

56230

*CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ*  
*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ*

*DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARI ALTINDA KÜTLE KİRİŞ SİSTEMLERİNİN*  
*NONLİNEER TİTREŞİMLERİ*

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erdoğan Özkaya

Ana Bilim Dalı : Makina Mühendisliği

TEMMUZ 1995

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmada bana büyük destek olan ve elinden gelen yardımı esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mehmet Pakdemirli' ye, grafik çizimlerindeki yardımlarımdan dolayı araştırma görevlileri Halil Rıdvan Öz ve Hakan Boyacı' ya, Hayatım boyunca bana en büyük desteği sağlayan aileme ve sürekli yanımda olup bana yardımcı olan eşim' e teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışma TBAG - 1346 no' lu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

## **İÇİNDEKİLER**

	<u>Sayfa</u>
SEMBOLLER LİSTESİ	2
ŞEKİLLER LİSTESİ	4
TABLolar LİSTESİ	9
ÖZET	10
ABSTRACT	11
BÖLÜM 1 : GİRİŞ	12
BÖLÜM 2 : HAREKET DENKLEMLERİ	14
BÖLÜM 3 : ANALİTİK ÇÖZÜMLER	21
3 - 1. Lineer Problem	25
3 - 2. Nonlineer Problem	26
3 - 3. Genlik ve Faz Modülasyon Denklemleri	30
BÖLÜM 4 : NÜMERİK ANALİZ	32
4 - 1. Serbest Titreşimler	32
4 - 2. Zorlamalı ve Sönümlü Titreşimler	34
BÖLÜM 5 : SONUÇ VE YORUMLAR	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	68

## ***SEMBOLLER LİSTESİ***

$T$	: Kinetik enerji
$V$	: Potansiyel enerji
$\rho$	: Kirişin yoğunluğu
$M$	: Kiriş üzerindeki kütle
$E$	: Young modülü
$I$	: Kirişin nötr eksene göre kesit atalet momenti
$w$	:Kiriş deplasmanı
$u$	: Kirişin aksenal yer deęiřtirmesi
$x_s$	: Kütlenin başlangıç noktasından uzaklığı
$\eta$	: Kütlenin başlangıçtan uzaklığını gösteren boyutsuz parametre
$L$	: Çubuğun boyutasarrufu
$t$	: Zaman deęiřkeni
$\alpha$	: Boyutsuz kütle parametresi
$x$	: Yer deęiřkeni
$\mu$	: Sönümlenme katsayısı
$F$	: Zorlama kuvveti genliği
$\Omega$	: Zorlama frekansı
$T_0$	: Hızlı zaman ölçeği
$T_2$	: Yavaş zaman ölçeği
$\varepsilon$	: Deplasmanların küçük olduğunu gösteren perturbasyon parametresi
$\sigma$	: Zorlama frekans ayar parametresi

$r$	: Kiriş atalet yarıçapı
$\mathcal{L}$	: Lagrangian
$\gamma$	: Faz
$\theta$	: Kompleks genliklerde faz farkı
$\delta$	: Varyasyon
$\omega$	: Tabii frekans
$\omega_m$	: Nonlineer frekans
$\phi(x, T_2)$	: Yer değiştirme fonksiyonunun seküler terimlerle ilgili kısmı
$W(x, T_0, T_2)$	: Yer değiştirme fonksiyonunun seküler olmayan terimlerle ilgili kısmı
$\beta$	: Tabii frekansla ilgili bir parametre
$a$	: genlik
$D_0, D_2$	: Hızlı ve yavaş zaman ölçeğine göre türevler
$f$	: Zorlama ile ilgili bir katsayı
$Y$	: Mekana bağılı yer değiştirme
$\lambda$	: Nonlineeriteden gelen düzeltmeleri gösteren katsayı

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1: Beş ayrı durum için sınır şartları	45
Şekil 2 : Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 1. durum, $\alpha = 1$ )	46
Şekil 3: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 1. durum, $\alpha = 10$ )	46
Şekil 4: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 2. durum, $\alpha = 1$ )	47
Şekil 5: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 2. durum, $\alpha = 10$ )	47
Şekil 6: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 3. durum, $\alpha = 1$ )	48
Şekil 7: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 3. durum, $\alpha = 10$ )	48
Şekil 8: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 4. durum, $\alpha = 1$ )	49
Şekil 9: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 4. durum, $\alpha = 10$ )	49
Şekil 10: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri (1. mod, 5. durum, $\alpha = 1$ )	50

Şekil 11: Değişik $\eta$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	50
(1. mod, 5. durum, $\alpha = 10$ )	
Şekil 12: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	51
(1. mod, 1. durum, $\eta = 0.1$ )	
Şekil 13: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	51
(1. mod, 1. durum, $\eta = 0.3$ )	
Şekil 14: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	52
(1. mod, 2. durum, $\eta = 0.2$ )	
Şekil 15: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	52
(1. mod, 2. durum, $\eta = 0.4$ )	
Şekil 16: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	53
(1. mod, 3. durum, $\eta = 0.1$ )	
Şekil 17: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	53
(1. mod, 3. durum, $\eta = 0.3$ )	
Şekil 18: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	54
(1. mod, 4. durum, $\eta = 0.2$ )	
Şekil 19: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	54
(1. mod, 4. durum, $\eta = 0.4$ )	
Şekil 20: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	55
(1. mod, 5. durum, $\eta = 0.2$ )	
Şekil 21: Değişik $\alpha$ değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri	55
(1. mod, 5. durum, $\eta = 0.4$ )	

Şekil 22: Değişik sınırlar için nonlineer frekans - genlik eğrileri	56
(1. mod, $\eta = 0.2$ , $\alpha = 1$ )	
Şekil 23: Değişik sınırlar için nonlineer frekans - genlik eğrileri	56
(1. mod, $\eta = 0.2$ , $\alpha = 10$ )	
Şekil 24: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	57
(1. mod, 1. durum, $\alpha = 1$ )	
Şekil 25: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	57
(1. mod, 1. durum, $\alpha = 10$ )	
Şekil 26: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	58
(1. mod, 2. durum, $\alpha = 1$ )	
Şekil 27: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	58
(1. mod, 2. durum, $\alpha = 10$ )	
Şekil 28: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	59
(1. mod, 3. durum, $\alpha = 1$ )	
Şekil 29: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	59
(1. mod, 3. durum, $\alpha = 10$ )	
Şekil 30: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	60
(1. mod, 4. durum, $\alpha = 1$ )	
Şekil 31: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	60
(1. mod, 4. durum, $\alpha = 10$ )	
Şekil 32: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri	61
(1. mod, 5. durum, $\alpha = 1$ )	



Şekil 33: Değişik $\eta$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 5. durum, $\alpha = 10$ )	61
Şekil 34: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 1. durum, $\eta = 0.1$ )	62
Şekil 35: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 1. durum, $\eta = 0.3$ )	62
Şekil 36: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 2. durum, $\eta = 0.2$ )	63
Şekil 37: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 2. durum, $\eta = 0.4$ )	63
Şekil 38: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 3. durum, $\eta = 0.1$ )	64
Şekil 39: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 3. durum, $\eta = 0.3$ )	64
Şekil 40: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 4. durum, $\eta = 0.2$ )	65
Şekil 41: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 4. durum, $\eta = 0.4$ )	65
Şekil 42: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 5. durum, $\eta = 0.2$ )	66
Şekil 43: Değişik $\alpha$ değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri (1. mod, 5. durum, $\eta = 0.4$ )	66

Şekil 44: Değişik sınır şartları için zorlama frekansı- genlik eğrileri

67

(1. mod,  $\eta = 0.2$ ,  $\alpha = 1$ )

Şekil 45: Değişik sınır şartları için zorlama frekansı- genlik eğrileri

67

(1. mod,  $\eta = 0.2$ ,  $\alpha = 10$ )



## ***TABLÖLAR LİSTESİ***

	<b><u>Sayfa</u></b>
Tablo 1 :Beş ayrı durum için hareket denklemleri ve lineer frekans denklemleri	39
Tablo 2: Beş ayrı durum için değişik $\alpha$ ve $\eta$ değerlerine karşılık gelen ilk beş tabii frekans	40
Tablo 3 : Nonlineer terimlerin tabii frekansa katkıları	43



## ÖZET

Düz bir kiriş ve bu kiriş üzerindeki keyfi bir noktaya yerleştirilmiş bir kiriş kütle sistemi ele alınmıştır . Kirişin uç noktaları hareketi engelleyici olduğundan kirişin titreşim sırasında uzamaları da hesaba katılmıştır. Böylece denklemler kübik nonlineeritelere sahiptir. Probleme zorlama ve sönümlenme terimleri eklenmiştir. Hareket denklemleri boyutsuzlaştırılmıştır. Beş farklı sınır şartı altında hareket denklemleri incelenmiştir. Kısmi diferansiyel denklemlere bir perturbasyon metodu olan çok zaman ölçekli metod direk olarak uygulanmıştır. Perturbasyon açılımında ilk terimler lineer problemi oluşturmaktadır. Lineer problem için tabii frekanslar ve mod yapıları herbir beş durum için tam olarak hesaplanmıştır. Perturbasyon açılımındaki nonlineer terimler ikinci mertebede lineer çözümlerin düzeltmeleri olarak ortaya çıkmaktadır. Bu sayede genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilmektedir. Önce serbest titreşimler için nonlineer frekanslar hesaplanmıştır.Daha sonra zorlama ve sönüm terimleri dahil edilerek değişik sınır şartları altında genlik ve zorlama frekans grafikleri elde edilip gerekli karşılaştırmalar yapılmıştır. Ayrıca kütle konumunun ve miktarının titreşimlere olan etkisinde incelenmiştir.

## ***ABSTRACT***

A straight beam and a mass placed on an arbitrary point on this beam are considered as beam - mass system . The extensions of the beam under vibration are taken into account since the end points are immovable . Thus, equations have cubic nonlinearities. Forcing and damping terms are added to the equations. Equations of motion are made dimensionless. Using 5 different set of boundary conditions, the equations of motion are solved. Approximate solution of the equations are obtained using method of multiple scales, a perturbation technique. First terms of the perturbation series construct the linear problem. Natural frequencies and mode shapes for the linear problem are calculated exactly for the different end conditions. Second order nonlinear terms of the perturbation series appear as corrections to the linear terms. Amplitude and phase modulation equations are obtained . Nonlinear frequencies for free vibrations are calculated first. Then, external excitation versus, amplitude frequency graphics under different boundary conditions are obtained by including forcing. Effects of the position and magnitude of the mass , as well as effects of different end conditions are investigate and necessary comparisons are made.

## **BÖLÜM 1 : GİRİŞ**

Bu çalışmadaki amacımız ele aldığımız beş değişik durumun önce tabii frekanslarını bulmak , daha sonra da kirişin uzamasından kaynaklanan nonlinear etkilerinin lineer frekansa katkısını bulmaktır. Sistemlerin tabii frekanslarını bilmek çok önemlidir. Eğer sistemlere tabii frekansına yakın frekansta zorlama uygulanırsa sistem rezonansa gelir ve genlikler tehlikeli bir şekilde büyür. Sistemlerin tabii frekansını hesaplarırken sistemleri lineer kabul etmek hesaplamalarda büyük kolaylık sağlar ancak bulduğumuz sonuçlar sağlıklı olmaz. Çünkü hiçbir sistem lineer hareket etmez. Bu sebeple bulduğumuz lineer sonuçlar bizi yanıltabilir. Bu nedenle biz yaptığımız işlemlerde kirişin uzamasında kaynaklanan nonlinear etkileride hesaba kattık.

Nonlinear kiriş titreşimleri konusunda birçok çalışma yapılmıştır. 1979'a kadarki çalışmalar Nayfeh ve Mook [1] tarafından özetlenmiştir. Özellikle uçların hareket etmemesinden kaynaklanan nonlinear davranış birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bu konudaki ilk araştırmalar Woinowsky - Krieger [2] ve Burgreen'e [3] aittir. Srinivasan [4] Ritz - Galerkin metodu ile uzamalı kirişlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. Tseng ve Dugundji [5] ise analitik ve deneysel olarak burkulmaya maruz kirişlerin titreşimlerini incelemiştir.

Çalışmamıza en yakın çalışmalardan birisi Dowell'e [6] aittir. Dowell basit mesnetlenmiş bir kiriş ve bu kiriş üzerindeki bir kütle - yay sisteminin serbest titreşimlerini yaklaşık çözüm teknikleri ile incelemiştir. Szemplinska - Stupnicka [7] genelleştirilmiş Ritz metodu ile nonlinear sınır şartlarına sahip kiriş titreşimlerini

incelemiştir. Pakdemirli ve Nayfeh [8] Dowell'e [6] ait olan çalışmayı, uzama etkileri zorlama ve sönüm ekleyerek genelleştirmişlerdir.

Bu çalışmamızda ise uçları hareket edemeyen bir kiriş kütle sistemi ele alınmıştır. 5 değişik sınır şartı için titreşimler incelenmiştir. Kütlenin konumunun miktarının ve sınır şartlarının nonlineer titreşimlere olan etkileri araştırılmıştır. Denklemler önce analitik olarak çözülmüş, daha sonra serbest titreşimler ile sönümlü ve zorlamalı titreşim durumları ayrı ayrı incelenmiştir.



## BÖLÜM 2 : HAREKET DENKLEMLERİ

Bu bölümde şekil 1' de gösterilen sistemlerin hareket denklemleri ve sınır şartları bulunacaktır. İncelediğimiz sistemler  $x = x_s$  noktasında bir  $M$  kütle sine sahip kütle giriş sistemleridir. Hareket denklemlerini bulmak için Hamilton prensibinden faydalanacağız.

Önce sistemin Lagrangian'ını bulalım

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.1)$$

Burada  $\mathcal{L}$  sistemin Lagrangianı ,  $T$  kinetik enerjisi ,  $V$  ise potansiyel enerjisidir.  $x = x_s$  noktasında  $M$  kütlesi olduğu için kütle nin sağındaki ve solundaki bölgeler için kinetik ve potansiyel enerjileri ayrı ayrı ele alacağız. Sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerini şu şekilde yazabiliriz

$$T = (1/2) \int_0^{x_s} \rho A \dot{w}_1^2 dx + (1/2) \int_{x_s}^L \rho A \dot{w}_2^2 dx + (1/2) M \dot{w}_1^2(x_s, t) \quad (2.2)$$

Birinci ve ikinci terimler kütle nin sağındaki ve solundaki girişin kinetik enerjilerini, üçüncü terim ise kütle nin kinetik enerjisini gösterir. Potansiyel enerji ise

$$V = (1/2) \int_0^{x_s} E I w_1''^2 dx + (1/2) \int_{x_s}^L E I w_2''^2 dx \\ + (1/2) \int_0^{x_s} E A (u_1' + 1/2 w_1'^2)^2 dx + (1/2) \int_{x_s}^L E A (u_2' + (1/2) w_2'^2)^2 dx \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır. Birinci ve ikinci terimler kütle nin solundaki ve sağındaki eğilme momentinden kaynaklanan potansiyel enerjiyi gösterir. Üçüncü ve dördüncü terimler ise



kütlenin solundaki ve sağdaki kirişin uzamasından kaynaklanan potansiyel enerjiyi gösterir.

Burada  $\rho$  kirişin yoğunluğu,  $A$  kirişin kesit alanı,  $w_1$  ve  $w_2$  kütlenin solundaki ve sağdaki kiriş deplasmanı,  $M$  kiriş üzerindeki kütle,  $E$  young modülü,  $I$  kirişin nötr eksene göre kesit atalet momenti,  $u_1$  ve  $u_2$  kirişin solundaki ve sağdaki aksenal yer değiştirme,  $(\cdot)$  zamana göre türev,  $(\cdot)'$   $x$ 'e göre türevi gösterir.

Sistemin Lagrangian' ı denklem (2.2) ve (2.3) denklem (2.1)'e yerleştirilerek elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (1/2) \int_0^{X_s} \rho A \dot{w}_1^2 dx + (1/2) \int_{X_s}^L \rho A \dot{w}_2^2 dx + (1/2) M \dot{w}_1^2(x_s, t) \\ & - (1/2) \int_0^{X_s} E I w_1''^2 dx - (1/2) \int_{X_s}^L E I w_2''^2 dx \\ & - (1/2) \int_0^{X_s} E A (u_1' + (1/2) w_1'^2)^2 dx - (1/2) \int_{X_s}^L E A (u_2' + (1/2) w_2'^2)^2 dx \quad (2.4) \end{aligned}$$

Hamilton prensibine göre [9 ]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (2.5)$$

yazılabilir.

Denklem (2.4) denklem (2.5) ' ye yerleştirilir ve varyasyonu alınırsa şu sonuçları buluruz

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{X_s} \rho A \dot{w}_1 \delta \dot{w}_1 dx + \int_{X_s}^L \rho A \dot{w}_2 \delta \dot{w}_2 dx + M \dot{w}_1(x_s, t) \delta \dot{w}_1(x_s, t) \right. \\ \left. - \int_0^{X_s} E I w_1'' \delta w_1'' dx - \int_{X_s}^L E I w_2'' \delta w_2'' dx \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{X_s} E A (u_1' + (1/2) w_1'^2) (\delta u_1' + w_1' \delta w_1') dx \\
& - \int_{X_s}^L E A (u_2' + (1/2) w_2'^2) (\delta u_2' + w_2' \delta w_2') dx \} dt = 0 \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Bütün terimleri  $\delta w_1$  ve  $\delta w_2$  cinsinden ifade edebilmek için terimlere kısmi integrasyon uygularsak denklem (2.6) şu hali alır

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{X_s} [-\rho A \ddot{w}_1 - EI w_1'''' + EA (u_1' + (1/2) w_1'^2)'] \delta w_1 dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{X_s}^L [-\rho A \ddot{w}_2 - EI w_2'''' + EA (u_2' + (1/2) w_2'^2)'] \delta w_2 dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{X_s} EA (u_1' + (1/2) w_1'^2)' \delta u_1 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{X_s}^L EA (u_2' + (1/2) w_2'^2)' \delta u_2 dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \{ [-EI (w_1'' \delta w_1' + w_1'''' \delta w_1) - EA (u_1' + (1/2) w_1'^2) \delta u_1 - EA (u_1' + (1/2) w_1'^2) w_1' \delta w_1 ]_0^{X_s} \\
& - M \ddot{w}_1(x_s, t) \delta w_1(x_s, t) + [-EI (w_2'' \delta w_2' - w_2'''' \delta w_2) - EA (u_2' + (1/2) w_2'^2) \delta u_2 \\
& - EA (u_2' + (1/2) w_2'^2) w_2' \delta w_2 ]_{X_s}^L \} dt = 0 \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Denklemleri sınır şartlarını yazarak açarsak şu açık denklemleri elde ederiz

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{X_s} [-\rho A \ddot{w}_1 - EI w_1'''' + EA (u_1' + (1/2) w_1'^2)'] \delta w_1 dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{X_s}^L [-\rho A \ddot{w}_2 - EI w_2'''' + EA (u_2' + (1/2) w_2'^2)'] \delta w_2 dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \{ \{ EI w_1''''(x_s, t) - EA [u_1'(x_s, t) + (1/2) w_1'^2(x_s, t)] w_1'(x_s, t) - M \ddot{w}_1(x_s, t) \} \delta w_1(x_s, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{-EI w_2'''(x_s, t) + EA[u_2'(x_s, t) + (1/2) w_2'^2(x_s, t)] w_2'(x_s, t)\} \delta w_2(x_s, t) \\
& + \{-EI w_1'''(0, t) + EA[u_1'(0, t) + (1/2) w_1'^2(0, t)] w_1'(0, t)\} \delta w_1(0, t) \\
& + \{EI w_2'''(L, t) - EA[u_2'(L, t) + (1/2) w_2'^2(L, t)] w_2'(L, t)\} \delta w_2(L, t) \\
& - EI w_1''(x_s, t) \delta w_1'(x_s, t) + EI w_1''(0, t) \delta w_1'(0, t) + EI w_2''(x_s, t) \delta w_2'(x_s, t) \\
& - EI w_2''(L, t) \delta w_2'(L, t) - EA [u_1'(x_s, t) + (1/2) w_2'(x_s, t)] \delta u_1(x_s, t) + EA [u_1'(0, t) + (1/2) \\
& w_2'(0, t)] \delta u_1(0, t) + EA [u_2'(x_s, t) + (1/2) w_2'(x_s, t)] \delta u_2(x_s, t) - EA [u_2'(L, t) + (1/2) w_2'(L, t)] \\
& \delta u_2(L, t) \} dt = 0 \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Denklem (2.8)' in sıfıra eşit olması için integraldeki  $\delta w_1$  ve  $\delta w_2$  katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir. Çift katlı integrallerden şu denklemleri elde ederiz

$$\rho A \ddot{w}_i + EI w_i^{iv} = EA \left[ (u_i' + \frac{1}{2} w_i'^2) w_i' \right]' \quad i = 1, 2 \tag{2.9}$$

$$EA(u_i' + \frac{1}{2} w_i'^2)' = 0 \quad i = 1, 2 \tag{2.10}$$

Bu denklemler sistemin hareket denklemleridir. Tek katlı integralde ise başlangıç ve bitiş noktalarında boyuna uzama olmadığından dolayı

$$\delta u_1(0, t) = 0, \quad \delta u_2(L, t) = 0 \tag{2.11}$$

yazılabilir

Ayrıca kütlelerin bulunduğu noktada enine deplasmanlar ve eğimler birbirine eşit olduğundan dolayı şu eşitlikleri yazabiliriz

$$\delta w_1(x_s, t) = \delta w_2(x_s, t) \quad \text{ve} \quad \delta w_1'(x_s, t) = \delta w_2'(x_s, t) \quad (2.12)$$

Bu bilgiler ışığında denklem (2.8)' den bizim inceleyeceğimiz beş farklı sınır şartı elde edilir . Kütlenin bulunduğu noktadaki sınır şartları bütün durumlar için aynı olup aşağıdaki gibidir.

$$w_1(x_s, t) = w_2(x_s, t), \quad w_1'(x_s, t) = w_2'(x_s, t), \quad w_1''(x_s, t) = w_2''(x_s, t) \quad (2.13)$$

$$E I w_1'''(x_s, t) - E I w_2'''(x_s, t) - M \ddot{w}_1(x_s, t) = 0 \quad (2.14)$$

Uçlardaki sınır şartları ise beş ayrı durum için şu şekildedir

$$\underline{1. Durum:} \quad w_1(0, t) = 0, \quad w_1''(0, t) = 0, \quad w_2(L, t) = 0, \quad w_2''(L, t) = 0 \quad (2.15)$$

$$\underline{2. Durum:} \quad w_1(0, t) = 0, \quad w_1'''(0, t) = 0, \quad w_2'(L, t) = 0, \quad w_2'''(L, t) = 0 \quad (2.16)$$

$$\underline{3. Durum:} \quad w_1'(0, t) = 0, \quad w_1''''(0, t) = 0, \quad w_2'(L, t) = 0, \quad w_2'''(L, t) = 0 \quad (2.17)$$

$$\underline{4. Durum:} \quad w_1(0, t) = 0, \quad w_1''(0, t) = 0, \quad w_2(L, t) = 0, \quad w_2'(L, t) = 0 \quad (2.18)$$

$$\underline{5. Durum:} \quad w_1'(0, t) = 0, \quad w_1''''(0, t) = 0, \quad w_2(L, t) = 0, \quad w_2'(L, t) = 0 \quad (2.19)$$

Bu sınır şartları ayrıca şekil 1' de geometrik şekliyle birlikte verilmiştir. Denklem (2.8)' den kirişin boyuna uzamaları için şu sınır şartları ortaya çıkar

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_2(L, t) = 0, \quad u_1'(x_s, t) + (1/2) w_1'^2(x_s, t) = u_2'(x_s, t) + (1/2) w_2'^2(x_s, t) \quad (2.20)$$

Denklem (2.10) integre edilirse şu denklemleri elde ederiz

$$C(t) = u_1' + (1/2) w_1'^2, \quad D(t) = u_2' + (1/2) w_2'^2 \quad (2.21)$$

$x = x_s$  noktasında  $u_1' = u_2'$ ,  $w_1' = w_2'$ , olduğundan  $C(t) = D(t)$  yazılabilir.

$$\int_0^{X_s} (u_1' + (1/2) w_1'^2) dx = \int_0^{X_s} C(t) dx \quad (2.22)$$

$$\int_{X_s}^L (u_2' + (1/2) w_2'^2) dx = \int_{X_s}^L C(t) dx \quad (2.23)$$

Denklem (2.22) ve (2.23) toplanırrsa şu sonuç elde edilir

$$C(t) = (1/2) L ( \int_0^{X_s} w_1'^2 dx + \int_{X_s}^L w_2'^2 dx ) \quad (2.24)$$

Denklem (2.24) denklem (2.21) göz önüne alarak denklem (2.9)'a

yerleştirilirse şu denklem elde edilir

$$\rho A \ddot{w}_i + E I w_i^{iv} = \frac{EA}{2L} [ \int_0^{X_s} w_1'^2 dx + \int_{X_s}^L w_2'^2 dx ] w_i'' \quad i = 1,2 \quad (2.25)$$

Elde ettiğimiz denklem (2.25), sistemin hareket denklemdir. Denklemleri daha sade hale getirmek, çözümlerin genel olması, değişik boyutlarda ve değişik malzemeler için kullanılmasının daha kolay olması için denklemleri boyutsuzlaştıralım. Bunun için aşağıdaki boyutsuz değişken ve parametreleri tanımlayalım

$$x^* = x/L, \quad w_{1,2}^* = w_{1,2}/r, \quad \eta = x_s/L, \quad t^* = (1/L^2)(EI/\rho A)^{1/2} t \quad (2.26)$$

$$\alpha = M/\rho A L \quad (2.27)$$

$\alpha$  boyutsuz parametresi konsantre kütlelerin kiriş kütlelerine oranını göstermektedir. Yukarıda  $r$  çubuğun atalet yarıçapıdır. Bu durumda şu boyutsuz denklemleri elde ederiz

$$\ddot{w}_i^* + w_i^{iv*} = (1/2) [ \int_0^{\eta} w_1'^{*2} dx^* + \int_{\eta}^1 w_2'^{*2} dx^* ] w_i''^* \quad (2.28)$$

$$\ddot{w}_2^* + w_2^{iv*} = (1/2) \left[ \int_0^{\eta} w_1'^{*2} dx^* + \int_{\eta}^1 w_2'^{*2} dx^* \right] w_2''^* \quad (2.29)$$

Elde ettiğimiz denklemler artık kullanılan malzemeye ve sistemin boyutlarına bağlı değildir. Kullanılacak malzemeye göre ve sistemin boyutlarına göre katsayılar hesaplanıp denklemlerde yerine konulur.

Boyutsuz ortak sınır şartları

$$w_1^*(\eta, t^*) = w_2^*(\eta, t^*), \quad w_1'^*(\eta, t^*) = w_2'^*(\eta, t^*), \quad w_1''^*(\eta, t^*) = w_2''^*(\eta, t^*) \quad (2.30)$$

$$w_1'''^*(\eta, t^*) - w_2'''^*(\eta, t^*) - \alpha \ddot{w}_1^*(\eta, t^*) = 0 \quad (2.31)$$

şeklinde yazılır.

Uçlardaki sınır şartları ise beş ayrı durum için şu şekildedir

$$\underline{1. Durum:} \quad w_1^*(0, t^*)=0, \quad w_1'''^*(0, t^*)=0, \quad w_2^*(1, t^*)=0, \quad w_2'''^*(1, t^*)=0 \quad (2.32)$$

$$\underline{2. Durum:} \quad w_1^*(0, t^*)=0, \quad w_1''^*(0, t^*)=0, \quad w_2^*(1, t^*)=0, \quad w_2'''^*(1, t^*)=0 \quad (2.33)$$

$$\underline{3. Durum:} \quad w_1'^*(0, t^*)=0, \quad w_1'''^*(0, t^*)=0, \quad w_2^*(1, t^*)=0, \quad w_2'''^*(1, t^*)=0 \quad (2.34)$$

$$\underline{4. Durum:} \quad w_1^*(0, t^*)=0, \quad w_1''^*(0, t^*)=0, \quad w_2^*(1, t^*)=0, \quad w_2''^*(1, t^*)=0 \quad (2.35)$$

$$\underline{5. Durum:} \quad w_1'^*(0, t^*)=0, \quad w_1'''^*(0, t^*)=0, \quad w_2^*(1, t^*)=0, \quad w_2''^*(1, t^*)=0 \quad (2.36)$$

Bundan sonraki işlemlerde kolaylık olsun diye boyutsuz parametrelerden (\*) işaretini kaldıracağız. Bu bölümde Hamilton prensibinden faydalanarak inceleyeceğimiz sistemlerin hareket denklemlerini ve sınır şartlarını bulduk. Bundan sonraki bölümde bu denklemleri perturbasyon metodlarından çok zaman ölçekli metodu kullanarak çözeceğiz.

### BÖLÜM 3 : ANALİTİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde denklem (2.28) - (2.29)'un yaklaşık çözümleri için perturbasyon metodlarından çok zaman ölçekli metodu kısmi diferansiyel denklemlere ve sınır şartlarına direk olarak uygulayacağız. Çok zaman ölçekli metod ile ilgili detaylı bilgi için bakınız [1].  $\varepsilon$  mertebesinde bulduğumuz denklemler bize sistemin lineer hareket denklemlerini ve lineer frekans denklemlerini verir.  $\varepsilon^3$  mertebesindeki denklemler ise nonlineer kısımdan gelen etkileri gösterir. Bu denklemleri çözerek nonlineer etkilerin lineer frekansa katkısını buluruz.

Hareket denklemlerine sönüm ve zorlama terimlerini eklersek denklemler şu hali alır.

$$\ddot{w}_1 + w_1^{\text{iv}} = (1/2) \left[ \int_0^\eta w_1'^2 dx + \int_\eta^1 w_2'^2 dx \right] w_1'' - 2 \mu^* \dot{w}_1 + F_1^* \cos \Omega t \quad (3.1)$$

$$\ddot{w}_2 + w_2^{\text{iv}} = (1/2) \left[ \int_0^\eta w_1'^2 dx + \int_\eta^1 w_2'^2 dx \right] w_2'' - 2 \mu^* \dot{w}_2 + F_2^* \cos \Omega t \quad (3.2)$$

Denklemler quadratik nonlineeriteye sahip olmadıklarından dolayı aşağıdaki gibi bir açılımın geçerli olduğunu farzedelim

$$w_1(x, t; \varepsilon) = \varepsilon w_{11}(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_{13}(x, T_0, T_2) + \dots \quad (3.3)$$

$$w_2(x, t; \varepsilon) = \varepsilon w_{21}(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_{23}(x, T_0, T_2) + \dots \quad (3.4)$$

$w_{1n}$  ve  $w_{2n}$  bir mertebesinde  $\varepsilon$  hesaplamalarda kullanılan küçük bir parametre,  $T_0 = t$  hızlı zaman ölçeği,  $\omega_n$  kütle kiriş sisteminin doğal frekansı;  $T_2 = \varepsilon^2 t$  sönümlemeden dolayı oluşan genlik ve faz modülasyonlarını karakterize eden yavaş

zaman ölçüğüdür. Bu analizde yalnız baskın rezonanslar incelenecektir. Nonlineer etkilerle zorlama ve sönüm etkilerinin aynı mertebede ortaya çıkabilmesi için sönüm ve zorlama genliği aşağıdaki şekilde yeniden mertebelendirilir.

$$\mu^* = \varepsilon^2 \mu \quad (3.5)$$

$$F_{1,2}^* = \varepsilon^3 F_{1,2} \quad (3.6)$$

Zamana göre türevler aşağıdaki şekilde yazılır

$$(\dot{\phantom{x}}) = D_0 + \varepsilon^2 D_2 \quad (3.7)$$

$$(\ddot{\phantom{x}}) = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 \quad (3.8)$$

$$D_n = \partial / \partial T_n \quad (3.9)$$

Denklem (3.3) - (3.8) denklem (3.1),(3.2) ve sınır şartlarına yerleştirilirse

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2) (\varepsilon w_{11} + \varepsilon^3 w_{13}) + (\varepsilon w_{11}'' + \varepsilon w_{13}'') &= (1/2) \left[ \int_0^{\eta} (\varepsilon w_{11}' + \varepsilon^3 w_{13}')^2 dx \right. \\ &+ \left. \int_{\eta}^1 (\varepsilon w_{21}' + \varepsilon^3 w_{23}')^2 dx \right] (\varepsilon w_{11}'' + \varepsilon^3 w_{13}'') - 2\varepsilon^2 \mu (D_0 + \varepsilon^2 D_2) (\varepsilon w_{11} + \varepsilon^3 w_{13}) \\ &+ \varepsilon^3 F_1 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2) (\varepsilon w_{21} + \varepsilon^3 w_{23}) + (\varepsilon w_{21}'' + \varepsilon w_{23}'') &= (1/2) \left[ \int_0^{\eta} (\varepsilon w_{11}' + \varepsilon^3 w_{13}')^2 dx \right. \\ &+ \left. \int_{\eta}^1 (\varepsilon w_{21}' + \varepsilon^3 w_{23}')^2 dx \right] (\varepsilon w_{21}'' + \varepsilon^3 w_{23}'') - 2\varepsilon^2 \mu (D_0 + \varepsilon^2 D_2) (\varepsilon w_{21} + \varepsilon^3 w_{23}) \\ &+ \varepsilon^3 F_2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir



Bu iki ayrı denklem takımını  $\varepsilon$  ve  $\varepsilon^3$  mertebelerine ayırırsak aşağıdaki denklem gruplarını elde ederiz.

$\varepsilon$  mertebesi:

$$D_0^2 w_{11} + w_{11}^{iv} = 0 \quad (3.12)$$

$$D_0^2 w_{21} + w_{21}^{iv} = 0 \quad (3.13)$$

Bu mertebede ortak sınır şartları aşağıdaki şekilde yazılır.

$$x = \eta \quad \text{da} \quad w_{11} = w_{21}, \quad w_{11}' = w_{21}', \quad w_{11}'' = w_{21}'' \quad (3.14)$$

$$x = \eta \quad \text{da} \quad w_{11}''' - w_{21}''' - \alpha D_0^2 w_{11} = 0 \quad (3.15)$$

İlk sınır şartı kütlelerin olduğu noktada deplasmanların birbirine eşit, ikinci sınır şartı eğimlerin eşit ve üçüncü sınır şartı ise momentlerin eşit olduğunu göstermektedir. Dördüncü sınır şartı ise kayma kuvvetleri arasındaki farkın kütle atalet momentine eşit olduğunu gösterir.

Ortak olmayan sınır şartları ise her durum için şöyledir.

$$\underline{1. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0 \quad (3.16)$$

$$\underline{2. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0 \quad (3.17)$$

$$\underline{3. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0 \quad (3.18)$$

$$\underline{4. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11} = w_{11}' = 0 \quad (3.19)$$

$$\underline{5. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11} = w_{11}' = 0 \quad (3.20)$$

$\varepsilon^3$  mertebesindeki denklemleri ve sınır şartlarını ise şu şekilde yazabiliriz

$\varepsilon^3$  mertebesi :

$$D_0^2 w_{13} + w_{13}^{iv} = -2 D_0 D_2 w_{11} - 2 \mu D_0 w_{11} + (1/2) \left[ \int_0^\eta w_{11}'^2 dx + \int_\eta^1 w_{21}'^2 dx \right] w_{11}'' + F_1 \cos \Omega T_0 \quad (3.21)$$

$$D_0^2 w_{23} + w_{23}^{iv} = -2 D_0 D_2 w_{21} - 2 \mu D_0 w_{21} + (1/2) \left[ \int_0^\eta w_{11}'^2 dx + \int_\eta^1 w_{21}'^2 dx \right] w_{21}'' + F_2 \cos \Omega T_0 \quad (3.22)$$

Karşılık gelen ortak sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$x = \eta \quad \text{da} \quad w_{13} = w_{23}, \quad w_{13}' = w_{23}', \quad w_{13}'' = w_{23}'' \quad (3.23)$$

$$x = \eta \quad \text{da} \quad w_{13}''' - w_{23}''' - \alpha D_0^2 w_{13} - 2 \alpha D_0 D_2 w_{11} = 0 \quad (3.24)$$

Uçlardaki şartlar ise aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\underline{1. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0 \quad (3.25)$$

$$\underline{2. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0 \quad (3.26)$$

$$\underline{3. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0 \quad (3.27)$$

$$\underline{4. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11} = w_{11}'' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11} = w_{11}' = 0 \quad (3.28)$$

$$\underline{5. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad w_{11}' = w_{11}''' = 0, \quad x=1 \text{ de} \quad w_{11} = w_{11}' = 0 \quad (3.29)$$

### 3.1 Lineer Problem

Bu bölümde sistemin lineer hareket denklemlerini ve lineer frekans denklemlerini bulacağız.  $\varepsilon$  mertebesindeki denklemler ve sınır şartları lineerdir. Bu denklemlerin çözümü bize lineer problemin çözümünü verecektir. Bu denklemlerin şu çözümleri kabul ettiğini varsayalım

$$w_{11} = [A(T_2) e^{i\omega T_0} + ke] Y_1(x) \quad (3.30)$$

$$w_{21} = [A(T_2) e^{i\omega T_0} + ke] Y_2(x) \quad (3.31)$$

Yukarıda  $ke$  kompleks eşleniği göstermektedir. Denklem (3.30) ve (3.31) denklem (3.12) - (3.15) ve (3.16) - (3.20)' den ele alınan duruma uygun olana yerleştirilirse aşağıdaki hareket denklemlerini elde ederiz.

$$Y_1^{iv} - \omega^2 Y_1 = 0 \quad (3.32)$$

$$Y_2^{iv} - \omega^2 Y_2 = 0 \quad (3.33)$$

Ortak sınır şartları aşağıdaki şekli alır

$$Y_1(\eta) = Y_2(\eta), \quad Y_1'(\eta) = Y_2'(\eta), \quad Y_1''(\eta) = Y_2''(\eta) \quad (3.34)$$

$$Y_1'''(\eta) - Y_2'''(\eta) + \alpha \omega^2 Y_1(\eta) = 0 \quad (3.35)$$

Diğer sınır şartları ise her durum için şu şekildedir.

$$\underline{1. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad Y_1=Y_1''=0, \quad x=1 \text{ de} \quad Y_2=Y_2''=0 \quad (3.36)$$

$$\underline{2. Durum:} \quad x=0 \text{ da} \quad Y_1=Y_1''=0, \quad x=1 \text{ de} \quad Y_2'=Y_2'''=0 \quad (3.37)$$

$$\underline{3.Durum:} \quad x=0'da \quad Y_1'=Y_1'''=0, \quad x=1'de \quad Y_2'=Y_2'''=0 \quad (3.38)$$

$$\underline{4.Durum:} \quad x=0'da \quad Y_1=Y_1''=0, \quad x=1'de \quad Y_2=Y_2'=0 \quad (3.39)$$

$$\underline{5.Durum:} \quad x=0'da \quad Y_1'=Y_1'''=0, \quad x=1'de \quad Y_2=Y_2'=0 \quad (3.40)$$

Lineer hareket denklemleri , lineer frekans denklemleri ve uçlardaki sınır şartları her durum için geometrik şekliyle birlikte tablo 1'de verilmiştir. Ayrıca frekans denklemlerinin kökleri olan lineer frekanslar tablo 2' de her durum için gösterilmiştir.

### 3.2 Nonlinear Problem

Bu bölümde nonlinear etkilerin lineer frekansa katkısını bulacağız. Homojen denklemlerin basit olmayan çözümleri olduğu için homojen olmayan denklemlerin çözümünün olabilmesi ancak bir çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır. Çözülebilirlik şartları ile ilgili detaylı bilgi için kaynak [10]' a bakınız.  $\varepsilon^3$  mertebesindeki homojen olmayan denklemlerin aşağıdaki gibi bir çözümü kabul ettiğini varsayalım

$$w_{13} = \phi_1(x, T_2) e^{i\omega T_0} + ke + W_1(x, T_0, T_2) \quad (3.41)$$

$$w_{23} = \phi_2(x, T_2) e^{i\omega T_0} + ke + W_2(x, T_0, T_2) \quad (3.42)$$

İlk terimler denklemlerin sağ tarafındaki seküler terimlerle, ikinci terimler ise seküler olmayan terimlerle ilgilidir. Denklem (3.41) - (3.42) denklem (3.21) - (3.24)' te yerine konulursa ve denklemler düzenlenirse şu eşitlikleri elde ederiz

$$\begin{aligned} \phi_1^{iv} - \omega^2 \phi_1 = -2i\omega (A' + \mu A) Y_1 + (3/2) A^2 \bar{A} \left[ \int_0^\eta Y_1'^2 dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 dx \right] Y_1'' \\ + 1/2 F_1 e^{i\omega T_2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{iv} - \omega^2 \phi_2 = -2i\omega (A' + \mu A) Y_2 + (3/2) A^2 \bar{A} \left[ \int_0^\eta Y_1'^2 dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 dx \right] Y_2'' \\ + (1/2) F_2 e^{i\sigma T_2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ortak sınır şartları ise

$$x = \eta \quad \text{da} \quad \phi_1 = \phi_2, \quad \phi_1' = \phi_2', \quad \phi_1'' = \phi_2'' \quad (3.45)$$

$$x = \eta \quad \text{da} \quad \phi_1''' - \phi_2''' + \alpha\omega^2\phi_1 - 2\alpha i\omega A' Y_1 = 0 \quad (3.46)$$

şeklindedir.

Uçlardaki sınır şartları her durum için ayrı ayrı şöyle yazılabilir

$$\text{1. Durum:} \quad x = 0 \quad \text{da} \quad \phi_1 = \phi_1'' = 0, \quad x = 1 \quad \text{de} \quad \phi_2 = \phi_2'' = 0 \quad (3.47)$$

$$\text{2. Durum:} \quad x = 0 \quad \text{da} \quad \phi_1 = \phi_1'' = 0, \quad x = 1 \quad \text{de} \quad \phi_2' = \phi_2''' = 0 \quad (3.48)$$

$$\text{3. Durum:} \quad x = 0 \quad \text{da} \quad \phi_1' = \phi_1''' = 0, \quad x = 1 \quad \text{de} \quad \phi_2' = \phi_2''' = 0 \quad (3.49)$$

$$\text{4. Durum:} \quad x = 0 \quad \text{da} \quad \phi_1 = \phi_1'' = 0, \quad x = 1 \quad \text{de} \quad \phi_2 = \phi_2' = 0 \quad (3.50)$$

$$\text{5. Durum:} \quad x = 0 \quad \text{da} \quad \phi_1' = \phi_1''' = 0, \quad x = 1 \quad \text{de} \quad \phi_2 = \phi_2' = 0 \quad (3.51)$$

Zorlama frekansının sistemin doğal frekansına yakın çalışması halinde

$$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.52)$$

yazılabilir.

$\sigma = 1$  mertebesinde bir ayar parametresi olup zorlama frekansının doğal frekansa yakınlığını göstermektedir. Denklem (3.43) ve (3.44) için çözülebilirlik şartını çıkaralım. Denklem (3.43)'ü keyfi bir  $v_1$  fonksiyonuyla çarpıp 0 ile  $\eta$  arasında integre edelim. Denklem (3.44)'ü de benzer şekilde keyfi bir  $v_2$  fonksiyonuyla çarpıp  $\eta$  ile 1 arasında integre edelim. Ortaya çıkan denklemlerin sol taraflarına kısmi integrasyon uygulayarak türevleri  $\phi_{1,2}$  fonksiyonlarından  $v_{1,2}$  fonksiyonlarına taşıyalım. Neticede aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\int_0^{\eta} (v_1^{iv} - \omega^2 v_1) \phi_1 dx + [v_1 \phi_1''' - v_1' \phi_1'' + v_1'' \phi_1' - v_1''' \phi_1]_0^{\eta} = \int_0^{\eta} v_1 f_1 dx \quad (3.53)$$

$$\int_{\eta}^1 (v_2^{iv} - \omega^2 v_2) \phi_2 dx + [v_2 \phi_2''' - v_2' \phi_2'' + v_2'' \phi_2' - v_2''' \phi_2]_{\eta}^1 = \int_{\eta}^1 v_2 f_2 dx \quad (3.54)$$

Denklem (3.53)' te  $f_1$  denklem (3.43)'ün sağ tarafını, denklem (3.54)'teki  $f_2$  ise denklem (3.44)'ün sağ tarafını göstermektedir.

Keyfi fonksiyonlar  $v_1$  ve  $v_2$ ' yi bulmak için homojen denklem ve sınır şartlarını ele alırsak denklem (3.53) ve (3.54)' de  $f_1 = f_2 = 0$  alınır. Bu durumda denklem (3.53) ve (3.54) toplanır ve toplamın sıfıra eşit olmasından aşağıdaki sonuçlar

$$v_1^{iv} - \omega^2 v_1 = 0 \quad (3.55)$$

$$v_2^{iv} - \omega^2 v_2 = 0 \quad (3.56)$$

$$[v_1 \phi_1''' - v_1' \phi_1'' + v_1'' \phi_1' - v_1''' \phi_1]_0^{\eta} + [v_2 \phi_2''' - v_2' \phi_2'' + v_2'' \phi_2' - v_2''' \phi_2]_{\eta}^1 = 0 \quad (3.57)$$

elde edilir. Denklem (3.57)' yi sağlayan ortak şartlar şöyledir.

$$x = \eta \text{ da } v_1 = v_2, \quad v_1' = v_2', \quad v_1'' = v_2'' \quad (3.58)$$

$$x = \eta \text{ da } v_1''' - v_2''' + \alpha\omega^2 v_1 = 0 \quad (3.59)$$

Diğer sınır şartları ise her durum için aşağıdaki gibidir.

$$\underline{1. Durum:} \quad x = 0 \text{ da } v_1 = v_1'' = 0, \quad x = 1 \text{ de } v_2 = v_2'' = 0 \quad (3.60)$$

$$\underline{2. Durum:} \quad x = 0 \text{ da } v_1 = v_1'' = 0, \quad x = 1 \text{ de } v_2' = v_2''' = 0 \quad (3.61)$$

$$\underline{3. Durum:} \quad x = 0 \text{ da } v_1' = v_1''' = 0, \quad x = 1 \text{ de } v_2' = v_2''' = 0 \quad (3.62)$$

$$\underline{4. Durum:} \quad x = 0 \text{ da } v_1 = v_1'' = 0, \quad x = 1 \text{ de } v_2 = v_2'' = 0 \quad (3.63)$$

$$\underline{5. Durum:} \quad x = 0 \text{ da } v_1' = v_1''' = 0, \quad x = 1 \text{ de } v_2 = v_2'' = 0 \quad (3.64)$$

$v_1$  ile  $Y_1$ 'in ve  $v_2$  ile  $Y_2$ 'nin sınır şartları ve denklemleri eşit olduğundan

$$v_1 = Y_1 \quad \text{ve} \quad v_2 = Y_2 \quad (3.65)$$

yazabiliriz.  $v_1$  ve  $v_2$  fonksiyonlarını homojen olmayan (3.53) ve (3.54) denklemlerine yerleştirirsek denklem (3.43) ve (3.44)' ün çözülebilirlik şartını elde ederiz. Elde ettiğimiz denklem

$$\begin{aligned} & [v_1\phi_1''' - v_1'\phi_1'' + v_1''\phi_1' - v_1'''\phi_1]_0^\eta + [v_2\phi_2''' - v_2'\phi_2'' + v_2''\phi_2' - v_2'''\phi_2]_\eta^1 \\ & = \int_0^\eta v_1 f_1 dx + \int_\eta^1 v_2 f_2 dx \end{aligned} \quad (3.66)$$

şeklinde olur. Denklem (3.65) kullanılarak denklem (3.66)' da gerekli sadeleştirilmeler yapılırsa çözülebilirlik şartı şu şekilde ortaya çıkar

$$2i\omega (A' + \mu A) + (3/2) b^2 A^2 \bar{A} + 2\alpha i\omega A' Y_1'^2(\eta) - (1/2) f e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (3.67)$$

Denklem (3.67)' de şu tanımlar yapılmıştır

$$\int_0^\eta Y_1'^2 dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 dx = 1, \quad b = \int_0^\eta Y_1'^2 dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 dx \quad (3.68)$$

$$f = \int_0^\eta F_1 Y_1 dx + \int_\eta^1 F_2 Y_2 dx \quad (3.69)$$

### 3.3 Genlik Faz Modülasyon Denklemleri

Bu bölümde genlik ve faz modülasyon denklemleri bulunacaktır. Bunun için çözülebilirlik şartından elde ettiğimiz denklem (3.67) deki kompleks genliği aşağıdaki polar formda yazılabiliriz

$$A = (1/2) a(T_2) e^{i\theta(T_2)} \quad (3.70)$$

Burada  $a$  titreşimin genliğidir. Denklem (3.70) denklem (3.67)'ye yerleştirilir, reel ve sanal kısımlara ayırılırsa aşağıdaki genlik ve faz modülasyon denklemlerini elde ederiz.

$$\omega a' = \omega a k - (3/16) b^2 a^3 + (1/2) f \cos \gamma \quad (3.71)$$

$$\omega a' k = -\omega \mu a + (1/2) f \sin \gamma \quad (3.72)$$



Denklem (3.71) ve (3.72)'te şu tanımlar yapılmıştır

$$\gamma = \sigma T_2 - \theta \quad (3.73)$$

$$k = 1 + \alpha Y_1^2(\eta) \quad (3.74)$$

Denklemler sadece lineer seviyede incelense idi genlik ve faz değişimlerine ait bilgileri kapsayan denklem (3.71) ve (3.72) elde edilemeyecekti. Nonlineer analiz sayesinde genlik ve fazlarla ilgili önemli bilgiler elde etmiş olduk. Gelecek bölümlerde bu denklemlerle ilgili nümerik hesaplamalar yapılarak nonlineer terimlerin lineer frekansı nasıl etkilediği incelenecektir.

## BÖLÜM 4 : NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde önceki bölümdeki denklemlerin nümerik hesapları yapılmıştır. Hesaplamalarda konsantre kütlelerin kiriş kütlelerine oranını gösteren  $\alpha$  parametresinin 1, 10 ve 100 olmak üzere üç farklı değeri alınmıştır. Tablo 1' deki  $\beta$  değeri  $\omega = \beta^2$  olacak şekilde lineer frekansla irtibatlıdır.

### 4.1. Serbest Titreşimler

Bu bölümde serbest titreşimler incelenecektir. Serbest titreşimler için

$$f = 0, \quad \mu = 0, \quad \sigma = 0 \quad (4.1)$$

alır ve denklem (4.1) denklem (3.72)'ye yerleştirilirse şu sonucu elde ederiz

$$a' = 0 \quad \text{dan} \quad a = a_0 \quad (\text{sabit}) \quad (4.2)$$

Bu bilgiler ışığında denklem (3.71)'den nonlineer frekans aşağıdaki gibi bulunabilir

$$\omega_{nl} = \omega + \theta' = \omega + \frac{3}{16} \frac{a_0^2 b^2}{\omega k} \quad (4.3)$$

$$\lambda = \frac{3}{16} \frac{b^2}{\omega k} \quad (4.4)$$

Denklem (4.4)' den genlikle nonlinear frekans arasında parabolik bir ilişki olduğu görülmektedir.  $a_0^2$  teriminin katsayısı ise  $\lambda$  olarak tanımlanmıştır ve nonlineariteden kaynaklanan düzeltmeleri göstermektedir. Tablo 3' te değişik durum,  $\alpha$  ve  $\eta$  değerlerine karşılık gelen  $\lambda$  değerleri gösterilmiştir.

Nonlinear frekans ile genlik arasındaki ilişkiyi gösteren eğriler şekil (2 - 23)' te değişik  $\alpha, \eta$  değerleri ve farklı sınır şartları için gösterilmiştir. 1. durumda ve 3. durumda simetri sözkonusu olduğundan incelemenin orta noktaya kadar yapılması yeterlidir.

Şekil (2 - 11)' de beş değişik durumda  $\alpha$ 'nın değeri 1 ve 10 alarak  $\eta$ 'nin değişik değerleri için nonlinear frekans ve genlik arasındaki ilişki incelenmiştir. Şekil (2)' de 1. durumda  $\alpha = 1$ ' de değişik  $\eta$  değerleri için  $\omega_{nl} - a_0$  eğrileri, şekil (3)' te yine 1. durumda  $\alpha = 10$ ' da değişik  $\eta$  değerleri için  $\omega_{nl} - a_0$  eğrileri gösterilmiştir. Bu iki şekil'e göre kütle ortaya doğru gittikçe 1. durumda  $\alpha$ 'nın iki değerinde de nonlineariteden dolayı oluşan düzeltme azalmaktadır. Şekil (4)' te 2. durumda  $\alpha = 1$  de, şekil (5)' te ise yine 2. durum  $\alpha=10$ ' da değişik  $\eta$  değerleri için  $\omega_{nl} - a_0$  arasındaki ilişki gösterilmiştir. Buna göre 2. durumda  $\alpha$ 'nın her iki değerinde kütle soldan sağa doğru hareket edince nonlineariteden dolayı oluşan düzeltmeler azalmaktadır. Şekil (6) ve şekil (7)' de 3. durumda sırasıyla  $\alpha$ 'nın 1 ve 10 değerleri için değişik  $\eta$  konumlarında  $\omega_{nl} - a_0$  ilişkisi gösterilmiştir. Buna göre 3. durumda da başlangıçtan orta noktaya kadar  $\eta$  değeri arttıkça nonlineariteden gelen düzeltmeler azalmaktadır. Şekil (8) ve şekil (9)' da 4. durum da sırasıyla  $\alpha$ 'nın 1 ve 10 değerleri için değişik  $\eta$  konumlarında  $\omega_{nl} - a_0$  arasındaki ilişki gösterilmiştir. Buna göre  $\eta$  değerini arttırdığımızda nonlineariteden gelen düzeltmeler

ortaya doğru azalmakta sonra tekrar artmaktadır. Şekil(10) ve şekil (11)' de 5. durumda sırasıyla  $\alpha'$  nm 1 ve 10 değerlerinde değişik  $\eta$  değerleri için  $\omega_{nl} - a_0$  arasındaki ilişki incelenmiştir. Buna göre  $\eta$  değerini arttırdığımızda nonlineeriteden gelen düzeltmeler artmaktadır.

Şekil (12 - 21)'de 1. ve 3. durumlarda  $\eta'$  nm 0.1 ve 0.3 konularında, 2. ,4. ve 5. durumlarda  $\eta'$  nm 0.2 ve 0.4 konumlarında değişik  $\alpha$  değerleri için  $\omega_{nl} - a_0$  arasındaki ilişki incelenmiştir. Bütün durumlarda  $\alpha$  arttıkça nonlineeriteden gelen düzeltmelerin azaldığı gözükmiştir. Kütlelerin artması genelde lineer ve nonlineer frekanslarda her zaman azalmaya sebep olmaktadır.

Şekil (22)' de  $\eta = 0.2$  ve  $\alpha = 1$  alarak beş durum için  $\omega_{nl} - a_0$  arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu şekle göre nonlineeriteden gelen en büyük düzeltme 1. durumda en küçük düzeltmede 5. durumda oluşmaktadır. Şekil (23)' te  $\eta = 0.2$  ve  $\alpha = 10$  alarak beş durum için  $\omega_{nl} - a_0$  arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu şekle göre nonlineeriteden gelen düzeltme en fazla 1. durumda en az ise 5. durumdadır.

#### **4.2 Zorlamalı ve Sönümlü Titreşimler**

Şimdi zorlamalı ve sönümlü titreşimleri ele alalım Düzgün rejimlerdeki titreşimler için

$$a' = 0, \quad \gamma' = 0 \quad (4.5)$$

almır, denklemler (4.5), (3.71) ve (3.72)'ye yerleştirilir ve  $\gamma$  denklemler arasında elimine edilirse

$$\sigma = \frac{3}{16} \frac{a^2 b^2}{\omega k} \mp \sqrt{\frac{\tilde{f}^2}{4\omega^2 a^2} - \tilde{\mu}^2} \quad (4.6)$$

$$\tilde{f} = f / k, \quad \tilde{\mu} = \mu / k \quad (4.7)$$

buluruz.

Zorlama frekansındaki değişim denklem (3.52)'de de gösterildiği gibi  $\sigma$  ayar parametresi ile ifade edilmektedir. Zorlama frekansı ile genlik arasındaki ilişkiler şekil (24-46)'da değişik  $\alpha$ ,  $\eta$  değerleri ve farklı durumlar için gösterilmiştir. Bu incelemeler yapılırken zorlama genliği  $f = 1$  ve sönümlenme katsayısı  $\mu = 0.2$  olarak alınmıştır.  $a_0 - \sigma$  arasındaki ilişkiyi gösteren eğrilere sağdan ve soldan yaklaştığımızda ulaşamadığımız bir bölge bulunmaktadır. Bu bölgeye sıçrama bölgesi denir.

Şekil (24 - 33)'te değişik  $\eta$  değerleri için  $a_0$  ile  $\sigma$  arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil (24) ve şekil (25)'de 1. durumda sırasıyla  $\alpha'$  nin 1 ve 10 değerlerinde değişik  $\eta$  konumları için  $a_0 - \sigma$  ilişkisi gösterilmiştir. Her iki durumda da  $\eta$  değeri orta noktaya kadar arttırıldığında sıçrama bölgesi ve genlik artmaktadır. Şekil (26) ve şekil (27)'de 2. durumda sırasıyla  $\alpha'$  nin 1 ve 10 değerlerinde  $\eta'$  nin değişik değerleri için  $a_0 - \sigma$  arasındaki ilişki gösterilmiştir. Bu durumda  $\alpha'$  nin her iki değerinde  $\eta$  arttıkça sıçrama bölgesi ve genlik artmaktadır. Şekil (28) ve şekil (29)'de 3. durumda sırasıyla  $\alpha'$  nin 1 ve 10 değerlerinde değişik  $\eta$  değerleri için  $a_0 - \sigma$  arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu şekillere

göre  $\eta$  arttıkça genlik orta noktaya kadar azalmaktadır. 3. durumda sıçrama bölgesi gözükmemektedir. Şekil (30) ve şekil (31)' de 4. durumda sırasıyla  $\alpha'$  nm 1 ve 10 değerleri için  $a_0 - \sigma$  arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu durumda  $\eta$  değerini arttırdığımızda genlik ortaya doğru artmakta sonra tekrar azalmaktadır. Sıçrama bölgesi ise  $\alpha'$  nm<sup>-1</sup> olduğu durumda gözüküyor,  $\alpha'$  nm 10 olduğu durumda ise gözükmemektedir ve  $\eta$  değerini arttırdığımızda sıçrama bölgesi orta noktalara doğru artmakta sonra tekrar azalmaktadır. Şekil (32) ve şekil (33)' te 5. durumda  $\alpha$  sırasıyla 1 ve 10 alınıp değişik  $\eta$  değerleri için  $a_0 - \sigma$  arasındaki ilişki incelenmiştir. Buna göre  $\eta$  değeri arttıkça genlik azalmaktadır. Sıçrama bölgesi ise 5. durumda gözükmemektedir.

Şekil (34 - 43)' te 1. ve 3. durumlarda  $\eta'$  nm 0.1 ve 0.3 konumları , 2. 4. ve 5. durumlar için ise  $\eta'$  nm 0.2 ve 0.4 konumları alınarak  $\alpha'$  nm değişik değerleri için inceleme yapılmıştır. Bu durumda şu tesbitler yapılmıştır. Bütün durumlarda  $\alpha$  değeri arttığında genlik artmaktadır. Sıçrama bölgesi ise şekil (38,39) ve şekil (42,43)' ten görüldüğü gibi 3. durumda ve 5. durumda gözükmemektedir. Diğer durumlarda ise  $\alpha$  değeri arttıkça genelde sıçrama bölgesinde artmaktadır.

Şekil (44)' te  $\alpha = 1$  ve  $\eta = 0.2$  alınarak beş değişik durumda  $a_0 - \sigma$  ilişkisi incelenmiştir. Buna göre en büyük genlik ve en büyük sıçrama bölgesi 2. durumda olmaktadır. Şekil (45)' da  $\alpha = 10$  ve  $\eta = 0.2$  alınarak beş değişik durumda  $a_0 - \sigma$  ilişkisi incelenmiştir. Buna göre genliğin en büyük olduğu durum 5. durum, sıçrama bölgesinin en büyük olduğu durumda 1. durumdur.

## **BÖLÜM 5 : SONUÇLAR VE YORUMLAR**

Yaptığımız çalışmada bir kiriş alınmış ve bu kiriş üzerine bir kütle yerleştirilmiştir. Sistemin hareket denklemleri çıkartılmış, bu denklemlere perturbasyon yöntemlerinden olan çok zaman ölçekli metod uygulanıp denklemler çözülmüştür. Kiriş kütle sisteminin lineer ve nonlinear frekansları hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar beş değişik sınır şartı için yapılmış, ayrıca kiriş üzerindeki kütlemin yeri ve miktarında değiştirilerek genlik ve zorlama frekans grafikleri elde edilmiştir.

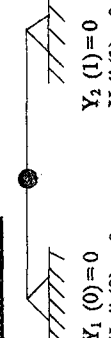
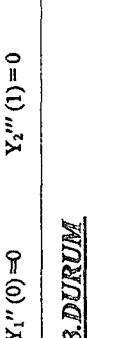

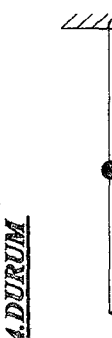
Buna göre işlemler sonunda genel olarak söyleyebileceğimiz şu özellikleri bulduk. Kirişe bağladığımız kütlemin yerini değiştirdiğimizde lineer frekanslar ve nonlineariteden gelen düzeltmeler her durum için farklı şekilde değişmektedir. Kütle miktarını arttırdığımızda ise tabii frekanslar ve nonlineariteden gelen düzeltmeler genelde azalmaktadır. Tabii frekansların en düşük olduğu durum basit mesnet - kayar mesnet durumu en yüksek olduğu durum ise basit mesnet - ankastre mesnet durumudur. Kütlemin yerini değiştirdiğimizde sıçrama bölgesi ve genlik her durum için farklı değişmektedir. Kütlemin miktarını arttırdığımızda ise genlik ve sıçrama bölgesi genelde artmaktadır. Basit mesnet - kayar mesnet durumunda ve kayar mesnet - ankastre mesnet durumunda sıçrama bölgesi gözükmemiştir. Nonlinear frekansın tabii frekansa katkısı en fazla basit mesnet - basit mesnet durumunda olmakta, en az ise kayar mesnet - ankastre mesnet durumunda olmaktadır.

## **KAYNAKLAR**

1. Nayfeh, A.H. ve Mook, D.T., Nonlinear Oscillations , New - York, Willey, 1979
2. Woinowsky - Krieger, S., The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged - Hinged Bars, ASME Journal of Applied Mechanics, Sayı. 17, s. 35 - 36, 1950
3. Burgreen, D., Free Vibration of a Pin - Ended column with Constant Distance between Pin Ends, ASME Journal of Applied Mechanics, Sayı. 18, s. 135 - 139 ,1951
4. Srinivasan, A. V., Large Amplitude - Free Oscillations of Beams and Plates , AIAA Journal , Sayı . 3, s 1951 - 1953, 1965
5. Tseng, W. Y. ve Dugundji , J., Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam under Harmonic Excitation , ASME Journal of Applied Mechanics , Sayı. 38 , s. 467 - 472, 1971
6. Dowell, E. H., Component Mode Analysis of Nonlinear and Nonconservative Systems, ASME Journal of Applied Mechanics , Sayı . 47 ,s. 172 - 176, 1980
7. Szemplinska - Stupnicka, W., The Behaviour of Nonlinear Vibration Systems, II, Netherlands, Kluwer, 1971
8. Pakdemirli, M. ve Nayfeh, A. H., Nonlinear Vibration of a Beam - Spring - Mass System, Journal of Vibration and Acoustics, Sayı. 166, s. 433 - 438, 1994
9. Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan, New - York, 1967
10. Nayfeh, A.H.,Introduction to Perturbation Techniques, Wiley, New - York, 1981



Tablo 1: Beş ayrı durum için mod yapıları ve lineer frekans denklemleri

$Y_1(x)$ ve $Y_2(x)$ Fonksiyonları		Frekans denklemleri	
<p><b>1.DURUM</b></p>  <p> <math>Y_1(0) = 0</math>  <math>Y_1''(0) = 0</math>  <math>Y_2(1) = 0</math>  <math>Y_2'(1) = 0</math> </p>	$Y_1(x) = C \{ \text{Tanh} \beta (\text{Cos} \beta x - \text{Cos} \beta x) \text{Sin} \beta x + (\text{Sin} \beta x - \text{Tanh} \beta \text{Cos} \beta x) \text{Sin} \beta x \}$ $Y_1(x) = C \{ \text{Tanh} \beta \text{Sin} \beta x (\text{Cos} \beta x - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x) + \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta x - \text{Tanh} \beta \text{Cos} \beta x) \}$	$2 \text{Tanh} \beta \text{Tan} \beta - \alpha \beta \{ \text{Tanh} \beta \text{Tan} \beta (\text{Cos} \beta x \text{Sin} \beta x - \text{Cos} \beta x \text{Sin} \beta x) - \text{Tanh} \beta \text{Sin}^2 \beta x + \text{Tan} \beta \text{Sin}^2 \beta x \} = 0$	
<p><b>2.DURUM</b></p>  <p> <math>Y_1(0) = 0</math>  <math>Y_1''(0) = 0</math>  <math>Y_2(1) = 0</math>  <math>Y_2'''(1) = 0</math> </p>	$Y_1(x) = C \{ (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta x + \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x - \text{Cos} \beta (\text{Cos} \beta x - \text{Tanh} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x \}$ $Y_2(x) = C \{ \text{Sin} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta x + \text{Sin} \beta x) - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x (\text{Cos} \beta x - \text{Tanh} \beta \text{Sin} \beta x) \}$	$2 \text{Cos} \beta - \alpha \beta \{ (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta x + \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x - \text{Cos} \beta (\text{Cos} \beta x - \text{Tanh} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x \} = 0$	
<p><b>3.DURUM</b></p>  <p> <math>Y_1'(0) = 0</math>  <math>Y_1'''(0) = 0</math>  <math>Y_2'(1) = 0</math>  <math>Y_2'''(1) = 0</math> </p>	$Y_1(x) = C \{ (\text{Tanh} \beta \text{Cos} \beta x + \text{Tanh} \beta \text{Tan} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Cos} \beta x + (\text{Tan} \beta \text{Cos} \beta x - \text{Tan}^2 \beta \text{Tan} \beta \text{Cos} \beta x) \text{Cos} \beta x \}$ $Y_2(x) = C \{ (\text{Cos} \beta x + \text{Tan} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Tanh} \beta \text{Cos} \beta x + \text{Tan} \beta \text{Cos} \beta x (\text{Cos} \beta x - \text{Tanh} \beta \text{Sin} \beta x) \}$	$2 \text{Tan} \beta \text{Tanh} \beta + \alpha \beta \{ (1 + \text{Tan} \beta \text{Tan} \beta x) \text{Tan} \beta \text{Cos}^2 \beta x + \text{Tan} \beta \text{Cos}^2 \beta x (1 - \text{Tanh} \beta \text{Tanh} \beta x) \} = 0$	
<p><b>4.DURUM</b></p>  <p> <math>Y_1(0) = 0</math>  <math>Y_1''(0) = 0</math>  <math>Y_2(1) = 0</math>  <math>Y_2'(1) = 0</math> </p>	$Y_1(x) = C \{ (\text{Cos} \beta x (\text{Sin} \beta x \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta) + \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta \text{Sin} \beta + \text{Cos} \beta \text{Cos} \beta) - \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta x - \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x + (\text{Sin} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta)) \text{Sin} \beta x \}$ $Y_2(x) = C \{ \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta) \text{Cos} \beta x + (\text{Sin} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta + \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x - \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta) \text{Cos} \beta x + (\text{Sin} \beta x \text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta x \text{Sin} \beta \text{Cos} \beta) \text{Sin} \beta x \}$	$2 (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta) + \alpha \beta \{ (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta) (\text{Cos} \beta x \text{Sin} \beta x - \text{Cos} \beta x \text{Sin} \beta x) - \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta) \text{Sin} \beta x \} = 0$	
<p><b>5.DURUM</b></p>  <p> <math>Y_1'(0) = 0</math>  <math>Y_1'''(0) = 0</math>  <math>Y_2(1) = 0</math>  <math>Y_2'''(1) = 0</math> </p>	$Y_1(x) = C \{ (\text{Cos} \beta x + \text{Sin} \beta \text{Cos} \beta x - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x - (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta x + \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Cos} \beta x + (\text{Cos} \beta x - \text{Cos} \beta) \text{Cos} \beta x - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta x (\text{Sin} \beta x - \text{Sin} \beta x) \text{Cos} \beta x \}$ $Y_2(x) = C \{ (\text{Cos} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Sin} \beta (\text{Sin} \beta \text{Cos} \beta x - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x)) \text{Cos} \beta x + (\text{Cos} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Cos} \beta x + (\text{Cos} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Cos} \beta x + (\text{Cos} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x) \text{Sin} \beta x \}$	$2 (\text{Cos} \beta \text{Sin} \beta + \text{Sin} \beta \text{Cos} \beta) + \alpha \beta \{ (\text{Cos} \beta \text{Sin} \beta + \text{Sin} \beta \text{Cos} \beta) (\text{Sin} \beta x \text{Cos} \beta x - \text{Cos} \beta x \text{Sin} \beta x) - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) - \text{Cos} \beta \text{Sin} \beta x (\text{Cos} \beta \text{Cos} \beta - \text{Sin} \beta \text{Sin} \beta) \text{Sin} \beta x \} = 0$	

Tablo 2:Beş ayrı durum için değişik  $\alpha$  ve  $\eta$  değerlerine karşılık gelen ilk beş tabii frekans

**1.DURUM**

$\alpha$	$\eta$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
1	0	9.8695	39.4784	88.8264	157.9144	246.7413.
	0.1	8.9962	29.8891	66.0691	127.2135	213.3439
	0.2	7.4541	26.9462	73.5140	149.3992	246.7413
	0.3	6.3946	29.7503	86.7293	143.2258	209.3172
	0.4	5.8468	35.2374	79.9788	132.6574	246.7413
	0.5	5.6795	39.4784	67.8883	157.9144	206.7901
10	0	9.8695	39.4785	88.8264	157.9144	246.7413
	0.1	5.3322	19.8359	59.0995	122.6556	210.0412
	0.2	3.2598	22.0545	70.7723	148.0797	246.7413
	0.3	2.5279	26.7706	86.1462	139.3226	204.6273
	0.4	2.2252	33.6806	77.2690	128.5117	246.7413
	0.5	2.1395	39.4785	62.4517	157.9144	200.6472
100	0	9.8695	39.4785	88.8264	157.9144	246.7413
	0.1	1.8978	18.0633	58.3231	122.1688	209.6878
	0.2	1.0771	21.4031	70.4540	147.9240	246.7413
	0.3	0.8221	26.3799	86.0701	138.8320	204.1041
	0.4	0.7198	33.4636	76.9157	128.0360	246.7413
	0.5	0.6911	39.4785	61.7527	157.9144	199.9396

**2.DURUM**

$\alpha$	$\eta$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
1	0	2.4674	22.2066	61.6850	120.9032	199.8604
	0.1	2.4087	18.3454	45.1359	93.4431	167.2211
	0.2	2.2578	14.8086	46.3928	108.0103	196.6417
	0.3	2.0706	14.2145	54.4452	120.0471	166.6578
	0.4	1.8920	15.3836	61.6850	96.2916	188.1808
	0.5	1.7415	17.9539	53.0106	107.5473	181.7185
	0.6	1.6226	21.2279	45.5640	118.1939	173.8152
	0.7	1.5332	21.9816	50.9158	98.6861	193.0932
	0.8	1.4706	19.8790	61.6850	106.6180	165.0326
	0.9	1.4328	17.8328	55.9844	116.7804	198.9933
10	0	2.4674	22.2066	61.6850	120.9032	199.8604
	0.1	2.0037	10.0177	36.3461	87.8901	163.3744
	0.2	1.4140	8.9553	42.7450	105.9953	196.0784
	0.3	1.0683	10.0612	52.6275	119.7514	160.1237
	0.4	0.8662	12.2687	61.6850	90.5702	186.2925
	0.5	0.7395	15.7970	50.3531	104.6406	178.6633
	0.6	0.6560	20.5604	40.8105	117.5013	168.9948
	0.7	0.6000	21.8488	46.6505	94.8383	191.9832
	0.8	0.5634	19.0091	61.6850	101.5157	159.7266
	0.9	0.5421	16.5885	54.8768	116.0683	198.8297
100	0	2.4674	22.2066	61.6850	120.9032	199.8604
	0.1	0.9631	6.9033	35.2501	87.2911	162.9656
	0.2	0.5259	7.7769	42.3090	105.7627	196.0112
	0.3	0.3687	9.3730	52.3982	119.7120	159.3578
	0.4	0.2800	11.7853	61.6850	89.8592	186.0714
	0.5	0.2438	15.4580	50.0047	104.2870	178.3106
	0.6	0.2144	20.4421	40.1860	117.4124	168.4285
	0.7	0.1950	21.8264	46.0505	94.3968	191.8528
	0.8	0.1825	18.8851	61.6850	100.8297	159.1407
	0.9	0.1752	16.4243	54.7427	115.9843	198.8100

**3.DURUM**

$\alpha$	$\eta$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
1	0	6.9049	31.8900	76.4168	140.6264	224.5502
	0.1	7.1089	34.0789	83.5771	155.3912	246.7413
	0.2	7.6615	38.3503	85.7404	130.1379	211.7200
	0.3	8.4912	37.8853	68.0983	141.5267	246.7413
	0.4	9.4084	30.6404	76.1398	154.1645	207.5299
	0.5	9.8696	27.6195	88.8265	127.5589	246.7413
10	0	5.7774	30.4219	74.8365	138.8365	222.8810
	0.1	6.0079	32.8614	82.6412	154.9477	246.7413
	0.2	6.6506	37.9387	84.3398	123.4099	207.8470
	0.3	7.6992	36.9612	62.5959	139.1055	246.7413
	0.4	9.0502	26.9754	73.3548	153.1530	201.8530
	0.5	9.8696	23.1098	88.8260	121.6874	246.7413
100	0	5.6125	30.2458	74.6589	138.8108	222.7019
	0.1	5.8443	32.7097	82.5294	154.8954	246.7413
	0.2	6.4938	37.8806	84.1314	122.5980	207.4291
	0.3	7.6021	36.8098	61.9040	138.8297	246.7413
	0.4	8.9818	26.4429	73.0167	153.0243	201.2965
	0.5	9.8696	22.4502	88.8265	120.9824	246.7413

**4.DURUM**

$\alpha$	$\eta$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
1	0	15.4182	49.9648	104.2482	178.2706	272.0322
	0.1	13.2773	36.9648	78.9377	146.4463	238.6747
	0.2	10.3964	35.8279	89.8535	172.3995	270.5268
	0.3	8.9482	41.1580	104.0726	153.4427	237.9214
	0.4	8.4780	48.5385	87.0356	158.8255	266.7995
	0.5	8.6977	47.2840	84.6891	172.7437	236.1355
	0.6	9.0600	38.6505	103.6283	145.8877	263.2084
	0.7	11.3683	33.0378	92.2403	178.0890	234.5798
	0.8	13.8203	33.2808	77.0176	153.9460	259.8318
	0.9	15.2752	45.5767	79.3377	133.4672	217.8576
10	0	15.4182	49.9648	104.2482	178.2706	272.0322
	0.1	6.7433	27.4534	72.7327	142.2724	235.5979
	0.2	4.1459	31.6794	87.4838	171.4502	270.1487
	0.3	3.3555	38.8358	104.0176	147.7781	234.1359
	0.4	3.1307	47.9812	82.5788	155.8378	265.7259
	0.5	3.2408	46.2242	80.2839	171.5340	231.1555
	0.6	3.7035	35.5186	103.4187	139.9891	261.8636
	0.7	4.7633	27.8717	90.1184	178.0410	228.1671
	0.8	7.2861	23.1321	72.2886	151.2088	258.4699
	0.9	13.6268	24.7908	60.5566	124.2400	212.1305
100	0	15.4182	49.9648	104.2482	178.2706	272.0322
	0.1	2.2861	26.1084	72.0560	141.8267	235.2696
	0.2	1.3488	31.1670	87.2100	171.3376	270.0994
	0.3	1.0828	38.5415	104.0094	147.0884	233.7260
	0.4	1.0085	47.9013	82.0184	155.4959	265.5955
	0.5	1.0451	46.0735	79.7461	171.3874	230.5933
	0.6	1.1995	35.1230	103.3902	139.2919	261.7050
	0.7	1.5595	27.2563	83.6858	178.0356	227.4245
	0.8	2.4652	21.9686	71.7875	150.9114	258.3188
	0.9	5.9999	18.5316	59.0775	123.4365	211.0577

**5.DURUM**

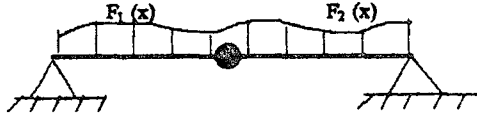
$\alpha$	$\eta$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
1	0	2.9545	23.9392	63.4326	122.7165	201.7195
	0.1	3.0090	25.3661	69.0642	135.4291	223.2036
	0.2	3.1614	28.4668	74.0070	117.3647	187.0877
	0.3	3.4075	30.1129	58.3002	118.7904	220.4928
	0.4	3.7522	25.7223	59.1356	138.7920	196.5491
	0.5	4.1970	20.9093	71.6210	115.0728	216.3253
	0.6	4.7130	18.4833	70.3074	122.8417	195.9552
	0.7	5.1950	18.7343	57.8091	134.4440	208.7476
	0.8	5.4925	22.7446	50.6636	111.6425	203.5245
	0.9	5.5858	59.2073	61.9712	102.3233	172.2446
10	0	1.0756	22.5620	61.8705	121.1012	200.0584
	0.1	1.1036	24.1652	68.0335	134.8478	222.3767
	0.2	1.1831	27.8389	73.7213	110.9462	182.5687
	0.3	1.3190	30.0441	52.9205	115.6980	220.0772
	0.4	1.5302	23.4686	55.4268	138.7920	180.4132
	0.5	1.8570	17.0896	70.6208	110.4096	215.0827
	0.6	2.3796	13.1964	69.0978	119.2071	192.3353
	0.7	3.2543	11.0367	54.4383	133.5758	205.5496
	0.8	4.5913	9.8339	43.9142	108.0872	201.4753
	0.9	5.5150	19.3652	38.3650	89.3286	165.1867
100	0	0.3458	22.3926	61.6928	120.9230	199.8802
	0.1	0.3551	24.0125	67.9096	134.7782	222.3707
	0.2	0.3818	27.7509	73.6780	110.1240	182.0772
	0.3	0.4279	30.0323	52.1973	115.3454	220.0268
	0.4	0.5006	23.1243	54.9705	138.7920	179.6967
	0.5	0.6162	16.5394	70.4856	109.8534	214.9332
	0.6	0.8111	12.4278	68.9415	118.7642	191.9278
	0.7	1.1785	9.8085	54.0469	133.4695	205.1827
	0.8	2.0236	8.1301	43.2126	107.7029	201.2483
	0.9	4.5648	8.1108	35.8073	88.2874	164.5294

Tablo 3 : Nonlineer terimlerin tabii frekansa katkıları

1. DURUM	$\alpha = 1$	$\eta$	$\lambda$
		0.1	1.6738
		0.3	1.1764
	$\alpha = 10$	0.5	1.0593
		0.1	0.8915
		0.3	0.4528
	$\alpha = 100$	0.5	0.3968
		0.1	0.2927
		0.3	0.1464
		0.5	0.1280
2. DURUM	$\alpha = 1$	$\eta$	$\lambda$
		0.2	0.4224
		0.4	0.3531
		0.6	0.3038
	$\alpha = 10$	0.8	0.2753
		0.2	0.2552
		0.4	0.1591
		0.6	0.1226
	$\alpha = 100$	0.8	0.1052
		0.2	0.0915
		0.4	0.0536
		0.6	0.0400
		0.8	0.0340
3. DURUM	$\alpha = 1$	$\eta$	$\lambda$
		0.1	1.1937
		0.3	0.2873
	$\alpha = 10$	0.5	0.0765
		0.1	0.1854
		0.3	0.0484
	$\alpha = 100$	0.5	0.0090
		0.1	0.0164
		0.3	0.0037
		0.5	0.0009

4. DURUM	$\alpha = 1$	$\eta$	$\lambda$
		0.2	1.1565
		0.4	0.9130
		0.6	0.9546
	$\alpha = 10$	0.8	1.2843
		0.2	0.4663
		0.4	0.3395
		0.6	0.3260
	$\alpha = 100$	0.8	0.4315
		0.2	0.1518
		0.4	0.1090
		0.6	0.1043
		0.8	0.1273

5. DURUM	$\alpha = 1$	$\eta$	$\lambda$
		0.2	0.0780
		0.4	0.1450
		0.6	0.2046
	$\alpha = 10$	0.8	0.2353
		0.2	0.0029
		0.4	0.0057
		0.6	0.0255
	$\alpha = 100$	0.8	0.1094
		0.2	0.000076
		0.4	0.000095
		0.6	0.000124
		0.8	0.002488

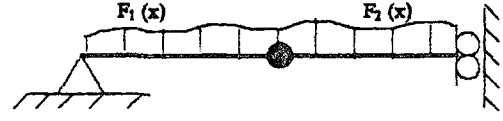
1.Durum

$$w_1(0,t) = 0$$

$$w_1''(0,t) = 0$$

$$w_2(L,t) = 0$$

$$w_2''(L,t) = 0$$

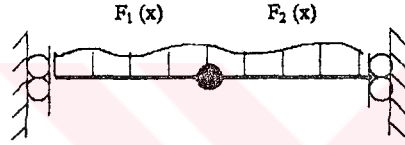
2.Durum

$$w_1(0,t) = 0$$

$$w_1''(0,t) = 0$$

$$w_2'(L,t) = 0$$

$$w_2'''(L,t) = 0$$

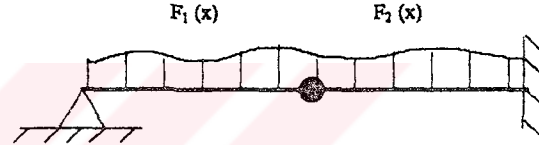
3.Durum

$$w_1'(0,t) = 0$$

$$w_1'''(0,t) = 0$$

$$w_2'(L,t) = 0$$

$$w_2'''(L,t) = 0$$

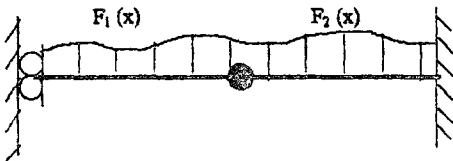
4.Durum

$$w_1(0,t) = 0$$

$$w_1''(0,t) = 0$$

$$w_2(L,t) = 0$$

$$w_2'(L,t) = 0$$

5. Durum

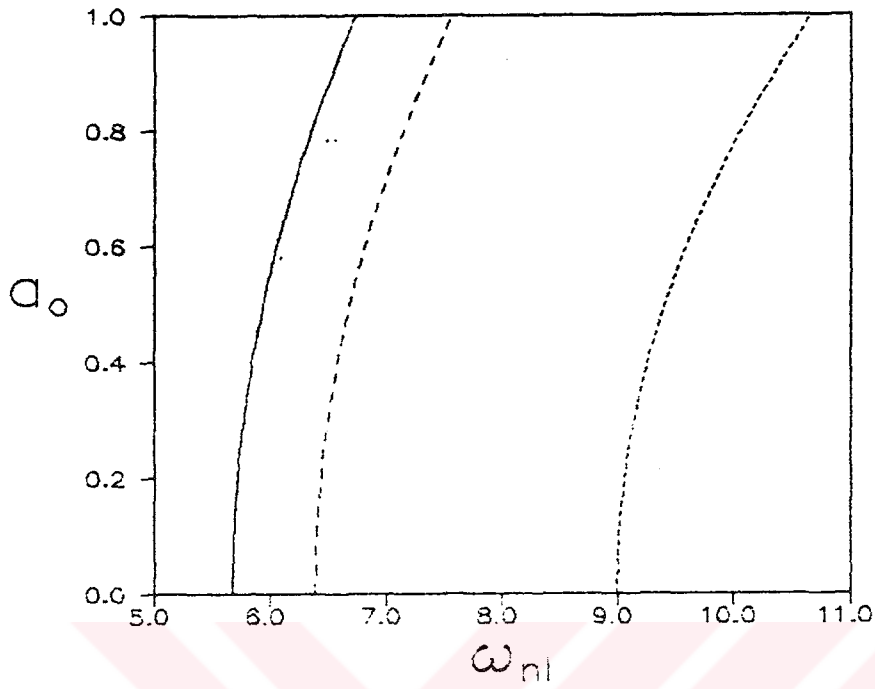
$$w_1'(0,t) = 0$$

$$w_1'''(0,t) = 0$$

$$w_2(L,t) = 0$$

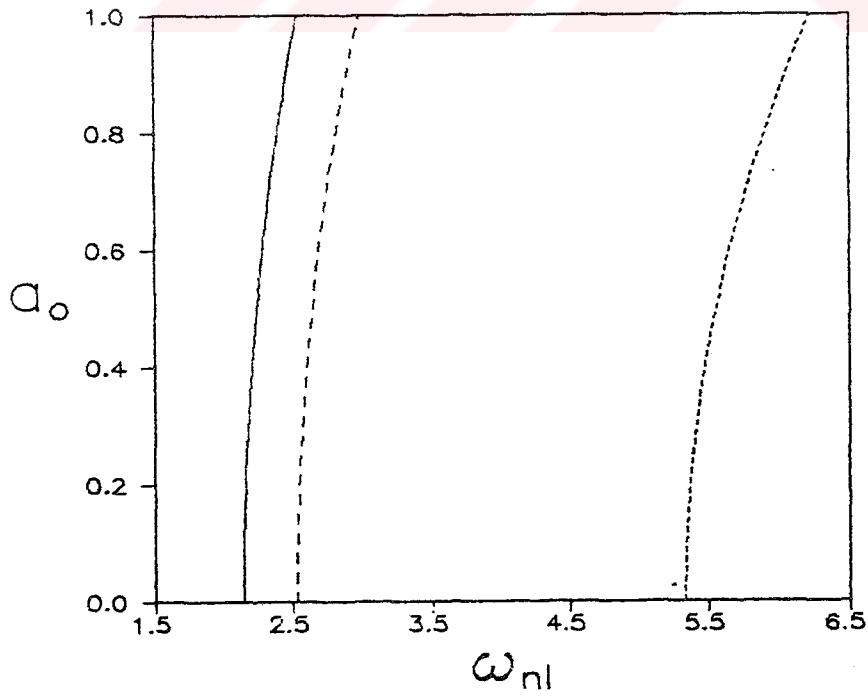
$$w_2'(L,t) = 0$$

Şekil 1 : Beş ayrı durum için sınır şartları.



Şekil 2. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

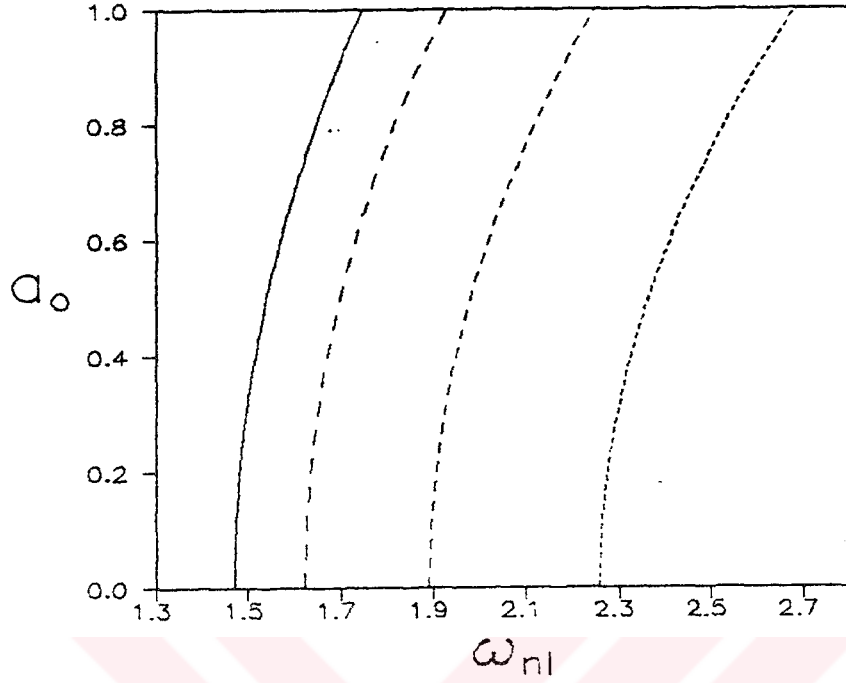
(1. mod, 1. durum,  $\alpha = 1$ ) (.....  $\eta = 0.1$ , - - - - -  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )



Şekil 3. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

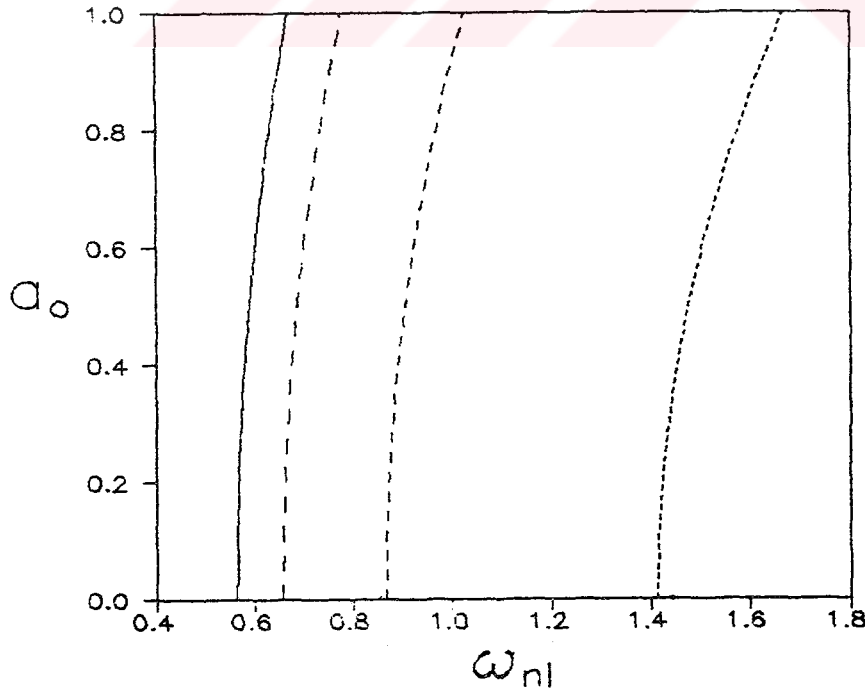
(1. mod, 1. durum  $\alpha = 10$ ) (.....  $\eta = 0.1$ , - - - - -  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )





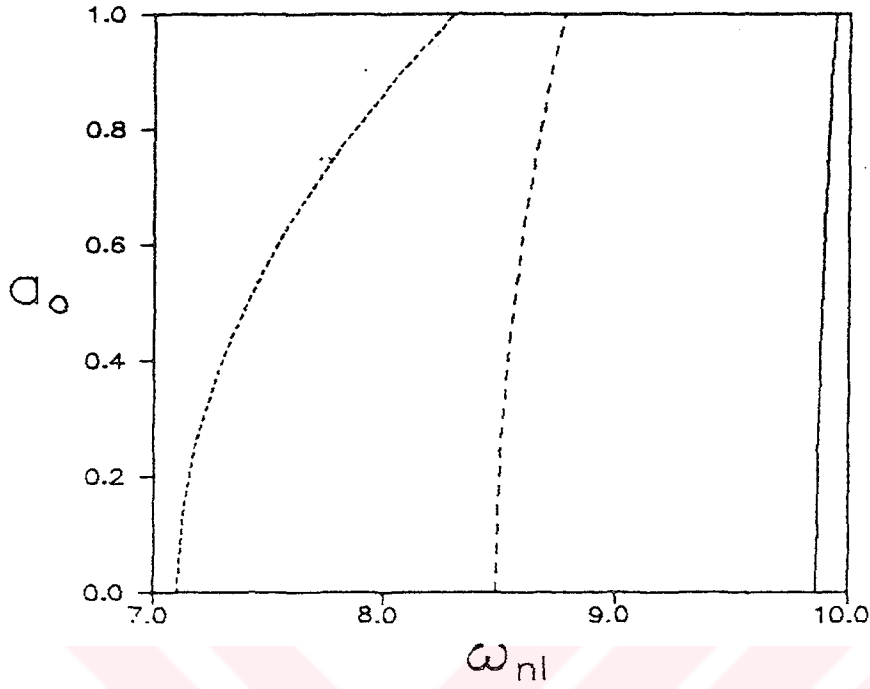
Şekil 4. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\alpha = 1$ ) (----- $\eta = 0.2$ , - - - -  $\eta = 0.4$ , - . - . -  $\eta = 0.6$ , — — —  $\eta = 0.8$ )



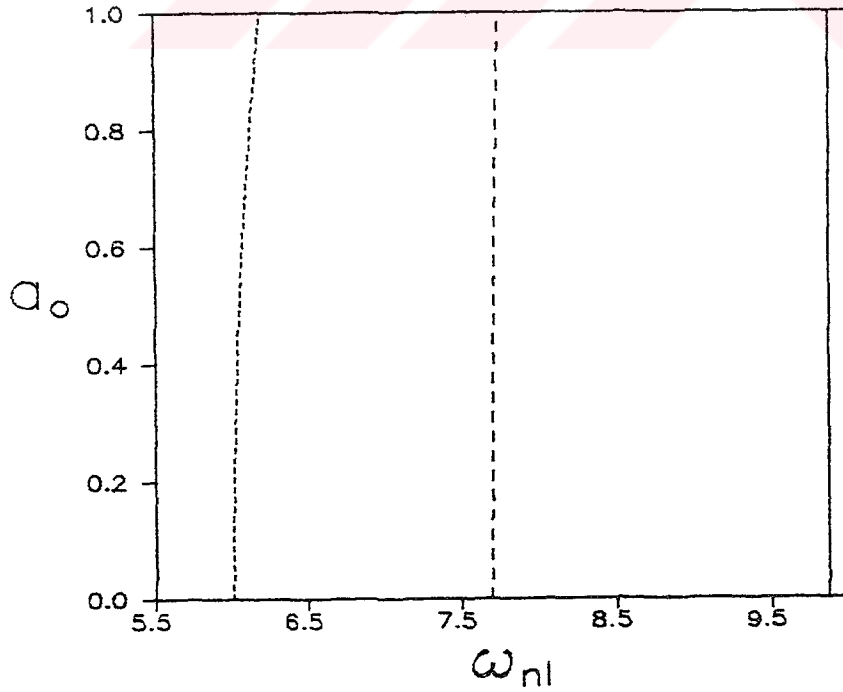
Şekil 5. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\alpha = 10$ ) (----- $\eta = 0.2$ , - - - -  $\eta = 0.4$ , - . - . -  $\eta = 0.6$ , — — —  $\eta = 0.8$ )



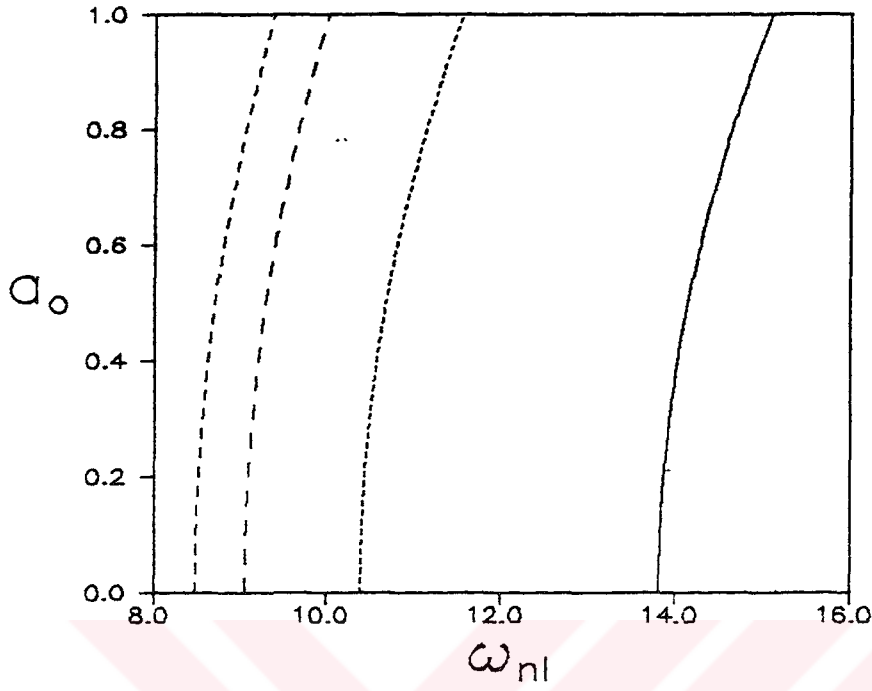
Şekil 6. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.1$ , - - - - -  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )



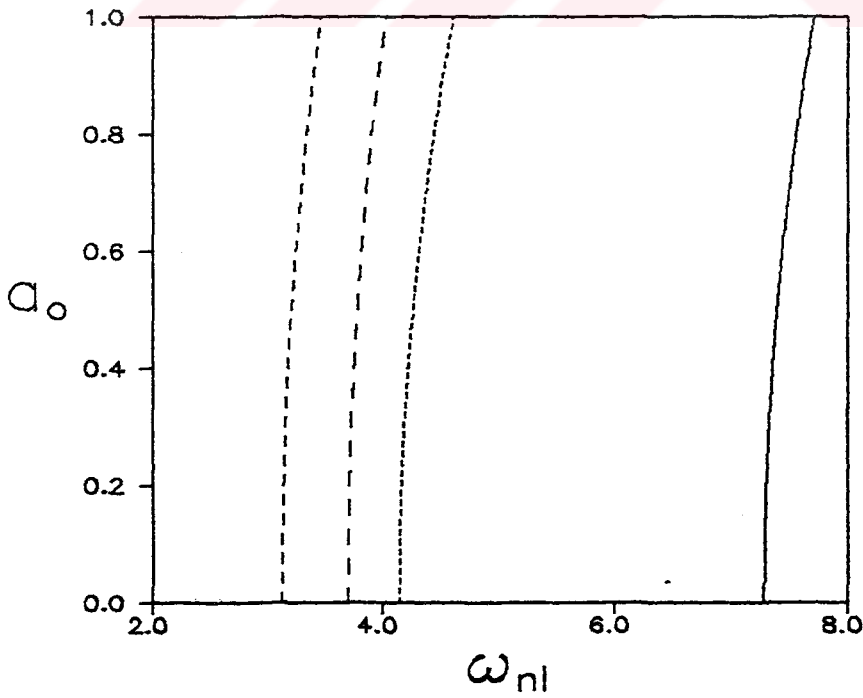
Şekil 7. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.1$ , - - - - -  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )



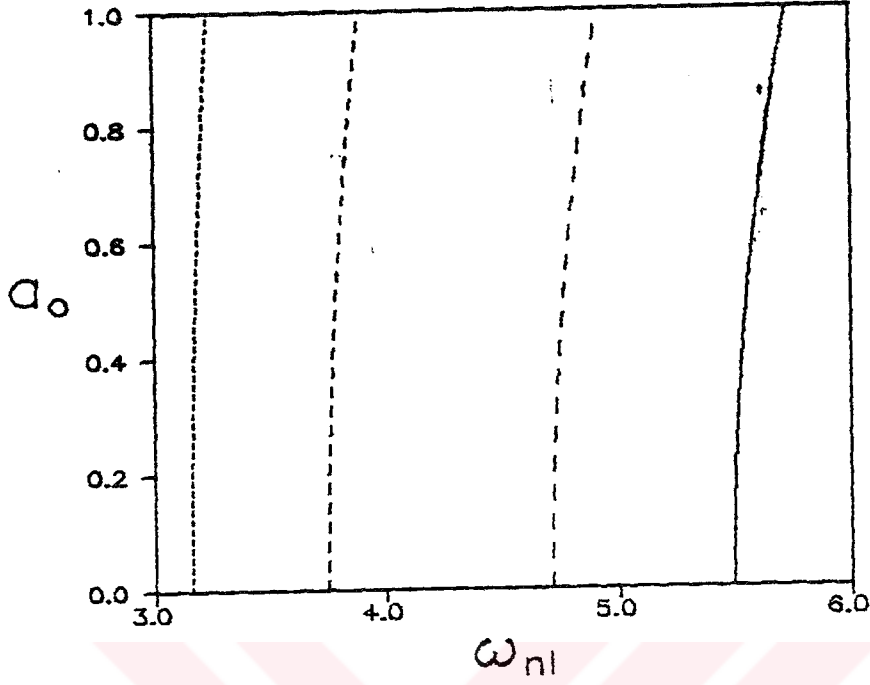
Şekil 8. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri.

(1. mod, 4. durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , - - - - -  $\eta = 0.4$ , - - - -  $\eta = 0.6$ , — — —  $\eta = 0.8$ )



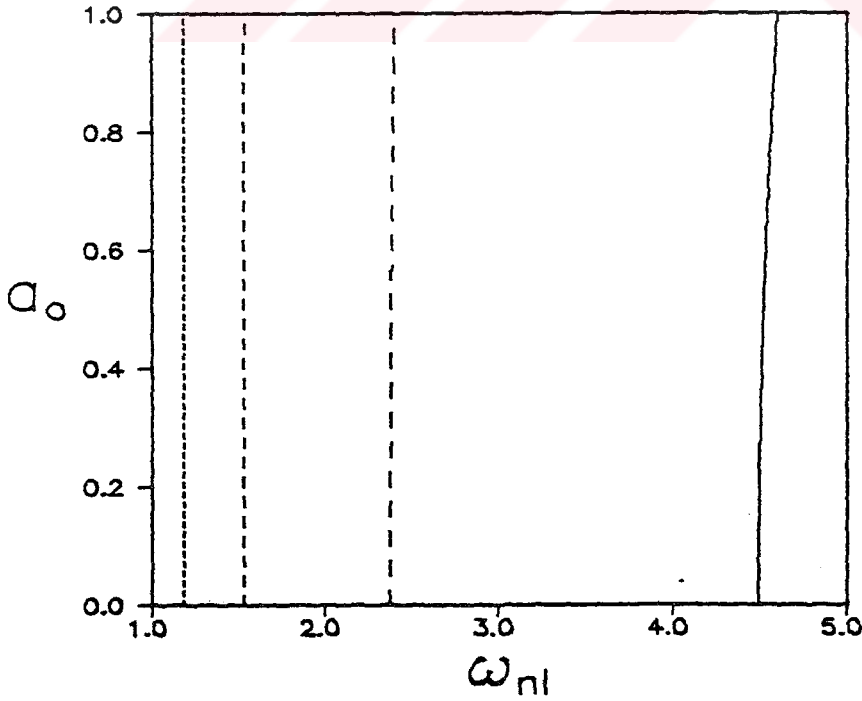
Şekil 9. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 4. durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , - - - - -  $\eta = 0.4$ , - - - -  $\eta = 0.6$ , — — —  $\eta = 0.8$ )



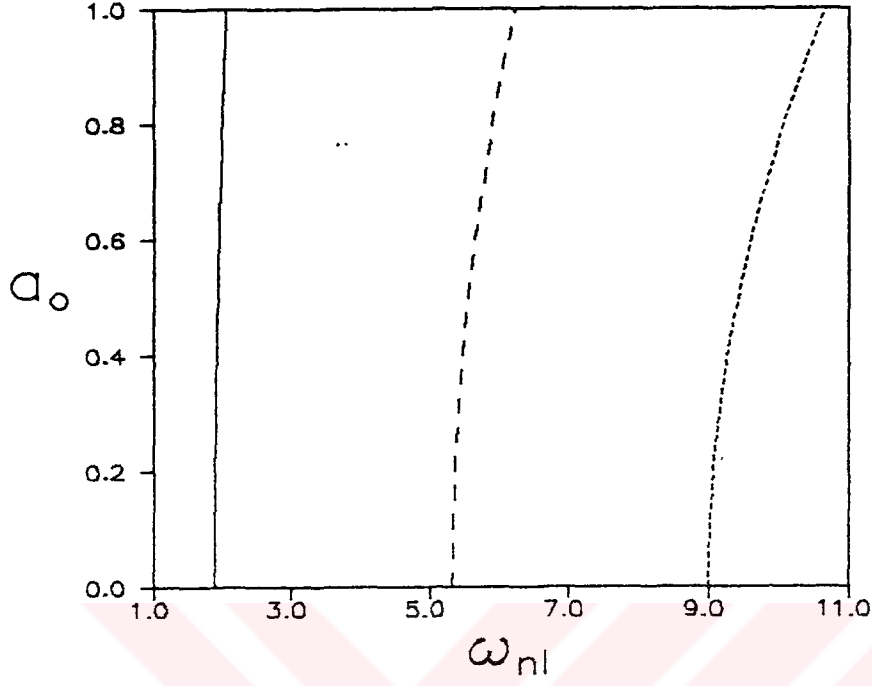
Şekil 10. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , - - - - -  $\eta = 0.4$ , - - - -  $\eta = 0.6$ , — — —  $\eta = 0.8$ )



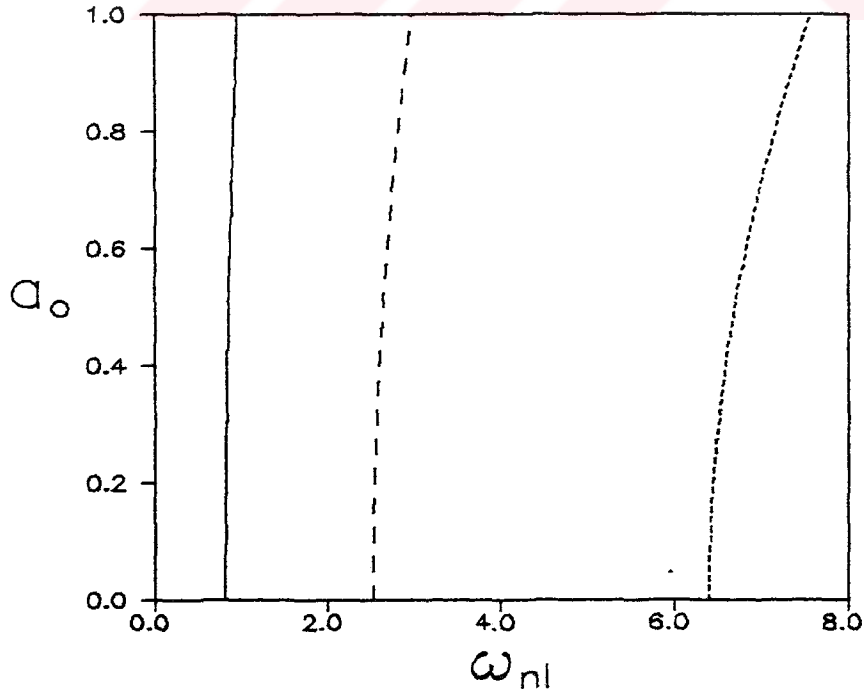
Şekil 11. Değişik  $\eta$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , - - - - -  $\eta = 0.4$ , - - - -  $\eta = 0.6$ , — — —  $\eta = 0.8$ )



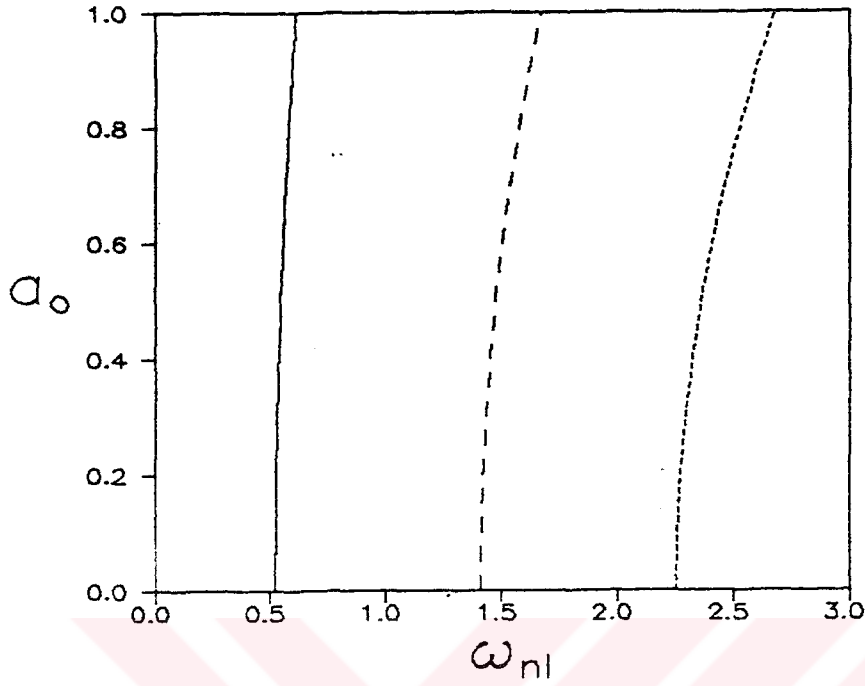
Şekil 12. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 1. durum,  $\eta = 0.1$ ) (----- $\alpha = 1$ , - - - - - $\alpha = 10$ , ————  $\alpha = 100$ )



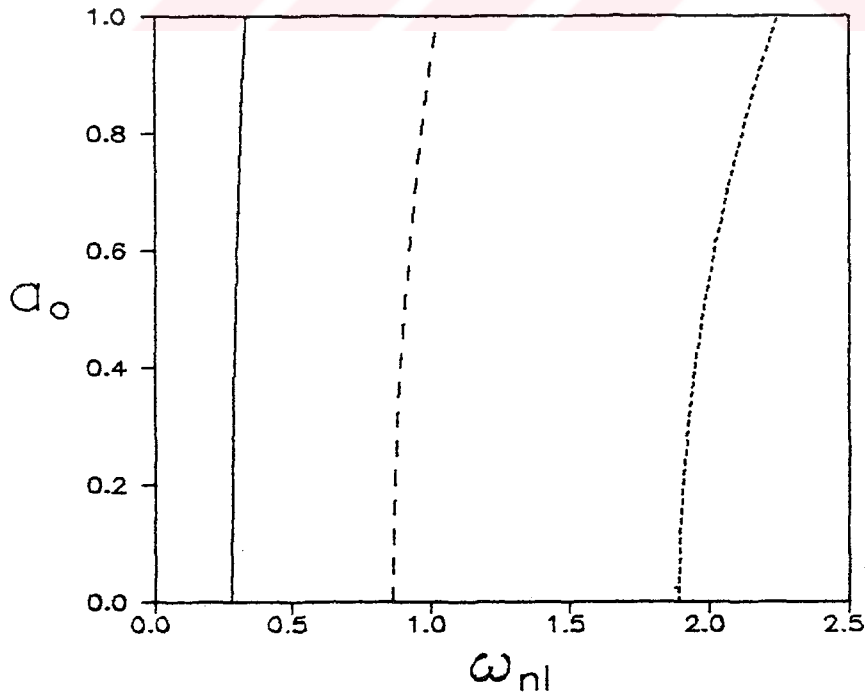
Şekil 13. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 1. durum,  $\eta = 0.3$ ) (----- $\alpha = 1$ , - - - - - $\alpha = 10$ , ————  $\alpha = 100$ )



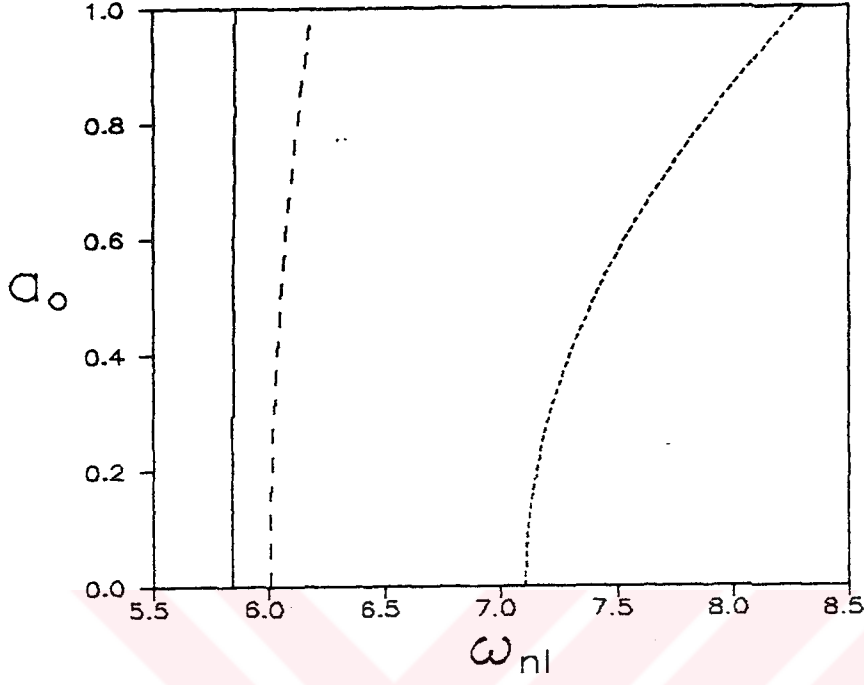
Şekil 14. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\eta = 0.2$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



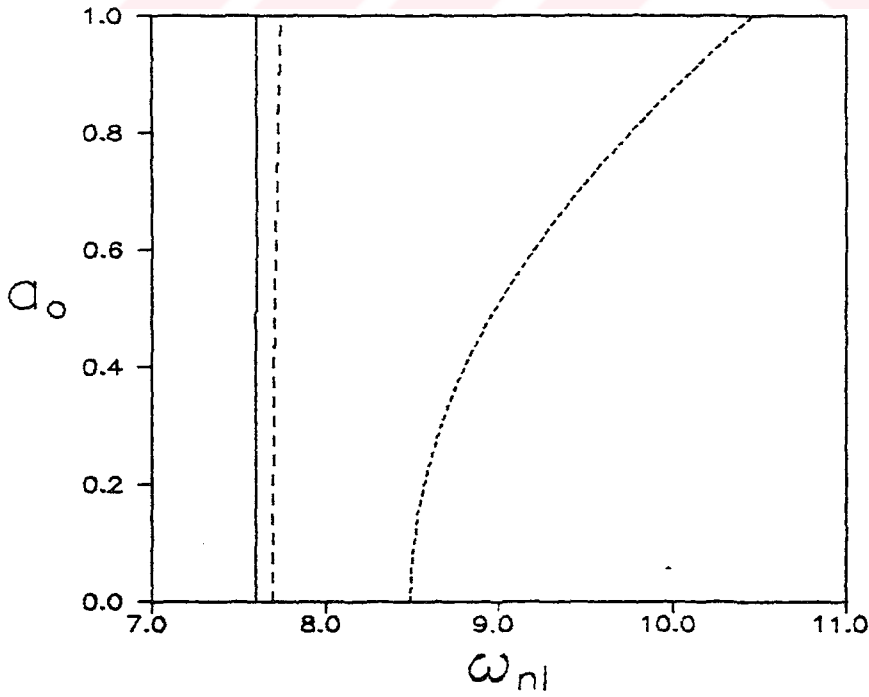
Şekil 15. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\eta = 0.4$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



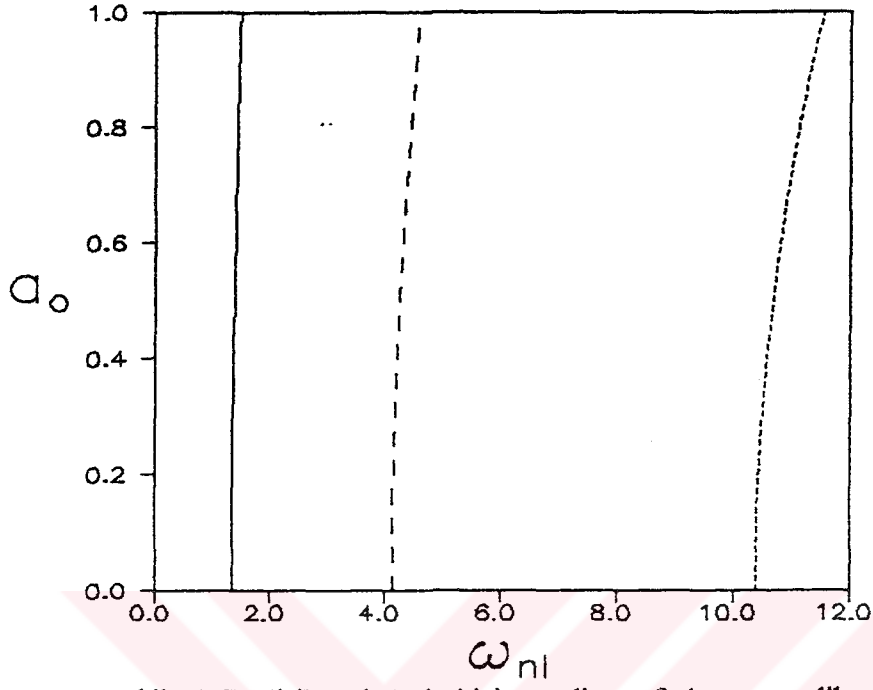
Şekil 16. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\eta = 0.1$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



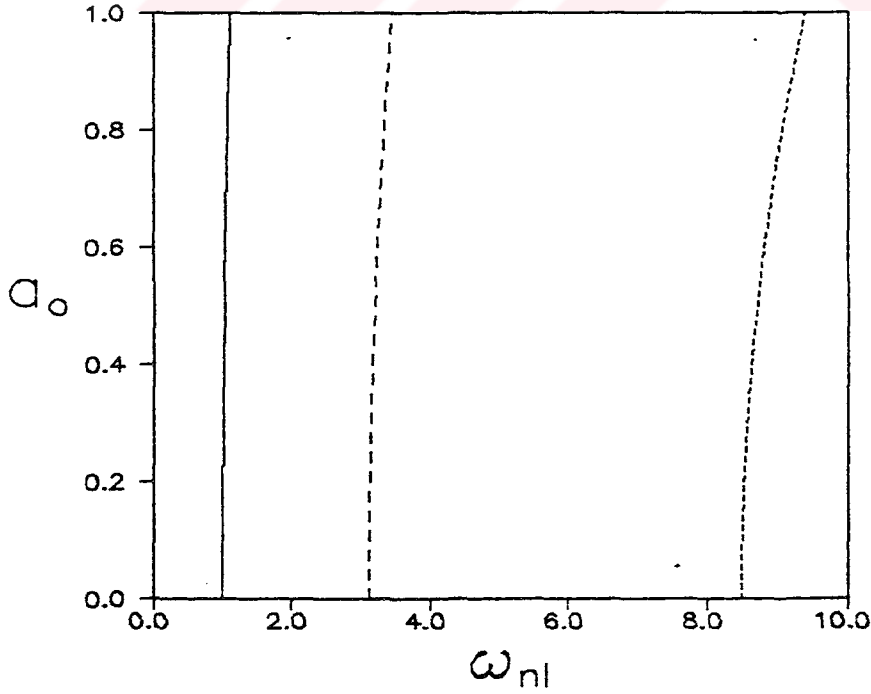
Şekil 17. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\eta = 0.3$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



Şekil 18. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

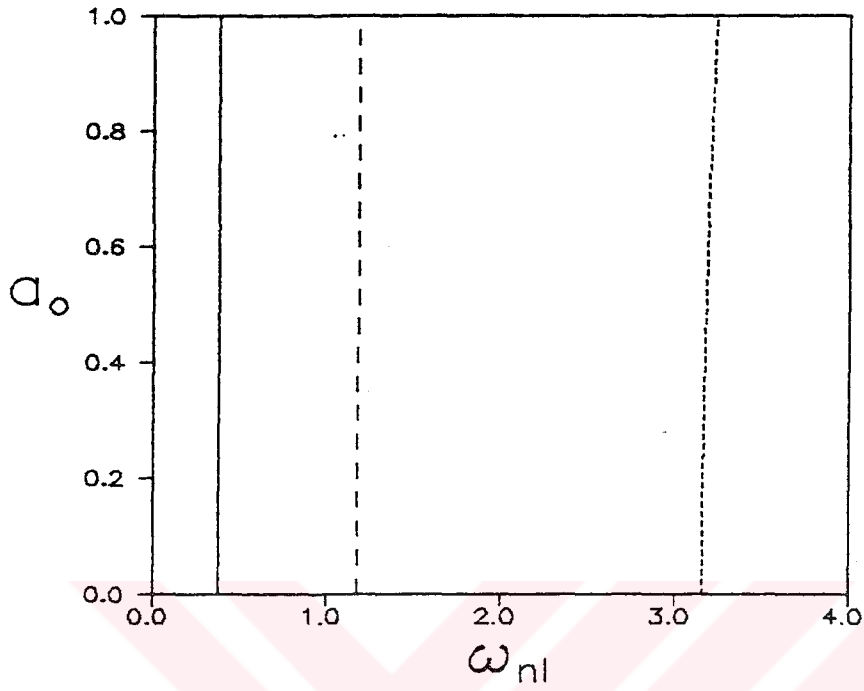
(1. mod, 4. durum,  $\eta = 0.2$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



Şekil 19. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

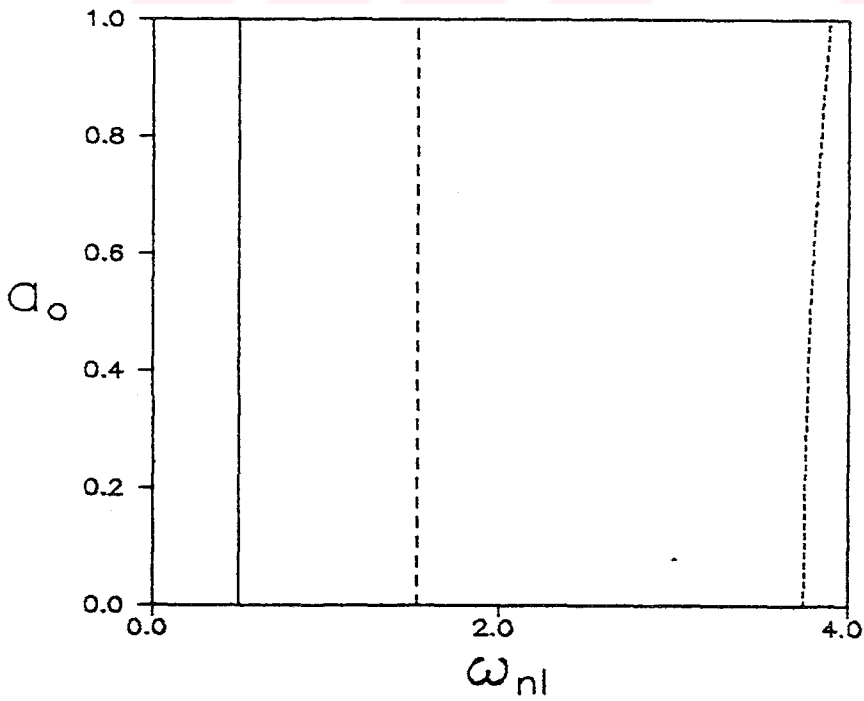
(1. mod, 4. durum,  $\eta = 0.4$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )





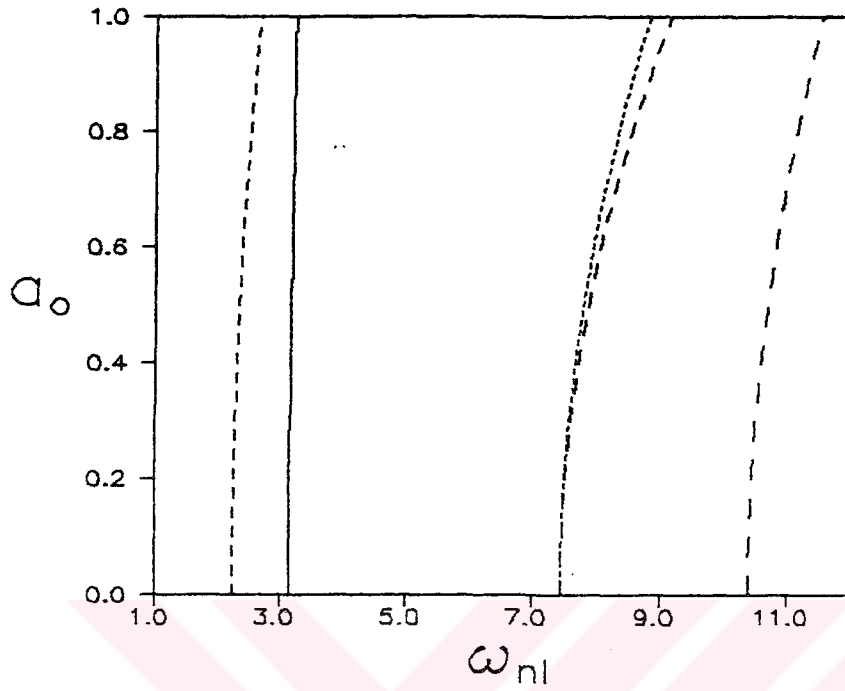
Şekil 20. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\eta = 0.2$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



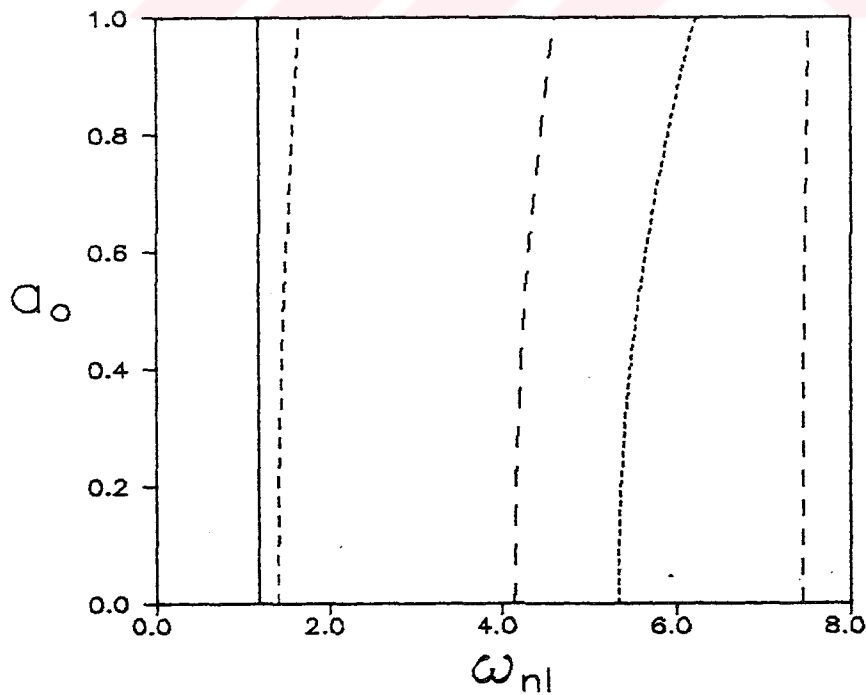
Şekil 21. Değişik  $\alpha$  değerleri için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\eta = 0.4$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



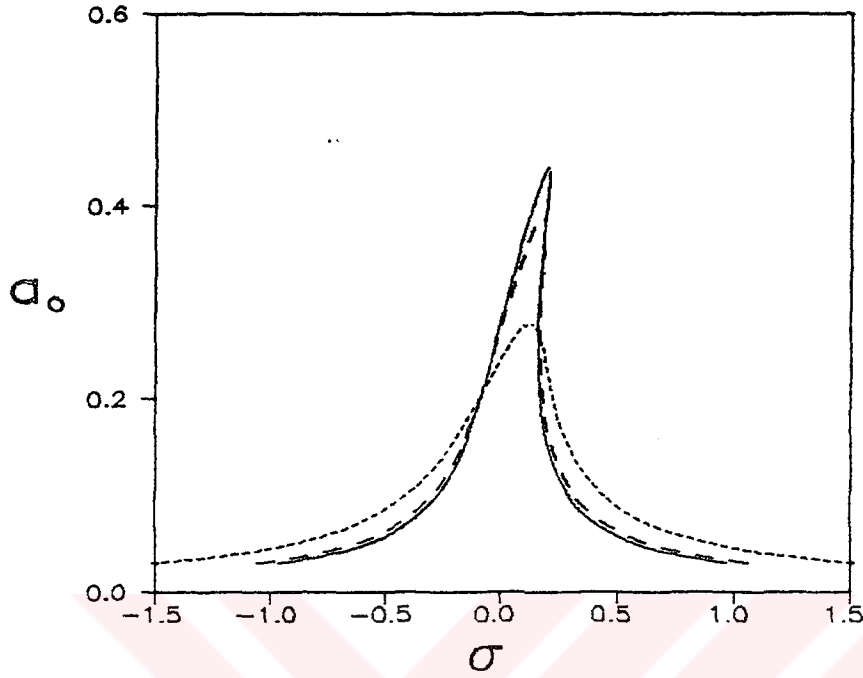
Şekil 22. Değişik sınır şartları için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod,  $\eta = 0.2$ ,  $\alpha = 1$ ) (.....1. durum, - - - - 2. durum, - . - . 3. durum, - - - - 4. durum, ——— 5. durum)



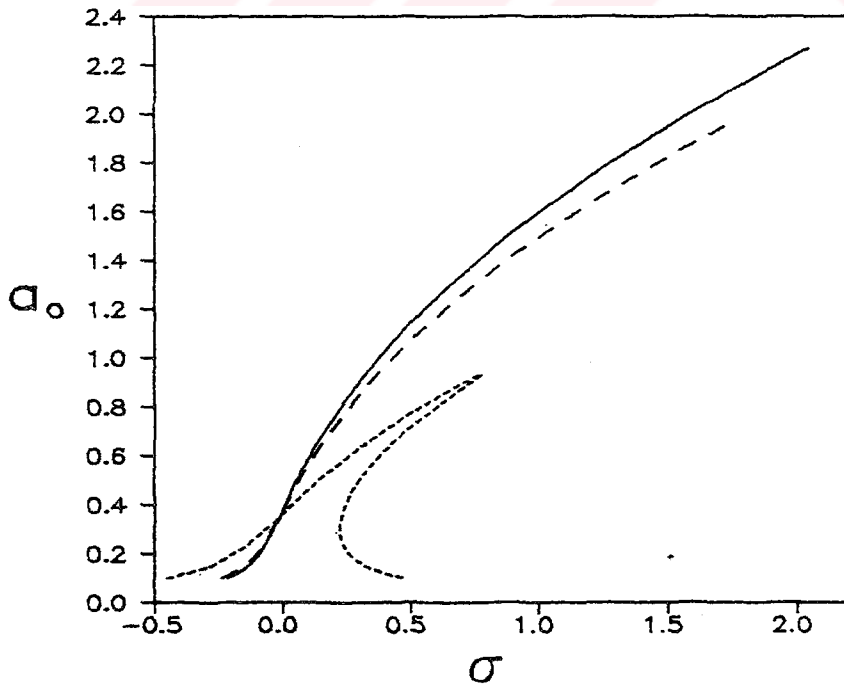
Şekil 23. Değişik sınır şartları için nonlineer frekans - genlik eğrileri

(1. mod,  $\eta = 0.2$ ,  $\alpha = 10$ ) (.....1. durum, - - - - 2. durum, - . - . 3. durum, - - - - 4. durum, ——— 5. durum)



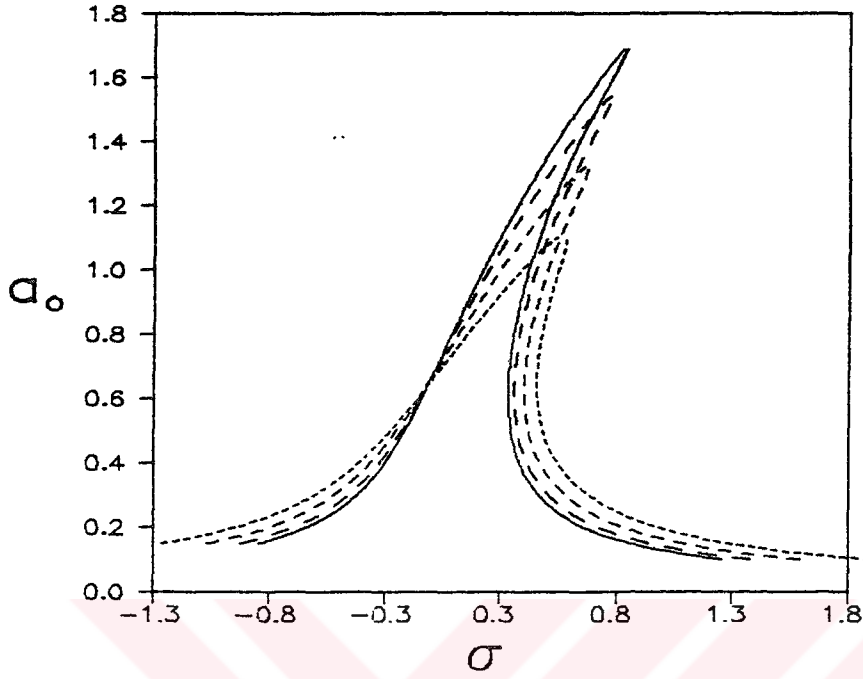
Şekil 24 Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 1. durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.1$ , .....  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )



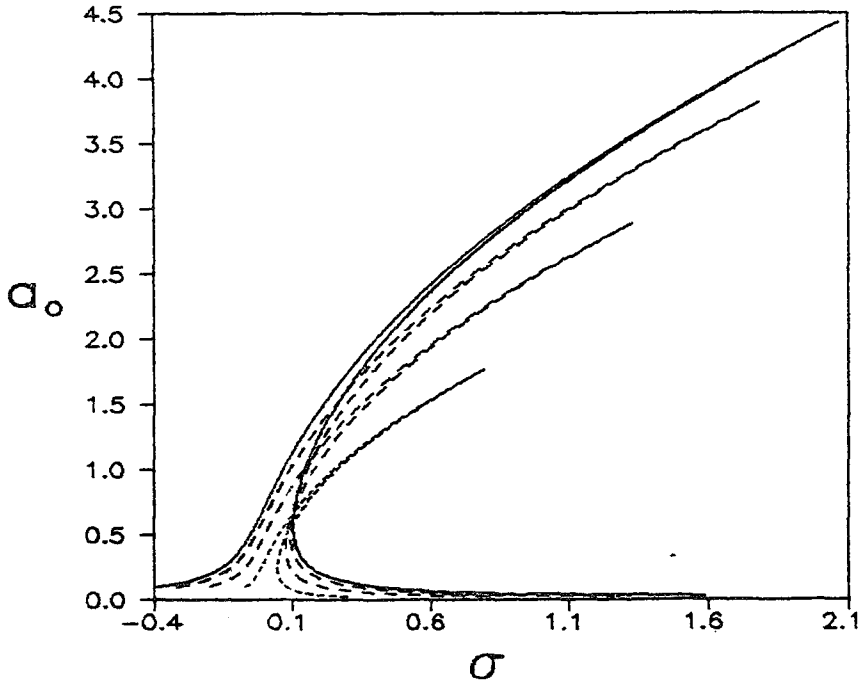
Şekil 25. Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 1. durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.1$ , .....  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )



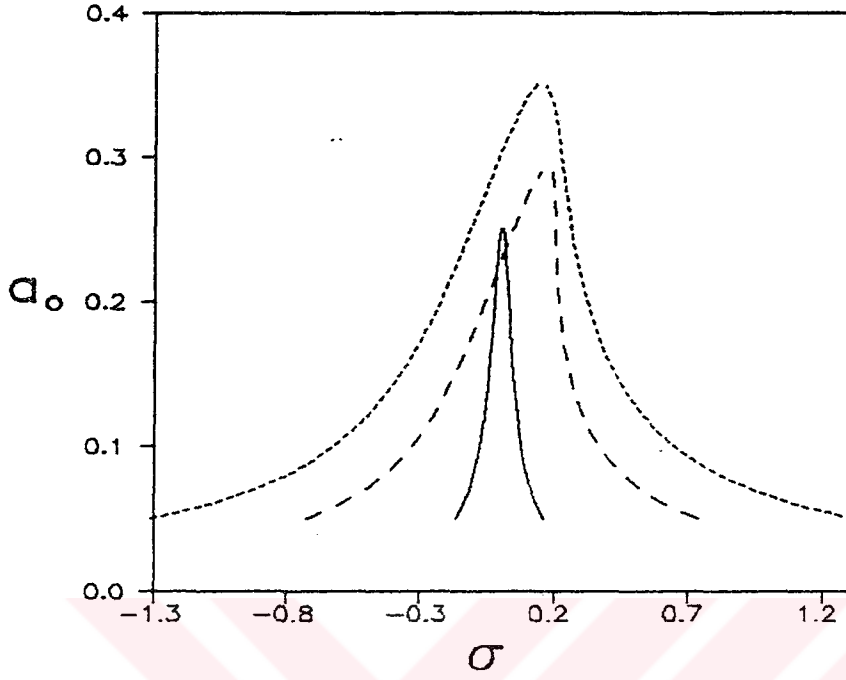
Şekil 26. Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , .....  $\eta = 0.4$ , - - -  $\eta = 0.6$ , ———  $\eta = 0.8$ )



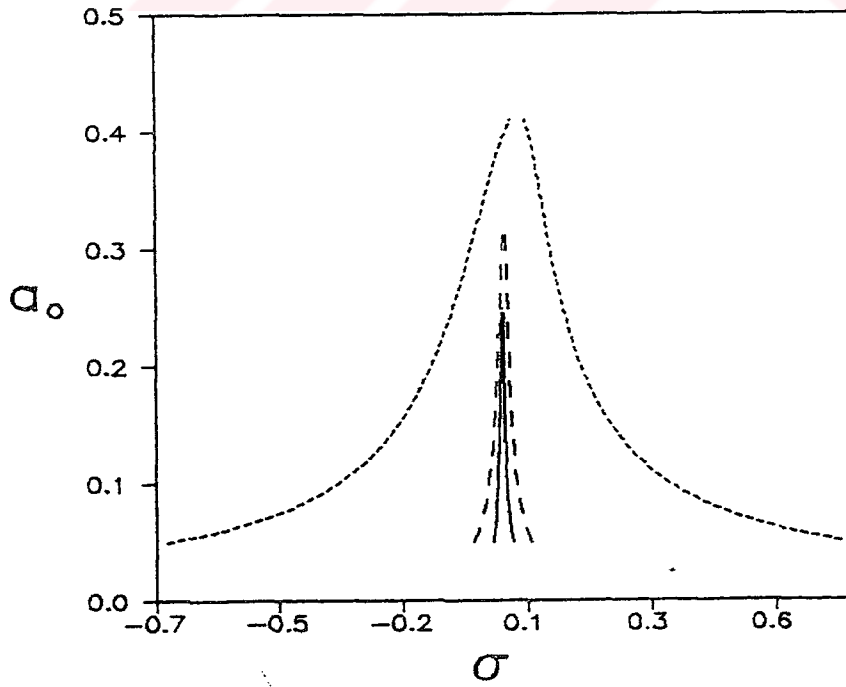
Şekil 27 Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , .....  $\eta = 0.4$ , - - -  $\eta = 0.6$ , ———  $\eta = 0.8$ )



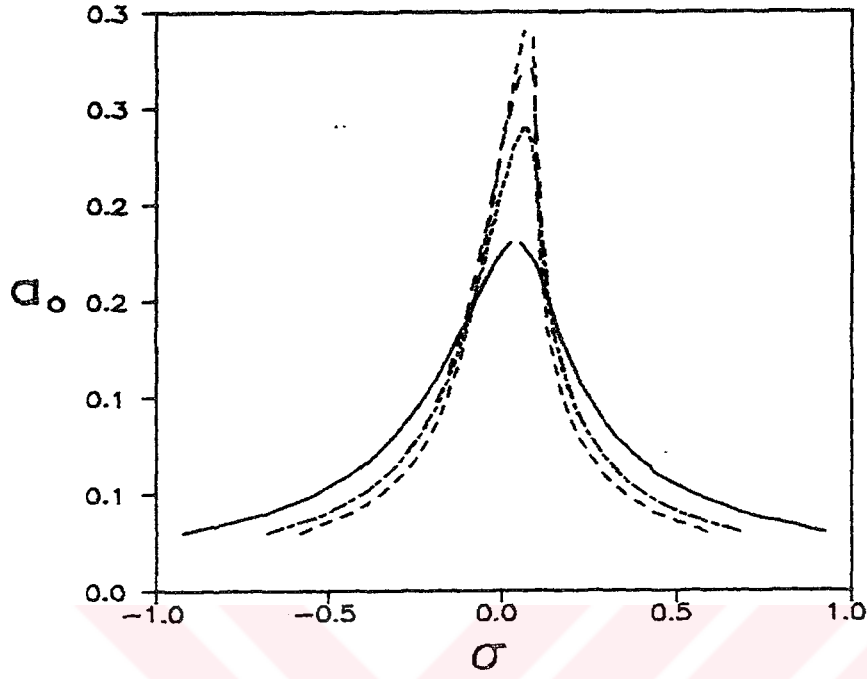
Şekil28 . Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.1$ , - - - - -  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )



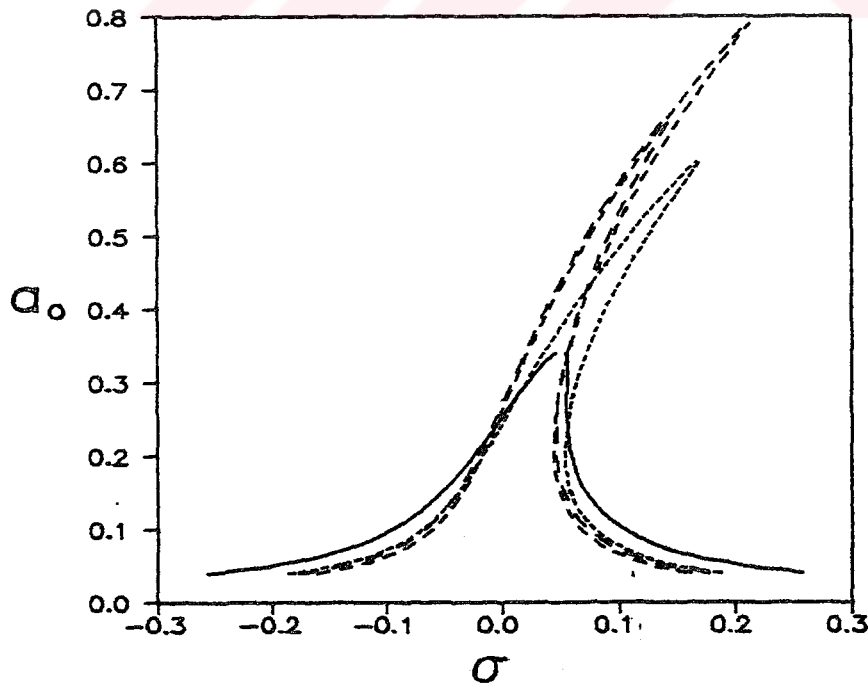
Şekil 29. Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.1$ , - - - - -  $\eta = 0.3$ , ———  $\eta = 0.5$ )



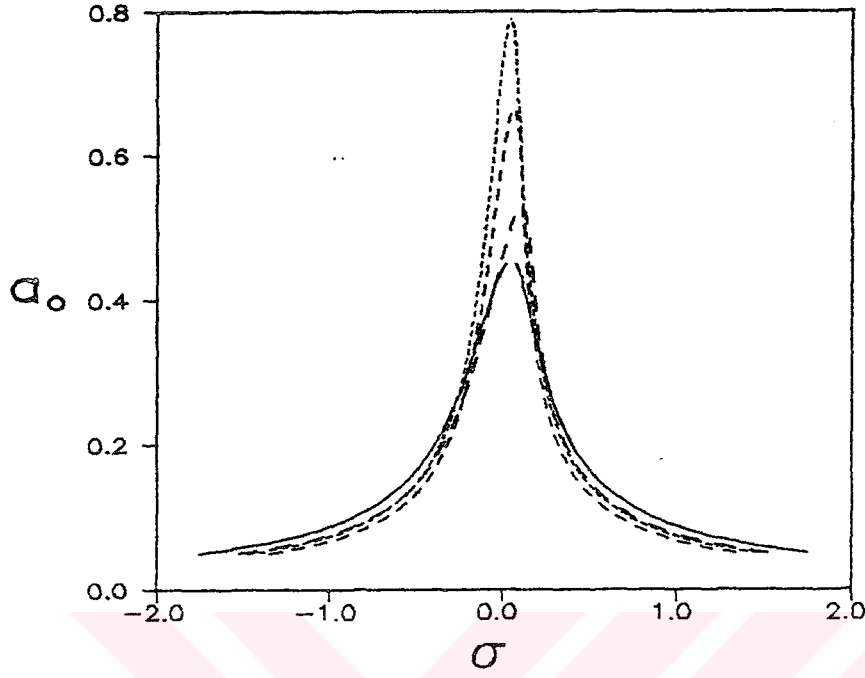
Şekil 30. Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 4. Durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , .....  $\eta = 0.4$ , - - -  $\eta = 0.6$  ———  $\eta = 0.8$ )



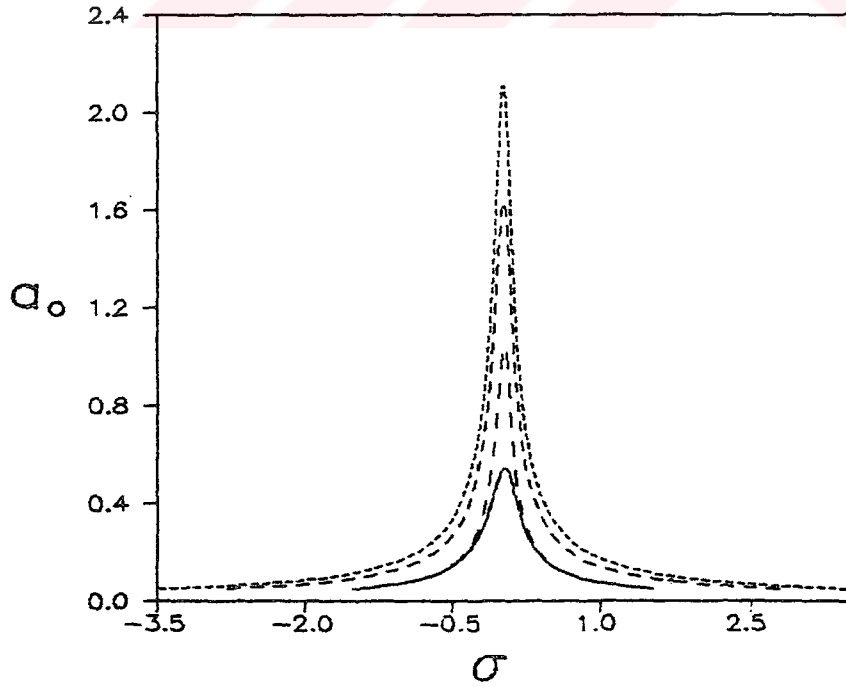
Şekil 31. Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 4. Durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , .....  $\eta = 0.4$ , - - -  $\eta = 0.6$  ———  $\eta = 0.8$ )



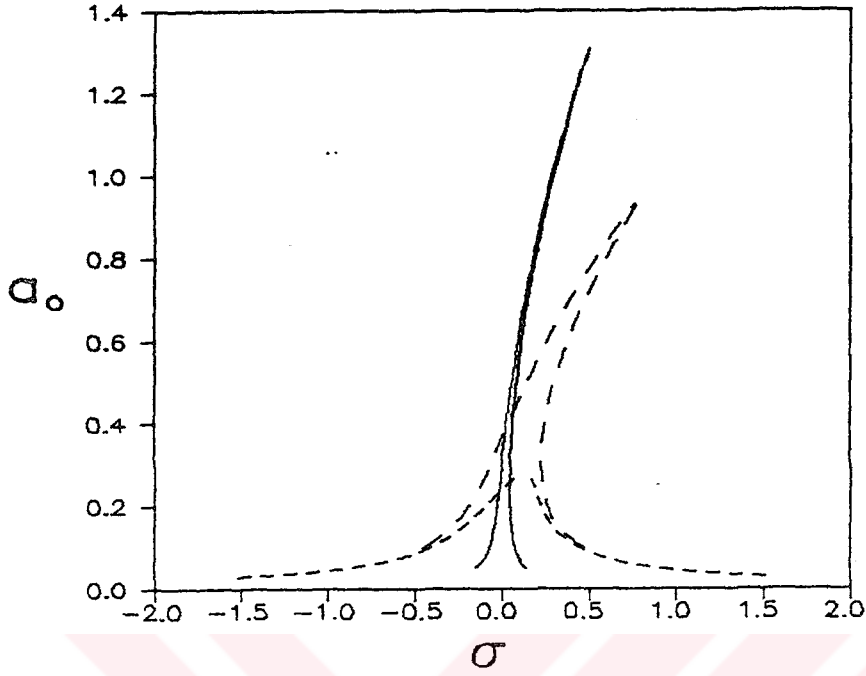
Şekil 32. Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\alpha = 1$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , - - - -  $\eta = 0.4$ , - . - .  $\eta = 0.6$ , —  $\eta = 0.8$ )



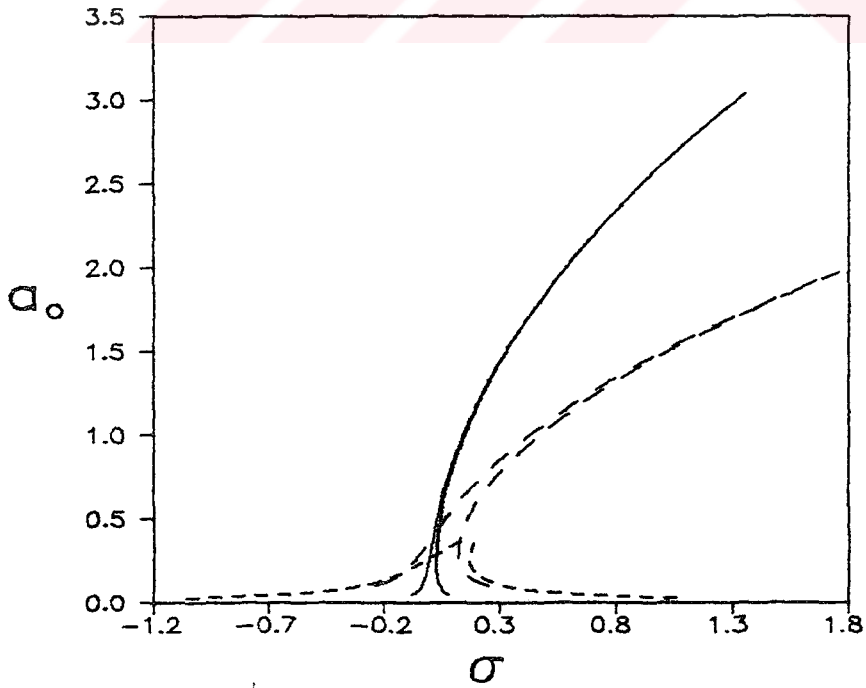
Şekil 33. Değişik  $\eta$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\alpha = 10$ ) (-----  $\eta = 0.2$ , - - - -  $\eta = 0.4$ , - . - .  $\eta = 0.6$ , —  $\eta = 0.8$ )



Şekil 34 Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

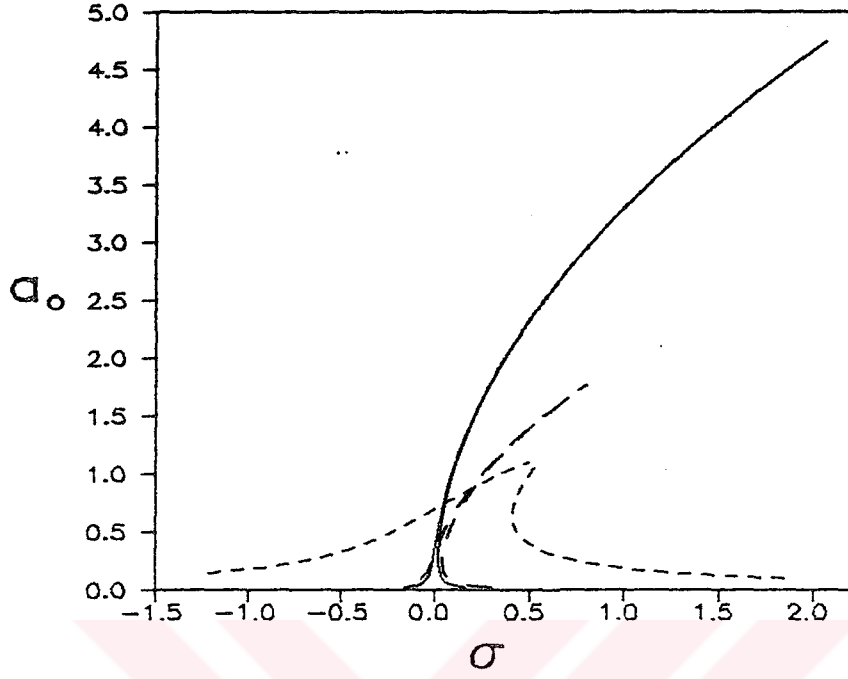
(1. mod, 1. durum,  $\eta = 0.1$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



Şekil 35 Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

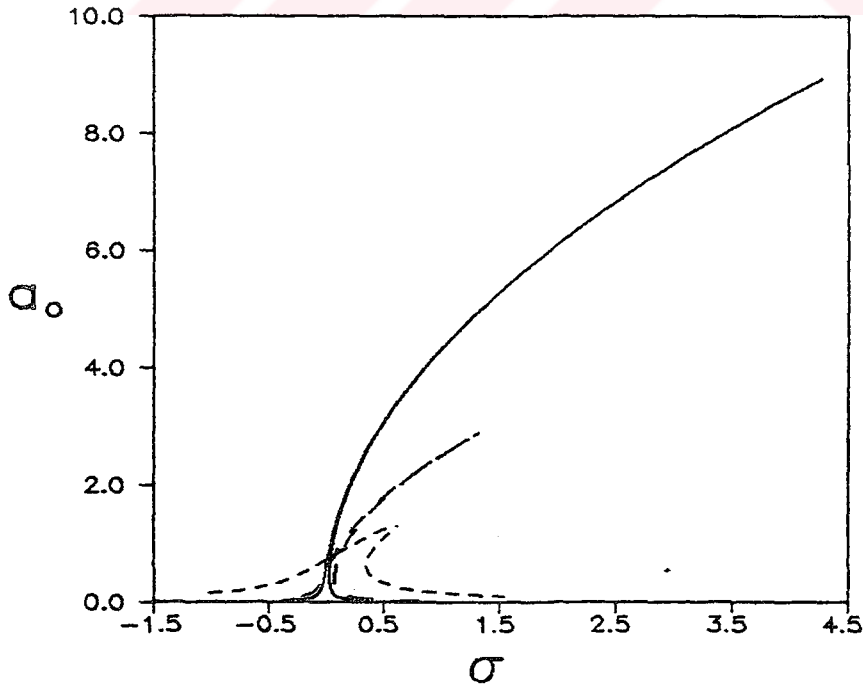
(1. mod, 1. durum,  $\eta = 0.3$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )





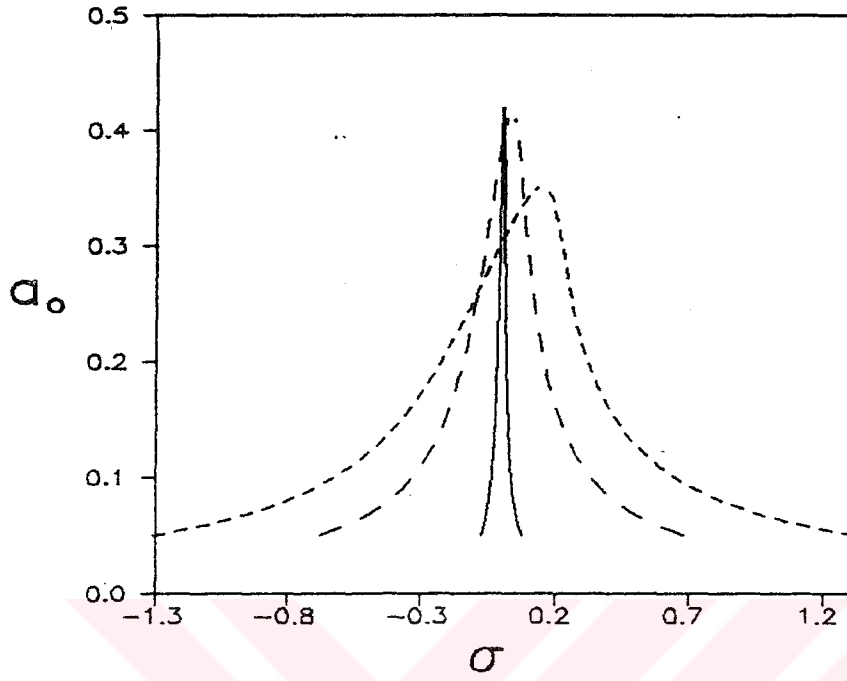
Şekil 36. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\eta = 0.2$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



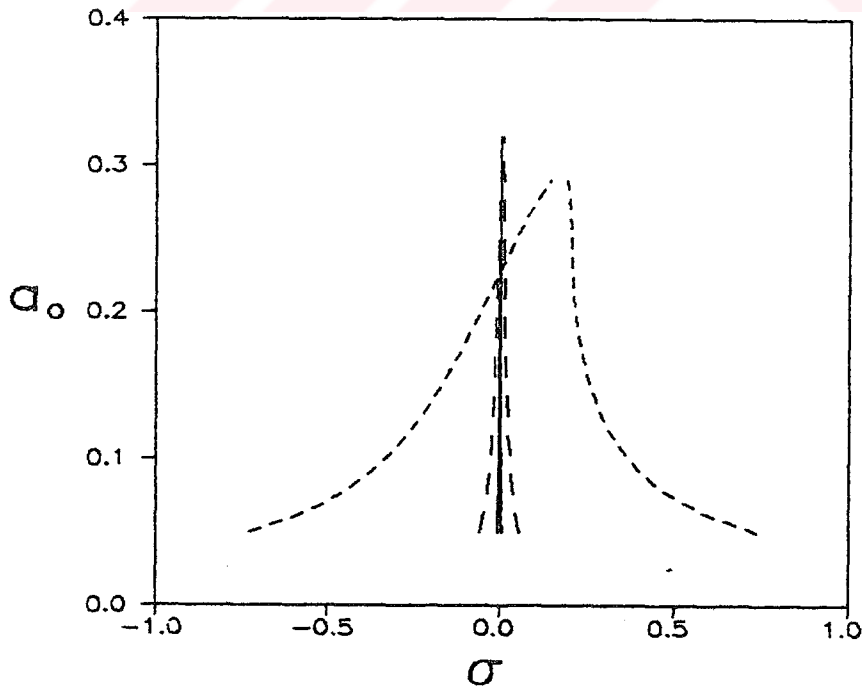
Şekil 37. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 2. durum,  $\eta = 0.4$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



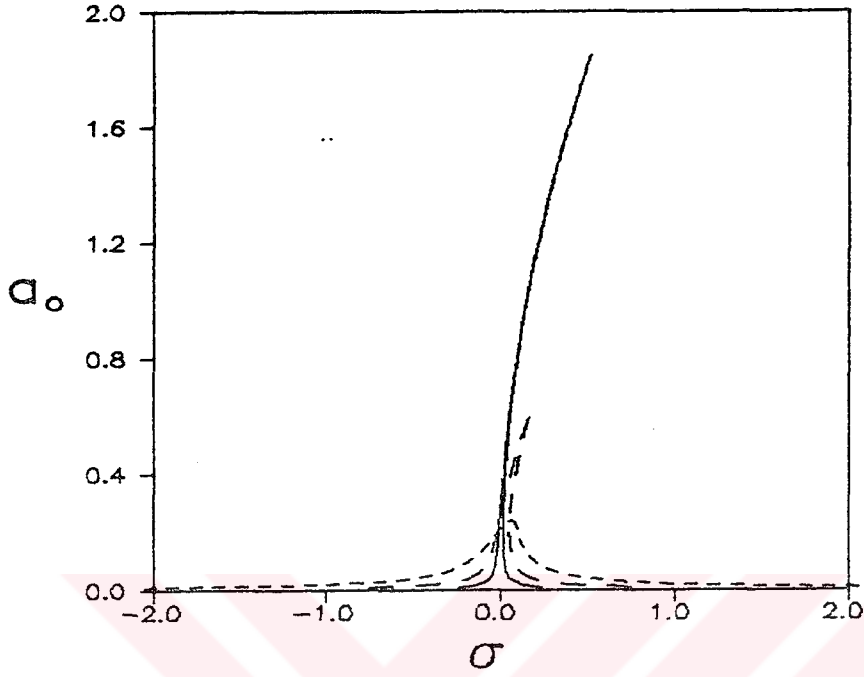
Şekil 38. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\eta = 0.1$ ) (----- $\alpha = 1$ , - - - - - $\alpha = 10$ , ———— $\alpha = 100$ )



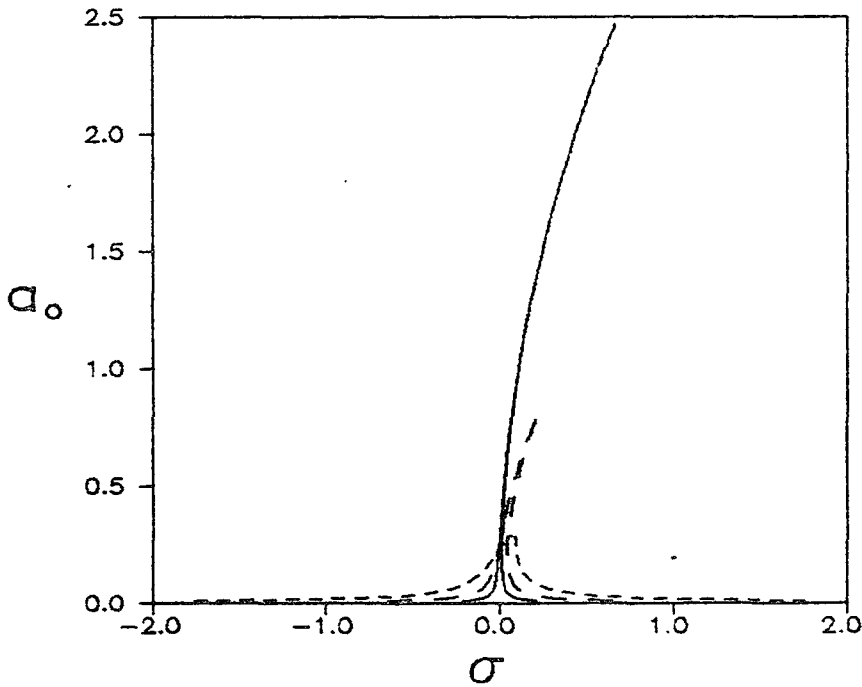
Şekil 39. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 3. durum,  $\eta = 0.3$ ) (----- $\alpha = 1$ , - - - - - $\alpha = 10$ , ———— $\alpha = 100$ )



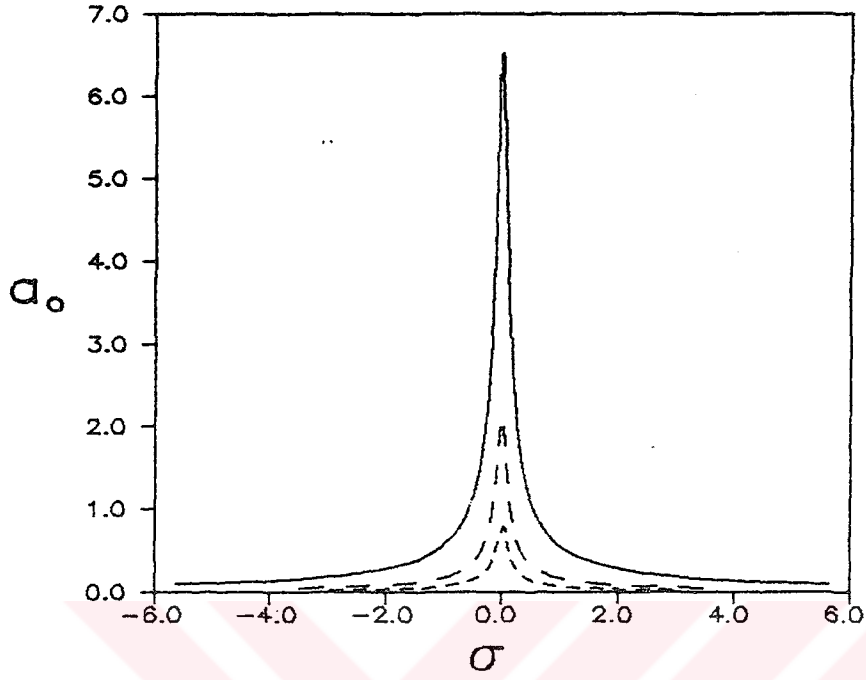
Şekil 40. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 4. durum,  $\eta = 0.2$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



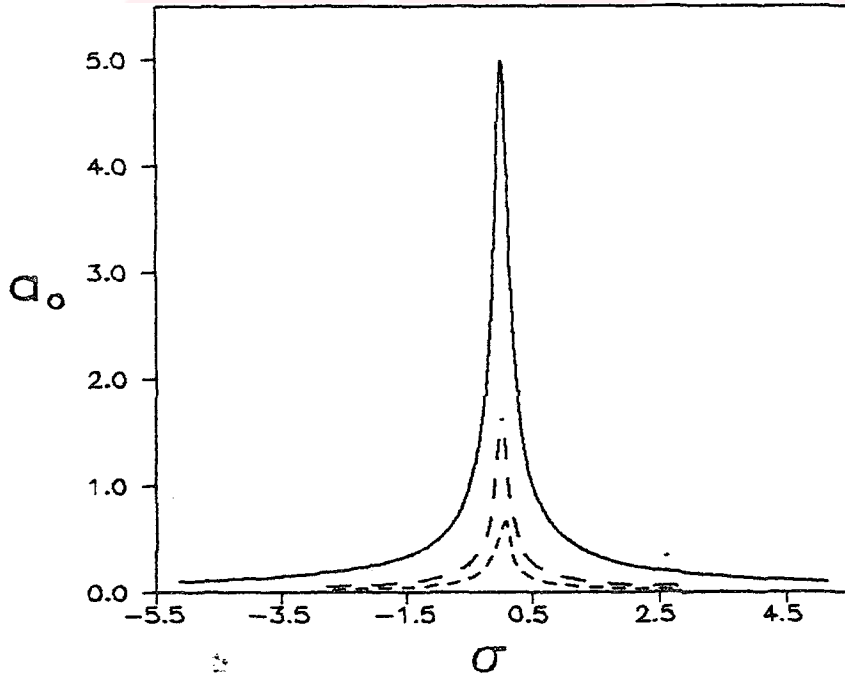
Şekil 41. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 4. durum,  $\eta = 0.4$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



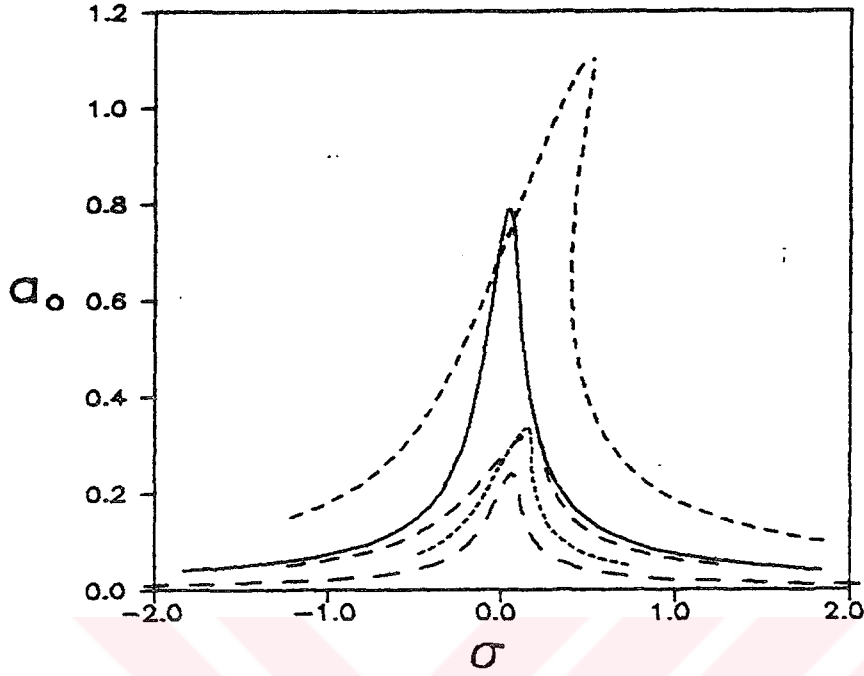
Şekil 42. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\eta = 0.2$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



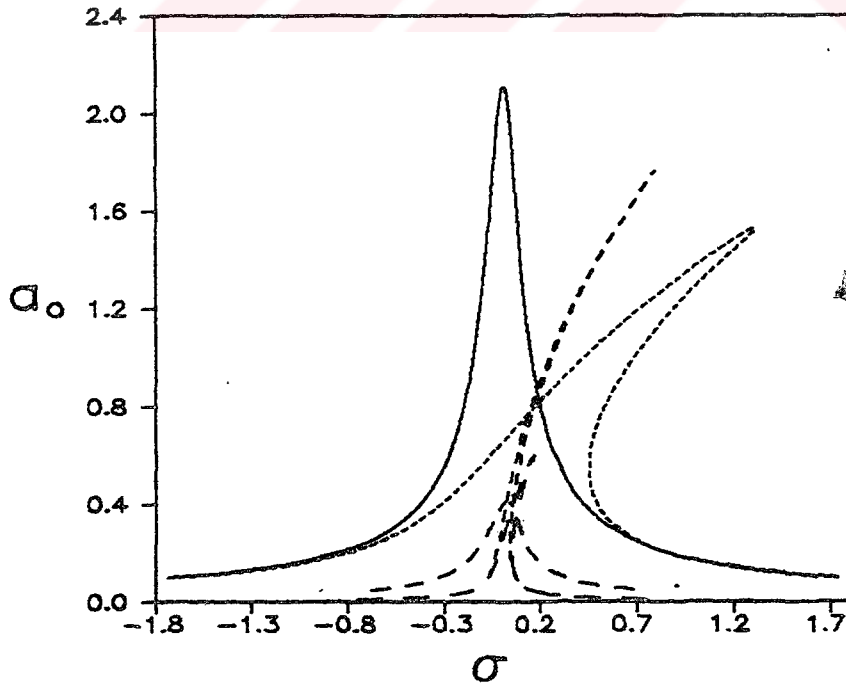
Şekil 43. Değişik  $\alpha$  değerleri için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod, 5. durum,  $\eta = 0.4$ ) (-----  $\alpha = 1$ , - - - - -  $\alpha = 10$ , ———  $\alpha = 100$ )



Şekil 44. Değişik sınır şartları için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod,  $\eta = 0.2$ ,  $\alpha = 1$ ) (---- 1. Durum, - - - - 2. Durum, - . - . 3. Durum, — — — 4. Durum, ——— 5. Durum)



Şekil 45. Değişik sınır şartları için zorlama frekansı - genlik eğrileri

(1. mod,  $\eta = 0.2$ ,  $\alpha = 10$ ) (---- 1. Durum, - - - - 2. Durum, - . - . 3. Durum, — — — 4. Durum, ——— 5. Durum)

DOĞUMANTASYON MERKEZİ

## **ÖZGEÇMİŞ**

1971 yılında Kırklareli'nde doğdum. İlk , orta ve lise öğrenimimi Kırklareli'nde tamamladım. 1992 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Makina Mühendisliğini bitirdim.Halen Celal Bayar Üniversitesinde yüksek lisans yapmaktayım ve aynı üniversitede araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım