Polinom cebirlerinde krull boyutu değişken sayısına eşittir.*

İspat: k bir cisim olmak üzere $R = k[X_1, ..., X_n]$, n değişkenli bir polinom olsun. Bu polinoma ait tek maksimal ideal $(X_1, ..., X_n)$ dir. Bu polinoma ait asal idealler zinciri:

$$(0) \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \cdots \subset (X_1, ..., X_n)$$

şeklinde yazılır. Bu ideal zincirinde gördüğümüz gibi en uzun asal ideal zinciri $(X_1, ..., X_n)$ dir. Ve uzunluğu n dir. □

6 YOL CEBİRLERİ

6.1 CEBİRLER VE HALKALAR

Tanım 6.1.1. V bir vektör uzayı olsun. Elimizde $V \times V \to V$ şeklinde bilineer bir morfizma var ise, ve bu morfizma birleşme ve birim eleman özelliklerini sağlıyorsa o zaman V ye cebir diyeceğiz.

Eğer V bir cebir ise o zaman her $a, b, c \in V$ için;

$$a = 1 \cdot a = a \cdot 1 \quad \text{ve} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

şartı sağlanır.

Elimizde $\mathscr{A}$ bir birleşmeli bir cebir olsun. $\mu : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ çarpmasının birleşme ve birim eleman özelliklerini sağladığını aşağıdaki diagramın iki ayağının eşit olduğunu söyleyerek anlatabiliriz:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \arrow[r, "\mu\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\mu"'] & \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \arrow[r, "\mu"] & \mathscr{A}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id\otimes 1"] \arrow[dr, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \arrow[l, "1\otimes id"'] \arrow[dl, equal] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Tanım 6.1.2. Cebir ve halka birbirinden farklı kavramlardır. Cebirin halkadan farkı içinde cisim olmasıdır. Halkalar değişmeli gruplar kategorisi içinde tanımlanırlar. Yani aksiyomlarındaki tensör çarpması $\otimes$ tabandaki $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlanır. Cebirlerde ise aynı tensör çarpması taban cismi k üzerinde tanımlanmıştır. Daha basit bir tanımı da şudur: bir halkanın üzerinde en temelde $+$ işlemine göre bir değişmeli grup vardır. Bir cebir ise bir cisim üzerine vektör uzayı olmalıdır.

Örnek 6.1.3. 1. $\mathbb{Z}[x]$ içinde cisim olmadığı için bir halkadır.

2. $\mathbb{R}[x]$ içinde $\mathbb{R}$ cismi olduğu için bir cebirdir.

3. $\mathbb{Q}[x]$ içinde $\mathbb{Q}$ cismi olduğu için bir cebirdir.

6.2 YOL CEBİRLERİ VE ÖRNEKLERİ

Tanım 6.2.1. Bir G yönlü çizgesi ve bu çizgedeki bir p yolu için yolun başladığı düğüm noktasına $s(p)$, bittiği düğüm noktasına $t(p)$ diyeceğiz.

Tanım 6.2.2. $G = (V, E)$ bir çizge olsun ve $P(G)$ bu çizgedeki tüm yolların poseti olsun. Şimdi A_G'yi $P(G)$'nin gerdiği vektör uzayı şeklinde tanımlayalım. Bu vektör uzayında aşağıdaki şeklinde bir çarpma tanımlayalım.

$$p \cdot q = \begin{cases} pq & t(q) = s(p) \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu çarpmayı ele alalım. p, q ve r yollar olsun. $(p.q).r$ ve $p.(q.r)$ yolları $t(p) = s(q)$ ve $t(q) = s(r)$ olduğu için aynı yere bağlanır. Bu da bize bu çarpma işleminin birleşme özelliği olduğunu gösterir. Ayrıca $(p.q).0 = 0.(q.r) = 0$ dır.

1. x bir köşe noktası olmak üzere $e_x^2 = e_x$
2. x ve y iki köşe ve $x \neq y$ olmak üzere $e_x.e_y = 0$
3. $\alpha : x \to y$ bir yol olmak üzere $e_y\alpha = \alpha = \alpha e_x$

bağıntılarını sağlaması gerekir.

Tanım 6.2.3. A bir cebir ve $E \subset A$ elimizdeki sonlu bir küme olsun. Eğer her $e, f \in E$ için $e \neq f$ olduğu durumda $ef = fe = 0$ ve her $e \in E$ için $e^2 = e$ ise o zaman E kümesine bir ortogonal idempotentler kümesi denir.

Tanım 6.2.4. Eğer bir yönlü çizge G sonlu ise birim elemana sahiptir ve $1 = \sum_{v \in V} v$ dir.

Tanım 6.2.5. Herhangi bir G çizgesine ait yol cebiri $\mathscr{A}$ olsun ve e bu çizgede bir köşe olsun. Bu durumda $e\mathscr{A}e$ kümesi e'de başlayıp e'de biten yolların cebiri olarak tanımlanır.

Örnek 6.2.6. Bazı özel yönlü çizgeler aşağıdaki gibidir:

1. Kronecker yönlü çizgesi :

$$a\bullet \rightrightarrows b\bullet$$

2. $\mathbb{D}_4$ yönlü çizgesi :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet & \end{tikzcd}$$

3. $\mathbb{A}_3$ yönlü çizgesi:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

ya da

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

4. $\mathbb{A}_n$ yönlü çizgesi:

$$\bullet \text{———} \bullet \text{———} \bullet \cdots\cdots\cdots \quad \bullet \text{———} \bullet$$

Örnek 6.2.7. Katsayıları k cisimden olan tek değişkenli polinomlar halkası $k[x]$ bir yol cebiridir. Polinomlar halkasının katsayıları $\mathbb{N}$ kümesinin elemanlarıdır. $\mathbb{N}$ kümeside iyi sıralı bir küme olduğu için bir yol cebiri oluşturur.

Örnek 6.2.8. Kronecker yönlü çizgesini ele alalım.

$$\begin{tikzcd} 1\bullet \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2\bullet \end{tikzcd}$$

Bir yol cebirini matris cebiriyle ifade ederken köşe (düğüm) noktaları matrisin köşegenine yerleştirilir. Yollar ise kalan matris elemanları olarak yerleştirilir. Örneğin 1 den 2 ye giden yol e_{12} olarak düşünülüp matriste uygun yere yazılır. Bu yol cebiri 2×2 matris olarak yazılabilir. Köşegene yazılan k; 1 ve 2 olarak isimlendirilen düğüm noktalarıdır. 1 den 2 ye giden iki tane yol olduğu için matriste e_{12} olan yere k^2 yazılır. Yani elde edilen matris:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k & k^2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 6.2.9. $\mathscr{A}$ bir cebir olsun. $\mathscr{A}/I = \{x + I | x \in \mathscr{A}\}$ dır. Tanım gereği $x - y \in I$ olduğunde $x \sim y$ şeklinde tanımlayacağımız bir denklik bağıntısında $\mathscr{A}/I$ tanım gereği $\mathscr{A}/\sim$ olur.

Örnek 6.2.10.

$$\begin{tikzcd} e_0\bullet \arrow[r, bend left, "x"] & e_1\bullet \arrow[l, bend left, "t"] \arrow[r, bend left, "y"] & e_2\bullet \arrow[l, bend left, "z"] \end{tikzcd}$$

çizgesini ele alalım. Yol cebirlerinin genel hali $x(tx)^n(yz)^m t$ şeklinde söylenebilir. Ayrıca $xy - zt \in e_0 \mathscr{A} e_0$ dır.

Örnek 6.2.11.

$$\begin{tikzcd} e_{11}\bullet \arrow[r, bend left, "e_{12}"] & e_{22}\bullet \arrow[l, bend left, "e_{21}"] \end{tikzcd}$$

çizgesini ele alalım. Bu çizgenin yol cebirlerini $e_{12}e_{21}e_{12}e_{21}e_{12}e_{21}$... şeklinde yazabiliriz. Burada dikkat edilmesi gereken $e_{11}^2 = e_{11}$ dir. Fakat $(e_{12} \cdot e_{21} \neq e_{11})$ dir. Hatta $e_{12}e_{21} = e_{11}$ ve $e_{21}e_{12} = e_{22}$ oluşu yol cebirleri ve matris cebirleri arasındaki ilişkiyi açıkça ortaya koyar.

Tanım 6.2.12. $(P(G), <)$ ikilisinin bir poset olduğunu biliyoruz. Biz her $r \in V$ için S_r diye yeni bir küme tanımlayacağız. $S_r = \{\alpha \in P(G) | s(\alpha) = r\} \subseteq P(G)$ dir.

Tanım 6.2.13. $G = (V, E)$ çizgesi içinde döngü olmayan bir çizge olsun ve $x, y \in V$ olsun. V üzerinde yeni bir kısmi sıralama tanımlayabiliriz. Bu çizgede eğer öyle bir $\alpha \in S_r$ var ise bu yolda x köşesi y köşesinden önce geliyor ise o zaman $x \vdash y$ denir.

Tanım 6.2.14. $\Gamma : S_r \to V$ şeklinde $\alpha \mapsto t(x)$ olacak şekilde tanımlanan bağıntıyı ele alalım. Γ her zaman tanımlıdır.

$$\begin{tikzcd} r\bullet \arrow[dr, squiggly, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, squiggly, bend right, "\beta"'] & \\ & x\bullet \end{tikzcd}$$

Verilen çizgede açıkça görüldüğü gibi $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$ olduğu için tanımlanan Γ bire-bir değildir. Ancak Γ her zaman bir sıra koruyucu fonksiyon belirtir.

Önerme 6.2.15. *Eğer G çizgesi içinde döngü yoksa o zaman G'nin yol cebiri sonlu boyutludur.*

İspat: Teorem 4.1.13 yüzünden G içindeki yollar kümesi $P(G)$ sonludur. O zaman P(G) tarafından gerilen yol cebiri de sonlu boyutlu olur. □

Teorem 6.2.16. *Eğer G çizgesi içinde döngü yoksa o zaman G'nin yol cebiri hem artinyen hem de nötheryendir.*

İspat: Eğer G çizgesi içinde döngü yoksa o zaman $P(G)$ sonludur.(Teorem 4.1.13) Bu durumda G'nin yol cebirleri de sonlu boyutludur.(Teorem 6.2.16) Teorem 5.2.9

den bildiğimiz üzere sonlu boyutlu tüm cebirler hem artinyen hem de nötheryendir. $\square$

7 SONUÇ

Teorem 7.0.1. *G içinde döngü olmayan bir çizge olsun. Bu çizgenin bütün yollarının oluşturduğu poset $P(G)$ ve bu çizgenin yol cebiri de $\mathscr{A}_G$ olsun. Bu durumda $\mathscr{A}_G$'nin monomiyal idealleri ile $P(G)$'nin poset idealleri arasında bir bire-bir ve örten bir fonksiyon vardır.*

İspat:

1.Adım: G' de döngü olmadığı için $P(G)$ sonludur. Dolayısıyla $\mathscr{A}_G$ sonlu boyutludur. (Önerme 6.2.15)

2.Adım: Sonlu boyutlu bütün cebirler hem nötheryen hem artinyendir. (Teorem 5.2.9) Yani $\mathscr{A}_G$ hem nötheryen hem artinyendir. O yüzden idealleri sonlu gerilir. (Hilbert'in Nullstellensatz Teoremi) O yüzden her monomiyal ideale karşılık gelen bir karşı zincir vardır.

3.Adım: Daha önce poset idealler ile karşı zincirler arasındaki ilişkiyi

$$\{\text{P'nin idealleri}\} \rightleftharpoons \{\text{P'nin karşı zincirleri}\}$$

şeklinde göstermiştik. (Teorem 3.3.10) Şimdi de

$$\{\mathscr{A}_G\text{'nin monomiyal idealleri}\} \rightleftharpoons \{\text{P'nin karşı zincirleri}\} \rightleftharpoons \{\text{P'nin idealleri}\}$$

olduğunu göstermeliyiz. Monomiyal ideallerden karşı zincirlere geçiş 2.Adım da gösterildi. Karşı zincilerden monomiyal idealler elde edildiğini göstermemiz gerekiyor. Daha önce karşı zincirlerden ideal elde edildiğini görmüştük. Monomiyal idealler ise söz konusu idealleri geren ideallerin lineer kombinasyon halinde yazılmamış halidir.

$\square$

Kaynaklar

[1] Adams, W. ve Loustaunau, P. *An Introduction to Grobner bases*, 1994. American Mathematical Society.

[2] Atiyah, M. ve Macdonald, I.G. *Introduction to Commutative Algebra*, 1969. Addison Wesley Publishing Company.

[3] Bilhan, M.; Güloğlu, İ. ve Koç, C. Soyut Cebir, 1991. Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Matematik Lisans.

[4] Birkoff, G. *Lattice Theory*, 1973. American Mathematical Society.

[5] Blyth, T.S. *Lattices and ordered algebraic structure*, 2005. Springer

[6] Çallıalp, F. ve Tekir, Ü. *Değişmeli Halkalar ve Modüller*, 2009. Birsen Yayın Evi.

[7] Enescu, F. *Commutative algebra lecture notes*, Georgia Technology of Institute Üniversitesi, 2010. http://www2.gsu.edu/˜matfxe/commalglectures/

[8] Erdoğan, M. ve Yılmaz, G. *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi*, 2008. Beykent Üniversitesi Yayın Evi.

[9] Grillet, P.A. *Abstract Algebra*, 2000. Springer-Verlag Press.

[10] Levine, L. *Algebraic combinatorics lecture notes*, Cornell Üniversitesi, 2011. http://www.math.cornell.edu/˜levine/18.312/

[11] Taşçı, D. *Soyut Cebir*, 2007. Alp Yayın Evi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ecem Tuğçe CESUR

Sürekli Adresi: Cihannüma Mahallesi Cihannüma Sokak Kılıç 2 No: 10/ 4 Beşiktaş İstanbul

Doğum Yeri ve Yılı: Çorlu 28.07.1991

Yabancı Dili: İngilizce

İlk Öğretim: Şahinler İlk Öğretim Okulu , 2005

Orta Öğretim: Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesi, 2009

Lisans: Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, 2013

Yüksek Lisans: Bahçeşehir Üniversitesi

Enstitü Adı: Fen Bilimleri Enstitüsü

Program Adı: Uygulamalı Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı

Çalışma Hayatı:
Lider Şişli Koleji (2015-. . .)
Fatih Dersanesi Beşiktaş Şubesi Öğretmeni (2014-2015)