

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ – FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAREKETLİ ŞERİT VE KİRİŞ TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

Makina Yüksek Mühendisi Erdoğan ÖZKAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8.11.1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 29.12.1999

Tez İzleme Komitesi :Doç. Dr. Mehmet Pakdemirli (CBÜ)
Prof. Dr. Mehmet Tekelioğlu (CBÜ)
Doç. Dr. Nurdoğan Can (CBÜ)
Diğer Jüri Üyeleri :Doç. Dr. Gazanfer Ünal (İTÜ)
Doç. Dr. A. Saide Sargül (DEÜ)

MANİSA 1999

Y.C. BİLİM KÖÇRETİM KURULU
İNFORMASYON MERKEZİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	xii
TEŞEKKÜR	xiii
ÖZET	xiv
ABSTRACT	xv
1. GİRİŞ	1
2. HAREKET DENKLEMLERİ	4
2.1 Hareket Denklemlerinin Hamilton Prensipli ile Çıkarılması	4
2.2 Hareket Denklemlerinin Boyutsuzlaştırılması	8
3. EKSENEL HAREKETLİ ŞERİT PROBLEMİ	11
3.1 Lie Grup Teorisi	11
3.2 Tam Çözümlerin Bulunması	18
3.2.1 Keyfi Hız	19
3.2.2 Sabit Hız	21
3.2.3 Sabit İvmeli Hız	24
3.2.4 Harmonik Hız	26
3.2.5 Ekspansiyonel Hız	28
3.3 Sınır Değer Problemleri	30
3.3.1 Sabit Hız	30
3.3.2 Harmonik Hız	32
3.3.3 Ekspansiyonel Hız	33
3.4 Sayısal Örnekler	34
4. EKSENEL HAREKETLİ ESNEK KİRİŞ PROBLEMİ	48
4.1 Harmonik Hız	49
4.1.1 Dış Açılım Çözümü	49
4.1.2 Basit-Basit Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri	54
4.1.3 Basit-Basit Mesnet İçin Kompozit Çözüm	58
4.1.4 Ankastre-Ankastre Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri	59
4.1.5 Ankastre-Ankastre Mesnet İçin Kompozit Çözüm	60
4.2 Ekspansiyonel Hız	61
4.2.1 Dış Açılım Çözümü	62
4.2.2 Basit-Basit Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri	63
4.2.3 Basit-Basit Mesnet İçin Kompozit Çözüm	63

4.2.4	Ankastre-Ankastre Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri	64
4.2.5	Ankastre-Ankastre Mesnet İçin Kompozit Çözüm	64
4.3	Sayısal Örnekler	65
5.	EKSENEL HAREKETLİ KİRİŞ PROBLEMİ	75
5.1	Lie Grup Teorisi	75
5.2	Tam Çözümlerin Bulunması	80
5.2.1	Keyfi Hız	80
5.2.2	Sabit Hız	82
5.2.3	Sabit İvmeli Hız	84
5.2.4	Harmonik Hız	85
5.2.5	Eksponansiyel Hız	87
5.3	Sınır Değer Problemleri	89
5.3.1	Sabit Hız	89
5.3.2	Harmonik Hız	91
5.3.3	Eksponansiyel Hız	93
5.4	Sayısal Örnekler	94
6.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	112
7.	KAYNAKLAR	114
	ÖZGEÇMİŞ	

SEMBOL LİSTESİ

A	: Kirişin kesit alanı
E	: Elastisite modülü
I	: Kütle atalet momenti
L	: Kiriş uzunluğu
\mathcal{L}	: Lagrangian
Ω	: Hız değişim frekansı
P^*	: Eksenel yük
T	: Kinetik enerji
U	: Potansiyel enerji
u^*	: Boyuna yer değiştirme
y^*	: Enine yer değiştirme
v^*	: Sürekli ortamın eksenel hızı
e	: Şekil değiştirme
ρ	: Sürekli ortamın yoğunluğu
δ	: Varyasyon
t^*	: Boyutlu zaman değişkeni
x^*	: Boyutlu mekan değişkeni
v_b	: Boyuna direngenlik
v_f	: Enine direngenlik
$X^{(n)}$: n. mertebeye genelleştirilmiş infinitesimal jeneratör
$\xi_1, \xi_2, \eta_{1,2,\dots,n}, \mu$: İnfinitesimal jeneratör bileşenleri
P	: Eşdeğerlik operatörünün projeksiyonu
v_1	: Hız değişim genliği
v_0	: Sürekli ortamın ortalama hızı
A_n	: Kompleks genlik
A_0	: Titreşim genliğini
T_0, T_1	: Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri
D_0, D_1	: Hızlı ve yavaş zaman ölçeklerine göre türevler
$\frac{d}{dt}$: Zamana göre türev

$\frac{d}{dx}$: Mekana göre türev
dx^*	: Kirişten alınan uzamamış parça
ds^*	: Kirişten alınan uzamış parça
ε	: Perturbasyon parametresi
n	: Mod sayısı
y^o	: Dış açılım çözümü
y_0^o, y_1^o	: Dış açılımın 1 ve ε mertebesi çözümleri
ω	: Tabii frekans
ω_{nl}	: Esnek kiriş için nonlineer frekans
Y_n	: Yer değiştirmenin mekana ait fonksiyonları
ϕ_n	: Yer değiştirme fonksiyonunun seküler terimleri ile ilgili kısımları
W	: Yer değiştirme fonksiyonunun seküler olmayan terimleri ile ilgili kısımları
u_n	: Mekana bağlı keyfi fonksiyonlar
C_n	: Yer değiştirme fonksiyonlarına ait katsayılar
k_0	: Nonlineer frekansın ε mertebesindeki kısmı
y^i	: $x=0$ noktasındaki iç açılım çözümü
y_0^i, y_1^i, y_2^i	: $x=0$ noktasındaki iç açılımın 1, $\varepsilon^{1/2}$ ve ε mertebelerindeki çözümleri
y^l	: $x=1$ noktasındaki iç açılım çözümü
y_0^l, y_1^l, y_2^l	: $x=1$ noktasındaki iç açılımın 1, $\varepsilon^{1/2}$ ve ε mertebelerindeki çözümleri
ξ	: Benzerlik değişkeni
f	: Benzerlik fonksiyonu
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$: Benzerlik fonksiyonun kökleri
c_1, c_2, c_3, c_4	: Çözüm fonksiyonunun katsayıları
ζ	: $x=0$ noktası civarındaki iç açılım koordinatı
κ	: $x=1$ noktası civarındaki iç açılım koordinatı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Eksenel hareketli sürekli ortam	4
Şekil 2.2. Eksenel hareketli sürekli ortam üzerinden alınan parçadaki yer değişimleri	4
Şekil 3.1. Sinüzoidal hareketli şerit için 1. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	36
Şekil 3.2. Sinüzoidal hareketli şerit için 2. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	36
Şekil 3.3. $t=5$ durumunda eksenel hareketli şerit için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	37
Şekil 3.4. $t=5$ durumunda sinüzoidal hareketli şerit için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	37
Şekil 3.5. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	38
Şekil 3.6. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	38
Şekil 3.7. $x=1$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	39
Şekil 3.8. $x=1$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	39
Şekil 3.9. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	40
Şekil 3.10. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)	40
Şekil 3.11. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için hız değişim frekansı - deplasman grafiği (1.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $t=5$, $C=1$)	41
Şekil 3.12. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için hız değişim frekansı - deplasman grafiği (2.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $t=10$, $C=1$)	41
Şekil 3.13. Eksponansiyel hareketli şerit için 1. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.4$, $\alpha=10$, $C=1$)	42
Şekil 3.14. Eksponansiyel hareketli şerit için 2. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.4$, $\alpha=10$, $C=1$)	42
Şekil 3.15. $t=1$ durumunda eksponansiyel hareketli şerit için 1.mod deplasman grafiği ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)	43
Şekil 3.16. $t=1$ durumunda eksponansiyel hareketli şerit için 1.mod deplasman grafiği ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)	43

Şekil 3.17. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.1, \alpha=2, C=1$)	44
Şekil 3.18. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.1, \alpha=2, C=1$)	44
Şekil 3.19. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.1, \alpha=2, C=1$)	45
Şekil 3.20. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.1, \alpha=2, C=1$)	45
Şekil 3.21. $x=0.5$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.1, \alpha=2, C=1$)	46
Şekil 3.22. $x=0.2$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.1, \alpha=2, C=1$)	46
Şekil 3.23.: α katsayısının değişimi ile deplasman değişim grafiği (1. mod) ($v_0=0.4, x=0, t=0.5, C=1$)	47
Şekil 3.24. α katsayısının değişimi ile deplasman değişim grafiği (2. mod) ($v_0=0.4, x=0, t=0.5, C=1$)	47
Şekil 4.1. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği ($A_0=1, n=1, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	67
Şekil 4.2. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği ($A_0=1, n=1, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	67
Şekil 4.3. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği ($A_0=1, n=2, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	68
Şekil 4.4. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği ($A_0=1, n=2, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	68
Şekil 4.5. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1, n=1, v_0=0.6, v_1=0.1, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	69
Şekil 4.6. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği ($A_0=1, n=1, v_0=0.6, v_1=0.1, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	69
Şekil 4.7. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1, n=2, v_0=0.6, v_1=0.1, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.05$)	70
Şekil 4.8. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği ($A_0=1, n=2, v_0=0.6, v_1=0.1, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.05$)	70

Şekil 4.9. Ekspansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1, n=1, v_0=0.5, \alpha=2, v_f=0.2, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	71
Şekil 4.10. Ekspansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği ($A_0=1, n=1, v_0=0.5, \alpha=2, v_f=0.2, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	71
Şekil 4.11. Ekspansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1, n=2, v_0=0.5, \alpha=5, v_f=0.2, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	72
Şekil 4.12. Ekspansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği ($A_0=1, n=2, v_0=0.5, \alpha=5, v_f=0.2, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1$)	72
Şekil 4.13. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1, n=1, v_0=0.1, \alpha=5, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.01$)	73
Şekil 4.14. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği. ($A_0=1, n=1, v_0=0.1, \alpha=5, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.01$)	73
Şekil 4.15. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1, n=2, v_0=0.1, \alpha=5, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.01$)	74
Şekil 4.16. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği. ($A_0=1, n=2, v_0=0.1, \alpha=5, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.01$)	74
Şekil 5.1. Sinüzoidal hareketli kiriş için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=5, C=1$)	96
Şekil 5.2. Sinüzoidal hareketli kiriş için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	96
Şekil 5.3. $t=3$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=5, C=1$)	97
Şekil 5.4. $t=1$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	97
Şekil 5.5. $t=3$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 1. mod moment grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=5, C=1$)	98
Şekil 5.6. $t=1$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 2. mod moment grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	98
Şekil 5.7. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli kiriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	99
Şekil 5.8. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli kiriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi (2.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	99

Şekil 5.9. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için momentin zamana bağlı olarak değişimi (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	100
Şekil 5.10. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için momentin zamana bağlı olarak değişimi (2.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	100
Şekil 5.11. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	101
Şekil 5.12. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi (2.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)	101
Şekil 5.13. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için hız değişim frekansı - deplasman grafiği (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, t=3, C=1$)	102
Şekil 5.14. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için hız değişim frekansı - deplasman grafiği (2.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, t=3, C=1$)	102
Şekil 5.15. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için hız değişim frekansı - moment grafiği (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, t=3, C=1$)	103
Şekil 5.16. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için hız değişim frekansı - moment grafiği (2.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, t=3, C=1$)	103
Şekil 5.17. Ekspansiyel hareketli giriş için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	104
Şekil 5.18. Ekspansiyel hareketli giriş için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	104
Şekil 5.19. $t=0.2$ anında ekspansiyel hareketli giriş için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	105
Şekil 5.20. $t=0.2$ anında ekspansiyel hareketli giriş için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	105
Şekil 5.21. $t=0.2$ anında ekspansiyel hareketli giriş için 1. mod moment grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	106
Şekil 5.22. $t=0.2$ anında ekspansiyel hareketli giriş için 2. mod moment grafiği ($v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	106
Şekil 5.23. $x=0$ noktasında ekspansiyel hareketli giriş için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	107
Şekil 5.24. $x=0$ noktasında ekspansiyel hareketli giriş için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	107
Şekil 5.25. $x=0$ noktasında ekspansiyel hareketli giriş için 1. mod moment grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	108

Şekil 5.26. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için 2. mod moment grafiği ($v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	108
Şekil 5.27. $x=0.5$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için zamana bağlı deplasman grafiği (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	109
Şekil 5.28. $x=0.5$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için zamana bağlı deplasman grafiği (2.mod) ($v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)	109
Şekil 5.29. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı deplasman grafiği (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, t=0.2, C=1$)	110
Şekil 5.30. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı deplasman grafiği (2.mod) ($v_0=0.1, v_f=0.1, t=0.2, C=1$)	110
Şekil 5.31. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı moment grafiği (1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, t=0.2, C=1$)	111
Şekil 5.32. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı moment grafiği (2.mod) ($v_0=0.1, v_f=0.1, t=0.2, C=1$)	111

KISALTMA LİSTESİ

- k.e. : Kompleks eşlenik
S.O.T. : Seküler olmayan terimler
D.Ç. : Dış açılım çözümü
K.Ç. : Kompozit çözüm



TEŞEKKÜR

Bu çalışmada büyük yardımlarını gördüğüm ve bilimsel hayatımda örnek aldığım, saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ' ye, hayatım boyunca bana en büyük desteği sağlayan anne ve babama ve sürekli yanımda olup bana yardımcı olan eőime teşekkür ederim. Ayrıca bu alıőma MISAG-119 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.



ÖZET

Bu çalışmada değişken hızlı eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri incelenmiştir. Bölüm 2' de Hamilton prensibi kullanılarak eksenel hareketli şerit ve kiriş için hareket denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri boyutsuzlaştırılarak, denklemlerin kullanılan malzemenin cinsine ve boyutlarına olan bağımlılıkları ortadan kaldırılmıştır. Daha sonra bu hareket denklemleri kullanılarak şerit, esnek kiriş ve kiriş için çözümler elde edilmiştir.

Bölüm 3' de eksenel hareketli şerit denklemi ele alınmıştır. Elde edilen denklemin çözümü için Lie Grup teorisi kullanılmıştır. Şerit hızı keyfi kabul edildiği için Lie Grup teorisi ile birlikte eşdeğerlik dönüşümleri de uygulanmıştır. Önce denkleme ait simetritler elde edilmiştir. Elde edilen simetritler kullanılarak değişik hız fonksiyonları için tam çözümler üretilmiştir. Şerit hızı keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonu olmak üzere değişik formlarda ele alınmıştır. Daha sonra bazı hız değişkenleri için elde edilen tam çözümlerden sınır şartlarını sağlayabilecek çözümler ele alınmış ve bu çözümlere sınır şartları uygulanmıştır. Böylece sınır şartlarını yaklaşık sağlayan çözümler elde edilmiştir.

Bölüm 4' de esnek kiriş problemi ele alınmıştır. Bu bölümde kirişin eğilme direngenliği küçük kabul edilerek esnek kiriş denklemi elde edilmiştir. Elde edilen bu denklem Matched Asymptotic Expansions metodu kullanılarak çözülmüştür. Çözüm için önce perturbasyon metodlarından çok zaman ölçekli metod kullanılarak dış açılım çözümü elde edilmiştir. Bu dış açılım çözümünün uç noktalarda bazı sınır şartlarını sağlamadığı görülmüştür. Bu problemi ortadan kaldırmak için uç noktalara yakın yerlerde ikinci bir açılım daha yapılarak iç açılım çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra bu çözümler birleştirilerek bütün sınır şartlarını yaklaşık sağlayan kompozit çözümler elde edilmiştir. Bu problem sınır şartlarının basit-basit ve ankastre-ankastre olma durumları için ayrı ayrı çözülmüştür. Hız değişimi olarak ise harmonik değişen hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonları ele alınmıştır.

Bölüm 5' de eksenel hareketli kiriş problemi incelenmiştir. Elde edilen kiriş denkleminin çözümü için şerit probleminde olduğu gibi Lie grup teorisi kullanılmıştır. Hız fonksiyonu yine keyfi olarak kabul edilmiş ve bu nedenle Lie grup teorisi eşdeğerlik dönüşümleri ile birlikte kullanılarak denkleme ait simetritler elde edilmiştir. Bu simetritler kullanılarak değişik hız fonksiyonlarına sahip eksenel hareketli kiriş için tam çözümler elde edilmiştir. Kiriş hızı şerit probleminde olduğu gibi keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonu olmak üzere değişik formlarda ele alınmıştır. Daha sonra elde ettiğimiz tam çözümlerden sınır şartlarını sağlayabilecek çözümler ele alınmış ve her iki ucundan basit olarak mesnetli kiriş için sınır şartlarını yaklaşık sağlayan çözümler elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this study, vibrations of axially moving continua are investigated. In chapter 2, the equations of motion for axially traveling string and beam are derived using Hamilton's Principle. Dependence of equations on type and dimensions of the material used is eliminated by nondimensionalizing the equations of motion. Then the solutions are obtained for string, slender beam and beam by using these equations.

In chapter 3, the string problem is considered. Lie Group Theory is used to solve the equation. Since the string velocity is assumed to be arbitrary, Equivalence Transformation is applied with the Lie Group Theory. The symmetries of the equation are obtained. By using these symmetries exact solutions are found for various velocity functions. Axial velocity is considered in different forms such as arbitrary velocity, constant velocity, constant acceleration velocity, harmonically varying velocity, and exponentially varying velocity. Then, of the exact solutions obtained for various velocity parameters, those that would satisfy the boundary conditions approximately are selected and the boundary conditions are applied to these solutions. Thus approximate solutions satisfying the boundary conditions are obtained.

In chapter 4, the flexible beam problem is considered. The equation is obtained by assuming small flexural rigidity. This equation is solved by using the Method of Matched Asymptotic Expansions. First, the outer expansion solution is obtained using the Method of Multiple Scales, a perturbation technique. It is observed that this outer expansion solution does not satisfy some of the boundary conditions for some extreme points. In order to eliminate this problem, inner expansion solutions are obtained by making a second expansion in the neighborhood of extreme points. Then these solutions are combined to obtain composite solutions approximately satisfying all the boundary conditions. The problem is solved for simple-simple and fixed-fixed boundary conditions. Harmonically varying velocity and exponentially varying velocity cases are considered.

In chapter 5, axially moving beam problem is considered. Lie Group Theory is also used for the solution of beam equation. Velocity function is assumed to be arbitrary and thus symmetries of the equation are obtained by using the Lie Group Theory combined with Equivalence Transformations. By using these symmetries, exact solutions are found for an axially moving beam. Beam velocity is considered in different forms such as arbitrary velocity, constant velocity, constant acceleration velocity, harmonically varying velocity, and exponentially varying velocity. Then, of the exact solutions obtained, those that would satisfy the boundary conditions are selected and approximate solutions for simply supported beam are obtained.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri incelenmiştir. Eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri teknolojide önemli bir yer tutmaktadır. Yüksek hızlı manyetik ve kağıt şeritler, cam elyaflar, akışkan taşıyan borular, kayışlar, iplikler, motorlu testere bıçakları, zincirler ve kirişler teknolojik uygulamalara bazı örneklerdir. Değişken eksenel hızla hareket eden sürekli ortamlarla ilgili hareket denklemini ilk olarak Miranker (1960) elde etmiştir. Mote (1975) harmonik zorlanan eksenel ivmeli şerit problemini inceledi. Ulsoy et al. (1978) ve Wickert ve Mote (1988) yaptıkları tarama makalelerinde yüzlerce makaleye atıfta bulunmuşlardır. Wickert ve Mote (1990) hareketli şerit ve kirişlerin enine titreşimlerini incelemişlerdir. Çalışmalarında sabit hızla hareket eden şerite ait özfonksiyonları kullanarak ortogonal bir baz sistemi tanımlamışlar ve bu baz sistemi için çözüm üretmişlerdir. Yine Wickert ve Mote (1991) alternatif olarak kompleks özfonksiyon formları önemiştir. Pakdemirli et al. (1994) eksenel olarak ivmelenen şeritin hareket denklemlerini Hamilton prensibini kullanarak tekrar elde ettiler ve Floquet teorisini kullanarak titreşimin kararlılığını araştırdılar. Bu analizde sıfır ortalama hız etrafında sinüzoidal olarak değişen hız fonksiyonunu ele aldılar. Pakdemirli ve Batan (1993) sabit ivme ile periyodik olarak hızlanıp yavaşlayan durum için bu analizi tekrar ettiler. Ulsoy (1986) ve Al-Jawi et al. (1995a), (1995b), (1995c) iki ayrı uzantılı eksenel hareketli malzemelerde uzantılar arası etkileşimleri incelediler. Mockenstrum et al. (1994) gerilme kuvvetinin zamanla değiştiği sistemler için çalışma yaptılar. Bu konuda son çalışmalardan birini Pakdemirli ve Ulsoy (1997) yaptılar. Bu çalışmada perturbasyon tekniklerinden biri olan çok zaman ölçekli metodu kullanarak eksenel ivmelenen şerit için analitik çözümler elde ettiler. Çalışmada iki farklı yaklaşım kullandılar. Birinci yaklaşımda diskritizasyon-perturbasyon metodunu, ikinci yaklaşımda ise direkt perturbasyon metodunu kullandılar. Bu çalışmada yazarlar temel parametrik rezonans ve kombinasyon rezonanslarını araştırdılar. Hız değişim frekansının herhangi bir tabii frekansın iki katına yakın olduğu durum için kararsızlık bölgelerini elde ettiler, hız değişim frekansının sıfıra yakın olduğu bölgelerde ise kararsızlığın olmadığını tespit ettiler. Wickert (1992) sabit hızlı eksenel hareketli kirişin nonlineer serbest titreşimlerini alt ve üst kritik eksenel hız için analiz etti.

Nonlineer analiz içeren başka bir çalışma ise Pellicano ve Zirilli (1998) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada enine direngeliğin sifıra gittiği ve zayıf nonlineenteli durum için eksenel hareketli kirişin nonlineer titreşim analizini yaptılar. Ayrıca bu çalışmada sabit hızlı esnek kiriş için Matched Asymptotic Expansions metodunu kullanarak sınır tabakası çözümleri elde ettiler. Yaptığımız çalışmada da esnek kiriş probleminin çözümü için Matched Asymptotic Expansions metodunu kullandık. Bu metodla ilgili detaylı bilgi Nayfeh (1981)' de bulunabilir. Pakdemirli ve Özkaya (1999) sabit hızlı esnek kiriş için sınır tabakası çözümlerini perturbasyon

tekniklerinden çok zaman ölçekli metodu kullanarak elde ettiler. Öz et al. (1998) şeritten kirişe geçiş davranışını incelediler. Değişik kiriş katsayıları için tabii frekansları hesapladılar ve kararlılık analizi yaptılar. Bu konuda son çalışmalardan biri de Chakraborty et al. (1999) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada esnek kiriş ele alınmış ve nonlineer terimler de hesaba katılarak yaklaşık çözüm ve kararlılık analizi yapılmıştır.

Bu çalışmada eksenel hareketli şerit ve kiriş çözümleri için Lie Grubu teorisi kullanılmıştır. Eksenel hız zamanın bir fonksiyonu olduğu için Lie Grup teorisi ile birlikte Eşdeğerlik Dönüşümleri de uygulanmıştır. Lie Grup teorisi ile ilgili ilk çalışmalar teoriye ismini veren Sophus Lie (1888), (1890), (1893) tarafından yapılmıştır. Lie Grup teorisinin geçmişi eskiye dayanmakla birlikte özellikle son yıllarda teori üzerinde yeni gelişmeler yapılarak değişik alanlardaki çalışmalarda kullanılmıştır. Mühendislere daha yakın bir çalışma Stephani (1989) tarafından yapılmıştır. Son yıllardaki önemli çalışmalardan biri de Ibragimov (1999) tarafından yapılmıştır. Lie Grubu Teorisi ve Eşdeğerlik dönüşümleri ile ilgili detaylı bilgiler ise Ibragimov et al. (1991), Ibragimov ve Torrisi (1992), Ibragimov (1995) ve Torrisi et al. (1996) da bulunabilir. Fung et al. (1999) Lie Grup teorisini ilk kez eksenel hareketli sürekli ortam titreşimlerinde kullanmışlardır. Yaptıkları çalışmada sabit hızlı nonlineer şerit denklemi için kararlılık analizi yapmışlardır. Yürüsoy ve Pakdemirli (1999) non-Newtonyen bir akışkan için sınır tabakası denkleminde Lie Grup teorisi ile birlikte eşdeğerlik dönüşümlerini kullanarak grup sınıflaması yapmışlardır.

Bu tez çalışmasında eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri incelenmiştir. Bölüm 2' de Hamilton prensibi kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Denklemlerin kullanılan malzemenin cinsine ve boyutlarına olan bağımlılığını kaldırmak için hareket denklemleri boyutsuzlaştırılmıştır. Sonraki bölümlerde ise boyutsuz hale getirilen hareket denklemleri değişik metodlar kullanılarak çözülmüştür.

Bölüm 3' te eksenel hareketli şerit problemi ele alınmıştır. Şerit hızı keyfi olduğundan değişik hız fonksiyonları için denklemlerin simetrilerini bulmada grup sınıflaması yapmak gerekmektedir. Grup sınıflaması yöntemlerinden birisi de Eşdeğerlik Dönüşümleridir. Bu nedenle şerit denkleminin çözümü için Lie Grup teorisi Eşdeğerlik Dönüşümleri ile birlikte kullanılmıştır. Hız değişimi olarak keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonları ele alınmıştır. Önce Lie Grup teorisi kullanılarak hareket denklemlerine ait infinitesimal jeneratörler elde edilmiştir. Bu jeneratörler kullanılarak iki farklı yöntemle çözümler elde etmek mümkündür. Birinci yöntem, elde edilen jeneratörleri kullanarak yeni kanonik değişkenler tanımlayıp denklemi daha basit formda kısmi diferansiyel denkleme dönüştürerek denklemi daha kolay çözülebilir hale getirmektir. Keyfi hız

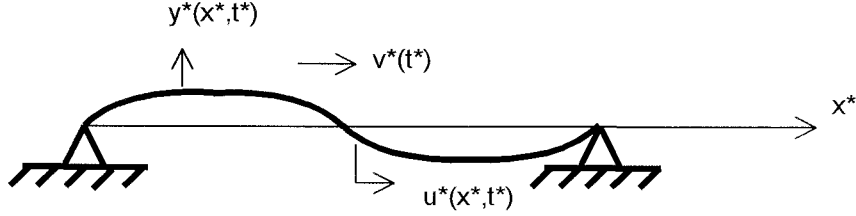
değişimine sahip çözümler için bu yöntem kullanılmıştır. İkinci yöntem ise yine elde edilen jeneratörleri kullanarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları tanımlayıp denklemi kısmi diferansiyel denklemden adi diferansiyel denkleme indirgeyerek çözüm üretmektir. Bu yöntem özel hız değişim fonksiyonları için çözümler elde etmede kullanılmıştır. Elde edilen tam çözümlerden sınır şartlarını sağlayabilecek çözümler ele alınarak bu çözümlere sınır şartları uygulanmış ve harmonik değişen hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonları için sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümler elde edilmiştir.

Bölüm 4' de ise eksenel hareket eden esnek kiriş problemi ele alınmıştır. Kirişin eğilme direngenliği küçük kabul edilmiştir. Çözümler için Matched Asymptotic Expansions metodu kullanılmıştır. Önce perturbasyon metodlarından çok zaman ölçekli metod kullanılarak dış açılım çözümü elde edilmiştir. Elde edilen dış açılım çözümünün uç noktalarda bazı sınır şartlarını sağlamadığı görülmüştür. Bu problemi ortadan kaldırmak için uçlara yakın bölgelerde ikinci bir açılım daha yapılmış ve bu iki açılım birleştirilerek bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan kompozit çözümler elde edilmiştir. Bu problem esnek kirişin basit-basit ve ankastre-ankastre mesnetli durumlarında ve eksenel hız değişiminin ise harmonik ve eksponansiyel formları için ayrı ayrı çözülmüştür. Elde edilen çözümler grafik olarak çizilmiş ve yorumlar yapılmıştır.

Bölüm 5' te ise eksenel hareketli kiriş problemi ele alınmıştır. Hız değişimi keyfi kabul edilmiş ve Lie Grup teorisi Eşdeğerlik Dönüşümleri ile birlikte kullanılarak denkleme ait simetriler elde edilmiştir. Bölüm 3' te olduğu gibi elde edilen simetriler kullanılarak keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonları için tam çözümler elde edilmiştir. Daha sonra bu tam çözümlerden sınır şartlarını sağlayabilecek çözümler ele alınarak, kirişin her iki uçtan basit olarak mesnetlenme durumunda hız değişiminin harmonik ve eksponansiyel formları için sınır şartlarını yaklaşık sağlayan çözümler elde edilmiştir. Her bölümde elde edilen çözümler için grafikleri çizilmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

Bu bölümde aksenal hareket eden şerit ve kiriş için hareket denklemleri çıkarılacaktır. Denklemlerin çıkarılması için Hamilton ilkesi kullanılacaktır. Daha sonra elde edilen hareket denklemleri boyutsuzlaştırılarak denklemlerin kullanılan malzemenin yapısına ve boyutlarına olan bağımlılığı ortadan kaldırılacaktır. Aksenal hareket eden sürekli ortam için Şekil 2.1'de örnek bir gösterim verilmiştir.

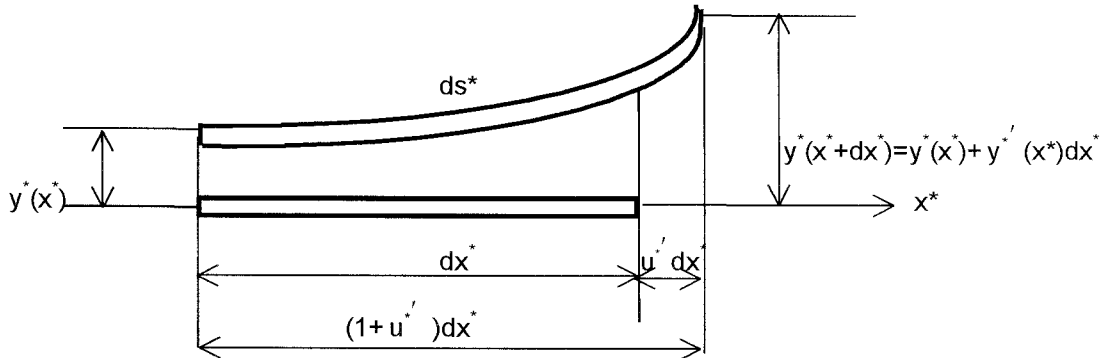


Şekil 2.1 Aksenal hareketli sürekli ortam

Şekil 2.1'de gösterilen aksenal hareketli sürekli ortam titreşiminde $u(x, t)$ boyuna yer değiştirmeyi, $y(x, t)$ enine yer değiştirmeyi ve $v(t)$ zamana bağlı hız değişkenini göstermektedir. Kirişin aksenal iç gerilmesi $P(t)$, alanı A , yoğunluğu ρ , elastisite modülü E ve kütle atalet momenti I dir.

2.1 Hareket Denklemlerinin Hamilton Prensipleri İle Çıkarılması

Bu kısımda hareket denklemleri hamilton prensibi kullanılarak çıkarılacaktır. Şekil 2.2' de dx^* uzunluğunda bir parça alınmıştır. Titreşim esnasında bu uzunluk ds^* olmaktadır. Bu durumda aksenal uzama miktarı $u' dx^*$, sol uçtaki yer değiştirme $y^*(x^*)$ ve sağ uçtaki yer değiştirme ise $y^*(x^* + dx^*)$ olarak elde edilir.



Şekil 2.2. Aksenal hareketli sürekli ortam üzerinden alınan parçadaki yer değiştirmeler

Ele alınan sürekli ortam parçasında ilk uzunluk dx son uzunluk ise $dx^* + u^*(x^*+dx^*) - u^*(x)$ olur.

Bu ise Taylor açılımı ile $dx(1+u')$ şekline gelir.

İki uç arasındaki yer değiştirme farkı şu şekildedir

$$y^*(x^*+dx^*) - y^*(x^*) = y'^* dx^* \quad (2.1)$$

ds^* uzunluğu yer değiştirme öncesi uzunluk olan dx^* cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$ds^* = \sqrt{(1+u'^*)^2 dx^{*2} + y'^{*2} dx^{*2}} = \sqrt{(1+u'^*)^2 + y'^{*2}} dx^* \quad (2.2)$$

Bu durumda şekil değiştirme şu şekildedir

$$e = \frac{ds^* - dx^*}{dx^*} \quad (2.3)$$

Denklem (2.3)'e denklem (2.2)'yi yerleştirip, Taylor açılımı yaparak küçük terimleri ihmal edersek şekil değiştirme şu şekilde elde edilir

$$e = u'^* + \frac{1}{2} u'^{*2} + \frac{1}{2} y'^{*2} \quad (2.4)$$

Boyuna yer değiştirmeyi enine yer değiştirmeye göre küçük kabul edelim. $u^* = O(y'^{*2})$ alırsak denklem (2.4) şu hale dönüşür

$$e = u'^* + \frac{1}{2} y'^{*2} \quad (2.5)$$

Boyuna ve enine hızlar ise sırası ile şöyledir

$$\frac{du^*}{dt^*} = \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{u}^* + u'^* v^* \quad (2.6)$$

$$\frac{dy^*}{dt^*} = \frac{\partial y^*}{\partial t^*} + \frac{\partial y^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{y}^* + y'^* v^* \quad (2.7)$$

Toplam yatay hız ise x^* yönündeki aksel hız ile kiriş uzamalarından kaynaklanan denklem (2.6)'da verilen hızın toplamıdır. Kinetik enerji ve elastik potansiyel enerji sırasıyla şöyle yazılabilir

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left\{ \left(\dot{y}^* + y'^* v^* \right)^2 + \left(v^* + \dot{u}^* + u'^* v^* \right)^2 \right\} dx^* \quad (2.8)$$

$$U = \frac{1}{2} EA \int_0^L e^2 dx^* + \frac{1}{2} EI \int_0^L y''^2 dx^* + \int_0^L P^* e dx^* \quad (2.9)$$

Yukarıda L kiriş uzunluğudur. Denklem (2.9)'da birinci integral şekil değiştirme, ikincisi eğilme, üçüncüsü aksel gerilme ile ilgilidir. Lagrangian şu şekilde yazılabilir

$$\mathcal{L} = T - U \quad (2.10)$$

Hamilton prensibine göre Lagrangian'ın zaman üzerinden integralinin varyasyonu sıfırdır.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt^* = 0 \quad (2.11)$$

Yukarıda δ varyasyonu göstermektedir. Denklem (2.8) ve (2.9) denklem (2.10)'a yerleştirilip elde edilen Lagrangian ifadesi denklem (2.11)'de yerine yerleştirilirse

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \rho A \left[\left(\dot{y}^* + y'^* v^* \right)^2 + \left(v^* + \dot{u}^* + u'^* v^* \right)^2 \right] - \frac{1}{2} EA e^2 - \frac{1}{2} EI y''^2 - P^* e \right\} dx^* dt^* = 0 \quad (2.12)$$

elde edilir. Denklem (2.12)'ye denklem (2.5) yerleştirilip varyasyonu alınır

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[(\dot{y} + y' v^*) (\delta \dot{y} + v' \delta y' + y' \delta v') \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\dot{u} + u' v + v') (\delta \dot{u} + v' \delta u' + u' \delta v' + \delta v') \right] \right. \\
& \quad \left. - EA \left(u' + \frac{1}{2} y'^2 \right) (\delta u' + y' \delta y') \right. \\
& \quad \left. - Ely'' \delta y'' - P (\delta u' + y' \delta y') \right\} dx dt = 0 \tag{2.13}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eksenel hızı belli bir fonksiyon seçeceğimiz için $\delta v = 0$ olacaktır. Denklem (2.13)'teki kısmi integrasyon işlemlerini yaparsak

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\rho A (\ddot{y} + 2\dot{y}' v + y'' v^2 + y' v'^2) - Ely'''' + P y'' + EA \left(u'' y' + u' y'' + \frac{3}{2} y' y'' \right) \right\} \delta y dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\rho A (\ddot{u} + 2\dot{u}' v + u'' v^2 + u' v'^2) + EA (u'' + y' y'') \right\} \delta u dx dt \\
& + \int_0^L \rho A (\dot{y} + y' v) \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A (\dot{y} v + y' v^2) - EA \left(u' y' + \frac{1}{2} y'^3 \right) + Ely'' - P y' \right\} \delta y \Big|_0^L dt \\
& + \int_0^L \rho A (\dot{u} + u' v + v') \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A (\dot{u} v + u' v^2 + v'^2) - EA \left(u' + \frac{1}{2} y'^2 \right) - P \right\} \delta u \Big|_0^L dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} Ely'' \delta y' \Big|_0^L dt = 0 \tag{2.14}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin sıfıra eşit olabilmesi için bütün integrallerin teker teker sıfıra eşit olması gerekir. İlk iki katlı integralin sıfıra eşit olabilmesi şartından şu denklemi elde ederiz.

$$-\rho A \left(\ddot{y} + 2\dot{y}'\dot{v} + y''\dot{v} + y''v'^2 \right) - Ely^{iv} + P^*y'' + EA \left(u''y' + u'y'' + \frac{3}{2}y'^2y'' \right) = 0 \quad (2.15)$$

İkinci iki katlı integralin sifira eşit olabilmesi için ise

$$-\rho A \left(\ddot{u} + 2\dot{u}'\dot{v} + u''\dot{v} + \dot{v} + u''v'^2 \right) + EA \left(u'' + y'y'' \right) = 0 \quad (2.16)$$

elde edilir. Bu iki denklem hareket denklemleridir. Geriye kalan terimlerin sifira eşitlenmesinden ise sınır şartları ortaya çıkmaktadır. Her iki tarafı basit mesnetlenmiş durum ele alınırsa geriye kalan terimlerden sınır şartlarını şu şekilde elde edebiliriz

$$y'(0)=0, \quad y'(L)=0, \quad y''(0)=0, \quad y''(L)=0, \quad u'(0)=0, \quad u'(L)=0 \quad (2.17)$$

2.2 Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Önceki bölümde elde ettiğimiz hareket denklemlerini ve sınır şartlarını malzemenin cinsinden ve boyutlarından bağımsız hale getirmek için boyutsuzlaştırmamız gerekir. Boyutsuz ifadeler aşağıdaki gibi tanımlanır

$$y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad u = \frac{\bar{u}}{L}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad t = \sqrt{\frac{P^*}{\rho AL^2}} \bar{t}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\sqrt{P^*/\rho A}},$$

$$v_b^2 = \frac{EA}{P^*}, \quad \bar{v}_r^2 = \frac{EI}{P^*L^2} \quad (2.18)$$

Yukarıdaki denklemde v_b boyuna direngenliği \bar{v}_r enine direngenliği göstermektedir. \bar{v} aksel hızı, durgun kirişteki dalga hızı ile boyutsuzlaştırılmıştır. Denklem (2.18) denklem (2.15) ve (2.16)'ya yerleştirilirse boyutsuz hareket denklemleri ve sınır şartları şu şekilde elde edilir

$$\left(\ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{y}}'\dot{\bar{v}} + \bar{y}''\dot{\bar{v}} + \bar{y}''\bar{v}'^2 \right) + \bar{v}_r^2 \bar{y}^{iv} - \left(\bar{y}' \left(1 + v_b^2 \left(\bar{u}' + \frac{1}{2} \bar{y}'^2 \right) \right) \right)' = 0 \quad (2.19)$$

$$\left(\ddot{\bar{u}} + 2\dot{\bar{u}}'\dot{\bar{v}} + \bar{u}''\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{v}} + \bar{u}''\bar{v}'^2 \right) - v_b^2 \left(\bar{u}' + \frac{1}{2} \bar{y}'^2 \right)' = 0 \quad (2.20)$$

$$y(0,t) = y(1,t)=0, \quad y''(0,t) = y''(1,t)=0, \quad u(0,t) = u(1,t)=0 \quad (2.21)$$

Kirişte boyuna titreşimler enine titreşimlerden önemli ölçüde daha hızlı yayıldığı için $v_b^2 \gg 1$ alınabilir. Bu durumda denklem (2.20)'nin birinci kısmı ikinci kısmından çok küçüktür. Birinci kısmı ihmal edersek denklem (2.20) şu hale dönüşür

$$\left(u' + \frac{1}{2} y'^2 \right)' = 0 \quad (2.22)$$

Bu denklemi integre edersek

$$u' + \frac{1}{2} y'^2 = c(t) \quad (2.23)$$

elde edilir. Bu integral t 'ye bağlı bir fonksiyona dönüşmüş oldu. Bu fonksiyonun giriş boyunca integralini alırsak

$$\int_0^1 u' dx + \frac{1}{2} \int_0^1 y'^2 dx = c(t) \int_0^1 dx \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu integral işlemini yapalım.

$$u(1)-u(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 y'^2 dx = c(t) \quad (2.25)$$

Uçlarda uzama olamadığı için ilk iki terim sıfırdır. Bu durumda

$$c(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 y'^2 dx \quad (2.26)$$

elde edilir. Bu değer şekil değiştirmeye eşit olduğundan denklem (2.23)'e yerleştirilirse

$$u' = c(t) - \frac{1}{2} y'^2 \quad (2.27)$$

elde edilir. Bu değeri x'e göre integre edersek

$$u(x,t) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \int_0^1 y'^2 dx \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^x y'^2 dx \quad (2.28)$$

elde edilir. Buradan sonlu enine titreşimden boyuna yerdeğiştirme alanını buluruz.

$$u(x,t) = \frac{x}{2} \int_0^1 y'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^x y'^2 dx \quad (2.29)$$

Denklem (2.29)' u denklem (2.19)' a yerleştirip gerekli düzenlemeleri yaparsak aksenal hareketli kiriş için boyutsuz hareket denklemi şu şekilde elde edilir

$$\left(\ddot{y} + 2\dot{y}'v + y'\dot{v} \right) + (v^2 - 1)y'' + \bar{v}_r^2 y^{iv} = \frac{v_b^2}{2} y'' \int_0^1 y'^2 dx \quad (2.30)$$

Burada \ddot{y} yerel ivmeyi, $2\dot{y}'v$ Coriolis ivmesini, $v^2 y''$ merkezci ivmeyi, \bar{v}_r^2 ise kiriş katsayısını (enine direngelik) göstermektedir. Sağ taraftaki nonlineer terimler ise titreşim esnasında kirişin uzamasından kaynaklanan nonlineer terimlerdir. Denklem (2.30)' da kiriş katsayısını gösteren \bar{v}_r^2 terimini sıfır alırsak aksenal hareketli şerit denklemini elde ederiz.

$$\left(\ddot{y} + 2\dot{y}'v + y'\dot{v} \right) + (v^2 - 1)y'' = \frac{v_b^2}{2} y'' \int_0^1 y'^2 dx \quad (2.31)$$

Böylece bu bölümde aksenal hareket eden şerit ve kiriş denklemlerini elde ettik. Bundan sonraki bölümlerde elde ettiğimiz bu hareket denklemlerinin çözümlerini araştıracağız. Her ne kadar elde ettiğimiz hareket denklemleri uzamalardan kaynaklanan terimlerden dolayı nonlineer ise de bundan sonraki bölümlerde uzamaların ihmal edildiği lineer denklemleri ele alıp yaklaşık çözümler elde edeceğiz.

3. EKSENEL HAREKETLİ ŞERİT PROBLEMİ

Bu bölümde eksenel hareketli şerit problemi ele alınacaktır. Lie Grup Teorisi kullanılarak hareket denkleminin tam çözümleri üretilecektir. Şerit hızı keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız olarak değişik formlarda ele alınacaktır. Eksenel hız zamanın bir fonksiyonu olduğu için Lie Grup Teorisiyle birlikte Eşdeğerlik Dönüşümleri (Equivalence Transformations)' de uygulanacaktır. Lie Grupları metodu Eşdeğerlik Dönüşümleri ile birlikte kullanılarak hareket denklemi için infinitesimal jeneratörler elde edilecektir. Daha sonra bu jeneratörlerin farklı varyasyonları kullanılarak değişik hızlar için sistematik bir şekilde tam çözümler üretilecektir. Elde edilen bu çözümlerden sınır şartlarını sağlayan çözümler ele alınacak ve bu çözümlere sınır şartları uygulanacaktır. Bu bölümde yapılan çalışma uluslararası bir dergide basılmak üzere kabul edilmiştir (Özkaya and Pakdemirli (1999)).

3.1 Lie Grup Teorisi

Lie Grup Teorisi ile ilgili çalışmalar çok eskilere dayanmaktadır. Bu konuda ilk çalışmaları Sophus Lie yapmıştır (Lie 1888, 1890, 1893). Özellikle son zamanlarda bu teori matematiksel fizikte birçok alana uygulanmıştır. Lie Grup Teorisi lineer ve nonlineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini sistematik bir şekilde bulmada etkili bir yöntemdir. Matematiksel olarak Lie Grubu bağımlı ve bağımsız değişkenler uzayında nokta dönüşümü olan özel bir gruptur. Ele alınan diferansiyel denklem için nokta dönüşümleri hesaplanarak değişik yollarla tam çözümler üretilebilir. 1) Bilinen bir analitik çözümden, dönüşümler kullanarak, diğer çözümleri elde edebiliriz. 2) Elde edilen dönüşümler kullanılarak benzerlik çözümleri üretilebilir. 3) Kanonik koordinatlar tanımlanarak kısmi diferansiyel denklem daha basit bir forma indirgenebilir.

Kısmi diferansiyel denklemlerde benzerlik değişkeni ve fonksiyonu kullanılarak bağımsız değişken sayısı düşürülebilir. Böylece kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözüm üretilebilir. Elde edilen çözüme ters dönüşüm yapılarak gerçek değişkenlere dönüştürülebilir. Başka bir yöntem olarak, temel koordinatlar tanımlanarak kısmi diferansiyel denklem daha basit bir forma indirgenir ve basit formdaki kısmi diferansiyel denklemin çözümü daha kolay elde edilebilir.

Lie Grup yönteminin teorisi mühendisler için çok komplike olmakla birlikte, bazı özel grup dönüşümleri kullanılarak (ölçekleme dönüşümü, öteleme dönüşümü, spiral dönüşüm, vb..) birçok diferansiyel denklem kolay bir şekilde çözülebilir. Bu konuda Pakdemirli ve Yürüsoy' un (1998) çalışması örnek olarak verilebilir.

Bu çalışmada Lie Grup teorisi kullanılarak aksenal hareketli şerit denklemi için denklemin kabul ettiği nokta dönüşümleri ve karşılık gelen infinitesimal jeneratörler elde edilecektir. Elde edilen bu jeneratörler kullanılarak denkleme ait tam çözümler üretilecektir. Keyfi hız değişimi durumunda kanonik koordinatlar tanımlanarak kısmi diferansiyel denklem daha basit forma indirgenerek çözüm yapılacaktır. Özel hız değişimi fonksiyonları için ise benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu tanımlanarak kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme indirgenerek tam çözümler üretilecektir.

Eksenel hareketli şerit için lineer hareket denklemi daha önceki bölümde de elde ettiğimiz gibi şu şekildedir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial y}{\partial x} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Hız fonksiyonu sadece zamanın bir değişkeni olduğu için $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ve $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ şartları hareket denklemine eklenmiştir. Lie Gurubu metodunu uygulamak için şu değişken tanımlarını yapalım

$$\begin{aligned} x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad y_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2}, \quad y_{12} = \frac{\partial y}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad y_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \quad y_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \\ v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad v_3 = \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Denklem (3.1)'deki hareket denklemi denklem (3.2)'de yapılan tanımlar dikkate alınarak şu şekilde yazılabilir

$$y_{22} + v_2 y_1 + 2v y_{12} + (v^2 - 1) y_{11} = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (3.3)$$

Denklemlerle irtibatlı eşdeğerlik jeneratörü ve ikinci mertebeye uzatılmış hali aşağıdaki gibidir

$$X = \xi_1(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial y} + \mu(x_1, x_2, y, v) \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
X^{(2)} = & \xi_1(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial y} + \mu(x_1, x_2, y, v) \frac{\partial}{\partial v} \\
& + \eta_1(x_1, x_2, y, y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{11}(x_1, x_2, y, y_1, y_2, y_{11}, y_{12}) \frac{\partial}{\partial y_{11}} \\
& + \eta_{12}(x_1, x_2, y, y_1, y_2, y_{11}, y_{12}, y_{22}) \frac{\partial}{\partial y_{12}} + \eta_{22}(x_1, x_2, y, y_1, y_2, y_{12}, y_{22}) \frac{\partial}{\partial y_{22}} \\
& + \mu_1(x_1, x_2, y, v, v_2) \frac{\partial}{\partial v_1} + \mu_2(x_1, x_2, y, v, v_2) \frac{\partial}{\partial v_2} + \mu_3(x_1, x_2, y, v, v_2) \frac{\partial}{\partial v_3} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Denklem (3.4)' de ξ_1, ξ_2, η yeni değişkenleri başlangıçta x, t, y değişkenlerine, μ değişkeni ise x, t, y, v değişkenlerine bağlı terimlerdir. Eksenel hız keyfi olduğu için Lie Grup teorisi ile birlikte eşdeğerlik dönüşümlerini de kullanmamız gerekmektedir. Eşdeğerlik jeneratöründeki hız ile ilgili ifadeleri şu şekilde tanımlayabiliriz (Ibragimov et al. (1991), Ibragimov ve Torrisi (1992))

$$\mu_1 = D_1(\mu) - v_2 D_1(\xi_2)$$

$$\mu_2 = D_2(\mu) - v_2 D_2(\xi_2) \quad (3.5)$$

$$\mu_3 = D_y(\mu) - v_2 D_y(\xi_2)$$

Denklem (3.5)' te şu tanımlar yapılmıştır

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial}{\partial v} \quad (3.6)$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

Infinitesimal jeneratör denklem (3.3)' teki ikinci ve üçüncü eşitliklere uygulanırsa

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_3 = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Denklem (3.7) kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa şu sonuçları elde ederiz

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \xi_{22}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi_{22}}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

Denklem (3.3)'ten y_{22} şu şekilde yazılabilir

$$y_{22} = -v_2 y_1 - 2v y_{12} - (v^2 - 1) y_{11} \quad (3.9)$$

Denklem (3.4)'teki ikinci mertebeye genelleştirilmiş jeneratör denklem (3.3)'e uygulanırsa invaryanslık şartı şu şekilde elde edilir

$$\eta_{22} + \mu_2 y_1 + v_2 \eta_1 + 2\mu y_{12} + 2v\eta_{12} + 2v\mu y_{11} + (v^2 - 1)\eta_{11} = 0 \quad (3.10)$$

Denklem (3.10)'daki η_{22} , η_{11} , η_{12} , η_1 terimlerinin ξ_1 , ξ_2 ve η cinsinden ifade edilmeleri gerekmektedir. Bu ifadelerin hesaplanması ile ilgili denklemler şu şekildedir (Ibragimov(1999))

$$\eta_1 = D_1(\eta) - D_1(\xi_1)y_1 - D_1(\xi_2)y_2$$

$$\eta_2 = D_2(\eta) - D_2(\xi_1)y_1 - D_2(\xi_2)y_2$$

$$\eta_{11} = D_1(\eta_1) - D_1(\xi_1)y_{11} - D_1(\xi_2)y_{12} \quad (3.11)$$

$$\eta_{12} = D_2(\eta_1) - D_2(\xi_1)y_{11} - D_2(\xi_2)y_{12}$$

$$\eta_{22} = D_2(\eta_2) - D_2(\xi_1)y_{12} - D_2(\xi_2)y_{22}$$

Bu denklemdeki D_1 ve D_2 türev operatörlerinin eşitleri şöyledir

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_{11} \frac{\partial}{\partial y_1} + y_{12} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y} + y_{12} \frac{\partial}{\partial y_1} + y_{22} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \quad (3.12)$$

Denklem (3.11) ve (3.12) kullanılarak denklem (3.10)'da ihtiyaç duyulan eşitlikler şu şekilde elde edilir

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right] y_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} y_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} (y_1)^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y_1 y_2 \\
\eta_{11} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \left[2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right] y_1 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} y_2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right] y_{11} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} y_{12} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] (y_1)^2 \\
&\quad - 2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial y} y_1 y_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} (y_1)^3 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial y^2} (y_1)^2 y_2 - 3 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y_1 y_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y_2 y_{11} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y_1 y_{12} \\
\eta_{12} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] y_2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right] y_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} y_{22} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] y_{12} \\
&\quad - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} y_{11} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial y} (y_2)^2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \xi_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial y} \right] y_1 y_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial y} (y_1)^2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial y^2} y_1 (y_2)^2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} (y_1)^2 y_2 \\
&\quad - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y_2 y_{12} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y_1 y_{12} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y_2 y_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y_1 y_{22} \\
\eta_{22} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \left[2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} \right] y_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} y_1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] y_{22} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} y_{12} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial y} \right] (y_2)^2 \\
&\quad - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial y} y_1 y_2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial y^2} (y_2)^3 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} (y_2)^2 y_1 - 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y_2 y_{22} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y_1 y_{22} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y_2 y_{12} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Denklem (3.13)'de y_{22} ifadesi yerine denklem (3.9)'daki eşitliği yazıp, elde edilen denklemleri denklem (3.10)'daki invaryanslık şartında yerine yerleştirirsek bir denklem bloğu elde ederiz. Bu denklem bloğu yüksek dereceli değişkenler cinsinden bir polinom teşkil etmektedir. Bu polinomun sifıra eşit olabilmesi ancak ve ancak bütün yüksek dereceden değişkenlere ait terimlerin katsayılarının sıfır olması ile mümkündür. Böylece denklem bloğu aşağıdaki denklem sistemine ayrışır

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + 2v \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.14)$$

$$y_2: \quad 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} + 2v \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} = 0 \quad (3.15)$$

$$y_1: -\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} + 2v \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right] + (v^2 - 1) \left[2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right] = 0 \quad (3.16)$$

$$v_2 y_1: \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0 \quad (3.17)$$

$$y_{12}: -2v \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + 2\mu + 2v \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] = 0 \quad (3.18)$$

$$y_{11}: -(v^2 - 1) \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] - 2v \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + 2v\mu + (v^2 - 1) \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right] = 0 \quad (3.19)$$

$$y_2^2: \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.20)$$

$$y_1 y_2: -2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial y} + 2v \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] = 0 \quad (3.21)$$

$$y_1 y_2^2: -\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.22)$$

$$y_1 y_{12}: -2v \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

$$y_1 y_{11}: -2(v^2 - 1) \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0 \quad (3.24)$$

$$y_2 y_{12}: -2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

$$v_2: \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = 0 \quad (3.26)$$

$$y_1^2: -2v \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial y} + (v^2 - 1) \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] = 0 \quad (3.27)$$

$$y_1^2 y_2: \quad -2v \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.28)$$

$$y_2 y_{11}: \quad -2v \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0 \quad (3.29)$$

$$y_1^3: \quad -(v^2 - 1) \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.30)$$

Denklem(3.14) – (3.30) çözümlürse ξ_1 , ξ_2 , η ve μ terimlerinin x , t ve y' ye bağımlılıkları şu şekilde elde edilir

$$\xi_1 = ax + h(t)$$

$$\xi_2 = at + b$$

$$\eta = cy + dt + e$$

$$\mu = h'(t) \quad (3.31)$$

Bu bağıntıları kullanarak kanonik koordinat tanımlama veya benzerlik çözümlerini üretebilmek için eşdeğer denklem takımı şöyle yazılabilir

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dt}{\xi_2} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dv}{\mu} \quad (3.32)$$

Burada a, b, c, d ve e terimleri keyfi sabitlerdir. Elde edilen bu infinitesimal jeneratörlerde keyfi sabitlerin farklı varyasyonları kullanılarak hareketli şerit denkleminin değişik çözümleri elde edilebilir. $h(t)$ ile $v(t)$ arasındaki ilişkiyi bulmak için (t, v) uzayında eşdeğerlik operatörünün projeksiyonunu şu şekilde yazabiliriz

$$P = \mu \frac{\partial}{\partial v} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.33)$$

İnvaryantlık şartı ise şu şekilde yazılabilir

$$P[v-v(t)]=0 \quad (3.34)$$

Eşdeğerlik operatörünü invariyantlık şartında yerine koyarsak

$$\mu - \xi_2 v' = 0 \quad (3.35)$$

elde edilir. ξ_2 yerine yerleştirilir ve $v'(t)$ terimi çekilirse

$$v'(t) = \frac{h'(t)}{at + b} \quad (3.36)$$

elde edilir. Buradan

$$v(t) = \int \frac{h'(t)}{at + b} dt \quad (3.37)$$

yazılır. Bu işlemlerden sonra elde ettiğimiz jeneratörleri kullanarak tam çözümler elde edeceğiz. Lie Grubu metoduyla bulunan jeneratörler yardımıyla iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denklem formuna yada daha kolay çözülebilecek kısmi diferansiyel denklem formuna indirgenecektir. Böylece daha basit hale gelen bu denklem çözülerek ters dönüşüm yapıлып gerçek değişkenler cinsinden çözüm elde edilecektir.

3.1 Tam Çözümlerin Bulunması

Bu bölümde denklem (3.31) ve denklem (3.37) kullanılarak değişik hız fonksiyonları için tam çözümler üretilecektir. Bunun için iki farklı yaklaşımla çözümler elde edilebilir. Birinci yaklaşımda denklem (3.31)'deki simetrier kullanılarak kanonik koordinatlar tanımlanır ve hareket denklemini basit bir forma indirgenerek çözülebilir hale getirilir. Bu yaklaşımı keyfi hız durumu için kullanacağız. İkinci yaklaşımda ise eski değişkenler cinsinden yeni bir benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu tanımlanır. Bu transformasyon kullanılarak kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme indirgenir, adi diferansiyel denklem çözüldükten sonra ters dönüşümle gerçek değişkenler cinsinden çözüm elde edilir. Bu yaklaşımı hız değişiminin özel fonksiyonları için çözümler elde etmede kullanacağız. Şerit hızını keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve eksponansiyel değişen hız olarak değişik şekillerde ele alacağız.

3.2.1 Keyfi Hız

Bu kısımda önce kanonik koordinatlar simetrisi kullanılarak tanımlanacak ve sonra da bu kanonik koordinatlar cinsinden orijinal denklem daha basit bir yapıya indirgenecektir. Bu yapının çözülmesi ve orijinal değişkenlere dönülmesi ile de tam analitik çözümler elde edilecektir. Denklem (3.31)'de $a=0$, $b=1$ ve $h(t) = v(t)$ seçelim. Bu durumda denklem (3.32)'den

$$\frac{dx}{v(t)} = dt \quad (3.38)$$

elde edilir. Buradan

$$\xi = x - \int v(t) dt \quad (3.39)$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan $a=0$, $b=0$ ve $h(t)$ keyfi seçilirse

$$\frac{dx}{h(t)} = \frac{dt}{0} \quad (3.40)$$

yada

$$\tau = t \quad (3.41)$$

elde edilir. Denklem (3.1)'deki türev ifadeleri kanonik koordinatlara bağlı olarak şu şekilde dönüşür

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= -v \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2v \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \tau} - \dot{v} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} &= -v \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \tau} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Denklem (3.42)' de elde ettiğimiz ifadeleri denklem (3.1)' e yerleştirirsek aşağıdaki dalga denklemini elde ederiz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.43)$$

Bu denklemin çözümü şu şekilde yazılabilir

$$y = F_1(\xi - \tau) + F_2(\xi + \tau) \quad (3.44)$$

Bu çözüm orijinal değişkenler cinsinden şu şekildedir

$$y(x,t) = F_1\left(x - \int^t v(t) dt\right) + F_2\left(x + \int^t v(t) dt\right) \quad (3.45)$$

Bu kanonik dönüşüm ilk defa Miranker (1960) tarafından sunulmuştur. Ancak dönüşüm deneme yanılma ile elde edilmiş, sistematik bir metod olan Lie Grup teorisi kullanılmamıştır. Denklemlere ilk defa Lie Grup teorisi bu çalışmada uygulanmıştır.

$a=0$, $b=1$, $h(t)=v(t)+1$ yada $a=0$, $b=1$, $h(t)=v(t)-1$ alınarak denklem (3.45)'e alternatif bir çözüm elde edilebilir. Burada yeni değişkenler şu şekilde elde edilir

$$\xi = x - \int^t v(t) dt, \quad \tau = x + \int^t v(t) dt \quad (3.46)$$

Bu değişkenler denklem (3.1)'e yerleştirilirse orijinal denklem daha basit bir forma indirgenir.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \tau} = 0 \quad (3.47)$$

Bu denklemden elde edilen çözüm denklem (3.45) ile aynıdır. Burada bizim amacımız sistematik bir şekilde kısmi diferansiyel denklemin tam çözümlerini elde etmektir. Denklemi daha basit forma indirecek yeni değişkenleri tahmini olarak seçmek yerine bu işlemleri sistematik bir şekilde yaptık.

3.2.2 Sabit Hız

Bu bölümde sabit hız durumu için tam çözümler elde edeceğiz.

$$v=sbt \quad (3.48)$$

Hız sabit ise denklem (3.37)'den $h=sbt$ bulunur. Bu durumda jeneratörler şu şekilde oluşur

$$\xi_1= ax+h$$

$$\xi_2= at+b$$

$$\eta= cy+dt+e \quad (3.49)$$

Denklem (3.49)'daki parametreler çeşitli şekilde seçilerek çözümler elde edilebilir. Örneğin $a=d=e=0$ ve diğer parametreleri keyfi seçelim. Bu durumda jeneratörlerimiz

$$\xi_1= h, \quad \xi_2= b, \quad \eta= cy \quad (3.50)$$

olur. Bu durumda eşdeğer adi diferansiyel denklem sistemi şu şekilde yazılır

$$\frac{dx}{h} = \frac{dt}{b} = \frac{dy}{cy} \quad (3.51)$$

Denklem (3.51)'nin çözümü için benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonlarını bulalım.

$$\frac{dx}{h} = \frac{dt}{b} \quad (3.52)$$

ele alınırsa benzerlik değişkeni

$$\xi = bx-ht \quad (3.53)$$

şeklinde elde edilir.

$$\frac{dt}{b} = \frac{dy}{cy} \quad (3.54)$$

alınırsa benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$y=e^{mt} f(\xi) \quad (3.55)$$

Burada $m=\frac{c}{b}$ 'dir. Gerekli türevler alınarak denklem (3.55) denklem (3.1)'e yerleştirilirse ve cebirsel işlemler yapılırsa benzerlik fonksiyonu için şu denklemi elde ederiz

$$m^2 f(\xi) + f'(\xi) [-2mh+2vmb] + f''(\xi) [h^2-2vhb+v^2b^2-b^2]=0 \quad (3.56)$$

Elde edilen denklem ikinci mertebeden sabit katsayılı adi diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü kolay bir şekilde elde edilebilir. İşlemlerde kolaylık olması için $h=bv$ seçelim. Bu durumda denklem (3.56) şu hale dönüşür

$$m^2 f(\xi) - b^2 f''(\xi)=0 \quad (3.57)$$

denklem (3.57)' nin çözümünden benzerlik fonksiyonunu şu şekilde elde ederiz

$$f(\xi)=c_1 e^{\frac{m}{b}\xi} + c_2 e^{-\frac{m}{b}\xi} \quad (3.58)$$

Denklem (3.58) kullanılarak çözüm fonksiyonunu gerçek değişkenler cinsinden şu şekilde elde ederiz

$$y=c_1 e^{m x + (m+n) t} + c_2 e^{-m x + (m-n) t} \quad (3.59)$$

Burada $n=-mv$ 'dir. Görüldüğü gibi kısmi diferansiyel denklemi Lie Grubu metodu kullanarak adi diferansiyel denkleme indirdik. Elde edilen adi diferansiyel denklemi çözüp gerçek değişkenlere ters dönüşüm yaparak kısmi diferansiyel denklemin çözümünü elde etmiş olduk.

Alternatif bir durum olarak denklem (3.53)' teki aynı benzerlik değişkenini tekrar ele alalım. Benzerlik fonksiyonunu bulacak denklemi (3.51)' den alternatif formda şöyle yazalım

$$c \frac{k_1 dx + k_2 dt}{k_1 h + k_2 b} = \frac{dy}{y} \quad (3.60)$$

Oran – orantı özelliğinden keyfi bir k_1 ve k_2 katsayısı için yukarıdaki eşitlik her zaman yazılabilir. Bu durumda benzerlik fonksiyonu şu formda olur

$$y = e^{\alpha x + \gamma t} f(\xi) \quad (3.61)$$

Burada $f(\xi)$ fonksiyonunu sabit alırsak çözüm şu formda olur

$$y = C e^{\alpha x + \gamma t} \quad (3.62)$$

Bu çözümde $\alpha = \frac{ck_1}{k_1h + k_2b}$ ve $\gamma = \frac{ck_2}{k_1h + k_2b}$ dir. Pakdemirli et al. (1994)' de bu çözüme iki uçundan sabitlenmiş şeritin sınır şartları uygulanmıştır.

Diğer bir çözüm için denklem (3.45)' de a parametresini keyfi bırakıp (ölçekleme dönüşümü) diğer parametrelerin hepsini sıfır alalım. Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları şu şekilde elde edilir

$$\xi = \frac{x}{t}, \quad y = f(\xi) \quad (3.63)$$

Denklem (3.63)'ün türevlerini alıp denklem (3.1)'de yerine yerleştirirsek benzerlik fonksiyonu için şu denklemi elde ederiz

$$f''(\xi) (\xi^2 - 2v\xi + v^2 - 1) + f'(\xi) (2\xi - 2v) = 0 \quad (3.64)$$

Yukarıdaki denklemden benzerlik fonksiyonu çözümler ve gerçek değişkenler cinsinden yazılırsa

$$y = C \left[\ln \frac{x - vt - t}{x - vt + t} \right] \quad (3.65)$$

elde edilir. Bu bölümde sabit aksel hızla hareket eden şeritin tam çözümlerine bazı örnekler verilmiştir. Elde edilen jeneratördeki katsayıların değişik varyasyonları kullanılarak ve benzer işlemler yapılarak sabit hız için değişik çözümler üretilebilir.

3.2.3 Sabit İvmeli Hız

Bu kısımda hızın sabit bir ivme ile arttığını kabul edeceğiz.

$$v = \alpha t \quad (3.66)$$

olarak seçilirse denklem (3.37)'den

$$h(t) = \frac{1}{2} \alpha a t^2 + \alpha b t + k \quad (3.67)$$

bulunur. Bu durumda jeneratörler şöyle olur

$$\xi_1 = ax + \frac{1}{2} \alpha a t^2 + \alpha b t + k$$

$$\xi_2 = at + b \quad (3.68)$$

$$\eta = cy + dt + e$$

Denklem (3.68)'de elde edilen jeneratörlerde b parametresini keyfi seçip diğer parametreleri sıfır alalım. Bu durumda denklem daha önceki işlemlerde olduğu gibi benzerlik fonksiyonu cinsinden adi diferansiyel denkleme indirgenebilir. Çözüm için eşdeğer adi diferansiyel denklem şu şekilde yazılabilir

$$\frac{dx}{\alpha t} = \frac{dt}{1} = \frac{dy}{0} \quad (3.69)$$

Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonunu şu şekilde elde ederiz

$$\xi = x - \frac{\alpha t^2}{2}, \quad y = f(\xi) \quad (3.70)$$

Elde edilen benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu kullanılarak denklem (3.1) benzerlik fonksiyonu cinsinden adi diferansiyel denkleme indirgenebilir. Elde edilen adi diferansiyel denklem çözümlenip ters dönüşüm yapılırsa gerçek değişkenler cinsinden çözüm şu şekilde elde edilir

$$y = c_1 \left(x - \frac{1}{2} \alpha t^2 \right) + c_2 \quad (3.71)$$

Başka bir çözüm için sadece α parametresini keyfi değer bütün parametreleri sıfır alalım. Bu durumda eşdeğer adi diferansiyel denklem sistemi şu şekilde elde edilir

$$\frac{dx}{x + \frac{1}{2} \alpha t^2} = \frac{dt}{t} = \frac{dy}{0} \quad (3.72)$$

Denklem (3.72) kullanılarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = \frac{x}{t} - \frac{1}{2} \alpha t, \quad y = f(\xi) \quad (3.73)$$

Elde edilen benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu kullanılarak denklem (3.1) benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu cinsinden şu hale dönüştürülür

$$(\xi^2 - 1) f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0 \quad (3.74)$$

Denklem (3.74) çözülüp elde edilen çözüme ters dönüşüm uygulanırsa gerçek değişkenler cinsinden çözüm şu şekilde elde edilir

$$y = c_1 \left[\ln \frac{x - \frac{1}{2} \alpha t^2 - t}{x - \frac{1}{2} \alpha t^2 + t} \right] + c_2 \quad (3.75)$$

Eğer $b=c$ ve diğer parametreler sıfır seçilirse benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonunu veren adi diferansiyel denklem sistemi şu şekilde elde edilir

$$\frac{dx}{\alpha t} = \frac{dt}{1} = \frac{dy}{y} \quad (3.76)$$

Denklem (3.76) kullanılarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x - \frac{\alpha t^2}{2}, \quad y = e^t f(\xi) \quad (3.77)$$

Denklem (3.77)'deki benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu kullanarak denklem (3.1) daha önceki yaptığımız gibi adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Elde edilen adi diferansiyel denklem çözülüp gerçek değişkenlere ters dönüşüm yapılırsa şu çözüm fonksiyonu elde edilir

$$y = e^t \left[c_1 e^{\left(x - \frac{at^2}{2}\right)} + c_2 e^{-\left(x - \frac{at^2}{2}\right)} \right] \quad (3.78)$$

Denklem (3.68)'de elde edilen jeneratörlerin farklı kombinasyonları kullanılarak sabit ivmeli durum için değişik çözümler elde edilebilir.

3.2.4 Harmonik Hız

Bu kısımda hızın belli bir v_0 hızı etrafında sinüzoidal olarak değiştiğini düşüneceğiz. Hız fonksiyonunu şu şekilde yazabiliriz

$$v = v_0 + v_1 \sin \Omega t \quad (3.79)$$

Denklem (3.37)'yi kullanarak h için şu eşitliği yazabiliriz

$$h(t) = v_1 a t \sin \Omega t + \frac{v_1 a}{\Omega} \cos \Omega t + v_1 b \sin \Omega t + k \quad (3.80)$$

Bu durumda jeneratörler şöyle olur

$$\xi_1 = ax + v_1 a t \sin \Omega t + \frac{v_1 a}{\Omega} \cos \Omega t + v_1 b \sin \Omega t + k$$

$$\xi_2 = at + b \quad (3.81)$$

$$\eta = cy + dt + e$$

Çözüm için b ve c parametrelerini keyfi diğer parametreleri sıfır kabul edelim. Bu durumda denklem (3.81) şu hali alır

$$\xi_1 = v_1 b \sin \Omega t, \quad \xi_2 = b, \quad \eta = cy \quad (3.82)$$

Benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu tanımlayan adi diferansiyel denklem sistemi ise şu şekilde elde edilir

$$\frac{dx}{bv_1 \sin \Omega t} = \frac{dt}{b} = \frac{dy}{cy} \quad (3.83)$$

Denklem (3.83) kullanılarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t, \quad y = e^{\gamma t} f(\xi) \quad (3.84)$$

burada $\gamma = c/b$ dir. Türevleri alıp denklem (3.1)'de yerine yerleştirirsek denklem (3.1) denklem (3.84)'teki benzerlik fonksiyonu ve benzerlik değişkenleri cinsinden şu şekilde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür

$$f''(\xi) (v_0^2 - 1) + f'(\xi) (2\gamma v_0) + f(\xi) \gamma^2 = 0 \quad (3.85)$$

Burada f fonksiyonu çözümlüp gerçek değişkenlere ters dönüşüm yapılırsa çözüm şu şekilde ortaya çıkar

$$y = e^{\gamma t} \left[c_1 e^{\frac{-\gamma}{1+v_0} \left(x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t \right)} + c_2 e^{\frac{\gamma}{1-v_0} \left(x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t \right)} \right] \quad (3.86)$$

Alternatif bir çözüm olarak a parametresini keyfi bırakıp diğer parametreleri sıfır seçersek benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = \frac{x}{t} + \frac{v_1}{\Omega t} \cos \Omega t, \quad y = f(\xi) \quad (3.87)$$

Elde edilen bu benzerlik değişkeni ve fonksiyonunu kullanarak denklem (3.1)'i şu şekilde adi diferansiyel denkleme dönüştürebiliriz

$$f''(\xi) (\xi^2 - 2v_0 \xi + v_0^2 - 1) + f'(\xi) (2\xi - 2v_0) = 0 \quad (3.88)$$

Denklem (3.88) kullanılarak benzerlik fonksiyonu için çözüm elde edilebilir. Elde edilen çözüm gerçek değişkenlere dönüştürülürse şu çözüm fonksiyonunu elde ederiz

$$y = C \ln \left(\frac{x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t - v_0 t - t}{x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t - v_0 + t} \right) \quad (3.89)$$

Denklem (3.81)'de elde edilen infinitesimal jeneratördeki keyfi 6 parametrenin kombinasyonları kullanılarak değişik çözümler elde edilebilir. Yukarıda bazı örnek durumlar için tam çözümler elde ettik.

3.2.5 Eksponansiyel Hız

Bu kısımda bir v_0 sabit hızına eksponansiyel olarak yaklaşan hız fonksiyonunu ele alacağız. Fonksiyon şu şekilde yazılabilir

$$v = v_0(1 - e^{-\alpha t}) \quad (3.90)$$

Denklem (3.37)'den

$$h(t) = -v_0 a e^{-\alpha t} \left(t + \frac{1}{\alpha} \right) - v_0 b e^{-\alpha t} + k \quad (3.91)$$

elde edilir. Bu durumda jeneratörler şöyle olur

$$\xi_1 = ax - v_0 a e^{-\alpha t} \left(t + \frac{1}{\alpha} \right) - v_0 b e^{-\alpha t} + k$$

$$\xi_2 = at + b \quad (3.92)$$

$$\eta = cy + dt + e$$

Daha önceki bölümde olduğu gibi yine b ve c parametrelerini keyfi diğer parametreleri sıfır kabul edersek benzerlik fonksiyonu ve benzerlik değişkenlerini veren adi diferansiyel denklem sistemini şu şekilde yazılabilir

$$\frac{dx}{-bv_0 e^{-\alpha t}} = \frac{dt}{b} = \frac{dy}{cy} \quad (3.93)$$

Denklem (3.93) kullanılarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}, \quad y = e^{mt} f(\xi) \quad (3.94)$$

Burada $m = \frac{c}{b}$ olarak tanımlanmıştır. Denklem (3.94)' teki benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu kullanılarak denklem (3.1) şu adi diferansiyel denkleme indirgenir

$$(v_0^2 - 1)f''(\xi) + 2v_0 m f'(\xi) + m^2 f(\xi) = 0 \quad (3.95)$$

Denklem (3.95) çözülüp gerçek değişkenlere ters dönüşüm yapılırsa şu çözüm fonksiyonu elde edilir

$$y = e^{mt} \left[c_1 e^{\frac{-m}{1+v_0} \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \right)} + c_2 e^{\frac{m}{1-v_0} \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \right)} \right] \quad (3.96)$$

Çözümün zamanla patlamaması için $m < 0$ veya reel kısmı olmayan karmaşık sayı olarak alınabilir.

Diğer bir çözüm için a parametresini keyfi, diğer bütün parametreleri sıfır alalım. Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = \frac{1}{t} \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \right), \quad y = f(\xi) \quad (3.97)$$

Denklem (3.97) kullanılarak denklem (3.1) aşağıdaki adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir

$$(\xi^2 - 1)f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) = 0 \quad (3.98)$$

Denklem (3.98)'den benzerlik fonksiyonu için çözüm elde edip ters dönüşüm yaparsak gerçek değişkenler cinsinden şu çözüm fonksiyonunu elde edebiliriz

$$y = C \ln \left(\frac{x + \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} - t}{x + \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} + t} \right) \quad (3.99)$$

Yine denklem (3.92)'deki parametrelerin değişik kombinasyonları kullanılarak değişik çözümler üretilebilir.

Bu bölümde hızın zamana bağlı keyfi değişimi ve özel hız fonksiyonları için infinitesimal jeneratörler elde edilmiş ve bu jeneratörlerin bazı özel durumları için çözümler üretilmiştir. Burada elde ettiğimiz çözümlerin dışında bu jeneratörler kullanılarak daha birçok çözüm elde edilebilir. Bu bölümde elde ettiğimiz jeneratörler sayesinde hızın zamana bağlı olarak değiştiği aksenal hareketli şerit için tam çözümleri sistematik olarak elde ettik.

3.3 Sınır Değer Problemleri

Bundan önceki bölümde Lie Grup Teorisi kullanılarak hareketli şerit denkleminin tam çözümleri sistematik olarak elde edildi. Ele alınan sınır değer problemi için elde edilen bu çözümlerin büyük bir kısmı uygun olmayabilir. Sınır değer problemlerinin çözümleri deneme yanılma metodunun yanısıra sistematik yolla da elde edilebilir. Nonlineer problemlerde denklemin yanısıra sınır şartlarının da invaryant (değişmez) kaldığı simetriler uygun çözümleri verir. Lineer problemlerde durum bu kadar kısıtlayıcı değildir. Dolayısı ile bu şartı uygulamak bu çözümleri de yok edebilir. Benzerlik dönüşümü ile kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme çevirmek yerine kanonik koordinatlar kullanılarak bir kısmi diferansiyel denklemden daha basit bir kısmi diferansiyel denklem elde etme durumunda ise sınır şartı problemi kendiliğinden ortadan kalkar. Bu bölümde özel bir sınır şartlı için uygun çözümleri araştıracağız. İki ucundan sabitlenmiş şeriti ele alalım. Bu durumda aksenal hareketli şerit için sınır şartlarını şu şekilde yazabiliriz

$$y(0,t)=y(1,t)=0 \quad (3.100)$$

3.3.1 Sabit Hız

Bu bölümde sabit hızla hareket eden şerit problemini ele alacağız. Bu durum için tam analitik çözüm elde etmek mümkündür. Önce bu sınır şartlarına sahip sabit hızlı şerit için çözüm üretmeye çalışalım. Bunun için denklem (3.62)'deki çözüm fonksiyonunu ele alalım. Gerekli türevleri alıp bu fonksiyonu denklem (3.1)'de yerine yerleştirecek katsayılar için şu denklemi elde ederiz

$$\gamma^2 + 2v\gamma\alpha + (v^2-1)\alpha^2 = 0 \quad (3.101)$$

burada α 'yı γ cinsinden şöyle elde ederiz

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{1+v}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma}{1-v} \quad (3.102)$$

Bu durumda denklem (3.62)'deki çözüm fonksiyonu şu şekle dönüşür

$$y(x,t) = e^{\gamma t} (c_1 e^{-\frac{\gamma}{1+v}x} + c_2 e^{\frac{\gamma}{1-v}x}) \quad (3.103)$$

Bu çözüme sınır şartlarını uygulayalım

$$y(0,t) = e^{\gamma t} (c_1 + c_2) = 0, \quad c_1 = -c_2 \quad (3.104)$$

diğer sınır şartını uygularsak

$$y(1,t) = c_1 e^{\gamma t} (e^{\alpha_1} - e^{\alpha_2}) = 0 \quad (3.105)$$

Bu denklemdeki katsayı terimi sıfır değildir. Basit olmayan bir çözüm elde etmek için parantezin içinin sıfır olması gerekmektedir. Bu durumda α_1 ve α_2 'nin sanal olması gerekir.

$$\alpha_1 = i \bar{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = i \bar{\alpha}_2, \quad \gamma = i \bar{\gamma} \quad (3.106)$$

Denklem (3.105)'in sağlanabilmesi için

$$\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_1 + 2n\pi \quad (3.107)$$

elde edilir. Bu eşitlik denklem (3.102)'de yerine yerleştirilirse

$$\bar{\gamma} = n\pi(1-v^2), \quad \bar{\alpha}_1 = -n\pi(1-v), \quad \bar{\alpha}_2 = n\pi(1+v) \quad (3.108)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler denklem (3.103)'de yerine yerleştirilirse

$$y(x,t) = C_n e^{in\pi(1-v^2)t} [e^{in\pi(v-1)x} - e^{in\pi(v+1)x}] \quad (3.109)$$

veya parantezin içine Euler formülü uygulanırsa

$$y(x,t) = C_n e^{in\pi(1-v^2)t} e^{in\pi vx} \sin n\pi x \quad (3.110)$$

elde edilir. Deplasman fonksiyonu reel bir fonksiyondur. Dolayısı ile bu denklem eşleniği ile toplanıp gerekli işlemler yapılırsa kapalı fonksiyonlar cinsinden şu forma dönüşür

$$y(x,t) = C_n \sin n\pi x \cos[n\pi(1-v_0^2)t+n\pi v_0 x+\theta] \quad (3.111)$$

3.3.2 Harmonik Hız

Bu durum için yaklaşık bir analitik çözüm elde edeceğiz. Harmonik hız değişimlerinin küçük olduğunu düşünelim. Denklem (3.86)'daki çözüm fonksiyonuna sınır şartlarını uygulayalım. Önce aşağıdaki kabulleri yapalım.

$$v_1 = \varepsilon \bar{v}_1 \quad (3.112)$$

$$\gamma = i \bar{\gamma} \quad (3.113)$$

Denklem (3.112) ve (3.113)'ü denklem (3.86)'daki çözümde yerine yerleştirir, taylor açılımı yapar ve ε mertebesine kadarki terimleri muhafaza edersek şu denklemi elde ederiz

$$y(x,t) = e^{\bar{\gamma}t} \left(c_1 e^{-\frac{\bar{\gamma}x}{1+v_0}} + c_2 e^{\frac{\bar{\gamma}x}{1-v_0}} \right) + \varepsilon e^{\bar{\gamma}t} \left(\frac{\bar{v}_1}{\Omega} \cos \Omega t \right) \left(-\frac{1}{1+v_0} c_1 e^{-\frac{\bar{\gamma}x}{1+v_0}} + \frac{1}{1-v_0} c_2 e^{\frac{\bar{\gamma}x}{1-v_0}} \right) \quad (3.114)$$

Bu denklemi mertebelerine ayırırsak

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 \quad (3.115)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$y_0(x,t) = e^{\bar{\gamma}t} \left(c_1 e^{-\frac{\bar{\gamma}x}{1+v_0}} + c_2 e^{\frac{\bar{\gamma}x}{1-v_0}} \right) \quad (3.116)$$

$$y_1(x,t) = e^{\bar{\gamma}t} \left(\frac{\bar{v}_1}{\Omega} \cos \Omega t \right) \left(-\frac{1}{1+v_0} c_1 e^{-\frac{\bar{\gamma}x}{1+v_0}} + \frac{1}{1-v_0} c_2 e^{\frac{\bar{\gamma}x}{1-v_0}} \right) \quad (3.117)$$

olarak tanımlanmıştır. Sinüzoidal hız fonksiyonuna sahip şerit için hareket denklemi bu iki çözümün toplamıdır. 1 mertebesindeki çözüm sabit hızlı şerit çözümü ile aynı formdadır. Sınır şartlarını 1 mertebesine uygulayalım. Denklem (3.116)'da $\bar{\gamma}$ şu şekilde tanımlıdır

$$\bar{\gamma} = n\pi(1-v_0^2) \quad (3.118)$$

1 mertebesindeki çözüm sınır şartları uygulandığında denklem (3.111)' in aynısı olacaktır. Denklem (3.118)' deki eşitliği denklem (3.117)'de yerine koyarsak ve gerekli düzenlemeleri yaparsak ε mertebesindeki çözümü şu şekilde elde ederiz

$$y_1(x,t) = C_n n\pi \frac{\bar{v}_1}{\Omega} \cos\Omega t \{ \cos n\pi x \cos[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta] - v_0 \sin n\pi x \sin[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta] \} \quad (3.119)$$

Gerçek çözüm 1 ve ε mertebesindeki çözümlerin toplamıdır.

$$y(x,t) = C_n \{ \sin n\pi x \cos[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta] + n\pi \frac{v_1}{\Omega} \cos\Omega t (\cos n\pi x \cos[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta] - v_0 \sin n\pi x \sin[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta]) \} \quad (3.120)$$

Elde ettiğimiz çözüm ε mertebesindeki bir yaklaşıklıkla sınır şartlarını sağlamaktadır.

3.3.3 Ekspansiyel Hız

$v = v_0(1 - e^{-\alpha t})$ hız fonksiyonuna sahip hareketli şerit denkleminin çözümü olan denklem (3.96)' ya denklem (3.100)'deki sınır şartlarını uygulayalım. Burada v_0/α değerinin yeterince küçük olduğunu kabul edelim. Benzer şekilde işlemler yapılırsa yaklaşık çözüm şu şekilde bulunur

$$y(x,t) = C \{ \cos[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta] \sin n\pi x - n\pi \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} (\cos n\pi x \cos[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta] - v_0 \sin n\pi x \sin[n\pi(1-v_0^2)t + n\pi v_0 x + \theta]) \} \quad (3.121)$$

Bu denklem de sınır şartlarını ε mertebesindeki bir yaklaşıklık ile sağlamaktadır. Böylece bu bölümde elde edilen tam çözümlere sınır şartları uygulayarak sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümler elde edilmiştir.

3.4 Sayısal Örnekler

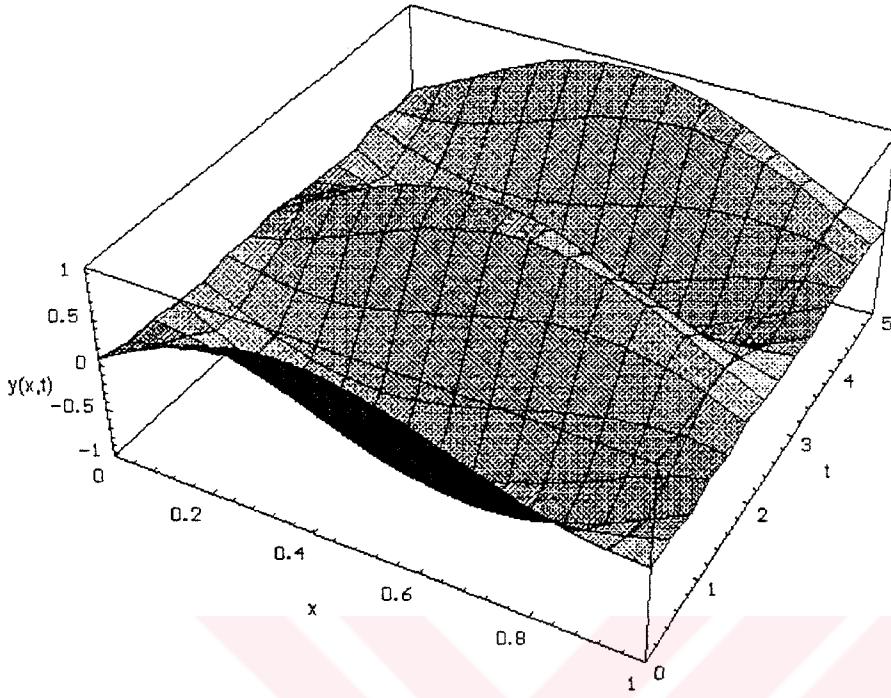
Bu bölümde önceki bölümlerde elde ettiğimiz, sınır şartlarını yaklaşık sağlayan çözüm fonksiyonlarını kullanarak, değişik parametreler için grafikler çizilecektir. Önce sinüzoidal hareketli şeritin çözüm fonksiyonu ele alınacak ve değişik durumlar için grafikler çizilecektir. Daha sonra eksponansiyel hareketli şeritin yaklaşık çözümü ele alınarak benzer şekilde değişik parametrelere göre grafikler elde edilecektir.

Önce denklem (3.120)' deki çözüm fonksiyonu kullanılarak sinüzoidal hareketli şerit için grafikler çizilmiştir. Şekil (3.1) ve (3.2)'de $v_0=0.5$, $v_1=0.1$ $\Omega=5$ ve $C=1$ seçilerek 1. ve 2. mod için zaman ve mekan değişkenlerine göre deplasman grafiği üç boyutlu olarak çizilmiştir. Şekil (3.3) ve (3.4)' te ise aynı parametre değeri ele alınmış ve $t=5$ anında x' e göre 1. ve 2. mod için deplasman grafiği çizilmiştir. Bu grafiklerde uç noktalarda sınır şartlarının yaklaşık olarak sağlandığı görülmüştür. Şekil (3.5) ve (3.6)' da yine aynı değerler için $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod durumunda deplasmanların zamanla nasıl değiştiği gösterilmiştir. Şekil (3.7) ve (3.8)' de ise aynı grafikler $x=1$ noktası için çizilmiştir. Dört grafikte de uç noktalarda deplasman sınır şartlarının yaklaşık olarak sağlandığı gösterilmiştir. 2. mod durumunda uç noktadaki deplasmanların daha büyük olduğu belirlenmiştir. Bu da çözümün yapısından kaynaklanmaktadır. Şekil (3.9) ve (3.10)' da ise $x=0.5$ noktasında 1. ve 2. mod için deplasman değişim grafiği çizilmiştir. Bu iki grafik kullanılarak 1. ve 2. mod için tabii frekanslar hesaplanabilir. Deplasman genliğinin beklenildiği gibi 1. mod durumunda daha büyük olduğu görülmüştür. Şekil (3.11) ve (3.12)' de ise hız değişim frekansı (Ω)' nın değişimiyle $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod için deplasman değişim grafikleri verilmiştir. Buna göre hız değişim frekansı arttıkça uç noktalardaki deplasmanlar sifıra yaklaşmaktadır. Yani sınır şartları daha küçük bir yaklaşıklıkla sağlanmaktadır.

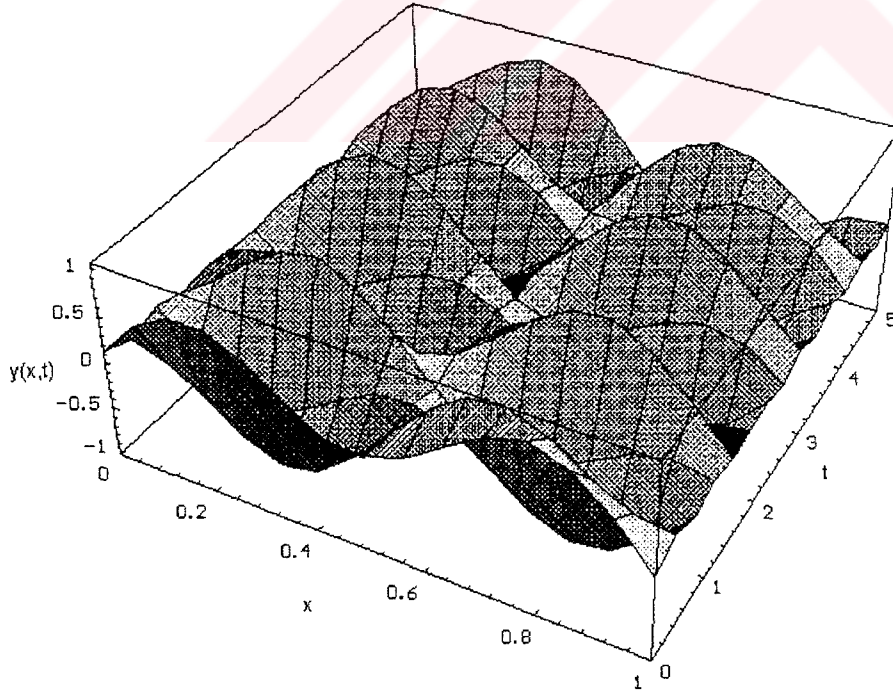
Bundan sonraki grafiklerde ise eksponansiyel hız değişimi için incelemeler yapılmıştır. Grafiklerin çizimi için denklem (3.121)' deki çözüm fonksiyonu kullanılmıştır. Şekil (3.13) ve (3.14)' te $v_0=0.1$ $\alpha=10$ ve $C=1$ seçilerek 1. ve 2. mod için üç boyutlu grafikler çizilmiştir. Şekil (3.15) ve (3.16) da $t=1$ anında 1. ve 2. mod için x' e bağlı olarak deplasman değişim grafiği çizilmiştir. Uçlarda sınır şartlarının yaklaşık olarak sağlandığı görülmüştür. Şekil (3.17-3.20)' de ise uç noktalarda 1. ve 2. mod için zamana bağlı olarak deplasman değişim grafikleri çizilmiştir. Dört şekilde de uç noktalarda deplasmanın zamana bağlı olarak hızlı bir şekilde düştüğü görülmüştür. Bu da çözüm fonksiyonunun yapısından kaynaklanmaktadır. Şekil (3.21) ve (3.22)' de ise $x=0.5$ noktasında deplasmanın zamanla değişimi gösterilmiştir. Bu iki şekil kullanılarak ele alınan parametreler için 1. ve 2. mod tabii frekansları hesaplanabilir. Hem sinüzoidal hız değişimi durumunda hem de eksponansiyel hız değişimi durumunda hesaplayacağımız tabii

frekanslar boyutsuz tabii frekanslardır. Bu frekansları boyutlu hale getirmek için denklem (2.18)'deki boyutsuzlaştırma tanımlarını kullanarak ters dönüşüm yapmamız gerekir. Son olarak Şekil (3.23) ve (3.24)'te α katsayısının değişimi ile $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod için deplasman değişimi gösterilmiştir. Her iki şekilde de α katsayısı arttıkça uç noktalarda deplasmanın hızlı bir şekilde düştüğü ve hatanın azaldığı görülmüştür.

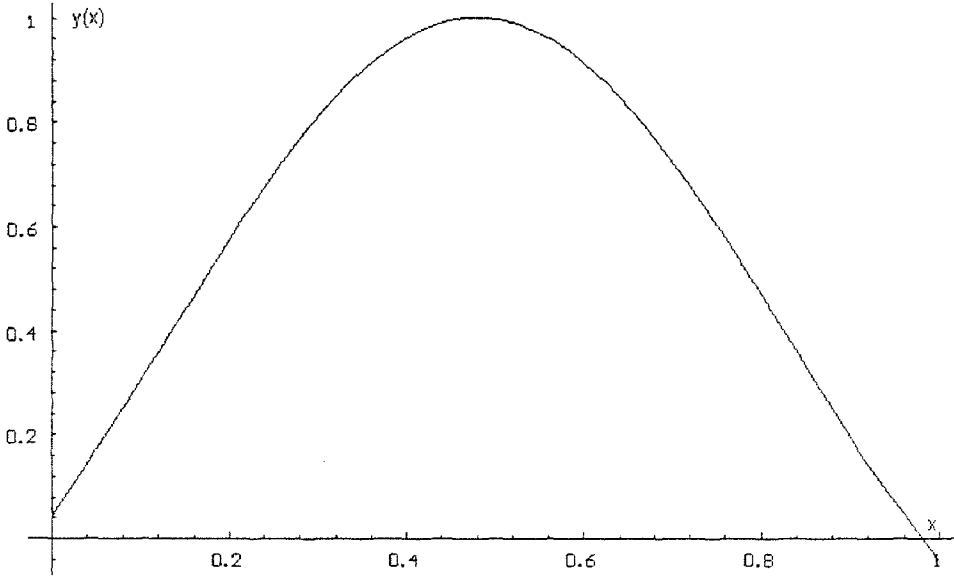




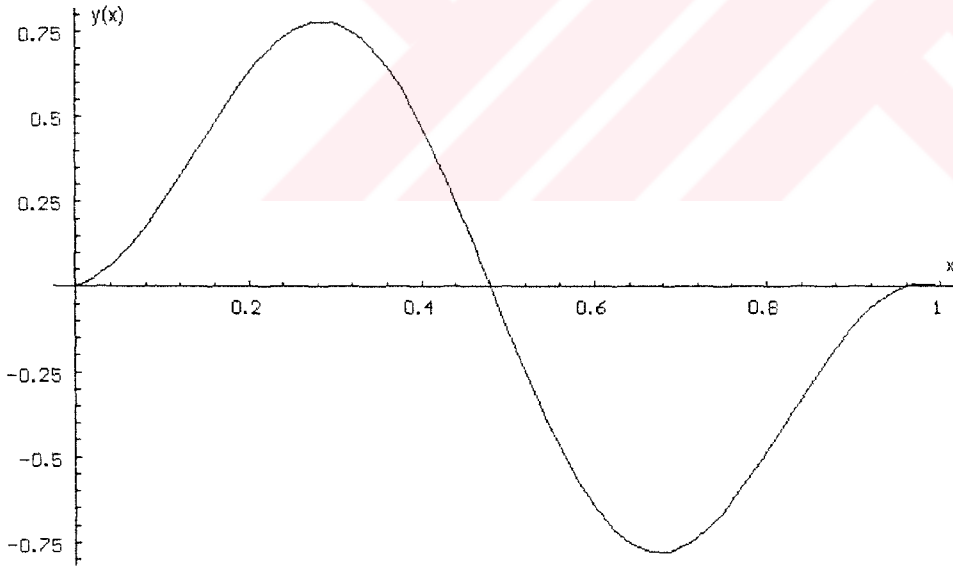
Şekil 3.1. Sinüzoidal hareketli şerit için 1. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



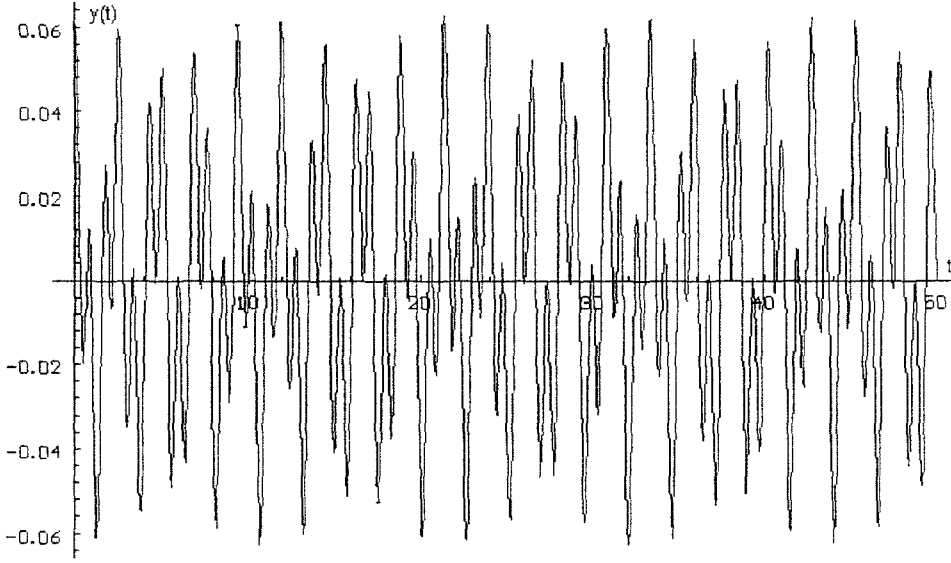
Şekil 3.2. Sinüzoidal hareketli şerit için 2. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



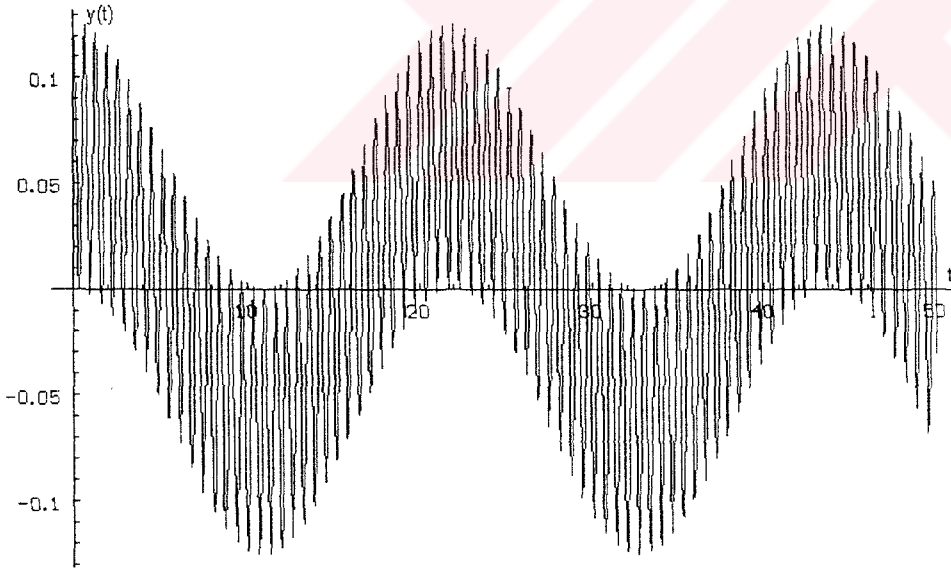
Şekil 3.3. $t=5$ durumunda sinüzoidal hareketli şerit için 1. mod deplasman grafiği
($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



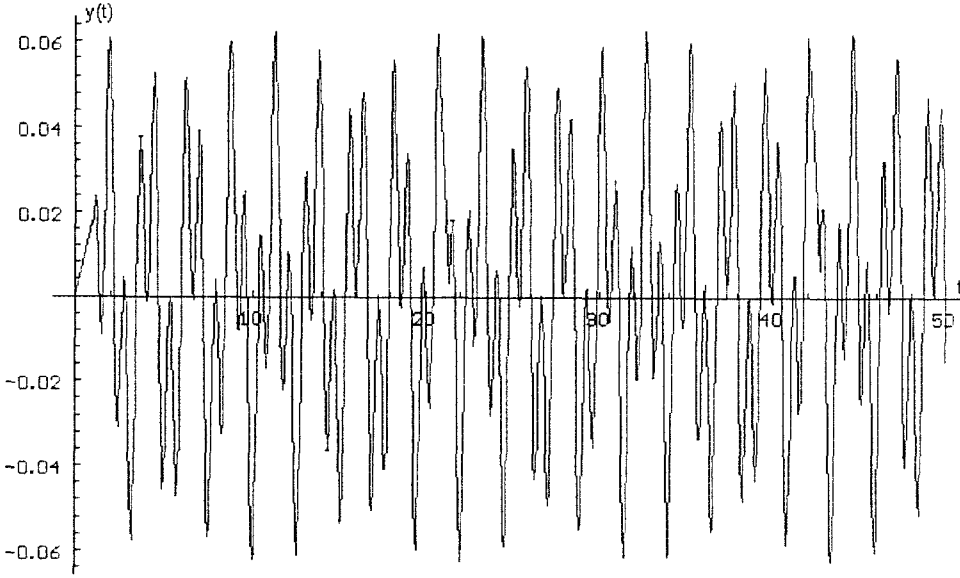
Şekil 3.4. $t=5$ durumunda sinüzoidal hareketli şerit için 2. mod deplasman grafiği
($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



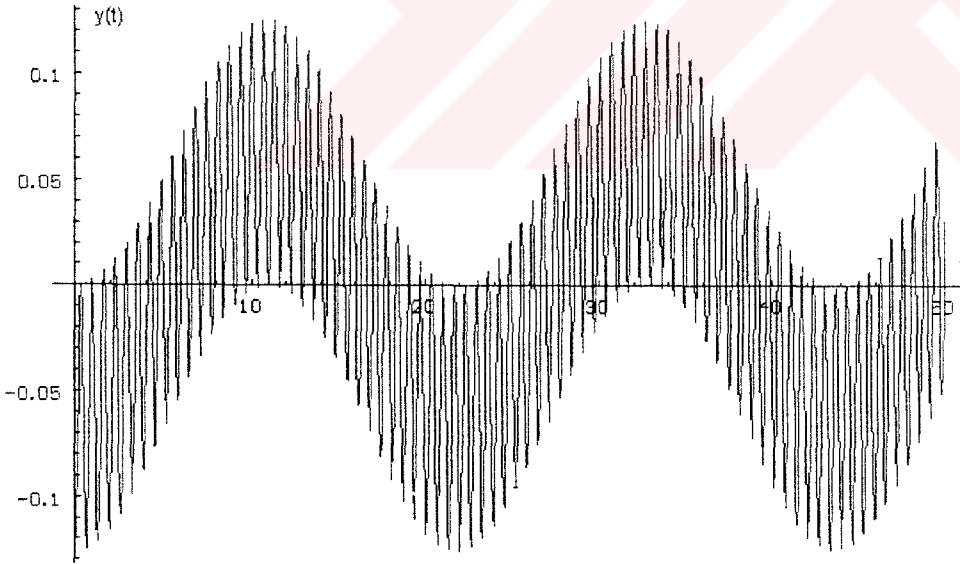
Şekil 3.5. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



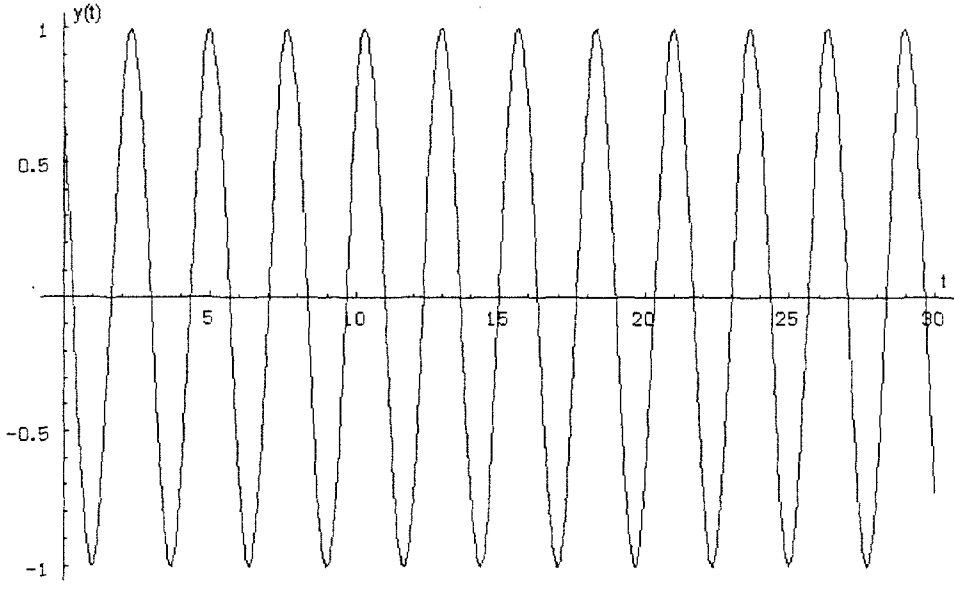
Şekil 3.6. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



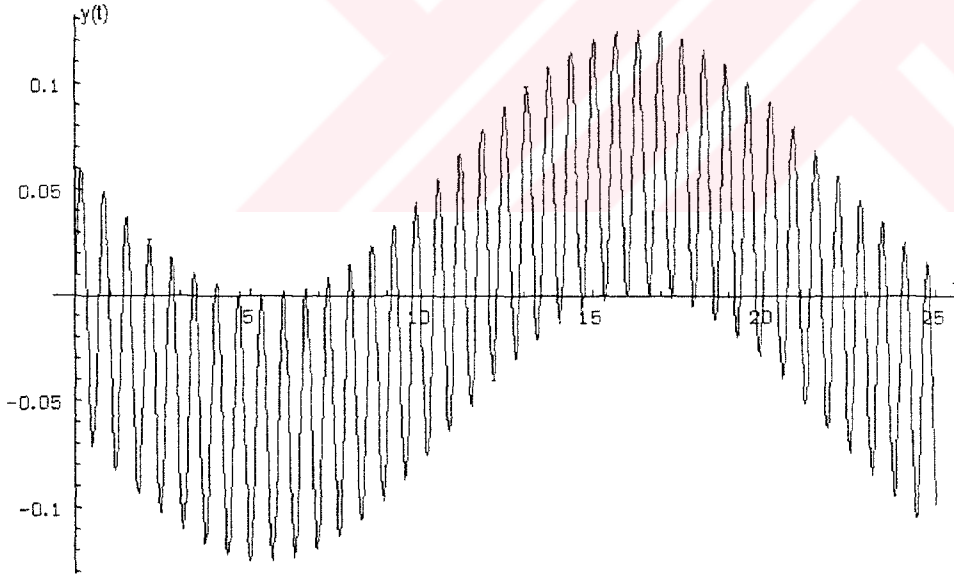
Şekil 3.7. $x=1$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği
(1.mod)($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



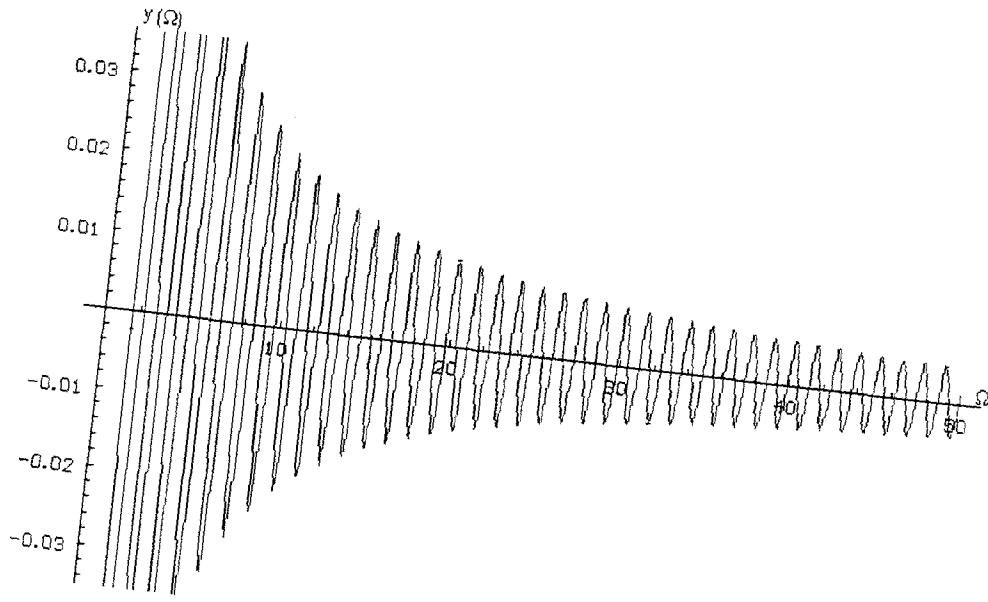
Şekil 3.8. $x=1$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği
(2.mod)($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



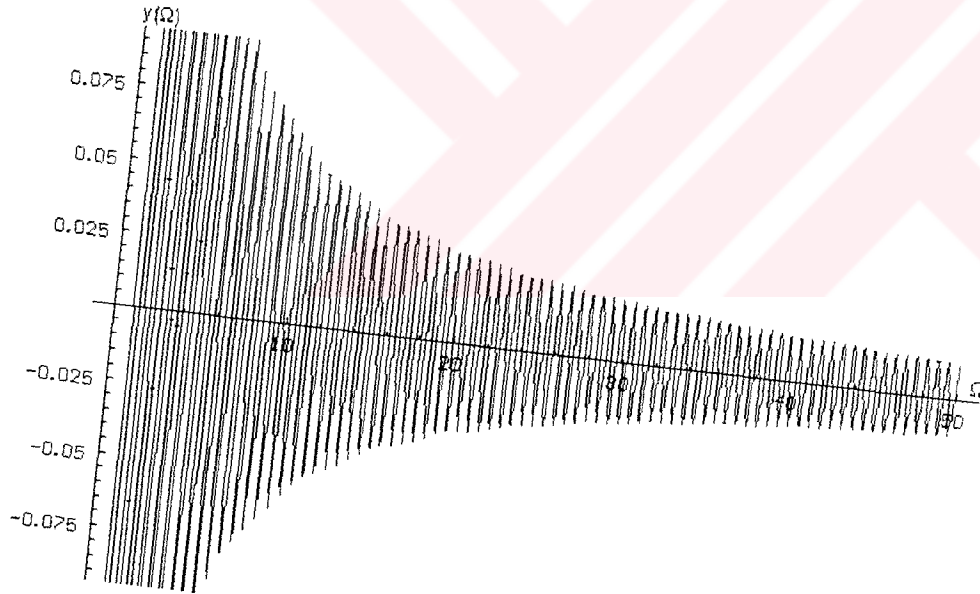
Şekil 3.9. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



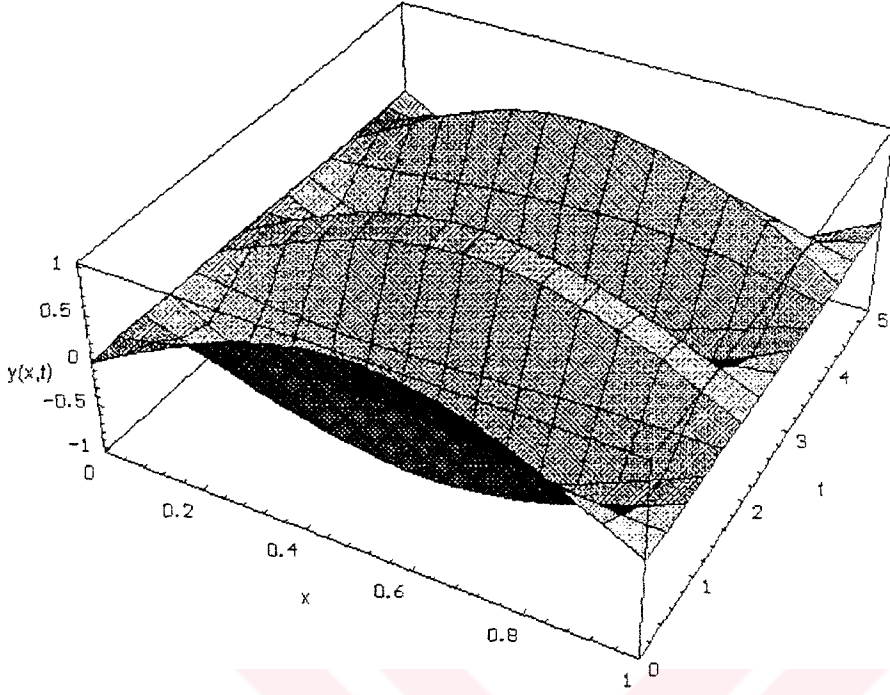
Şekil 3.10. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2.mod) ($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $\Omega=5$, $C=1$)



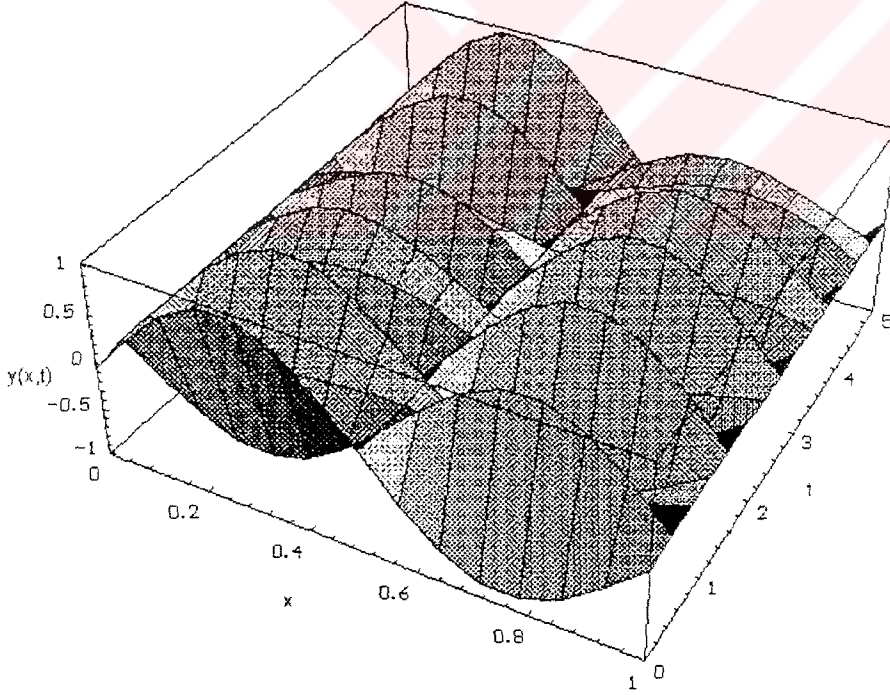
Şekil 3.11. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için hız değişim frekansı - deplasman grafiği
(1.mod)($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $t=5$, $C=1$)



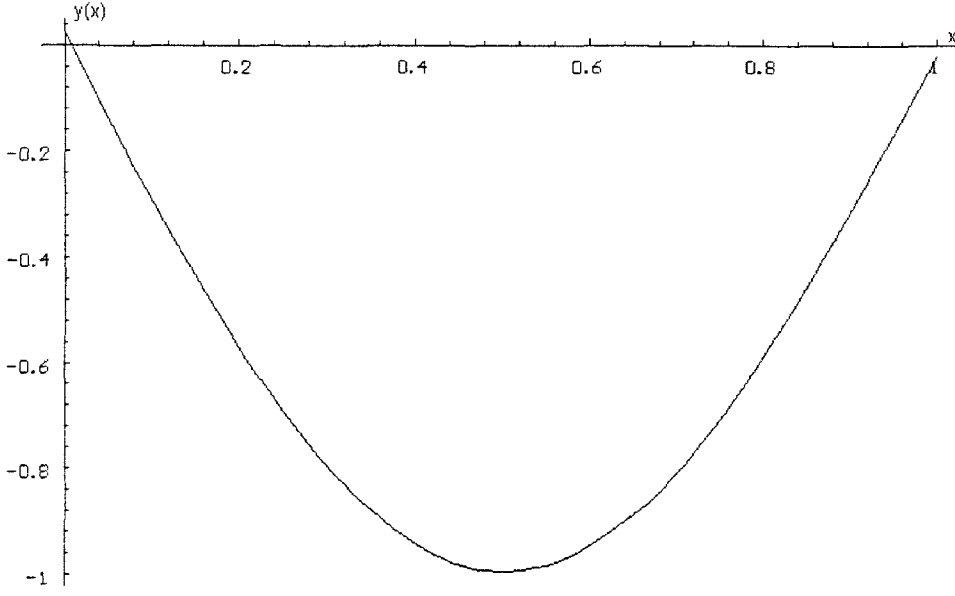
Şekil 3.12. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli şerit için hız değişim frekansı - deplasman grafiği
(2.mod)($v_0=0.5$, $v_1=0.1$, $t=5$, $C=1$)



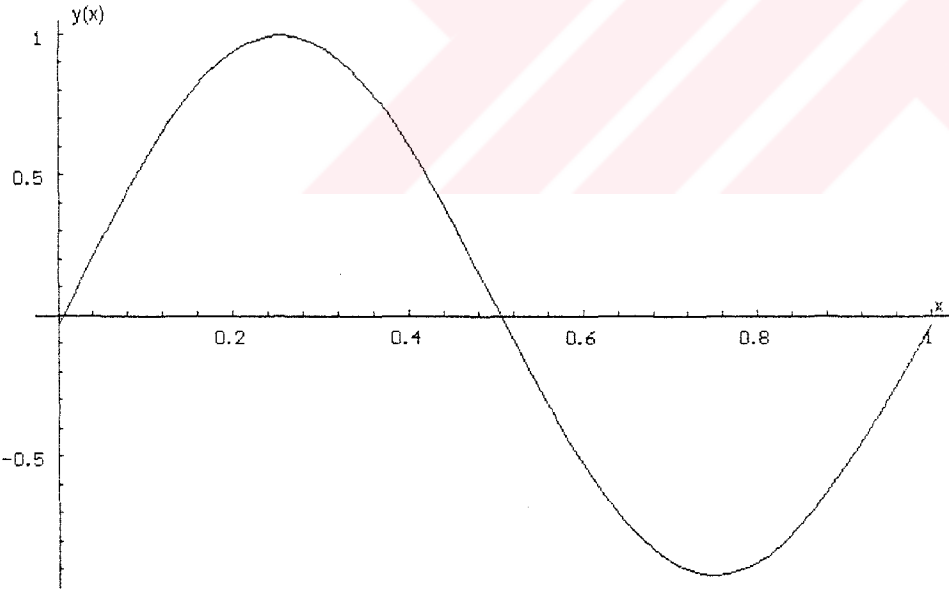
Şekil 3.13. Ekspansiyonel hareketli şerit için 1. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.1$, $\alpha=10$, $C=1$)



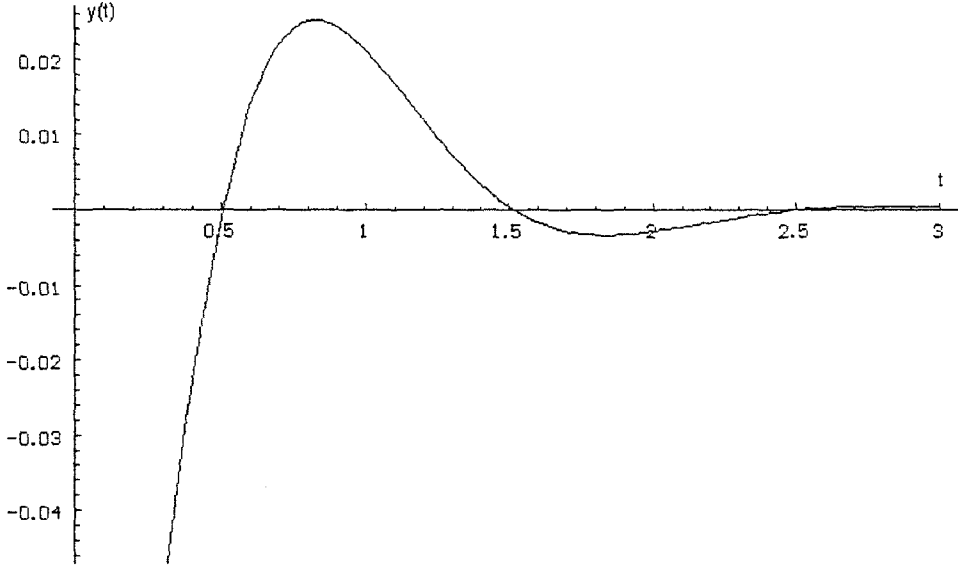
Şekil 3.14. Ekspansiyonel hareketli şerit için 2. mod deplasman grafiği. ($v_0=0.1$, $\alpha=10$, $C=1$)



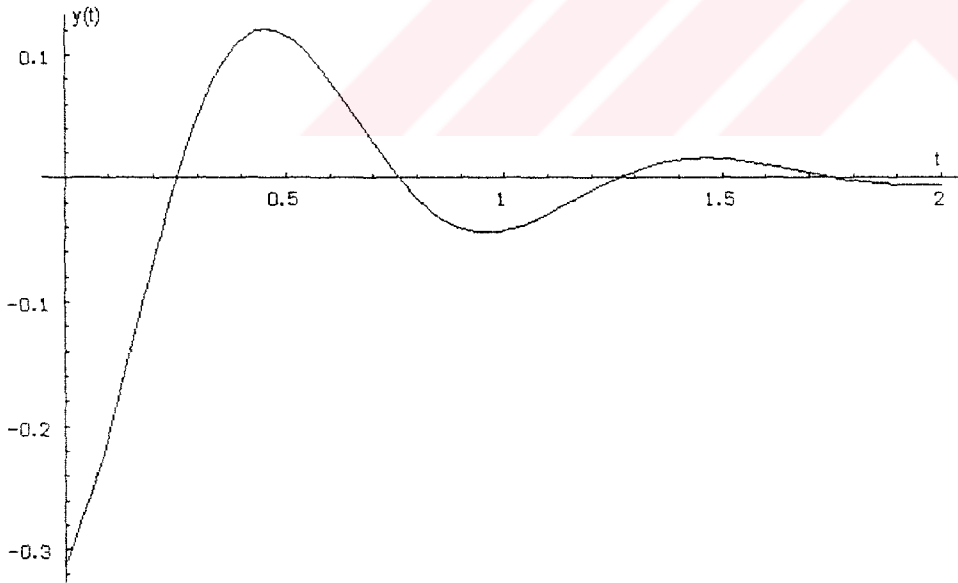
Şekil 3.15. $t=1$ durumunda eksponansiyel hareketli şerit için 1. mod deplasman grafiği
 $(v_0=0.1, \alpha=2, C=1)$



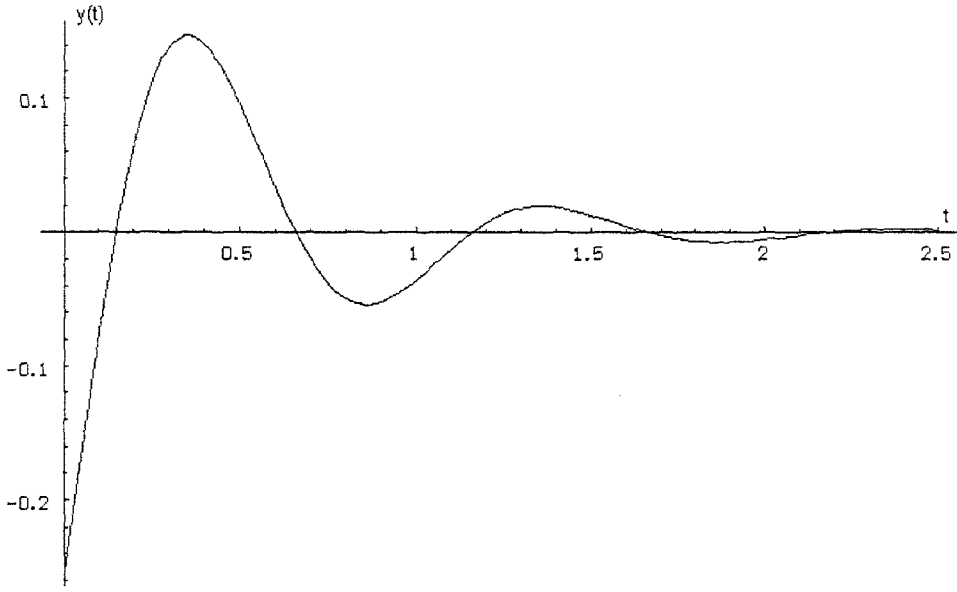
Şekil 3.16. $t=1$ durumunda eksponansiyel hareketli şerit için 2. mod deplasman grafiği
 $(v_0=0.1, \alpha=2, C=1)$



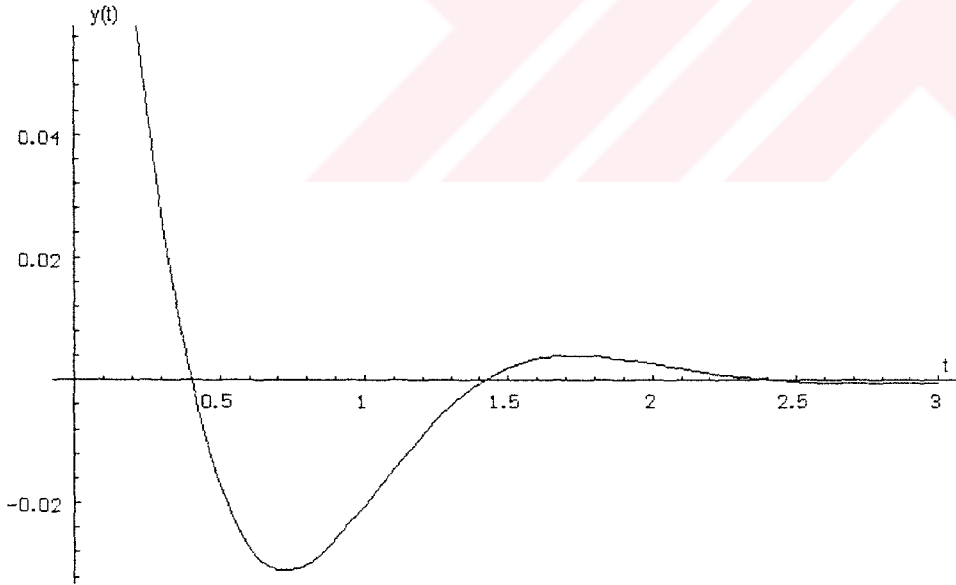
Şekil 3.17. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1. mod) ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)



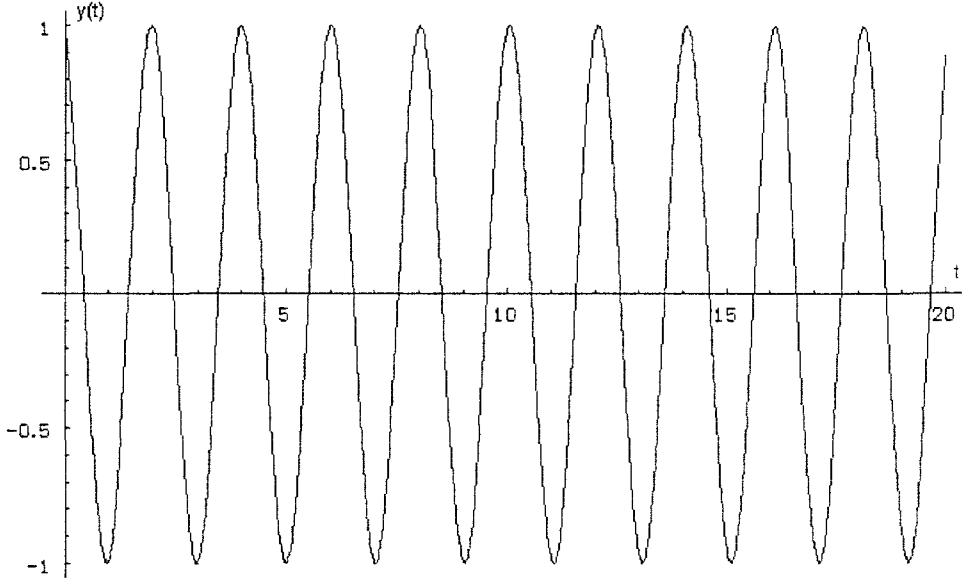
Şekil 3.18. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2. mod) ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)



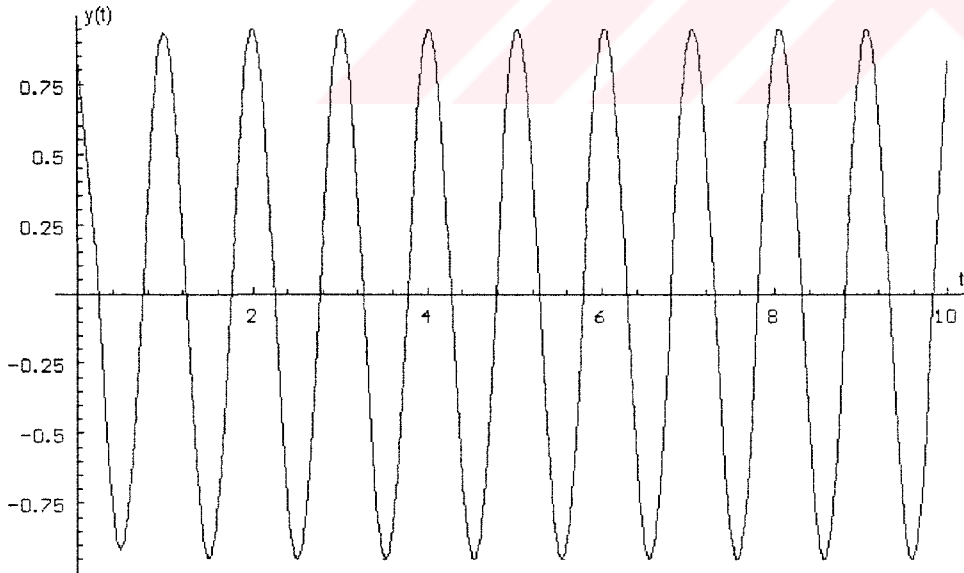
Şekil 3.19. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1. mod) ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)



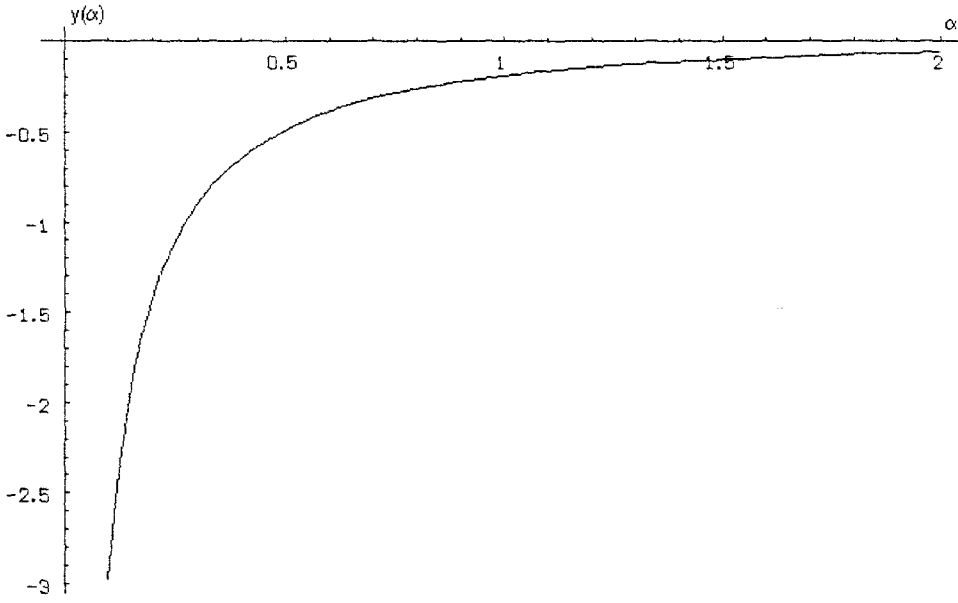
Şekil 3.20. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2. mod) ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)



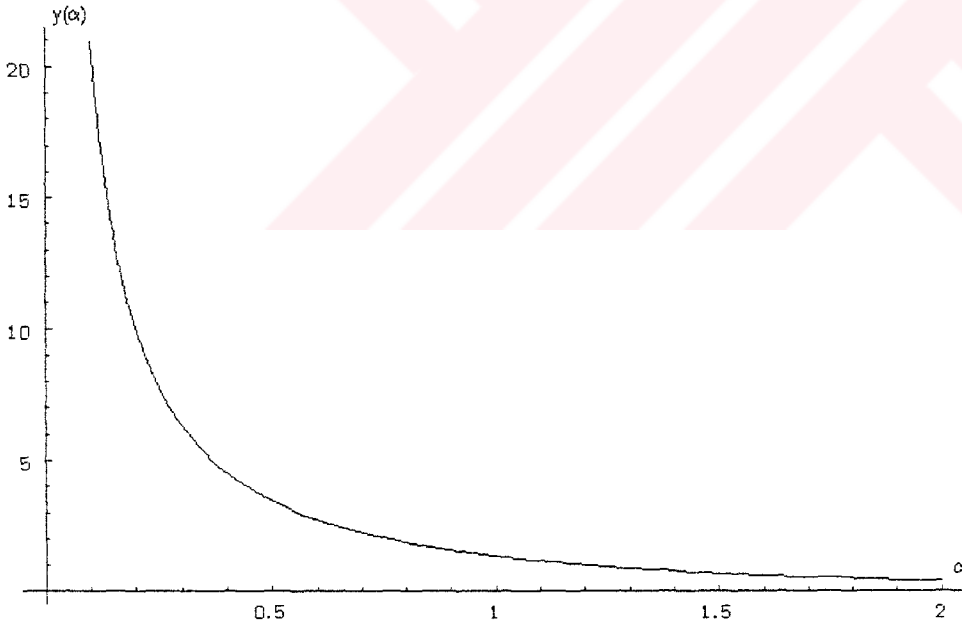
Şekil 3.21. $x=0.5$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (1. mod) ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)



Şekil 3.22. $x=0.2$ noktasında eksponansiyel hareketli şerit için deplasmanın zamana bağlı değişim grafiği (2. mod) ($v_0=0.1$, $\alpha=2$, $C=1$)



Şekil 3.23. α katsayısının değişimi ile deplasman değişim grafiği (1. mod) ($v_0=0.4$, $x=0$, $t=0.5$, $C=1$)



Şekil 3.24. α katsayısının değişimi ile deplasman değişim grafiği (2. mod) ($v_0=0.4$, $x=0$, $t=0.5$, $C=1$)

4. EKSENEL HAREKETLİ ESNEK KİRİŞ PROBLEMİ

Bu bölümde aksenal hareketli esnek kiriş problemi ele alınacaktır. Kirişin eğilme direngenliğinin küçük olduğu kabul edilecektir. Denklem (2.30)' da aksenal hareketli kiriş için hareket denklemini elde etmiştik. Bu çalışmada lineer hareketi incelediğimiz için bu denklemin sağ tarafı ele alınmayacaktır. Esnek kirişi ele aldığımız için hareketli sürekli ortamın enine direngenliği gösteren v_f katsayısı ε mertebesinde alınacaktır ($\varepsilon \ll 1$). Bu durumda ele alınan denklemde en yüksek mertebeden türeve sahip terimin önündeki katsayı ε mertebesinde olacaktır. Bu ise sınır tabakası tipinde bir çözümün var olduğunu gösterir. Kirişin uçlarına yakın olan noktalarda ayrı bir perturbasyon açılımı yapılmalıdır. Bu açılım iç açılım olarak adlandırılır. Uçlara uzak olan noktalarda ise dış açılım veya düzgün perturbasyon açılımı yapmak yeterlidir. Bu çözüm (dış açılım çözümü) uç noktalardan uzak yerlerde esnek kiriş denklemi için geçerli bir çözümdür. Ancak ele aldığımız sürekli ortam kiriş olduğu için dört tane sınır şartı ortaya çıkmaktadır. Bu sebeple elde edeceğimiz çözüm geriye kalan iki sınır şartını sağlamayacaktır. Kirişin uç noktalarında dış açılım çözümü geçersiz olacaktır. Bu problemi ortadan kaldırmak için Matched Asymptotic Expansions metodu kullanılacaktır. Uç noktalarda da geçerli olan bir çözüm elde etmek için kirişin her iki ucunda ikinci bir açılım (iç açılım) daha yapılacaktır. Elde edeceğimiz iç açılım çözümü ise sadece kirişin uçlarına çok yakın olan yerlerde geçerli olacaktır. Dış açılım çözümü ile iç açılım çözümü birleştirilerek kirişin dört sınır şartını da sağlayacak olan kompozit çözüm elde edilecektir. Böylece elde edilecek olan kompozit çözüm kirişin bütün noktaları için geçerli olacaktır. Bu problem harmonik değişen hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonları için çözülecektir. Sınır şartı olarak basit-basit ve ankastre-ankastre mesnetli durumlar ele alınacaktır. Bu bölümde yapılan çalışmaların bir bölümü uluslararası bir sempozyumda bildiri olarak sunulmuştur (Öz et al. (1999))

Eksenel hareketli esnek kiriş için hareket denklemini şu şekilde yazabiliriz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial y}{\partial x} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \bar{v}_f^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (4.1)$$

Burada y kirişin düşey deplasmanını, x mekan koordinatını, t zaman değişkenini göstermektedir. Denklemde $v(t)$ zamana bağlı hızdır. \bar{v}_f ise hareketli sürekli ortamın kiriş özelliğini gösteren katsayıdır ve denklem (2.18)' de tanımlanmıştır. Kirişin enine direngenliği küçük kabul edildiğinden $\bar{v}_f^2 = \varepsilon v_f^2$ olarak alınacaktır. Harmonik değişen hız ve eksponansiyel değişen hız fonksiyonları için çözümler elde edilecektir.

4.1 Harmonik Hız

Belli bir hız etrafında harmonik değişen hız fonksiyonunu ele alalım. Hız değişim genliğini ifade eden katsayıyı ε mertebesinde seçelim. Bu durumda hız fonksiyonu şu şekilde olur

$$v=v_0+\varepsilon v_1 \sin \Omega t \quad (4.2)$$

Bu hız fonksiyonunu denklem (4.1)'e yerleştirirsek hareket denklemi şu hale gelir

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\dot{y}'v_0 + \varepsilon 2\dot{y}'v_1 \sin \Omega t + \varepsilon y'v_1 \Omega \cos \Omega t + \varepsilon v_1^2 y'' + \\ (v_0^2 + \varepsilon^2 v_1^2 \sin^2 \Omega t + 2\varepsilon v_0 v_1 \sin \Omega t - 1)y'' = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Bu şartlar altında denklem (4.1)'e ait dış açılım ve iç açılım çözümlerini elde edelim.

4.1.1 Dış Açılım Çözümü

Bu bölümde esnek kiriş için dış açılım çözümünü bir perturbasyon metodu olan çok zaman ölçekli metodu kullanarak elde edeceğiz. Yer değiştirme fonksiyonu için aşağıdaki açılımı yapabiliriz

$$y^\circ(x,t,\varepsilon) = y_0^\circ(x, T_0, T_1) + \varepsilon y_1^\circ(x, T_0, T_1) \quad (4.4)$$

Burada y_0° dış açılımın ilk mertebesindeki çözümü, y_1° ise ε mertebesindeki çözümü göstermektedir. $T_0=t$ ve $T_1=\varepsilon t$ sırasıyla hızlı ve yavaş zaman değişkenlerini göstermektedir. Zamana göre türevler ise

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \quad (4.5)$$

şeklindedir ($D_n = \partial / \partial T_n$). Dış açılım çözümü için denklem (4.4) ve (4.5)'i denklem (4.1)'e yerleştirelim ve elde edilen denklemi mertebelerine ayıralım. Bu durumda şu denklemleri elde ederiz

1 mertebesi:

$$D_0^2 y_0^o + 2v_0 D_0 y_0^o + (v_0^2 - 1) y_0^o = 0 \quad (4.6)$$

ε mertebesi:

$$D_0^2 y_1^o + 2v_0 D_0 y_1^o + (v_0^2 - 1) y_1^o = -v_1^2 y_0^{oiv} - 2D_0 D_1 y_0^o - 2v_0 D_1 y_0^o - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y_0^o - \Omega v_1 \cos \Omega T_0 y_0^o - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y_0^o \quad (4.7)$$

1 mertebesindeki denklem, sabit hızla hareket eden şerit denklemdir. Çözümü şu şekilde yazılabilir

$$y_0^o(x, T_0, T_1) = A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} Y_n(x) + \bar{A}_n(T_1) e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n(x) \quad (4.8)$$

Bu çözümü denklem (4.6)'ya yerleştirirsek

$$(v_0^2 - 1) Y_n'' + 2iv_0 \omega_n Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Şerit için sınır şartlarını şu şekilde alabiliriz

$$Y_n(0) = 0, \quad Y_n(1) = 0 \quad (4.10)$$

Sabit hızla hareket eden şerit denkleminin çözümü önceki bölümde yapılmıştı. Buna göre

$$Y_n(x) = A_n e^{i\omega_n t} e^{i\alpha_n x} \sin n\pi x, \quad \omega_n = n\pi(1 - v_0^2), \quad \alpha_n = n\pi v_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

yazılabilir. ε mertebesindeki çözümü elde edebilmek için denklem (4.8)'de yazdığımız çözümü denklem (4.7)'de yerine yerleştirip gerekli düzenlemeleri yaparsak şu denklemi elde ederiz

$$D_0^2 y_1^o + 2v_0 D_0 y_1^o + (v_0^2 - 1) y_1^o = (-v_1^2 A_n Y_n^{iv} - 2 D_1 A_n i\omega_n Y_n - 2v_0 D_1 A_n Y_n') e^{i\omega_n T_0} + k.e + S.O.T \quad (4.12)$$

Bu denklemde k.e kompleks eşleniği, S.O.T ise seküler olmayan terimleri göstermektedir. ε mertebesi için yer değiştirme fonksiyonunu şu şekilde yazalım

$$y_1^o(x, T_0, T_1) = \phi_n(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + W(x, T_0, T_1) + k.e \quad (4.13)$$

Burada ilk terim seküler terimlerle, ikinci terim ise seküler olmayan terimlerle ilgilidir. Bu çözümü denklemin (4.12)'ye yerleştirip ϕ_n ile ilgili olan kısmı ayrıştırırsak elde edilen denklemin birinci mertebedeki denkleminin homojen olmayan hali olur. Homojen denklemin basit olmayan bir çözümü olduğuna göre homojen olmayan denkleminin çözülebilmesi çözülebilirlik şartını sağlamasına bağlıdır (Nayfeh (1981)). Denklem (4.13) denklemin (4.12)'ye yerleştirilirse

$$(v_0^2 - 1)\phi_n'' + 2iv_0\omega_n\phi_n' - \omega_n^2\phi_n = -v_f^2 A_n Y_n^{iv} - 2D_1 A_n i\omega_n Y_n - 2v_0 D_1 A_n Y_n' \quad (4.14)$$

elde edilir. Sınır şartları ise şu şekildedir

$$\phi_n(0)=0, \quad \phi_n(1)=0 \quad (4.15)$$

Çözülebilirlik şartını bulmak için denklemin (4.14)'ün her iki tarafını keyfi bir u_n fonksiyonu ile çarpıp tanım kümesi üzerinden integre edelim.

$$\int_0^1 u_n \{ (v_0^2 - 1)\phi_n'' + 2iv_0\omega_n\phi_n' - \omega_n^2\phi_n \} dx = \int_0^1 u_n \{ -v_f^2 A_n Y_n^{iv} - 2D_1 A_n i\omega_n Y_n - 2v_0 D_1 A_n Y_n' \} dx \quad (4.16)$$

Denklemin (4.16)'da türevleri kısmi integrasyon ile ϕ_n fonksiyonundan u_n fonksiyonu üzerine taşırsak şu denklemin elde ederiz

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \phi_n \{ (v_0^2 - 1)u_n'' - 2iv_0\omega_n u_n' - \omega_n^2 u_n \} dx + \{ (v_0^2 - 1)(\phi_n' u_n - \phi_n u_n') + 2iv_0\omega_n (\phi_n u_n) \}_0^1 \\ & = \int_0^1 u_n \{ -v_f^2 A_n Y_n^{iv} - 2D_1 A_n i\omega_n Y_n - 2v_0 D_1 A_n Y_n' \} dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

Çözülebilirlik şartını bulmak için denklemin (4.17)'nin sol tarafını sıfıra eşitleyelim. Bu durum integralin içinin sıfır olması ve sınır şartlarının sıfır olması ile mümkündür. Böylece

$$(v_0^2 - 1)u_n'' - 2iv_0\omega_n u_n' - \omega_n^2 u_n = 0 \quad (4.18)$$

ve sınır şartlarının sıfır olabilmesi için

$$u_n(0)=0, \quad u_n(1)=0 \quad (4.19)$$

elde edilir. Denklem (4.18) ve (14.19) birlikte çözümlerse u_n fonksiyonu Y_n fonksiyonun kompleks eşleniği olacak şekilde şöyle elde edilir

$$u_n(x) = \bar{Y}_n(x) \quad (4.20)$$

Bulduğumuz u_n fonksiyonu denklem (4.17)'ye yerleştirilirse çözülebilirlik şartı şu şekilde ortaya çıkar

$$-v_f^2 A_n \int_0^1 Y_n^* \bar{Y}_n dx - 2D_1 A_n \left(i\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n dx + v_0 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n' dx \right) = 0 \quad (4.21)$$

Çözülebilirlik şartının integralleri ise şu şekildedir

$$\int_0^1 Y_n^* \bar{Y}_n dx = C_n^2 \left(\frac{1}{2} (v_0 n \pi)^4 + 3n^4 \pi^4 v_0^2 + \frac{1}{2} n^4 \pi^4 \right) \quad (4.22)$$

$$\int_0^1 \bar{Y}_n Y_n dx = \frac{1}{2} C_n^2 \quad (4.23)$$

$$\int_0^1 \bar{Y}_n Y_n' dx = \frac{1}{2} C_n^2 i n^2 \pi^2 v_0^2 \quad (4.24)$$

Bu sonuçları denklem (4.21)'e yerleştirirsek çözülebilirlik şartı

$$D_1 A_n - i k_0 A_n = 0 \quad (4.25)$$

olarak elde edilir. Burada

$$k_0 = \frac{1}{2} v_f^2 n^3 \pi^3 (v_0^4 + 6v_0^2 + 1) \quad (4.26)$$

olarak tanımlanmıştır. Denklem (4.25)'in çözümünden A_n kompleks fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$A_n = A_0 e^{i k_0 T} \quad (4.27)$$

Bu çözümü denklem (4.8)'deki çözümde yerine koyarsak dış açılım için 1 mertebesindeki çözümü şu şekilde elde ederiz

$$y_0^{\circ}(x, T_0, T_1) = A_0 e^{i(\omega_n + \varepsilon k_0)t} Y_n(x) + k.e. \quad (4.28)$$

Bu çözümü 3. bölümde olduğu gibi kapalı fonksiyonlar cinsinden şu şekilde yazabiliriz

$$y_0^{\circ}(x, T_0, T_1) = A_0 \sin n\pi x \cos[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] \quad (4.29)$$

Burada ω_{n1} katsayısı şu şekilde tanımlanmıştır

$$\omega_{n1} = \omega_n + \varepsilon k_0 = n\pi(1 - v_0^2) + \varepsilon \frac{1}{2} v_f^2 n^3 \pi^3 (v_0^4 + 6v_0^2 + 1) \quad (4.30)$$

ε mertebesindeki y_1° çözümünü bulmak için seküler olmayan terimleri ele alarak denklem (4.12)'yi çözmemiz gerekir. Seküler terimler yok edildikten sonra denklem (4.12) şu hale dönüşür

$$D_0^2 y_1^{\circ} + 2v_0 D_0 y_1^{\circ} + (v_0^2 - 1) y_1^{\circ} = -2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y_0^{\circ} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y_0^{\circ} - \Omega v_1 \cos \Omega T_0 y_0^{\circ} \quad (4.31)$$

Bu denklemin çözümü şu şekildedir

$$y_1^{\circ}(x, t) = A_0 \left\{ -\frac{n\pi v_0 v_1}{\Omega} \cos \Omega t \sin n\pi x \sin[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] \right. \\ \left. + \frac{n\pi v_1}{\Omega} \cos \Omega t \cos n\pi x \cos[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] \right\} \quad (4.32)$$

Bu durumda dış açılım için şu şekilde bir çözüm elde etmiş oluruz

$$y^{\circ}(x, t) = A_0 \left\{ \sin n\pi x \cos[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] + \varepsilon \left\{ -\frac{n\pi v_0 v_1}{\Omega} \cos \Omega t \sin n\pi x \sin[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n\pi v_1}{\Omega} \cos \Omega t \cos n\pi x \cos[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] \right\} \right\} \quad (4.33)$$

Bu çözüm kirişin uç noktaları hariç diğer bölgelerde geçerli bir yaklaşık çözümdür. Uç noktalarda sınır şartlarının tamamını sağlaması beklenmemektedir. Bu çözüm sadece şerit için yazılan iki sınır şartını yaklaşık olarak sağlamaktadır. Kiriş denklemi dördüncü mertebeden olduğu için uçtaki mesnetlere göre iki sınır şartı daha ortaya çıkmaktadır. Ancak denklem (4.33)'teki çözüm bu sınır şartlarını sağlamamaktadır. Sınır şartlarının hepsinin sağlanması için kirişin uç noktalarına yakın yerde başka bir açılım yapmak gerekmektedir. Bundan sonraki bölümde bu problemi ortadan kaldırmak için uç noktalarda iç açılımlar yapılacaktır.

4.1.2 Basit-Basit Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri:

Bu bölümde her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş esnek kiriş için iç açılım çözümleri ele alınacaktır. Kiriş denklemi dördüncü mertebeden bir denklem olduğu için dört tane sınır şartının yazılması gerekmektedir. Basit mesnetli kiriş için dört sınır şartı şu şekilde yazılabilir

$$y(0,t)=0 \quad y(1,t)=0 \quad y''(0,t)=0 \quad y''(1,t)=0 \quad (4.34)$$

Önceki bölümde elde ettiğimiz dış açılım çözümü sadece denklem (4.34)' te verilen sınır şartlarından deplasmanla ilgili sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlamaktadır. Momentle ilgili sınır şartlarını ise hiç sağlamamaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için bu bölümde Matched Asymptotic Expansions yöntemini kullanarak uç noktalarda ikinci bir açılım daha yapacağız. Böylece geriye kalan iki sınır şartı da çözüm tarafından sağlanacaktır.

$x=0$ 'da iç açılım:

$x=0$ etrafında bu bölgeyi daha iyi görebilmek için şöyle bir koordinat seçelim

$$\zeta = \frac{x}{\varepsilon^z} \quad (4.35)$$

Bu açılımı denklem (4.1)'e yerleştirelim.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon^{-z} \frac{dv}{dt} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + 2v\varepsilon^{-z} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial t} + \varepsilon^{-2z} (v^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2} + \varepsilon^{-4z+1} v_f^2 \frac{\partial^4 y}{\partial \zeta^4} = 0 \quad (4.36)$$

Denklem (4.36)' yı mertebelerine ayırdığımızda 1 mertebesinde elimizde en çok terimin kalmasını sağlayacak z değeri $1/2$ dir. Diğer bir deyişle ayırt edilmiş limite karşılık gelen z değeri $1/2$ dir. Bu durumda genişletilmiş iç koordinat ve açılım şöyle yazılabilir

$$\zeta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad y^i = y_0^i + \varepsilon^{1/2} y_1^i + \varepsilon y_2^i \quad (4.37)$$

Yukarıdaki denklemde y^i $x=0$ noktası civarında iç açılım çözümünü göstermektedir. y_0^i , y_1^i ve y_2^i ise sırası ile bu çözümün 1, $\varepsilon^{1/2}$ ve ε mertebesindeki bileşenleridir. Bu eşitlikleri denklem (4.1)'e yerleştirip elde edilen denklemi mertebelerine ayırırsak şu denklemleri elde ederiz

1 mertebesi :

$$v_f^2 \frac{\partial^4 y_0^i}{\partial \zeta^4} - (1 - v_0^2) \frac{\partial^2 y_0^i}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (4.38)$$

$\varepsilon^{1/2}$ mertebesi :

$$v_f^2 \frac{\partial^4 y_1^i}{\partial \zeta^4} - (1 - v_0^2) \frac{\partial^2 y_1^i}{\partial \zeta^2} = -2D_0 v_0 \frac{\partial y_0^i}{\partial \zeta} \quad (4.39)$$

ε mertebesi :

$$v_f^2 \frac{\partial^4 y_2^i}{\partial \zeta^4} - (1 - v_0^2) \frac{\partial^2 y_2^i}{\partial \zeta^2} = -2D_0 v_0 \frac{\partial y_1^i}{\partial \zeta} - D_0^2 y_0^i - 2v_0 v_1 \sin \Omega t \frac{\partial^2 y_0^1}{\partial \zeta^2} \quad (4.40)$$

Dış açılım terimleri ile iç açılım terimlerinin birleştirildiği kompozit çözümün bütün sınır şartlarını sağlaması gerekir. Dış açılım çözümünü iki defa türevleyip moment ile ilgili sınır şartlarını uyguladığımızda, sınır şartlarının sağlanmasını engelleyen terimler ortaya çıkmaktadır. Bu terimleri iç açılım çözümü ile yok edebilmek için sınır şartlarını şu şekilde seçiyoruz

$$\frac{\partial^2 y_0^i}{\partial \zeta^2}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_1^i}{\partial \zeta^2}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_2^i}{\partial \zeta^2}(0, t) = -\frac{\partial^2 y_0^o}{\partial x^2}(0, t) \quad (4.41)$$

Denklem (4.41)'deki son sınır şartı sayesinde $x=0$ noktası civarında dış açılım çözümündeki artan terimler iç açılım çözümü ile ortadan kaldırılarak moment ile ilgili sınır şartları sağlanmaktadır.

Denklem (4.38)' in çözümü şu şekilde yazılabilir

$$y_0^i = a_0(t) + b_0(t)\zeta + c_0(t)e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} + d_0(t)e^{\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} \quad (4.42)$$

Kirişin her yerinde geçerli olan kompozit çözümü bulmak için denklem (4.33)' te elde ettiğimiz dış açılım çözümü ile iç açılım çözümlerinin uyumlu hale getirilmesi gerekir. Bunun için önce iç açılım çözümündeki ζ değişkeni yerine denklem (4.37)' deki eşiti yazılarak $(y_0^i)^0$ terimi elde edilir. Daha sonra dış açılım çözümünde x değişkeni yerine denklem (4.37)'de tanımladığımız iç koordinattan $x = \sqrt{\varepsilon} \zeta$ yazılarak $(y_0^o)^i$ terimi elde edilir. Matched Asymptotic Expansions yöntemine göre

$$(y_0^o)^i = (y_0^i)^0 \quad (4.43)$$

eşitliği yazılarak iç açılım ve dış açılım çözümleri uyumlu hale getirilir. ζ ifadesi yerine denklem (4.37)'deki eşitliği yazarsak $(y_0^i)^0$ terimini şu şekilde yazabiliriz

$$(y_0^i)^0 = a_0(t) + b_0(t)\frac{x}{\varepsilon^{1/2}} + c_0(t)e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\frac{x}{\varepsilon^{1/2}}} + d_0(t)e^{\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\frac{x}{\varepsilon^{1/2}}} \quad (4.44)$$

Bu çözümde $x=0$ noktasında $b_0(t)$ ve $d_0(t)$ katsayıları ardındaki terimler sonsuza gitmektedir. Çözümdeki bu patlamayı ortadan kaldırmak için

$$b_0(t)=0, \quad d_0(t)=0 \quad (4.45)$$

almamız gerekir. Bu şartlar altında

$$(y_0^i)^0 = a_0(t) \quad (4.46)$$

elde edilir. $(y_0^o)^i$ terimini ise şu şekilde elde ederiz

$$(y_0^o)^i = A_0 \sin n\pi\zeta\varepsilon^{1/2} \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0\zeta\varepsilon^{1/2} + \theta] = 0 \quad (4.47)$$

Burada ε küçük bir terim olduğu için bu ifade sifıra eşittir. Denklem (4.43)' teki uyumluluk şartını kullanırsak $a_0(t)=0$ elde ederiz. Bu durumda denklem (4.44) şu hale dönüşür

$$y_0^i = c_0(t) e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \frac{x}{\varepsilon^{1/2}}} \quad (4.48)$$

Denklem (4.41)'deki sınır şartlarından birincisi denklem (4.48)'e uygulanırsa sonuç olarak

$$y_0^i = 0 \quad (4.49)$$

elde edilir. $\varepsilon^{1/2}$ mertebesi için çözüm de şu şekilde yazılabilir

$$y_1^i = a_1(t) + b_1(t)\zeta + c_1(t)e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} + d_1(t)e^{\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} \quad (4.50)$$

1 mertebesindeki işlemlere benzer işlemler yaparsak ve denklem (4.41)'deki ikinci sınır şartını da uygularsak

$$y_1^i = 0 \quad (4.51)$$

elde edilir. ε mertebesindeki çözüm de diğer çözümlere benzer olarak şu şekilde yazılabilir

$$y_2^i = a_2(t) + b_2(t)\zeta + c_2(t)e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} + d_2(t)e^{\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} \quad (4.52)$$

1 mertebesindeki benzer işlemleri ε mertebesi için de yaparsak

$$y_2^i = c_2(t)e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} \quad (4.53)$$

elde ederiz. Denklem (4.41)'deki son sınır şartını denklem (4.53)'e uygularsak $x=0$ noktası civarında yapılan iç açılımın ε mertebesindeki çözümü şu şekilde elde edilir

$$y_2^i = A_0 \frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \sin(\omega_m t + \theta) e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1}\zeta} \quad (4.54)$$

Sonuç olarak $x=0$ noktasındaki iç açılım çözümü şu şekildedir

$$y^I = \varepsilon A_0 \frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \sin(\omega_{nl} t + \theta) e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \kappa} \quad (4.55)$$

$x=1$ 'de iç açılım:

$x=1$ etrafında şu şekilde bir koordinat tanımlaması ve açılım yapalım

$$\kappa = \frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}, \quad y^I = y_0^I + \varepsilon^{1/2} y_1^I + \varepsilon y_2^I \quad (4.56)$$

Burada y^I $x=1$ noktası civarındaki iç açılım için deplasmanı göstermektedir. y_0^I, y_1^I ve y_2^I ise sırası ile bu çözümün 1, $\varepsilon^{1/2}$ ve ε mertebesindeki bileşenleridir. Denklem (4.56)'daki açılımları denklem (4.1)'e yerleştirip elde edilen denklemi mertebelerine ayırdıktan sonra şu sınır şartlarını denklemlere uygulayalım

$$\frac{\partial^2 y_0^I}{\partial \kappa^2}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_1^I}{\partial \kappa^2}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_2^I}{\partial \kappa^2}(0, t) = -\frac{\partial^2 y_0^I}{\partial x^2}(1, t) \quad (4.57)$$

Benzer şekilde işlemler yapılırsa $x=1$ noktası civarında her mertebe için iç açılım çözümleri şu şekilde elde edilir

$$y_0^I = 0, \quad y_1^I = 0, \quad y_2^I = A_0 \frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \cos n\pi \sin[\omega_{nl} t + n\pi v_0 + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}} \quad (4.58)$$

Sonuç olarak $x=1$ noktasındaki iç açılım çözümünü şu şekilde yazabiliriz

$$y^I = A_0 \varepsilon \frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \cos n\pi \sin[\omega_{nl} t + n\pi v_0 + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}} \quad (4.59)$$

4.1.3 Basit-Basit Mesnet İçin Kompozit Çözüm

Her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş ve sinüzoidal hız değişimiyle hareket eden esnek kiriş için dış açılım ve iç açılım çözümlerini önceki bölümlerde elde etmiştik. Kiriş için gerçek çözüm dış açılım ve iç açılım çözümlerinin birleştirilmesi ile elde edilen çözümdür. Elde ettiğimiz dış açılım ve iç açılım çözümlerini şu şekilde birleştirebiliriz

$$y = y_0^o + \varepsilon(y_1^o + y_2^i + y_2^l) \quad (4.60)$$

Önceki bölümlerde elde ettiğimiz eşitlikleri denklem (4.60)'ta yerine yerleştirirsek sonuç olarak bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümü şöyle ifade edebiliriz

$$y(x,t) = A_0 \left\{ \sin n\pi x \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] + \varepsilon \left(-\frac{n\pi v_0 v_1}{\Omega} \cos \Omega t \sin \pi x \sin[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n\pi v_1}{\Omega} \cos \Omega t \cos n\pi x \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] + \frac{v_1^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \sin[\omega_{nl} t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} x}{v_1 \varepsilon^{1/2}}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{v_1^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \cos n\pi \sin[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} (1-x)}{v_1 \varepsilon^{1/2}}} \right) \right\} \quad (4.61)$$

Denklem (4.61)'de elde edilen çözüm her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş kirişin dört sınır şartını da ε mertebesindeki bir yaklaşıklıkla sağlamaktadır.

4.1.4 Ankastre-Ankastre Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri

Bu bölümde her iki ucundan ankastre mesnetlenmiş ve $v = v_0 + \varepsilon v_1 \sin \Omega t$ hızı ile hareket eden esnek kirişin çözüm fonksiyonunu elde edeceğiz. Ankastre mesnetli durum için dış açılım denklem (4.33)'ün aynısıdır. Elde edeceğimiz sınır tabakası çözümünün aşağıdaki sınır şartlarını sağlaması gerekmektedir.

$$y(0,t)=0, \quad y(1,t)=0, \quad y'(0,t)=0, \quad y'(1,t)=0 \quad (4.62)$$

Bu sınır şartlarını sağlamak için basit mesnette olduğu gibi mesnetlere yakın noktalarda ikinci bir açılım daha yapmamız gerekmektedir.

$x=0$ 'da iç açılım:

$x=0$ noktasında iç koordinat ve açılımı şöyledir

$$\zeta = \frac{x}{\varepsilon^{1/2}}, \quad y^i = y_0^i + \varepsilon^{1/2} y_1^i \quad (4.63)$$

Uygun bir çözüm elde edebilmek için $x=0$ noktası civarında iç açılımla ilgili sınır şartlarını şöyle seçelim

$$\frac{\partial y_0^i}{\partial \xi}(0,t) = 0 \quad \frac{\partial y_1^i}{\partial \xi}(0,t) = -\frac{\partial y_0^o}{\partial x}(0,t) \quad (4.64)$$

Denklem (4.63)'ü denklem (4.1)'e yerleştirip, denklem (4.64)'teki sınır şartlarını kullanarak önceki bölümdeki gibi işlemleri tekrarlarsak $x=0$ noktası için iç açılım çözümünü şu şekilde elde ederiz

$$y^i = A_0 \varepsilon^{1/2} \frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos[\omega_n t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} x}{v_f \varepsilon^{1/2}}} \quad (4.65)$$

$x=1$ 'de iç açılım:

$x=1$ noktasında aşağıdaki iç koordinat ve açılımı seçelim

$$\kappa = \frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}, \quad y^i = y_0^i + \varepsilon^{1/2} y_1^i \quad (4.66)$$

$x=1$ noktasındaki iç açılım için sınır şartlarını şu şekilde seçelim

$$\frac{\partial y_0^i}{\partial \kappa}(0,t) = 0 \quad \frac{\partial y_1^i}{\partial \kappa}(0,t) = \frac{\partial y_0^o}{\partial x}(1,t) \quad (4.67)$$

Önceki bölümdeki işlemleri bu bölümdeki açılım ve sınır şartları için tekrarlarsak $x=1$ noktası civarındaki iç açılım çözümünü şu şekilde elde ederiz

$$y^i = -A_0 \varepsilon^{1/2} \frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos n\pi \cos[\omega_n t + n\pi v_0 + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} (1-x)}{v_f \varepsilon^{1/2}}} \quad (4.68)$$

4.1.5 Ankastre-Ankastre Mesnet İçin Kompozit Çözüm

Uçlarından ankastre olarak mesnetlenmiş ve sinüzoidal hız değişimiyle hareket eden esnek kiriş için dış açılım ve iç açılım çözümlerini önceki bölümde elde ettik. Basit mesnetli

durumda olduğu gibi kiriş için gerçek çözüm dış açılım ve iç açılım çözümlerinin birleştirilmesi ile elde edilen kompozit çözümdür. Elde ettiğimiz dış açılım ve iç açılım çözümlerini şu şekilde birleştirebiliriz

$$y = y_0^o + \varepsilon^{1/2} (y_1^i + y_1^l) + \varepsilon y_1^o \quad (4.69)$$

Önceki bölümlerde elde ettiğimiz eşitlikleri denklem (4.69)'da yerine yerleştirirsek bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan kompozit çözümü şu şekilde elde ederiz

$$y(x,t) = A_0 \left\{ \sin n\pi x \cos[\omega_n t + n\pi v_0 x + \theta] + \varepsilon^{1/2} \left(\frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos[\omega_n t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} x}{v_0} \varepsilon^{1/2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos n\pi \cos[\omega_n t + n\pi v_0 x + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} (1-x)}{v_0} \varepsilon^{1/2}} \right) \right. \\ \left. + \varepsilon \left(-\frac{n\pi v_0 v_1}{\Omega} \cos \Omega t \sin n\pi x \sin[\omega_n t + n\pi v_0 x + \theta] + \frac{n\pi v_1}{\Omega} \cos \Omega t \cos n\pi x \cos[\omega_n t + n\pi v_0 x + \theta] \right) \right\} \quad (4.70)$$

Denklem (4.70)'te elde edilen çözüm her iki ucundan ankastre olarak mesnetlenmiş kirişin dört sınır şartını da yaklaşık olarak sağlamaktadır. Böylece harmonik değişen hızla hareket eden esnek kiriş için iki değişik mesnetleme durumunda sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümleri elde ettik. Bölüm 4.3' te elde ettiğimiz bu çözümleri kullanarak grafikler çizilecektir.

4.2 Eksponansiyel Hız

Bu bölümde aşağıdaki gibi yavaş eksponansiyel hız değişimine sahip esnek kiriş için çözümleri araştıracağız.

$$v = v_0 (1 - \varepsilon e^{-\alpha t}) \quad (4.71)$$

$e^{-\alpha t}$ terimini ε mertebesinde kabul edilmiştir. Bu denklemi denklem (4.1)'e yerleştirirsek

$$\ddot{y} + 2\dot{y}'(v_0 - \varepsilon v_0 e^{-\alpha t}) + \varepsilon y' v_0 \alpha e^{-\alpha t} + \varepsilon v_f^2 y^{iv} + (v_0^2 - 1)y'' - \varepsilon 2v_0^2 e^{-\alpha t} y'' + \varepsilon^2 v_0^2 e^{-2\alpha t} y'' = 0 \quad (4.72)$$

elde edilir. Harmonik değişen hız durumunda olduğu gibi dış açılım ve iç açılım çözümlerini elde edelim.

4.2.1 Dış Açılım Çözümü:

Bu bölümde eksponansiyel hız değişimine sahip esnek kiriş için dış açılım çözümü elde edilecektir. Bunun için harmonik değişen hız durumunda olduğu gibi çok zaman ölçekli metot kullanılacaktır. Denklem (4.4) ve (4.5)'teki açılımları denklem (4.72)'ye uygulayıp oluşan denklemleri mertebelerine ayırırsak şu denklemleri elde ederiz

1 mertebesi:

$$D_0^2 y_0^o + 2v_0 D_0 y_0^{o'} + (v_0^2 - 1) y_0^{o''} = 0 \quad (4.73)$$

ε mertebesi:

$$D_0^2 y_1^o + 2v_0 D_0 y_1^{o'} + (v_0^2 - 1) y_1^{o''} = -v_1^2 y_0^{o''} - 2D_0 D_1 y_0^o - 2v_0 D_1 y_0^{o'} + 2v_0 e^{-\alpha T_0} D_0 y_0^{o'} - \alpha v_0 e^{-\alpha T_0} y_0^{o'} + 2v_0^2 e^{-\alpha T_0} y_0^{o''} \quad (4.74)$$

Yukarıdaki denklemlerden de görüldüğü gibi 1 mertebesinde harmonik hız değişimine sahip kiriş ile eksponansiyel hız değişime sahip kirişin çözümleri aynıdır. Denklem (4.8)'deki çözümü denklem (4.73) için de yazabiliriz. Bu çözümü denklem (4.74)' te yerine yerleştirelim

$$D_0^2 y_1^o + 2v_0 D_0 y_1^{o'} + (v_0^2 - 1) y_1^{o''} = (-v_1^2 A_n Y_n^{iv} - 2D_1 i\omega_n A_n Y_n - 2v_0 D_1 A_n Y_n') e^{i\omega_n T_0} + A_n e^{i\omega_n T_0} e^{-\alpha T_0} (2v_0 D_0 Y_n' - \alpha v_0 Y_n' + 2v_0^2 Y_n'') + k.e \quad (4.75)$$

Denklem (4.75)'te görüldüğü gibi seküler terimler harmonik değişen hız durumunda ve eksponansiyel değişen hız durumunda aynıdır. Bu nedenle çözülebilirlik şartı da aynı olacaktır. ε mertebesindeki çözümü elde edebilmek için ise seküler olmayan terimleri ele alıp gerekli işlemleri yaparsak sonuç olarak eksponansiyel değişen hıza sahip esnek kiriş için dış açılım çözümü şu şekilde elde edilir

$$y^0(x,t) = A_0 (\sin n\pi x \cos[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] + \varepsilon e^{-\alpha t} \left\{ \frac{n\pi v_0^2}{\alpha} \sin n\pi x \sin[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] \right.$$

$$\left. - \frac{n\pi v_0}{\alpha} \cos n\pi x \cos[\omega_{n1} t + n\pi v_0 x + \theta] \right\}) \quad (4.76)$$

Elde edilen denklem (4.76), uçlarda deplasmanların sıfır olduğunu gösteren iki sınır şartını yaklaşık olarak sağlamaktadır. Kiriş için ise buna ilave olarak iki sınır şartının daha sağlanması gerekmektedir. Bu problemi çözmek için önceki bölümde olduğu gibi her iki uçta ikinci bir açılım daha yapılmalıdır.

4.2.2 Basit-Basit Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri

Her iki ucundan basit mesnetli ve eksponansiyel hız değişimine sahip esnek kiriş için elde edilecek olan sınır tabakası çözümünün denklem (4.34)'teki sınır şartlarını sağlaması gerekmektedir. Bunun için uç noktalarda ikinci bir açılım yapmaya ihtiyaç vardır. Harmonik değişen hız için yaptığımız işlemlere benzer işlemler yaparsak $x=0$ ve $x=1$ noktalarındaki iç açılımları şu şekilde elde ederiz

$x=0$ 'da iç açılım:

$$y^i = A_0 \varepsilon \frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \sin[\omega_{n1} t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \frac{x}{\varepsilon^{1/2}}} \quad (4.77)$$

$x=1$ 'de iç açılım:

$$y^i = A_0 \varepsilon \frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \cos n\pi \sin[\omega_{n1} t + n\pi v_0 + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}} \quad (4.78)$$

Elde ettiğimiz iç açılım çözümlerini dış açılım çözümü ile birleştirerek bütün sınır şartlarını sağlayan çözümleri elde edebiliriz.

4.2.3 Basit-Basit Mesnet İçin Kompozit Çözüm

Yukarıda bulduğumuz iç açılım ve dış açılım çözümlerini harmonik değişen hız durumunda olduğu gibi birleştirirsek kompozit çözümü şu şekilde elde ederiz

$$\begin{aligned}
y(x,t) = A_0 \{ & \sin n\pi x \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] + \varepsilon \left(\frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \sin[\omega_{nl} t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} x}{v_f} \varepsilon^{1/2}} \right. \\
& + \frac{v_f^2}{1-v_0^2} 2n^2 \pi^2 v_0 \cos n\pi \sin[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} (1-x)}{v_f} \varepsilon^{1/2}} + e^{-\alpha t} \left(\frac{n\pi v_0^2}{\alpha} \sin n\pi x \sin[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] \right. \\
& \left. \left. - \frac{n\pi v_0}{\alpha} \cos n\pi x \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] \right) \right) \} \quad (4.79)
\end{aligned}$$

Denklem (4.79)'da elde edilen çözüm her iki ucundan basit mesnetli ve eksponansiyel değişen hızla hareket eden esnek kirişin bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlamaktadır.

4.2.4 Ankastre-Ankastre Mesnet İçin İç Açılım Çözümleri

Her iki ucundan ankastre mesnetli esnek kirişi ele alalım. Bu durumda elde edeceğimiz çözümün her iki uçta deplasmanların ve eğimlerin sıfır olduğunu gösteren denklem (4.62)'yi sağlaması gerekmektedir. Dış açılım çözümü denklem (4.76) ile aynı formdadır. Harmonik hız değişimi durumundaki işlemlere benzer işlemleri bu durum için de yaparsak her iki uçtaki iç açılım çözümlerini şu şekilde buluruz

$x=0$ 'da iç açılım:

$$y^i = A_0 \varepsilon^{1/2} \frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos[\omega_{nl} t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} x}{v_f} \varepsilon^{1/2}} \quad (4.80)$$

$x=1$ 'de iç açılım:

$$y^i = -A_0 \varepsilon^{1/2} \frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos n\pi \cos[\omega_{nl} t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} (1-x)}{v_f} \varepsilon^{1/2}} \quad (4.81)$$

4.2.5 Ankastre-Ankastre Mesnet İçin Kompozit Çözüm

Bulduğumuz dış açılım ve iç açılım çözümlerini daha önce yaptığımız gibi birleştirirsek bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan kompozit çözümü şu şekilde elde ederiz

$$\begin{aligned}
y(x,t) = & A_0 \left\{ \sin n\pi x \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] + \varepsilon^{1/2} \left(\frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos[\omega_{nl} t + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} x}{v_1 \varepsilon^{1/2}}} \right. \right. \\
& - \frac{v_f}{\sqrt{1-v_0^2}} n\pi \cos n\pi \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2} (1-x)}{v_1 \varepsilon^{1/2}}} \left. \left. + \varepsilon e^{-\alpha t} \left(\frac{n\pi v_0^2}{\alpha} \sin n\pi x \sin[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{n\pi v_0}{\alpha} \cos n\pi x \cos[\omega_{nl} t + n\pi v_0 x + \theta] \right) \right\} \quad (4.82)
\end{aligned}$$

Elde edilen denklem (4.82) her iki ucundan ankastre mesnetlenmiş eksponansiyel hareketli esnek kirişin bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlamaktadır. Böylece bu bölümde eksponansiyel değişen hız ile hareket eden ve farklı şekillerde mesnetlenmiş kiriş için gerekli olan bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümleri elde ettik. Bundan sonraki bölümde elde edilen çözümler kullanılarak değişik durumlar için grafikler çizilecektir.

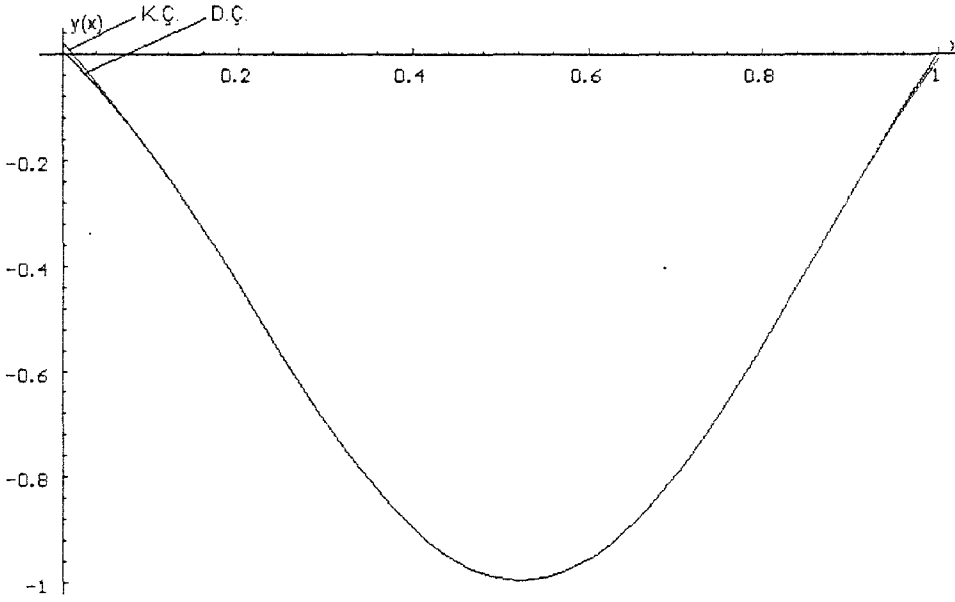
4.3 Sayısal Örnekler

Bu bölümde önceki bölümlerde elde ettiğimiz sinüzoidal ve eksponansiyel olarak değişen eksenel hareketli esnek kiriş çözümleri ile ilgili grafikler çizeceğiz. Önce belli bir hız etrafında sinüzoidal değişen hıza sahip esnek kiriş ele alınacaktır. Bölüm 4.1' de elde edilen basit – basit ve ankastre – ankastre mesnetli durumlar için dış açılım ve kompozit açılım çözümleri grafikler üzerinde karşılaştırılacaktır. Daha sonra bölüm 4.2' de elde edilen belli bir hıza eksponansiyel olarak yaklaşan hız değişim fonksiyonu için benzer karşılaştırmalar grafikler üzerinde yapılacaktır.

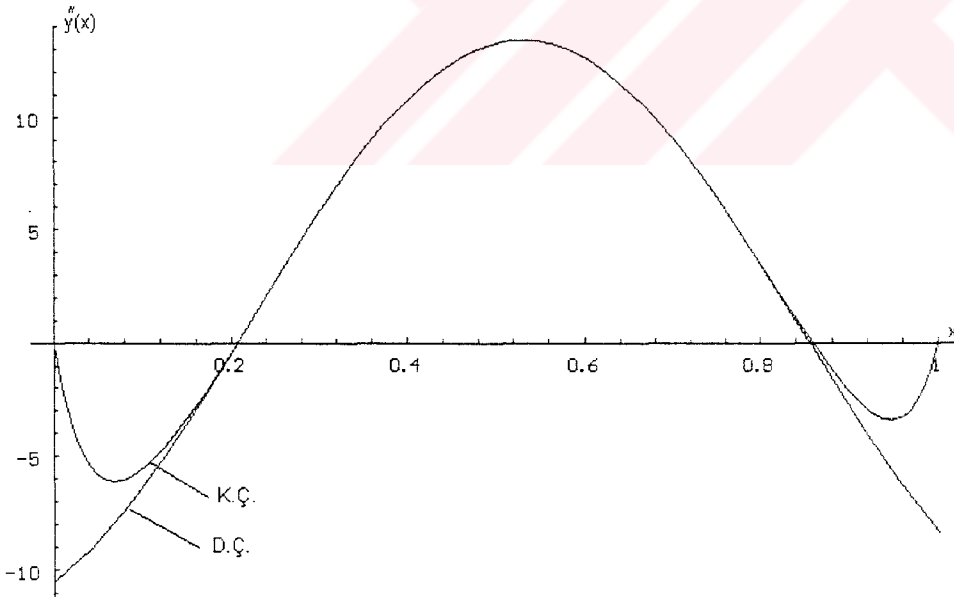
Şekil 4.1' de her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş sinüzoidal hareketli esnek kiriş ele alınmıştır. Denklem (4.33)'teki dış açılım ve denklem (4.61)' de elde edilen kompozit açılım çözümleri kullanılmıştır. $v_0=0.6$ $v_1=0.2$ $\Omega=2$ $v_f=0.1$ $\theta=0$ $\varepsilon=0.1$ ve $t=1$ alınarak dış açılım ve kompozit açılım çözümlerinin 1. mod için deplasman değişim grafikleri çizilmiştir. Her iki açılım çözümü de sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlamaktadır. Ele alınan durum için dış açılım çözümü deplasman için sınır şartlarını daha az bir yaklaşıklıkla sağlamaktadır. Uç noktalardan uzak bölgelerde ise bu iki çözüm çakışmaktadır. Şekil 4.2' de ise aynı şartlar altında dış açılım ve iç açılım için moment değişim grafikleri çizilmiştir. Dış açılım çözümünün momentle ilgili sınır şartlarını hiç sağlamadığı, iç açılım çözümlerinin de dahil edildiği kompozit açılım çözümünün momentle ilgili sınır şartlarını çok az bir hata ile sağladığı görülmüştür. Uç noktalardan uzak

bölgelerde ise her iki çözüm birbiri ile çakışmaktadır. Şekil 4.3 ve 4.4' te ise aynı kabuller altında 1. mod için yapılan işlemler 2. mod için tekrarlanmıştır. Yine deplasman değişim grafiğinde her iki çözüm sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlamakta, moment değişim grafiğinde ise dış açılım çözümü sınır şartlarını hiç sağlamazken kompozit açılım çözümü sınır şartlarını çok az bir yaklaşıklıkla sağlamaktadır. Şekil 4.5-4.8' de ise ankastre-ankastre mesnetli durum için grafikler çizilmiştir. Ankastre mesnetli durumda dış açılım çözümü basit mesnetli durum ile aynı olmaktadır. Kompozit açılım ise farklıdır ve denklem (4.70)' te elde edilen çözüm kullanılmıştır. Şekil 4.5 ve 4.6' da 1. mod için deplasman ve eğim değişim grafikleri çizilmiştir. Deplasman grafiklerinde her iki grafik birbirine yakın olarak elde edilmiştir. Yalnız basit mesnette olduğu gibi uç noktalarda dış açılım çözümündeki hata daha az olmaktadır. Eğim değişim grafiklerinde ise dış açılım çözümünün sınır şartlarını hiç sağlamadığı kompozit açılım çözümünün ise çok az bir hata ile sınır şartlarını sağladığı görülmüştür. Şekil 4.7 ve 4.8' de ise aynı işlemler 2. mod için tekrarlanmış ve 1. mod için çizilen grafiklerde olduğu gibi dış açılım çözümü eğim değişim grafiğinde sınır şartlarını sağlamada başarısız olurken kompozit açılım çözümü sınır şartlarının hepsini küçük yaklaşıklıklarla sağlamıştır.

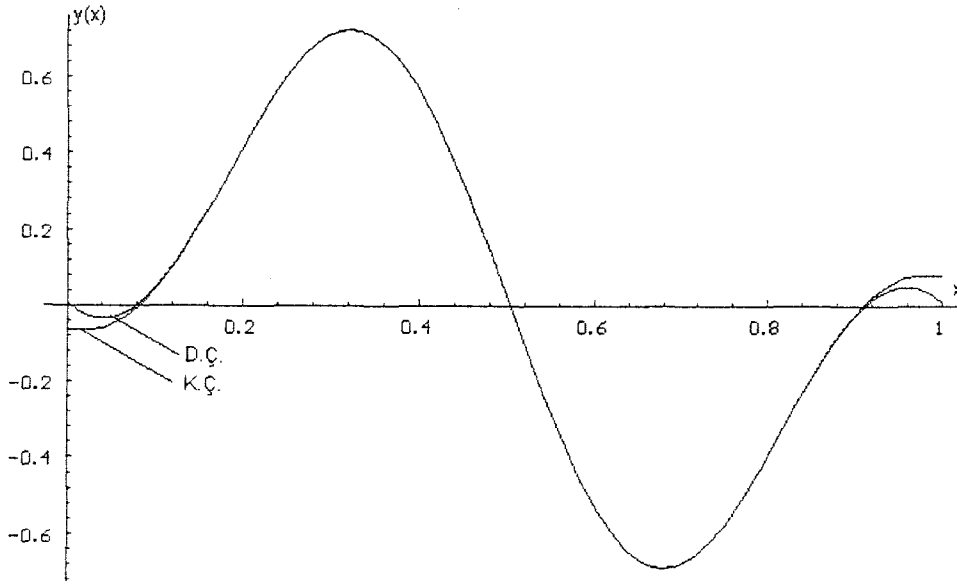
Şekil 4.9-4.16' da ise sinüzoidal hız değişim için çizilen grafiklere benzer olarak eksponansiyel hız değişimi için grafikler elde edilmiştir. Sinüzoidal hız değişimi için elde edilen sonuçlar eksponansiyel hız değişimi için de aynı şekilde elde edilmiştir. Şekil 4.9-4.12' de uçlardan basit olarak mesnetlenmiş durum ele alınmıştır. Dış açılım çözümü için denklem (4.76), kompozit açılım çözümü için ise denklem (4.79) kullanılmıştır. 1. mod ve 2. mod için çizilen grafiklerde yine deplasman ile ilgili sınır şartları her iki açılım için yaklaşık olarak sağlanırken, momentle ilgili sınır şartları sadece kompozit açılım çözümünde sağlanmaktadır. Dış açılım çözümü moment ile ilgili sınır şartlarında çok büyük hata vermektedir. Uçlardan uzak noktalarda ise her iki çözüm çakışmaktadır. Şekil 4.13 - 4.16' da ise uçlardan ankastre mesnetlenmiş durum ele alınarak 1. mod ve 2. mod için deplasman ve eğim değişim grafikleri çizilmiştir. Ankastre mesnetli durumda da dış açılım çözümleri deplasman ile ilgili sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlarken eğim ile ilgili sınır şartlarında çok büyük hata vermektedir. İç açılım çözümlerinin de eklendiği kompozit açılım çözümü ise dört sınır şartını da az bir hata ile sağlamaktadır.



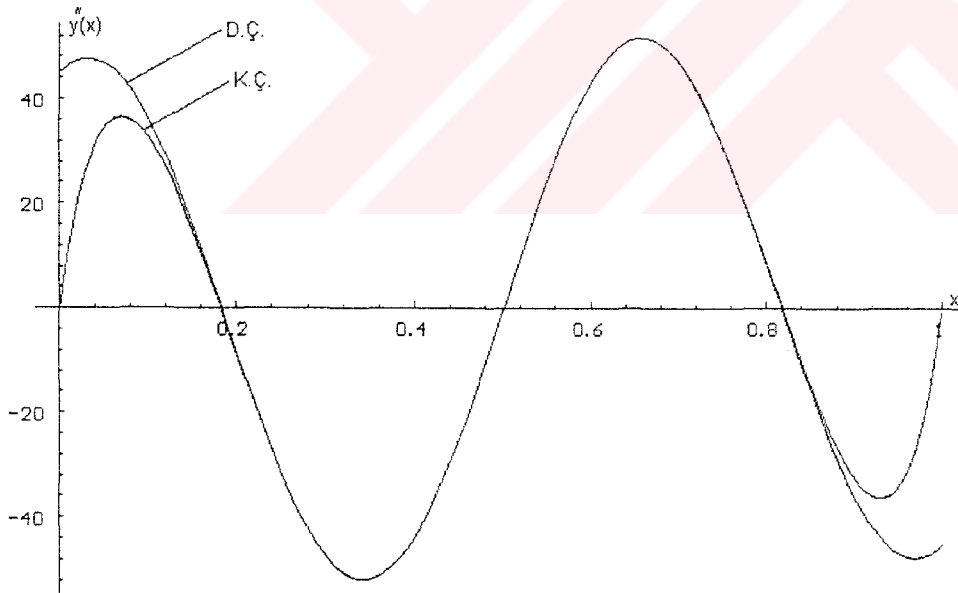
Şekil 4.1. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği
 $(A_0=1, n=1, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1)$



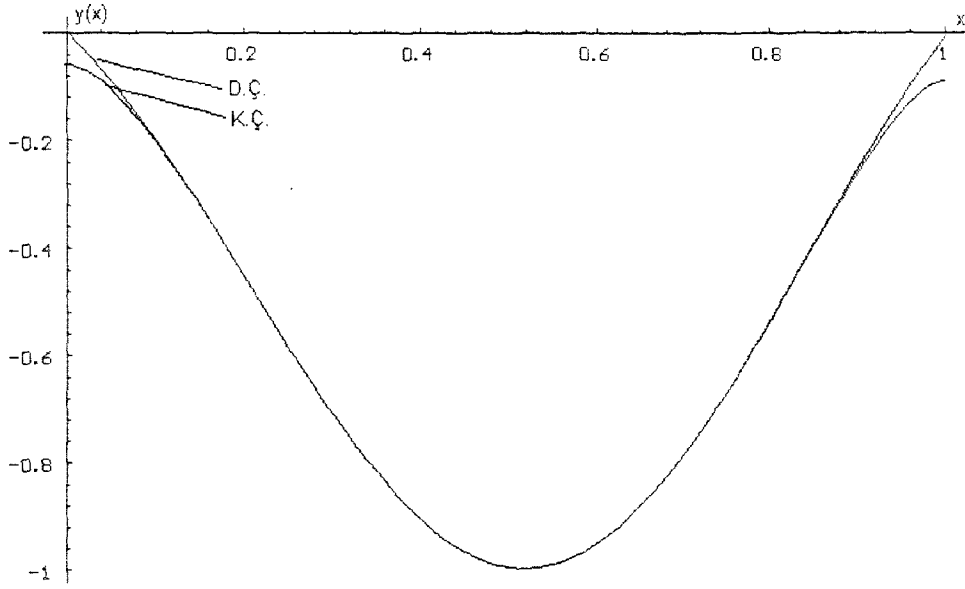
Şekil 4.2. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği
 $(A_0=1, n=1, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1)$



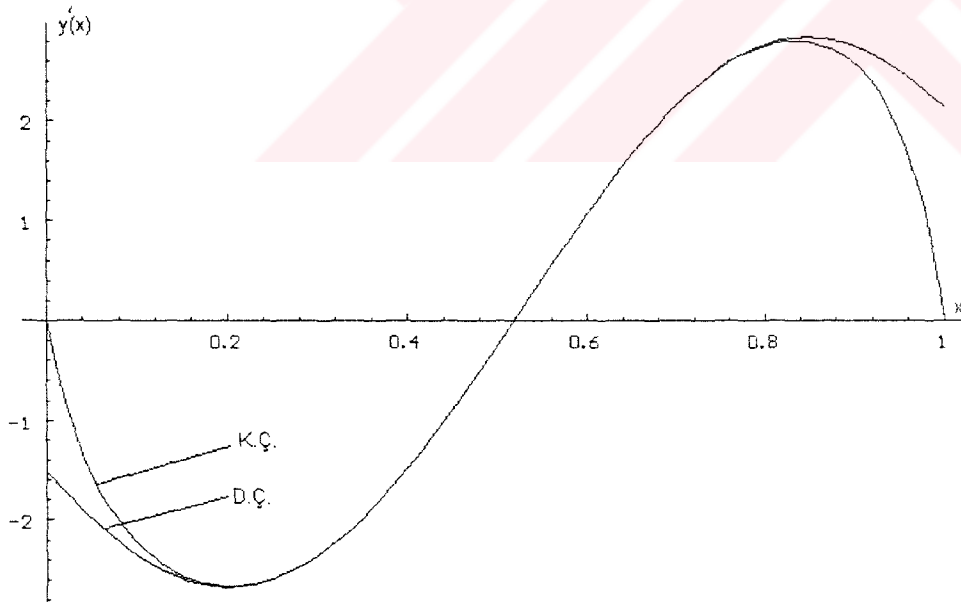
Şekil 4.3. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği
 $(A_0=1, n=2, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1)$



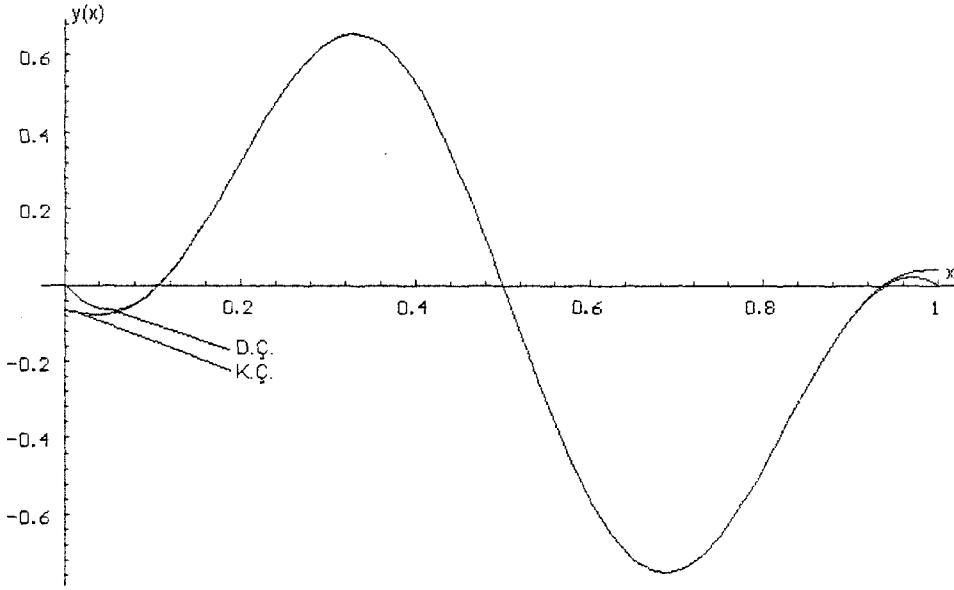
Şekil 4.4. Harmonik değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği
 $(A_0=1, n=2, v_0=0.6, v_1=0.2, \Omega=2, v_f=0.1, \theta=0, t=1, \varepsilon=0.1)$



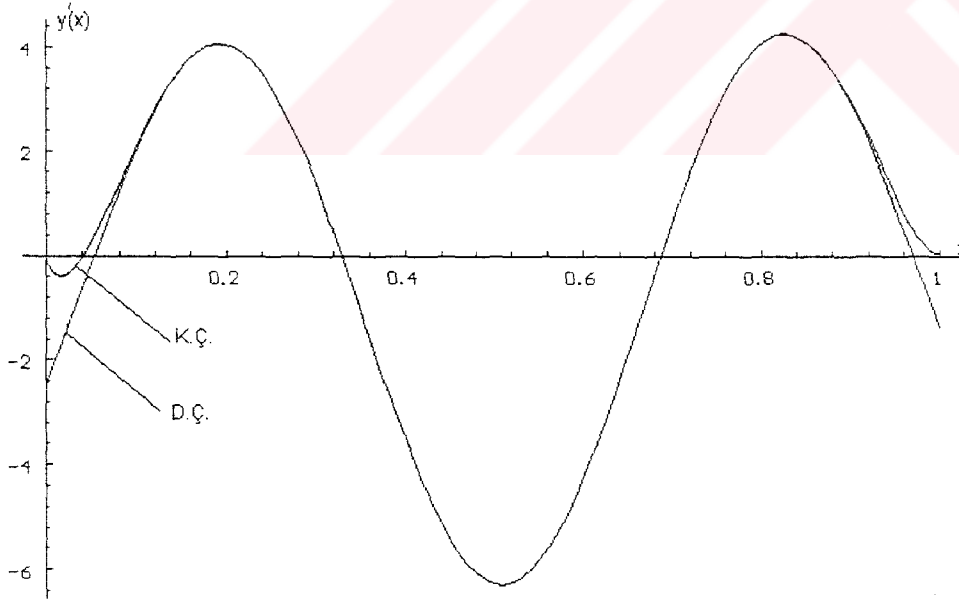
Şekil 4.5. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=1$, $v_0=0.6$, $v_1=0.1$, $\Omega=2$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.1$)



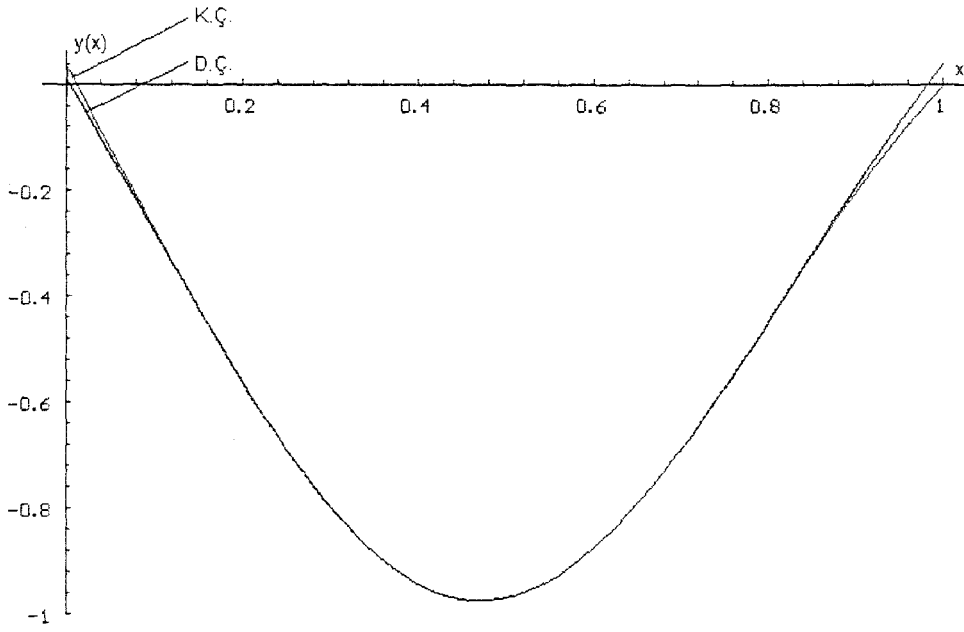
Şekil 4.6. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği ($A_0=1$, $n=1$, $v_0=0.6$, $v_1=0.1$, $\Omega=2$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.1$)



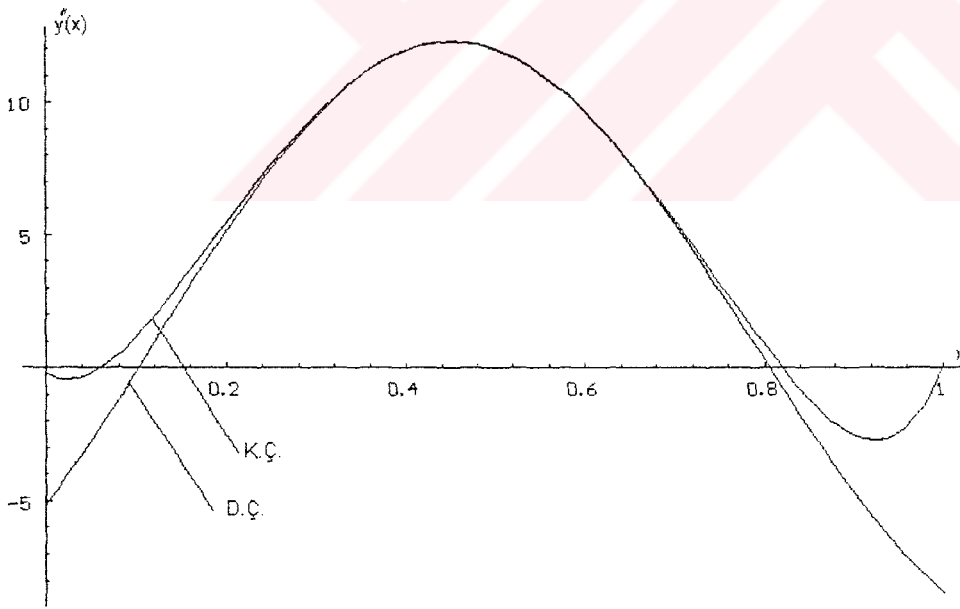
Şekil 4.7. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=2$, $v_0=0.6$, $v_1=0.1$, $\Omega=2$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.05$)



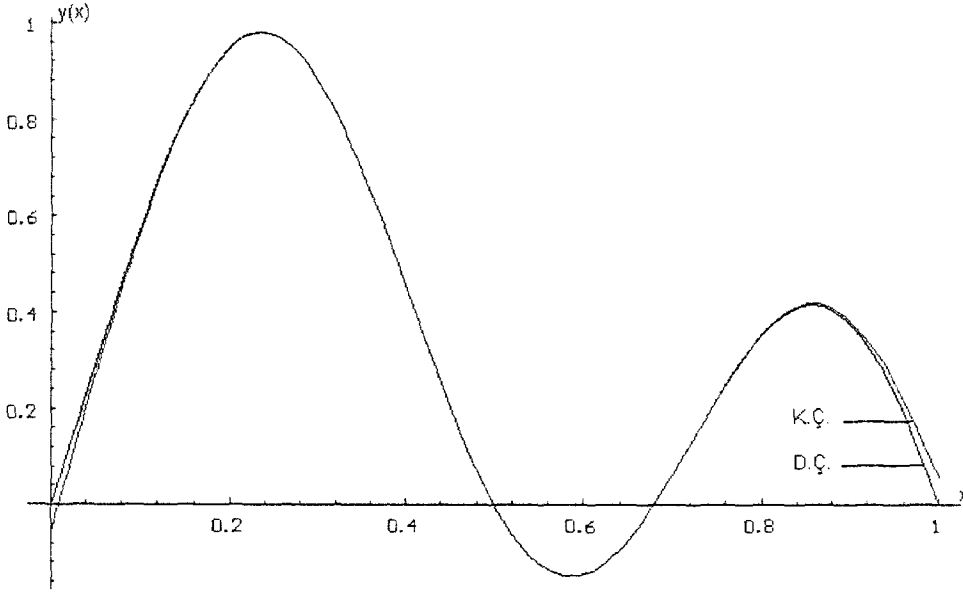
Şekil 4.8. Harmonik değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği ($A_0=1$, $n=2$, $v_0=0.6$, $v_1=0.1$, $\Omega=2$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.05$)



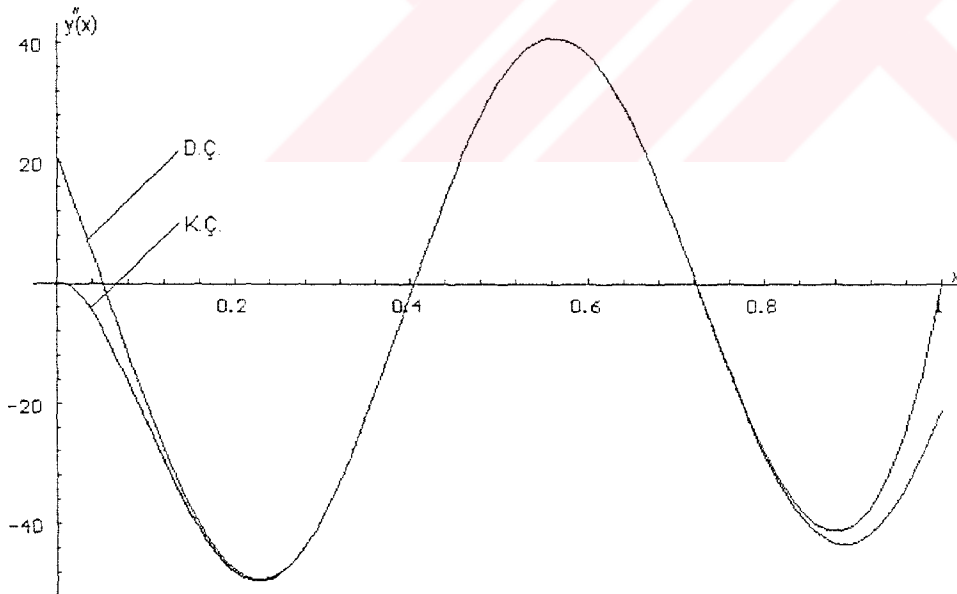
Şekil 4.9. Eksponansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=1$, $v_0=0.5$, $\alpha=2$, $v_f=0.2$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.1$)



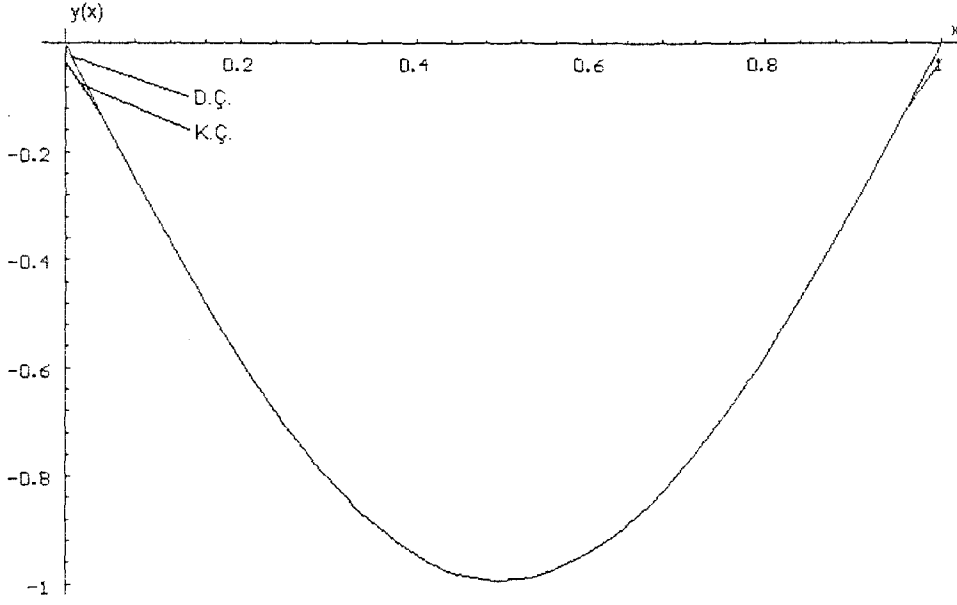
Şekil 4.10. Eksponansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği
($A_0=1$, $n=1$, $v_0=0.5$, $\alpha=2$, $v_f=0.2$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.1$)



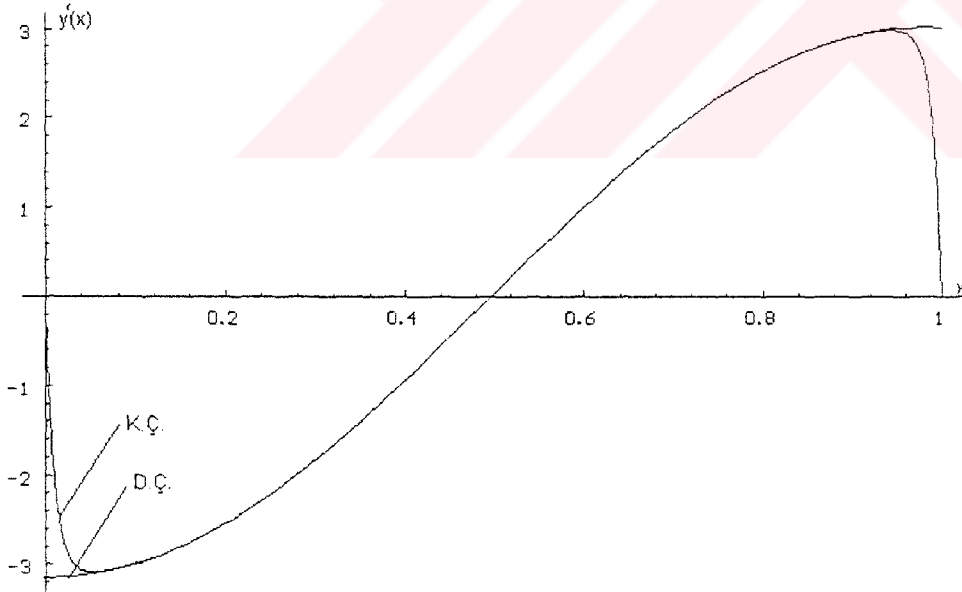
Şekil 4.11. Ekspansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=2$, $v_0=0.5$, $\alpha=5$, $v_f=0.2$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.1$)



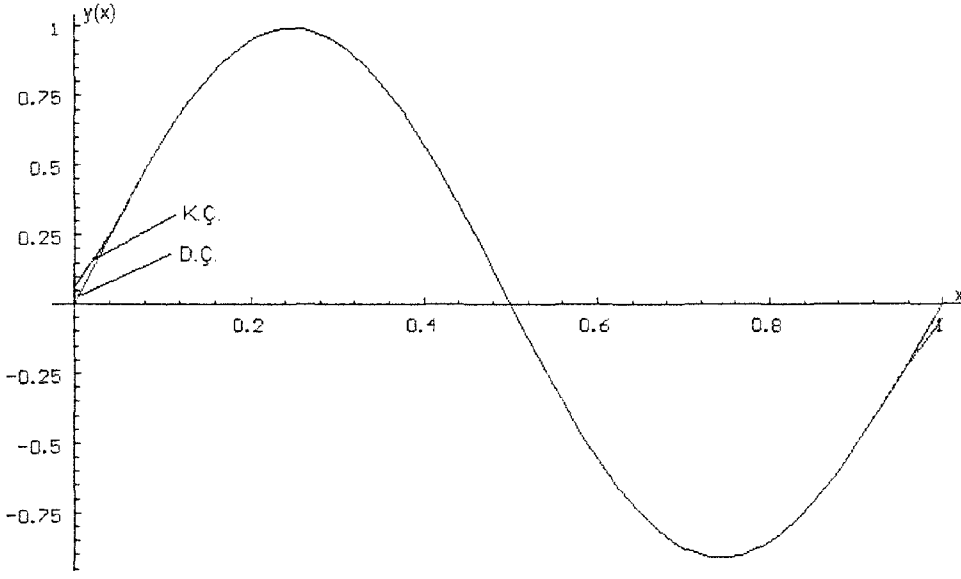
Şekil 4.12. Ekspansiyel değişen hız ve basit-basit mesnet durumu için moment değişim grafiği ($A_0=1$, $n=2$, $v_0=0.5$, $\alpha=5$, $v_f=0.2$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.1$)



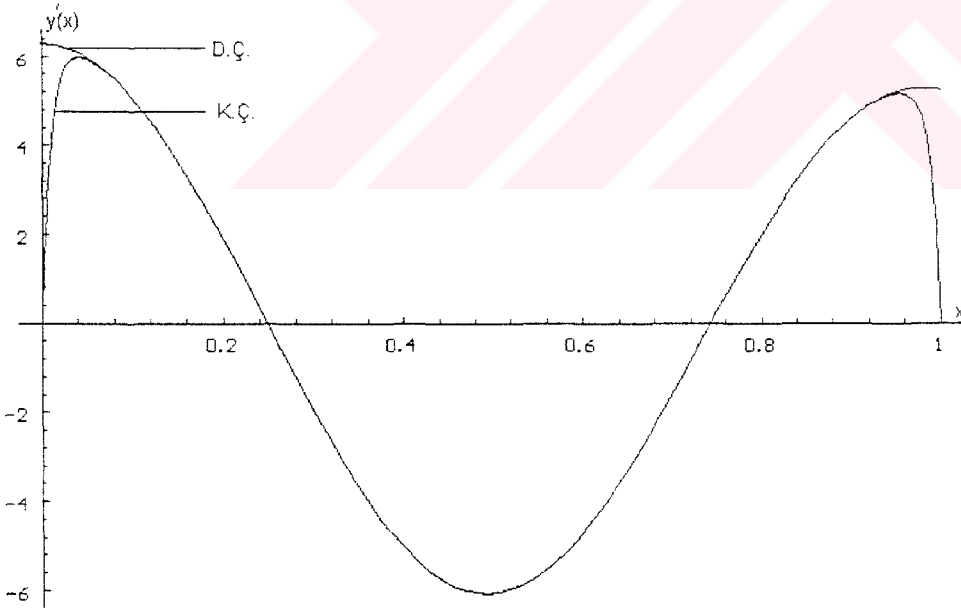
Şekil 4.13. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=1$, $v_0=0.1$, $\alpha=5$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.01$)



Şekil 4.14. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=1$, $v_0=0.1$, $\alpha=5$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.01$)



Şekil 4.15. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için deplasman değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=2$, $v_0=0.1$, $\alpha=5$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.01$)



Şekil 4.16. Ekspansiyel değişen hız ve ankastre-ankastre mesnet durumu için eğim değişim grafiği. ($A_0=1$, $n=2$, $v_0=0.1$, $\alpha=5$, $v_f=0.1$, $\theta=0$, $t=1$, $\varepsilon=0.01$)

5. EKSENEL HAREKETLİ KİRİŞ PROBLEMİ

Bu çalışmada hızın zamana bağlı olarak değiştiği aksenel hareketli kiriş problemi ele alınacaktır. Analitik çözümler bölüm 3' te olduğu gibi Lie Grup Teorisi kullanılarak sistematik bir şekilde bulunacaktır. Aksenel hız zamanın bir fonksiyonu olduğu için Lie Grup teorisiyle birlikte Eşdeğerlik Dönüşümleri (Equivalence Transformations)' de uygulanacaktır. Kiriş hızı keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve eksponansiyel değişen hız olarak değişik formlarda ele alınacaktır. Lie Grup teorisi Eşdeğerlik Dönüşümleri ile birlikte kullanılarak hareket denklemlerine ait infinitesimal jeneratörler elde edilecektir. Elde edilen bu jeneratörlerin farklı varyasyonları kullanılarak değişik hız fonksiyonları için sistematik bir şekilde tam çözümler üretilcektir. Kirişin uçlardan basit mesnetlendiği, hızın harmonik ve eksponansiyel olarak değiştiği durumlar için sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümler elde edilecektir.

5.1 Lie Grup Teorisi

Bu bölümde aksenel hareketli kiriş denkleminin çözümü için Lie Grup dönüşümü uygulanacaktır. Hız zamana bağlı keyfi bir fonksiyon olarak ele alınacaktır. Bu sebeple bölüm 3' de olduğu gibi Lie Grup Teorisi ile birlikte eşdeğerlik dönüşümleri de uygulanacaktır. Aksenel hareketli kiriş için hareket denklemi şu şekildedir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial y}{\partial x} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + v_f^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

burada y kirişin düşey deplasmanı, x mekan koordinatı, t zaman değişkeni, v_f kirişlik katsayısı, $v(t)$ ise sadece zamana bağlı aksenel hızdır. Bu nedenle $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ve $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ olarak yazılabilir. Denklem

(5.1) boyutsuz formdadır. Bölüm 3' de olduğu gibi Lie Grubu Teorisini uygulamak için şu değişken dönüşümlerini yapalım

$$x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad y_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2}, \quad y_{12} = \frac{\partial y}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad y_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \quad y_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},$$

$$y_{1111} = \frac{\partial^4 y}{\partial x_1^4}, \quad v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad v_3 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.2)$$

Bu durumda denklem (5.1) yeni değişkenler cinsinden Şu Şekle dđnüşür

$$y_{22} + v_2 y_1 + 2v y_{12} + (v^2 - 1)y_{11} + v_1^2 y_{1111} = 0, \quad v_1=0, \quad v_3=0 \quad (5.3)$$

Lie Grup Teorisini uygulamak için bu problemde kullanacağımız dđrdüncü mertebeye genelleştirilmiş infinitesimal jeneratör Şu Şekildedir

$$\begin{aligned} X^{(4)} = & \xi_1(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta(x_1, x_2, y) \frac{\partial}{\partial y} + \mu(x_1, x_2, y, v) \frac{\partial}{\partial v} \\ & + \eta_1(x_1, x_2, y, y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{11}(x_1, x_2, y, y_1, y_2, y_{11}, y_{12}) \frac{\partial}{\partial y_{11}} \\ & + \eta_{12}(x_1, x_2, y, y_1, y_2, y_{11}, y_{12}, y_{22}) \frac{\partial}{\partial y_{12}} + \eta_{22}(x_1, x_2, y, y_1, y_2, y_{12}, y_{22}) \frac{\partial}{\partial y_{22}} \\ & + \mu_1(x_1, x_2, y, v, v_2) \frac{\partial}{\partial v_1} + \mu_2(x_1, x_2, y, v, v_2) \frac{\partial}{\partial v_2} + \mu_3(x_1, x_2, y, v, v_2) \frac{\partial}{\partial v_3} \\ & + \eta_{1111}(x_1, x_2, y, y_1, y_{11}, y_{111}, y_{1111}) \frac{\partial}{\partial y_{1111}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

denklem (5.4)'teki ξ_1 , ξ_2 ve η yeni değişkenleri başlangıçta x, t, y değişkenlerine, μ değişkeni ise x, t, y, v değişkenlerine bağlı terimlerdir. $\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{22}$ ve η_{1111} ifadelerini ξ_1, ξ_2, η ve yeni değişkenler cinsinden yazılabilir. Bölüm 3' de η_{11}, η_{12} ve η_{22} ifadelerini elde etmiştik. η_{111} ve η_{1111} ifadeleri elde etmek için denklem (3.11)' e benzer olarak Şu denklemleri yazabiliriz

$$\eta_{111} = D_1(\eta_{11}) - D_1(\xi_1)y_{111} - D_1(\xi_2)y_{112}$$

$$\eta_{1111} = D_1(\eta_{111}) - D_1(\xi_1)y_{1111} - D_1(\xi_2)y_{1112} \quad (5.5)$$

Denklem (5.5)' deki D_1 ifadesi denklem (3.12)' de tanımlanmıştır. η_{11} ifadesi de denklem (3.13)' de elde edilmiştir. Ayrıca hız değişkeni sadece zamanın bir fonksiyonu olduğunu için denklem (3.7) ve (3.8)' de elde ettiğimiz ifadeler burada da geçerlidir. Denklem (5.5)' de bilinenleri yerine yerleştirip denklem (3.8)' i de dikkate alarak gerekli işlemleri yaparsak η_{111} ve η_{1111} ifadeleri için Şu eşitlikleri elde ederiz

$$\begin{aligned}
\eta_{1111} &= \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1^3} + \left[2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^3} \right] y_1 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right] y_{11} + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] y_1^2 \\
&\quad - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} (y_1)^3 - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} y_1 y_{11} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1^2 \partial y} y_1 + \left[2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] y_1^2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] y_1 y_{11} + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right] y_1^3 - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial y^3} y_1^4 - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} y_1^2 y_{11} \\
&\quad + \left[2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right] y_{11} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] 2 y_1 y_{11} - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} y_1^2 y_{11} \\
&\quad - 3 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y_{11}^2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right] y_{111} - 3 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y_1 y_{111} - \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right] y_{111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{11111} &= \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^4} + \left[2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^4} \right] y_1 + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^3} \right] y_{11} + \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^3 \partial y} \right] y_1^2 \\
&\quad - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y^2} (y_1)^3 - 3 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} y_1 y_{11} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^3 \partial y} y_1 + \left[2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^3 \partial y} \right] y_1^2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] y_1 y_{11} + \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1 \partial y^3} - 2 \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y^2} \right] y_1^3 - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^3} y_1^4 - 3 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} y_1^2 y_{11} \\
&\quad + \left[2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^3} \right] y_{11} + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] 2 y_1 y_{11} - 3 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} y_1^2 y_{11} \\
&\quad - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} y_{11}^2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right] y_{111} - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} y_1 y_{111} - \left[\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + y_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] y_{111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^3 \partial y} + \left[2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^3 \partial y} \right] y_1^2 + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] y_1 y_{11} + \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1 \partial y^3} - 2 \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y^2} \right] y_1^3 \\
& - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^3} (y_1)^4 - 3 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} y_1^2 y_{11} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1^2 \partial y^2} y_1^2 + \left[2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x_1 \partial y^3} - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y^2} \right] y_1^3 \\
& + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right] y_1^2 y_{11} + \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^3} \right] y_1^4 - \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial y^4} y_1^5 - 3 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial y^3} y_1^3 y_{11} \\
& + \left[2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] y_1 y_{11} + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right] 2y_1^2 y_{11} - 3 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial y^3} y_1^3 y_{11} \\
& - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} y_1 y_{11}^2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] y_1 y_{111} - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} y_1^2 y_{111} - \left[\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} + y_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} \right] y_1 y_{111} \\
& + \left[2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^3} \right] y_{11} + \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] 2y_1 y_{11} - 3 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} y_1^2 y_{11} \\
& - 3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} y_{11}^2 + y_{11} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1^2 \partial y} + 2y_1 y_{11} \left[2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x_1 \partial y^2} - \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1^2 \partial y} \right] + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] y_{11}^2 \\
& + 3 \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right] y_1^2 y_{11} - 4y_1^3 y_{11} \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial y^3} - 12y_1 y_{11}^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} + 2y_{11}^2 \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right] \\
& - 4y_{111} y_{11} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y} + y_{111} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right) - 3y_1 y_{111} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} + y_{111} \left(y_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2y_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right) \\
& - 6y_1^2 y_{111} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} + y_{111} \left(2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right) + 2y_1 y_{111} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial y} \right) - 6y_{111} y_{111} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$+ y_{1111} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi_{51}}{\partial x_1} \right) - 3y_1 y_{1111} \frac{\partial \xi_{51}}{\partial y} - 2y_{1111} \left(\frac{\partial \xi_{51}}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \xi_{51}}{\partial y} \right) \quad (5.6)$$

Denklem (5.4) denklem (5.3)' e uygulanırsa aşağıdaki invaryantlık şartı şu şekilde elde edilir

$$\eta_{22} + \mu_2 y_1 + v_2 \eta_{11} + 2\mu y_{12} + 2v\eta_{12} + 2v\mu y_{11} + (v^2 - 1)\eta_{11} + v_f^2 \eta_{1111} = 0 \quad (5.7)$$

Denklem (5.3)' den y_{1111} şu şekilde yazılabilir

$$y_{1111} = -\frac{1}{v_f^2} (y_{22} + v_2 y_1 + 2v y_{12} + (v^2 - 1)y_{11}) \quad (5.8)$$

Daha önce elde ettiğimiz eşitlikleri denklem (5.7)'de yerlerine yerleştirelim ve y_{1111} ifadesi yerine de denklem (5.8)' deki eşitliğini yazalım. Bu durumda Bölüm 3' te olduğu gibi bir denklem bloğu elde ederiz. Bu denklem bloğu yüksek dereceli değişkenler cinsinden bir polinom teşkil etmektedir. Bu polinomun sıfıra eşit olabilmesi ancak ve ancak bütün yüksek dereceden değişkenlere ait terimlerin katsayılarının sıfır olması ile mümkündür. Elde ettiğimiz denklem bloğunu Bölüm 3' te olduğu gibi denklem sistemine dönüştürüp bu denklemler çözümlerse ξ_1 , ξ_2 , η ve μ terimlerinin x , t ve y ' ye bağımlılıkları şu şekilde elde edilir

$$\xi_1 = h(t)$$

$$\xi_2 = k \quad (5.9)$$

$$\eta = at + by + c$$

$$\mu = h'(t)$$

Burada a, b, c, k terimleri keyfi sabitlerdir. h ise zamana bağlı keyfi bir fonksiyondur. (t, v) uzayında eşdeğerlik operatörünün projeksiyonu şu şekildedir

$$P = \xi_2 \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial v} \quad (5.10)$$

İnvaryantlık şartını şu şekilde yazabiliriz

$$P[v-v(t)]=0 \quad (5.11)$$

İşlemler yapıldığında hız fonksiyonu $h(t)$ ' ye bağlı olarak şu şekilde elde edilir

$$v'(t) = \frac{h'(t)}{k} \quad (5.12)$$

Denklem (5.9)' da elde edilen infinitesimal jeneratörlerin farklı varyasyonları alınarak ve denklem (5.12) kullanılarak değişik tam çözümler elde edilebilir.

5.2 Tam Çözümlerin Bulunması

Bu bölümde denklem (5.9) ve denklem (5.12) kullanılarak hızın değişik fonksiyonları için tam çözümler üretilecektir. Bunun için iki farklı yaklaşımla çözümler elde edilebilir. Birinci yaklaşımda denklem (5.9)'daki simetrikler kullanılarak kanonik koordinatlar tanımlanır ve hareket denklemi basit bir forma indirgenerek çözülebilir hale getirilir. Bu yaklaşımı keyfi hız durumu için kullanacağız. İkinci yaklaşımda ise eski değişkenler cinsinden yeni bir benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu tanımlanır. Bu transformasyon kullanılarak kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme indirgenir ve adi diferansiyel denklem çözüldükten sonra ters dönüşümle gerçek değişkenler cinsinden çözüm elde edilir. Bu yaklaşımı hız değişiminin özel fonksiyonları için çözümler elde etmede kullanacağız.

5.2.1 Keyfi Hız

Keyfi $v(t)$ hızı için tam çözümler x ve t bağımsız değişkenlerinin başka değişkenlere dönüştürülmesi ile bulunabilir. Optimal (principal) koordinatlar kullanılarak denklemler daha basit forma indirgenebilir. Denklem (5.9)'daki sabitleri $k=1$, $h(t)=v(t)$ ve diğer parametreler sıfır olacak şekilde seçelim. Bu durumda

$$\frac{dx}{v(t)} = dt \quad (5.13)$$

elde edilir. Böylece optimal koordinatlardan biri şu şekilde tanımlanabilir

$$\xi = x - \int v(t) \quad (5.14)$$

Diğer bir seçimi $h(t)$ =keyfi ve diğer parametreler sıfır olacak şekilde yapabiliriz. Bu durumda

$$\frac{dx}{h(t)} = \frac{dt}{0} \quad (5.15)$$

ve

$$\tau = t \quad (5.16)$$

elde edilir. Elde edilen yeni ξ ve τ bağımsız değişkenler denklem (5.1)'i aşağıdaki basit forma indirir

$$v_1^2 \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5.17)$$

Denklem (5.17) çözülür ve gerçek değişkenlere ters dönüşüm yapılırsa şu çözümü elde ederiz

$$y(x,t) = (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \left(c_3 e^{-\frac{\sqrt{1-\sqrt{1+4v_1^2\omega^2}}}{\sqrt{2v_1}}(x-\int v(t))} + c_4 e^{\frac{\sqrt{1-\sqrt{1+4v_1^2\omega^2}}}{\sqrt{2v_1}}(x-\int v(t))} \right. \\ \left. + c_5 e^{-\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4v_1^2\omega^2}}}{\sqrt{2v_1}}(x-\int v(t))} + c_6 e^{\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4v_1^2\omega^2}}}{\sqrt{2v_1}}(x-\int v(t))} \right) \quad (5.18)$$

Bu bölümde keyfi hız fonksiyonu için kısmi diferansiyel denklemimiz kanonik koordinatlar kullanılarak daha basit bir formda yazılıp çözüm elde edildi. Bundan sonraki bölümlerde hız fonksiyonun özel durumları için çözümler elde edilecektir.

5.2.2 Sabit Hız

Bu ve bundan sonraki bölümlerde özel hız fonksiyonları için çözümler üretilecektir. Çözüm için önce yeni benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu tanımlanacak ve bu tanımlar yardımı ile kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme indirgenecektir. Elde edilen adi diferansiyel denklem çözülüp ters dönüşüm yapılarak gerçek değişkenler cinsinden çözüm elde edilecektir.

Eksenel hız sabit alındığında denklem (5.12)'den h =sabit elde edilir. Bu durumda infinitesimal jeneratörler aşağıdaki halde yazılabilir

$$\xi_1 = h$$

$$\xi_2 = k \quad (5.19)$$

$$\eta = at + by + c$$

Elde edilen bu jeneratörler kullanılarak değişik çözümler elde edilebilir. İlk olarak $a=b=c=0$, h ve k sabitleri keyfi seçilirse şu denklem elde edilir

$$\frac{dx}{h} = \frac{dt}{k} = \frac{dy}{0} \quad (5.20)$$

Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde tanımlanır

$$\xi = \frac{k}{h}x - t, \quad y = f(\xi) \quad (5.21)$$

Burada ξ benzerlik değişkeni, $f(\xi)$ ' de benzerlik fonksiyonudur. $\frac{k}{h} = m$ alınır ve denklem (5.21)

denklem (5.1)'e yerleştirilirse şu denklem elde edilir

$$v_f^2 m^4 f^{iv} + (v^2 m^2 - m^2 + 1 - 2mv) f'' = 0 \quad (5.22)$$

Denklem (5.22) çözülür ve gerçek değişkenler yerine yerleştirilirse şu çözümü elde ederiz

$$y(x,t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{v^2 m^2 - m^2 + 1 - 2vm}{v_1 m^4}}(mx-t)} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{v^2 m^2 - m^2 + 1 - 2vm}{v_1 m^4}}(mx-t)} + c_3(mx-t) + c_4 \quad (5.23)$$

Diğer bir çözüm için k ve b parametreleri keyfi değerleri sıfır olsun. Bu durumda

$$\xi = x, \quad y = e^{nt} f(\xi), \quad (5.24)$$

bulunur. Burada $n = \frac{b}{k}$ dır. Türevleri alıp denklem (5.1)'e yerleştirelim. Bu durumda benzerlik fonksiyonu için şu diferansiyel denklemi yazabiliriz

$$v_1^2 f^{iv} + (v^2 - 1) f'' + 2vn f' + n^2 f = 0 \quad (5.25)$$

Burada $n=iv$ alırsak denklem şu hale dönüşür

$$v_1^2 f^{iv} + (v^2 - 1) f'' + 2ivn f' - n^2 f = 0 \quad (5.26)$$

Yukarıdaki denkleme $ce^{i\beta\xi}$ şeklinde bir çözüm önerirsek β katsayılarının sağlaması gereken denklem

$$v_1^2 \beta^4 - (v^2 - 1)\beta^2 - 2vn\beta - n^2 = 0 \quad (5.27)$$

olur. Bu denklemden 4 ayrı β değeri bulunabilir. Bunlara $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ve β_4 dersek çözüm şöyle ifade edilir

$$f(\xi) = c_1 e^{i\beta_1 \xi} + c_2 e^{i\beta_2 \xi} + c_3 e^{i\beta_3 \xi} + c_4 e^{i\beta_4 \xi} \quad (5.28)$$

Bu durumda çözümü gerçek değişkenler cinsinde şu şekilde elde ederiz

$$y(x,t) = e^{int} (c_1 e^{i\beta_1 x} + c_2 e^{i\beta_2 x} + c_3 e^{i\beta_3 x} + c_4 e^{i\beta_4 x}) \quad (5.29)$$

Elde edilen bu çözüm sınır şartları uygulanmamış çözümdür. Sınır şartları ile ilgili uygulamalar bölüm 5.3' te yapılacaktır. Denklem (5.19)' daki infinitesimal jeneratörlerde keyfi parametrelerin

varyasyonları kullanılarak değişik çözümler üretilebilir. Bu bölümde bunlara örnek teşkil edecek çözümler yapılmıştır.

5.2.3 Sabit İvmeli Hız

Hız değişimini sabit ivmeli olarak ($v=\alpha t$) alırsak denklem (5.12)'deki bağıntıdan h katsayısı şu şekilde elde edilir

$$h=\alpha kt+m \quad (5.30)$$

Bu durumda infinitesimal jeneratörler şu şekilde oluşur

$$\xi_1=\alpha k t +m$$

$$\xi_2=k \quad (5.31)$$

$$\eta=at+by+c$$

Çözüm için k ve b parametrelerini keyfi, diğerlerini sıfır seçelim. Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonunu verecek olan eşdeğer adi diferansiyel denklem sistemi şu şekilde elde edilir

$$\frac{dx}{\alpha kt} = \frac{dt}{k} = \frac{dy}{by} \quad (5.32)$$

Denklem (5.32) kullanılarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x - \frac{\alpha t^2}{2}, \quad y = e^{yt} f(\xi) \quad (5.33)$$

Burada $\gamma=b/k$ ' dir. Yeni değişken ve fonksiyonlar cinsinden türevleri ifade edip denklem (5.1)'e yerleştirirsek denklem (5.25)' in benzerini elde ederiz. $\gamma=i\gamma$ alınırsa denklemimiz (5.26) nolu denkleme dönüşür. Burada benzerlik değişkeni farklı olduğu için gerçek değişkenler cinsinden çözüm şu şekilde elde edilir

$$y(x,t) = e^{i\alpha t} \left(c_1 e^{i\beta_1 \left(x - \frac{\alpha t^2}{2}\right)} + c_2 e^{i\beta_2 \left(x - \frac{\alpha t^2}{2}\right)} + c_3 e^{i\beta_3 \left(x - \frac{\alpha t^2}{2}\right)} + c_4 e^{i\beta_4 \left(x - \frac{\alpha t^2}{2}\right)} \right) \quad (5.34)$$

Başka bir çözüm için $k=1$ ve diğer parametreleri sıfır seçelim. Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x - \frac{\alpha t^2}{2}, \quad y = f(\xi), \quad (5.35)$$

Denklem (5.35)' te elde ettiğimiz yeni değişkenlere göre türevleri tanımlayıp denklem (5.1)' de yerine yerleştirirsek kısmi diferansiyel denklemimiz benzerlik fonksiyonu ve benzerlik değişkeni cinsinden şu adi diferansiyel denkleme dönüşür

$$v_1^2 f'' + (v_0^2 - 1) f' = 0 \quad (5.36)$$

Denklem (5.36) çözülür ve gerçek değişkenlere ters dönüşüm yapılırsa şu çözüm elde edilir

$$y(x,t) = c_1 e^{\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \left(x - \frac{\alpha t^2}{2}\right)} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \left(x - \frac{\alpha t^2}{2}\right)} + c_3 \left(x - \frac{\alpha t^2}{2}\right) + c_4 \quad (5.37)$$

Bu bölümde sabit ivmeli hız değişimi durumu için tam çözümlere bazı örnekler verilmiştir. Denklem (5.31)'deki jeneratörlerin parametrelerini değişik şekillerde seçerek farklı çözümler elde edebiliriz.

5.2.4 Harmonik Hız

Eksenel hız $v = v_0 + v_1 \sin \Omega t$ olduğunda denklem (5.12)'den

$$h = k v_1 \sin \Omega t + m \quad (5.38)$$

elde edilir. Bu durumda infinitesimal jeneratörler şu şekilde olur

$$\xi_1 = k v_1 \sin \Omega t + m$$

$$\xi_2 = k \quad (5.39)$$

$$\eta = at + by + c$$

Çözüm için k ve b parametrelerini keyfi, diğer parametreleri sıfır seçelim. Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonunu veren eşdeğer adi diferansiyel denklem sistemi şu şekilde elde edilir

$$\frac{dx}{kv_1 \sin \Omega t} = \frac{dt}{k} = \frac{dy}{by} \quad (5.40)$$

Denklem (5.40) kullanılarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x + \frac{V_1}{\Omega} \cos \Omega t, \quad y = e^{\gamma t} f(\xi), \quad (5.41)$$

Burada $\gamma = b/k'$ dir. $\gamma = i\gamma$ alıp önceki bölümlerde yaptığımız işlemlere benzer olarak türevleri alıp denklem (5.1)'de yerine yerleştirelim. Bu durumda denklem (5.26)'nın aynısını elde ederiz. Ancak buradaki benzerlik değişkeni farklı olduğu için gerçek değişkenler cinsinden çözümü şu şekilde elde ederiz

$$y(x,t) = e^{\gamma t} \left(c_1 e^{i\beta_1 \left(x + \frac{V_1}{\Omega} \cos \Omega t\right)} + c_2 e^{i\beta_2 \left(x + \frac{V_1}{\Omega} \cos \Omega t\right)} + c_3 e^{i\beta_3 \left(x + \frac{V_1}{\Omega} \cos \Omega t\right)} + c_4 e^{i\beta_4 \left(x + \frac{V_1}{\Omega} \cos \Omega t\right)} \right) \quad (5.42)$$

Başka bir çözüm elde edelim. $k=1$ diğer parametreler sıfır olursa eşdeğer adi diferansiyel denklem sistemi şu şekilde elde edilir

$$\frac{dx}{kv_1 \sin \Omega t} = \frac{dt}{k} = \frac{dy}{0} \quad (5.43)$$

Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x + \frac{V_1}{\Omega} \cos \Omega t, \quad y=f(\xi) \quad (5.44)$$

Bu benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonlarını kullanarak benzerlik fonksiyonu için şu şekilde bir adi diferansiyel denklem elde ederiz

$$v_1^2 f^{iv} + (v_0^2 - 1) f'' = 0 \quad (5.45)$$

Bu denklem, denklem (5.36) ile aynı formdadır. Ancak burada benzerlik değişkeni farklı olduğu için gerçek değişkenler cinsinden çözümü şu şekilde elde ederiz

$$y(x,t) = c_1 e^{\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} (x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t)} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} (x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t)} + c_3 (x + \frac{v_1}{\Omega} \cos \Omega t) + c_4 \quad (5.46)$$

Bu bölümde sinüzoidal hız değişimi durumu için tam çözümlere bazı örnekler verilmiştir. Denklem (5.39)'deki jeneratörlerde parametreleri değişik şekillerde seçerek farklı çözümler elde edebiliriz.

5.2.5 Eksponansiyel Hız

Eksenel hız $v=v_0(1-e^{-\alpha t})$ olduğunda denklem (5.12)'den

$$h = -v_0 k e^{-\alpha t} + m \quad (5.47)$$

elde edilir. Bu durumda infinitesimal jeneratörler şu şekle dönüşür

$$\xi_1 = -v_0 k e^{-\alpha t} + m$$

$$\xi_2 = k \quad (5.48)$$

$$\eta = at + by + c$$

Çözüm için k ve b parametrelerini keyfi, diğerlerini sıfır seçelim. Bu durumda eşdeğer adi diferansiyel denklem sistemini şu şekilde elde ederiz

$$\frac{dx}{-v_0 k e^{-\alpha t}} = \frac{dt}{k} = \frac{dy}{by} \quad (5.49)$$

Denklem (5.49) kullanılarak benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$\xi = x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}, \quad y = e^{yt} f(\xi) \quad (5.50)$$

Daha önceki durumlarda olduğu gibi işlem yaparsak gerçek değişkenler cinsinden çözümü şu şekilde elde ederiz

$$y(x,t) = e^{iyt} \left(C_1 e^{i\beta_1 \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right)} + C_2 e^{i\beta_2 \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right)} + C_3 e^{i\beta_3 \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right)} + C_4 e^{i\beta_4 \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right)} \right) \quad (5.51)$$

Diğer bir çözüm için $k=1$ ve diğer terimleri sıfır seçelim. Bu durumda benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonunu şu şekilde elde ederiz

$$\xi = x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}, \quad y = f(\xi) \quad (5.52)$$

Denklem (5.52)' de elde edilen benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonunu denklem (5.1)' e uygularsak denklem (5.36) ile aynı formda adi diferansiyel denklem elde ederiz. Elde ettiğimiz benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonunu kullanarak gerçek değişkenlere ters dönüşüm yaparsak çözümü şu şekilde elde ederiz

$$y(x,t) = C_1 e^{\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right)} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_1} \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right)} + C_3 \left(x - \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\right) + C_4 \quad (5.53)$$

Bu bölümde bölüm 5.1' de elde ettiğimiz jeneratörler kullanılarak keyfi hız ve bazı özel hız fonksiyonları için tam çözümler elde ettik. Bunların dışında değişik durumlar için çözümler elde edilebilir. Elde edilen bu tam çözümlere sınır şartlarının uygulanması bir sonraki bölümde incelenecektir.

5.3 Sınır Değer Problemleri

Bundan önceki bölümlerde Lie Grup Teorisi kullanılarak hareketli kiriş denklemi için jeneratörler elde edildi ve bu jeneratörler kullanılarak denklemin bazı tam çözümleri üretildi. Verilen bir sınır değer problemi için elde edilen bu çözümlerin büyük bir kısmı uygun olmayabilir. Sınır değer problemine uygun çözümleri üretilebilmesi için deneme yanılma metodunun yanısıra sistematik yollar da vardır. Nonlineer problemlerde denklemin yanısıra sınır şartlarının da dönüşüm altında invariant (değişmez) kaldığı simetriler uygun çözümleri verir. Lineer problemlerde durum bu kadar kısıtlayıcı değildir. Dolayısıyla bu şartı uygulamak bu çözümleri de yok edebilir. Benzerlik dönüşümü ile kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme çevirmek yerine kanonik koordinatlar kullanılarak bir kısmi diferansiyel denklemden daha basit bir kısmi diferansiyel denklem elde etme durumunda ise sınır şartı problemi kendiliğinden ortadan kalkar.

Bu bölümde iki uçundan basit mesnetlenmiş kiriş için sınır şartlarını ele alacağız.

$$y(0,t) = y(1,t) = y''(0,t) = y''(1,t) = 0 \quad (5.54)$$

5.3.1 Sabit Hız

Bu bölümde sabit hızla hareket eden kiriş için sınır değer problemini ele alacağız. Önce sabit hızlı kiriş için sınır şartlarını sağlayan çözümü elde edelim. Bunun için denklem (5.29)'daki çözümü ele alalım. Bu çözümde n değeri tabii frekansı göstermektedir. Bu sebeple $n=\omega$ diyelim. Denklem (5.29)'daki çözümü denklem (5.1)'e yerleştirirsek aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left[v_f^2 \beta_1^4 + (1-v^2) \beta_1^2 - 2\omega v \beta_1 - \omega^2 \right] c_1 e^{i\beta_1 x} + \left[v_f^2 \beta_2^4 + (1-v^2) \beta_2^2 - 2\omega v \beta_2 - \omega^2 \right] c_2 e^{i\beta_2 x} \\ & + \left[v_f^2 \beta_3^4 + (1-v^2) \beta_3^2 - 2\omega v \beta_3 - \omega^2 \right] c_3 e^{i\beta_3 x} + \left[v_f^2 \beta_4^4 + (1-v^2) \beta_4^2 - 2\omega v \beta_4 - \omega^2 \right] c_4 e^{i\beta_4 x} = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Bu denklem ise $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ve ω değerlerini bulacağımız denklemlerden biri olan aşağıdaki saçılma denklemini verir

$$v_f^2 \beta^4 + (1-v^2) \beta^2 - 2\omega v \beta - \omega^2 = 0 \quad (5.56)$$

Burada β değeri $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ katsayılarını bulmada kullanacağımız bir değişkendir. Denklem (5.54)'teki sınır şartları denklem (5.29)'daki çözüme yerleştirilirse şu denklemler elde edilir

$y(0,t)=0$ 'dan

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \quad (5.57)$$

$y''(0,t) = 0$ 'dan

$$c_1\beta_1^2 + c_2\beta_2^2 + c_3\beta_3^2 + c_4\beta_4^2 = 0 \quad (5.58)$$

$y(1,t) = 0$ 'dan

$$c_1e^{i\beta_1} + c_2e^{i\beta_2} + c_3e^{i\beta_3} + c_4e^{i\beta_4} = 0 \quad (5.59)$$

$y''(1,t) = 0$ 'dan

$$c_1\beta_1^2e^{i\beta_1} + c_2\beta_2^2e^{i\beta_2} + c_3\beta_3^2e^{i\beta_3} + c_4\beta_4^2e^{i\beta_4} = 0 \quad (5.60)$$

Bu dört denklemi matris formunda şu şekilde yazabiliriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_4^2 \\ e^{i\beta_1} & e^{i\beta_2} & e^{i\beta_3} & e^{i\beta_4} \\ \beta_1^2e^{i\beta_1} & \beta_2^2e^{i\beta_2} & \beta_3^2e^{i\beta_3} & \beta_4^2e^{i\beta_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Denklem (5.61)'in basit olmayan çözümü için birinci matrisin determinantının sıfır olması gerekir. Buradan $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ve ω değerlerini bulacağımız ikinci denklem şu şekilde elde edilir

$$\begin{aligned} & [e^{i(\beta_1+\beta_2)} + e^{i(\beta_3+\beta_4)}](\beta_1^2 - \beta_2^2)(\beta_3^2 - \beta_4^2) + [e^{i(\beta_1+\beta_3)} + e^{i(\beta_2+\beta_4)}](\beta_2^2 - \beta_4^2)(\beta_3^2 - \beta_1^2) \\ & + [e^{i(\beta_2+\beta_3)} + e^{i(\beta_1+\beta_4)}](\beta_1^2 - \beta_4^2)(\beta_2^2 - \beta_3^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

Denklem (5.62) ve (5.56) kullanılarak kök bulma algoritması sayesinde her iki denklemi sağlayan $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ kökleri ve uygun ω tabii frekans değerleri elde edilebilir. Sınır şartlarını sağlayan çözüm fonksiyonunu bulmak için denklem (5.57-5.60)' ı çözelim. Gerekli cebirsel işlemler yapılsa

$$c_2 = -\frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} c_1, \quad c_3 = -\frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} c_1, \quad c_4 = (-1 - c_2 - c_3)c_1 \quad (5.63)$$

elde edilir. Bu durumda sabit hızla hareket eden şerit için çözüm fonksiyonu şu şekilde elde edilir

$$y(x, t) = c_1 \left\{ e^{i\beta_1 x} - \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} e^{i\beta_2 x} - \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} e^{i\beta_3 x} \right. \\ \left. + \left[-1 + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} \right] e^{i\beta_4 x} \right\} + k.e \quad (5.64)$$

Burada k.e kompleks eşleniği göstermektedir. Çözüm fonksiyonunun reel sonuç verebilmesi için çözüme kompleks eşleniği de ekliyoruz. Böylece sabit hızla hareket eden ve her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş kirişin çözüm fonksiyonunu elde ettik.

5.3.2 Harmonik Hız

Şimdi de belli bir hız etrafında sinüzoidal olarak değişim gösteren hız fonksiyonu için sınır değer problemini ele alalım. Kirişin her iki ucundan basit mesnetlendiğini düşünelim. Bu problemin tam olarak sınır şartlarını sağlaması zordur. Bu yüzden sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlatmayı deneyeceğiz. Hız değişim genliğini küçük kabul edersek ($v_1 = \varepsilon \bar{v}_1$), hız fonksiyonunu şu şekilde yazabiliriz

$$v = v_0 + \varepsilon \bar{v}_1 \sin \Omega t \quad (5.65)$$

Denklem (5.65)' i denklem (5.42)' deki çözümde yerine yerleştirelim. Bu çözümde γ değeri tabii frekansı göstermektedir. Bu sebeple $\gamma = \omega$ diyelim. Denklem (5.42)' deki çözümü 1 ve ε mertebesine ayırırsak herbir mertebede şu çözümleri elde ederiz

1 mertebesi :

$$y_0(x, t) = e^{i\omega t} (c_1 e^{i\beta_1 x} + c_2 e^{i\beta_2 x} + c_3 e^{i\beta_3 x} + c_4 e^{i\beta_4 x}) \quad (5.66)$$

ε mertebesi :

$$y_1(x, t) = i \frac{\bar{V}_1}{\Omega} \cos \Omega t e^{i\omega t} (c_1 \beta_1 e^{i\beta_1 x} + c_2 \beta_2 e^{i\beta_2 x} + c_3 \beta_3 e^{i\beta_3 x} + c_4 \beta_4 e^{i\beta_4 x}) \quad (5.67)$$

çözüm ise bu iki mertebeye çözümün toplamıdır.

$$y(x, t) = y_0(x, t) + \varepsilon y_1(x, t) \quad (5.68)$$

Sınır şartlarının 1 mertebesinde tam olarak sağlandığını ve ε mertebesinde bir hata payı olduğunu varsayarak (5.68) çözümü neticede aşağıdaki şekli alır

$$\begin{aligned} y(x, t) = c_1 e^{i\omega t} & \left\{ e^{i\beta_1 x} - \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} e^{i\beta_2 x} - \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} e^{i\beta_3 x} \right. \\ & + \left[-1 + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} \right] e^{i\beta_4 x} \\ & + i \frac{V_1}{\Omega} \cos \Omega t \left(\beta_1 e^{i\beta_1 x} - \beta_2 \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} e^{i\beta_2 x} - \beta_3 \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} e^{i\beta_3 x} \right. \\ & \left. \left. + \beta_4 \left[-1 + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} \right] e^{i\beta_4 x} \right) \right\} + k.e. \quad (5.69) \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz çözüm sinüzoidal hız değişimiyle hareket eden ve her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş kirişin sınır şartlarını ε mertebesinde bir yaklaşıklıkla sağlamaktadır.

5.3.3 Ekspansiyel Hız

Bir başka sınır değer problemi için sabit bir hıza ekspansiyel yaklaşan hız fonksiyonunu ele alalım. Kirişin her iki ucundan basit olarak mesnetlendiğini düşünelim. Denklem (5.51)' de v_0/α değerinin yeterince küçük olduğunu kabul edelim. Sinüzoidal hız değişiminde olduğu gibi çözümü 1 ve ε mertebelerine ayırırsak 1 mertebesindeki çözümün sabit hızla hareket eden kiriş çözümü olduğunu görürüz. Sınır şartlarını da daha önce yaptığımız gibi 1 mertebesine uygularsak ve benzer işlemleri tekrarlırsak, ekspansiyel hız değişimi için yaklaşık çözümü şu şekilde elde ederiz

$$\begin{aligned}
 y(x, t) = c_1 e^{i\omega t} & \left\{ e^{i\beta_1 x} - \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} e^{i\beta_2 x} - \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} e^{i\beta_3 x} \right. \\
 & + \left[-1 + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} \right] e^{i\beta_4 x} \\
 & - i \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \left(\beta_1 e^{i\beta_1 x} - \beta_2 \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} e^{i\beta_2 x} - \beta_3 \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} e^{i\beta_3 x} \right. \\
 & \left. \left. + \beta_4 \left[-1 + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_2^2)(e^{i\beta_3} - e^{i\beta_2})} + \frac{(\beta_4^2 - \beta_1^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_1})}{(\beta_4^2 - \beta_3^2)(e^{i\beta_2} - e^{i\beta_3})} \right] e^{i\beta_4 x} \right) \right\} + k.e. \quad (5.70)
 \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz çözüm her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş ve ekspansiyel hız değişimiyle hareket eden kirişin sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlamaktadır. Denklem (5.69) ve denklem (5.70)' te kiriş özelliğini gösteren v_f katsayısını küçük alırsak, bulacağımız çözümler Bölüm 4 ' te elde ettiğimiz dış açılım çözümlerine karşılık gelecektir.

Bu bölümde eksenel hareketli kiriş problemi ele alınmıştır. İlk olarak Lie Grup Teorisi ve Eşdeğerlik Dönüşümleri kullanılarak denkleme ait jeneratörler elde edilmiştir. Bu jeneratörler kullanılarak keyfi hız ve özel hız değişkenleri için tam çözümler üretilmiştir. Son olarak sınır şartlarını sağlayabilecek çözümler araştırılmıştır. Belli kabuller yaparak sınır şartlarını yaklaşık sağlayan çözümler elde edilmiştir. Bundan sonraki bölümde elde edilen çözümler kullanılarak değişik durumlar için grafikler elde edilecektir.

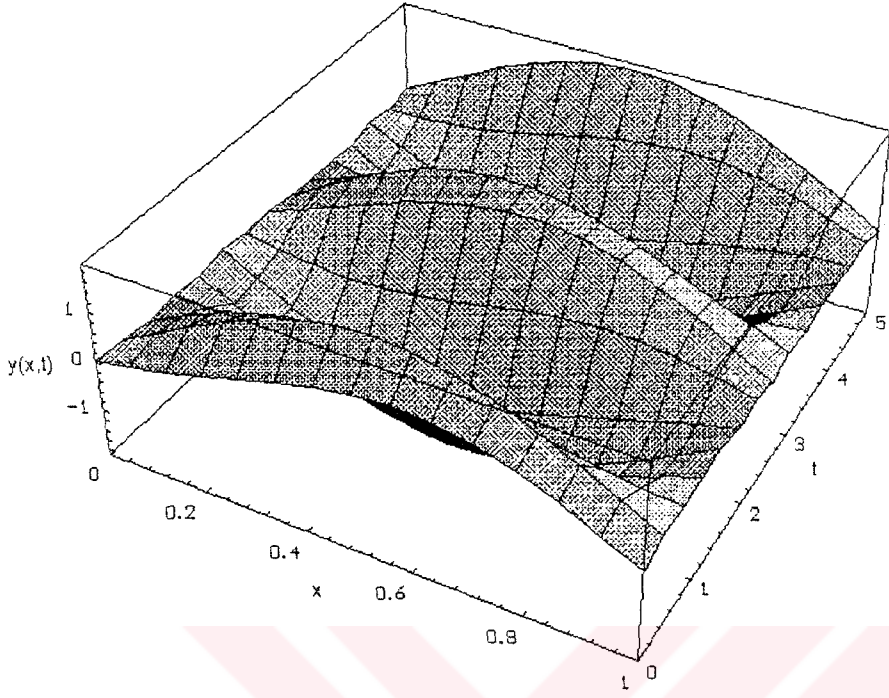
5.4. Sayısal Örnekler

Bu bölümde önceki bölümlerde elde ettiğimiz, her iki ucundan basit olarak mesnetlenmiş kiriş için sınır şartlarını yaklaşık sağlayan çözüm fonksiyonlarını kullanarak, değişik katsayılar için grafikler çizilecektir. Önce sinüzoidal hareketli kirişin çözüm fonksiyonu ele alınacak ve değişik durumlar için grafikler çizilecektir. Daha sonra eksponansiyel hareketli kirişin yaklaşık çözümü ele alınarak benzer şekilde değişik katsayılara göre grafikler elde edilecektir.

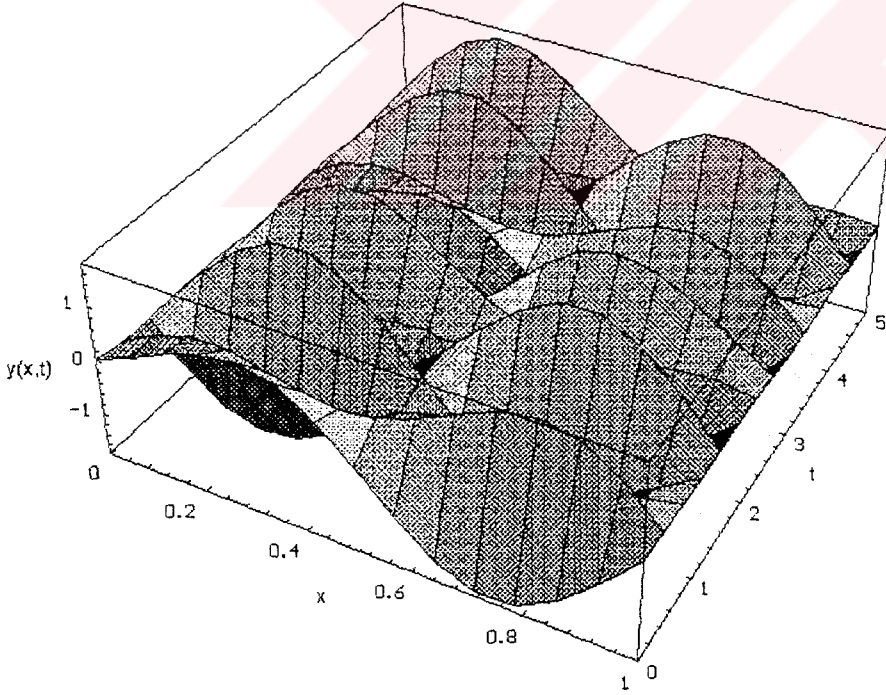
Sinüzoidal hız değişimine sahip kiriş için sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözüm fonksiyonu denklem (5.69)' da verilmiştir. Şekil (5.1) ve (5.2)' de bu fonksiyon kullanılarak 1. ve 2. mod için deplasmanın x ve t değişkenlerine bağlı 3 boyutlu grafiği çizilmiştir. Bu grafiklerin çizimi için $v_0=0.5$ $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $C=1$ ve 1. mod için $\Omega=5$, 2. mod için ise $\Omega=10$ olarak alınmıştır. Şekil (5.3) ve (5.4)' te ise aynı parametre değerleri kullanılarak 1. ve 2. mod için x' e bağlı deplasman grafikleri, Şekil (5.5) ve (5.6)' da ise yine x' e bağlı moment grafikleri çizilmiştir. Bu grafiklerde uç noktalarda hem deplasmanla ilgili hem de momentle ilgili sınır şartlarının yaklaşık olarak sağlandığı görülmüştür. Şekil (5.7) ve (5.8)' de $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod durumunda deplasmanların zamanla nasıl değiştiği gösterilmiştir. Şekil (5.9) ve (5.10)' da ise $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod durumunda momentlerin zamanla nasıl değiştiği gösterilmiştir. Bu grafiklerde de uç noktalarda deplasman ve momentle ilgili sınır şartlarının yaklaşık olarak sağlandığı gösterilmiştir. 2. mod durumunda uç noktalardaki maksimum deplasman ve momentlerin daha büyük olduğu belirlenmiştir. Bu da çözümün yapısından kaynaklanmaktadır. Uç noktalardaki deplasmanların daha küçük olması için ε parametresini daha küçük seçebiliriz. Şekil (5.11) ve (5.12)' de ise $x=0.5$ noktasında (orta nokta) 1. ve 2. mod için deplasman değişim grafiği çizilmiştir. Bu iki grafik kullanılarak 1. ve 2. mod için tabii frekanslar hesaplanabilir. Deplasman genliğinin beklenildiği gibi 1. mod durumunda daha büyük olduğu görülmüştür. Şekil (5.13) ve (5.14)' te ise hız değişim frekansı (Ω)' nın değişimiyle $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod için deplasman değişim grafikleri verilmiştir. Şekil (5.15) ve (5.16)' da ise yine hız değişim frekansı (Ω)' nın değişimiyle $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod için moment değişim grafikleri verilmiştir. Buna göre hız değişim frekansı arttıkça uç noktalarda hem deplasman hem de momentler sifıra yaklaşmaktadır. Yani sınır şartları daha küçük bir yaklaşıklıkla sağlanmaktadır.

Bundan sonraki grafiklerde ise eksponansiyel hız değişimi için incelemeler yapılmıştır. Şekil (5.17) ve (5.18)' te 1. ve 2. mod için üç boyutlu grafikler çizilmiştir. 1. mod grafiklerinin çizimleri için $v_0=0.5$ $v_f=0.1$ $\alpha=10$ ve $C=1$ alınmıştır. 2. mod grafiklerinin çizimleri için ise $v_0=0.1$ $v_f=0.1$ $\alpha=10$ ve $C=1$ olarak alınmıştır. Şekil (5.19) ve (5.20)' de $t=0.2$ anında 1. ve 2. mod için x' e bağlı olarak

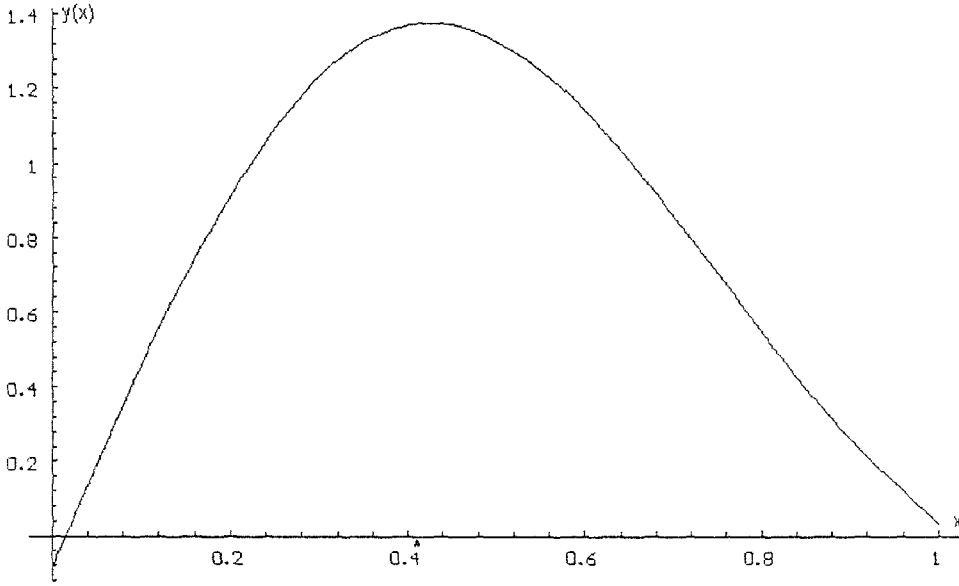
deplasman değişim grafiği çizilmiştir. Şekil (5.21) ve (5.22)' de ise aynı çizimler moment değişimi için yapılmıştır. Uçlarda hem deplasman hem de momentle ilgili sınır şartlarının yaklaşık olarak sağlandığı görülmüştür. Şekil (5.23-5.26)' da ise $x=0$ noktasında 1. ve 2. mod için zaman bağlı olarak deplasman ve moment değişim grafikleri çizilmiştir. Dört şekilde de uç noktalarda deplasmanın ve momentin zamana bağlı olarak hızlı bir şekilde düştüğü görülmüştür. Bu da çözüm fonksiyonunun yapısından kaynaklanmaktadır. Şekil (5.27) ve (5.28)' de ise $x= 0.5$ noktasında deplasmanın zamanla değişimi gösterilmiştir. Bu iki şekil kullanılarak ele alınan katsayılar için 1. ve 2. mod için tabii frekanslar hesaplanabilir. Hem sinüzoidal hız değişimi durumunda hem de eksponansiyel hız değişimi durumunda hesaplayacağımız tabii frekanslar boyutsuz tabii frekanslardır. Bu tabii frekansları boyutlu hale getirmek için denklem (2.18)' deki boyutsuzlaştırma tanımlarını kullanarak ters dönüşüm yapmamız gerekir. Son olarak Şekil (5.29-5.32)' de α katsayısının değişimi ile uç noktalarda 1. ve 2. mod için deplasman ve moment değişim grafikleri çizilmiştir. Her dört şekilde de α katsayısı arttıkça uç noktalarda deplasmanın ve momentin hızlı bir şekilde düştüğü görülmüştür. Sonuç olarak α katsayısı ne kadar büyük olursa, sınır şartlarındaki hata miktarı o kadar azalacaktır.



Şekil 5.1. Sinüzoidal hareketli kiriş için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=5, C=1$)

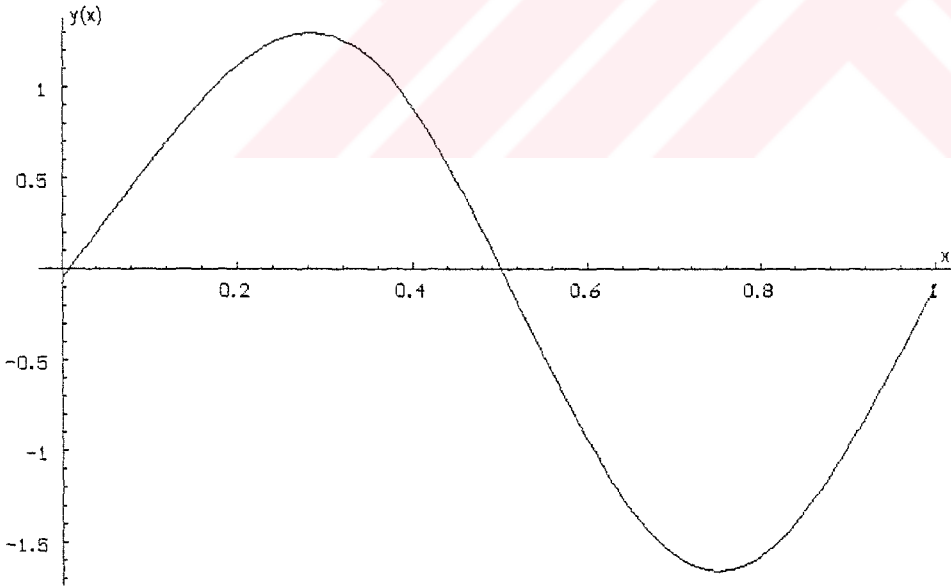


Şekil 5.2. Sinüzoidal hareketli kiriş için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1$)



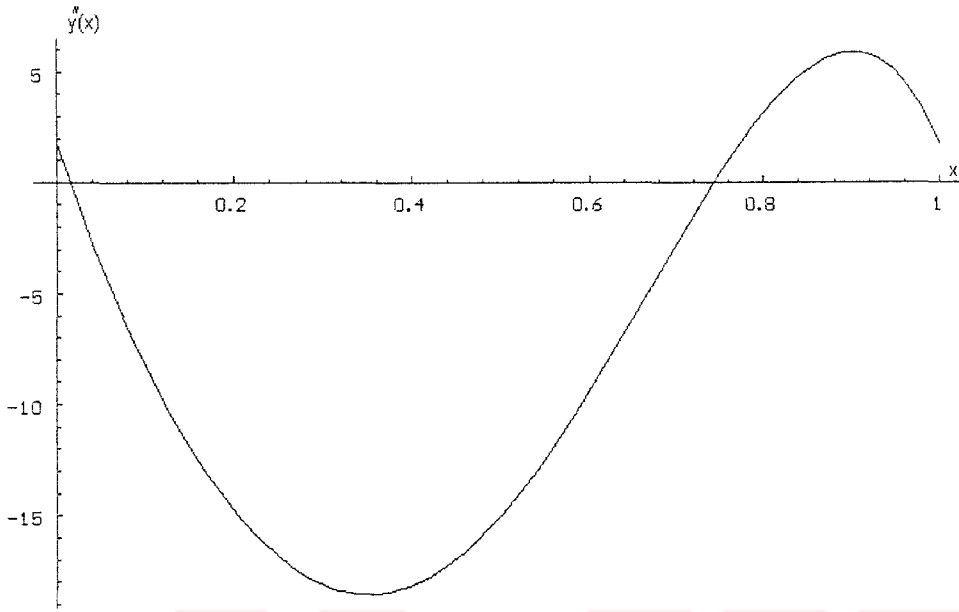
Şekil 5.3. $t=3$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 1. mod deplasman grafiği

$$(v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=5, C=1)$$

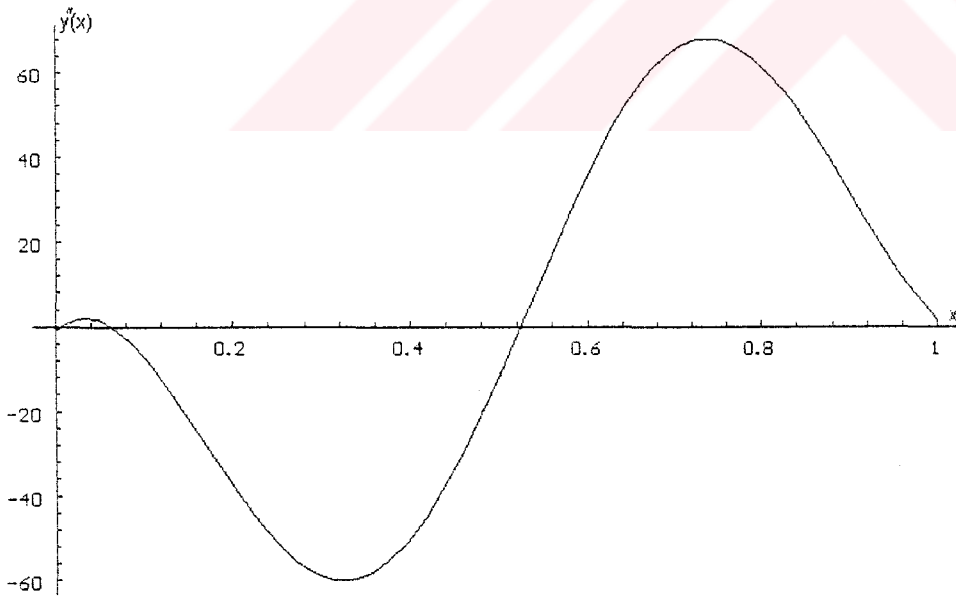


Şekil 5.4. $t=1$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 2. mod deplasman grafiği

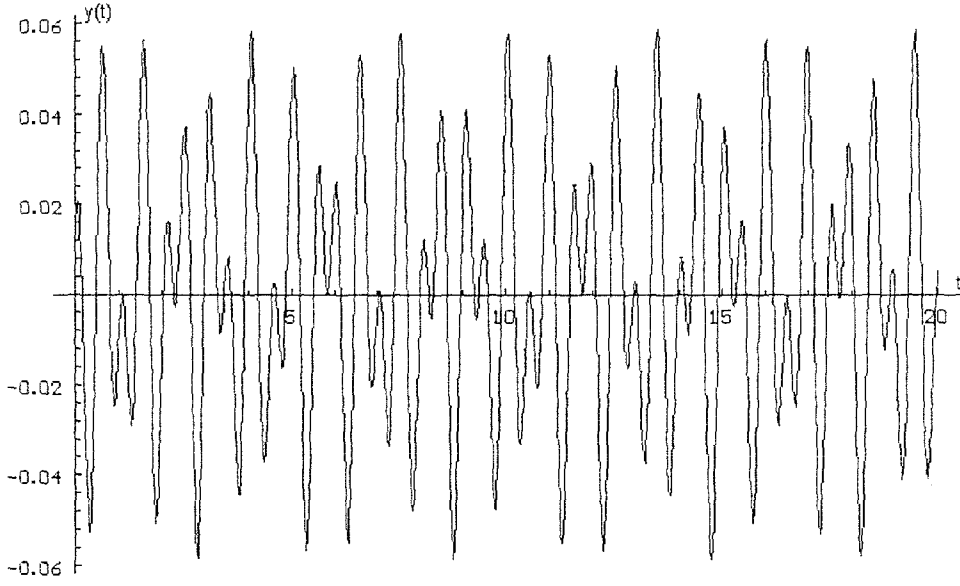
$$(v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1)$$



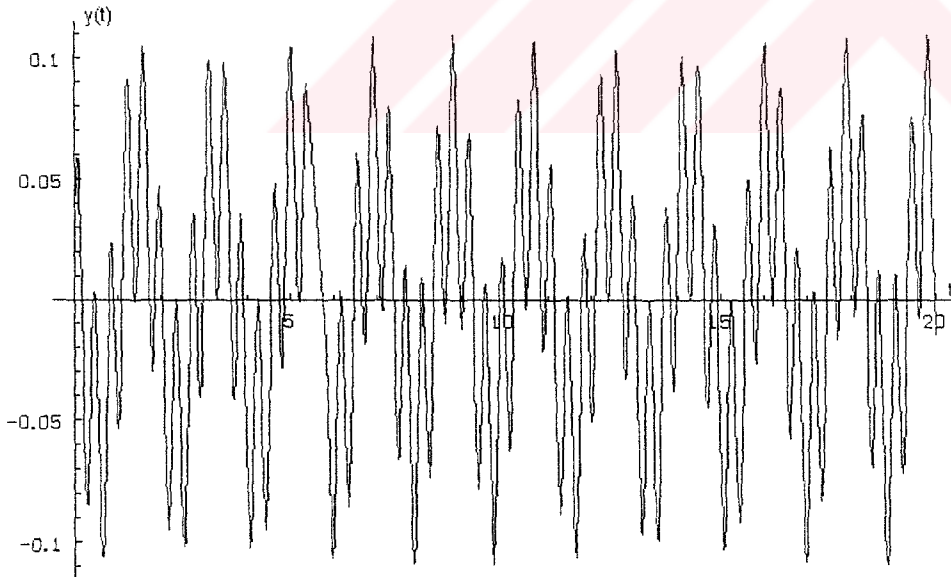
Şekil 5.5. $t=3$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 1. mod moment grafiği
 $(v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=5, C=1)$



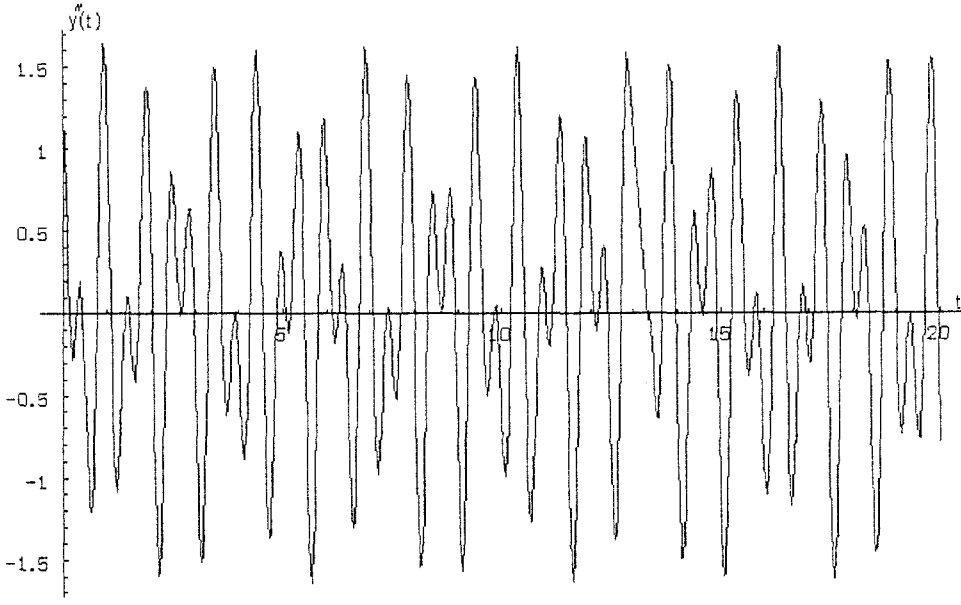
Şekil 5.6. $t=1$ anında sinüzoidal hareketli kiriş için 2. mod moment grafiği
 $(v_0=0.5, v_f=0.1, v_1=0.1, \Omega=10, C=1)$



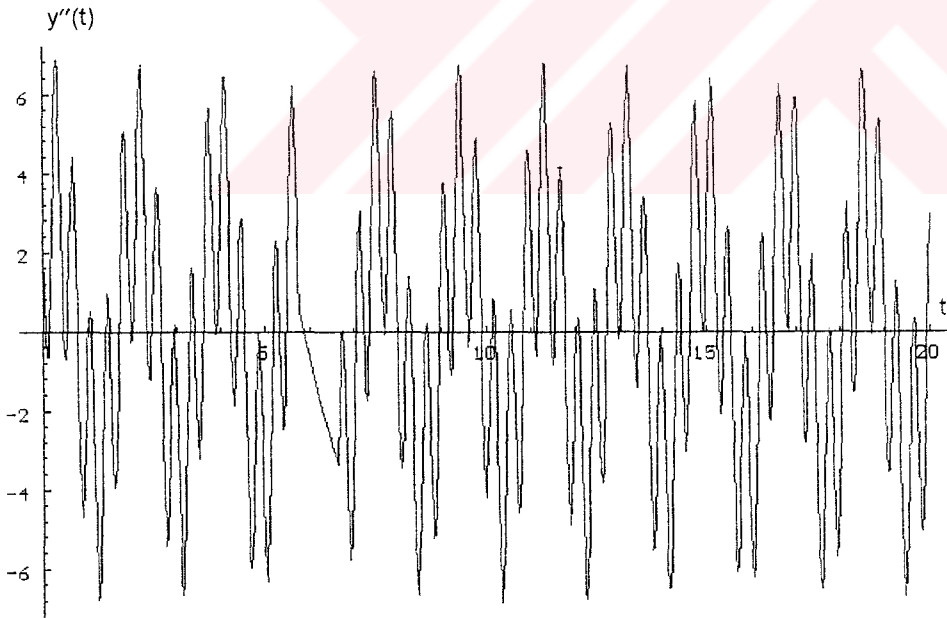
Şekil 5.7. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi
(1.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_t=0.1$, $\Omega=10$, $C=1$)



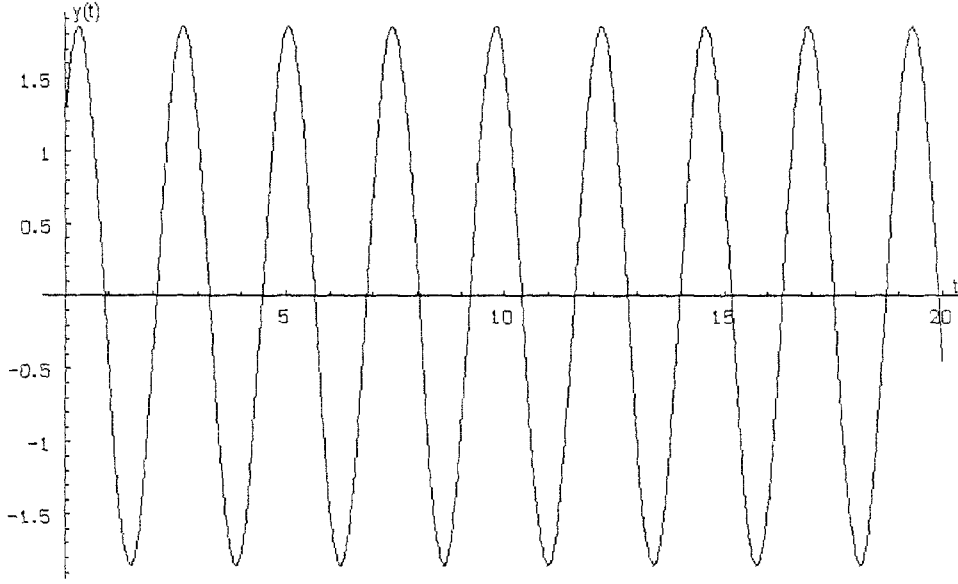
Şekil 5.8. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi
(2.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_t=0.1$, $\Omega=10$, $C=1$)



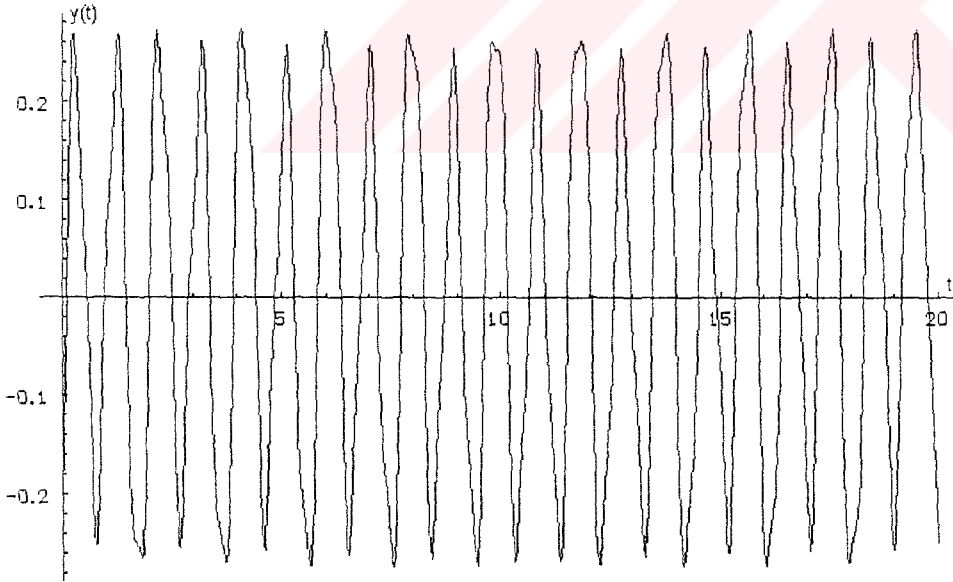
Şekil 5.9. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli kiriş için momentin zamana bağlı olarak değişimi
(1.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $\Omega=10$, $C=1$)



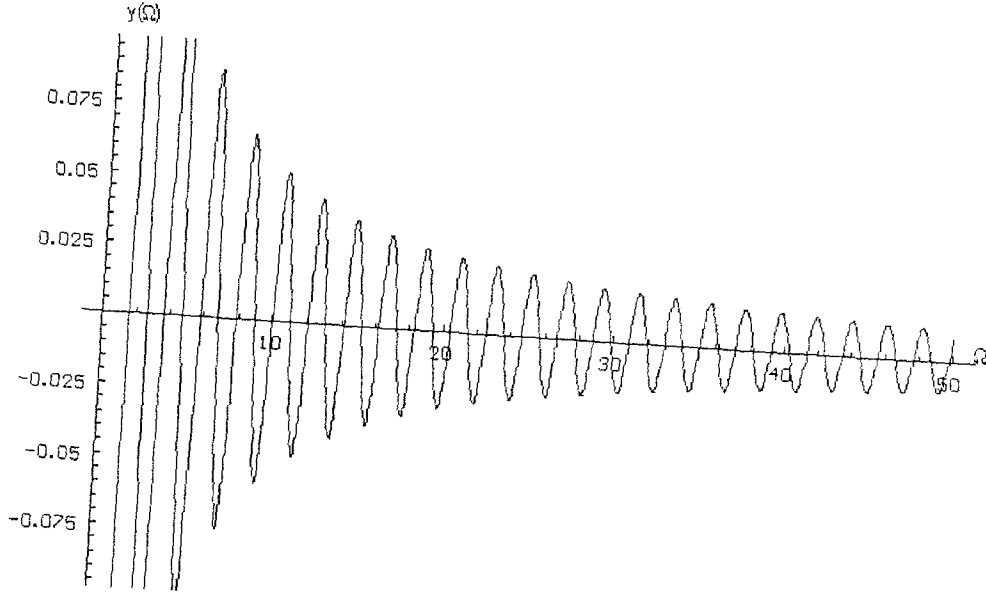
Şekil 5.10. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli kiriş için momentin zamana bağlı olarak değişimi
(2.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $\Omega=10$, $C=1$)



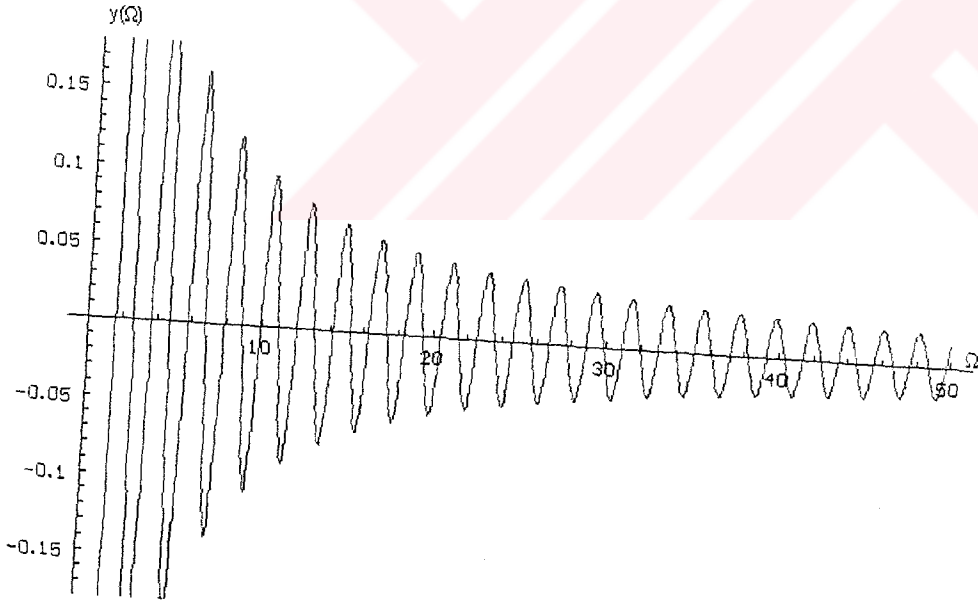
Şekil 5.11. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi
(1.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $\Omega=10$, $C=1$)



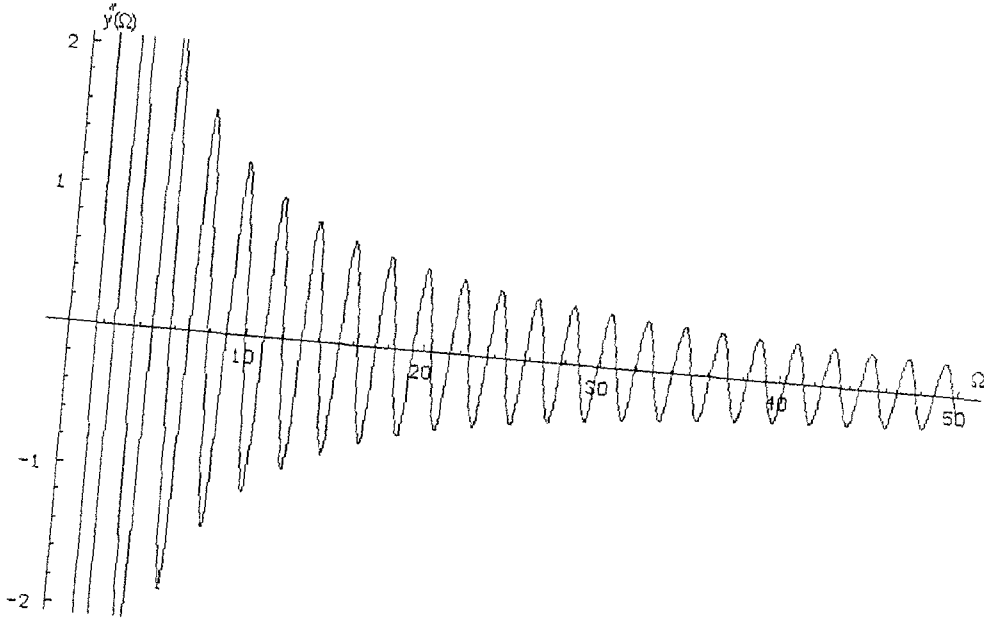
Şekil 5.12. $x=0.5$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için deplasmanın zamana bağlı olarak değişimi
(2.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $\Omega=10$, $C=1$)



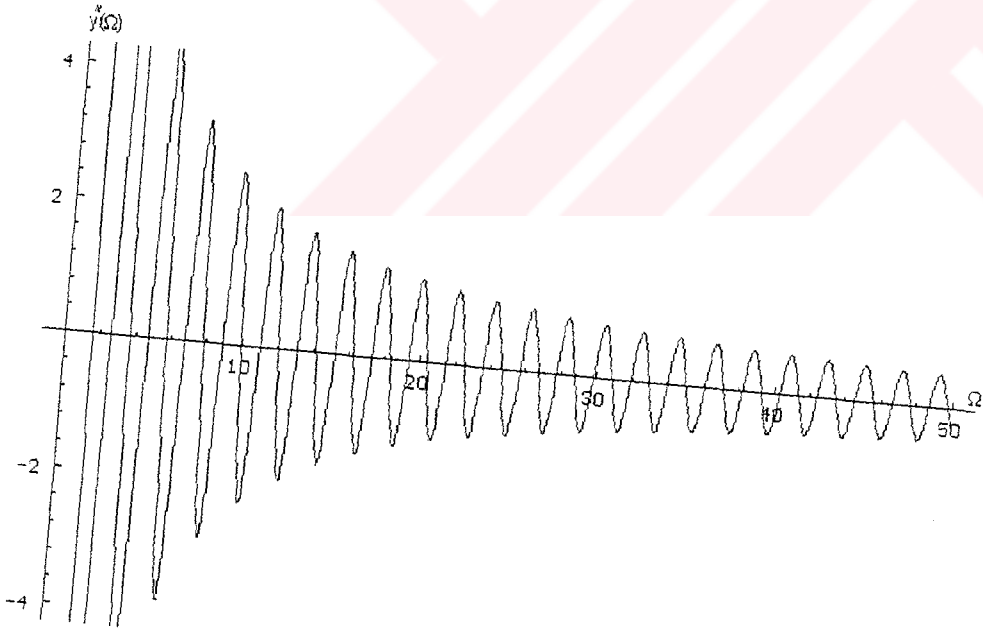
Şekil 5.13. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için hız değişim frekansı - deplasman grafiği
(1.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $t=3$, $C=1$)



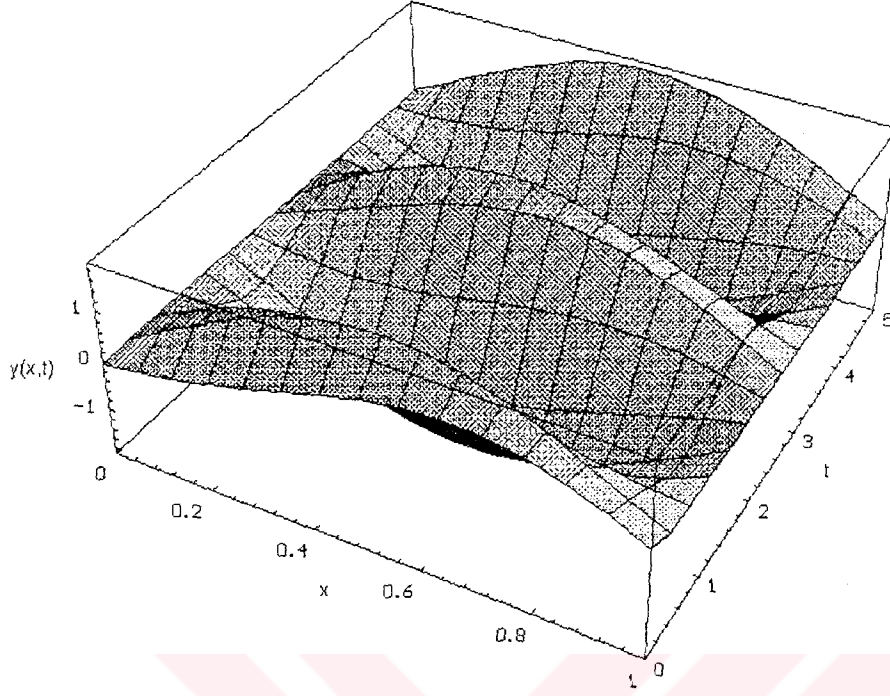
Şekil 5.14. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli giriş için hız değişim frekansı - deplasman grafiği
(2.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $t=3$, $C=1$)



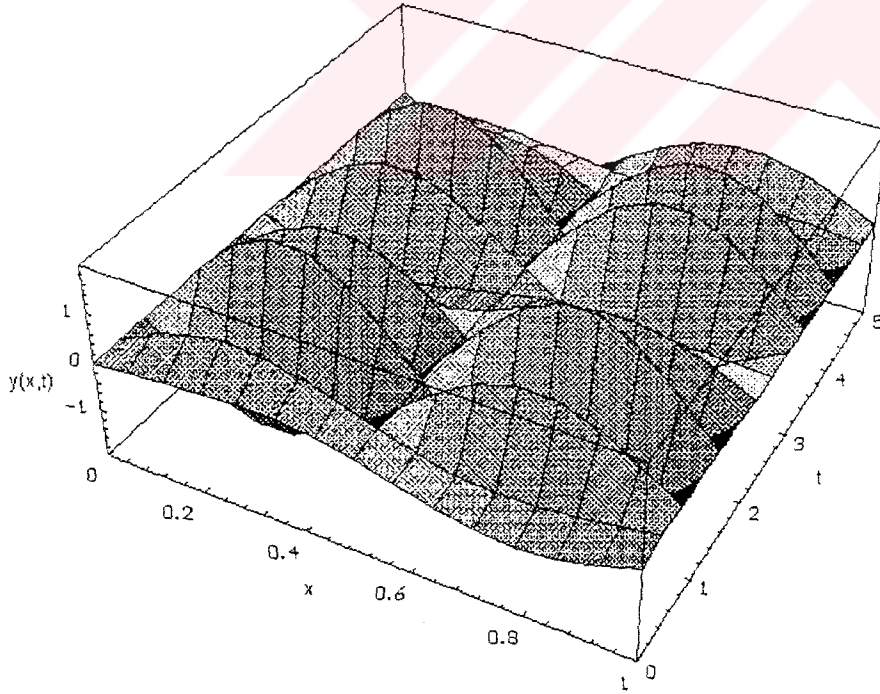
Şekil 5.15. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli kiriş için hız değişim frekansı - moment grafiği
(1.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $t=3$, $C=1$)



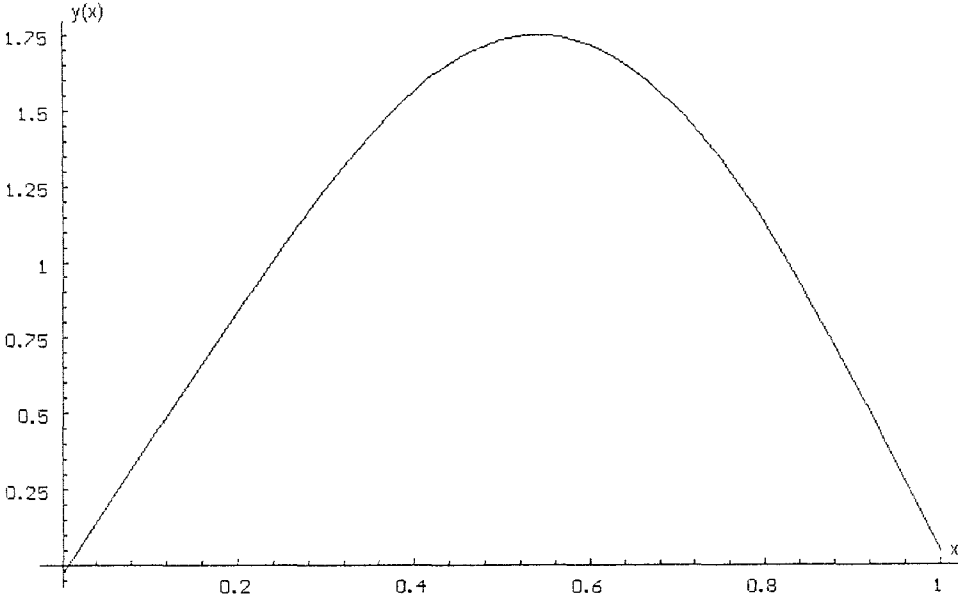
Şekil 5.16. $x=0$ noktasında sinüzoidal hareketli kiriş için hız değişim frekansı - moment grafiği
(2.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $v_1=0.1$, $t=3$, $C=1$)



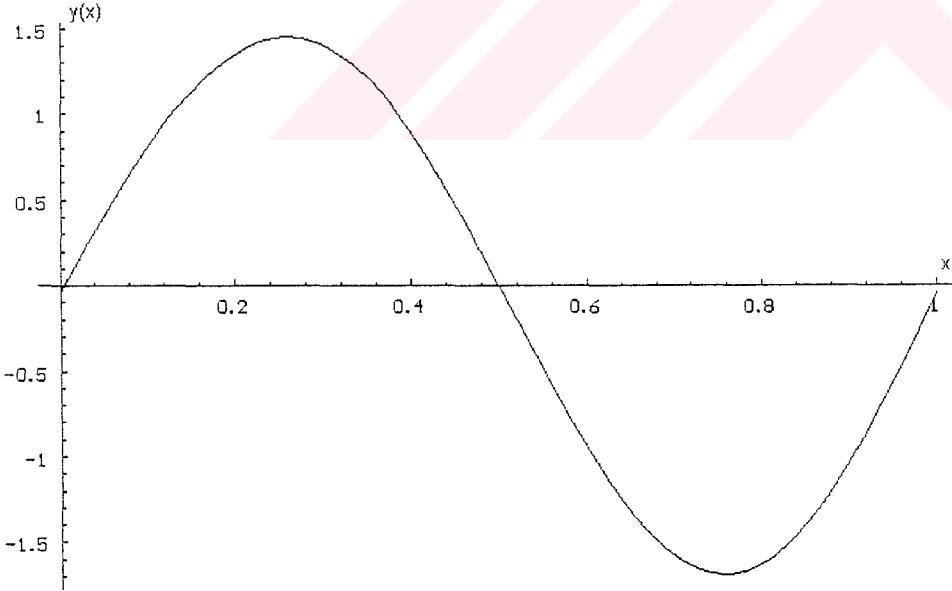
Şekil 5.17. Ekspansiyonel hareketli kiriş için 1. mod deplasman grafiği ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $\alpha=10$, $C=1$)



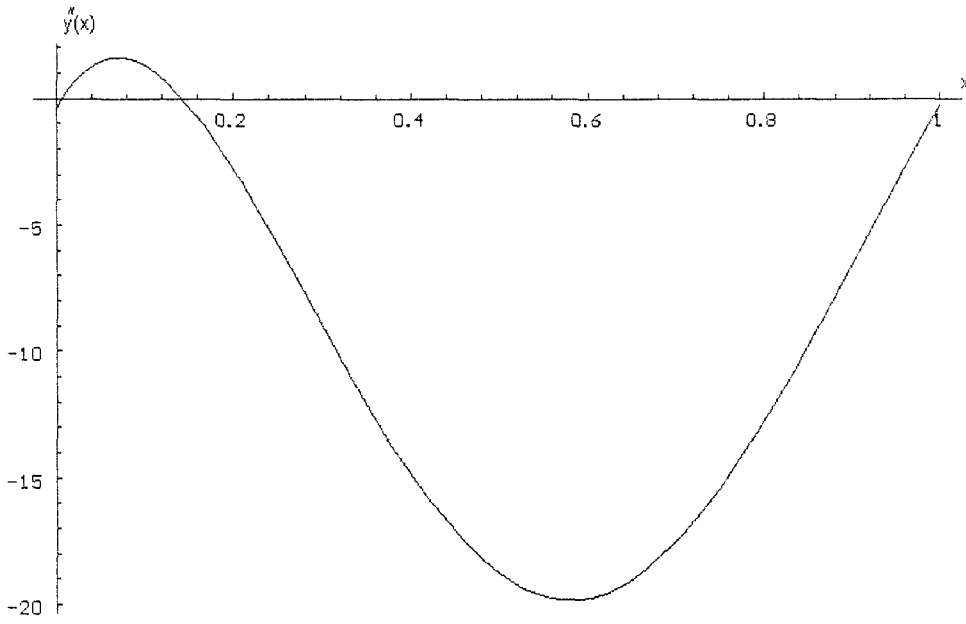
Şekil 5.18. Ekspansiyonel hareketli kiriş için 2. mod deplasman grafiği ($v_0=0.1$, $v_f=0.1$, $\alpha=10$, $C=1$)



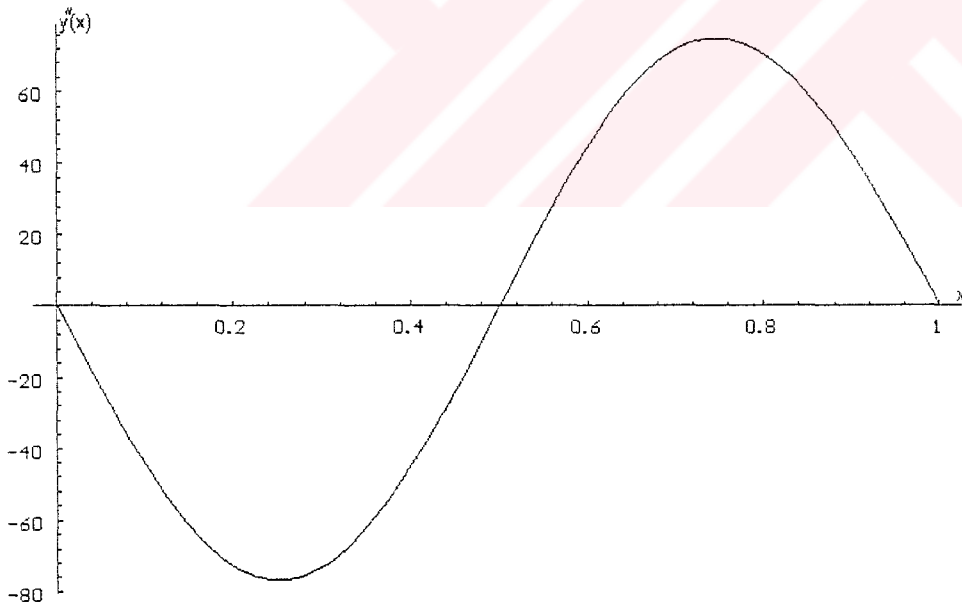
Şekil 5.19. $t=0.2$ anında eksponansiyel hareketli kiriş için 1. mod deplasman grafiği
($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $\alpha=10$, $C=1$)



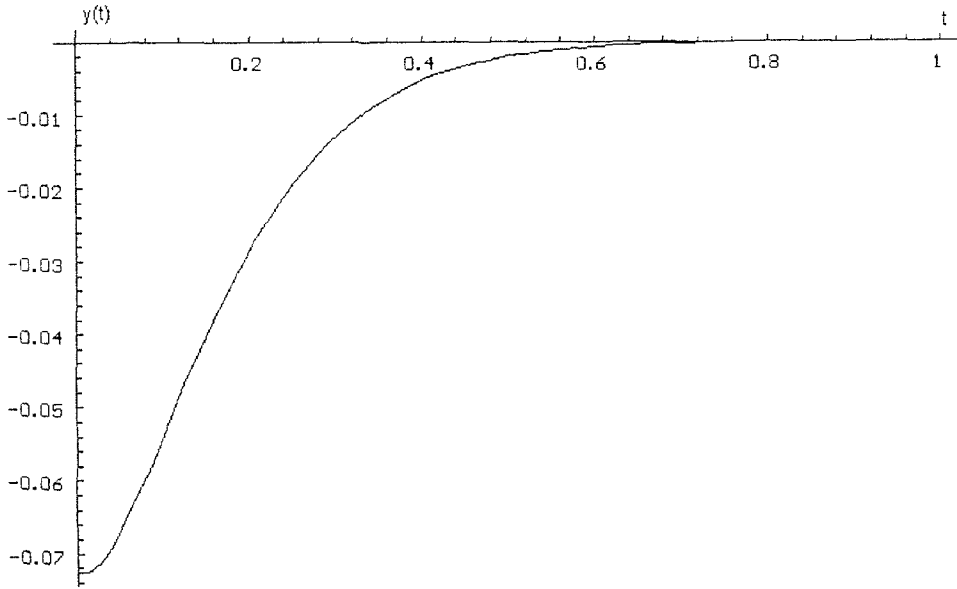
Şekil 5.20. $t=0.2$ anında eksponansiyel hareketli kiriş için 2. mod deplasman grafiği
($v_0=0.1$, $v_f=0.1$, $\alpha=10$, $C=1$)



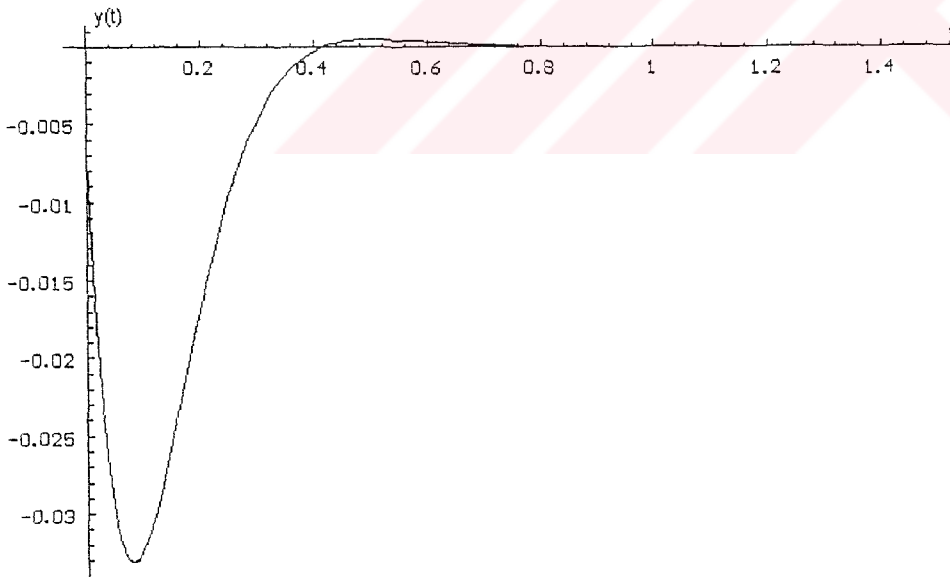
Şekil 5.21. $t=0.2$ anında eksponansiyel hareketli kiriş için 1. mod moment grafiği
 $(v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1)$



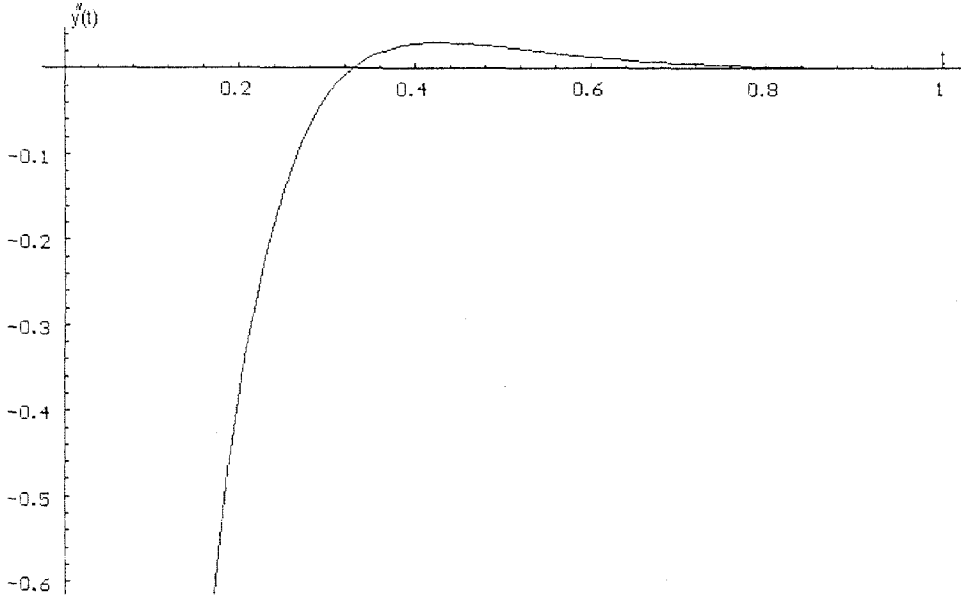
Şekil 5.22. $t=0.2$ anında eksponansiyel hareketli kiriş için 2. mod moment grafiği
 $(v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1)$



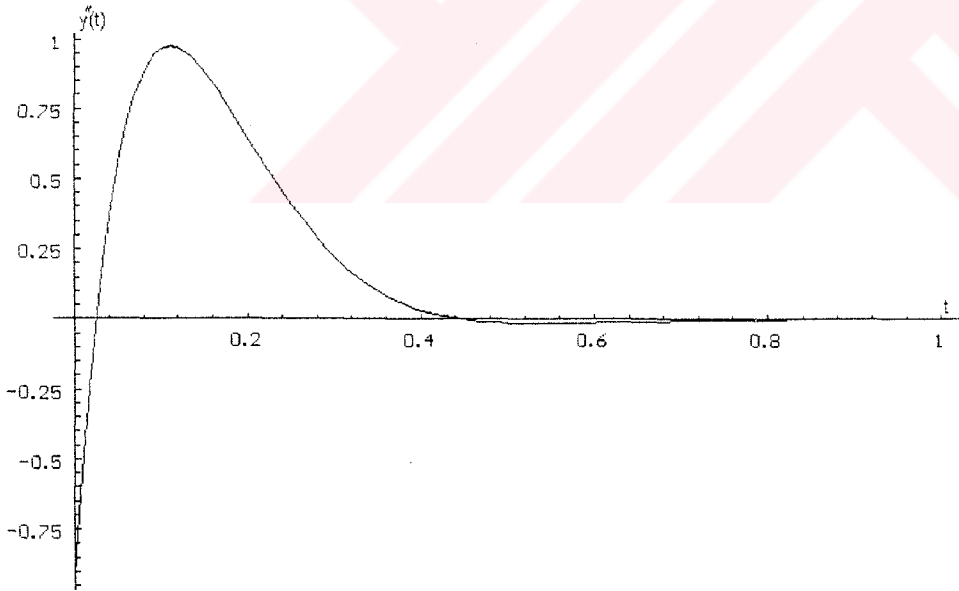
Şekil 5.23. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kırıç için 1. mod deplasman grafiği
 $(v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1)$



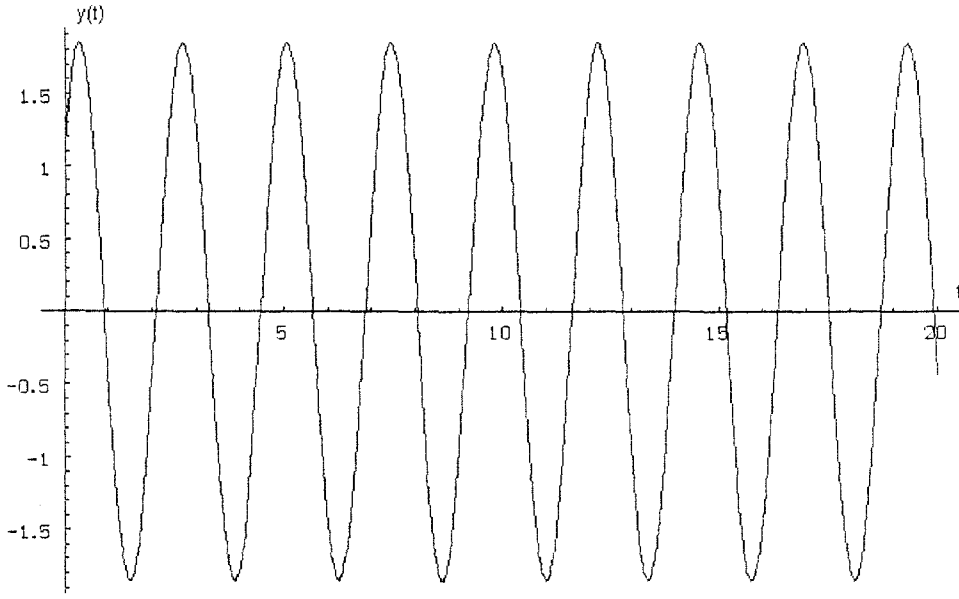
Şekil 5.24. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kırıç için 2. mod deplasman grafiği
 $(v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1)$



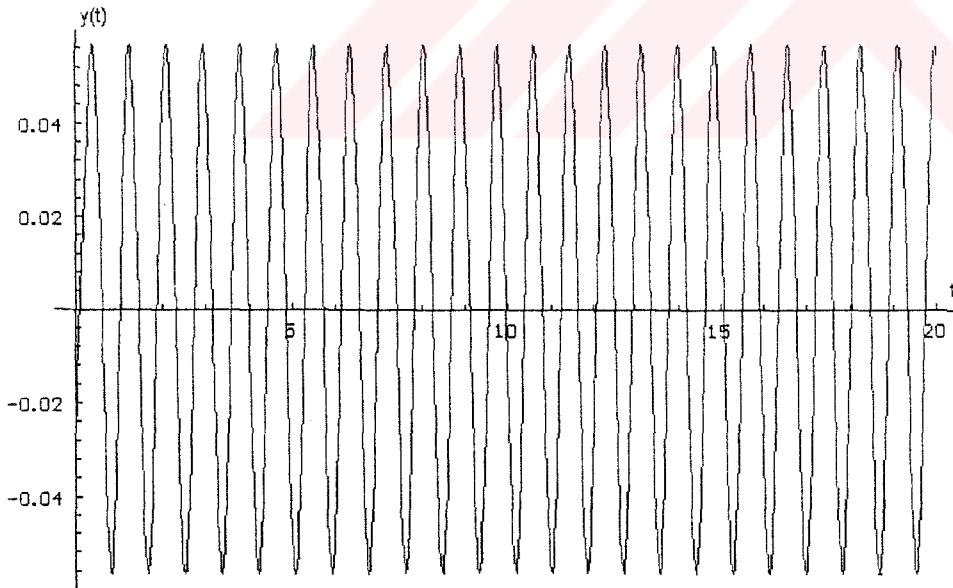
Şekil 5.25. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için 1. mod moment grafiği
 $(v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1)$



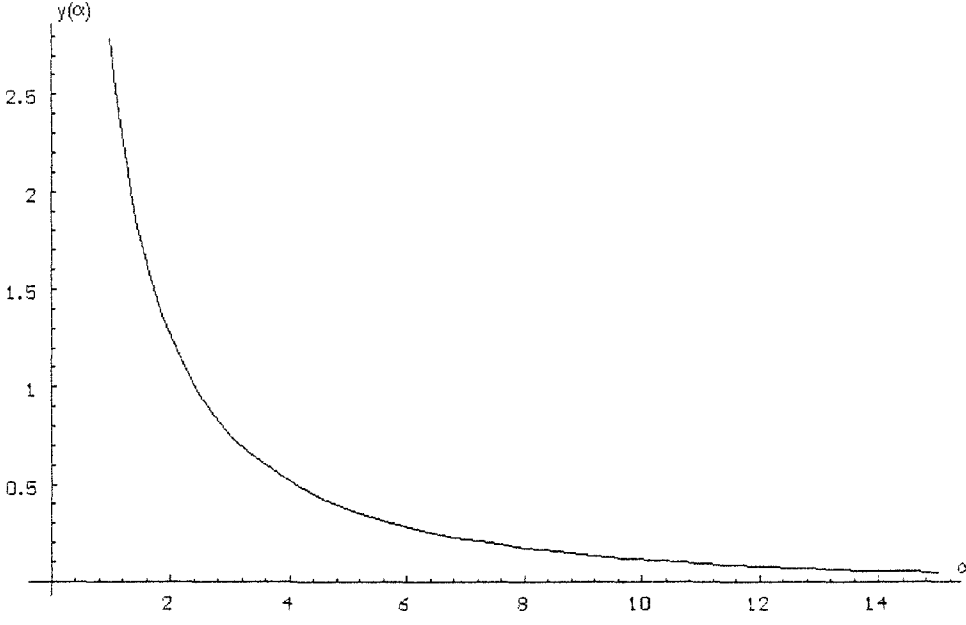
Şekil 5.26. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için 2. mod moment grafiği
 $(v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1)$



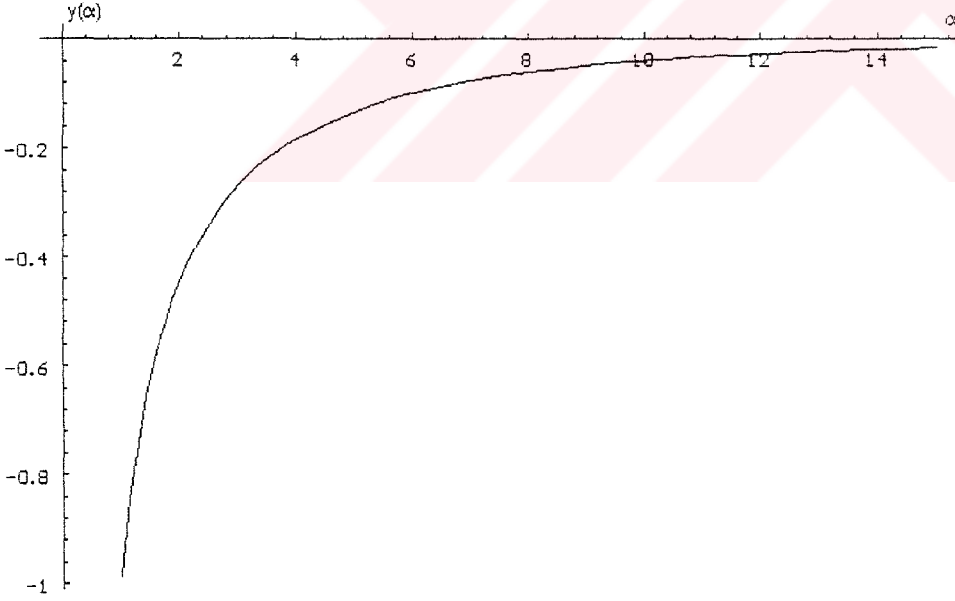
Şekil 5.27. $x=0.5$ noktasında eksponansiyel hareketli giriş için zamana bağlı deplasman grafiği
(1.mod) ($v_0=0.5, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)



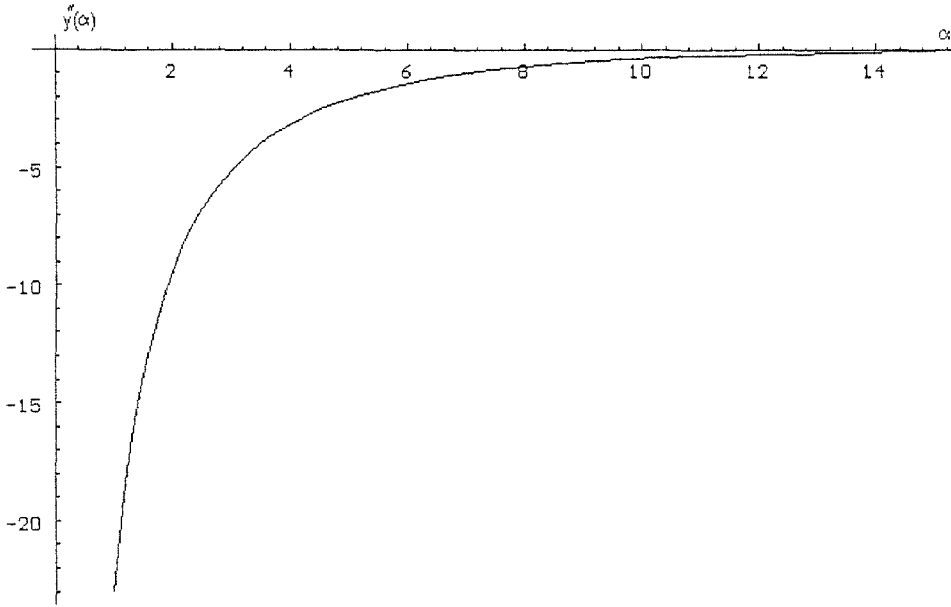
Şekil 5.28. $x=0.5$ noktasında eksponansiyel hareketli giriş için zamana bağlı deplasman grafiği
(2.mod) ($v_0=0.1, v_f=0.1, \alpha=10, C=1$)



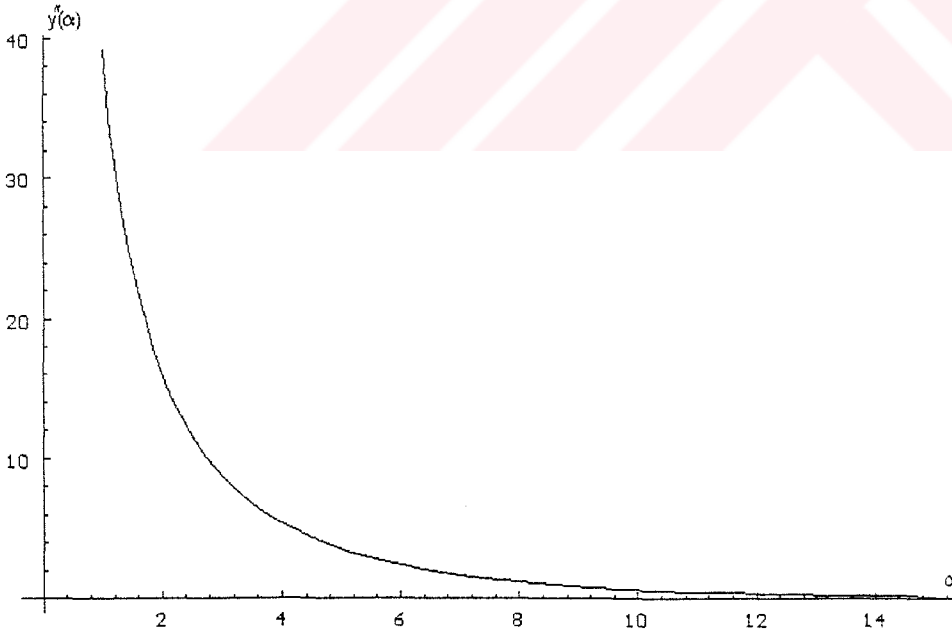
Şekil 5.29. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı deplasman grafiği
(1.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $t=0.2$, $C=1$)



Şekil 5.30. $x=1$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı deplasman grafiği
(2.mod) ($v_0=0.1$, $v_f=0.1$, $t=0.2$, $C=1$)



Şekil 5.31. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı moment grafiği
(1.mod) ($v_0=0.5$, $v_f=0.1$, $t=0.2$, $C=1$)



Şekil 5.32. $x=0$ noktasında eksponansiyel hareketli kiriş için α 'ya bağlı moment grafiği
(2.mod) ($v_0=0.1$, $v_f=0.1$, $t=0.2$, $C=1$)

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri incelenmiştir. Çalışmanın birinci bölümünü giriş kısmı oluşturmaktadır. Bu bölümde bu konuda daha önce yapılan çalışmalar tanıtılmıştır. Bölüm 2' de Hamilton prensibi kullanılarak eksenel hareketli kiriş ve şerit denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen denklemler nonlineer terimleri de ihtiva etmekle birlikte yaptığımız çalışmada denklemlerin lineer kısımları ele alınmıştır.

Bölüm 3' de eksenel hareketli şerit problemi ele alınmıştır. Lie Grup Teorisi kullanılarak hareket denklemlerinin tam çözümleri üretilmiştir. Şerit hızı keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve eksponansiyel hız olarak değişik formlarda ele alınmıştır. Eksenel hız zamanın bir fonksiyonu olduğu için Lie Grup Teorisiyle birlikte Eşdeğerlik Dönüşümleri (Equivalence Transformations)' de uygulanmıştır. Lie Grupları metodu eşdeğerlik çözümleri ile birlikte kullanılarak hareket denklemi için infinitesimal jeneratörler elde edilmiştir. Daha sonra bu jeneratörlerin farklı varyasyonları kullanılarak değişik hız fonksiyonları için sistematik bir şekilde tam çözümler üretilmiştir. Çözümler için iki farklı yaklaşım kullanılmıştır. Birinci yaklaşımda elde edilen simetrliler kullanılarak kanonik koordinatlar tanımlanmış ve hareket denklemi basit bir forma indirgenerek çözülebilir hale getirilmiştir. Bu yaklaşımı keyfi hız durumu için kullandık. İkinci yaklaşımda ise eski değişkenler cinsinden yeni bir benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonu tanımladık. Bu transformasyon kullanılarak kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme indirgeyip, adi diferansiyel denklem çözüldükten sonra ters dönüşümle gerçek değişkenler cinsinden çözümler elde ettik. Bu yaklaşımı hız değişiminin özel fonksiyonları için çözümler elde etmede kullandık. Elde edilen bu çözümlerin hepsi sınır şartlarını sağlamamaktadır. Sınır şartlarına uygun çözümleri ele alarak bu çözümlere sınır şartları uyguladık ve sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümleri elde ettik. Elde edilen çözüm fonksiyonlarını kullanarak değişik durumlar için grafikler çizdik. Ayrıca sinüzodal hız değişimi durumunda hız değişim genliğinin (Ω) artması ile sınır şartlarının daha az bir hata ile sağlandığını gördük. Hız değişiminin eksponansiyel artan olması durumunda ise zamanın artması ve eksponansiyel terimin artış hızını belirleyen α katsayısının artması ile uçlardaki deplasmanların hızlı bir şekilde azaldığını gördük.

Bölüm 4' de eksenel hareketli esnek kiriş problemi ele alınmıştır. Esnek kiriş ele alındığı için kirişin kiriş özelliğini gösteren katsayı küçük kabul edilmiştir. Denklemden en yüksek dereceli terimin önündeki katsayı ε mertebesinde olduğu için elde edilen çözümler kirişin sınır şartlarını tam olarak sağlamamaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için Matched Asymptotic Expansions metodu kullanılmıştır. Önce perturbasyon tekniklerinden olan Çok Zaman Ölçekli metod kullanılarak dış açılım çözümü elde edilmiştir. Daha sonra her iki uçta ikinci bir açılım

yaparak her iki uç için iç açılım çözümleri elde edilmiştir. Dış açılım ve iç açılım çözümleri birleştirilerek bütün sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan kompozit açılım çözümleri elde edilmiştir. Bu problem harmonik hız ve sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşan hız fonksiyonları için çözülmüştür. Sınır şartı olarak basit-basit ve ankastre-ankastre mesnetli durumlar ele alınmıştır. Elde edilen çözümler kullanılarak değişik durumlar için grafikler çizilmiştir. Deplasmanla ilgili sınır şartları, hem dış açılım hem de kompozit açılım çözümleri tarafından yaklaşık olarak sağlanmaktadır. Basit-basit mesnetli durumda dış açılım çözümü moment ile ilgili sınır şartlarında büyük hata vermekte, fakat kompozit çözüm momentle ilgili sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlamaktadır. Benzer şekilde ankastre-ankastre mesnet durumunda dış açılım çözümü eğimle ilgili sınır şartlarında büyük hata verirken, kompozit açılım çözümü bu sınır şartlarını da yaklaşık olarak sağlamaktadır.

Bölüm 5'de aksenal hareketli kiriş problemi ele alınmıştır. Çözümler için Bölüm 3' te olduğu gibi Lie Grup Teorisi kullanılmıştır. Aksenal hız zamanın bir fonksiyonu olduğu için Lie Grup teorisiyle birlikte Eşdeğerlik Dönüşümleri (Equivalence Transformations)' de uygulanmıştır. Kiriş hızı keyfi hız, sabit hız, sabit ivmeli hız, harmonik değişen hız ve eksponansiyel değişen hız olarak farklı formlarda ele alınmıştır. Lie Grup teorisi Eşdeğerlik Dönüşümleri ile birlikte kullanılarak hareket denklemlerine ait infinitesimal jeneratörler elde edilmiştir. Elde edilen bu jeneratörlerin farklı varyasyonları kullanılarak değişik hız fonksiyonları için sistematik bir şekilde tam çözümler üretilmiştir. Kirişin uçlardan basit mesnetlendiği, hızın harmonik ve eksponansiyel olarak değiştiği durumlar için sınır şartlarını yaklaşık olarak sağlayan çözümler elde edilmiştir. Elde edilen çözümler kullanılarak değişik durumlar için grafikler çizilmiştir. Bu grafiklerden çözümlerin sınır şartlarını yaklaşık olarak sağladığını gördük. Bölüm 3' de elde edilen sonuçlara benzer olarak sinüzodal hız değişimi durumunda hız değişim genliğinin (Ω) artması ile sınır şartlarının daha az bir hata ile sağlandığını ve hız değişiminin sabit bir hıza eksponansiyel yaklaşması durumunda ise zamanın artması ve α katsayısının artması ile uçlardaki deplasmanların hızlı bir şekilde azaldığını gördük.

Böylece bu çalışmada zamana bağlı hız değişim fonksiyonuna sahip şerit, esnek kiriş ve kiriş denklemleri için değişik mesnet durumlarına göre sınır şartlarını yaklaşık sağlayan çözümler elde ettik. Bu çalışmanın devamı olarak şu çalışmalar yapılabilir.

1. Lineer analize ilave olarak nonlineer analiz yapılabilir.
2. Elde edilen diferansiyel denklemler nümerik olarak çözülebilir.
3. Bizim ele almadığımız değişik mesnet durumları ve hız fonksiyonları için çözümler elde edilebilir.
4. Denklemlere sönüm ilave edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Al-Jawi, A. A. N., Pierre, C. and Ulsoy, A. G., Vibration localization in dual-span, axially moving beams, part 1: formulation and result, *Journal of Sound and Vibration*, 176: 243-266, 1995a.
2. Al-Jawi, A. A. N., Pierre, C. and Ulsoy, A. G., Vibration localization in dual-span, axially moving beams, part 2: perturbation analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 176: 267- 287, 1995b.
3. Al-Jawi, A. A. N., Pierre, C. and Ulsoy, A. G., Vibration localization in band-wheel systems; theory and experiment, *Journal of Sound and Vibration* ,176: 289- 312,1995c.
4. Bluman, G. W. and Kumei, S., *Symmetries and Differential Equations*, New-York: Springer – Verlag,1989.
5. Chakraborty, G., Mallik, A. K. and Hatwal, H., Non-linear vibration of a travelling beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34: 655-670, 1999.
6. Fung, R. F., Wang, Y. C. and Wu, J. W., Group properties and group – invariant solution for infinitesimal transformations of the non-linearly traveling string, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34: 693-698, 1999.
7. Ibragimov, N. H., *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations Vol.2*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995.
8. Ibragimov, N. H., and Torrisi M., A simple method for group analysis and its application to a model of detonation. *Journal of Mathematical Physics*, 33: 3931-3939, 1992.
9. Ibragimov, N. H., Torrisi M. and Valenti A., Preliminary group classification of equation $v_{tt}=f(x,v_x)v_{xx}+g(x,v_x)$, *Journal of Mathematical Physics*, 32: 2988-2995, 1991.
10. Ibragimov, N. H., *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, Joun Wiley & Sons, England, 1999.
11. Lie, S., *Theorie der Transformations gruppen*, Vol I, Leipzig, 1888. (reprinted by Chelsea Pulishing Company, New York, 1970)
12. Lie S., *Theorie der Transformations gruppen*, Vol II, Leipzig, 1890. (reprinted by Chelsea Pulishing Company, New York, 1970)
13. Lie, S., *Theorie der Transformations gruppen*, Vol III, Leipzig, 1893. (reprinted by Chelsea Pulishing Company, New York, 1970)
14. Miranker, W.L., The wave equation in a medium in motion, *IBM Journal of Research and Development*, 4: 36-42, 1960.
15. Mockensturm, E. M., Perkins, N. C. and Ulsoy, A. G., Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving string, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 118: 346-350, 1994.

16. Mote, C.D. Jr., Stability of systems transporting accelerating axially moving materials, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, 97: 96-98, 1975.
17. Nayfeh, A. H., Introduction to Perturbation Techniques, New York; John Wiley, 1981.
18. Öz, H. R., Pakdemirli, M. and Özkaya, E., Transition behavior from string to beam for an axially accelerating material, Journal of Sound and Vibration , 215(3): 571-576, 1998.
19. Öz, H. R., Pakdemirli, M. and Özkaya, E., Linear and nonlinear vibrations of axially moving beams, ASME Mechanics and Materials Conference, Blacksburg, Virginia, June 27-30 1999.
20. E. Özkaya and M. Pakdemirli, Lie Group Theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem, Journal of Sound and Vibration, 1999. (to be published)
21. Pakdemirli, M. and Batan, H., Dynamic stability of a constantly accelerating string, Journal of Sound and Vibration, 168: 371-378, 1993.
22. Pakdemirli M. and Özkaya, E., Approximate boundary layer solution of a moving beam problem, Mathematical and Computational Applications, 3(2): 93-100, 1998.
23. Pakdemirli, M. and Ulsoy, A. G., Stability of an axially accelerating string, Journal of Sound and Vibration, 203(5): 815-832, 1997.
24. Pakdemirli, M., Ulsoy, A.G. and Ceranoğlu A., Transverse vibration of an axially accelerating string, Journal of Sound and Vibration, 169: 179-196, 1994.
25. Pakdemirli, M. and Yürüsoy, M., Similarity transformations for partial differential equations, SIAM Review: 40, 96-101. 1998.
26. Pellicano, F. and Zirilli, F., Boundary layers and nonlinear vibrations in axially moving beam, International Journal of Non - Linear Mechanics, 33: 691-711, 1998.
27. Stephani, H., Differential Equations, Their Solution Using Symmetries, Cambridge University Press, 1989.
28. Torrasi, M., Tracina, R. and Valenti, A., A group analysis approach for a non-linear differential system arising in diffusion phenomena, Journal of Mathematical Physics, 37: 4758-4767, 1996.
29. Ulsoy, A. G., Coupling between spans in the vibration of axially moving materials, ASME Journal of Vibration Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108: 207-212, 1986.
30. Ulsoy, A. G., Mote, C.D., Jr. and Syzmani, R., Principal developments in band saw vibration and stability research, Holz als Roh-und Werkstoff, 36: 273-280, 1978.
31. Wickert, J. A., Non-linear vibration of a traveling tensioned beam, International Journal of Non - Linear Mechanics, 27: 503-517, 1992.
32. Wickert, J. A.. and Mote, C. D. Jr., Current research on the vibration and stability of axially moving materials, Shock and Vibration Digest, 20(5): 3-13, 1988.

33. Wickert, J. A. and Mote, C. D. Jr., Classical vibration analysis of axially moving continua, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 57: 738-744, 1990.
34. Wickert, J. A. and Mote, C. D. Jr., Response and discretization methods for axially moving materials, *Applied Mechanics Reviews*, 44: 279-284, 1991.
35. Yürüsoy, M. and Pakdemirli, M., Group classification of a non – Newtonian fluid model using classical approach and equivalence transformations, *International Journal of Non – Linear Mechanics*: 34, 341-346, 1999.



ÖZGEÇMİŞ

- Adı Soyadı : Erdoğan ÖZKAYA
- Doğum Tarihi : 10.03.1971
- Doğum Yeri : Kırklareli
- Medeni Hali : Evli, 1 çocuk sahibi
- Haziran 1987 : Kırklareli Atatürk Lisesi'nden mezuniyet
- Ağustos 1992 : Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik – Mimarlık Fakültesi
Makina Mühendisliği bölümü lisans programı'ndan mezuniyet
- Aralık 1993- : Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina
Mühendiliği Bölümü'nde araştırma görevlisi.
- Temmuz 1995 : Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina
Mühendiliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Makina Mühendisi olarak
mezuniyet.
- Eylül 1996- : Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina
Mühendiliği Anabilim Dalı'nda doktora eğitimi.