

45691

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ ORTAMLARIN NONLİNEER TİTREŞİMLERİNE GENEL BİR YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

Yüksek Mühendis Hakan BOYACI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Mart 1998

Tezin Savunulduğu Tarih : 8 Temmuz 1998

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mehmet TEKELİOĞLU
Prof.Dr. Hira KARAGÜLLE (9 Eylül Üniversitesi)

MANİSA 1998

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
SEMBOL LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
KISALTMALAR LİSTESİ	vii
TEŞEKKÜR	viii
TÜRKÇE ÖZET	ix
İNGİLİZCE ÖZET	xi
1. GİRİŞ	1
2. KUADRATİK VE KÜBİK NONLINEERLİĞE SAHİP SÜREKLİ ORTAM TİTREŞİM DENKLEMİNDE BASKIN REZONANSLAR	4
2.1. Hareket Denklemleri	4
2.2. Direkt-Perturbasyon Metodu	5
2.3. Bir Uygulama (Nonlinear Kiriş Problemi)	8
3. KUADRATİK VE KÜBİK NONLINEERLİĞE SAHİP SÜREKLİ ORTAM TİTREŞİMLERİNDE İKİNCİL REZONANSLAR	11
3.1. Üçte bir Altharmonik Rezonanslar	11
3.2. Üçüncü Derece Süperharmonik Rezonanslar	14
3.3. İkide bir Altharmonik Rezonanslar	15
3.4. Kombinasyon Rezonansları	17
4. ETKİLEŞİMLİ (COUPLED) DENKLEMLERDE İÇ REZONANS ÇÖZÜMLERİ	20
4.1. Hareket Denklemleri	20
4.2. Direkt-Perturbasyon Metodu	20
4.3. Genlik ve Faz Modülasyon Denklemleri	25
4.4. Bir Uygulama (Nonlinear Kablo Titreşimi)	26
5. İKİ FARKLI ÇOK ZAMAN ÖLÇEKLİ METODUN NONLINEER TİTREŞİM PROBLEMLERİNDE KARŞILAŞTIRILMASI	34
5.1. Kübik Nonlinearliğe Sahip Denklemler	34
5.1.1. Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-I)	35
5.1.2. Geliştirilmiş Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-II)	40
5.2. ÇZÖM-II İçin Bir Uygulama	42
5.3. Kuadratik ve Kübik Nonlinearliğe Sahip Denklemler	46
5.3.1. Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-I)	46
5.3.2. Geliştirilmiş Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-II)	49
5.4. ÇZÖM-II İçin Bir Uygulama	50
5.5. Özet	54

SONUÇLAR VE ÖNERİLER
KAYNAKLAR
ÖZGEÇMİŞ

Sayfa No
55
57



SEMBOL LİSTESİ

A, A_m, A_n	: tepki fonksiyonunun kompleks genliği
B	: etkileşimli denklemlerde düzlem-dışı tepki fonksiyonunun kompleks genliği
C, C_i	: mekana bağlı kübik operatör(ler)
D	: integral tanım kümesi
\hat{F}	: zorlama genliği
F	: ölçeklenmiş zorlama genliği
L	: mekana bağlı lineer operatör
Q, Q_i	: mekana bağlı kuadratik operatör(ler)
T	: Ωt şeklinde tanımlanan zaman değişkeni
Y, Z, Y_m, Y_n	: perturbasyonun birinci mertebesindeki tepkinin mekana ait fonksiyonları
D_i	: T_i 'ye göre türevler
$F_{1,2}$: mertebelendirilmiş zorlama genlikleri
$L_{1,2}$: etkileşimli denklemlerde düzlem-içi ve düzlem-dışı mekana bağlı lineer operatörler
T_0	: perturbasyonda hızlı zaman ölçeği
$T_{1,2}$: perturbasyonda yavaş zaman ölçekleri
W_i	: i. mertebedeki tepki fonksiyonunun seküler olmayan kısmı
$Y_{1,2}$: etkileşimli denklemlerde düzlem-içi ve düzlem-dışı tepkinin mekana ait fonksiyonları
a, a_m, a_n	: deplasman için genlik değerleri
b	: etkileşimli denklemlerde düzlem-dışı deplasman için genlik değeri
f, f_n	: zorlama genliğinden elde edilmiş zorlama katsayıları
t	: zaman
w	: sürekli ortam deplasmanı
x	: mekan değişkeni
c_i	: keyfi sabitler
$f_{1,2}$: mertebelendirilmiş zorlama katsayıları
$w_{1,2}$: etkileşimli denklemlerde düzlem-içi ve düzlem-dışı deplasmanlar
w_i	: perturbasyon açılımında deplasmanın i. terimi
$w_{1,2i}$: etkileşimli denklemlerin düzlem-içi ve düzlem-dışı perturbasyon açılımlarında deplasmanın i. terimi
$\alpha, \alpha_i, \alpha_{im}, \alpha_{inm}$: genlik ve faz modülasyon katsayıları
β, β_n, β_m	: genliğin polar formda kompleks kısmıyla alakalı fonksiyonlar
ε	: perturbasyon parametresi

$\phi, \phi_i, \phi_{in}, \phi_{inm}$: perturbasyonun ikinci mertebesindeki tepkinin mekana ait fonksiyonları
$\hat{\mu}$: sönüm katsayısı
μ	: ölçeklenmiş sönüm katsayısı
$\bar{\mu}$: $\Omega\hat{\mu}$ şeklinde tanımlanan sönüm katsayısı
ρ, σ	: zorlama frekansı ile tabii frekans arasındaki yakınlığı ifade eden parametreler
$\omega, \omega_m, \omega_n$: sistemin tabii frekansları
γ_n, γ_m	: deplasman için faz değerleri
$\gamma_{1,2}$: etkileşimli denklemlerde deplasmanlar için faz değerleri
$\lambda_{1,2}$: etkileşimli denklemlerde düzlem-içi ve düzlem-dışı genliklerin polar formda kompleks kısmıyla alakalı fonksiyonlar
$\hat{\mu}_{1,2}$: etkileşimli denklemlerde düzlem-içi ve düzlem-dışı sönüm katsayıları
$\mu_{1,2}$: mertebelendirilmiş sönüm katsayıları
$\sigma_{1,2}$: mertebelendirilmiş parametreler
$\omega_{1,2}$: etkileşimli denklemlerde düzlem-içi ve düzlem-dışı tabii frekanslar
ξ_i	: etkileşimli denklemlerde perturbasyonun ikinci mertebesindeki tepkinin mekana ait fonksiyonları
ψ_i	: i. mertebedeki tepki fonksiyonunun seküler olan kısmı

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa No
Şekil 5.1	Kübik nonlinearliğe sahip örnek uygulama için frekans-tepki grafiği ($n = 1$, $k = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$, ve $\hat{\mu} = 0.004$)	45
Şekil 5.2	Kuadratik ve kübik nonlinearliğe sahip örnek uygulama için frekans-tepki grafiği ($n = 1$, $\varepsilon = 1$, $f_1 = 0.1$, $\hat{\mu} = 0.01$, $\alpha = 0.9695$)	53



KISALTMALAR LİSTESİ

- ÇZÖM-I : Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod
ÇZÖM-II : Geliştirilmiş Çok Zaman Ölçekli Metod



TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın meydana gelmesinde, çoğu uluslararası 50'ye yakın yayını, çeőitli uluslararası bilimsel dergilerdeki editörlükleri ve ölkemizdeki bilimsel gelişmelere yapmış olduğu katkılardan dolayı almış olduğu ödöl ve takdimnameleri ile bilimsel yetkinliği öndegelen ulusal ve uluslararası bilim kuruluşlarınca kabul edilmiş kıymetli Hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ'ye yapmış olduğu çok değerli katkı ve yönlendirmelerinden dolayı en içten teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca, hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen müőfik ve fedakar Ailemi burada anmayı da üzerimde manevi bir borç bilirim.

ÖZET

Sürekli ortam titreşimleri için zorlama ve sönüm terimini de içeren ve nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen genel bir model ele alınmıştır. Nonlineerlik keyfi kuadratik ve kübik operatörlerle genelleştirilmiş olarak ifade edilmiştir. Bu operatörler simetrik yapıda değildir. Denklemin lineer kısmı da keyfi bir operatörle ifade edilmiştir. Bu lineer operatör self-adjoint özelliğe sahiptir. Bütün operatörler konuma bağlı diferansiyel ve/veya integral formdadırlar. Denklemdaki bütün bağımlı ve bağımsız değişkenler boyutsuz haldedirler. Denkleme ait sınır şartlarının lineer, homojen ve zamandan bağımsız olduğu kabul edilmiştir. Yaklaşık analitik çözümler bulmak için bir perturbasyon tekniği olan Çok Zaman Ölçekli Metod kullanılmıştır. Denklem alışlageldiği gibi diskritize edilmemiş, perturbasyon metodu direkt olarak kısmi diferansiyel denklem(ler)e uygulanmıştır.

Önce zorlama frekansının tabii frekanslardan birine yakın olduğu baskın rezonans durumu ele alınmıştır. Elde edilen algoritma ile tepki fonksiyonu bulunmuştur. Tepki fonksiyonundaki her mertebede konum fonksiyonlarının nasıl elde edileceği gösterilmiştir. Ayrıca genlik-faz modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerdeki α katsayılarının nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir. Örnek bir uygulama olarak nonlinear elastik yatak üzerinde her iki ucundan basit mesnetli Euler-Bernoulli kirişi ele alınmış ve çözümler elde edilmiştir.

Aynı genel modelde ikincil rezonanslardan üçte bir ve ikide bir altharmonik rezonanslar, üçüncü derece süperharmonik rezonanslar ve toplama tipi kombinasyon rezonanslar için aynı prosedür izlenerek algoritmik genel çözümler elde edilmiştir.

Yapılan düzlem içi titreşim analizine ilaveten düzlem dışı titreşimi de kapsayacak biçimde genelleştirilmiş etkileşimli (coupled) denklemlerde baskın ve bire bir iç rezonans durumu için aynı prosedür uygulanarak algoritmik genel çözümler elde edilmiştir. Bu tip denklemlere örnek olarak sarkıklık yüksekliğinin-uzunluk izdüşümüne oranının küçük olduğu kabloların nonlinear titreşimlerini modelleyen diferansiyel denklemlerin baskın ve bire bir iç rezonans çözümleri bulunmuştur.

Sadece keyfi kübik nonlinearite ve keyfi kuadratik ve kübik nonlineariteye sahip iki genel kısmi diferansiyel denklem ele alınarak çok zaman ölçekli metodun iki değişik versiyonu (klasik ve Rahman-Burton) baskın rezonans durumu için uygulanmıştır. Birinci tip denklem için klasik versiyonda elde edilen fiziksel olmayan ekstra çözümlerin duffing osilatörü ile aynı yapıda olduğu bulunmuştur. Rahman-Burton versiyonunun bu ekstra çözümleri elimine ettiği gösterilmiştir. İkinci tip denklem için ise, kompleks genliğin birinci yavaş zaman ölçeğinden

bağımsız çıkması nedeniyle her iki versiyonun aynı sonuçları verdiği bulunmuştur. Her iki tip denklem için Rahman-Burton versiyonunun örnek birer uygulaması yapılmıştır. Bu örneklerle alakalı olarak sayısal parametrik değerler kullanılarak birer genlik-frekans grafiği çizilmiştir.



SUMMARY

A general model of a nonlinear partial differential equation was considered for continuous system vibrations including also excitation and damping terms. Nonlinearity was represented by generalized arbitrary quadratic and cubic operators. These operators are not symmetric. Linear part of the equation was also represented by an arbitrary self-adjoint linear operator. All of the operators are spatial and of differential and/or integral forms. Independent and dependent variables of the equation are dimensionless. Boundary conditions of the equation are linear, homogenous and time independent. Method of Multiple Scales, a perturbation technique, was applied to the equation in order to find approximate analytical solutions. Equation was not discretized as usually done, but perturbation method was applied directly to the partial differential equation.

Firstly, primary resonance case where excitation frequency was near to one of the natural frequencies was considered. Response function was found by the algorithm obtained. The way of finding the spatial functions at each level of approximation of the response function was shown. Also amplitude-phase modulation equations were obtained. The coefficients of the amplitude-phase equations were derived in integral forms in terms of the arbitrary operators. As an example, an Euler-Bernoulli beam resting on an elastic foundation and simply supported at each end was taken and solutions were found.

On the same general model, algorithmic general solutions were obtained using the same procedure for secondary resonances such as one-third and one-second subharmonic resonances, third order superharmonic resonances, and additive type combination resonances.

In addition to the in-plane vibration analysis, algorithmic general solutions for primary and one-to-one internal resonance case of the generalized coupled equations including out-of-plane vibrations were obtained. As an example for these kind of equations, primary and one-to-one internal resonance solutions were found for nonlinear cable vibrations where sag to span ratios were small.

Two general partial differential equations, one having only arbitrary cubic nonlinearity and the other having arbitrary quadratic and cubic nonlinearities were considered and two different versions of method of multiple scales (classical and Rahman-Burton) were applied for primary resonance case. For the first type of equation, it was shown that extra nonphysical solutions found by the classical version were of the same form as the duffing oscillator. It was also shown that by the Rahman-Burton version, these extra solutions could be eliminated. For

the second type of equation it was found that both versions yield identical results. For each type of equations, sample applications for Rahman-Burton version were done. Amplitude-frequency graphics were plotted for these sample applications.



1. GİRİŞ

Sürekli ortam titreşimleri kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmektedir. Bu tip titreşimlerde birinci yaklaşıklık olarak lineer sistemler ele alınmaktadır. Ancak lineer modelleme gerçekte karşılaşılan bazı fiziksel hadiseleri izah etmede yetersiz kalmaktadır. Bu durumda, değişik nonlineer modeller ortaya atılarak, bu modeller vasıtası ile gerçek olaylar arasında bağlantı kurulabilmektedir. Sürekli ortamlar için geliştirilen nonlineer modellerin önemli bir özelliği, nonlineerliğin kuadratik ve/veya kübik yapıda olmasıdır. Bu modeller diferansiyel denklem yapısında olabildiği gibi, bazen de integro-diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkabilmektedir. Ayrıca problemlerin çözümünü denklemlerin farklılığı kadar, sınır şartlarının farklı olması da etkilemektedir. Kuadratik ve/veya kübik nonlineerliğe sahip modellerin verilen sınır şartları altında tam çözümlerini üretebilmek çok zorlaşmaktadır.

Tam çözümlerin üretilmediği durumlarda ikinci en geçerli yol ise yaklaşık analitik çözümlerin bulunmasıdır. Bu amaçla perturbasyon metodları zaman içerisinde geliştirilmiştir. Perturbasyon metodlarından en basiti "Yaya Açılımı" dır. Ancak bu metodda, seküler yada rezonant terimler fiziksel olmayan bazı sonuçlara yol açabilmektedir. Bu problemleri halledebilmek için değişik perturbasyon metodları geliştirilmiştir. Linsted-Pointcare, Harmonik Balans, Renormalizasyon metodları kullanılarak düzgün rejim çözümleri elde edilebilmektedir. Krylov-Bogoliubov-Mitropolski, Çok Zaman Ölçekli Metod, Lie serileri ve Genelleştirilmiş Ortalama Metodu gibi diğer bazı metodlar kullanılarak ise, hem düzgün rejim çözümleri hem de geçiş çözümleri elde edilebilmektedir. Dolayısı ile bu grup sistemin dinamiği hakkında daha fazla bilgi verebilmektedir. Bu tezde, yaklaşık analitik çözümleri bulmada Çok Zaman Ölçekli Metod kullanılmıştır (Nayfeh, 1981), (Nayfeh ve Mook, 1979).

Diğer bir problem ise, çok farklı matematik modellere sahip sürekli ortam titreşim problemlerinin genel bir model alınarak incelenmesinin mümkün olup olmayacağıdır. Her ne kadar bu matematik modeller çok farklı yapıda da olsalar, genelde bir ivme ve sönüm terimine, bir lineer terime ve nonlineer bir terime (kuadratik ve/veya kübik) sahiptirler. O halde lineer terim, kübik ve kuadratik nonlineeriteler genel olarak ifade edilebilirse, ortaya birçok değişik problemi kapsayan bir model çıkabilecektir. Tekrar tekrar birçok özel problemi çözmek yerine, böyle genel bir modeli çözmek daha pratik olabilecektir. Perturbasyona imkan tanıyan böyle genel bir model ilk olarak Pakdemirli (1994) tarafından ortaya atılmıştır. Bu modelde, kuadratik ve kübik nonlineeriteler keyfi operatörlerle ifade edilmiştir. Bu başlangıç modeli, düzlem içi serbest ve sönümlü titreşimleri genel olarak ifade etmekte idi. Sonlu mod analizi olan bu çalışmayı, sonsuz moda Pakdemirli ve Boyacı (1995) genelleştirmişlerdir. Her iki çalışmada da baskın rezonans durumu incelenmiştir. Altharmonik ve üstharmonik rezonanslar ise, yine aynı

genel model kullanılarak Pakdemirli ve Boyacı (1996) tarafından analiz edilmiştir. Sadece kübik nonlineeriteye sahip farklı bir model ise, Boyacı ve Pakdemirli (1997) tarafından ele alınmıştır. Bu tezde, bahsedilen çalışmalarda elde edilen genel metodlar kullanılmış ve modellemeler daha da ileriye götürülmüştür. Bu itibarla sönümlü baskın rezonansların yanında, altharmonik ve üstharmonik rezonanslar, kombinasyon rezonansları ve düzlem içi titreşimlerin yanında, düzlem dışı titreşimler de modellenmiştir.

Bir diğer önemli konu ise, tezde diskritizasyon-perturbasyon metodu yerine direkt-perturbasyon metodunun kullanılmış olmasıdır. Araştırmacılar tarafından sıkça kullanılan diskritizasyon-perturbasyon metodunda kısmi diferansiyel denklemler önce diskritize edilerek adi diferansiyel denklem formuna indirgenmekte, daha sonra yaklaşık metodlar bu adi diferansiyel denkleme uygulanmaktadır. Direkt-perturbasyon metodunda ise, yaklaşık metodlar direkt olarak kısmi diferansiyel denkleme uygulanmaktadır. Nayfeh *et al.* (1992) ilk olarak bir nonlineer valf problemini ele alarak, sonlu mod analizinde direkt-perturbasyon metodunun diskritizasyon-perturbasyon metoduna göre daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Pakdemirli *et al.* (1995) ise nonlineer kablo titreşim problemini ele alarak, direkt-perturbasyon metodunun daha hassas sonuçlar verdiğini göstermiştir. Bahsedilen iki çalışmada yaklaşık olarak özel problemler üzerinde her iki metodun farklılıkları gösterilmiştir. Ayrıca, Nayfeh (1975), Nayfeh ve Asfar (1986), Nayfeh ve Bouguerra (1990), Pai ve Nayfeh (1990), ve Raouf ve Nayfeh (1990) direkt metodu kullanmışlardır. Genel bir problem ele alınarak bu farklılıkların daha iyi analiz edilebileceğini Pakdemirli (1994) göstermiştir. Bu çalışmayı Pakdemirli ve Boyacı'nın (1995) sonsuz modda farklılıkları karşılaştıran analizi izlemiştir. Nonlineer normal mod kavramı kullanılarak benzer genel manada karşılaştırmalar Nayfeh ve Nayfeh (1994), ve Nayfeh ve Nayfeh (1995) tarafından yapılmıştır. Pakdemirli ve Boyacı (1997), farklılıkların sadece nonlineer sistemlerden kaynaklanmadığını, lineer sistemlerde de sonlu mod analizlerinde ortaya çıkabileceğini göstermiştir. Pakdemirli ve Ulsoy (1997), ortogonal baz fonksiyonlarını tanımlamanın zor olduğu durumlarda direkt-perturbasyon metodunun daha kolay uygulanabileceğini göstermişlerdir. Bu çalışmalara ait kısmi bir tarama makalesi Nayfeh *et al.* (1995) tarafından yapılmıştır. Özetle, çalışmaların toplamından çıkan sonuç, sonsuz mod analizinde sonuçların aynı olduğu, ancak sonlu mod analizinde direkt-perturbasyon metodunun diskritizasyon-perturbasyon metoduna göre daha hassas sonuçlar verebileceğidir.

Yine önemli noktalardan biri de, düzgün rejim çözümlerinin elde edilmesinde iki farklı Çok Zaman Ölçekli Metod'un kullanılmasıdır. Birinci metod, Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod olup Nayfeh tarafından ortaya atılmıştır. Bu metodda bazı özel durumlar için fiziksel karşılığı olmayan çözümler de ortaya çıkabilmektedir. Bu problemi halledebilmek için Rahman ve Burton (1989)'da çok önemli bir çalışma yapmışlardır. Önceki çalışmalara alternatif olarak, hem

sönüm hem de zorlama frekansını seriye açmışlar ve fiziksel olmayan çözümleri elimine ederek nümerik sonuçlarla uyum sağlamışlardır. Rahman ve Burton (1989)'un çok özel bir problem olan Duffing Osilatörü'nde gerçekleştirdikleri bu karşılaştırma, burada genel modelimiz kullanılarak geliştirilmiş ve aradaki farklılıklar birçok özel problemi kapsayan genel modeller kullanılarak gösterilmiştir.

Özetlemek gerekirse, bölüm 2'de genel kuadratik ve kübik operatörlerle ifade edilen bir model ele alınarak baskın rezonans durumu için çözümler üretilmiştir. Elde edilen algoritma elastik yatak üzerindeki basit mesnetli Euler-Bernoulli kiriş titreşim problemine uygulanmıştır. bölüm 3'de bölüm 2'de ele alınan model için altharmonik, üstharmonik ve toplama tipi kombinasyon rezonansları için genel çözümler üretilmiştir. Bölüm 4'te etkileşimli genel bir sistem ele alınmış (düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri modelleyen) ve bu sistemde çözümler, düzlem içi ve düzlem dışı modların bire bir iç rezonansı durumu için üretilmiştir. Genel algoritma nonlinear bir kablo titreşim problemine uygulanmıştır. Bölüm 5'de ise, keyfi kübik nonlinearliğe sahip bir model ile yine keyfi kuadratik ve kübik nonlinearliğe sahip başka bir model için düzgün rejim çözümleri üretilmiştir. Çözümlerin üretilmesinde, hem Nayfeh tarafından ortaya konan Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod hem de Rahman ve Burton tarafından ortaya atılan Geliştirilmiş Çok Zaman Ölçekli Metod kullanılmış ve aradaki farklılıklar gösterilmiştir. Bu tezde geliştirilen analizin özel sürekli ortam problemlerinin yaklaşık çözümleri üzerinde çalışan birçok araştırmacıya yardımcı olması beklenmektedir.

2. KUADRATİK VE KÜBİK NONLİNEERLİĞE SAHİP SÜREKLİ ORTAM TİTREŞİM DENKLEMİNDE BASKIN REZONANSLAR

Bu bölümde sürekli ortam titreşimleri için genel bir model ele alınacaktır. Bu genel modelde lineer, kuadratik ve kübik operatörler kullanılacaktır. Kuadratik ve kübik operatörler, çok farklı şekilde ortaya çıkabilen kuadratik ve kübik nonlineeriteleri temsil etmektedirler. Bu tip bir notasyon ilk defa Pakdemirli (1994) tarafından ortaya atılmıştır. Bu notasyonun avantajı, perturbasyon analizinde işlemlerin yapılmasına imkan tanınmasıdır. Model genel olduğu için ortaya çıkacak çözümler bir algoritma oluşturacaktır. Bu bölümde baskın rezonans durumu, yani zorlama frekansının herhangi bir tabi frekansa yakın alındığı durum incelenecektir.

2.1. Hareket Denklemleri

Sürekli ortam titreşimlerinde birçok problemi kapsayan denkleminiz,

$$\ddot{w} + \hat{\mu}\dot{w} + L(w) + Q(w,w) + C(w,w,w) + \hat{F}(x)\cos\Omega t = 0 \quad (2.1)$$

şeklinindedir. Yukarıdaki denklemde, $w(x,t)$ sürekli ortam deplasmanını, $\hat{\mu}$ viskoz sönüm katsayısını, \hat{F} zorlama genliğini, ve Ω zorlama frekansını göstermektedir. L , Q , ve C sırasıyla, lineer self-adjoint, kuadratik nonlineer, ve kübik nonlineer operatörlerdir. Bütün operatörler konuma bağlı diferansiyel ve/veya integral operatörlerdir. (') ise zamana göre türevdir. x ve t sırasıyla mekan ve zaman değişkenleridir. Denklemdaki bütün bağımlı ve bağımsız değişkenler boyutsuz haldedirler. Sınır şartları lineer, homojen, ve zamandan bağımsız alınmıştır. Kuadratik ve kübik operatörler genel olarak simetrik olmayıp aşağıdaki özellikleri taşırlar.

$$Q(c_1w_1 + c_2w_2, c_3w_3 + c_4w_4) = c_1c_3Q(w_1,w_3) + c_1c_4Q(w_1,w_4) + c_2c_3Q(w_2,w_3) + c_2c_4Q(w_2,w_4),$$

$$\{ \text{Genelde, } Q(w_1,w_2) \neq Q(w_2,w_1) \} \quad (2.2)$$

Burada, c_i 'ler keyfi sabitlerdir. Aşağıda, sürekli ortamlarda karşılaşılabilecek operatörlere örnekler verilmiştir.

$$L(w) = w^{IV} + \alpha w, \quad Q(w,w) = w'^2 + w'' \int_0^t w \, dx, \quad C(w,w,w) = w'w^2 + w'' \int_0^t w'^2 dx. \quad (2.3)$$

2.2. Direkt-Perturbasyon Metodu

Bu bölümde, bir perturbasyon tekniği olan Çok Zaman Ölçekli Metod (The Method of Multiple Scales) (Nayfeh, 1981) direkt olarak denklem (2.1)'e uygulanacaktır. Kullanılan perturbasyon metodunun avantajı, denklemdaki seküler terimlerin otomatik olarak hesaplarda elimine edilmesini sağlamasıdır. Deplasman için aşağıdaki gibi bir açılımın olduğunu varsayalım.

$$w(x,t;\varepsilon) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots \quad (2.4)$$

Burada ε , genliğin küçük olduğunu göstermek için suni olarak denklemlere eklenmiş bir parametredir. En sonda 1'e eşitlenebilir. $T_0 = t$ hızlı zaman ölçeği, $T_2 = \varepsilon^2 t$ yavaş zaman ölçeğidir. Burada, $T_1 = \varepsilon t$ bağımlılığı daha sonraki analizde ortadan kalkacağı için baştan ihmal edilmiştir. Sistemimizin zayıf nonlineer bir sistem olduğu ve baskın rezonansların (primary resonances) inceleneceği göz önüne alınırsa, zorlama ve sönüm aşağıdaki şekilde mertebelendirilebilir.

$$\hat{F} = \varepsilon^3 F, \quad \hat{\mu} = \varepsilon^2 \mu \quad (2.5)$$

Zamana bağlı türevler ise şu şekilde ifade edilmektedirler:

$$(\dot{}) = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (\ddot{}) = D_0^2 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2) + \dots \quad (2.6)$$

Yukarıda, $D_i = \partial/\partial T_i$ olarak ifade edilmiştir.

Denklem (2.4)-(2.6) denklem (2.1)'e yerleştirilir ve ε cinsinden çıkan polinomun katsayıları sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki denklemler elde edilir :

ε mertebesi

$$D_0^2 w_1 + L(w_1) = 0 \quad (2.7)$$

ε^2 mertebesi

$$D_0^2 w_2 + L(w_2) = -Q(w_1, w_1) \quad (2.8)$$

ε^3 mertebesi

$$D_0^2 w_3 + L(w_3) = -2D_0 D_2 w_1 - \mu D_0 w_1 - Q(w_1, w_2) - Q(w_2, w_1) - C(w_1, w_1, w_1) - F \cos \Omega T_0 \quad (2.9)$$

ε mertebesindeki çözüm,

$$w_1 = [A_n(T_2) e^{i\omega_n T_0} + ke] Y_n(x) \quad (2.10)$$

şeklindedir. A_n kompleks genliği, ke ise kompleks eşleniği ifade etmektedir. Y_n fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlamaktadırlar.

$$L(Y_n) - \omega_n^2 Y_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

Denklem (2.10)'u denklem (2.8)'in sağına yerleştirirsek w_2 için aşağıdaki formda bir çözüm elde ederiz.

$$w_2 = (A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} + ke) \phi_{1n}(x) + 2A_n \bar{A}_n \phi_{2n}(x) \quad (2.12)$$

Burada ϕ_{1n} ve ϕ_{2n} fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlamaktadırlar.

$$L(\phi_{1n}) - 4\omega_n^2 \phi_{1n} = -Q(Y_n, Y_n) \quad (2.13)$$

$$L(\phi_{2n}) = -Q(Y_n, Y_n) \quad (2.14)$$

Yukarıdaki denklemler özel durumlar için, ilgili sınır şartlarına göre çözümlenmelidir.

ε^3 mertebesinde, öncelikle zorlama frekansının tabii frekanslardan birine yakınlığı aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\Omega = \omega_n + \varepsilon^2 \sigma \quad (2.15)$$

Burada σ , 1 mertebesinde bir ayar parametresidir. Denklem (2.15), (2.12) ve (2.10)'u denklem (2.9)'un sağına yerleştirir, çözülebilirlik şartı (Nayfeh, 1981) için gerekli işlemleri yaparsak,

$$i\omega_n(2A_n' + \mu A_n) + \alpha_{1n} A_n^2 \bar{A}_n + \frac{1}{2} f_n e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (2.16)$$

elde ederiz. Burada, α_{1n} ve f_n şu şekilde tanımlanmıştır :

$$\alpha_{1n} = \int_D Y_n \{ Q(Y_n, \phi_{1n}) + Q(\phi_{1n}, Y_n) + 2[Q(Y_n, \phi_{2n}) + Q(\phi_{2n}, Y_n)] + 3C(Y_n, Y_n, Y_n) \} dx \quad (2.17)$$

$$f_n = \int_D Y_n F dx \quad (2.18)$$

Genlik için,

$$A_n(T_2) = \frac{1}{2} a_n(T_2) e^{i\beta_n(T_2)} \quad (2.19)$$

şeklindeki polar formu denklem (2.16)'ya yerleştirip, faz açısını

$$\gamma_n = \sigma T_2 - \beta_n \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlarsak, aşağıdaki genlik ve faz modülasyon denklemlerini elde ederiz.

$$a_n' = -\frac{1}{2} \mu a_n - \frac{f_n}{2\omega_n} \sin \gamma_n \quad (2.21)$$

$$\gamma_n' = \sigma - \frac{\alpha_{1n}}{8\omega_n} a_n^2 - \frac{f_n}{2a_n \omega_n} \cos \gamma_n \quad (2.22)$$

Tepki fonksiyonu ise şu şekildedir :

$$w = \varepsilon a_n \cos(\Omega t - \gamma_n) Y_n(x) + \varepsilon^2 \frac{a_n^2}{2} \{ \cos[2(\Omega t - \gamma_n)] \phi_{1n}(x) + \phi_{2n}(x) \} + \dots \quad (2.23)$$

Böylece, genel çözüm algoritmamız şu şekilde ifade edilebilir : Önce tabii frekanslar ve karşılık gelen birinci mertebedeki öz fonksiyonlar (Y_n) bulunacak, sonra ikinci mertebedeki özfonksiyonlar (ϕ_{1n}, ϕ_{2n}) bulunacak, ve en son olarak α_{1n} integrasyonla elde edilecektir. Bu şekilde (2.21)-(2.23) denklemlerinin özel durumlar için yapıları elde edilmiş olur.

2.3. Bir Uygulama (Nonlinear Kiriş Problemi)

Bu kısımda, çözüm metodunu göstermek için, nonlinear elastik yatak üzerinde her iki ucundan basit mesnetli Euler-Bernoulli kirişinin enine titreşimi ele alınacaktır. Önceki analizde olduğu gibi, sadece baskın rezonans durumu gözönüne alınacaktır. Boyutsuz hareket denklemi ve ilgili sınır şartları şöyledir :

$$\ddot{w} + \hat{\mu}\dot{w} + w^{IV} + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3 + \hat{F} \cos \Omega t = 0 \quad (2.24)$$

$$w(0,t) = w''(0,t) = w(1,t) = w''(1,t) = 0 \quad (2.25)$$

Burada, α_i 'ler sabitlerdir. Denklem (2.24)'ü denklem (2.1) ile karşılaştırırsak, keyfi operatörleri,

$$L(w) = w^{IV} + \alpha_1 w, \quad Q(w,w) = \alpha_2 w^2, \quad C(w,w,w) = \alpha_3 w^3 \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Denklem (2.4)'teki açılımı kabul edelim. Her bir yaklaşıklık mertebesinde denklem (2.7)-(2.9) elde edilir. ϵ mertebesinde çözüm denklem (2.10) ile elde edilir. Bunun için, özdeğer problemi olan denklem (2.11) yani,

$$Y_n^{IV} + (\alpha_1 - \omega_n^2) Y_n = 0 \quad (2.27)$$

$$Y_n(0) = Y_n''(0) = Y_n(1) = Y_n''(1) = 0 \quad (2.28)$$

çözülmalıdır. Bu sistem için çözüm,

$$Y_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (2.29)$$

$$\omega_n^2 = n^4 \pi^4 + \alpha_1 \quad (2.30)$$

şeklindedir. İkinci yaklaşıklık mertebesinde çözüm, denklem (2.12) ile gösterilir ve denklem (2.13) ve (2.14) yani,

$$\phi_{1n}^{IV} + (\alpha_1 - 4\omega_n^2) \phi_{1n} = -2\alpha_1 \sin^2 n\pi x \quad (2.31)$$

$$\phi_{1n}(0) = \phi_{1n}''(0) = \phi_{1n}(1) = \phi_{1n}''(1) = 0 \quad (2.32)$$

$$\phi_{2n}^{IV} + \alpha_1 \phi_{2n} = -2\alpha_2 \sin^2 n\pi x \quad (2.33)$$

$$\phi_{2n}(0) = \phi_{2n}''(0) = \phi_{2n}(1) = \phi_{2n}''(1) = 0 \quad (2.34)$$

Denklemler (2.31)-(2.34)'ün çözümleri,

$$\phi_{1n} = \frac{\alpha_2}{\lambda^4} + \frac{\alpha_2}{16n^4\pi^4 - \lambda^4} \cos 2n\pi x + c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x + c_3 \cosh \lambda x + c_4 \sinh \lambda x \quad (2.35)$$

$$\phi_{2n} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{16n^4\pi^4 + \alpha_1} \cos 2n\pi x + e^{kx}(c_5 \cos kx + c_6 \sin kx) + e^{-kx}(c_7 \cos kx + c_8 \sin kx) \quad (2.36)$$

şeklinde. Burada,

$$4k^4 = \alpha_1, \quad \lambda^4 = 4\omega_n^2 - \alpha_1 = 4n^4\pi^4 + 3\alpha_1 \quad (2.37)$$

olarak tanımlanmıştır ve c_i 'ler sınır şartlarından bulunmuştur.

$$c_1 = -\frac{2\alpha_2 n^2 \pi^2}{\lambda^4 (4n^2 \pi^2 - \lambda^2)} \quad (2.38)$$

$$c_2 = -\frac{2\alpha_2 n^2 \pi^2 (1 - \cos \lambda)}{\lambda^4 (4n^2 \pi^2 - \lambda^2) \sin \lambda} \quad (2.39)$$

$$c_3 = -\frac{2\alpha_2 n^2 \pi^2}{\lambda^4 (4n^2 \pi^2 + \lambda^2)} \quad (2.40)$$

$$c_4 = -\frac{2\alpha_2 n^2 \pi^2 (1 - \cosh \lambda)}{\lambda^4 (4n^2 \pi^2 + \lambda^2) \sinh \lambda} \quad (2.41)$$

$$c_5 = \frac{\alpha_2}{e^{2k} + e^{-2k} - 2 \cos 2k} \left\{ \left[\cos 2k - e^{-2k} - (e^k - e^{-k}) \cos k \right] \left(\frac{1}{16n^4 \pi^4 + \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1} \right) + \frac{2n^2 \pi^2 \sin k (2 \cos k - e^k - e^{-k})}{k^2 (16n^4 \pi^4 + \alpha_1)} \right\} \quad (2.42)$$

$$c_6 = \frac{\alpha_2}{e^{2k} + e^{-2k} - 2 \cos 2k} \left\{ \sin k (2 \cos k - e^k - e^{-k}) \left(\frac{1}{16n^4 \pi^4 + \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1} \right) + \frac{2n^2 \pi^2 [e^{-2k} + \cos k (e^k - e^{-k}) - \cos 2k]}{k^2 (16n^4 \pi^4 + \alpha_1)} \right\} \quad (2.43)$$

$$c_7 = -c_5 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{16n^4 \pi^4 + \alpha_1} \quad (2.44)$$

$$c_8 = c_6 - \frac{2n^2 \pi^2 \alpha_2}{k^2 (16n^4 \pi^4 + \alpha_1)} \quad (2.45)$$

ε^3 mertebesinde, denklem (2.16) çözülebilirlik şartı olarak elde edilir. Denklem (2.26)'da tanımlanan özel kuadratik ve kübik operatörler kullanılarak, denklem (2.17)'den α_{1n} katsayısı hesaplanır.

$$\alpha_{1n} = \int_0^1 Y_n \{ 2\alpha_2 (Y_n \phi_{1n} + 2Y_n \phi_{2n}) + 3\alpha_3 Y_n^3 \} dx \quad (2.46)$$

Son olarak, tepki çözümü denklem (2.23) ile gösterilir, ve genlik ve faz denklemleri denklem (2.21) ve denklem (2.22) ile ifade edilir. Özfonksiyonların açık olarak bulunamadığı problemlerde nümerik hesaplamalar yapılabilir. Bu durumda, (2.17) katsayıları da nümerik integrasyonla kolayca bulunabilir. Dolayısıyla, geliştirilen algoritma nümerik analize imkan tanıyan bir yapıdadır.

3. KUADRATİK VE KÜBİK NONLİNEERLİĞE SAHİP SÜREKLİ ORTAM TİTREŞİMLERİNDE İKİNCİL REZONANSLAR

Bu bölümde, Çok Zaman Ölçekli Metod denklem (2.1)'e yine direkt olarak uygulanacaktır. Çözümler, ikincil rezonanslar $\{ 1/3 (\Omega \approx 3\omega_n) \}$ ve $1/2 (\Omega \approx 2\omega_n)$ altharmonik rezonanslar, 3. derece süperharmonik rezonanslar $(\Omega \approx 1/3 \omega_n)$ ve toplama tipi kombinasyon rezonansları $(\Omega \approx \omega_m + \omega_n)$ için yapılacaktır. Bu tip ikincil rezonanslar, baskın rezonansa göre zorlama genliğinin daha büyük olduğu durumlarda fiziksel olarak gözlemlenmektedir.

3.1. Üçte bir Altharmonik Rezonanslar

Bu durumda zorlama frekansı,

$$\Omega = 3\omega_n + \varepsilon^2\sigma \quad (3.1)$$

olarak alınmıştır. Ayrıca, zorlama genliği nonlineerite ve sönümlenmenin rezonans etkisini dengeleyebilmesi için $\hat{F} = \varepsilon F$ olarak mertebelendirilmiştir (Nayfeh, 1981). Denklem (2.4)'deki açılımı denklem (2.1)'e yerleştirir ve $\hat{\mu} = \varepsilon^2\mu$ olarak alırsak, ε 'un her mertebesinde aşağıdaki denklemler elde edilir.

ε mertebesi

$$D_0^2 w_1 + L(w_1) = -F \cos \Omega T_0 \quad (3.2)$$

ε^2 mertebesi

$$D_0^2 w_2 + L(w_2) = -Q(w_1, w_1) \quad (3.3)$$

ε^3 mertebesi

$$D_0^2 w_3 + L(w_3) = -2D_0 D_2 w_1 - \mu D_0 w_1 - Q(w_1, w_2) - Q(w_2, w_1) - C(w_1, w_1, w_1) \quad (3.4)$$

ε mertebesinde çözüm,

$$w_1 = (Ae^{i\omega_n T_0} + ke)Y_n(x) + (e^{i\Omega T_0} + ke)Z(x) \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada Y_n fonksiyonları denklem (2.11)'i sağlamaktadır. Z fonksiyonu ise aşağıdaki denklemi sağlamaktadır.

$$L(Z) - \Omega^2 Z = -\frac{1}{2}F \quad (3.6)$$

ε^2 mertebesinde çözüm,

$$w_2 = (A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} + ke)\phi_{1n}(x) + 2A_n \bar{A}_n \phi_{2n}(x) + (A_n e^{i(\Omega+\omega_n)T_0} + ke)\phi_{3n}(x) \\ + (\bar{A}_n e^{i(\Omega-\omega_n)T_0} + ke)\phi_{4n}(x) + (e^{2i\Omega T_0} + ke)\phi_5(x) + 2\phi_6(x) \quad (3.7)$$

şeklindedir. Buradaki konum fonksiyonları aşağıdaki denklemlerle belirlenir.

$$L(\phi_{1n}) - 4\omega_n^2 \phi_{1n} = -Q(Y_n, Y_n) \quad (3.8)$$

$$L(\phi_{2n}) = -Q(Y_n, Y_n) \quad (3.9)$$

$$L(\phi_{3n}) - (\Omega + \omega_n)^2 \phi_{3n} = -Q(Y_n, Z) - Q(Z, Y_n) \quad (3.10)$$

$$L(\phi_{4n}) - (\Omega - \omega_n)^2 \phi_{4n} = -Q(Y_n, Z) - Q(Z, Y_n) \quad (3.11)$$

$$L(\phi_5) - 4\Omega^2 \phi_5 = -Q(Z, Z) \quad (3.12)$$

$$L(\phi_6) = -Q(Z, Z) \quad (3.13)$$

ε^3 mertebesinde, önceki bölümdeki prosedür izlenilerek aşağıdaki çözülebilirlik şartı elde edilir.

$$i\omega_n(2A_n' + \mu A_n) + \alpha_{2n} A_n^2 \bar{A}_n + \alpha_{3n} A_n + \alpha_{4n} \bar{A}_n^2 e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (3.14)$$

Yukarıdaki denklemdaki katsayılar şu şekilde tanımlanmıştır :

$$\alpha_{2n} = \int_D Y_n \{ Q(Y_n, \phi_{1n}) + Q(\phi_{1n}, Y_n) + 2[Q(Y_n, \phi_{2n}) + Q(\phi_{2n}, Y_n)] + 3C(Y_n, Y_n, Y_n) \} dx \quad (3.15)$$

$$\alpha_{3n} = \int_D Y_n \{ 2[Q(Y_n, \phi_{3n}) + Q(\phi_{3n}, Y_n)] + Q(Z, \phi_{3n}) + Q(\phi_{3n}, Z) + Q(Z, \phi_{4n}) + Q(\phi_{4n}, Z) + 2[C(Y_n, Z, Z) + C(Z, Y_n, Z) + C(Z, Z, Y_n)] \} dx \quad (3.16)$$

$$\alpha_{4n} = \int_D Y_n \{ Q(Y_n, \phi_{4n}) + Q(\phi_{4n}, Y_n) + Q(Z, \phi_{1n}) + Q(\phi_{1n}, Z) + C(Y_n, Y_n, Z) + C(Y_n, Z, Y_n) + C(Z, Y_n, Y_n) \} dx \quad (3.17)$$

Katsayıları kuadratik ve kübik terimlerin katkısı yukarıda açıkça görülebilmektedir.

Faz açısını,

$$\gamma_n = \sigma T_2 - 3\beta_n \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlarsak, aşağıdaki genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir.

$$a_n' = -\frac{1}{2} \mu a_n - \frac{\alpha_{4n}}{4\omega_n} a_n^2 \sin \gamma_n \quad (3.19)$$

$$\gamma_n' = \sigma - \frac{3\alpha_{2n}}{8\omega_n} a_n^2 - \frac{3\alpha_{3n}}{2\omega_n} - \frac{3\alpha_{4n}}{4\omega_n} a_n \cos \gamma_n \quad (3.20)$$

Bu durumda tepki fonksiyonu,

$$\begin{aligned} w = \varepsilon \{ & a_n \cos[\frac{1}{3}(\Omega t - \gamma_n)] Y_n(x) + 2\cos(\Omega t) Z(x) \} \\ & + \varepsilon^2 \{ \frac{1}{2} a_n^2 \cos[\frac{2}{3}(\Omega t - \gamma_n)] \phi_{1n}(x) + \frac{1}{2} a_n^2 \phi_{2n}(x) + a_n \cos[\frac{1}{3}(4\Omega t - \gamma_n)] \phi_{3n}(x) \\ & + a_n \cos[\frac{1}{3}(2\Omega t + \gamma_n)] \phi_{4n}(x) + 2\cos(2\Omega t) \phi_5(x) + 2\phi_6(x) \} + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklinde olacaktır. Böylece problem, (2.11), (3.6), (3.8)-(3.13) denklemlerinin çözülmesine ve (3.15)-(3.17) katsayılarının hesaplanmasına indirgenmiştir. Bu değerler bilindiği takdirde

yaklaşık çözüm, (3.21) ile ifade edilecek ve bu çözümdeki genlik ve faz fonksiyonları, denklem (3.19) ve (3.20) tarafından belirlenecektir.

3.2. Üçüncü Derece Süperharmonik Rezonanslar

Bu durumda zorlama frekansı şu şekilde yazılabilir :

$$3\Omega = \omega_n + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.22)$$

Zorlama genliği ise yine $\hat{F} = \varepsilon F$ olarak mertebelendirilmiştir. Denklemler (3.2)-(3.4) bu durumda da geçerlidir. Sadece ε^3 mertebesindeki çözülebilirlik şartı şu hale gelmektedir :

$$i\omega_n (2A_n' + \mu A_n) + \alpha_{5n} A_n^2 \bar{A}_n + \alpha_{6n} A_n + \alpha_{7n} e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (3.23)$$

Buradaki katsayılar ise şu şekilde tanımlanmıştır :

$$\alpha_{5n} = \int_D Y_n \{ Q(Y_n, \phi_{1n}) + Q(\phi_{1n}, Y_n) + 2 [Q(Y_n, \phi_{2n}) + Q(\phi_{2n}, Y_n)] + 3C(Y_n, Y_n, Y_n) \} dx \quad (3.24)$$

$$\alpha_{6n} = \int_D Y_n \{ 2 [Q(Y_n, \phi_6) + Q(\phi_6, Y_n)] + Q(Z, \phi_{3n}) + Q(\phi_{3n}, Z) + Q(Z, \phi_{4n}) + Q(\phi_{4n}, Z) + 2 [C(Y_n, Z, Z) + C(Z, Y_n, Z) + C(Z, Z, Y_n)] \} dx \quad (3.25)$$

$$\alpha_{7n} = \int_D Y_n \{ Q(Z, \phi_5) + Q(\phi_5, Z) + C(Z, Z, Z) \} dx \quad (3.26)$$

Faz açısını denklem (2.20)'deki gibi tanımlayıp, polar form (2.19)'u denklem (3.23)'e yerleştirirsek,

$$a_n' = -\frac{1}{2} \mu a_n - \frac{\alpha_{7n}}{\omega_n} \sin \gamma_n \quad (3.27)$$

$$\gamma_n' = \sigma - \frac{\alpha_{5n}}{8\omega_n} a_n^2 - \frac{\alpha_{6n}}{2\omega_n} - \frac{\alpha_{7n}}{\omega_n a_n} \cos \gamma_n \quad (3.28)$$

şeklindeki genlik ve faz modülasyon denklemlerini elde ederiz. Bu durumda toplam tepki fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned}
w = \varepsilon \{ & a_n \cos(3\Omega t - \gamma_n) Y_n(x) + 2 \cos(\Omega t) Z(x) \} \\
& + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} a_n^2 \cos[2(3\Omega t - \gamma_n)] \phi_{1n}(x) + \frac{1}{2} a_n^2 \phi_{2n}(x) + a_n \cos(4\Omega t - \gamma_n) \phi_{3n}(x) \right. \\
& \left. + a_n \cos(2\Omega t - \gamma_n) \phi_{4n}(x) + 2 \cos(2\Omega t) \phi_5(x) + 2 \phi_6(x) \right\} + \dots
\end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklindedir.

3.3. İkide bir Altharmonik Rezonanslar

Bu durumda zorlama frekansı,

$$\Omega = 2\omega_n + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.30)$$

şeklindedir. Rezonansların etkisini dengelemek için, $\hat{\mu} = \varepsilon^2 \mu$ ve $\hat{F} = \varepsilon^2 F$ şeklindeki bir seçim uygun olacaktır. Bu özel seçim için denklem (2.1) aşağıdaki denklemlere ayrışacaktır.

ε mertebesi

$$D_0^2 w_1 + L(w_1) = 0 \quad (3.31)$$

ε^2 mertebesi

$$D_0^2 w_2 + L(w_2) = -F \cos \Omega T_0 - Q(w_1, w_1) \quad (3.32)$$

ε^3 mertebesi

$$D_0^2 w_3 + L(w_3) = -2D_0 D_2 w_1 - \mu D_0 w_1 - Q(w_1, w_2) - Q(w_2, w_1) - C(w_1, w_1, w_1) \quad (3.33)$$

Denklem (3.31) için çözüm (2.10)'daki gibidir. Denklem (3.32)'nin çözümü ise,

$$w_2 = (A_n^2 e^{2ik_0 T_0} + ke) \phi_{1n}(x) + 2A_n \bar{A}_n \phi_{2n}(x) + (e^{i\Omega T_0} + ke) Z(x) \quad (3.34)$$

şeklindedir. Buradaki fonksiyonlar aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$L(Y_n) - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (3.35)$$

$$L(\phi_{1n}) - 4\omega_n^2 \phi_{1n} = -Q(Y_n, Y_n) \quad (3.36)$$

$$L(\phi_{2n}) = -Q(Y_n, Y_n) \quad (3.37)$$

$$L(Z) - \Omega^2 Z = -\frac{1}{2}F \quad (3.38)$$

ϵ^3 mertebesindeki çözülebilirlik şartı,

$$i\omega_n(2A_n' + \mu A_n) + \alpha_{8n} A_n^2 \bar{A}_n + \alpha_{9n} \bar{A}_n e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (3.39)$$

şeklinde bulunur. Buradaki katsayılar ise,

$$\alpha_{8n} = \int_D Y_n \{ Q(Y_n, \phi_{1n}) + Q(\phi_{1n}, Y_n) + 2[Q(Y_n, \phi_{2n}) + Q(\phi_{2n}, Y_n)] + 3C(Y_n, Y_n, Y_n) \} dx \quad (3.40)$$

$$\alpha_{9n} = \int_D Y_n \{ Q(Y_n, Z) + Q(Z, Y_n) \} dx \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (3.39)'la ilgili genlik ve faz modülasyon denklemleri,

$$a_n' = -\frac{1}{2}\mu a_n - \frac{\alpha_{9n}}{2\omega_n} a_n \sin\gamma_n \quad (3.42)$$

$$\gamma_n' = \sigma - \frac{\alpha_{8n}}{4\omega_n} a_n^2 - \frac{\alpha_{9n}}{\omega_n} \cos\gamma_n \quad (3.43)$$

şeklinindedir. Burada faz açısı,

$$\gamma_n = \sigma T_2 - 2\beta_n \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Toplam tepki fonksiyonu,

$$w = \varepsilon a_n \cos\left[\frac{1}{2}(\Omega t - \gamma_n)\right] Y_n(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ a_n^2 \cos(\Omega t - \gamma_n) \phi_{1n}(x) + a_n^2 \phi_{2n}(x) + 4 \cos(\Omega t) Z(x) \} + \dots \quad (3.45)$$

şeklindedir.

3.4. Kombinasyon Rezonansları

Bu tip rezonans, zorlama frekansı Ω 'nın iki tabii frekansın farkına veya toplamına yakın olması durumunda ortaya çıkmaktadır. Burada sadece toplama tipi gözönüne alınacaktır. Zorlama frekansı şu şekilde ifade edilebilir :

$$\Omega = \omega_n + \omega_m + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.46)$$

Bir önceki bölümdeki mertebelendirme ve denklemler (3.31)-(3.33) burada da aynen geçerlidir.

ε mertebesindeki çözüm,

$$w_1 = (A_n e^{i\omega_n T_0} + ke) Y_n(x) + (A_m e^{i\omega_m T_0} + ke) Y_m(x) \quad (3.47)$$

şeklindedir. Buradaki Y_n ve Y_m fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$L(Y_n) - \omega_n^2 Y_n = 0, \quad L(Y_m) - \omega_m^2 Y_m = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad n \neq m \quad (3.48)$$

ε^2 mertebesindeki çözüm,

$$\begin{aligned} w_2 = & (A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} + ke) \phi_{1n}(x) + 2A_n \bar{A}_n \phi_{2n}(x) + (A_n A_m e^{i(\omega_n + \omega_m) T_0} + ke) \phi_{3nm}(x) \\ & + (A_n \bar{A}_m e^{i(\omega_n - \omega_m) T_0} + ke) \phi_{4nm}(x) + (A_m^2 e^{2i\omega_m T_0} + ke) \phi_{5m}(x) \\ & + 2A_m \bar{A}_m \phi_{6m}(x) + (e^{i\Omega T_0} + ke) Z(x) \end{aligned} \quad (3.49)$$

şeklindedir. Buradaki fonksiyonlar aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$L(\phi_{1n}) - 4\omega_n^2 \phi_{1n} = -Q(Y_n, Y_n) \quad (3.50)$$

$$L(\phi_{2n}) = -Q(Y_n, Y_n) \quad (3.51)$$

$$L(\phi_{3nm}) - (\omega_n + \omega_m)^2 \phi_{3nm} = -Q(Y_n, Y_m) - Q(Y_m, Y_n) \quad (3.52)$$

$$L(\phi_{4nm}) - (\omega_n - \omega_m)^2 \phi_{4nm} = -Q(Y_n, Y_m) - Q(Y_m, Y_n) \quad (3.53)$$

$$L(\phi_{5m}) - 4\omega_m^2 \phi_{5m} = -Q(Y_m, Y_m) \quad (3.54)$$

$$L(\phi_{6m}) = -Q(Y_m, Y_m) \quad (3.55)$$

$$L(Z) - \Omega^2 Z = -\frac{1}{2}F \quad (3.56)$$

ε^3 mertebesinde çözülebilirlik şartları şu şekilde bulunur :

$$i\omega_n(2A_n' + \mu A_n) + \alpha_{10n} A_n^2 \bar{A}_n + \alpha_{11nm} A_n A_m \bar{A}_m + \alpha_{12nm} \bar{A}_m e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (3.57)$$

$$i\omega_m(2A_m' + \mu A_m) + \alpha_{13m} A_m^2 \bar{A}_m + \alpha_{14nm} A_n \bar{A}_n A_m + \alpha_{15nm} \bar{A}_n e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (3.58)$$

Buradaki katsayılar aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\alpha_{10n} = \int_D Y_n \{ Q(Y_n, \phi_{1n}) + Q(\phi_{1n}, Y_n) + 2[Q(Y_n, \phi_{2n}) + Q(\phi_{2n}, Y_n)] + 3C(Y_n, Y_n, Y_n) \} dx \quad (3.59)$$

$$\alpha_{11nm} = \int_D Y_n \{ 2[Q(Y_n, \phi_{6m}) + Q(\phi_{6m}, Y_n)] + Q(Y_m, \phi_{3nm}) + Q(\phi_{3nm}, Y_m) + Q(Y_m, \phi_{4nm}) + Q(\phi_{4nm}, Y_m) + 2[C(Y_n, Y_m, Y_m) + C(Y_m, Y_n, Y_m) + C(Y_m, Y_m, Y_n)] \} dx \quad (3.60)$$

$$\alpha_{12nm} = \int_D Y_n \{ Q(Y_m, Z) + Q(Z, Y_m) \} dx \quad (3.61)$$

$$\alpha_{13m} = \int_D Y_m \{ Q(Y_m, \phi_{5m}) + Q(\phi_{5m}, Y_m) + 2[Q(Y_m, \phi_{6m}) + Q(\phi_{6m}, Y_m)] + 3C(Y_m, Y_m, Y_m) \} dx \quad (3.62)$$

$$\alpha_{14nm} = \int_D Y_m \{ Q(Y_n, \phi_{3nm}) + Q(\phi_{3nm}, Y_m) + Q(Y_n, \phi_{4nm}) + Q(\phi_{4nm}, Y_n) + 2[Q(Y_m, \phi_{2n}) + Q(\phi_{2n}, Y_m) + C(Y_n, Y_n, Y_m) + C(Y_n, Y_m, Y_n) + C(Y_m, Y_n, Y_n)] \} dx \quad (3.63)$$

$$\alpha_{15nm} = \int_D Y_m \{ Q(Y_n, Z) + Q(Z, Y_n) \} dx \quad (3.64)$$

Denklem (3.57) ve (3.58)'le ilgili genlik ve faz modülasyon denklemleri aşağıdaki şekildedir.

$$a_n' = -\frac{1}{2} \mu a_n - \frac{\alpha_{12nm}}{2\omega_n} a_m \sin \gamma_{nm} \quad (3.65)$$

$$a_m' = -\frac{1}{2} \mu a_m - \frac{\alpha_{15nm}}{2\omega_m} a_n \sin \gamma_{nm} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nm}' = & \sigma - \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_{10n}}{\omega_n} + \frac{\alpha_{14nm}}{\omega_m} \right) a_n^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_{11nm}}{\omega_n} + \frac{\alpha_{13m}}{\omega_m} \right) a_m^2 \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{12nm} a_m}{\omega_n a_n} + \frac{\alpha_{15nm} a_n}{\omega_m a_m} \right) \cos \gamma_{nm} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Yukarıdaki denklemleri elde ederken aşağıdaki tanımlar kullanılmıştır.

$$A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n}, \quad A_m = \frac{1}{2} a_m e^{i\beta_m}, \quad \gamma_{nm} = \sigma T_2 - \beta_n - \beta_m \quad (3.68)$$

Böylece, bu bölümde değişik tipteki ikincil rezonanslar için genel yaklaşık çözümler üretilmiştir. Bu genel çözümler, her bir tip ikincil rezonans için bir algoritma oluşturmaktadır. Özel bir problem analiz edilirken yapılacak şey, birinci ve ikinci mertebede çıkan sınır-değer problemlerinden konum fonksiyonlarının bulunması ve operatörlerin özel yapıları sayesinde integral formdaki katsayıların hesaplanmasıdır. Nonlineer terimlerin katsayılarına olan etkileri, bu integral formdaki denklemlerde açıkça görülmektedir. Konum fonksiyonlarının analitik olarak çözümlenmesinin çok karışık olabileceği durumlarda, direkt nümerik çözüm metodlarına başvurulabilir. Katsayıların integral formda verilmesinden dolayı böyle bir nümerik analizi gerçekleştirmek zor olmayacaktır.

4. ETKİLEŞİMLİ (COUPLED) DENKLEMLERDE İÇ REZONANS ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, önceki bölümlerde verilen düzlem içi titreşim analizi düzlem dışı titreşim analizini de kapsayacak biçimde genişletilecektir. Burada da, Çok Zaman Ölçekli Metod direkt olarak etkileşimli denklemlere uygulanacaktır. Etkileşimli sistemlerde değişik iç rezonanslar söz konusu olabilmektedir. İşlemleri uzatmamak ve bu tip denklemlerde çözümlerin nasıl üretileceği konusunda bir fikir verebilmek için, düzlem içi bir mod ile düzlem dışı bir modun bire bir iç rezonans durumu ele alınmıştır. Zorlama frekansının ise, herhangi bir düzlem içi tabii frekansa yakın olduğu varsayılmıştır.

4.1. Hareket Denklemleri

Boyutsuz hareket denklemleri aşağıdaki şekildedir.

$$\ddot{w}_1 + L_1(w_1) + \hat{\mu}_1 \dot{w}_1 + Q_1(w_1, w_1) + Q_2(w_2, w_2) + Q_3(w_1, w_2) + C_1(w_1, w_1, w_1) + C_2(w_1, w_1, w_2) + C_3(w_1, w_2, w_2) + \hat{F} \cos \Omega t = 0 \quad (4.1)$$

$$\ddot{w}_2 + L_2(w_2) + \hat{\mu}_2 \dot{w}_2 + Q_4(w_1, w_1) + Q_5(w_2, w_2) + Q_6(w_1, w_2) + C_4(w_2, w_2, w_2) + C_5(w_2, w_2, w_1) + C_6(w_2, w_1, w_1) = 0 \quad (4.2)$$

Bu matematik modelde, denklemler arasındaki etkileşim kuadratik ve kübik nonlineeriteye sahip denklemlerde ortaya çıkmaktadır. Bu denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri en genel formda elde edilecektir. Sınır şartları lineer, homojen, ve zamandan bağımsız alınmıştır.

4.2. Direkt-Perturbasyon Metodu

Kübik nonlineeriteden dolayı, w_1 ve w_2 için üçüncü dereceden aşağıdaki gibi bir açılım olduğunu varsayalım.

$$w_1(x, t; \varepsilon) = \varepsilon w_{11}(x, T_0, T_2) + \varepsilon^2 w_{12}(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_{13}(x, T_0, T_2) + \dots \quad (4.3)$$

$$w_2(x, t; \varepsilon) = \varepsilon w_{21}(x, T_0, T_2) + \varepsilon^2 w_{22}(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_{23}(x, T_0, T_2) + \dots \quad (4.4)$$

Yukarıdaki açılımlarda, $T_1 = \varepsilon t$ bağımlılığı sonraki analizde ortadan kalkacağı için baştan gözardı edilmiştir. Zayıf nonlineer bir sistem farzedildiği için, sönümlenme ve zorlama katsayıları üçüncü mertebede etkileri ortaya çıkacak şekilde şöyle mertebelendirilmiştir :

$$\hat{\mu}_{1,2} = \varepsilon^2 \mu_{1,2}, \quad \hat{F} = \varepsilon^3 F \quad (4.5)$$

w_1 ve w_2 için varsayılan açılımlar, mertebelendirilmiş sönümlenme ve zorlama ifadeleri, ve zaman türevleri denklem (4.1) ve (4.2)'ye yerleştirilirse, her ε mertebesi için aşağıdaki denklemler elde edilir.

ε mertebesi

$$D_0^2 w_{11} + L_1(w_{11}) = 0 \quad (4.6)$$

$$D_0^2 w_{21} + L_2(w_{21}) = 0 \quad (4.7)$$

ε^2 mertebesi

$$D_0^2 w_{12} + L_1(w_{12}) = -Q_1(w_{11}, w_{11}) - Q_2(w_{21}, w_{21}) - Q_3(w_{11}, w_{21}) \quad (4.8)$$

$$D_0^2 w_{22} + L_2(w_{22}) = -Q_4(w_{11}, w_{11}) - Q_5(w_{21}, w_{21}) - Q_6(w_{11}, w_{21}) \quad (4.9)$$

ε^3 mertebesi

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{13} + L_1(w_{13}) = & -2D_0 D_2 w_{11} - \mu_1 D_0 w_{11} - Q_1(w_{11}, w_{12}) - Q_1(w_{12}, w_{11}) - Q_2(w_{21}, w_{22}) \\ & - Q_2(w_{22}, w_{21}) - Q_3(w_{11}, w_{22}) - Q_3(w_{12}, w_{21}) - C_1(w_{11}, w_{11}, w_{11}) \\ & - C_2(w_{11}, w_{11}, w_{21}) - C_3(w_{11}, w_{21}, w_{21}) - F \cos \Omega T_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{23} + L_2(w_{23}) = & -2D_0 D_2 w_{21} - \mu_2 D_0 w_{21} - Q_4(w_{11}, w_{12}) - Q_4(w_{12}, w_{11}) - Q_5(w_{21}, w_{22}) \\ & - Q_5(w_{22}, w_{21}) - Q_6(w_{11}, w_{22}) - Q_6(w_{12}, w_{21}) - C_4(w_{21}, w_{21}, w_{21}) \\ & - C_5(w_{21}, w_{21}, w_{11}) - C_6(w_{21}, w_{11}, w_{11}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ε mertebesindeki çözümler şu şekilde yazılabilir :

$$w_{11} = (A(T_2)e^{i\omega_1 T_0} + ke)Y_1(x) \quad (4.12)$$

$$w_{21} = (B(T_2)e^{i\omega_2 T_0} + ke)Y_2(x) \quad (4.13)$$

Y_1 ve Y_2 fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$L_1(Y_1) - \omega_1^2 Y_1 = 0 \quad (4.14)$$

$$L_2(Y_2) - \omega_2^2 Y_2 = 0 \quad (4.15)$$

Bundan sonraki analizde, ω_1 'in direkt olarak zorlamadan etkilendiği, ω_2 'nin ise ω_1 'le birebir iç rezonansla indirekt olarak etkilendiği farzedilecektir.

ε^2 mertebesindeki w_{12} ve w_{22} çözümleri için uygun formlar aşağıdaki şekildedir.

$$w_{12} = (A^2 e^{2i\omega_1 T_0} + ke)\xi_1(x) + 2A\bar{A}\xi_2(x) + (B^2 e^{2i\omega_2 T_0} + ke)\xi_3(x) + 2B\bar{B}\xi_4(x) \\ + (ABe^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + ke)\xi_5(x) + (A\bar{B}e^{i(\omega_1 - \omega_2)T_0} + ke)\xi_6(x) \quad (4.16)$$

$$w_{22} = (A^2 e^{2i\omega_1 T_0} + ke)\xi_7(x) + 2A\bar{A}\xi_8(x) + (B^2 e^{2i\omega_2 T_0} + ke)\xi_9(x) + 2B\bar{B}\xi_{10}(x) \\ + (ABe^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + ke)\xi_{11}(x) + (A\bar{B}e^{i(\omega_1 - \omega_2)T_0} + ke)\xi_{12}(x) \quad (4.17)$$

Yukarıdaki çözümlerdeki $\xi_i(x)$ fonksiyonlarını belirleyen denklemler şu şekildedir :

$$L_1(\xi_1) - 4\omega_1^2 \xi_1 = -Q_1(Y_1, Y_1) \quad (4.18)$$

$$L_1(\xi_2) = -Q_1(Y_1, Y_1) \quad (4.19)$$

$$L_1(\xi_3) - 4\omega_2^2 \xi_3 = -Q_2(Y_2, Y_2) \quad (4.20)$$

$$L_1(\xi_4) = -Q_2(Y_2, Y_2) \quad (4.21)$$

$$L_1(\xi_5) - (\omega_1 + \omega_2)^2 \xi_5 = -Q_3(Y_1, Y_2) \quad (4.22)$$

$$L_1(\xi_6) - (\omega_1 - \omega_2)^2 \xi_6 = -Q_3(Y_1, Y_2) \quad (4.23)$$

$$L_2(\xi_7) - 4\omega_1^2 \xi_7 = -Q_4(Y_1, Y_1) \quad (4.24)$$

$$L_2(\xi_8) = -Q_4(Y_1, Y_1) \quad (4.25)$$

$$L_2(\xi_9) - 4\omega_2^2 \xi_9 = -Q_5(Y_2, Y_2) \quad (4.26)$$

$$L_2(\xi_{10}) = -Q_5(Y_2, Y_2) \quad (4.27)$$

$$L_2(\xi_{11}) - (\omega_1 + \omega_2)^2 \xi_{11} = -Q_6(Y_1, Y_2) \quad (4.28)$$

$$L_2(\xi_{12}) - (\omega_1 - \omega_2)^2 \xi_{12} = -Q_6(Y_1, Y_2) \quad (4.29)$$

ε^3 mertebesinde ise $\Omega \approx \omega_1$ ve $\omega_1 \approx \omega_2$ kabulü yapılarak,

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma \quad (4.30)$$

$$\omega_1 = \omega_2 + \varepsilon^2 \rho \quad (4.31)$$

yazılabilir. Burada, σ ve ρ 1 mertebesinde ayar parametreleridir. Bu mertebede de önceki bölümlerdeki analiz tekrarlanırsa, çözülebilirlik şartları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} i\omega_1(2A' + \mu_1 A) + \alpha_1 A^2 \bar{A} + \alpha_2 A \bar{B} \bar{B} + \alpha_3 B^2 \bar{A} e^{-2ipT_2} + \alpha_4 A \bar{A} \bar{B} e^{-ipT_2} + \alpha_5 A^2 \bar{B} e^{ipT_2} \\ + \alpha_6 B^2 \bar{B} e^{-ipT_2} + \frac{1}{2} f e^{i\sigma T_2} = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\alpha_1 = \int_D Y_1 \{ Q_1(Y_1, \xi_1) + Q_1(\xi_1, Y_1) + Q_3(Y_1, \xi_7) + 2 [Q_1(Y_1, \xi_2) + Q_1(\xi_2, Y_1) + Q_3(Y_1, \xi_8)] + 3C_1(Y_1, Y_1, Y_1) \} dx \quad (4.34)$$

$$\alpha_2 = \int_D Y_1 \{ 2 [Q_1(Y_1, \xi_4) + Q_1(\xi_4, Y_1) + Q_3(Y_1, \xi_{10})] + Q_2(Y_2, \xi_{11}) + Q_2(\xi_{11}, Y_2) + Q_3(\xi_5, Y_2) + Q_2(Y_2, \xi_{12}) + Q_2(\xi_{12}, Y_2) + Q_3(\xi_6, Y_2) + 2C_3(Y_1, Y_2, Y_2) \} dx \quad (4.35)$$

$$\alpha_3 = \int_D Y_1 \{ Q_1(Y_1, \xi_3) + Q_1(\xi_3, Y_1) + Q_3(Y_1, \xi_9) + Q_2(Y_2, \xi_{12}) + Q_2(\xi_{12}, Y_2) + Q_3(\xi_6, Y_2) + C_3(Y_1, Y_2, Y_2) \} dx \quad (4.36)$$

$$\alpha_4 = \int_D Y_1 \{ Q_1(Y_1, \xi_5) + Q_1(\xi_5, Y_1) + Q_3(Y_1, \xi_{11}) + Q_1(Y_1, \xi_6) + Q_1(\xi_6, Y_1) + Q_3(Y_1, \xi_{12}) + 2 [Q_2(Y_2, \xi_8) + Q_2(\xi_8, Y_2) + Q_3(\xi_2, Y_2) + C_2(Y_1, Y_1, Y_2)] \} dx \quad (4.37)$$

$$\alpha_5 = \int_D Y_1 \{ Q_1(Y_1, \xi_6) + Q_1(\xi_6, Y_1) + Q_3(Y_1, \xi_{12}) + Q_2(Y_2, \xi_7) + Q_2(\xi_7, Y_2) + Q_3(\xi_1, Y_2) + C_2(Y_1, Y_1, Y_2) \} dx \quad (4.38)$$

$$\alpha_6 = \int_D Y_1 \{ Q_2(Y_2, \xi_9) + Q_2(\xi_9, Y_2) + Q_3(\xi_3, Y_2) + 2 [Q_2(Y_2, \xi_{10}) + Q_2(\xi_{10}, Y_2) + Q_3(\xi_4, Y_2)] \} dx \quad (4.39)$$

$$\alpha_7 = \int_D Y_2 \{ Q_5(Y_2, \xi_9) + Q_5(\xi_9, Y_2) + Q_6(\xi_3, Y_2) + 2 [Q_5(Y_2, \xi_{10}) + Q_5(\xi_{10}, Y_2) + Q_6(\xi_4, Y_2)] + 3C_4(Y_2, Y_2, Y_2) \} dx \quad (4.40)$$

$$\alpha_8 = \int_D Y_2 \{ Q_4(Y_1, \xi_5) + Q_4(\xi_5, Y_1) + Q_6(Y_1, \xi_{11}) + Q_4(Y_1, \xi_6) + Q_4(\xi_6, Y_1) + Q_6(Y_1, \xi_{12}) + 2 [Q_5(Y_2, \xi_8) + Q_5(\xi_8, Y_2) + Q_6(\xi_2, Y_2) + C_6(Y_2, Y_1, Y_1)] \} dx \quad (4.41)$$

$$\alpha_9 = \int_D Y_2 \{ Q_4(Y_1, \xi_6) + Q_4(\xi_6, Y_1) + Q_6(Y_1, \xi_{12}) + Q_5(Y_2, \xi_7) + Q_5(\xi_7, Y_2) + Q_6(\xi_1, Y_2) + C_6(Y_2, Y_1, Y_1) \} dx \quad (4.42)$$

$$\alpha_{10} = \int_D Y_2 \{ 2 [Q_4(Y_1, \xi_4) + Q_4(\xi_4, Y_1) + Q_6(Y_1, \xi_{10})] + Q_5(Y_2, \xi_{11}) + Q_5(\xi_{11}, Y_2) + Q_6(\xi_5, Y_2) + Q_5(Y_2, \xi_{12}) + Q_5(\xi_{12}, Y_2) + Q_6(\xi_6, Y_2) + 2C_5(Y_2, Y_2, Y_1) \} dx \quad (4.43)$$

$$\alpha_{11} = \int_D Y_2 \{ Q_4(Y_1, \xi_3) + Q_4(\xi_3, Y_1) + Q_6(Y_1, \xi_9) + Q_5(Y_2, \xi_{12}) + Q_5(\xi_{12}, Y_2) + Q_6(\xi_6, Y_2) + C_5(Y_2, Y_2, Y_1) \} dx \quad (4.44)$$

$$\alpha_{12} = \int_D Y_2 \{ Q_4(Y_1, \xi_1) + Q_4(\xi_1, Y_1) + Q_6(Y_1, \xi_7) + 2 [Q_4(Y_1, \xi_2) + Q_4(\xi_2, Y_1) + Q_6(Y_1, \xi_8)] \} dx \quad (4.45)$$

$$f = \int_D Y_1 F dx \quad (4.46)$$

Böylece kompleks genlikleri, dolayısı ile genlik ve faz modülasyonlarını belirleyen denklem (4.32) ve (4.33)'e ait katsayılar, en genel formda elde edilmiştir. Özel durumlar için, ilgili operatörlerin yerine yerleştirilip integrallerinin alınması yeterli olacaktır. Çözülebilirlik şartları (4.32) ve (4.33) elde edilirken $\int_0^1 Y_1^2 dx = 1$, $\int_0^1 Y_2^2 dx = 1$ normalizasyonları kullanılmıştır.

4.3. Genlik ve Faz Modülasyon Denklemleri

Genlik ve faz modülasyon denklemlerini bulmak için, aşağıdaki polar formlar denklem (4.32) ve (4.33)'e yerleştirilir.

$$A(T_2) = \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\psi_1(T_2)}, \quad B(T_2) = \frac{1}{2} b(T_2) e^{i\psi_2(T_2)} \quad (4.47)$$

Gerekli işlemler yapılır, denklemler reel ve sanal kısımlarına ayrıştırılırsa, aşağıdaki genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir.

$$a' = -\frac{1}{2} \mu_1 a - \frac{1}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_1} ab^2 \sin 2\gamma_1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_5}{\omega_1} - \frac{\alpha_4}{\omega_1} \right) a^2 b \sin \gamma_1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_6}{\omega_1} b^3 \sin \gamma_1 - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1} \sin \gamma_2 \quad (4.48)$$

$$b' = -\frac{1}{2} \mu_2 b + \frac{1}{8} \frac{\alpha_9}{\omega_2} a^2 b \sin 2\gamma_1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_{10}}{\omega_2} - \frac{\alpha_{11}}{\omega_2} \right) ab^2 \sin \gamma_1 + \frac{1}{8} \frac{\alpha_{12}}{\omega_2} a^3 \sin \gamma_1 \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1' = & -\rho + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_7}{\omega_2} - \frac{\alpha_2}{\omega_1} \right) b^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_8}{\omega_2} - \frac{\alpha_1}{\omega_1} \right) a^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_9}{\omega_2} a^2 - \frac{\alpha_3}{\omega_1} b^2 \right) \cos 2\gamma_1 \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_{10}}{\omega_2} + \frac{\alpha_{11}}{\omega_2} - \frac{\alpha_5}{\omega_1} - \frac{\alpha_4}{\omega_1} \right) ab \cos \gamma_1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_{12}}{\omega_2} \frac{a^3}{b} - \frac{\alpha_6}{\omega_1} \frac{b^3}{a} \right) \cos \gamma_1 - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1 a} \cos \gamma_2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\gamma_2' = \sigma - \frac{1}{8} \frac{\alpha_1}{\omega_1} a^2 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_2}{\omega_1} b^2 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_1} b^2 \cos 2\gamma_1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_4}{\omega_1} + \frac{\alpha_5}{\omega_1} \right) abc \cos \gamma_1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_6}{\omega_1} \frac{b^3}{a} \cos \gamma_1 - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1 a} \cos \gamma_2 \quad (4.51)$$

Burada, γ_1 ve γ_2 aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\gamma_1 = \lambda_2 - \lambda_1 - \rho T_2, \quad \gamma_2 = \sigma T_2 - \lambda_1 \quad (4.52)$$

Tepki fonksiyonları, denklemler (4.47), (4.52), (4.30), (4.31), (4.16), (4.17), (4.12), ve (4.13) denklem (4.3) ve (4.4)'e yerleştirilerek aşağıdaki şekilde bulunur.

$$w_1 = \varepsilon a \cos(\Omega t - \gamma_2) Y_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ a^2 \cos[2(\Omega t - \gamma_2)] \xi_1(x) + a^2 \xi_2(x) + b^2 \cos[2(\Omega t + \gamma_1 - \gamma_2)] \xi_3(x) + b^2 \xi_4(x) + abc \cos(2\Omega t + \gamma_1 - 2\gamma_2) \xi_5(x) + abc \cos \gamma_1 \xi_6(x) \} + \dots \quad (4.53)$$

$$w_2 = \varepsilon b \cos(\Omega t + \gamma_1 - \gamma_2) Y_2(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ a^2 \cos[2(\Omega t - \gamma_2)] \xi_7(x) + a^2 \xi_8(x) + b^2 \cos[2(\Omega t + \gamma_1 - \gamma_2)] \xi_9(x) + b^2 \xi_{10}(x) + abc \cos(2\Omega t + \gamma_1 - 2\gamma_2) \xi_{11}(x) + abc \cos \gamma_1 \xi_{12}(x) \} + \dots \quad (4.54)$$

4.4. Bir Uygulama (Nonlinear Kablo Titreşimi)

Bu kısımda, daha önceki kısımda türettiğimiz formülleri, sarkıklık yüksekliğinin-uzunluk izdüşümüne oranının küçük olduğu kabloların nonlinear titreşimlerini modelleyen diferansiyel denklemlere uygulayacağız. Baskın rezonans ve düzlem içi ve düzlem dışı modlar arasında bire-bir iç rezonans durumunu inceleyeceğiz. Hareket denklemleri şöyledir : (Lee ve Perkins 1992, Pakdemirli *et al.*, 1995)

$$\left[v_t^2 + v_1^2 g(t) \right] w_1'' + \frac{v_1^2}{v_t^2} g(t) + \hat{F}(x) \cos \Omega t = \ddot{w}_1 + \hat{\mu}_1 \dot{w}_1 \quad (4.55)$$

$$\left[v_t^2 + v_1^2 g(t) \right] w_2'' = \ddot{w}_2 + \hat{\mu}_2 \dot{w}_2 \quad (4.56)$$

$$g(t) = \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{v_t^2} w_1 + \frac{1}{2} [w_1'^2 + w_2'^2] \right\} dx \quad (4.57)$$

$$w_{1,2}(0, t) = w_{1,2}(1, t) = 0 \quad (4.58)$$

Burada, x boyutsuz yay uzunluk koordinatıdır ve $()'$ x 'e göre türevi göstermektedir. v_t ve v_l sabitleri sırasıyla, enine ve boyuna dalgaların boyutsuz yayılma hızlarıdır. w_1 düzlem içi, ve w_2 düzlem dışı deplasmanlardır.

Denklem (4.55) ve (4.56)'daki operatörlerin bu durum için özel hali şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 L_1(w_1) &= -v_t^2 w_1'' + \frac{v_l^2}{v_t^4} \int_0^1 w_1 dx, & L_2(w_2) &= -v_t^2 w_2'' \\
 Q_1(w_1, w_1) &= \frac{v_l^2}{v_t^2} \left(w_1'' \int_0^1 w_1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 w_1'^2 dx \right), & Q_2(w_2, w_2) &= -\frac{v_l^2}{2v_t^2} \int_0^1 w_2'^2 dx, & Q_3(w_1, w_2) &= 0, \\
 Q_4(w_1, w_1) &= 0, & Q_5(w_2, w_2) &= 0 \\
 Q_6(w_1, w_2) &= \frac{v_l^2}{v_t^2} w_2'' \int_0^1 w_1 dx, & C_1(w_1, w_1, w_1) &= -\frac{v_l^2}{2} w_1'' \int_0^1 w_1'^2 dx \\
 C_2(w_1, w_1, w_2) &= 0, & C_3(w_1, w_2, w_2) &= -\frac{v_l^2}{2} w_1'' \int_0^1 w_2'^2 dx \\
 C_4(w_2, w_2, w_2) &= -\frac{v_l^2}{2} w_2'' \int_0^1 w_2'^2 dx, & C_5(w_2, w_2, w_1) &= 0, \\
 C_6(w_2, w_1, w_1) &= -\frac{v_l^2}{2} w_2'' \int_0^1 w_1'^2 dx
 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Deplasmanlar için, denklem (4.3) ve (4.4)'deki açılımları kabul edelim. Denklem (4.12) ve (4.13)'deki özfonksiyonlar $Y_1(x)$ ve $Y_2(x)$, (4.14) ve (4.15) denklemlerinin aşağıdaki özel halinin çözülmesi ile elde edilecektir.

$$v_t^2 Y_1'' + \omega_1^2 Y_1 - \frac{v_1^2}{v_t^4} \int_0^l Y_1 dx = 0 \quad (4.60)$$

$$v_t^2 Y_2'' + \omega^2 Y_2 = 0 \quad (4.61)$$

$$Y_{1,2}(0) = Y_{1,2}(l) = 0 \quad (4.62)$$

Denklem (4.60)'nin (4.62)'deki sınır şartları ile birlikte iki çeşit çözümü vardır. Bunlar, kablonun uzunluk izdüşümünün ortasına göre düzlem içi simetrik ve anti-simetriklerdir. Düzlem içi simetrik çözüm,

$$Y_1(x) = C \left\{ 1 - \tan\left(\frac{\omega_1}{2v_t}\right) \sin\left(\frac{\omega_1}{v_t} x\right) - \cos\left(\frac{\omega_1}{v_t} x\right) \right\} \quad (4.63)$$

şeklindedir. Burada ω_1 ,

$$\frac{\omega_1^3 v_t^3}{v_1^2} - \frac{\omega_1}{v_t} + 2 \tan\left(\frac{\omega_1}{2v_t}\right) = 0 \quad (4.64)$$

transandental denklemini sağlar. C , $\int_0^l Y_1^2 dx = 1$ olacak şekilde seçilmelidir. Düzlem içi anti-

simetrik çözüm şöyledir :

$$Y_1(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\omega_1}{v_t} x\right), \quad \frac{\omega_1}{v_t} = 2n\pi \quad n = 1,2,3... \quad (4.65)$$

Simetrik çözüm, kablonun uzaması söz konusu olduğunda geçerlidir, fakat anti-simetrik çözüm sıfır uzama haline karşılık gelmektedir. Bu sebeple, aşağıda yapılan analizde sadece simetrik çözüm dikkate alınacaktır.

Düzlem dışı çözüm şöyledir :

$$Y_2(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\omega_2}{v_t} x\right), \quad \frac{\omega_2}{v_t} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.66)$$

Bir sonraki adım, ε^2 mertebesindeki çözümü bulmaktır. Çözüm, denklem (4.16) ve (4.17) şeklindedir. Burada ξ_i denklemler (4.18)-(4.29)'u sağlar. Denklem (4.59)'dan operatörlerin özel şekli alınıp denklem (4.18)-(4.29)'a yerleştirilirse, aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$v_t^2 \xi_1'' + 4\omega_1^2 \xi_1 - \frac{v_1^2}{v_t^4} \int_0^1 \xi_1 dx = \frac{v_1^2}{v_t^2} \left(Y_1'' \int_0^1 Y_1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 Y_1'^2 dx \right) \quad (4.67)$$

$$v_t^2 \xi_2'' - \frac{v_1^2}{v_t^4} \int_0^1 \xi_2 dx = \frac{v_1^2}{v_t^2} \left(Y_1'' \int_0^1 Y_1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 Y_1'^2 dx \right) \quad (4.68)$$

$$v_t^2 \xi_3'' + 4\omega_2^2 \xi_3 - \frac{v_1^2}{v_t^4} \int_0^1 \xi_3 dx = -\frac{v_1^2}{2v_t^2} \int_0^1 Y_2'^2 dx \quad (4.69)$$

$$v_t^2 \xi_4'' - \frac{v_1^2}{v_t^4} \int_0^1 \xi_4 dx = -\frac{v_1^2}{2v_t^2} \int_0^1 Y_2'^2 dx \quad (4.70)$$

$$v_t^2 \xi_5'' + (\omega_1 + \omega_2)^2 \xi_5 - \frac{v_1^2}{v_t^4} \int_0^1 \xi_5 dx = 0 \quad (4.71)$$

$$v_t^2 \xi_6'' + (\omega_1 - \omega_2)^2 \xi_6 - \frac{v_1^2}{v_t^4} \int_0^1 \xi_6 dx = 0 \quad (4.72)$$

$$v_t^2 \xi_7'' + 4\omega_1^2 \xi_7 = 0 \quad (4.73)$$

$$v_t^2 \xi_8'' = 0 \quad (4.74)$$

$$v_t^2 \xi_9'' + 4\omega_2^2 \xi_9 = 0 \quad (4.75)$$

$$v_t^2 \xi_{10}'' = 0 \quad (4.76)$$

$$v_t^2 \xi_{11}'' + (\omega_1 + \omega_2)^2 \xi_{11} = \frac{v_1^2}{v_t^2} Y_2'' \int_0^1 Y_1 dx \quad (4.77)$$

$$v_t^2 \xi_{12}'' + (\omega_1 - \omega_2)^2 \xi_{12} = \frac{v_1^2}{v_t^2} Y_2'' \int_0^1 Y_1 dx \quad (4.78)$$

$$\xi_i(0) = \xi_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (4.79)$$

Denklem (4.63) ve (4.66) lineer çözümleri, denklem (4.67)-(4.78)'e yerleştirilir, gerekli olduğunda denklem (4.64) kullanılarak, en sonunda ξ_i için aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_1(x) = & \left(\frac{v_1^2}{2v_t^2} \int_0^1 Y_1'^2 dx - C^2 \omega_1^4 \right) \left\{ \frac{v_1^2}{v_t^4} \left(1 - \frac{v_t}{\omega_1} \tan\left(\frac{\omega_1}{v_t}\right) \right) - 4\omega_1^2 \right\}^{-1} \\ & \times \left\{ 1 - \tan\left(\frac{\omega_1}{v_t}\right) \sin\left(\frac{2\omega_1}{v_t} x\right) - \cos\left(\frac{2\omega_1}{v_t} x\right) \right\} - \frac{1}{3} C \omega_1^2 Y_1(x) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\xi_2(x) = \frac{1}{12v_t^6 + v_1^2} \left(6C^2 \omega_1^4 v_t^4 - 3v_t^2 v_1^2 \int_0^1 Y_1'^2 dx \right) (x^2 - x) + C \omega_1^2 Y_1(x) \quad (4.81)$$

$$\xi_3(x) = \frac{\omega_2^2 v_1^2}{2(4\omega_2^2 v_t^4 - v_1^2)} \left\{ \cos\left(\frac{2\omega_2}{v_t} x\right) - 1 \right\} \quad (4.82)$$

$$\xi_4(x) = -\frac{3\omega_2^2 v_1^2}{12v_t^6 + v_1^2} (x^2 - x) \quad (4.83)$$

$$\xi_{11}(x) = \frac{\sqrt{2} C \omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2} \sin\left(\frac{\omega_2}{v_t} x\right) \quad (4.84)$$

$$\xi_{12}(\bar{x}) = \frac{\sqrt{2}C\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_2^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2} \sin\left(\frac{\omega_2}{v_t} \bar{x}\right) \quad (4.85)$$

$$\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = \xi_8 = \xi_9 = \xi_{10} = 0 \quad (4.86)$$

ε^3 mertebesinde, denklem (4.32) ve (4.33)'deki çözülebilirlik şartları elde edilir. α_i katsayıları denklem (4.34)-(4.45)'de tanımlanmıştır. Denklem (4.59)'da tanımlanan operatörlerin özel şekilleri denklem (4.34)-(4.45)'e yerleştirilirse, modülasyon denklemlerinin katsayıları elde edilir.

$$\alpha_1 = -\left\{ \frac{v_1^2}{v_t^2} (b_2 b_6 + 2b_1 b_8 + 2b_3 b_6 + 4b_1 b_9) - \frac{3}{2} v_1^2 b_6^2 \right\} \quad (4.87)$$

$$\alpha_2 = -\left\{ \frac{v_1^2}{v_t^2} (2b_5 b_6 + 4b_1 b_{11} + b_1 b_{12} + b_1 b_{13}) - v_1^2 b_6 b_7 \right\} \quad (4.88)$$

$$\alpha_3 = -\left\{ \frac{v_1^2}{v_t^2} (2b_1 b_{10} + b_1 b_{13} + b_4 b_6) - \frac{1}{2} v_1^2 b_6 b_7 \right\} \quad (4.89)$$

$$\alpha_7 = -\left\{ \frac{v_1^2}{v_t^2} (b_4 + 2b_5) b_7 - \frac{3}{2} v_1^2 b_7^2 \right\} \quad (4.90)$$

$$\alpha_8 = -\left\{ \frac{v_1^2}{v_t^2} (b_1 b_{12} + b_1 b_{13} + 2b_3 b_7) - v_1^2 b_6 b_7 \right\} \quad (4.91)$$

$$\alpha_9 = -\left\{ \frac{v_1^2}{v_t^2} (b_1 b_{13} + b_2 b_7) - \frac{1}{2} v_1^2 b_6 b_7 \right\} \quad (4.92)$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_{10} = \alpha_{11} = \alpha_{12} = 0 \quad (4.93)$$

Burada,

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \int_0^1 Y_1 dx, & b_2 &= \int_0^1 \xi_1 dx, & b_3 &= \int_0^1 \xi_2 dx, & b_4 &= \int_0^1 \xi_3 dx, \\
 b_5 &= \int_0^1 \xi_4 dx, & b_6 &= \int_0^1 Y_1'^2 dx, & b_7 &= \int_0^1 Y_2'^2 dx, & b_8 &= \int_0^1 Y_1' \xi_1' dx, \\
 b_9 &= \int_0^1 Y_1' \xi_2' dx, & b_{10} &= \int_0^1 Y_1' \xi_3' dx, & b_{11} &= \int_0^1 Y_1' \xi_4' dx, \\
 b_{12} &= \int_0^1 Y_2' \xi_{11}' dx, & b_{13} &= \int_0^1 Y_2' \xi_{12}' dx
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

şekindedir. Denklem (4.48)-(4.51)'den aşağıdaki genlik ve faz modülasyon denklemleri yazılabilir.

$$a' = -\frac{1}{2} \mu_1 a - \frac{1}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_1} a b^2 \sin 2\gamma_1 - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1} \sin \gamma_2 \tag{4.95}$$

$$b' = -\frac{1}{2} \mu_2 b + \frac{1}{8} \frac{\alpha_9}{\omega_2} a^2 b \sin 2\gamma_1 \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1' &= -\rho + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_7}{\omega_2} - \frac{\alpha_2}{\omega_1} \right) b^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_8}{\omega_2} - \frac{\alpha_1}{\omega_1} \right) a^2 \\
 &+ \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha_9}{\omega_2} a^2 - \frac{\alpha_3}{\omega_1} b^2 \right) \cos 2\gamma_1 - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1 a} \cos \gamma_2
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

$$\gamma_2' = \sigma - \frac{1}{8} \frac{\alpha_1}{\omega_1} a^2 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_2}{\omega_1} b^2 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_1} b^2 \cos 2\gamma_1 - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1 a} \cos \gamma_2 \tag{4.98}$$

γ_1 ve γ_2 denklem (4.52)'de tanımlanmıştı. Tepki fonksiyonu, (4.53) ve (4.54)'ten aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \varepsilon a \cos(\Omega t - \gamma_2) Y_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ a^2 \cos[2(\Omega t - \gamma_2)] \xi_1(x) + a^2 \xi_2(x) \right. \\
 &+ b^2 \cos[2(\Omega t + \gamma_1 - \gamma_2)] \xi_3(x) + b^2 \xi_4(x) \left. \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

$$w_2 = \varepsilon b \cos(\Omega t + \gamma_1 - \gamma_2) Y_2(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} ab \left\{ \cos(2\Omega t + \gamma_1 - 2\gamma_2) \xi_{11}(x) + \cos \gamma_1 \xi_{12}(x) \right\} + \dots \quad (4.100)$$

Burada genel algoritma ile elde edilen bu çözümler, (Pakdemirli *et al.*, 1995) ve (Nayfeh *et al.*, 1995) referanslarında özel metodlar ile elde edilen çözümlerle tam bir uyum içerisindedir. Yukarıdaki çözümlerle ilgili genlik ve faz modülasyon denklemlerinin geniş bir analizi ve direkt-perturbasyon metodu ile diskritizasyon-perturbasyon metodunun karşılaştırılması, Pakdemirli *et al.* (1995) tarafından yapılmıştır. Özfonksiyonların açıkça ifade edilmesinin zor olduğu problemler için, bu çalışmada geliştirilen formülasyon nümerik algoritmaya dönüştürülebilir.



5. İKİ FARKLI ÇOK ZAMAN ÖLÇEKLİ METODUN NONLİNEER TİTREŞİM PROBLEMLERİNDE KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, iki genel model ele alınacaktır. Birinci modelde, keyfi bir kübik nonlineerite, ikinci bölümde ise, keyfi kuadratik ve kübik nonlineeriteler mevcuttur. Her iki denklem, direkt-perturbasyon metodu ile çözülecektir. Ancak bu bölümde, Çok Zaman Ölçekli Metodun iki farklı versiyonu kullanılacaktır. Birinci Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-I), Nayfeh tarafından yüksek mertebe açılımlarda önerilen methodur. Son zamanlarda Rahman ve Burton, (1989) Nayfeh tarafından önerilen bu metodun, bazı özel hallerde fiziksel olmayan ekstra çözümler ürettiğini Duffing denklemini kullanarak gösterdi. Bu ekstra çözümleri elimine etmek için, Rahman ve Burton (1989) alternatif bir frekans ve sönüm açılımı (ÇZÖM-II) önerdi. Bu alternatif açılım sayesinde, sonuçların nümerik çözümlerle uyumlu olduğu gösterildi.

Bu bölümde, Rahman ve Burton'a ait olan bu metodun, kısmi diferansiyel denklemlere genelleştirilmesi yapılmıştır. Direkt-perturbasyon metoduyla ÇZÖM-II'nin avantajları, kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesinde biraraya getirilmiştir. Örnek olarak, biri keyfi kübik, diğeri ise keyfi kuadratik ve kübik nonlineerliğe sahip iki genel kısmi diferansiyel denklem ele alınmıştır. Her iki denklem de ÇZÖM-I ve ÇZÖM-II kullanılarak çözülmüştür. ÇZÖM-I ve ÇZÖM-II'nin sonuçları, her iki denklemde de baskın rezonans durumu için karşılaştırılmıştır. Bütün hesaplamalarda direkt-perturbasyon metodu kullanılmıştır. Önerilen modeller genel olduğu için, bu denklemlerin çözümleri geniş bir problem sınıfı için geçerlidir. Geliştirilen algoritma özel problemlere uygulanmıştır. Burada göz önüne alınan modeller zayıf nonlineer sistemlerdir. Sonuçlar, bunlara karşılık gelen lineer sistemlerin perturbe edilmiş sonuçlarıdır ve kuvvetli nonlineer sistemler için geçerli değildirler.

5.1. Kübik Nonlineerliğe Sahip Denklemler

Bu bölümde, keyfi kübik nonlineerliğe sahip bir denklem ele alınacaktır. Denklem, her iki metod kullanarak çözülecektir. Boyutsuz denklem, aşağıdaki genel formdadır.

$$\ddot{w} + \hat{\mu}\dot{w} + L(w) + \varepsilon C(w,w,w) = \hat{F}(x)\cos\Omega t \quad (5.1)$$

Burada, ε oldukça küçük ($\varepsilon \ll 1$) fiziksel bir parametredir. Kübik operatörümüz simetrik değildir, yani :

$$C(C_1W_1 + C_2W_2, C_3W_3 + C_4W_4, C_5W_5 + C_6W_6) = C_1C_3C_5 C(W_1,W_3,W_5) + C_1C_3C_6 C(W_1,W_3,W_6) + \dots$$

$$(\text{Genelde, } C(w_1, w_3, w_5) \neq C(w_3, w_1, w_5) \neq \dots)$$

şeklindeki özelliğe sahiptir. Burada, c_i 'ler keyfi sabitlerdir. İşlemleri kolaylaştırmak için, denklem (5.1)'in sınır şartlarının lineer, homojen ve zaman türevlerinden bağımsız olduğu kabul edilmiştir.

İlk önce denklem (5.1), tanımlanan yeni zaman değişkeni $T = \Omega t$ kullanılarak yeniden yazılmıştır.

$$\Omega^2 \ddot{w} + \bar{\mu} \dot{w} + L(w) + \varepsilon C(w, w, w) = \hat{F} \cos T \quad (5.2)$$

Burada $\bar{\mu} = \Omega \hat{\mu}$ ve (\cdot) , yeni zaman değişkeni T 'ye göre türevi ifade etmektedir.

Denklem (5.2)'ye önce Çok Zaman Ölçekli Metodun klasik versiyonu (ÇZÖM-I), daha sonrada Rahman ve Burton tarafından geliştirilen versiyonu (ÇZÖM-II) uygulanacaktır.

5.1.1. Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-I)

Bu bölümde, denklem (5.2) için üçüncü mertebeye kadar geçerli bir çözüm gösterilecektir. Baskın rezonans durumu gözönüne alınacaktır. Aşağıdaki şekilde bir açılım olduğunu varsayalım.

$$w(x, t; \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (5.3)$$

Burada, $T_0 = T$ hızlı zaman ölçeği, $T_1 = \varepsilon T$ ve $T_2 = \varepsilon^2 T$ yavaş zaman ölçekleridir. Sönümlenme ve zorlama, nonlineeritenin etkisini dengeleyecek şekilde $\bar{\mu} = \varepsilon \mu$ and $\hat{F} = \varepsilon F$ olarak mertebelendirilmiştir. Zorlama frekansının lineer sistemin tabii frekanslarından birine yakınlığı, aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\Omega^2 = \omega^2 + \varepsilon \sigma \quad (5.4)$$

Burada σ , 1 mertebesinde bir ayar parametresidir.

Denklem (5.3) ve (5.4) ve zaman türevleri denklem (5.2)'ye yerleştirip, ε 'un kuvvetlerine göre ayrıştırılırsa,

ε^0 mertebesinde

$$\omega^2 D_0^2 w_0 + L(w_0) = 0 \quad (5.5)$$

ε^1 mertebesinde

$$\omega^2 D_0^2 w_1 + L(w_1) = -(\sigma D_0^2 + 2\omega^2 D_0 D_1 + \mu D_0)w_0 - C(w_0, w_0, w_0) + F \cos T_0 \quad (5.6)$$

ε^2 mertebesinde

$$\begin{aligned} \omega^2 D_0^2 w_2 + L(w_2) = & -(2\omega^2 D_0 D_2 + \omega^2 D_1^2 + 2\sigma D_0 D_1 + \mu D_1)w_0 - (2\omega^2 D_0 D_1 + \sigma D_0^2 + \mu D_0)w_1 \\ & - C(w_0, w_0, w_1) - C(w_0, w_1, w_0) - C(w_1, w_0, w_0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

denklemleri elde edilir.

ε^0 mertebesinde,

$$w_0 = [A(T_1, T_2)e^{iT_0} + ke]Y(x) \quad (5.8)$$

şeklinde bir çözüm olduğunu varsayalım. Y fonksiyonu ise,

$$L(Y) - \omega^2 Y = 0 \quad (5.9)$$

denklemini sağlamaktadır.

Denklem (5.9) bir özdeğer-özfonksiyon problemi olup, ω^2 'lar özdeğerler ve Y'ler de bunlara karşılık gelen özfonksiyonlardır. Sürekli sistemler, sonsuz sayıda özdeğere sahiptir.

Denklem (5.8) denklem (5.6)'nın sağına yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} \omega^2 D_0^2 w_1 + L(w_1) = & [(\sigma A - i\mu A - 2i\omega^2 D_1 A) e^{iT_0} + ke]Y \\ & - (Ae^{iT_0} + ke)^3 C(Y, Y, Y) + \frac{1}{2}(Fe^{iT_0} + ke) \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir. w_1 için, aşağıdaki şekilde bir çözüm olduğunu varsayalım.

$$w_1 = \psi_1(x, T_1, T_2) e^{iT_0} + W_1(x, T_0, T_1, T_2) + ke \quad (5.11)$$

Burada, W_1 denklem (5.10)'un e^{iT_0} ile ilgili olmayan terimleri tarafından belirlenir. ψ_1 ise, aşağıdaki denklemden elde edilir.

$$L(\psi_1) - \omega^2 \psi_1 = (\sigma A - i\mu A - 2i\omega^2 D_1 A)Y - 3A^2 \bar{A} C(Y, Y, Y) + \frac{F}{2} \quad (5.12)$$

Sınır şartlarının lineer ve homojen olduğu ve lineer operatör L 'nin self-adjoint olduğu gözönüne alınırsa, denklem (5.12) için çözülebilirlik şartı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$2i\omega^2 D_1 A + (i\mu - \sigma)A + 3\alpha_1 A^2 \bar{A} - \frac{f}{2} = 0 \quad (5.13)$$

α_1 ve f ,

$$\alpha_1 = \int_D Y C(Y, Y, Y) dx, \quad f = \int_D Y F dx \quad (5.14)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\int_D Y^2 dx = 1$ olarak normalize edilmiştir.

Seküler terimler elimine edilirse, W_1 aşağıdaki denklemden elde edilir.

$$\omega^2 D_0^2 W_1 + L(W_1) = -(A^3 e^{3iT_0} + ke)C(Y, Y, Y) \quad (5.15)$$

Yukardaki denklem için,

$$W_1 = (A^3 e^{3iT_0} + ke)\phi(x) \quad (5.16)$$

şeklinde bir çözüm önerelim. Burada, ϕ aşağıdaki denklemi sağlar.

$$L(\phi) - 9\omega^2 \phi = -C(Y, Y, Y) \quad (5.17)$$

ε^2 mertebesinde, denklem (5.8) ve (5.16)'da verilen çözümler, denklem (5.7)'ye yerleştirilerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \omega^2 D_0^2 w_2 + L(w_2) = & - [(2i\omega^2 D_2 A + \omega^2 D_1^2 A + 2i\sigma D_1 A + \mu D_1 A) e^{iT_0} + ke] Y \\ & + [(9\sigma A^3 - 6i\omega^2 D_1 A^3 - 3i\mu A^3) e^{3iT_0} + ke] \phi - (A e^{iT_0} + ke)^2 \\ & \cdot (A^3 e^{3iT_0} + ke) [C(Y, Y, \phi) + C(Y, \phi, Y) + C(\phi, Y, Y)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Burada w_2 için, aşağıdaki şekilde bir çözüm önerelim.

$$w_2 = \psi_2(x, T_1, T_2) e^{iT_0} + W_2(x, T_0, T_1, T_2) + ke \quad (5.19)$$

Yukardaki denklemde, W_2 denklem (5.18)'in e^{iT_0} ile ilgili olmayan terimleri tarafından belirlenirken, ψ_2 aşağıdaki denklem tarafından sağlanır.

$$\begin{aligned} L(\psi_2) - \omega^2 \psi_2 = & - (2i\omega^2 D_2 A + \omega^2 D_1^2 A + 2i\sigma D_1 A + \mu D_1 A) Y \\ & - A^3 A^{-2} [C(Y, Y, \phi) + C(Y, \phi, Y) + C(\phi, Y, Y)] \end{aligned} \quad (5.20)$$

Denkem (5.20) için çözülebilirlik şartı,

$$2i\omega^2 D_2 A + \omega^2 D_1^2 A + (2i\sigma + \mu) D_1 A + \alpha_2 A^3 A^{-2} = 0 \quad (5.21)$$

şeklinde ifade edilir. Burada α_2 ,

$$\alpha_2 = \int_D Y [C(Y, Y, \phi) + C(Y, \phi, Y) + C(\phi, Y, Y)] dx \quad (5.22)$$

şeklindedir.

Denklem (5.13) ve (5.21), A 'nın T zaman değişkenindeki yavaş gelişimini verecek şekilde, tek bir denklem olarak aşağıdaki formda birleştirilebilir.

$$\frac{dA}{dT} = \varepsilon D_1 A + \varepsilon^2 D_2 A + O(\varepsilon^3) \quad (5.23)$$

Burada denklem (5.13) denklem (5.21)'deki $D_1^2 A$ ifadesini bulmak için kullanılmalıdır. Denklem (5.23)'ün açık şekli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
2i\omega^2 \frac{dA}{dT} = & \varepsilon [(\sigma - i\mu)A - 3\alpha_1 A^2 \bar{A} + \frac{f}{2}] + \varepsilon^2 \left[\frac{f}{8\omega^2} (i\mu - 3\sigma) \right. \\
& + \frac{1}{4\omega^2} (\mu^2 - 3\sigma^2 + 4i\sigma\mu)A + \frac{3\alpha_1 f}{8\omega^2} (A^2 - 2A\bar{A}) \\
& \left. + \frac{3\alpha_1}{2\omega^2} (\sigma + i\mu)A^2 \bar{A} + \left(\frac{9\alpha_1^2}{4\omega^2} - \alpha_2 \right) A^3 \bar{A}^2 \right] \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Düzgün rejim çözümü, dA/dT sıfıra eşitlenip, polar form $A = 1/2 ae^{i\theta}$ denklem (5.24)'e yerleştirilerek bulunur. Bu hesaplamanın, ikinci mertebe frekans-genlik (a, σ) bağımlılığını veren sonucu kısaca,

$$\Delta^2 = (R_1 a_{22} - R_2 a_{12})^2 + (R_2 a_{11} - R_1 a_{21})^2 \quad (5.25)$$

şeklindedir. Buradaki terimler aşağıdaki açık formdadırlar.

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$a_{11} = f \left[1 - \varepsilon \left(\frac{3\sigma}{4\omega^2} + \frac{3\alpha_1}{16\omega^2} a^2 \right) \right],$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\varepsilon \mu f}{4\omega^2},$$

$$a_{22} = f \left[-1 + \varepsilon \left(-\frac{3\sigma}{4\omega^2} + \frac{9\alpha_1}{16\omega^2} a^2 \right) \right],$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \alpha_1 a^3 - \sigma a - \varepsilon \left[\frac{(\mu^2 - 3\sigma^2)}{4\omega^2} a + \frac{3\sigma\alpha_1}{8\omega^2} a^3 + \frac{1}{16} \left(\frac{9\alpha_1^2}{4\omega^2} - \alpha_2 \right) a^5 \right],$$

$$R_2 = \mu a - \varepsilon \left(\frac{\mu\sigma}{\omega^2} a + \frac{3\mu\alpha_1}{8\omega^2} a^3 \right) \quad (5.26)$$

Denklem (5.25), Rahman ve Burton (1989)'da verilen denklem (28)'e nitelik olarak benzemektedir. Eğer Ω -a grafiği çizilecek olursa, fiziksel anlamı olmayan ekstra sonuçlar görülecektir. Yukarıda bahsedilen referansın 1,2 ve 3 numaralı şekillerinde, bu ekstra sonuçlar açıkça gösterilmiştir. Bu bölümde ana hatlarıyla gösterilen metod, direkt-pertürbasyon metoduyla klasik yeniden oluşturma (reconstitution) metodunun birleştirilmiş şeklidir. Bundan sonraki bölümde aynı problemi, yine yukardaki referansda verilen metodla direkt-pertürbasyon yaklaşımını kullanarak çözeceğiz. Pertürbasyon işleminden önce diskritizasyonu kullanmak, sonlu mod uygulamaları için daha az hassas sonuçlar vermektedir (Pakdemirli 1994, Pakdemirli *et al.* 1995, Pakdemirli ve Boyacı 1995, Pakdemirli ve Boyacı 1997).

5.1.2. Geliştirilmiş Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-II)

ÇZÖM-I'deki gibi sönümlenmenin ve frekansın mertebelendirilmesi yerine, Rahman ve Burton (1989) sönümlenme ve zorlama frekansına aşağıdaki gibi açılımlar önermişlerdir.

$$\hat{F} = \varepsilon F, \quad \bar{\mu} = \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2, \quad \Omega^2 = \omega^2 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 \quad (5.27)$$

Ayrıca, denklem (5.23)'ün sağ tarafındaki herbir terimin ayrı ayrı sifıra eşitlenmesini önermişlerdir. Bu ise, mertebelendirme seviyeleri arasında meydana gelebilecek olası karmaşıklığı önlemektedir. Daha detaylı tartışma aynı referansda bulunabilir.

Denklem (5.27) ve (5.3)'deki açılımlar denklem (5.2)'ye yerleştirilip, ε 'un kuvvetlerine göre ayrıştırma yapılırsa, ε^0 mertebesinde denklem (5.5) elde edilir. Bu mertebedeki çözüm denklem (5.8) tarafından verilir, ayrıca Y fonksiyonları da denklem (5.9)'u sağlamaktadır.

ε^1 mertebesinde, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\omega^2 D_0^2 w_1 + L(w_1) = -(\sigma_1 D_0^2 + 2\omega^2 D_0 D_1 + \mu_1 D_0) w_0 - C(w_0, w_0, w_0) + F \cos T_0 \quad (5.28)$$

ÇZÖM-I'deki adımlar tekrarlanırsa, denklem (5.28) için çözülebilirlik şartı aşağıdaki gibi bulunur.

$$2i\omega^2 D_1 A + (i\mu_1 - \sigma_1)A + 3\alpha_1 A^2 \bar{A} - \frac{f}{2} = 0 \quad (5.29)$$

α_1 ve f , denklem (5.14) ile aynı forma sahiptir. Bu mertebedeki çözülebilirlik şartı denklem (5.29), denklem (5.13)'le aynıdır. Denklem (5.28)'in çözümü olan w_1 , seküler terimleri elimine ettikten sonra denklem (5.16)'daki gibidir.

Düzenli rejim çözümünü bulmak için, daha önce bahsedildiği gibi her mertebedeki $D_1 A$ türevlerinin ayrı ayrı sifıra eşitlenmesi önerilmiştir. $D_1 A$ sifıra eşitlenir ve polar form $A = 1/2ae^{i\theta}$ yerleştirilirse frekansa ait ilk düzeltme,

$$\sigma_1 = \frac{3}{4}\alpha_1 a^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{a^2} - \mu_1^2} \quad (5.30)$$

olarak elde edilir.

ε^2 mertebesindeki denklem,

$$\begin{aligned} \omega^2 D_0^2 w_2 + L(w_2) = & -(2\omega^2 D_0 D_2 + \omega^2 D_1^2 + 2\sigma_1 D_0 D_1 + \sigma_2 D_0^2 + \mu_1 D_1 + \mu_2 D_0) w_0 \\ & - (2\omega^2 D_0 D_1 + \sigma_1 D_0^2 + \mu_1 D_0) w_1 - C(w_0, w_0, w_1) \\ & - C(w_0, w_1, w_0) - C(w_1, w_0, w_0) \end{aligned} \quad (5.31)$$

şeklindedir. $D_1 A$ sıfıra eşitlenip, w_0 ve w_1 denklem (5.31)'e yerleştirilirse, önceki bölümdeki cebirsel işlemler tekrarlanarak, bu mertebedeki çözülebilirlik şartı,

$$2i\omega^2 D_2 A + (i\mu_2 - \sigma_2) A + \alpha_2 A^3 \bar{A}^2 = 0 \quad (5.32)$$

olarak elde edilir. Burada, α_2 denklem (5.22) tarafından tanımlanan şekildedir. $D_2 A$ sıfıra eşitlenip, polar form $A = 1/2 a e^{i\theta}$ denklem (5.32)'ye yerleştirilirse frekansa, ait ikinci düzeltme,

$$\sigma_2 = \frac{1}{16} \alpha_2 a^4, \quad \mu_2 = 0 \quad (5.33)$$

olarak elde edilir. Son olarak, σ_1 ve σ_2 denklem (5.30) ve (5.33)'den denklem (5.27)'deki frekans açılımına yerleştirilirse, aşağıdaki frekans-tepki denklemi elde edilir.

$$\Omega^2 = \omega^2 + \varepsilon \left[\frac{3}{4} \alpha_1 a^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{a^2} - \mu_1^2} \right] + \varepsilon^2 \frac{1}{16} \alpha_2 a^4 \quad (5.34)$$

Denklem (5.34) denklem (5.25)'le karşılaştırılırsa, aralarında çok büyük farklılıklar olduğu görülür. Denklem (5.25)'in, Rahman ve Burton (1989)'da verilen denkleme benzemesi de gözönüne alındığında, fiziksel anlamı olmayan sonuçlar vereceği görülmektedir. Denklem (5.34)'te ise böyle sonuçlar yoktur. Denklem (5.34) için bir uygulama ve grafik bundan sonraki bölümde verilecektir. Ayrıca fiziksel olmayan sonuçlar, ÇZÖM-I metodunu kullanan Abou-Rayyan *et al.* (1993)'de verilen şekil 3'de de açıkça görülmektedir.

Son zamanlarda Lee ve Perkins (1992), ÇZÖM-II'yi diskritizasyonla beraber kullanmışlardır. Halbuki direkt-perturbasyon metodu daha iyi sonuçlar vermektedir (Pakdemirli *et al.*, 1995). Denklem (5.27) deki açılımlara ek olarak, zorlama frekansına da aşağıdaki şekilde bir açılım uygulamışlardır.

$$\hat{F} = \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 \quad (5.35)$$

Böyle bir kabulden sonra elde edilen faz-modülasyon denklemi,

$$\Omega^2 = \omega^2 + \varepsilon \left(\frac{3}{4} \alpha_1 a^2 \pm \sqrt{\frac{f_1^2}{a^2} - \mu_1^2} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{16} \alpha_2 a^4 \pm \sqrt{\frac{f_2^2}{a^2} - \mu_2^2} \right) \quad (5.36)$$

şeklindedir. Denklem (5.36)'daki karekök terimleri $f = f_1 + \varepsilon f_2$ alınır, tek bir karekök terimine indirgenmektedir. Bu sebepten, zorlama genliğinin açılımı gereksizdir. Eğer bu konuda dikkatli olunmazsa, hatalı sonuçlar ortaya çıkabilmektedir. Denklem (5.36)'nın sonuçlarının denklem (5.34)'deki sonuçlarla aynı olması için, sönümleme ve zorlama genliği aşağıdaki şekildeki gibi orantılı olmalıdır.

$$\frac{f_1}{\mu_1} = \frac{f_2}{\mu_2} \quad (5.37)$$

Denklem (5.37)'nin uygulanmasıyla, problemin kontrol parametrelerinde meydana gelecek suni artışlar önlenmiş olacaktır. Zorlama genliğine sönümleme katsayısına açılım uygulanmadan açılım uygulanması, çözümlerin tekliliğini ortadan kaldıracaktır.

5.2. ÇZÖM-II İçin Bir Uygulama

Bu bölümde, operatörlerle ilgili genel formülasyon, sürekli ortam titreşimlerinde bir probleme uygulanacaktır. ÇZÖM-I ve ÇZÖM-II arasındaki farklılıklar genel denklem üzerinde açıkça gösterildiği için, burada sadece ÇZÖM-II için çözüm prosedürü gözönüne alınacaktır. Örnek olarak, her iki ucundan basit mesnetli ve nonlineer elastik bir yatak üzerindeki Euler-Bernoulli kirişi ele alınacaktır. Boyutsuz hareket denklemi ve sınır şartları,

$$\Omega^2 \ddot{w} + \bar{\mu} \dot{w} + w^{iv} + kw + \varepsilon w^3 = \hat{F}(x) \cos T \quad (5.38)$$

$$w(0,T) = w''(0,T) = w(1,T) = w''(1,T) = 0 \quad (5.39)$$

şeklindedir. Lineer ve kübik operatörler aşağıdaki formdadırlar.

$$L(w) = w^{iv} + kw, \quad C(w,w,w) = w^3 \quad (5.40)$$

Deplasman w için, denklem (5.3)'teki gibi bir açılım olduğunu varsayarsak, ve sönümlenme, zorlama genliği ve frekansı için, denklem (5.27)'deki gibi bir açılım uygularsak, ε^0 , ε^1 ve ε^2 mertebelerinde sırasıyla denklem (5.5), (5.28) ve (5.31) elde edilir. ε^0 mertebesindeki çözüm w_0 , denklem (5.8)'deki gibidir ve Y fonksiyonu denklem (5.9)'u veya aşağıdaki denklemleri sağlamaktadır.

$$Y^{iv} + (k - \omega^2)Y = 0 \quad (5.41)$$

$$Y(0) = Y''(0) = Y(1) = Y''(1) = 0 \quad (5.42)$$

Yukardaki sistem için çözüm,

$$Y_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) \quad (5.43)$$

$$\omega_n^2 = n^4 \pi^4 + k \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

şeklindedir.

ε^1 mertebesinde çözüm, denklem (5.16) tarafından verilmiştir. ϕ fonksiyonları, denklem (5.17)'yi sağlamaktadır. Böylece,

$$\phi_n^{iv} + (k - 9\omega^2)\phi_n = -2\sqrt{2} \sin^3(n\pi x) \quad (5.45)$$

$$\phi_n(0) = \phi_n''(0) = \phi_n(1) = \phi_n''(1) = 0 \quad (5.46)$$

elde edilir.

Denklem (5.45) ve sınır şartları (5.46)'yı sağlayan çözüm,

$$\phi_n(x) = \frac{3\sqrt{2}}{16(n^4 \pi^4 + k)} \sin(n\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{16(9n^4 \pi^4 - k)} \sin(3n\pi x) \quad (5.47)$$

şeklindedir.

ε^2 mertebesine kadar deplasman fonksiyonunu veren denklem, $T = \Omega t$ dönüşümü ve $A = 1/2 ae^{i\beta}$ polar form, ve denklemler (5.8), (5.16), (5.43) ve (5.47) kullanılarak,

$$w_n^I = a \cos(\Omega t + \beta) \sqrt{2} \sin(n\pi x) + \varepsilon \left\{ \frac{a^3}{4} \cos[3(\Omega t + \beta)] \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{3\sqrt{2}}{16(n^4 \pi^4 + k)} \sin(n\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{16(9n^4 \pi^4 - k)} \sin(3n\pi x) \right] \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (5.48)$$

şeklinde bulunur. α_1 ve α_2 katsayıları, sırasıyla denklem (5.14) ve (5.22) kullanılarak,

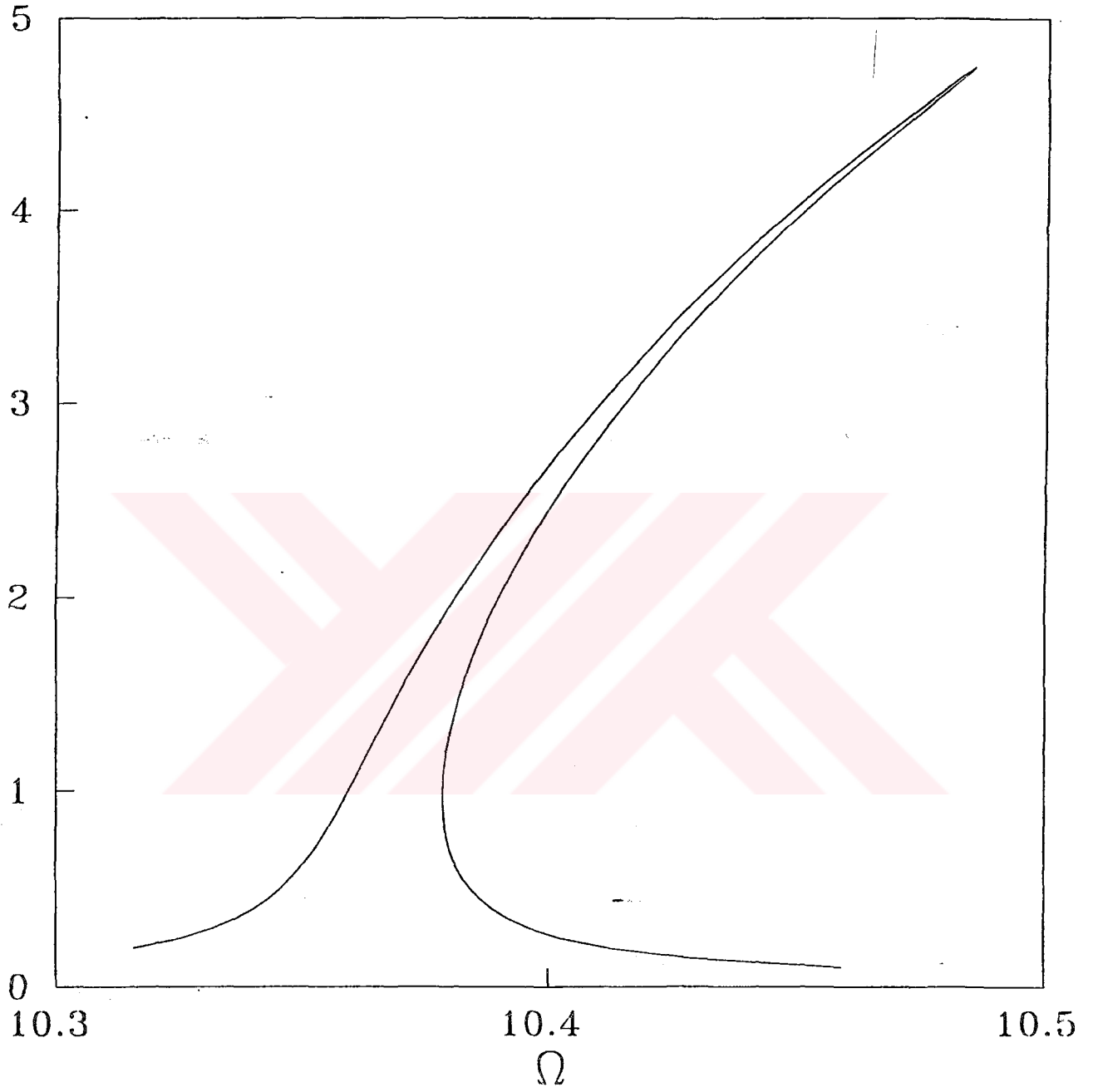
$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{15}{16} \frac{(8n^4 \pi^4 - k)}{(9n^8 \pi^8 + 8n^4 \pi^4 k - k^2)} \quad (5.49)$$

olarak bulunur. Son olarak frekans-tepki denklemi, (5.34)'den aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Omega^2 = (n^4 \pi^4 + k) + \varepsilon \left[\frac{9}{8} a^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{a^2} - \mu_1^2} \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{15}{256} \frac{(8n^4 \pi^4 - k)}{(9n^8 \pi^8 + 8n^4 \pi^4 k - k^2)} a^4 \right] \quad (5.50)$$

Burada, $\mu_1 = \Omega \hat{\mu} / \varepsilon$ şeklindedir.

$n = 1$, $k = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$, ve $\hat{\mu} = 0.004$ parametre değerleri için, denklem (5.50)'nin örnek bir grafik çizimi Şekil-5.1'de verilmiştir.



Şekil – 5.1 Kübik nonlineeriteye sahip örnek uygulama için frekans-tepki grafiği ($n = 1$, $k = 10$,
 $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$, $\hat{\mu} = 0.004$)

5.3. Kuadratik ve Kübik Nonlineerliğe Sahip Denklemler

Bu bölümde, keyfi kuadratik ve kübik nonlineerliğe sahip aşağıdaki genel model üzerinde çalışacağız.

$$\ddot{w} + \hat{\mu}\dot{w} + L(w) + Q(w,w) + C(w,w,w) = \hat{F}(x)\cos\Omega t \quad (5.51)$$

Yukardaki denklemde Q , konuma ait keyfi bir kuadratik diferansiyel ve/veya integral operatördür. Kübik operatör gibi, kuadratik operatör de simetrik değildir. İşlemleri basitleştirmek için, denklem (5.51)'e ait sınır şartlarının lineer, homojen ve zamandan bağımsız olduğu varsayılmıştır. Denklem (5.51), yeni zaman değişkeni $T = \Omega t$ 'ye göre aşağıdaki şekilde yeniden yazılmıştır.

$$\ddot{w} + \bar{\mu}\dot{w} + L(w) + Q(w,w) + C(w,w,w) = \hat{F}\cos T \quad (5.52)$$

Burada, $\bar{\mu} = \Omega\hat{\mu}$ ve (\cdot) yeni zaman değişkeni T 'ye göre türevi ifade etmektedir. Denklem (5.52) için, yine ÇZÖM-I ve ÇZÖM-II kullanılarak, ayrı ayrı çözümler elde edilecektir.

5.3.1. Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-I)

Denklem (5.52) için, üçüncü mertebeye kadar aşağıdaki gibi bir çözüm önerelim.

$$w(x,t;\varepsilon) = \varepsilon w_1(x,T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 w_2(x,T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^3 w_3(x,T_0,T_1,T_2) + \dots \quad (5.53)$$

Burada ε , 1 mertebesinde suni küçük bir parametredir. Bu parametre suni olarak üretildiği için, en sonda, deplasmanların küçük olduğu gözönüne alınarak, 1'e eşitlenebilir. Klasik Çok Zaman Ölçekli Metod ÇZÖM-I'de, zorlama ve sönümlenme aşağıdaki şekilde mertebelendirilebilir.

$$\hat{F} = \varepsilon^3 F, \quad \bar{\mu} = \varepsilon^2 \mu \quad (5.54)$$

Zorlama frekansının tabi frekansa yakınlığı,

$$\Omega^2 = \omega^2 + \varepsilon^2 \sigma \quad (5.55)$$

şeklinde ifade edilir. Burada σ , 1 mertebesinde bir ayar parametresidir. Zaman türevleri, yeni değişkenler cinsinden tanımlanır, denklem (5.53)-(5.55) denklem (5.52)'ye yerleştirilirse, ε 'un kuvvetlerine göre aşağıdaki denklemler elde edilir.

ε^1 mertebesinde

$$\omega^2 D_0^2 w_1 + L(w_1) = 0 \quad (5.56)$$

ε^2 mertebesinde

$$\omega^2 D_0^2 w_2 + L(w_2) = -2\omega^2 D_0 D_1 w_1 - Q(w_1, w_1) \quad (5.57)$$

ε^3 mertebesinde

$$\begin{aligned} \omega^2 D_0^2 w_3 + L(w_3) = & -(2\omega^2 D_0 D_2 + \omega^2 D_1^2 + \sigma D_0^2 + \mu D_0) w_1 \\ & - 2\omega^2 D_0 D_1 w_2 - Q(w_1, w_2) - Q(w_2, w_1) \\ & - C(w_1, w_1, w_1) + F \cos T_0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Bölüm 5.1.1'deki prosedür aynen burada da uygulanırsa, ε^1 mertebesindeki çözüm,

$$w_1 = [A(T_1, T_2)e^{iT_0} + ke]Y(x) \quad (5.59)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, Y fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlamaktadır.

$$L(Y) - \omega^2 Y = 0 \quad (5.60)$$

Denklem (5.59) denklem (5.57)'ye yerleştirilirse, çözülebilirlik şartı $D_1 A = 0$ olarak bulunur. Böylece $A = A(T_2)$ olarak yazılabilir.

ε^2 mertebesindeki çözüm,

$$W_2 = (A^2 e^{2iT_0} + ke)\phi_1(x) + 2A\bar{A}\phi_2(x) \quad (5.61)$$

şeklindedir. ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları, aşağıdaki denklemleri sağlamaktadır.

$$L(\phi_1) - 4\omega^2 \phi_1 = -Q(Y, Y) \quad (5.62)$$

$$L(\phi_2) = -Q(Y, Y) \quad (5.63)$$

ε^3 mertebesinde, bölüm 5.1.1'deki prosedür uygulanırsa, çözülebilirlik şartı,

$$2i\omega^2 D_2 A + (i\mu - \sigma)A + \alpha A^2 \bar{A} - \frac{f}{2} = 0 \quad (5.64)$$

olarak bulunur. Burada α ve f ifadeleri,

$$\alpha = \int_D Y \{Q(Y, \phi_1) + Q(\phi_1, Y) + 2 [Q(Y, \phi_2) + Q(\phi_2, Y)] + 3C(Y, Y, Y)\} dx \quad (5.65)$$

$$f = \int_D Y F dx \quad (5.66)$$

olarak tanımlanmıştır.

$D_1 A = 0$, ve $D_2 A$ denklem (5.64)'ten denklem (5.23)'e yerleştirilip, polar form $A = 1/2 a e^{i\theta}$ şeklinde yazılarak dA/dT sıfıra eşitlenir. Reel ve sanal kısımlar ayrıştırılırsa,

$$\sigma = \frac{1}{4} \alpha a^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{a^2} - \mu^2} \quad (5.67)$$

elde edilir. Böylece frekans-tepki denklemi,

$$\Omega^2 = \omega^2 + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{4} \alpha a^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{a^2} - \mu^2} \right] \quad (5.68)$$

olarak bulunur.

5.3.2. Geliştirilmiş Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM-II)

Bu bölümde, bölüm 5.1.2'deki gibi, sönümlenme ve zorlama frekansına aşağıdaki açılımlar uygulanmıştır.

$$\hat{F} = \varepsilon^2 F_1, \quad \bar{\mu} = \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2, \quad \Omega^2 = \omega^2 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 \quad (5.69)$$

Bu açılımlar, denklem (5.52)'ye yerleştirilip, ε 'un kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse, ε^1 mertebesinde denklem (5.56) elde edilir. w_1 çözümü de, denklem (5.59)'daki gibidir.

ε^2 mertebesinde, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\omega^2 D_0^2 w_2 + L(w_2) = -(2\omega^2 D_0 D_1 + \sigma_1 D_0^2 + \mu_1 D_0) w_1 - Q(w_1, w_1) + \frac{1}{2} (F_1 e^{i\tau_0} + ke) \quad (5.70)$$

Buradaki çözülebilirlik şartı,

$$2i\omega^2 D_1 A + (i\mu_1 - \sigma_1) A - \frac{f_1}{2} = 0 \quad (5.71)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada,

$$f_1 = \int_D Y F_1 dx \quad (5.72)$$

şeklindedir. Bu mertebede konuma ait ifadeler, yine denklem (5.61)-(5.63) tarafından verilmektedir.

Bölüm 5.1.2'deki prosedür aynen uygulanır, $D_1 A$ sifira eşitlenip, polar form $A=1/2ae^{i\beta}$ yerleştirilir ve reel ve sanal kısımlar ayrıştırılırsa,

$$\sigma_1 = \pm \sqrt{\frac{f_1^2}{a^2} - \mu_1^2} \quad (5.73)$$

olarak bulunur.

ε^3 mertebesindeki çözülebilirlik şartı,

$$2i\omega^2 D_2 A + (i\mu_2 - \sigma_2)A + \alpha A^2 \bar{A} = 0 \quad (5.74)$$

şeklindedir. Burada α , denklem (5.65) tarafından verilmektedir.

Düzgün rejim çözümleri için, $D_2 A$ sıfıra eşitlenir, polar form $A = 1/2 ae^{i\theta}$ yerleştirilir ve reel ve sanal kısımlar ayrıştırılırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}\alpha a^2, \quad \mu_2 = 0 \quad (5.75)$$

Son olarak, σ_1 ve σ_2 frekans açılımı (5.69)'a yerleştirilir ve aşağıdaki frekans-tepki denklemi elde edilir.

$$\Omega^2 = \omega^2 \pm \varepsilon \sqrt{\frac{f_1^2}{a^2} - \mu_1^2} + \varepsilon^2 \frac{1}{4}\alpha a^2 \quad (5.76)$$

Rahman ve Burton (1989)'da $D_1 A = 0$ olduğunda, ÇZÖM-I ve ÇZÖM-II'nin aynı sonuçları verdiğinden bahsedilmiştir. Bu durum, her iki metotta verilen frekans açılımları, yani denklem (5.68) ve denklem (5.76) karşılaştırıldığında görülmektedir. Eğer zorlama ve sönümlenme terimleri aşağıdaki gibi eşitlenirse, denklem (5.68) denklem (5.76)'ya dönüşecektir.

$$\varepsilon^2 f_1 = \varepsilon^3 f, \quad \varepsilon \mu_1 = \varepsilon^2 \mu \quad (5.77)$$

Denklem (5.68)'de $f = f_1/\varepsilon$ ve $\mu = \mu_1/\varepsilon$ yazılırsa, denklem (5.76) elde edilir.

5.4. ÇZÖM-II İçin Bir Uygulama

Bu bölümde, ÇZÖM-II ile genel çözüm prosedürünü göstermek için, aşağıdaki boyutsuz hareket denklemi ve denkleme ait sınır koşulları gözönüne alınmıştır.

$$\Omega^2 \ddot{w} + \bar{\mu} \dot{w} - w'' + \delta w^2 + \gamma w'^2 w'' = \hat{F}(x) \cos T \quad (5.78)$$

$$w(0,T) = w(1,T) = 0 \quad (5.79)$$

Yukardaki denklem, nonlinear kablo titreşimlerini modelleyebilir. Kübik nonlinearite, Mote (1966)'da verilen ile benzerdir. Referansda verilen sisteme, kuadratik bir nonlinearite eklenmiştir. Önceki bölümlerde verilen formülasyon uygulanarak, operatörler aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$L(w) = -w'', \quad Q(w,w) = \delta w^2, \quad C(w,w,w) = \gamma w^2 w'' \quad (5.80)$$

Denklem (5.53)'de tanımlanan şekilde, deplasman fonksiyonu için bir açılım ve zorlama, sönümlenme ve zorlama frekansı için de, denklem (5.69)'daki şekilde açılımlar uygulanırsa, ε^1 mertebesinde, aşağıdaki özdeğer-özfonksiyon problemi elde edilir.

$$Y'' + \omega^2 Y = 0 \quad (5.81)$$

$$Y(0) = Y(1) = 0 \quad (5.82)$$

Yukardaki problem için çözüm,

$$Y_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) \quad (5.83)$$

$$\omega_n = n\pi \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.84)$$

şeklindedir.

ε^2 mertebesindeki çözüm, denklem (5.61) tarafından verilmiştir. ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları, sırasıyla denklem (5.62) ve (5.63)'ü sağlarlar. Böylece,

$$\phi_{1n}'' + 4n^2\pi^2\phi_{1n} = 2\delta\sin^2(n\pi x) \quad (5.85)$$

$$\phi_{1n}(0) = \phi_{1n}(1) = 0 \quad (5.86)$$

$$\phi_{2n}'' = 2\delta\sin^2(n\pi x) \quad (5.87)$$

$$\phi_{2n}(0) = \phi_{2n}(1) = 0 \quad (5.88)$$

elde edilir. Yukardaki denklemlerin çözümleri,

$$\phi_{1n}(x) = \delta \left[\frac{1 - \cos 2n\pi x}{4n^2\pi^2} - \frac{x \sin 2n\pi x}{4n\pi} \right] \quad (5.89)$$

$$\phi_{2n}(x) = \delta \left[\frac{\cos 2n\pi x - 1}{4n^2\pi^2} + \frac{x(x-1)}{2} \right] \quad (5.90)$$

şeklindedir.

Deplasman fonksiyonu, gerçek değişkenler cinsinden,

$$w_n = a \cos(\Omega t + \beta) \sqrt{2} \sin(n\pi x) + \frac{a^2}{2} [\cos(2\Omega t + 2\beta) \phi_{1n} + \phi_{2n}] + O(\varepsilon^3) \quad (5.91)$$

şeklindedir. Buradaki ϕ_{1n} ve ϕ_{2n} fonksiyonları, denklem (5.89) ve (5.90)'da verilmiştir. ε suni bir parametre olduğu için, bu aşamada 1'e eşitlenebilir. Yukardaki çözüm, küçük deplasmanlar için geçerlidir.

Frekans-tepki ilişkisini bulmak için, denklem (5.65)'de tanımlanan α katsayısını hesaplamamız gerekmektedir. Kuadratik ve kübik operatörlerin özel formları yerleştirilirse,

$$\alpha = \int_0^1 [2\delta Y^2(\phi_1 + 2\phi_2) + 3\gamma Y Y'^2 Y''] dx \quad (5.92)$$

integrali hesaplandıktan sonra,

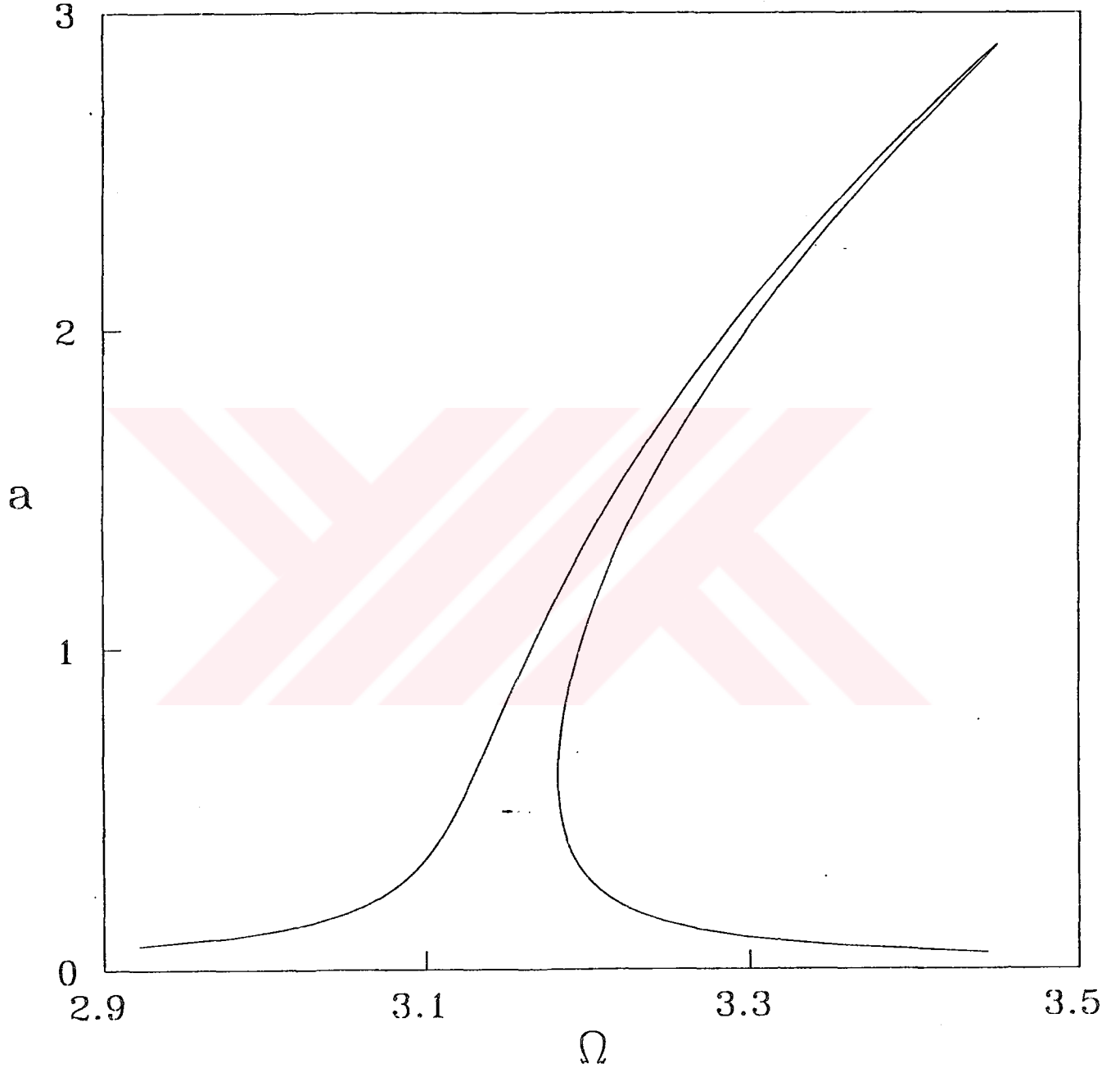
$$\alpha = -2\delta^2 \left(\frac{25}{32n^2\pi^2} + \frac{1}{6} \right) - \frac{3}{2} \gamma n^4 \pi^4 \quad (5.93)$$

olarak elde edilir. Frekans-tepki denklemi ise,

$$\Omega^2 = n^2\pi^2 \pm \varepsilon \sqrt{\frac{f_1^2}{a^2} - \mu_1^2} + \varepsilon^2 \frac{1}{4} \alpha a^2 \quad (5.94)$$

olarak bulunur.

$n = 1$, $\varepsilon = 1$, $f_1 = 0.1$, $\hat{\mu} = 0.01$, ve $\alpha = 0.9695$ (α 'yı hesaplarken $\delta = 1$, ve $\gamma = 0.01$ olarak alınmıştır.) parametre değerleri için denklem (5.94)'ün örnek bir grafik çizimi Şekil-5.2'de verilmiştir.



Şekil – 5.2 Kuadratik ve kübik nonlineeriteye sahip örnek uygulama için frekans-tepki grafiği

($n = 1$, $\varepsilon = 1$, $f_1 = 0.1$, $\hat{\mu} = 0.01$, $\alpha = 0.9695$)

5.5. Özet

Sürekli sistemlerin geniş bir kısmını modelleyen, iki genel nonlinear kısmi diferansiyel denklem ele alınmıştır. Çok Zaman Ölçekli Metodun iki değişik versiyonu (ÇZÖM-I ve ÇZÖM-II) kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Kübik nonlineariteye sahip ilk model için, ÇZÖM-II ÇZÖM-I'e göre daha hassas sonuçlar üretmektedir. Kuadratik ve kübik nonlineariteye sahip ikinci modelde, ÇZÖM-I ve ÇZÖM-II'nin ürettiği sonuçlar aynıdır. Önceki bölümlerde olduğu gibi bu bölümde de, diskritizasyon-perturbasyon metoduna göre daha hassas sonuçlar üreten direkt-perturbasyon metodu kullanılmıştır. Önerilen nonlinear modeller için genel çözüm algoritmaları geliştirilmiş ve bu algoritmalar özel problemlere uygulanmıştır.

Rahman ve Burton'da (1989) bahsedildiği gibi, kompleks genlikler (A) ilk yavaş zaman değişkeni T_1 'e bağımlı olduğunda, yüksek mertebeden perturbasyon açılımlarında ÇZÖM-I fiziksel olmayan bazı ekstra sonuçlar vermektedir (Bölüm 5.1). Buna karşılık, kompleks genlikler T_1 'den bağımsız olduğunda ise, her iki metod düzgün rejim çözümleri için aynı sonuçları vermektedir (Bölüm 5.3).

Sonuç olarak, kısmi diferansiyel sistemlerde düzgün rejim çözümlerini bulmak için, ÇZÖM-II'nin direkt-perturbasyon metoduyla birlikte kullanılması önerilmektedir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde elde edilen sonuçlar, aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

- i. Sürekli ortam titreşimleri, zorlama ve sönüm terimini de içeren boyutsuz kısmi diferansiyel denklemlerle genel halde modellenmiştir. Sınır şartları, lineer, homojen ve zamandan bağımsız alınmıştır.
- ii. Denklemlerdeki lineer kısım keyfi self-adjoint lineer, nonlinear kısım ise simetrik olmayan keyfi kuadratik ve kübik operatörlerle ifade edilmiştir. Bütün operatörler, konuma bağlı diferansiyel ve/veya integral formda alınmıştır.
- iii. Yaklaşık analitik çözümler bulmak için, bir perturbasyon metodu olan Çok Zaman Ölçekli Metod, kısmi diferansiyel denklemlere direkt olarak uygulanmıştır.
- iv. Zorlama frekansının tabi frekanslardan birine yakın olduğu baskın rezonans, ardından ikincil rezonanslardan üçte bir ve ikide bir altharmonik rezonanslar, üçüncü derece süperharmonik rezonanslar ve toplama tipi kombinasyon rezonanslar için genel çözümler bulunmuştur.
- v. Uygulanan yöntemle bir algoritma oluşturulmuş, özel problemlerde sonuç bulabilmek için izlenecek yol açık bir şekilde gösterilmiştir. Ayrıca uygulama olarak, örnek bir problem için çözümler elde edilmiştir.
- vi. Düzlem içi titreşim analizine ilaveten, düzlem dışı titreşimi de kapsayacak şekilde etkileşimli (coupled) genel denklemlerde, baskın ve bire bir iç rezonans durumu için aynı yöntemle genel çözümler bulunmuştur. Oluşturulan algoritma, örnek bir problem üzerine uygulanarak, çözümler elde edilmiştir.
- vii. Keyfi kübik nonlinearite ve keyfi kuadratik ve kübik nonlineariteye sahip iki genel kısmi diferansiyel denklemde, Çok Zaman Ölçekli Metod'un iki değişik versiyonu (klasik ve Rahman-Burton) baskın rezonans durumu için uygulanmış ve aralarındaki farklar belirlenmiştir. Rahman-Burton versiyonunun, her iki tip denklem için örnek birer uygulaması yapılmıştır. Geçiş çözümlerinin bulunması için, Rahman-Burton versiyonunun kullanmasının klasik versiyona göre daha iyi olduğu bulunmuştur.
- viii. Çok farklı problemler için, geliştirilen algoritmalar kullanılarak, çözümler bulunabileceği gösterilmiştir.

Bu tezde yapılan çalışmanın geliştirilmesi için, yapılması gerekenler aşağıda verilmiştir.

- i. Sınır şartlarının keyfi nonlineer, homojen olmayan ve zamanla bağımlı olduğu durumlar için, aynı prosedür uygulanarak genel çözümler bulunabilir.
- ii. Sadece ivme ve sönüm terimi zamana bağımlı verilmiştir. Bunun yanında, diğer terimler için de zamana bağımlılık, farklı bir notasyon geliştirilerek sağlanabilir, buna göre çözümler üretilebilir.
- iii. Etkileşimli (coupled) denklemlerde, bire bir haricindeki diğer iç rezonanslar ve ikincil rezonanslar için çözümler üretilebilir.
- iv. Geliştirilen algoritmalar, Mathematica, Matlab, Reduce gibi sembolik işlem yapan paket programlara uyarlanıp, bilgisayarla problem çözümleri geliştirilebilir.
- v. Kuadratik ve kübik nonlineeriteler dışındaki diğer tip nonlineeriteler içeren denklemler için de benzer algoritmalar geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Abou-Rayan, A. M., Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., 1993. Nonlinear response of a parametrically excited buckled beam, *Nonlinear Dynamics*, 4, 499-525.
2. Boyacı, H., and Pakdemirli, M., 1997. A comparison of different versions of the method of multiple scales for partial differential equations, *Journal of Sound and Vibration*, 204(4), 595-607.
3. Lee, C. L., and Perkins, N. C., 1992. Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, 3, 465-490.
4. Mote, C. D., Jr, 1966. On the nonlinear oscillation of an axially moving string, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 33, 463-464.
5. Nayfeh, A. H., 1975. Nonlinear propagation of a wave packet in a hard-walled circular duct. *Journal of the Acoustical Society of America* 57, 803-809.
6. Nayfeh, A. H., 1981. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley-Interscience, New York: 388-471.
7. Nayfeh, A. H., and Asfar, K. R., 1986. Response of a bar constrained by a non-linear spring to a harmonic excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 105, 1-15.
8. Nayfeh, A. H., and Bouguerra, H., 1990. Non-linear response of a fluid valve, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 25, 433-449.
9. Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., 1979. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience, New York.
10. Nayfeh, A. H., and Nayfeh, S. A., 1994. On nonlinear modes of continuous systems. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 116, 129-136.
11. Nayfeh, A. H., and Nayfeh, S. A., 1995. Nonlinear normal modes of a continuous system with quadratic nonlinearities, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 117, 199-205.
12. Nayfeh, A. H., Nayfeh, J. F., and Mook, D. T., 1992. On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Nonlinear Dynamics*, 3, 145-162.

13. Nayfeh, A. H., Nayfeh, S. A., and Pakdemirli, M., 1995. On the discretization of weakly nonlinear spatially continuous systems, *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics* N.S. Namachchivaya and W. Kliemann editors. Boca Raton: CRC Press, 175-200.
14. Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., 1990. Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 25, 455-474.
15. Pakdemirli, M., 1994. A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Mechanics Research Communications*, 21(2), 203-208.
16. Pakdemirli, M., and Boyacı, H., 1995. Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for non-linear vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 186(5), 837-845.
17. Pakdemirli, M., and Boyacı, H., 1996. Vibrations of continuous systems having arbitrary quadratic and cubic nonlinearities, *Applied Mechanics and Engineering*, 3, 445-463.
18. Pakdemirli, M., and Boyacı, H., 1997. The direct-perturbation method versus the discretization-perturbation method: Linear systems, *Journal of Sound and Vibration*, 199(5), 825-832.
19. Pakdemirli, M., and Ulsoy, A. G., 1997. Stability analysis of an axially accelerating string, *Journal of Sound and Vibration*, 203(5), 815-832.
20. Pakdemirli, M., Nayfeh, S. A., and Nayfeh, A. H., 1995. Analysis of one-to-one autoparametric resonances in cables-discretization versus direct treatment, *Nonlinear Dynamics*, 8, 65-83.
21. Rahman, Z., and Burton, D. T., 1989. On higher order methods of multiple scales in nonlinear oscillations-periodic steady state response, *Journal of Sound and Vibration*, 133(3), 369-379.
22. Raouf, R. A., and Nayfeh, A. H., 1990. One-to-one autoparametric resonances in infinitely long cylindrical shells, *Computers and Structures*, 35, 163-173.

ÖZGEÇMİŞ

- Doğum Tarihi : 2 Mayıs 1967
- Doğum Yeri : Ankara
- Haziran 1985 : Bursa Anadolu Lisesi'nden mezuniyet
- Ağustos 1990 : İstanbul Boğaziçi Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü lisans programından, makina mühendisi olarak mezuniyet
- Nisan 1992 – Ekim 1994 : İstanbul Teknik Üniversitesi Nükleer Enerji Enstitüsü Nükleer Bilimler Anabilim Dalı'nda araştırma görevliliği
- Ocak 1994 : İstanbul Teknik Üniversitesi Nükleer Enerji Enstitüsü Nükleer Enerji programından, yüksek mühendis olarak mezuniyet
- Şubat 1994 – : Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Anabilim Dalı'nda doktora programına başlama
- Kasım 1994 – : Manisa Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'nda araştırma görevliliğine başlama