

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER ASMA KÖPRÜ TİTREŞİMLERİ

DOKTORA TEZİ

İnşaat Yüksek Mühendisi Mehmet ÇEVİK

98144

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Mekanik

MANİSA 2000

**İ.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANİYASYON MERKEZİ**

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

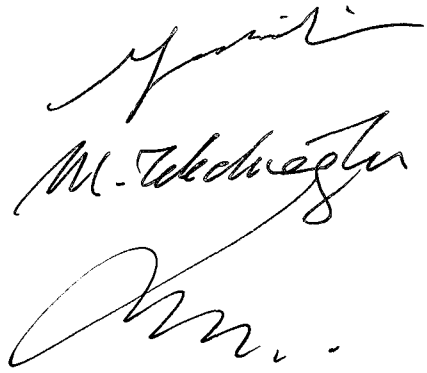
NONLİNEER ASMA KÖPRÜ TİTREŞİMLERİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20.12.1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 16.06.2000

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet Pakdemirli (C.B.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet Tekelioğlu (C.B.Ü.)

Prof. Dr. Sami Aksoy (D.E.Ü.)



Handwritten signatures of the thesis advisor and jury members. The first signature is for Doç. Dr. Mehmet Pakdemirli, the second for Prof. Dr. Mehmet Tekelioğlu, and the third for Prof. Dr. Sami Aksoy.

MANİSA 2000

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SEMBOL LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	x
KISALTMALAR LİSTESİ	xi
TEŞEKKÜR	xii
ÖZET	xiii
SUMMARY	xiv
1. GİRİŞ	1
2. HAREKET DENKLEMLERİ	5
2.1. Hareket Denklemlerinin Çıkarılması	7
2.2. Hareket Denklemlerinin Boyutsuzlaştırılması	11
3. ANALİTİK ÇÖZÜMLER	13
3.1. Perturbasyon Analizi	13
3.1.1. ε Mertebesi	16
3.1.2. ε^2 Mertebesi	19
3.1.3. ε^3 Mertebesi	26
3.2. Serbest Titreşimler	36
3.2.1. Enine Titreşimlerin Baskın Olduğu Durum	37
3.2.2. Burulma Titreşimlerinin Baskın Olduğu Durum	39
3.2.3. Enine Titreşim Tabii Modlarından Birinin Burulma Titreşimi Tabii Modlarından Birine Çok Yakın Olduğu Durum	42
3.3. Zorlamalı ve Sönümlü Titreşimler	44
3.3.1. İç Rezonansın Olmadığı Durum	44
3.3.2. İç Rezonansın Olduğu Durum	51
4. SAYISAL ÖRNEKLER	53
4.1. Tabii Frekansların Bulunması	54
4.2. Nonlineer Frekans - Genlik İlişkisi	58
4.3. Serbest Titreşimlerde Genliklerin ve Fazın Zamanla Değişimi	64
4.4. Zorlamalı ve Sönümlü Titreşimler	74
4.4.1. İç Rezonansın Olmadığı Durum	74
4.4.2. İç Rezonansın Olduğu Durum	81

5. ASMA KÖPRÜLERİN TABİİ FREKANSLARININ HESAPLANMASINDA YAPAY SİNİR AĞLARININ KULLANILMASI	101
5.1. YSA 'nın tanıtımı	101
5.2. Asma köprülerin tabii frekanslarının bulunması	107
5.3. Asma köprülerin tabii frekanslarının köprünün özelliklerine göre değişimi	110
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	115
7. KAYNAKLAR	118
8. EK 1	124
ÖZGEÇMİŞ	126



SEMBOL LİSTESİ

A_1, A_2	: Kompleks genlik fonksiyonları
A_k	: Kabloların kesit alanı
A, B, C, D	: Mod yapısı fonksiyonlarındaki katsayılar
a_1, a_2	: Polar formdaki genliklerin reel kısmını ifade eden fonksiyonlar
B_1, B_2, C_1, C_2	: Asimetrik mod yapısı fonksiyonlarındaki keyfi katsayılar
b	: Köprü genişliği
D_0, D_1, D_2	: Hızlı ve yavaş zaman ölçeklerine göre türevler
ds	: Diferansiyel bir kablo elemanının boyu
E_k	: Kabloların elastisite modülü
E_s	: Tabliye kirişinin elastisite modülü
\hat{F}	: Zorlama fonksiyonunun genliği
F	: Mertebelendirilmiş zorlama fonksiyonunun genliği
f	: Mertebelendirilmiş normalize edilmiş zorlama fonksiyonunun genliği
G_s	: Tabliye kirişinin kayma modülü
g	: Yerçekimi ivmesi
H_1, H_2	: Titreşimden kaynaklanan ilave kablo gerilmelerinin yatay bileşenleri
H_w	: Zati yüklerden dolayı meydana gelen kablo gerilmesinin yatay bileşeni
I_m	: Köprü kesitinin kütle polar atalet momenti
I_p	: Tabliye kirişi kesitinin kütle polar atalet momenti
I_s	: Tabliye kirişi kesitinin yatay eksene göre alan atalet momenti
i	: Açıklık numarası (1,3 : kenar açıklıklar; 2 : orta açıklık)
J_s	: Tabliye kirişi kesitinin polar atalet momenti
L	: Boyutsuzlaştırma için kullanılan karakteristik boy
L_E	: Kablonun uygulamadaki boyu
\mathcal{L}	: Lagrangian
ℓ	: Açıklık boyu
M, N	: Perturbasyonun birinci mertebe denklemlerinde integral toplamlarını ifade eden terimler
n, m	: Enine ve burulma mod sayıları
$O()$: Mertebe ifadesi

R_1, R_2	: Perturbasyonun üçüncü merteye açılımında seküler terimleri ifade eden fonksiyonlar
r	: Tabliye kirişi kesitinin atalet yarıçapı
S_k	: Elastisite modülü ve kesit alanı ile ilgili boyutsuz parametre
T	: Sistemin toplam kinetik enerjisi
T_k	: Kabloların kinetik enerjisi
T_s	: Tabliye kirişinin kinetik enerjisi
T_0, T_1, T_2	: Perturbasyonda hızlı ve yavaş zaman ölçekleri
t	: Zaman değişkeni
V	: Sistemin toplam potansiyel enerjisi
V_k	: Kabloların potansiyel enerjisi
V_s	: Tabliye kirişinin potansiyel enerjisi
v	: Tabliye kirişinin enine yerdeğiştirme fonksiyonu
v_1, v_2, v_3	: Perturbasyon açılımında birinci, ikinci ve üçüncü mertebelerdeki enine yerdeğiştirme fonksiyonları
v_{k1}, v_{k2}	: Birinci ve ikinci kabloların enine yerdeğiştirmeleri
W_1, W_2	: Perturbasyonun üçüncü mertebesindeki çözüm fonksiyonlarının seküler olmayan terimleri ifade eden kısımları
w_b	: Köprü birim boyunun zati ağırlığı
w_k	: Kabloların birim boyunun ağırlığı
w_s	: Tabliye kirişinin birim boyunun ağırlığı
x	: Yatay koordinat
$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$: Perturbasyonun ikinci mertebesindeki çözüm fonksiyonlarının konuma bağlı kısımları
y	: Ana kablo profili eğrisi
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$: Çözülebilirlik şartlarındaki katsayılar
β_1, β_2	: Polar formdaki genliklerin sanal kısmını ifade eden fonksiyonlar
Γ_s	: Tabliye kirişi kesitinin çarpılma sabiti
γ_1	: Enine frekans ile burulma frekansı arasındaki faz açısı
γ_2	: Zorlama frekansı ile enine frekans arasındaki faz açısı
δ	: Varyasyon
ε	: Perturbasyon parametresi

η	: Perturbasyonun ilk mertebesindeki enine yerdeğiştirme çözüm fonksiyonunun konuma bağlı kısmı
ξ	: Perturbasyonun ilk mertebesindeki burulma açısı çözüm fonksiyonunun konuma bağlı kısmı
θ	: Tabliye kirişinin burulma açısı fonksiyonu
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: Perturbasyon açılımında birinci, ikinci ve üçüncü mertebelerdeki burulma açısı fonksiyonları
$\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$: Enine ve burulma sönümleme katsayıları
μ_1, μ_2	: Mertebelendirilmiş enine ve burulma sönümleme katsayıları
ρ	: Enine ve burulma modları arasındaki yakınlığı ifade eden parametre
σ	: Zorlama frekansı ile enine titreşim frekansı arasındaki yakınlığı ifade eden parametre
Φ_1, Φ_2	: Perturbasyonun üçüncü mertebesindeki çözüm fonksiyonlarının seküler terimleri ifade eden kısımları
Ω	: Zorlama fonksiyonunun frekansı
ω_e	: Lineer enine tabii frekans
ω_b	: Lineer burulma tabii frekansı
$(\omega_e)_{nl}$: Nonlineer enine tabii frekans
$(\omega_b)_{nl}$: Nonlineer burulma tabii frekansı
$\partial / \partial t$: Zamana göre kısmi türev
$\partial / \partial x$: Konuma göre kısmi türev
E	: YSA 'da ağın global hatası
o_i	: YSA 'da i'inci nöronun çıkış değeri
t_j	: YSA 'da j nöronunun hedeflenen çıkış değeri
w_{ij}	: YSA 'da i'inci nöronu j 'inci girişe birleştiren bağlantının ağırlığı
δ_{pi}	: YSA 'da i nöronunun hata sinyali
Λ	: YSA 'da öğrenme hızı
v	: YSA 'da momentum terimi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1. Üç açıklıklı bir asma köprü modeli	6
Şekil 2.2. Köprü kesitinin etkileşimli enine-burulma titreşimi tanım diyagramı	8
Şekil 2.3. Köprü parçası üzerinde yerdeğiştirmelerin görünüşü	8
Şekil 3.1. Nonlineer enine tabii frekansın genliğe bağlı olarak değişimi	38
Şekil 3.2. Enine titreşimlerin baskın olduğu durumda genliklerin zamana göre değişimi	39
Şekil 3.3. Nonlineer burulma tabii frekansının genliğe bağlı olarak değişimi	40
Şekil 3.4a. Burulma titreşimlerin baskın olduğu durum için, burulma titreşim genliğinin zamana göre değişimi	41
Şekil 3.4b. Burulma titreşimlerin baskın olduğu durum için, üst mertebede ortaya çıkan enine titreşimin genliğinin zamana göre değişimi	42
Şekil 3.5. Birbirine yakın enine ve burulma modlarının serbest titreşim genliklerinin zamanla değişimi	43
Şekil 3.6. Nonlineerliğin frekans-tepki eğrisine etkisi	47
Şekil 3.7a. Sertleştirici nonlineerlik durumunda sıçrama hadisesi	49
Şekil 3.7b. Yumuşatıcı nonlineerlik durumunda sıçrama hadisesi	49
Şekil 3.8. Zorlama frekansı - tepki frekansı eğrisinde sıçrama hadisesi	50
Şekil 4.1. Vincent-Thomas köprüsünde enine titreşimlerin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları	60
Şekil 4.2. Vincent-Thomas köprüsünde burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları	61
Şekil 4.3. Golden Gate köprüsünde enine titreşimlerin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları	62
Şekil 4.4. Golden Gate köprüsünde burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları	63
Şekil 4.5. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.01$, $a_{20} = 0.01$, $\gamma_{10} = 0$)	65
Şekil 4.6. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.01$, $\gamma_{10} = 0$)	66
Şekil 4.7. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.01$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$)	67
Şekil 4.8. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$)	68

Şekil 4.9.	Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 1$)	69
Şekil 4.10.	Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 3$)	70
Şekil 4.11.	Golden Gate köprüsü serbest titreşim için fazın zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.01$, $a_{20} = 0.01$, $\gamma_{10} = 0$)	71
Şekil 4.12.	Golden Gate köprüsü serbest titreşim için fazın zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$)	72
Şekil 4.13.	Golden Gate köprüsü serbest titreşim için fazın zamanla değişimi (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 2$)	73
Şekil 4.14.	Vincent-Thomas köprüsünün ilk üç modunun frekans-tepkisi grafikleri ($f = 5 \cdot 10^{-11}$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$)	75
Şekil 4.15.	Vincent-Thomas köprüsünde zorlama genliğinin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi ($\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$; $f = 1.0 \cdot 10^{-11}$; $3.5 \cdot 10^{-11}$; $6.5 \cdot 10^{-11}$)	76
Şekil 4.16.	Vincent-Thomas köprüsünde sönümlenmenin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi ($f = 5 \cdot 10^{-11}$; $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$; $6 \cdot 10^{-6}$; $10 \cdot 10^{-6}$)	77
Şekil 4.17.	Golden Gate köprüsünün ilk üç modunun frekans-tepkisi grafikleri ($f = 5 \cdot 10^{-11}$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$)	78
Şekil 4.18.	Golden Gate köprüsünde zorlama genliğinin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi ($\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$; $f = 1.0 \cdot 10^{-11}$; $3.0 \cdot 10^{-11}$; $5.5 \cdot 10^{-11}$)	79
Şekil 4.19.	Golden Gate köprüsünde sönümlenmenin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi ($f = 5 \cdot 10^{-11}$; $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$; $6 \cdot 10^{-6}$; $10 \cdot 10^{-6}$)	80
Şekil 4.20a.	Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi ($a_{10}=0$, $a_{20}=0$, $\gamma_{10}=0$, $\gamma_{20}=0$, $\mu_1=4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2=4 \cdot 10^{-6}$, $f=19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma=1.6 \cdot 10^{-5}$)	83
Şekil 4.20b.	Zorlamalı ve sönümlü titreşim için fazların zamanla değişimi ($a_{10}=0$, $a_{20}=0$, $\gamma_{10}=0$, $\gamma_{20}=0$, $\mu_1=4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2=4 \cdot 10^{-6}$, $f=19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma=1.6 \cdot 10^{-5}$)	84
Şekil 4.20c.	Zorlamalı ve sönümlü titreşim için fazların zamanla değişimi ($a_{10}=0$, $a_{20}=0$, $\gamma_{10}=3$, $\gamma_{20}=8$, $\mu_1=4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2=4 \cdot 10^{-6}$, $f=19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma=1.6 \cdot 10^{-5}$)	85
Şekil 4.21.	Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi ($a_{10}=0.02$, $a_{20}=0$, $\gamma_{10}=0$, $\gamma_{20}=0$, $\mu_1=4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2=4 \cdot 10^{-6}$, $f=19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma=1.6 \cdot 10^{-5}$)	87
Şekil 4.22.	Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi ($a_{10}=0.02$, $a_{20}=0.02$, $\gamma_{10}=0$, $\gamma_{20}=0$, $\mu_1=4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2=4 \cdot 10^{-6}$, $f=19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma=1.6 \cdot 10^{-5}$)	88
Şekil 4.23.	Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi ($a_{10}=0.04$, $a_{20}=0.02$, $\gamma_{10}=0$, $\gamma_{20}=0$, $\mu_1=4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2=4 \cdot 10^{-6}$, $f=19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma=1.6 \cdot 10^{-5}$)	89

Şekil 4.24a. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0.02, a_{20}=0.02, \gamma_{10}=3, \gamma_{20}=8, \mu_1=4*10^{-6}, \mu_2=4*10^{-6}, f=19*10^{-11}, \sigma=1.6*10^{-5})$ 90
Şekil 4.24b. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için fazların zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0.02, a_{20}=0.02, \gamma_{10}=3, \gamma_{20}=8, \mu_1=4*10^{-6}, \mu_2=4*10^{-6}, f=19*10^{-11}, \sigma=1.6*10^{-5})$ 91
Şekil 4.25. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0, a_{20}=0, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=0, \mu_1=4*10^{-6}, \mu_2=4*10^{-6}, f=38*10^{-11}, \sigma=1.6*10^{-5})$ 93
Şekil 4.26. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0, a_{20}=0, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=0, \mu_1=4*10^{-6}, \mu_2=4*10^{-6}, f=7*10^{-11}, \sigma=1.6*10^{-5})$ 94
Şekil 4.27. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0.02, a_{20}=0.02, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=0, \mu_1=6*10^{-7}, \mu_2=6*10^{-7}, f=0, \sigma=1.6*10^{-5})$ 95
Şekil 4.28. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0, a_{20}=0, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=0, \mu_1=2*10^{-6}, \mu_2=2*10^{-6}, f=19*10^{-11}, \sigma=1.6*10^{-5})$ 97
Şekil 4.29. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0, a_{20}=0, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=0, \mu_1=8*10^{-6}, \mu_2=3*10^{-6}, f=19*10^{-11}, \sigma=1.6*10^{-5})$ 98
Şekil 4.30. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0, a_{20}=0, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=0, \mu_1=8*10^{-6}, \mu_2=8*10^{-6}, f=19*10^{-11}, \sigma=1.6*10^{-5})$ 99
Şekil 4.31. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi	
	$(a_{10}=0.02, a_{20}=0.02, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=0, \mu_1=0, \mu_2=0, f=19*10^{-11}, \sigma=4*10^{-5})$ 100
Şekil 5.1. Sigmoid fonksiyonunun grafiği	103
Şekil 5.2. Kullanılan YSA mimarisi	108
Şekil 5.3. Ortalama karesel hatanın iterasyon sayısına göre azalma grafiği	109
Şekil 5.4. Tabii frekansın ℓ boyutsuz parametresine göre değişimi	
	$(H_w = 20*10^{-9}, w_b = 0.32, I_s = 20*10^{-10}, S_k = 8*10^{-7})$ 111
Şekil 5.5. Tabii frekansın H_w boyutsuz parametresine göre değişimi	
	$(\ell = 4.5, w_b = 0.32, I_s = 16*10^{-10}, S_k = 10*10^{-7})$ 111
Şekil 5.6. Tabii frekansın w_b boyutsuz parametresine göre değişimi	
	$(\ell = 4.0, H_w = 20*10^{-9}, I_s = 10*10^{-10}, S_k = 7*10^{-7})$ 112
Şekil 5.7. Tabii frekansın I_s boyutsuz parametresine göre değişimi	
	$(\ell = 3.5, H_w = 17.5*10^{-9}, w_b = 0.40, S_k = 10*10^{-7})$ 113
Şekil 5.8. Tabii frekansın S_k boyutsuz parametresine göre değişimi	
	$(\ell = 3.5, H_w = 20*10^{-9}, w_b = 0.40, I_s = 16*10^{-10})$ 113

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa No
Çizelge 4.1. Vincent-Thomas köprüsünün boyutsuz parametreleri	53
Çizelge 4.2. Golden Gate köprüsünün boyutsuz parametreleri	54
Çizelge 4.3. Vincent-Thomas köprüsünün asimetric enine ve burulma modlarının tabii frekansları	56
Çizelge 4.4. Vincent-Thomas köprüsünün simetrik enine ve burulma modlarının tabii frekansları	56
Çizelge 4.5. Golden Gate köprüsünün asimetric enine ve burulma modlarının tabii frekansları	57
Çizelge 4.6. Golden Gate köprüsünün simetrik enine ve burulma modlarının tabii frekansları	57
Çizelge 4.7. Vincent-Thomas ve Golden Gate köprüleri için α_1 ve α_4 parametrelerinin değerleri	59
Çizelge 4.8. Golden Gate köprüsü, (ASE-2) ve (ASB-1) için çözülebilirlik şartlarındaki katsayılar	64
Çizelge 4.9. Şekiller 4.20 - 4.31 'e ait değerler	82
Çizelge 5.1. Örnek giriş ve çıkış setleri	107
Çizelge 5.2. YSA eğitimi için hazırlanan giriş setlerinde kullanılan değerler	108
Çizelge 5.3. Eğitme değerleri için YSA algoritmasının hata oranları	109
Çizelge 5.4. Bazı test değerleri için Newton-Raphson metodunun sonuçları ile YSA sonuçlarının karşılaştırılması	110
Çizelge 5.5. Test değerleri için YSA algoritmasının hata oranları	110

KISALTMALAR LİSTESİ

ASB	: Asimetrik burulma titreşim modları
ASE	: Asimetrik enine titreşim modları
ÇZÖM	: Çok Zaman Ölçekli Metod
ke	: Kompleks eşlenik
SOT	: Seküler olmayan terimler
YSA	: Yapay Sinir Ağları



TEŞEKKÜR

Tavsiyeleri ile beni doktora çalışması yapmaya yönlendiren, bütün çalıőmalarım boyunca beni teővik eden, hiçbir konuda yardımını esirgemeyen, desteğini bir an olsun azaltmayan ve hepsinden önemlisi, çalıőkanlıęı, dürüstlüğü, cesurluğu, iőine bağlılığı ve uluslararası başarıları ile bizlere gerçek bir bilim adamını tanıma ve örnek alma fırsatını veren kıymetli Hocam Doç. Dr. Mehmet Pakdemirli 'ye en içten teőekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annemi ve rahmetli babamı hürmetle anıyorum. Ayrıca, bu çalıőmayı tamamlayabilmem için büyük fedakarlıklar gösteren değerli eőime de teőekkürü bir borç bilirim. Son olarak, çalıőmalarım esnasında bana ellerinden gelen bütün yardımı gösteren tüm arkadaőlarıma őükranlarımı sunuyorum.

ÖZET

Asma köprülerin etkileşimli nonlineer enine ve burulma titreşimleri incelenmiştir. Nonlineer hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmış ve boyutsuzlaştırılmışlardır. Yaklaşık analitik çözümler bulmak için bir perturbasyon tekniği olan Çok Zaman Ölçekli Metod kullanılmıştır. Denklemler genellikle yapıldığı gibi diskritize edilmemiş, perturbasyon metodu direkt olarak kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

Problemin lineer kısmını teşkil eden ilk mertebede, tabii frekansları veren geçiş denklemlerinin simetrik ve asimetrik modlar için ayrı formlarda oldukları görülmüştür. Her iki durum için çözümler elde edilmiş ve tabii frekanslar hesaplanmıştır. İkinci mertebede simetrik modların çözüm fonksiyonları çok karmaşık olduğu için sadece asimetrik modların çözümü ile yetinilmiştir. Asimetrik modlarda çözüm fonksiyonu kenar ve orta açıklıklar için ayrı ayrı bulunmuştur. Üçüncü mertebede çözülebilirlik şartları çıkarılarak faz ve genlik modülasyonlarını tanımlayan denklemler elde edilmiştir. Bundan sonra serbest titreşimler ile zorlamalı ve sönümlü titreşimler ayrı ayrı incelenmiştir. Serbest titreşimlerde üç ayrı durum göz önünde bulundurulmuştur: (1) enine titreşimlerin baskın olduğu durum, (2) burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum, (3) enine titreşim tabii modlarından birinin burulma titreşimi tabii modlarından birine çok yakın olduğu durum. İlk iki durumda, yer değiştirme ve burulma açısı fonksiyonları elde edildikten sonra nonlineer frekans ile genlik arasındaki bağıntı çıkarılarak enine ve burulma titreşimleri için yumuşama ve sertleşme davranışlarının kriterleri tespit edilmiştir. Üçüncü durumda genliklerin zamanla değişimi gösterilmiş ve düzgün rejim çözümleri analiz edilmiştir. Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde ise iç rezonansın olmadığı ve olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. İç rezonansın olmadığı durumda düzgün rejim durumu incelenerek frekans-tepki denklemi çıkarılmış, düzgün rejim çözümü bulunmuş ve nonlineerlik nedeniyle frekans-tepki eğrilerinde ortaya çıkan sıçrama hadisesi izah açıklanmıştır. İç rezonansın olduğu durumda da frekans-tepki denklemi çıkarılmıştır.

Elde edilen analiz sonuçları iki asma köprüye uygulanmıştır. Bu köprülerin tabii frekansları hesaplanmıştır. Enine ve burulma titreşimlerinin baskın olduğu durumlar için frekans-genlik spektrumları ayrı ayrı çıkarılmıştır. Birbirine yakın enine ve burulma modlarının etkileşimli hareketleri incelenmiştir. Serbest titreşimlerde değişik başlangıç genlik ve faz değerleri için genliklerin ve fazın zamanla değişimi grafiklerle gösterilmiştir. Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde, iç rezonansın olmadığı durumda farklı modlar, sönüm katsayıları ve zorlama genlikleri için frekans-tepki denkleminin nümerik integrasyonu yapılarak bunlara ait frekans-tepki eğrileri çizilmiştir. İç rezonansın olduğu durumda ise değişik başlangıç genlik ve faz değerleri, zorlama genlikleri ve sönüm katsayıları için genliklerin ve fazların zamanla değişimini gösteren grafikler çizilmiştir. Grafikler değerlendirilerek birtakım sonuçlar çıkarılmıştır.

Son olarak, asma köprülerin tabii frekanslarının hızlı ve küçük hata miktarları ile hesaplanmasında alternatif bir metod olarak Yapay Sinir Ağlarının (YSA) kullanımı üzerinde durulmuştur. YSA 'nın genel tanıtımı yapılarak bu çalışmada kullanılan ağın özelliklerinden bahsedilmiştir. Algoritmanın eğitimi için kullanılan giriş ve çıkış setlerinin hazırlanışı, algoritmanın eğitilmesi ve sonuçların karşılaştırılması izah edilmiştir. Geliştirilen yöntemle farklı özelliklere sahip asma köprülerin tabii frekanslarının, sadece köprünün fiziksel özellikleri verilerek hesaplanması mümkün olmaktadır.

SUMMARY

Nonlinear coupled vertical and torsional vibrations of suspension bridges are investigated. The nonlinear equations of motion are derived using Hamilton's principle and are nondimensionalized. Method of Multiple Scales, a perturbation technique, is applied to the equations to find approximate analytical solutions. The equations are not discretized as usually done, rather the perturbation method is applied directly to the partial differential equations.

At the first order of approximation, which constitutes the linear part of the problem, it is observed that the transcendental equations yielding natural frequencies are in different forms for symmetric and asymmetric modes. Solutions are obtained for both cases and the natural frequencies are calculated. At the second order, the solutions of only asymmetric modes are found since the solution functions for the symmetric modes are extremely complicated. In the asymmetric modes the solution functions are derived separately for the side and center spans. At the third order of approximation, the solvability conditions and the equations describing phase and amplitude modulations are derived. After that, free vibrations, and forced and damped vibrations are investigated separately. Three different cases are considered in free vibrations: (1) the case in which the vertical vibration is dominating, (2) the case in which the torsional vibration is dominating, (3) the case in which the natural frequency of one of the vertical vibration modes is close to the natural frequency of one of the torsional vibration modes. For the first two cases, vertical displacement and torsional angle functions are derived, the dependence of nonlinear frequency on amplitude is described, and the criteria for the hardening and softening model behavior for vertical and torsional vibrations are established. In the third case, the change of amplitudes as a function of time is shown and steady state solutions are analyzed. In the forced-damped vibrations, no internal resonance and one-to-one internal resonance cases are considered. For the case of no internal resonance, steady state solution is analyzed, frequency-response equation is derived and the jump phenomenon in the frequency-response curves resulting from nonlinearity is explained. For the case of internal resonance, frequency-response equation is derived.

Results of the analyses are applied to two suspension bridges. The natural frequencies of these bridges are calculated. The frequency-amplitude spectra for vertical-dominant and torsional-dominant vibrations are obtained. Coupled vibrational motions of closely spaced vertical and torsional modes are investigated. In free vibrations the change of amplitudes and phase as a function of time is shown graphically for various initial amplitude and phase values. In forced and damped vibrations for the case of no internal resonance, numerical integration of frequency-response equation is performed for various modes, damping coefficients, and amplitudes of excitation; related frequency-response curves are drawn. For the case of internal resonance, graphs of amplitude and phase modulations are drawn for various initial amplitude and phase values, amplitudes of excitation, and damping coefficients. The results obtained from the graphs are discussed.

Finally, the use of Artificial Neural Networks (ANN) as an alternative method to compute the natural frequencies of suspension bridges quickly and with small errors is studied. A general presentation of ANN is given and the characteristics of the network used in this study are described. The preparation of the input and output sets used, the training of the algorithm, and the comparison of results are explained. By the method developed, given the physical parameters, the natural frequencies of suspension bridges having various properties can be computed easily.

1. GİRİŞ

Asma köprülerin çeşitli dinamik yükler altındaki titreşimleri birçok çalışmaya konu olmuştur. Daha önceleri, esnek yapıları nedeniyle titreşim hareketlerinin bu tip köprüler için ciddi bir tehlike oluşturmayacağı kanaati yaygındı. Ancak Amerika Birleşik Devletleri 'nde bulunan Tacoma Narrows köprüsünün 1940 yılında, faaliyete açılışından 6 ay kadar kısa bir süre sonra, çıkan kuvvetli bir fırtına nedeniyle çökmesi bu kanaati ortadan kaldırdığı gibi dikkatleri de bu konu üzerine yoğunlaştırdı. Bu hadiseden sonra oluşturulan bilimsel bir heyet asma köprülerdeki titreşimlerin matematiksel teorisi konusunda çok kapsamlı ve temel bir eseri (Bleich et al., 1950) hazırladı.

Daha sonraları Pugsley (1968), Jennings (1970) ve Van der Woude (1976) asma köprü titreşimlerinin analizi konusunda çalışmışlardır. Irvine (1974a, 1974b) kutu-kesitli modern asma köprülerin burulma titreşimlerini incelemiştir. Asma köprülerin yanal, burulma ve enine serbest titreşimleri sistematik bir şekilde Abdel-Ghaffar (1976, 1978a, 1979, 1980) tarafından ele alınmıştır; yazar daha sonra bu çalışmalarını birleştirerek asma köprü titreşimlerinin sürekli ortam formülasyonunu (Abdel-Ghaffar, 1982) elde etmiştir. McLamore et al. (1971), Abdel-Ghaffar (1978b), Abdel-Ghaffar ve Housner (1978), Abdel-Ghaffar ve Scanlan (1985), ve Buckland (1979) tarafından çeşitli asma köprüler üzerinde titreşim deneyleri yapılarak deney ve hesap sonuçları karşılaştırılmıştır. Ayrıca, Brownjohn et al. (1987), Brownjohn et al. (1989) ve Brownjohn et al. (1992) tarafından sırasıyla Humber, Boğaziçi ve Fatih Sultan Mehmet köprülerinde titreşim ölçümleri yapılmıştır. Van der Woude (1982) asma köprülerin tabii salınımlarını, West et al. (1984) tabii frekanslarını ve modlarını, Jennings (1983) yerçekimi direngenliğini, Castellani ve Felloti (1986) yanal titreşimlerini, Beliveau et al. (1977), ve Tanaka ve Davenport (1983) ise rüzgar yükleri altındaki davranışlarını araştırmışlardır. Hayashikawa ve Watanabe (1982), Inbanathan ve Wieland (1987), Bryja ve Sniady (1988 ve 1991), ve Chatterjee et al. (1994) köprülerin trafik ve taşıt yükleri altındaki hareketlerini incelemişlerdir. Asma köprülerin titreşimleri konusunda ayrıca Tezcan (1975), Irvine (1980 ve 1981), Hayashikawa ve Watanabe (1984), Kumarasena et al. (1989a ve 1989b), Jones ve Spartz (1990), Littler (1992), Memory et al. (1995), Jain et al. (1996), Brownjohn (1994b ve 1997) ve Hayashikawa (1997) 'ya ait çeşitli çalışmalar mevcuttur. Abdel-Ghaffar ve Rubin (1982 ve 1983d) asma köprülerin sismik davranışlarını, Harichandran et al. (1996), Abdel-Ghaffar ve Rubin (1983c) ve Abdel-Ghaffar ve Stringfellow (1984) deprem dalgalarına maruz kalan asma köprülerin tepkilerini incelemişlerdir. Asma köprülerin sismik analizi ile ilgili olarak Dumanoglu et al. (1987, 1989, 1990 ve 1992) tarafından yapılmış çalışmalar da mevcuttur. Ahmed ve Harbi (1998) ise asma köprülerin dinamik modellerinin matematiksel analizini yapmışlardır.

Bu çalışmalar, gerek hareket denklemlerinin karmaşıklığı, gerekse tam çözümleri elde etmenin zorluğundan dolayı, genellikle lineer analizi esas almışlardır. Ayrıca yine bu çalışmaların çoğunda belli varsayımlar ve kabullenmeler yapılmıştır ki bunlar da çözümün hassasiyetini büyük ölçüde etkilemektedir. Bu tür lineer analizler titreşim probleminin çözümünü belli ölçüde sağlasa da, kuvvetli rüzgar, deprem ve yoğun trafik gibi genlikleri fazlasıyla arttıran yüklemelerin etkideği hallerde lineer analiz yetersiz kalmaktadır. Bu durumda yapıda nonlineer davranış belirgin hale gelmekte ve nonlineer analiz gerekli olmaktadır. Asma köprülerin nonlineer titreşimleri ise Abdel-Ghaffar ve Rubin (1983a ve 1983b), Lazer ve McKenna (1990), Brownjohn (1994a) ve Rossikhin ve Shitikova (1995) tarafından incelenmiştir.

Asma köprülerin nonlineer hareket denklemleri kuadratik ve kübik terimlerin bulunduğu kısmi diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin verilen sınır şartları altında tam çözümleri üretilmediği için, ya nümerik metodlara ya da yaklaşık analitik çözüm metodlarına başvurulmaktadır. Analitik çözüm metodları kullanılarak yapılan ve bizim çalışmamıza en yakın araştırma, asma köprüler konusunda birçok çalışması bulunan Abdel-Ghaffar ve Rubin (1983a ve 1983b) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarında, asma köprülerin etkileşimli nonlineer enine ve burulma serbest hareket denklemlerini ele alarak önce denklemleri boyutsuzlaştırmışlardır. Daha sonra kısmi diferansiyel denklemleri diskritize ederek adi diferansiyel denklem formuna indirgemişler ve bir perturbasyon tekniği olan Çok Zaman Ölçekli Metodu bu adi diferansiyel denklemlere uygulamışlardır.

Yaptığımız bu çalışmada, hareket denklemlerinin çözülmesinde diskritizasyon-perturbasyon metodu yerine direkt-perturbasyon metodu kullanılmıştır. Yaygın olarak kullanılan diskritizasyon-perturbasyon metodunda kısmi diferansiyel denklemler önce diskritize edilerek adi diferansiyel denklem formuna indirgenmekte, daha sonra yaklaşık metodlar bu adi diferansiyel denklemlere uygulanmaktadır. Bizim kullandığımız direkt-perturbasyon metodunda ise yaklaşık çözüm yöntemleri kısmi diferansiyel denklemlere, diskritizasyon yapmadan, direkt olarak uygulanmaktadır. Bu metodda denklemleri yeni bir formda yazıp ortogonal baz sistemi tanımlamaya gerek yoktur.

İlk kez Nayfeh et al. (1992) nonlineer bir problemi ele alarak, direkt-perturbasyon metodunun diskritizasyon-perturbasyon metoduna göre daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Pakdemirli (1994) ve Pakdemirli ve Boyacı (1995 ve 1996) keyfi kuadratik ve kübik nonlineerliğe sahip genel bir modeli kullanarak direkt-perturbasyon metodunun daha hassas ve gerçeğe yakın sonuçlar verdiğini ortaya koymuşlardır. İki metod arasındaki farklılıkların nonlineer sistemlere mahsus olmadığı, lineer sistemlerde de görülebileceği Pakdemirli ve

Boyacı (1997) tarafından ispatlanmıştır. Her iki metod, sürekli sistemler için Nayfeh ve Nayfeh (1994 ve 1995) ve Boyacı ve Pakdemirli (1997) tarafından nonlinear normal mod kavramı kullanılarak genel olarak karşılaştırılmış ve direkt-perturbasyon metodunun üstünlükleri gösterilmiştir. Pakdemirli et al. (1995) nonlinear kablo titreşimlerinin bire-bir otoparametrik rezonanslarının analizinde her iki metodun sonuçlarını karşılaştırmış ve her iki metod için dallanma ve kararlılık analizinin farklılaştığını ve sistemin gerçek davranışının direkt-perturbasyon metodu ile daha iyi temsil edildiğini göstermişlerdir. Ayrıca Pakdemirli ve Ulsoy (1997) aksenal hızlanan şeritin stabilite analizinde bu metodu kullanarak diğerine göre daha avantajlı olduğunu ortaya koymuşlardır. Boyacı (1998) sürekli ortam titreşimleri için kısmi diferansiyel denklemle ifade edilen genel bir model ele alarak perturbasyon metodunu denklemlere direkt olarak uygulamış ve genel bir algoritma geliştirerek bunun çok farklı problemlerin çözümünde kullanılabileceğini göstermiştir. Ayrıca, Pai ve Nayfeh (1990), Raouf ve Nayfeh (1990) ve Nayfeh ve Bouguerra (1990) yaptıkları çalışmalarda direkt-perturbasyon metodunu kullanmışlardır. Bu konu ile ilgili çalışmaların kısmî bir taraması da Nayfeh et al. (1995) tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmada asma köprülerin etkileşimli nonlinear enine ve burulma hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Denklemler boyutsuzlaştırıldıktan sonra zorlama ve sönüm terimleri ilave edilmiştir.

Daha sonra bir perturbasyon tekniği olan Çok Zaman Ölçekli Metod denklemlere direkt olarak uygulanmıştır. Problemin lineer kısmını teşkil eden ε mertebesinde, tabii frekansları veren geçiş denklemlerinin simetrik ve asimetric modlar için ayrı formlarda oldukları görülmüştür. Her iki durum için çözümler elde edilmiş ve tabii frekanslar hesaplanmıştır. ε^2 mertebesinde simetrik modların çözüm fonksiyonları çok karmaşık olduğu için sadece asimetric modların çözümü ile yetinilmiştir. Asimetric modlarda çözüm fonksiyonu kenar ve orta açıklıklar için ayrı ayrı bulunmuştur. ε^3 mertebesinde çözülebilirlik şartları çıkarılarak faz ve genlik modülasyonlarını tanımlayan denklemler elde edilmiştir. Bundan sonra serbest titreşimler ile zorlamalı ve sönümlü titreşimler ayrı ayrı incelenmiştir.

Serbest titreşimlerde üç ayrı durum göz önünde bulundurulmuştur: (1) enine titreşimlerin baskın olduğu durum, (2) burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum, (3) enine titreşim tabii modlarından birinin burulma titreşimi tabii modlarından birine çok yakın ve etkileşimin kuvvetli olduğu durum. İlk iki durumda, yer değiştirme ve burulma açısı fonksiyonları elde edildikten sonra nonlinear frekans ile genlik arasındaki bağıntı çıkarılarak enine ve burulma titreşimleri için yumuşama ve sertleşme davranışlarının kriterleri tespit

edilmiştir. Ayrıca genliklerin zamana göre değişimi grafiklerle gösterilmiştir. Üçüncü durumda ise birbirine yakın enine ve burulma modlarının serbest titreşim genliklerinin zamanla değişimi gösterilmiş ve düzgün rejim çözümleri analiz edilmiştir.

Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde iç rezonansın olmadığı ve olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. İç rezonansın olmadığı durumda düzgün rejim hareketleri incelenerek düzgün rejim çözümleri elde edilmiştir. Bu duruma ait frekans-tepki denklemi çıkarılmıştır. Bu denklem kullanılarak frekans-tepki eğrisi çizilmiştir. Lineer ve nonlineer tepki eğrilerinin karşılaştırması yapılarak nonlineerliğin bu eğri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Nonlineerlik nedeniyle tepki eğrilerinde meydana gelen sıçrama hadisesi açıklanmıştır. İç rezonansın olduğu durumda da düzgün rejim hareketleri incelenerek bu duruma ait frekans-tepki denklemi çıkarılmıştır.

Bundan sonra sayısal örneklere geçilerek elde edilen analiz sonuçları iki asma köprüye uygulanmıştır. Önce köprülerin tabii frekansları hesaplanmıştır. Enine ve burulma titreşimlerinin baskın olduğu durumlar için frekans-genlik spektrumları çıkarılmıştır. Birbirine yakın enine ve burulma modlarının etkileşimli hareketleri incelenmiş ve serbest titreşimlerde değişik başlangıç genlik değerleri için genliklerin ve fazın zamanla değişimi grafiklerle gösterilmiştir. Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde, iç rezonansın olmadığı durumda farklı modlar, sönüm katsayıları ve zorlama genlikleri için frekans-tepki denkleminin nümerik integrasyonu yapılarak bunlara ait grafikler çizilmiştir. İç rezonansın olduğu durumda ise değişik başlangıç genlik ve faz değerleri, zorlama genlikleri ve sönümlenme katsayıları için genliklerin ve fazların zamanla değişimini gösteren grafikler çizilmiştir. Bu arada grafikler değerlendirilerek birtakım sonuçlar çıkarılmıştır.

Sonraki bölümde asma köprülerin tabii frekanslarının hızlı ve küçük hata miktarları ile hesaplanmasında alternatif bir metod olarak Yapay Sinir Ağlarının (YSA) kullanımı üzerinde durulmuştur. Simetrik modların tabii frekanslarını veren geçiş denklemleri çok karmaşık kapalı denklemlerdir. Bu denklemlerden frekans değerlerinin kök bulma yöntemleri ile elde edilmeleri çok uzun sürdüğü ve birtakım problemler ortaya çıktığı için bu metoda başvurulmuştur. Önce YSA algoritması yeterli sayıda değer ile eğitilmiş, eğitimin sonunda algoritma test edilerek istenilen sonuca ulaşıldığı görülmüştür. Ayrıca, YSA 'nın genel tanıtımı yapılarak bu çalışmada kullanılan ağın özelliklerinden bahsedilmiştir. Algoritmanın eğitimi 5 giriş ve 3 çıkış parametresi ile yapılmıştır. Eğitim için kullanılan giriş ve çıkış setlerinin nasıl hazırlandığı izah edilmiş, bunun için oluşturulan YSA mimarisi gösterilmiştir. Algoritmanın eğitilmesi tamamlandıktan sonra hata miktarı tespit edilmiş ve bazı test değerleri için Newton-Raphson metodunun sonuçları ile YSA sonuçları karşılaştırılmıştır. Son olarak, tabii frekansların köprü parametrelerine bağlı olarak değişimi YSA kullanılarak incelenmiştir.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

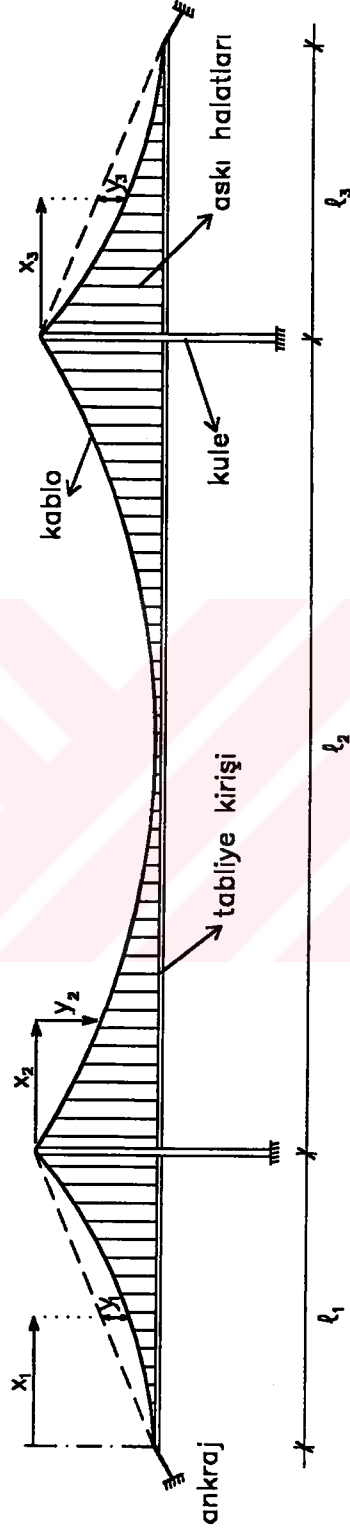
Bu bölümde, asma köprülerin nonlineer etkileşimli enine ve burulma hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Denklemlerin çıkarılmasında aşağıdaki kabuller yapılmıştır:

1. Köprünün zati ağırlığı, tabliye kirişinde herhangi bir gerilmeye neden olmaksızın sadece kablolar tarafından taşınmaktadır.
2. Kablolar düzgün bir kesite ve zati yükler altında parabolik bir profile sahiptirler. Kablo ağırlıklarının açıklık boyunca düzgün yayılı olduğu kabul edilmiştir.
3. Askı halatlarının boyunda, titreşim nedeniyle herhangi bir değişiklik olmamaktadır. Askı halatları arasındaki aralık, yüklerin düzgün yayılı olarak kabul edilmesini sağlayacak kadar küçüktür. Böylece kablonun düşey yer değiştirmesi ile kirişin düşey yer değiştirmesinin birbirine eşit olduğu kabul edilmiştir.
4. Tabliye kirişinin eğimi, kablonun eğimine göre çok küçük olduğu için ihmal edilmiş ve tabliye kirişinin düz olduğu kabul edilmiştir.
5. Titreşim hareketi esnasında kesit distorsiyonu, boyuna atalet, kayma deformasyonu ve dönme ataleti ihmal edilmiştir ve sadece titreşimden kaynaklanan kablo kuvvetlerinin meydana getirdiği büyük deformasyonlar dikkate alınmıştır.

Şekil 2.1 'de üç açıklıklı bir asma köprü modelinin boyuna görünüşü verilmiştir. Ana kablonun profili aşağıdaki şekildedir:

$$y_i(x_i) = \frac{w_{bi} \ell_i x_i}{2H_w} \left(1 - \frac{x_i}{\ell_i} \right) \quad (2.1)$$

Burada w_{bi} köprünün birim boyunun zati ağırlığını (kablo ağırlığı ile tabliye kirişi ağırlığının toplamı), ℓ_i açıklık boyunu, H_w zati yüklerden dolayı meydana gelen kablo gerilmesinin yatay bileşenini, i açıklık numarasını ifade etmektedir. Bundan sonra i indisi, karışıklığı önlemek amacıyla, sadece gerekli olduğu yerlerde kullanılacaktır. Tabliye kirişinin enine yer değiştirmesi $v(x,t)$ ile, burulma açısı $\theta(x,t)$ ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Üç açıklıklı bir asma köprü modeli

Kuvvetli rüzgar, deprem ve yoğun trafik gibi yükler titreşim genliklerinin artmasına neden olmakta, böylece hareket denklemlerinde nonlineer terimler ortaya çıkmaktadır. Bölüm 2.1 'de nonlineer hareket denklemleri Hamilton prensibi ile çıkarılmış, Bölüm 2.2 'de denklemler boyutsuzlaştırılmıştır.

2.1. Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Denklemlerin Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılması için hareket eden kısımların - kablolar ve tabliye kirişi- potansiyel ve kinetik enerjilerinin belirlenmesi gereklidir. Aşağıdaki denklemlerde $(\)' = \frac{\partial}{\partial x}$ konuma göre türev, $(\dot{\ }) = \frac{\partial}{\partial t}$ zamana göre türev anlamındadır.

Kabloların potansiyel enerjisi, yerçekimi enerjisi ve şekil değiştirme enerjisinden oluşmaktadır. Bunlar aşağıdaki denklemde sırasıyla gösterilmiştir:

$$V_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left\{ H_w \int_0^{\ell_i} \left[(v'_{k1})^2 + (v'_{k2})^2 \right] dx \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{L_E}{E_k A_k} \left[H_1^2(t) + H_2^2(t) \right] \right\} \quad (2.2)$$

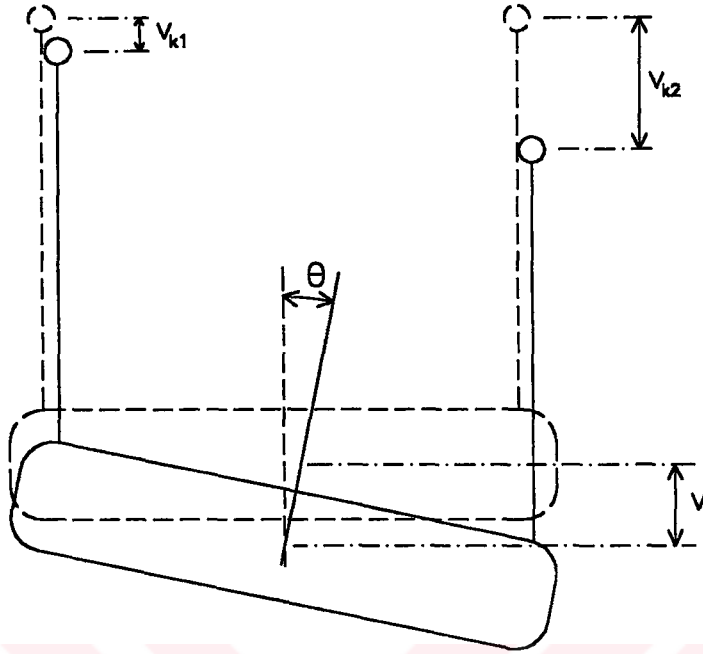
Burada v_{k1} ve v_{k2} sırasıyla birinci ve ikinci kabloların enine yerdeğiştirmelerini, L_E kablunun uygulamadaki boyunu, E_k kablunun elastisite modülünü, A_k kablunun kesit alanını, $H_1(t)$ ve $H_2(t)$ titreşimden kaynaklanan ilave kablo gerilmelerinin yatay bileşenlerini ifade etmektedir. Kabloların yer değiştirmeleri Şekil 2.2 'ye göre şöyle yazılabilir:

$$v_{k1} = v - \frac{b\theta}{2} \quad , \quad v_{k2} = v + \frac{b\theta}{2} \quad (2.3)$$

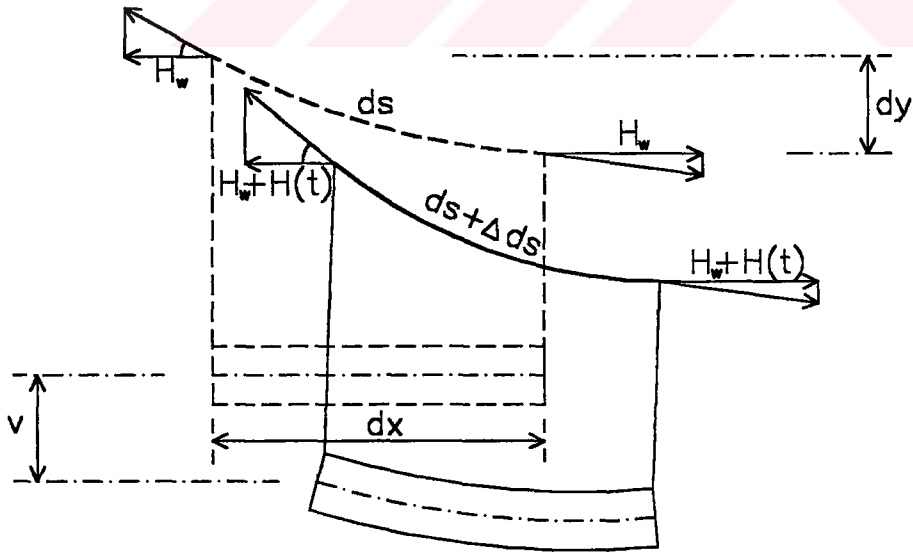
Burada b köprü genişliğini ifade etmektedir.

Denklem (2.2) 'de geçen *kablunun uygulamadaki boyu* (Abdel-Ghaffar, 1976) şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$L_E = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left(\frac{ds_i}{dx_i} \right)^3 dx_i \quad (2.4)$$



Şekil 2.2. Köprü kesitinin etkileşimli enine-burulma titreşimi tanım diyagramı



Şekil 2.3. Köprü parçası üzerinde yerdeğişmelerin görünüşü

i. açıklıktaki diferansiyel kablo elemanının boyu anlamındaki ds_i ; Şekil 2.3 'e göre şöyle tanımlanmıştır: $ds_i^2 = dx_i^2 + dy_i^2$. Ayrıca, $H_{1,2}(t)$ ile enine yerdeğiştirme arasındaki ilişki, kablonun uzama miktarı ile geometrik yerdeğiştirme arasındaki bağıntıdan elde edilen aşağıdaki *kablo uyumluluk denklemi* (Abdel-Ghaffar, 1976) vasıtasıyla kurulmaktadır:

$$H_{1,2}(t) = \frac{E_k A_k}{L_E} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{w_b}{2H_w} \int_0^{\ell_i} \left(v \mp \frac{b}{2} \theta \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} \left(v' \mp \frac{b}{2} \theta' \right)^2 dx \right\} \quad (2.5)$$

Tabliye kirişinin potansiyel enerjisi ise şöyle yazılabilir:

$$V_s(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left(E_s \Gamma_s \theta''^2 + E_s I_s v''^2 + G_s J_s \theta'^2 \right) dx \quad (2.6)$$

Bu denklemde, E_s ve G_s tabliye kirişinin sırasıyla elastisite modülünü ve kayma modülünü; Γ_s , I_s ve J_s tabliye kiriş kesitinin sırasıyla çarpılma sabitini, yatay eksene göre alan atalet momentini ve polar atalet momentini göstermektedir. Buna göre, $E_s \Gamma_s$ çarpılma rijitliği, $E_s I_s$ eğilme rijitliği ve $G_s J_s$ burulma rijitliği anlamındadır.

Kabloların kinetik enerjisi şu şekilde yazılabilir:

$$T_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \frac{w_k}{2g} \left(\dot{v}_{k1}^2 + \dot{v}_{k2}^2 \right) dx \quad (2.7)$$

Burada w_k kabloların birim ağırlığını ve g yerçekimi ivmesini ifade etmektedir.

Tabliye kirişinin kinetik enerjisi ise şu şekilde yazılabilir:

$$T_s(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \frac{w_s}{g} \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} I_p \dot{\theta}^2 dx \quad (2.8)$$

Burada I_p tabliye kiriş kesitinin birim uzunluk boyunca kütle polar atalet momentini ifade etmekte olup değeri $w_s r^2 / g$ 'ye eşittir. w_s tabliye kirişinin birim ağırlığı, r ise kesitin atalet yarıçapıdır.

Denklem (2.3) denklem (2.2) ve (2.7) 'de yerine yerleştirilir, $w_b = w_k + w_s$ yazılır ve köprü kesitinin (tabliye kirişi + kablolar) birim uzunluk boyunca kütle polar atalet momenti $I_m = I_p + \frac{w_k}{g} \frac{b^2}{4}$ olarak ifade edilirse, sistemin toplam potansiyel ve kinetik enerjileri sırasıyla şöyle olur:

$$V(t) = \sum_{i=1}^3 H_w \int_0^{\ell_i} \left(v'^2 + \frac{b^2}{4} \theta'^2 \right) dx + \frac{1}{2} \frac{L_E}{E_k A_k} (H_1^2 + H_2^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} (E_s \Gamma_s \theta''^2 + E_s I_s v''^2 + G_s J_s \theta'^2) dx \quad (2.9)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left(\frac{w_b}{g} \dot{v}^2 + I_m \dot{\theta}^2 \right) dx \quad (2.10)$$

Sistemin Lagrangian 'ı toplam kinetik enerji ile toplam potansiyel enerjinin farkıdır:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.11)$$

Hamilton Prensibi 'ne göre Lagrangian 'ın zamana göre integralinin varyasyonu sıfırdır:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (2.12)$$

Denklemler yerlerine konular ve varyasyonları alınır,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left(\frac{w_b}{g} \dot{v} \delta \dot{v} + I_m \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right) dx dt - H_w \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} 2 \left(v' \delta v' + \frac{b^2}{4} \theta' \delta \theta' \right) dx dt - \frac{L_E}{E_k A_k} \int_{t_1}^{t_2} (H_1 \delta H_1 + H_2 \delta H_2) dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} (E_s \Gamma_s \theta'' \delta \theta'' + E_s I_s v'' \delta v'' + G_s J_s \theta' \delta \theta') dx dt = 0 \quad (2.13)$$

elde edilir. Denklem (2.13) 'e kısmi integrasyon işlemi uygulanırsa, aşağıdaki forma getirilir:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left(\frac{w_b}{g} \ddot{v} - 2H_w v'' + E_s I_s v^{iv} \right) \delta v dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left(I_m \ddot{\theta} - \frac{b^2}{2} H_w \theta'' + E_s \Gamma_s \theta^{iv} - G_s J_s \theta'' \right) \delta \theta dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left[(H_1 + H_2) \frac{w_b}{2H_w} - (H_1 + H_2) v'' - (H_2 - H_1) \frac{b}{2} \theta'' \right] \delta v dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \left[(H_2 - H_1) \frac{b}{4} \frac{w_b}{H_w} - (H_2 - H_1) \frac{b}{2} v'' - (H_1 + H_2) \frac{b^2}{4} \theta'' \right] \delta \theta dx dt = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Denklemin sağlanabilmesi için δv ve $\delta \theta$ terimlerinin katsayılarının ayrı ayrı sıfıra eşit olmaları gerekir. Bu takdirde,

$$\frac{w_b}{g} \ddot{v} + E_s I_s v^{iv} - (2H_w + H_1 + H_2) v'' - (H_2 - H_1) \frac{b}{2} \theta'' + (H_1 + H_2) \frac{w_b}{2H_w} = 0 \tag{2.15a}$$

$$\begin{aligned}
& I_m \ddot{\theta} + E_s \Gamma_s \theta^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \theta'' - \frac{b^2}{4} (H_1 + H_2) \theta'' - \frac{b}{2} (H_2 - H_1) v'' \\
& + (H_2 - H_1) \frac{b}{4} \frac{w_b}{H_w} = 0
\end{aligned} \tag{2.15b}$$

elde edilir. Bunlar sistemin, nonlinear serbest etkileşimli enine ve burulma titreşim denklemleridir.

2.2. Hareket Denklemlerinin Boyutsuzlaştırılması

Denklemlerin ve dolayısıyla çözümlerin sistemin yapısından ve özelliklerinden bağımsız olması ve sonuçların genel olması için boyutsuzlaştırma yapılmıştır. Bunun için aşağıdaki boyutsuz ifadeler tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{x}{L}, \quad v^* = \frac{v}{L}, \quad \theta^* = \frac{b}{2L} \theta, \quad t^* = \sqrt{\frac{E_s g}{w_b}} t, \quad \ell_i^* = \frac{\ell_i}{L}, \quad w_b^* = \frac{w_b L}{H_w}, \\
I_s^* &= \frac{I_s}{L^4}, \quad I_m^* = \frac{I_m g}{w_b L^2}, \quad S_k^* = \frac{E_k A_k}{E_s L_E L}, \quad H_w^* = \frac{H_w}{E_s L^2}, \\
\Gamma_s^* &= \frac{\Gamma_s}{L^6 I_m^*}, \quad G_s^* J_s^* = \frac{G_s J_s}{E_s L^4 I_m^*}, \quad b^* = \frac{b}{L \sqrt{I_m^*}}, \quad \omega_e^* = \sqrt{\frac{w_b}{E_s g}} \omega_e, \quad \omega_b^* = \sqrt{\frac{w_b}{E_s g}} \omega_b
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Burada L boyutsuzlaştırma için kullanılan karakteristik boydur. ω_e ve ω_b sırasıyla lineer enine tabii frekans ve lineer burulma tabii frekansdır. Denklem (2.5) denklem (2.15) 'e yerleştirilir, daha sonra (2.16) 'da tanımlanan boyutsuz parametreler bu denklemlerde yerlerine konulur ve * işaretleri kaldırılırsa, boyutsuz hareket denklemleri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \ddot{v} + I_s v^{iv} - 2H_w v'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} v dx \right\} \\
& - \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} v dx \right) v'' + \left(\int_0^{\ell_i} \theta dx \right) \theta'' - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} (v'^2 + \theta'^2) dx \right] \right\} \\
& - \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} (v'^2 + \theta'^2) dx \right) v'' + 2 \left(\int_0^{\ell_i} v' \theta' dx \right) \theta'' \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \ddot{\theta} + \Gamma_s \theta^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \theta'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \theta dx \right\} \\
& - \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} v dx \right) \theta'' + \left(\int_0^{\ell_i} \theta dx \right) v'' - \int_0^{\ell_i} v' \theta' dx \right] \right\} \\
& - \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} (v'^2 + \theta'^2) dx \right) \theta'' + 2 \left(\int_0^{\ell_i} v' \theta' dx \right) v'' \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Asma köprülerin çoğunda her açıklıkta müstakil bir kiriş mevcuttur ve her kiriş mafsallı olarak mesnetlenmiştir. Buna göre problemin boyutsuz sınır şartları şu şekildedir:

$$v(0, t) = v''(0, t) = v(\ell_i, t) = v''(\ell_i, t) = 0 \tag{2.19}$$

$$\theta(0, t) = \theta''(0, t) = \theta(\ell_i, t) = \theta''(\ell_i, t) = 0 \tag{2.20}$$

Böylece sistemin boyutsuz hareket denklemleri ve sınır şartları çıkarılmış oldu. Bunlara ait yaklaşık analitik çözümler bundan sonraki bölümde yapılacaktır.

3. ANALİTİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde, (2.17) ve (2.18) denklemlerinin yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir. Çözümlere geçilmeden önce, enine titreşim denklemine sönüm ve zorlama, burulma titreşim denklemine ise sönüm terimi eklenmiştir. Bu taktirde denklemler aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\begin{aligned} & \left\{ \ddot{v} + I_s v^{iv} - 2H_w v'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} v dx \right\} + \hat{\mu}_1 \dot{v} \\ & - \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} v dx \right) v'' + \left(\int_0^{\ell_i} \theta dx \right) \theta'' - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} (v'^2 + \theta'^2) dx \right] \right\} \\ & - \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} (v'^2 + \theta'^2) dx \right) v'' + 2 \left(\int_0^{\ell_i} v' \theta' dx \right) \theta'' \right] \right\} = \hat{F} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \ddot{\theta} + \Gamma_s \theta^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \theta'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \theta dx \right\} + \hat{\mu}_2 \dot{\theta} \\ & - \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} v dx \right) \theta'' + \left(\int_0^{\ell_i} \theta dx \right) v'' - \int_0^{\ell_i} v' \theta' dx \right] \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} (v'^2 + \theta'^2) dx \right) \theta'' + 2 \left(\int_0^{\ell_i} v' \theta' dx \right) v'' \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1b)$$

Burada $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ enine ve burulma sönümlenme katsayılarını, \hat{F} zorlama fonksiyonunun genliğini, ve Ω zorlama fonksiyonunun frekansını göstermektedir.

3.1. Perturbasyon Analizi

(3.1a) ve (3.1b) denklemlerinin (2.19) ve (2.20) sınır şartları ile yaklaşık analitik çözümlerinin elde edilmesi için bir perturbasyon tekniği olan Çok Zaman Ölçekli Metod (ÇZÖM) (3.1) denklemlerine direkt olarak uygulanmıştır. Bu perturbasyon metodunun avantajı, denklemlerdeki seküler terimlerin hesaplamalarda otomatik olarak elimine edilmesini sağlamasıdır. Bu yaklaşımda konuma bağlı çözüm için herhangi bir önkabule gerek kalmamaktadır. Diskritizasyonda sonsuz seriyle ifade edilen konuma bağlı çözüm, direkt yaklaşımda serinin yakınsadığı tek bir fonksiyon ile gösterilebilmektedir. Bu ise sonuçları hassaslaştırmakta ve daha basit şekilde ifade edilebilmesini sağlamaktadır.

ÇZÖM 'da kullanılan aşağıdaki yeni bağımsız zaman değişkenlerini tanımlayarak çözümümüze başlayalım:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Bu durumda t 'ye göre türevler, T_n 'e göre kısmi türevler cinsinden açılım haline gelirler:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada ε küçük bir perturbasyon parametresi, $D_n = \partial/\partial T_n$, $T_0 = t$ hızlı zaman ölçeği, $T_1 = \varepsilon t$ ve $T_2 = \varepsilon^2 t$ ise yavaş zaman ölçekleridir.

(3.1) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki forma sahip açılımlar cinsinden ifade edilebilir:

$$v(x, t) = \varepsilon v_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (3.4a)$$

$$\theta(x, t) = \varepsilon \theta_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \theta_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \theta_3(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (3.4b)$$

$v(x, t)$ enine yerdeğiştirmeyi ve $\theta(x, t)$ burulma açısını ifade etmektedir.

Zorlama fonksiyonu frekansı Ω 'nın enine tabii frekanslardan birine yakın olduğu durum (baskın rezonans durumu) ele alınacaktır. σ ayar parametresi zorlama frekansı ile enine tabii frekanslar arasındaki yakınlığı belirlemektedir. Buna göre

$$\Omega = \omega_e + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.5)$$

yazılabilir. Burada $\sigma = O(1)$ dir. $\sigma = 0$ olduğu taktirde, zorlama genliği ne kadar küçük olursa olsun, lineer sönümsüz teori sayesinde sistemin titreşimleri çok büyük olacak ve rezonans meydana gelecektir. Ancak gerçek sistemlerde büyük genlikli bu osilasyonlar sönümleme ve nonlineerlik tarafından kısıtlanmaktadır. Bu yüzden düzgün bir yaklaşık çözüm elde edebilmek

için zorlamanın sönüm ve nonlineerlik ile aynı anda ortaya çıkmasını sağlayacak aşağıdaki gibi bir mertebe düzenlemesi yapılmıştır:

$$\hat{\mu}_1 = \varepsilon^2 \mu_1 \quad , \quad \hat{\mu}_2 = \varepsilon^2 \mu_2 \quad (3.6a)$$

$$\hat{F} = \varepsilon^3 F \quad (3.6b)$$

(3.3) - (3.6) denklemleri (3.1a) ve (3.1b) denklemlerinde yerlerine konular ve herbir yaklaşıklık mertebesindeki terimler ayrıştırılırsa, aşağıdaki denklemler elde edilir:

ε mertebesi:

$$D_0^2 v_1 + I_s v_1^{iv} - 2H_w v_1'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} v_1 dx = 0 \quad (3.7a)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \Gamma_s \theta_1^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \theta_1'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \theta_1 dx = 0 \quad (3.7b)$$

ε^2 mertebesi:

$$D_0^2 v_2 + I_s v_2^{iv} - 2H_w v_2'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} v_2 dx \\ = -2D_0 D_1 v_1 + \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[v_1'' \int_0^{\ell_i} v_1 dx + \theta_1'' \int_0^{\ell_i} \theta_1 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} (v_1'^2 + \theta_1'^2) dx \right] \quad (3.8a)$$

$$D_0^2 \theta_2 + \Gamma_s \theta_2^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \theta_2'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \theta_2 dx \\ = -2D_0 D_1 \theta_1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b \left[\theta_1'' \int_0^{\ell_i} v_1 dx + v_1'' \int_0^{\ell_i} \theta_1 dx - \int_0^{\ell_i} v_1' \theta_1' dx \right] \quad (3.8b)$$

ε^3 mertebesi:

$$\begin{aligned}
D_0^2 v_3 + I_s v_3^{iv} - 2H_w v_3'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} v_3 dx &= -2D_0 D_1 v_2 - D_1^2 v_1 - 2D_0 D_2 v_1 - \mu_1 D_0 v_1 \\
+ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[v_2'' \int_0^{\ell_i} v_1 dx + v_1'' \int_0^{\ell_i} v_2 dx + \theta_2'' \int_0^{\ell_i} \theta_1 dx + \theta_1'' \int_0^{\ell_i} \theta_2 dx - \int_0^{\ell_i} (v_1' v_2' + \theta_1' \theta_2') dx \right] & \quad (3.9a) \\
+ \sum_{i=1}^3 S_k \left[v_1'' \int_0^{\ell_i} v_1'^2 dx + v_1'' \int_0^{\ell_i} \theta_1'^2 dx + 2\theta_1'' \int_0^{\ell_i} v_1' \theta_1' dx \right] + F \cos \Omega T_0 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 \theta_3 + \Gamma_s \theta_3^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \theta_3'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \theta_3 dx & \\
= -2D_0 D_1 \theta_2 - D_1^2 \theta_1 - 2D_0 D_2 \theta_1 - \mu_2 D_0 \theta_2 & \\
+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b \left[\theta_2'' \int_0^{\ell_i} v_1 dx + \theta_1'' \int_0^{\ell_i} v_2 dx + v_1'' \int_0^{\ell_i} \theta_2 dx + v_2'' \int_0^{\ell_i} \theta_1 dx - \int_0^{\ell_i} v_1' \theta_2' dx - \int_0^{\ell_i} v_2' \theta_1' dx \right] & \quad (3.9b) \\
+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k \left[\theta_1'' \int_0^{\ell_i} v_1'^2 dx + \theta_1'' \int_0^{\ell_i} \theta_1'^2 dx + 2v_1'' \int_0^{\ell_i} v_1' \theta_1' dx \right] &
\end{aligned}$$

3.1.1. ε Mertebesi

ε mertebesindeki denklemler problemin lineer kısmını teşkil etmektedir. Bu mertebeye için aşağıdaki çözümler önerilmiştir:

$$v_1(x, T_0, T_1, T_2) = \left[A_1(T_1, T_2) e^{i\omega_\varepsilon T_0} + ke \right] \eta(x) \quad (3.10a)$$

$$\theta_1(x, T_0, T_1, T_2) = \left[A_2(T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + ke \right] \xi(x) \quad (3.10b)$$

Burada A_1 ve A_2 bilinmeyen kompleks genlik fonksiyonlarıdır. ω_ε lineer enine tabii frekansı, ω_b lineer burulma tabii frekansını, ve ke öncesindeki terimlerin kompleks eşleniğini ifade etmektedir. Denklem (3.10) 'da önerilen çözümler, denklem (3.7) 'ye yerleştirilirse,

$$I_s \eta^{iv} - 2H_w \eta'' - \omega_\varepsilon^2 \eta + M = 0 \quad (3.11a)$$

$$\Gamma_s \xi^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \xi'' - \omega_b^2 \xi + N = 0 \quad (3.11b)$$

elde edilir. Burada

$$M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \eta dx \quad (3.12a)$$

$$N = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \xi dx \quad (3.12b)$$

Bundan sonra, problemin birbirinden bağımsız olarak çözülmesi gereken iki ayrı kısmı bulunmaktadır:

(1) Simetrik modlar: Bu durumda $M \neq 0$ ve $N \neq 0$ olup, üç açıklık taşıyıcı ana kablo aracılığı ile birbiriyle etkileşmektedir. Dolayısıyla sistemin bütün olarak çözülmesi gerekmektedir. Mod yapısı oldukça karmaşık çıkmaktadır ve bu fonksiyon üç açıklık için de geçerli olmaktadır. Denklem (3.11a) için şu şekilde bir çözüm önerilmiştir:

$$\eta = A \cos \frac{\varphi_e x}{\ell} + B \sin \frac{\varphi_e x}{\ell} + C \cosh \frac{\psi_e x}{\ell} + D \sinh \frac{\psi_e x}{\ell} + \frac{K}{\omega_e^2} \quad (3.13)$$

Sınır şartlarının

$$\begin{aligned} \eta(0) &= 0 & \eta(\ell) &= 0 \\ \eta''(0) &= 0 & \eta''(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

olduğu bilinmektedir. Denklem (3.11a) sınır şartları ile birlikte çözüldüğünde, denklem (3.13) 'te önerilen çözümdeki A, B, C, D ve K katsayılarının değerleri bulunmaktadır. Bulunan değerler (3.13) 'e yerleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, enine titreşimler için ε mertebesindeki mod yapısının şu şekilde olduğu görülür:

$$\eta = \frac{M}{\omega_e^2 (\varphi_e^2 + \psi_e^2)} \left[\varphi_e^2 + \psi_e^2 - \psi_e^2 \left(\cos \frac{\varphi_e x}{\ell} + \tan \frac{\varphi_e}{2} \sin \frac{\varphi_e x}{\ell} \right) - \varphi_e^2 \left(\cosh \frac{\psi_e x}{\ell} - \tanh \frac{\psi_e}{2} \sinh \frac{\psi_e x}{\ell} \right) \right] \quad (3.15)$$

burada,

$$\varphi_e = \sqrt{\frac{H_w \ell^2}{I_s} \left(\sqrt{1 + \frac{I_s \omega_e^2}{H_w^2}} - 1 \right)} \quad (3.16a)$$

$$\psi_e = \sqrt{\frac{H_w \ell^2}{I_s} \left(\sqrt{1 + \frac{I_s \omega_e^2}{H_w^2}} + 1 \right)} \quad (3.16b)$$

Aynı işlemler denklem (3.11b) için tekrarlanırsa, burulma titreşimleri için ε mertebesindeki mod yapısı aşağıdaki şekilde

$$\xi = \frac{N}{\omega_b^2 (\varphi_b^2 + \psi_b^2)} \left[\varphi_b^2 + \psi_b^2 - \psi_b^2 \left(\cos \frac{\varphi_b x}{\ell} + \tan \frac{\varphi_b}{2} \sin \frac{\varphi_b x}{\ell} \right) - \varphi_b^2 \left(\cosh \frac{\psi_b x}{\ell} - \tanh \frac{\psi_b}{2} \sinh \frac{\psi_b x}{\ell} \right) \right] \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada,

$$\varphi_b = \sqrt{\frac{(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w) \ell^2}{2 \Gamma_s} \left(\sqrt{1 + \frac{4 \Gamma_s \omega_b^2}{(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w)^2}} - 1 \right)} \quad (3.18a)$$

$$\psi_b = \sqrt{\frac{(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w) \ell^2}{2 \Gamma_s} \left(\sqrt{1 + \frac{4 \Gamma_s \omega_b^2}{(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w)^2}} + 1 \right)} \quad (3.18b)$$

(2) Asimetrik modlar: Bu durumda $M=N=0$ olup, kenar ve orta açıklıklar birbirlerinden bağımsız olarak hareket etmektedirler. Dolayısıyla kenar ve orta açıklıklar ayrı ayrı çözülebilmektedir. Bu nedenle mod yapıları daha basit çıkmaktadır. Aşağıdaki şekilde bir çözüm önerilmiştir:

$$\eta = A \cos \frac{\varphi x}{\ell} + B \sin \frac{\varphi x}{\ell} + C \cosh \frac{\psi x}{\ell} + D \sinh \frac{\psi x}{\ell} \quad (3.19)$$

(3.11a) numaralı denklem (3.14) sınır şartları ile birlikte çözüldüğünde, denklem (3.19) 'da önerilen çözümdeki A, C ve D katsayılarının sıfıra eşit olduğu, B katsayısının keyfi çıktığı ve

kenar açıklıklar için $\varphi=n\pi$, orta açıklık için $\varphi=2n\pi$ olduğu görülmüştür. Buna göre, enine titreşimler için ε mertebesindeki mod yapısı şu şekildedir:

$$\eta_1 = B_1 \sin \frac{n\pi x}{\ell_1} \quad n = 1,2,3, \dots \quad (\text{kenar açıklıklar için}) \quad (3.20a)$$

$$\eta_2 = B_2 \sin \frac{2n\pi x}{\ell_2} \quad n = 1,2,3, \dots \quad (\text{orta açıklık için}) \quad (3.20b)$$

Benzer şekilde, burulma titreşimleri için ε mertebesindeki mod yapısı şu şekildedir:

$$\xi_1 = C_1 \sin \frac{m\pi x}{\ell_1} \quad m = 1,2,3, \dots \quad (\text{kenar açıklıklar için}) \quad (3.21a)$$

$$\xi_2 = C_2 \sin \frac{2m\pi x}{\ell_2} \quad m = 1,2,3, \dots \quad (\text{orta açıklık için}) \quad (3.21b)$$

3.1.2. ε^2 mertebesi

İlk mertebe tamamlandıktan sonra, ε^2 mertebesinde aşağıdaki şekilde çözümler önerilmiştir:

$$v_2 = (A_1^2 e^{2i\omega_\varepsilon T_0}) Y_1(x) + (A_1 \bar{A}_1) Y_2(x) + (A_2^2 e^{2i\omega_b T_0}) Y_3(x) + (A_2 \bar{A}_2) Y_4(x) + ke \quad (3.22a)$$

$$\theta_2 = (A_1 A_2 e^{i(\omega_\varepsilon + \omega_b) T_0}) Y_5(x) + (A_1 \bar{A}_2 e^{i(\omega_\varepsilon - \omega_b) T_0}) Y_6(x) + ke \quad (3.22b)$$

Bu mertebedeki seküler terimleri elimine edebilmek için $D_1 A_1 = 0$ ve $D_1 A_2 = 0$ şartları (çözülebilirlik şartları için Nayfeh (1981) 'e başvurulabilir) sağlanmalıdır. (3.10) ve (3.22) denklemleri (3.8) denklemlerine yerleştirilir, seküler terimler elimine edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 , Y_5 ve Y_6 fonksiyonlarının çözümü için gereken geçiş denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$I_s Y_1^{iv} - 2H_w Y_1'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} Y_1 dx - 4\omega_e^2 Y_1 = \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left(\eta'' \int_0^{\ell_i} \eta dx - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \quad (3.23a)$$

$$I_s Y_2^{iv} - 2H_w Y_2'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} Y_2 dx = \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left(\eta'' \int_0^{\ell_i} \eta dx - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \quad (3.23b)$$

$$I_s Y_3^{iv} - 2H_w Y_3'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} Y_3 dx - 4\omega_b^2 Y_3 = \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left(\xi'' \int_0^{\ell_i} \xi dx - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \quad (3.23c)$$

$$I_s Y_4^{iv} - 2H_w Y_4'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} Y_4 dx = \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left(\xi'' \int_0^{\ell_i} \xi dx - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \quad (3.23d)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_s Y_5^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) Y_5'' - (\omega_e + \omega_b)^2 Y_5 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} Y_5 dx \\ = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b \left(\xi'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} \xi dx - \int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \end{aligned} \quad (3.23e)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_s Y_6^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) Y_6'' - (\omega_e - \omega_b)^2 Y_6 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} Y_6 dx \\ = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b \left(\xi'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} \xi dx - \int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \end{aligned} \quad (3.23f)$$

(3.23) denklemlerinin çözümleri de yine simetrik ve asimetric modlar için ayrı ayrı yapılmalıdır. Bu denklemlerin homojen kısmı (3.11) denklemlerinin homojen kısmı ile benzer formda olduğu için bu mertebede önerilen çözümler de (3.11) denklemlerinin çözümleri ile benzer formdadır. Ancak bu mertebede simetrik modların çözüm fonksiyonları çok karmaşık olduğu için sadece asimetric modların çözümü ile yetinilmiştir. Asimetric modlarda kenar ve orta açıklıkların çözüm fonksiyonları birbirlerinden farklıdır; ayrıca kenar açıklıklarda çözüm fonksiyonları mod sayısının tek veya çift olmasına göre de farklılık göstermektedir. Çözümlerin bulunabilmesi için, önce (3.20) ve (3.21) denklemleri (3.23) denklemlerine yerleştirilmiştir. Daha sonra homojen çözümler bulunmuştur; kenar ve orta açıklıklar için farklı olan özel çözümler bulunan homojen çözümlere eklenerek genel çözümler elde edilmiştir. Genel çözümler

$$\begin{aligned} Y_j(0) = 0 \quad Y_j(\ell) = 0 \\ Y_j''(0) = 0 \quad Y_j''(\ell) = 0 \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (3.24)$$

sınır şartları ile birlikte çözülür ve gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur

Y_1 'in değeri :

Orta açıklıkta,

$$\begin{aligned} Y_1 = -\frac{n^2 \pi^2 S_k w_b}{4\omega_e^2 (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \ell_2} \left[\psi_e^2 \left(\cos \frac{\varphi_e x}{\ell_2} + \tan \frac{\varphi_e}{2} \sin \frac{\varphi_e x}{\ell_2} \right) \right. \\ \left. + \varphi_e^2 \left(\cosh \frac{\psi_e x}{\ell_2} - \tanh \frac{\psi_e}{2} \sinh \frac{\psi_e x}{\ell_2} \right) - (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \right] \end{aligned} \quad (3.25a)$$

Kenar açıklıkta tek modlar ($n = 1, 3, 5, \dots$) için,

$$\begin{aligned} Y_1 = -\frac{n^2 \pi^2 S_k w_b}{8\ell_1 \omega_e^2 (\varphi_e^2 + \psi_e^2)} \left[\psi_e^2 \left(\cos \frac{\varphi_e x}{\ell_1} + \tan \frac{\varphi_e}{2} \sin \frac{\varphi_e x}{\ell_1} \right) \right. \\ \left. + \varphi_e^2 \left(\cosh \frac{\psi_e x}{\ell_1} - \tanh \frac{\psi_e}{2} \sinh \frac{\psi_e x}{\ell_1} \right) - (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \right] - \frac{2n\pi S_k w_b \sin \frac{n\pi x}{\ell_1}}{\ell_1 \left(I_s \frac{n^4 \pi^4}{\ell_1^4} + 2H_w \frac{n^2 \pi^2}{\ell_1^2} - 4\omega_e^2 \right)} \end{aligned} \quad (3.25b)$$

Kenar açıklıkta çift modlar ($n = 2, 4, 6, \dots$) için,

$$\begin{aligned} Y_1 = -\frac{n^2 \pi^2 S_k w_b}{8\ell_1 \omega_e^2 (\varphi_e^2 + \psi_e^2)} \left[\psi_e^2 \left(\cos \frac{\varphi_e x}{\ell_1} + \tan \frac{\varphi_e}{2} \sin \frac{\varphi_e x}{\ell_1} \right) \right. \\ \left. + \varphi_e^2 \left(\cosh \frac{\psi_e x}{\ell_1} - \tanh \frac{\psi_e}{2} \sinh \frac{\psi_e x}{\ell_1} \right) - (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \right] \end{aligned} \quad (3.25c)$$

(3.25) denklemlerindeki φ_e ve ψ_e , (3.16) denklemlerinde tanımlandığı şekildedir.

Y₂ 'nin değeri :

Orta açıklıkta,

$$Y_2 = \frac{n^2 \pi^2 I_s S_k w_b}{4H_w^2 \ell_2} \left(1 - \frac{H_w \ell_2}{I_s} x + \frac{H_w}{I_s} x^2 - \cosh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} + \tanh \sqrt{\frac{H_w \ell_2^2}{2I_s}} \sinh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} \right) \quad (3.26a)$$

Kenar açıklıkta tek modlar (n = 1, 3, 5, ...) için,

$$Y_2 = \frac{n^2 \pi^2 I_s S_k w_b}{8H_w^2 \ell_1} \left(1 - \frac{H_w \ell_1}{I_s} x + \frac{H_w}{I_s} x^2 - \cosh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} + \tanh \sqrt{\frac{H_w \ell_1^2}{2I_s}} \sinh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} \right) - \frac{2S_k w_b}{I_s \frac{n^3 \pi^3}{\ell_1^3} + 2H_w \frac{n\pi}{\ell_1}} \quad (3.26b)$$

Kenar açıklıkta çift modlar (n = 2, 4, 6, ...) için,

$$Y_2 = \frac{n^2 \pi^2 I_s S_k w_b}{8H_w^2 \ell_1} \left(1 - \frac{H_w \ell_1}{I_s} x + \frac{H_w}{I_s} x^2 - \cosh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} + \tanh \sqrt{\frac{H_w \ell_1^2}{2I_s}} \sinh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} \right) \quad (3.26c)$$

Y₃ 'ün değeri :

Orta açıklıkta,

$$Y_3 = -\frac{n^2 \pi^2 S_k w_b}{4\omega_b^2 (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \ell_2} \left[\psi_e^2 \left(\cos \frac{\varphi_e x}{\ell_2} + \tan \frac{\varphi_e}{2} \sin \frac{\varphi_e x}{\ell_2} \right) + \varphi_e^2 \left(\cosh \frac{\psi_e x}{\ell_2} - \tanh \frac{\psi_e}{2} \sinh \frac{\psi_e x}{\ell_2} \right) - (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \right] \quad (3.27a)$$

Kenar açıklıkta tek modlar ($n = 1, 3, 5, \dots$) için,

$$Y_3 = -\frac{n^2 \pi^2 S_k w_b}{8 \ell_1 \omega_b^2 (\varphi_e^2 + \psi_e^2)} \left[\psi_e^2 \left(\cos \frac{\varphi_e x}{\ell_1} + \tan \frac{\varphi_e}{2} \sin \frac{\varphi_e x}{\ell_1} \right) + \varphi_e^2 \left(\cosh \frac{\psi_e x}{\ell_1} - \tanh \frac{\psi_e}{2} \sinh \frac{\psi_e x}{\ell_1} \right) - (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \right] - \frac{2n\pi S_k w_b \sin \frac{n\pi x}{\ell_1}}{\ell_1 \left(I_s \frac{n^4 \pi^4}{\ell_1^4} + 2H_w \frac{n^2 \pi^2}{\ell_1^2} - 4\omega_e^2 \right)} \quad (3.27b)$$

Kenar açıklıkta çift modlar ($n = 2, 4, 6, \dots$) için,

$$Y_3 = -\frac{n^2 \pi^2 S_k w_b}{8 \ell_1 \omega_b^2 (\varphi_e^2 + \psi_e^2)} \left[\psi_e^2 \left(\cos \frac{\varphi_e x}{\ell_1} + \tan \frac{\varphi_e}{2} \sin \frac{\varphi_e x}{\ell_1} \right) + \varphi_e^2 \left(\cosh \frac{\psi_e x}{\ell_1} - \tanh \frac{\psi_e}{2} \sinh \frac{\psi_e x}{\ell_1} \right) - (\varphi_e^2 + \psi_e^2) \right] \quad (3.27c)$$

Y₄ 'ün değeri :

Orta açıklıkta,

$$Y_4 = \frac{n^2 \pi^2 I_s S_k w_b}{4H_w^2 \ell_2} \left(1 - \frac{H_w \ell_2}{I_s} x + \frac{H_w}{I_s} x^2 - \cosh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} + \tanh \sqrt{\frac{H_w \ell_2^2}{2I_s}} \sinh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} \right) \quad (3.28a)$$

Kenar açıklıkta tek modlar ($n = 1, 3, 5, \dots$) için,

$$Y_4 = \frac{n^2 \pi^2 I_s S_k w_b}{8H_w^2 \ell_1} \left(1 - \frac{H_w \ell_1}{I_s} x + \frac{H_w}{I_s} x^2 - \cosh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} + \tanh \sqrt{\frac{H_w \ell_1^2}{2I_s}} \sinh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} \right) - \frac{2S_k w_b}{I_s \frac{n^3 \pi^3}{\ell_1^3} + 2H_w \frac{n\pi}{\ell_1}} \quad (3.28b)$$

Kenar açıklıkta çift modlar ($n = 2, 4, 6, \dots$) için,

$$Y_4 = \frac{n^2 \pi^2 I_s S_k w_b}{8H_w^2 \ell_1} \left(1 - \frac{H_w \ell_1}{I_s} x + \frac{H_w}{I_s} x^2 - \cosh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} + \tanh \sqrt{\frac{H_w \ell_1^2}{2I_s}} \sinh \sqrt{\frac{2H_w}{I_s} x} \right) \quad (3.28c)$$

Y_5 'in değeri :

Orta açıklıkta,

$$Y_5 = -\frac{n^2 \pi^2 b^2 S_k w_b}{\ell_2 (\omega_e + \omega_b)^2 (\kappa^2 + \tau^2)} \left[\tau^2 \left(\cos \frac{\kappa x}{\ell_2} + \tan \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\kappa x}{\ell_2} \right) + \kappa^2 \left(\cosh \frac{\tau x}{\ell_2} - \tanh \frac{\tau}{2} \sinh \frac{\tau x}{\ell_2} \right) - (\kappa^2 + \tau^2) \right] \quad (3.29a)$$

Kenar açıklıkta tek modlar ($n = 1, 3, 5, \dots$) için;

$$Y_5 = -\frac{n^2 \pi^2 b^2 S_k w_b}{2\ell_1 (\omega_e + \omega_b)^2 (\kappa^2 + \tau^2)} \left[\tau^2 \left(\cos \frac{\kappa x}{\ell_1} + \tan \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\kappa x}{\ell_1} \right) + \kappa^2 \left(\cosh \frac{\tau x}{\ell_1} - \tanh \frac{\tau}{2} \sinh \frac{\tau x}{\ell_1} \right) - (\kappa^2 + \tau^2) \right] \quad (3.29b)$$

$$- \frac{2n\pi b^2 S_k w_b}{\ell_1 \left(\Gamma_s \frac{n^4 \pi^4}{\ell_1^4} + \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \frac{n^2 \pi^2}{\ell_1^2} - (\omega_e + \omega_b)^2 \right)} \sin \frac{n\pi x}{\ell_1}$$

Kenar açıklıkta çift modlar ($n = 2, 4, 6, \dots$) için,

$$Y_5 = -\frac{n^2 \pi^2 b^2 S_k w_b}{2\ell_1 (\omega_e + \omega_b)^2 (\kappa^2 + \tau^2)} \left[\tau^2 \left(\cos \frac{\kappa x}{\ell_1} + \tan \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\kappa x}{\ell_1} \right) + \kappa^2 \left(\cosh \frac{\tau x}{\ell_1} - \tanh \frac{\tau}{2} \sinh \frac{\tau x}{\ell_1} \right) - (\kappa^2 + \tau^2) \right] \quad (3.29c)$$

(3.29) denklemlerindeki κ ve τ aşağıda tanımlandığı şekildedir:

$$\kappa = \sqrt{\frac{Gl^2}{2\Gamma_s} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Gamma_s (\omega_e + \omega_b)^2}{G^2}} - 1 \right)} \quad (3.30a)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{Gl^2}{2\Gamma_s} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Gamma_s (\omega_e + \omega_b)^2}{G^2}} + 1 \right)} \quad (3.30b)$$

Y₆ 'nın değeri :

Orta açıklıkta,

$$Y_6 = -\frac{n^2 \pi^2 b^2 S_k w_b}{\ell_2 (\omega_e - \omega_b)^2 (\kappa^2 + \tau^2)} \left[\tau^2 \left(\cos \frac{\kappa x}{\ell_2} + \tan \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\kappa x}{\ell_2} \right) + \kappa^2 \left(\cosh \frac{\tau x}{\ell_2} - \tanh \frac{\tau}{2} \sinh \frac{\tau x}{\ell_2} \right) - (\kappa^2 + \tau^2) \right] \quad (3.31a)$$

Kenar açıklıkta tek modlar (n = 1, 3, 5, ...) için,

$$Y_6 = -\frac{n^2 \pi^2 b^2 S_k w_b}{2\ell_1 (\omega_e - \omega_b)^2 (\kappa^2 + \tau^2)} \left[\tau^2 \left(\cos \frac{\kappa x}{\ell_1} + \tan \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\kappa x}{\ell_1} \right) + \kappa^2 \left(\cosh \frac{\tau x}{\ell_1} - \tanh \frac{\tau}{2} \sinh \frac{\tau x}{\ell_1} \right) - (\kappa^2 + \tau^2) \right] \quad (3.31b)$$

$$-\frac{2n\pi b^2 S_k w_b}{\ell_1 \left(\Gamma_s \frac{n^4 \pi^4}{\ell_1^4} + \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \frac{n^2 \pi^2}{\ell_1^2} - (\omega_e + \omega_b)^2 \right)} \sin \frac{n\pi x}{\ell_1}$$

Kenar açıklıkta çift modlar (n = 2, 4, 6, ...) için,

$$Y_6 = -\frac{n^2 \pi^2 b^2 S_k w_b}{2\ell_1 (\omega_e - \omega_b)^2 (\kappa^2 + \tau^2)} \left[\tau^2 \left(\cos \frac{\kappa x}{\ell_1} + \tan \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\kappa x}{\ell_1} \right) + \kappa^2 \left(\cosh \frac{\tau x}{\ell_1} - \tanh \frac{\tau}{2} \sinh \frac{\tau x}{\ell_1} \right) - (\kappa^2 + \tau^2) \right] \quad (3.31c)$$

Görüldüğü gibi, bu mertebede asimetrik mod yapıları dahi oldukça karmaşıktır. Simetrik mod yapıları ise, homojen denklemlerin çözümü homojen olmayan denklemlerin sağ tarafında mevcut olduğu için, çok daha karmaşıktır. Diferansiyel denklem çözen paket bilgisayar programları dahi simetrik mod yapılarını veren denklemleri çözememiştir. Bu nedenlerden dolayı, sadece asimetrik modların çözümü ile yetinilmiştir.

3.1.3. ε^3 Mertebesi

Son olarak ε^3 mertebesi incelenmiştir. Bu mertebede çözülebilirlik şartları bulunmuştur. Enine titreşim modlarından biri ile burulma modlarından biri arasında yakınlık olduğu varsayılırsa

$$\omega_e = \omega_b + \varepsilon^2 \rho \quad (3.32)$$

yazılabilir. ρ , bu yakınlığı ifade eden bir ayar parametresidir. Zorlama fonksiyonunun frekansı ile enine titreşim frekansı arasındaki yakınlık ise daha önce (3.5) denklemi ile tanımlanmıştı. Böylece zorlama frekansı enine titreşim modlarından kendisine yakın olanı uyarmakta, enine moda meydana gelen enerji ise bu moda çok yakın olan burulma moduna aktarılmaktadır.

(3.10), (3.22), (3.32) ve (3.5) denklemleri (3.9) denklemlerine yerleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, enine titreşimler için

$$\begin{aligned} & D_0^2 v_3 + I_s v_3^{iv} - 2H_w v_3'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} v_3 dx \\ & = -2i\omega_e \eta A_1' e^{i\omega_e T_0} - i\omega_e \mu_1 A_1 e^{i\omega_e T_0} \eta + \frac{F}{2} e^{i\omega_e T_0} e^{i\sigma T_2} \\ & + \sum_{i=1}^3 S_k w_b e^{i\omega_e T_0} \left\{ \bar{A}_1 A_1^2 \left(Y_1'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} Y_1 dx - \int_0^{\ell_i} \eta' Y_1' dx \right) \right. \\ & + 2\bar{A}_1 A_1^2 \left(Y_2'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} Y_2 dx - \int_0^{\ell_i} \eta' Y_2' dx \right) \\ & + \bar{A}_1 A_2^2 \left[\left(Y_3'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} Y_3 dx - \int_0^{\ell_i} \eta' Y_3' dx \right) + \left(Y_6'' \int_0^{\ell_i} \xi dx + \xi'' \int_0^{\ell_i} Y_6 dx - \int_0^{\ell_i} \xi' Y_6' dx \right) \right] e^{-2i\rho T_2} \\ & + 2A_1 A_2 \bar{A}_2 \left(Y_4'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} Y_4 dx - \int_0^{\ell_i} \eta' Y_4' dx \right) \\ & + A_1 A_2 \bar{A}_2 \left[\left(Y_5'' \int_0^{\ell_i} \xi dx + \xi'' \int_0^{\ell_i} Y_5 dx - \int_0^{\ell_i} \xi' Y_5' dx \right) + \left(Y_6'' \int_0^{\ell_i} \xi dx + \xi'' \int_0^{\ell_i} Y_6 dx - \int_0^{\ell_i} \xi' Y_6' dx \right) \right] \left. \right\} \\ & + \sum_{i=1}^3 S_k e^{i\omega_e T_0} \left\{ 3\bar{A}_1 A_1^2 \left(\eta'' \int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \right. \\ & + \left. \left(\bar{A}_1 A_2^2 e^{-2i\rho T_2} + 2A_1 A_2 \bar{A}_2 \right) \left(\eta'' \int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx + 2\xi'' \int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \right\} + \text{SOT} + ke \end{aligned} \quad (3.33)$$

ve burulma titreşimleri için,

$$\begin{aligned}
& D_0^2 \theta_3 + \Gamma_s \theta_3^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \theta_3'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \theta_3 dx \\
& = -2i\omega_b \xi A_2' e^{i\omega_b T_0} - i\omega_b \mu_2 A_2 e^{i\omega_b T_0} \xi \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b e^{i\omega_b T_0} \left\{ A_1 \bar{A}_1 A_2 \left(Y_5'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} Y_5 dx - \int_0^{\ell_i} \eta' Y_5' dx \right) \right. \\
& + \left(A_1^2 \bar{A}_2 e^{2ipT_2} + A_1 \bar{A}_1 A_2 \right) \left(Y_6'' \int_0^{\ell_i} \eta dx + \eta'' \int_0^{\ell_i} Y_6 dx - \int_0^{\ell_i} \eta' Y_6' dx \right) \\
& + A_1^2 \bar{A}_2 \left(Y_1'' \int_0^{\ell_i} \xi dx + \xi'' \int_0^{\ell_i} Y_1 dx - \int_0^{\ell_i} \xi' Y_1' dx \right) e^{2ipT_2} \\
& + 2A_1 \bar{A}_1 A_2 \left(Y_2'' \int_0^{\ell_i} \xi dx + \xi'' \int_0^{\ell_i} Y_2 dx - \int_0^{\ell_i} \xi' Y_2' dx \right) \\
& + A_2^2 \bar{A}_2 \left(Y_3'' \int_0^{\ell_i} \xi dx + \xi'' \int_0^{\ell_i} Y_3 dx - \int_0^{\ell_i} \xi' Y_3' dx \right) + 2A_2^2 \bar{A}_2 \left(Y_4'' \int_0^{\ell_i} \xi dx + \xi'' \int_0^{\ell_i} Y_4 dx - \int_0^{\ell_i} \xi' Y_4' dx \right) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k e^{i\omega_b T_0} \left\{ 3\bar{A}_2 A_2^2 \left(\xi'' \int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \right. \\
& \left. + \left(\bar{A}_2 A_1^2 e^{2ipT_2} + 2A_1 \bar{A}_1 A_2 \right) \left(\xi'' \int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx + 2\eta'' \int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \right\} + SOT + ke
\end{aligned} \tag{3.34}$$

denklemleri elde edilir. Burada SOT seküler olmayan terimler anlamındadır. Bu mertebede çözüm yapılmayıp sadece çözülebilirlik şartları bulunacağı için, yalnızca seküler ve seküler olmayan terimleri ayırıştırıran aşağıdaki formda çözüm fonksiyonları önerilmiştir:

$$v_3 = \Phi_1(x, T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + W_1(x, T_0, T_1, T_2) + ke \tag{3.35a}$$

$$\theta_3 = \Phi_2(x, T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + W_2(x, T_0, T_1, T_2) + ke \tag{3.35b}$$

Burada Φ_1 ve Φ_2 seküler terimleri ifade eden fonksiyonlar, W_1 ve W_2 seküler olmayan terimleri ifade eden fonksiyonlardır. Bu çözümler denklem (3.33) ve (3.34) 'e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
& -\omega_e^2 \Phi_1 e^{i\omega_e T_0} + \ddot{W}_1 + I_s (\Phi_1^{iv} e^{i\omega_e T_0} + W_1^{iv}) - 2H_w (\Phi_1'' e^{i\omega_e T_0} + W_1'') \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} (\Phi_1 e^{i\omega_e T_0} + W_1) dx + ke = e^{i\omega_e T_0} R_1(x, T_0, T_1, T_2) + SOT + ke
\end{aligned} \tag{3.36a}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_b^2 \Phi_2 e^{i\omega_b T_0} + \ddot{W}_2 + \Gamma_s (\Phi_2^{iv} e^{i\omega_b T_0} + W_2^{iv}) - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) (\Phi_2'' e^{i\omega_b T_0} + W_2'') \\
& + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} (\Phi_2 e^{i\omega_b T_0} + W_2) dx + ke = e^{i\omega_b T_0} R_2(x, T_0, T_1, T_2) + SOT + ke
\end{aligned} \tag{3.36b}$$

elde edilir. Burada $e^{i\omega_e T_0} R_1(x, T_0, T_1, T_2)$ ve $e^{i\omega_b T_0} R_2(x, T_0, T_1, T_2)$, sırasıyla, denklem (3.33) ve denklem (3.34) 'ün sağ tarafındaki seküler terimleri ifade etmektedir. Seküler terimler ayrıştırıldığında, ilk mertebedeki homojen denklemin homojen olmayan şekli ortaya çıkmaktadır. Homojen denklemin basit olmayan bir çözümü olduğuna göre, homojen olmayan denklemin çözülebilmesi ancak ve ancak belli bir çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır. Çözülebilirlik şartları ile ilgili detaylı bilgiler Nayfeh (1981) 'de bulunabilir.

Seküler terimlerin elimine edilebilmesi için, (3.36) denklemlerindeki $e^{i\omega_e T_0}$ ve $e^{i\omega_b T_0}$ terimlerinin katsayıları eşitlenerek

$$-\omega_e^2 \Phi_1 + I_s \Phi_1^{iv} - 2H_w \Phi_1'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \Phi_1 dx = R_1(x, T_0, T_1, T_2) \tag{3.37a}$$

$$-\omega_b^2 \Phi_2 + \Gamma_s \Phi_2^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \Phi_2'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \Phi_2 dx = R_2(x, T_0, T_1, T_2) \tag{3.37b}$$

yazılır. Sınır şartları ise şöyledir:

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,2}(0) &= \Phi_{1,2}(\ell_i) = 0 \\
\Phi_{1,2}'(0) &= \Phi_{1,2}'(\ell_i) = 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Çözülebilirlik şartlarının bulunabilmesi için, önce denklem (3.37a) ve (3.37b) 'nin her iki tarafı sırasıyla u_1 ve u_2 keyfi fonksiyonları ile çarpılır ve tanım kümesi üzerinden integre edilir:

$$\sum_{i=1}^3 \left[-\omega_e^2 \int_0^{\ell_i} u_1 \Phi_1 dx + I_s \int_0^{\ell_i} u_1 \Phi_1^{iv} dx - 2H_w \int_0^{\ell_i} u_1 \Phi_1'' dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \int_0^{\ell_i} u_1 \Phi_1 dx dx \right] = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{\ell_i} u_1 R_1 dx \right] \quad (3.39a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left[-\omega_b^2 \int_0^{\ell_i} u_2 \Phi_2 dx + \Gamma_s \int_0^{\ell_i} u_2 \Phi_2^{iv} dx - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \int_0^{\ell_i} u_2 \Phi_2'' dx \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} \int_0^{\ell_i} u_2 \Phi_2 dx dx \right] = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{\ell_i} u_2 R_2 dx \right] \quad (3.39b)$$

Daha sonra (3.39) denklemlerindeki türev operatörleri kısmi integrasyon ile Φ_1 ve Φ_2 fonksiyonlarından u_1 ve u_2 fonksiyonlarına taşınır:

$$\sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{\ell_i} \left(-\omega_e^2 u_1 + I_s u_1^{iv} - 2H_w u_1'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} u_1 dx \right) \Phi_1 dx \right] \\ + \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[I_s u_1 \Phi_1''' - I_s u_1' \Phi_1'' + (I_s u_1'' - 2H_w u_1) \Phi_1' - (I_s u_1''' - 2H_w u_1') \Phi_1 \right]_0^{\ell_i} \right\} = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{\ell_i} u_1 R_1 dx \right] \quad (3.40a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{\ell_i} \left(-\omega_b^2 u_2 + \Gamma_s u_2^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} u_2 dx \right) \Phi_2 dx \right] \\ + \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[\Gamma_s u_2 \Phi_2''' - \Gamma_s u_2' \Phi_2'' + \left(\Gamma_s u_2'' - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2 \right) \Phi_2' - \left(\Gamma_s u_2''' - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2' \right) \Phi_2 \right]_0^{\ell_i} \right\} \\ = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{\ell_i} u_2 R_2 dx \right] \quad (3.40b)$$

Keyfi u_1 ve u_2 fonksiyonlarının bulunabilmesi için seküler terimler sıfıra eşitlenirse $R_1 = R_2 = 0$ olur. Bu takdirde eşitliğin sağlanabilmesi ancak ve ancak (3.40a) ve (3.40b) denklemlerinin sol taraflarındaki her iki kısmın ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesi ile mümkündür. Buna göre, önce denklemlerin sol taraflarının ilk kısmındaki integrallerde bulunan Φ_1 ve Φ_2 terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek keyfi u_1 ve u_2 fonksiyonlarını veren aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir:

$$-\omega_e^2 u_1 + I_s u_1^{iv} - 2H_w u_1'' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} u_1 dx = 0 \quad (3.41a)$$

$$-\omega_b^2 u_2 + \Gamma_s u_2^{iv} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2'' + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 b^2 S_k w_b^2 \int_0^{\ell_i} u_2 dx = 0 \quad (3.41b)$$

Bu denklemler orijinal lineer denklemin adjoint homojen denklemleridir. Birinci mertebedeki homojen denklemle tamamen aynı oldukları için self adjoint' tirler.

Daha sonra (3.40) denklemlerinin sol taraflarının ikinci kısmındaki toplamlar da sıfıra eşitlenir ve bu eşitlikler açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left\{ I_s u_1 \Phi_1''' - I_s u_1' \Phi_1'' + (I_s u_1'' - 2H_w u_1) \Phi_1' - (I_s u_1''' - 2H_w u_1') \Phi_1 \right\}_0^{\ell_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ I_s u_1(\ell_i) \Phi_1'''(\ell_i) + [I_s u_1''(\ell_i) - 2H_w u_1(\ell_i)] \Phi_1'(\ell_i) \right. \\ & \left. - I_s u_1(0) \Phi_1'''(0) - [I_s u_1''(0) - 2H_w u_1(0)] \Phi_1'(0) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.42a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[\Gamma_s u_2 \Phi_2''' - \Gamma_s u_2' \Phi_2'' + \left(\Gamma_s u_2'' - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2 \right) \Phi_2' - \left(\Gamma_s u_2''' - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2' \right) \Phi_2 \right]_0^{\ell_i} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \Gamma_s u_2(\ell_i) \Phi_2'''(\ell_i) + \left[\Gamma_s u_2''(\ell_i) - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2(\ell_i) \right] \Phi_2'(\ell_i) \right. \\ & \left. \Gamma_s u_2(0) \Phi_2'''(0) + \left[\Gamma_s u_2''(0) - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) u_2(0) \right] \Phi_2'(0) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.42b)$$

denklemleri elde edilir. Sıfıra eşitliğin sağlanabilmesi için keyfi fonksiyon terimlerinin katsayılarının sıfır olmaları gerekmektedir. Sonuçta u_1 ve u_2 fonksiyonları ile ilgili sınır şartları

$$\begin{aligned} u_{1,2}(0) &= u_{1,2}(\ell_i) = 0 \\ u_{1,2}''(0) &= u_{1,2}''(\ell_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklinde olur. Bunlar adjoint sınır şartlarıdır. Diferansiyel denklemler (3.41), sınır şartları (3.43) ile birlikte çözümlerse,

$$u_1(x) = \eta(x) \quad (3.44a)$$

$$u_2(x) = \xi(x) \quad (3.44b)$$

olduğu görülür. Tanımlanan u_1 ve u_2 fonksiyonları ile (3.39) denklemlerinin sol tarafları sıfır olmuştur. O halde eşitliğin sağlanabilmesi için sağ tarafların da sıfır olması gerekmektedir:

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{\ell_i} u_1 R_1 dx \right\} = 0 \quad (3.45a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{\ell_i} u_2 R_2 dx \right\} = 0 \quad (3.45b)$$

veya açık şekilde yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{\ell_i} (-2i\omega_e \eta^2 A_1' - i\omega_e \eta^2 \mu_1 A_1) dx \right\} + \frac{1}{2} e^{i\sigma T_2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} F \eta dx \\ & + \bar{A}_1 A_1^2 S_k w_b \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_1'' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \eta' Y_1' dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_2'' dx \right) - 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta' Y_2' dx \right) \right] \right. \\ & + \left. \left(\int_0^{\ell_i} \eta \eta'' dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} Y_1 dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} Y_2 dx \right) + \frac{3}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \eta \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \right] \right. \\ & + \bar{A}_1 A_2^2 e^{-2ipT_2} S_k w_b \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_3'' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \eta' Y_3' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_6' dx \right) \right] \right. \\ & + \left. \left(\int_0^{\ell_i} \eta \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_3 dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_6'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right. \\ & + \left. \frac{1}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \eta \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) + \frac{2}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \eta \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \right. \\ & + A_1 A_2 \bar{A}_2 S_k w_b \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left[2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_4'' dx \right) - 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta' Y_4' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_5' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_6' dx \right) \right] \right. \\ & + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_4 dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_5'' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_6'' dx \right) \right] \\ & + \left. \left(\int_0^{\ell_i} \eta \xi'' dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} Y_5 dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right] \right. \\ & + \left. \frac{2}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \eta \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) + \frac{4}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \eta \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.46a)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{\ell_i} (-2i\omega_b \xi^2 A'_2 - i\omega_b \xi^2 \mu_2 A_2) dx \right\} \\
& + \bar{A}_2 A_2^2 \frac{b^2}{4} S_k w_b \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_3'' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_3' dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_4'' dx \right) - 2 \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_4' dx \right) \right] \right. \\
& + \left. \left(\int_0^{\ell_i} \xi \xi'' dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} Y_3 dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} Y_4 dx \right) \right] + \frac{3}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \xi \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \right] \\
& + A_1^2 \bar{A}_2 e^{2ipT_2} \frac{b^2}{4} S_k w_b \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_1'' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_1' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_6' dx \right) \right] \right. \\
& + \left. \left(\int_0^{\ell_i} \xi \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_1 dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_6'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \xi \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right. \\
& + \left. \frac{1}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \xi \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) + \frac{2}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \xi \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta \xi' dx \right) \right] \\
& + A_1 \bar{A}_1 A_2 \frac{b^2}{4} S_k w_b \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left[2 \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_2'' dx \right) - 2 \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_2' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_5' dx \right) - \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_6' dx \right) \right] \right. \\
& + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \xi \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_2 dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_5'' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_6'' dx \right) \right] \\
& + \left. \left(\int_0^{\ell_i} \xi \eta'' dx \right) \left[\left(\int_0^{\ell_i} Y_5 dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right] \right. \\
& + \left. \frac{2}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \xi \xi'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) + \frac{4}{w_b} \left(\int_0^{\ell_i} \xi \eta'' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta \xi' dx \right) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.46b}$$

elde edilir. (3.46a) ve (3.46b) denklemleri sırasıyla

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \eta^2 dx \tag{3.47a}$$

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} \xi^2 dx \tag{3.47b}$$

şeklinde tanımlanan λ_1 ve λ_2 'ye bölüldükten sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa çözülebilirlik şartları şöyle yazılır:

$$i\omega_e(2A_1' + \mu_1 A_1) + \alpha_1 \bar{A}_1 A_1^2 + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 e^{-2ipT_2} + \alpha_3 A_1 A_2 \bar{A}_2 = \frac{1}{2} f e^{i\sigma T_2} \quad (3.48a)$$

$$i\omega_b(2A_2' + \mu_2 A_2) + \alpha_4 \bar{A}_2 A_2^2 + \alpha_5 \bar{A}_2 A_1^2 e^{2ipT_2} + \alpha_6 A_1 \bar{A}_1 A_2 = 0 \quad (3.48b)$$

Yukarıdaki denklemler enine ve burulma modlarının kompleks genliklerinin zaman ile değişimini vermektedir. Denklemlerdeki sabit katsayılar mod yapıları cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta' Y_1' dx + 2 \int_0^{\ell_i} \eta' Y_2' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_1 dx + 2 \int_0^{\ell_i} Y_2 dx \right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^3 S_k \left[3 \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right)^2 \right] \right\} \quad (3.49a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left(2 \int_0^{\ell_i} \eta' Y_3' dx + \int_0^{\ell_i} \xi' Y_6' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_3 dx \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta' Y_6' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right] \\ \left. + \sum_{i=1}^3 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right)^2 \right] \right\} \quad (3.49b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left(4 \int_0^{\ell_i} \eta' Y_4' dx + \int_0^{\ell_i} \xi' Y_5' dx + \int_0^{\ell_i} \xi' Y_6' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \left(2 \int_0^{\ell_i} Y_4 dx \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta' Y_5' dx + \int_0^{\ell_i} \eta' Y_6' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_5 dx + \int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right] \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^3 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right)^2 \right] \right\} \quad (3.49c)$$

$$\alpha_4 = \frac{b^2}{4\lambda_2} \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[2 \left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_3' dx + 2 \int_0^{\ell_i} \xi Y_4' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_3 dx + 2 \int_0^{\ell_i} Y_4 dx \right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^3 S_k \left[3 \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right)^2 \right] \right\} \quad (3.49d)$$

$$\alpha_5 = \frac{b^2}{4\lambda_2} \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta Y_6' dx + 2 \int_0^{\ell_i} \xi Y_1' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_6' dx \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_1 dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^3 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right)^2 \right] \right\} \quad (3.49e)$$

$$\alpha_6 = \frac{b^2}{4\lambda_2} \left\{ \sum_{i=1}^3 S_k w_b \left[\left(\int_0^{\ell_i} \xi dx \right) \left(4 \int_0^{\ell_i} \xi Y_2' dx + \int_0^{\ell_i} \eta' Y_5' dx + \int_0^{\ell_i} \eta Y_6' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \left(2 \int_0^{\ell_i} Y_2 dx \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\int_0^{\ell_i} \eta dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \xi Y_3' dx + \int_0^{\ell_i} \xi Y_6' dx \right) + \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} Y_5 dx + \int_0^{\ell_i} Y_6 dx \right) \right] \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^3 S_k \left[\left(\int_0^{\ell_i} \xi'^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell_i} \eta'^2 dx \right) + 2 \left(\int_0^{\ell_i} \eta' \xi' dx \right)^2 \right] \right\} \quad (3.49f)$$

$$f = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} F \eta dx \quad (3.50)$$

Kompleks genliklerden reel genlik ve fazlara geçmek için aşağıdaki polar formlar kullanılabilir:

$$A_1(T_2) = \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{i\beta_1(T_2)} \quad (3.51a)$$

$$A_2(T_2) = \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\beta_2(T_2)} \quad (3.51b)$$

Burada $a_{1,2}$ ve $\beta_{1,2}$ reeldir. (3.51) denklemleri (3.48) denklemlerine yerleştirilir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$i\omega_e a'_1 - \omega_e a_1 \beta'_1 + \frac{1}{2} i\omega_e \mu_1 a_1 + \frac{1}{8} \alpha_1 a_1^3 + \frac{1}{8} \alpha_2 a_1 a_2^2 e^{2i(\beta_2 - \beta_1 - \rho T_2)} + \frac{1}{8} \alpha_3 a_1 a_2^2 = \frac{1}{2} f e^{i(\sigma T_2 - \beta_1)} \quad (3.52a)$$

$$i\omega_b a'_2 - \omega_b a_2 \beta'_2 + \frac{1}{2} i\omega_b \mu_2 a_2 + \frac{1}{8} \alpha_4 a_2^3 + \frac{1}{8} \alpha_5 a_2 a_1^2 e^{2i(\beta_2 - \beta_1 - \rho T_2)} + \frac{1}{8} \alpha_6 a_2 a_1^2 = 0 \quad (3.52b)$$

sonuçlarına ulaşılır.

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

olduğuna göre, denklem (3.52a) reel ve sanal kısımları ayrılırsa, enine titreşimler için

$$a'_1 = \frac{f}{2\omega_e} \sin \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_1 a_2^2 \sin \gamma_1 - \frac{1}{2} \mu_1 a_1 \quad (3.53a)$$

$$\beta'_1 = \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 + \frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_2^2 \cos \gamma_1 + \frac{\alpha_3}{8\omega_e} a_2^2 - \frac{f}{2\omega_e a_1} \cos \gamma_2 \quad (3.53b)$$

yazılabilir. Burada

$$\gamma_1 = 2(\beta_2 - \beta_1 - \rho T_2) \quad (3.54)$$

$$\gamma_2 = (\sigma T_2 - \beta_1) \quad (3.55)$$

olarak tanımlanmıştır. Burulma titreşimleri için ise denklem (3.52b) reel ve sanal kısımlarına ayrıştırılarak

$$a'_2 = \frac{\alpha_5}{8\omega_b} a_2 a_1^2 \sin \gamma_1 - \frac{1}{2} \mu_2 a_2 \quad (3.56a)$$

$$\beta'_2 = \frac{\alpha_6}{8\omega_b} a_1^2 + \frac{\alpha_4}{8\omega_b} a_2^2 + \frac{\alpha_5}{8\omega_b} a_1^2 \cos \gamma_1 \quad (3.56b)$$

yazılabilir. Bundan sonra serbest ve zorlamalı titreşimler ayrı ayrı incelenecektir.

3.2. Serbest Titreşimler

Serbest titreşimlerde sisteme başlangıçta belli bir hareket verilmiş ve sistem daha sonra serbest bırakılmıştır. Zorlama ve sönüm olmadığı varsayılırsa

$$f = 0, \sigma = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0 \quad (3.57)$$

şeklinde seçilir. (3.57) denklemleri (3.53) ve (3.56) denklemlerine yerleştirilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$a'_1 = -\frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_1 a_2^2 \sin \gamma_1 \quad (3.58a)$$

$$\beta'_1 = \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 + \frac{\alpha_3}{8\omega_e} a_2^2 + \frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_2^2 \cos \gamma_1 \quad (3.58b)$$

$$a'_2 = \frac{\alpha_5}{8\omega_b} a_2 a_1^2 \sin \gamma_1 \quad (3.59a)$$

$$\beta'_2 = \frac{\alpha_6}{8\omega_b} a_1^2 + \frac{\alpha_4}{8\omega_b} a_2^2 + \frac{\alpha_5}{8\omega_b} a_1^2 \cos \gamma_1 \quad (3.59b)$$

(3.54) denklemleri kullanılarak, (3.58b) ve (3.59b) denklemlerinden β_1 ve β_2 terimleri elimine edilirse

$$\gamma'_1 = \left(\frac{\alpha_6}{4\omega_b} - \frac{\alpha_1}{4\omega_e} \right) a_1^2 + \left(\frac{\alpha_4}{4\omega_b} - \frac{\alpha_3}{4\omega_e} \right) a_2^2 + \left(\frac{\alpha_5}{4\omega_b} a_1^2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_e} a_2^2 \right) \cos \gamma_1 - 2\rho \quad (3.60)$$

bulunur. Böylece sistem otonom (T_1 'in açık olarak görülmediği) bir hale getirilmiş olur. Bundan sonra, enine ve burulma titreşim modlarının değişik değerlerine göre üç ayrı durum incelenmiştir. İlk iki durumda modlar arasında herhangi bir etkileşim olmadığı kabul edilmiştir. Üçüncü durumda ise enine titreşim tabii modlarından birinin burulma titreşimi tabii modlarından birine çok yakın olduğu kabul edilmiştir (iç rezonans durumu).

3.2.1. Enine Titreşimlerin Baskın Olduğu Durum

Enine modlardan birisi kuvvetli olarak uyarılmıştır ve bu moda yakın bir burulma moduna herhangi bir etkisi olup olmadığı incelenmektedir. Bu durumda $a_1 = \text{sabit}$ ve $a_2 = 0$ olur. Buna göre (3.58b) denklemi

$$\beta_1' = \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 \quad (3.61)$$

şeklini alır. (3.61) denklemi integre edilirse

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 T_2 + \beta_{1c} = \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 \varepsilon^2 t + \beta_{1c} \quad (3.62)$$

olarak bulunur. Burada β_{1c} integrasyon sabitini ifade etmektedir. (3.51) ve (3.62) denklemleri (3.10) ve (3.22) denklemlerine yerleştirilir ve

$$e^{i(\beta_1 + \omega_e t)} + ke = 2 \cos(\beta_1 + \omega_e t)$$

eşitliği kullanılırsa

$$v_1(x, t) = \left\{ a_1 \cos \left[\left(\omega_e + \frac{\alpha_1}{8\omega_e} \varepsilon^2 a_1^2 \right) t + \beta_{1c} \right] \right\} \eta(x) \quad (3.63a)$$

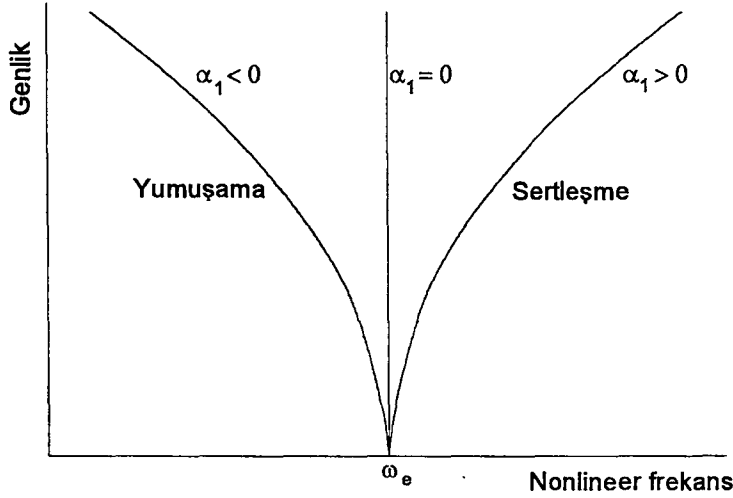
$$v_2(x, t) = \frac{a_1^2}{2} \left\{ Y_1(x) \cos \left[2 \left(\omega_e + \frac{\alpha_1}{8\omega_e} \varepsilon^2 a_1^2 \right) t + 2\beta_{1c} \right] + Y_2(x) \right\} \quad (3.63b)$$

$$\theta_1(x, t) = \theta_2(x, t) = 0 \quad (3.64)$$

elde edilir. (3.63) denklemleri incelendiğinde, sistemin yeni enine tabii frekansının

$$(\omega_e)_{nl} = \omega_e + \frac{\alpha_1}{8\omega_e} \varepsilon^2 a_1^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.65)$$

olduğu görülür. (3.65) denklemini *nonlineer frekans-genlik denklemi* olarak adlandırılır. Nonlineer enine tabii frekansın genliğe bağlı olarak değişimi Şekil 3.1 'de gösterilmiştir.



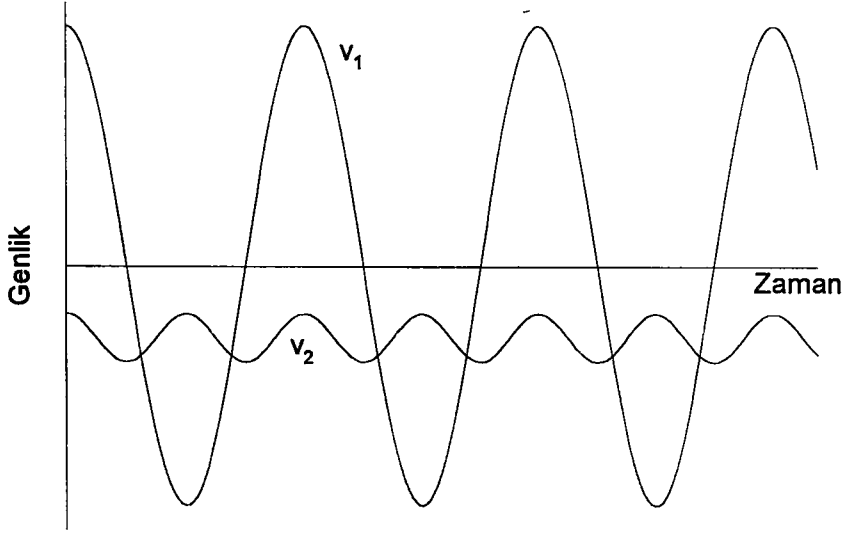
Şekil 3.1. Nonlineer enine tabii frekansın genliğe bağlı olarak değişimi

Nonlineerliğin etkisi α_1 'in değerine göre olmaktadır: α_1 pozitif olduğunda sertleştirici, negatif olduğunda yumuşatıcı etki meydana getirmektedir. α_1 sıfır olduğunda ise, kuadratik ve kübik nonlineerlikler birbirlerini götürdüklerinden dolayı, nonlineerliğin frekansa herhangi bir etkisi olmamaktadır.

(3.63) ve (3.64) denklemleri (3.4) denkleminde yerleştirildiği takdirde, enine titreşim hareketini veren denklem

$$v(x, t) = \varepsilon a_1 \cos[(\omega_e)_{nl} t + \beta_{1c}] \eta(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a_1^2 \{ Y_1(x) \cos 2[(\omega_e)_{nl} t + \beta_{1c}] + Y_2(x) \} + O(\varepsilon^3) \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilir. Enine titreşim hareketinde birinci mertebenin ötesinde üst mertebeden terimlerin olduğu görülmektedir. Ancak sadece enine modlar uyarılmaktadır ve üst mertebelerde dahi herhangi bir burulma hareketi meydana gelmemektedir. Enine titreşim genliğinin zamana göre değişimi Şekil 3.2 'de şematik olarak görülmektedir.



Şekil 3.2. Enine titreşimlerin baskın olduğu durumda genliklerin zamana göre değişimi

3.2.2. Burulma Titreşimlerinin Baskın Olduğu Durum

Burulma modlarından birisi kuvvetli olarak uyarılmıştır ve bu moda yakın bir enine titreşim moduna daha üst mertebeden herhangi bir katkısı olup olmadığı incelenmektedir. Bu durumda $a_1 = 0$ ve $a_2 = \text{sabit}$ olur. Buna göre (3.59b) denklemini

$$\beta'_2 = \frac{\alpha_4}{8\omega_b} a_2^2 \quad (3.67)$$

şeklini alır. (3.67) denklemini integre edilirse

$$\beta_2 = \frac{\alpha_4}{8\omega_b} a_2^2 T_2 + \beta_{2c} = \frac{\alpha_4}{8\omega_b} a_2^2 \varepsilon^2 t + \beta_{2c} \quad (3.68)$$

bulunmuş olur. Burada β_{2c} integrasyon sabitini ifade etmektedir. (3.51) ve (3.68) denklemleri (3.10) ve (3.22) denklemlerine yerleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$v_1(x, t) = 0 \quad (3.69a)$$

$$v_2(x, t) = \frac{a_2^2}{2} \left\{ Y_3(x) \cos \left[2 \left(\omega_b + \frac{\alpha_4}{8\omega_b} \varepsilon^2 a_2^2 \right) t + 2\beta_{2c} \right] + Y_4(x) \right\} \quad (3.69b)$$

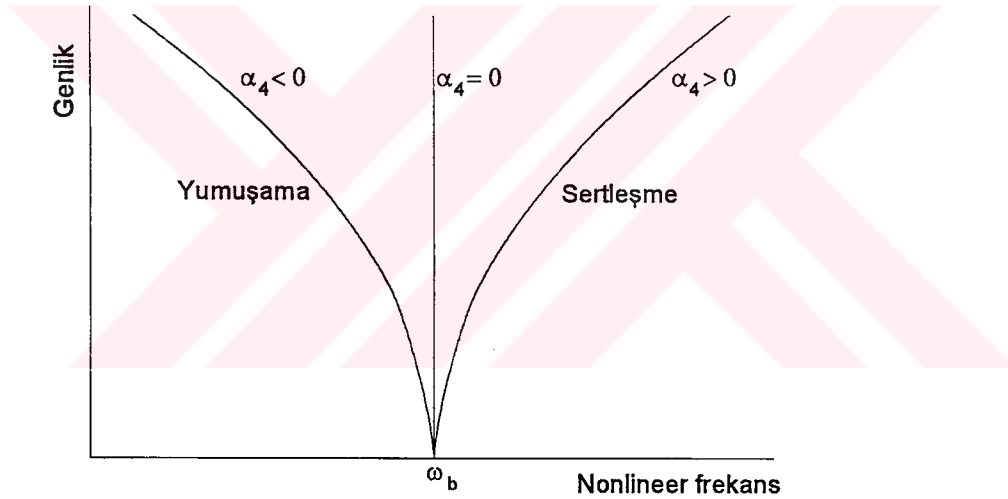
$$\theta_1(x, t) = \left\{ a_2 \cos \left[\left(\omega_b + \frac{\alpha_4}{8\omega_b} \varepsilon^2 a_2^2 \right) t + \beta_{2c} \right] \right\} \xi(x) \quad (3.70a)$$

$$\theta_2(x, t) = 0 \quad (3.70b)$$

elde edilir. (3.69) ve (3.70) denklemleri incelendiğinde, nonlinear burulma tabii frekansının (nonlinear frekans-genlik denkleminin) şu olduğu görülür:

$$(\omega_b)_{nl} = \omega_b + \frac{\alpha_4}{8\omega_b} \varepsilon^2 a_2^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.71)$$

Nonlinear burulma tabii frekansının genliğe bağlı olarak değişimi Şekil 3.3 'te gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Nonlinear burulma tabii frekansının genliğe bağlı olarak değişimi

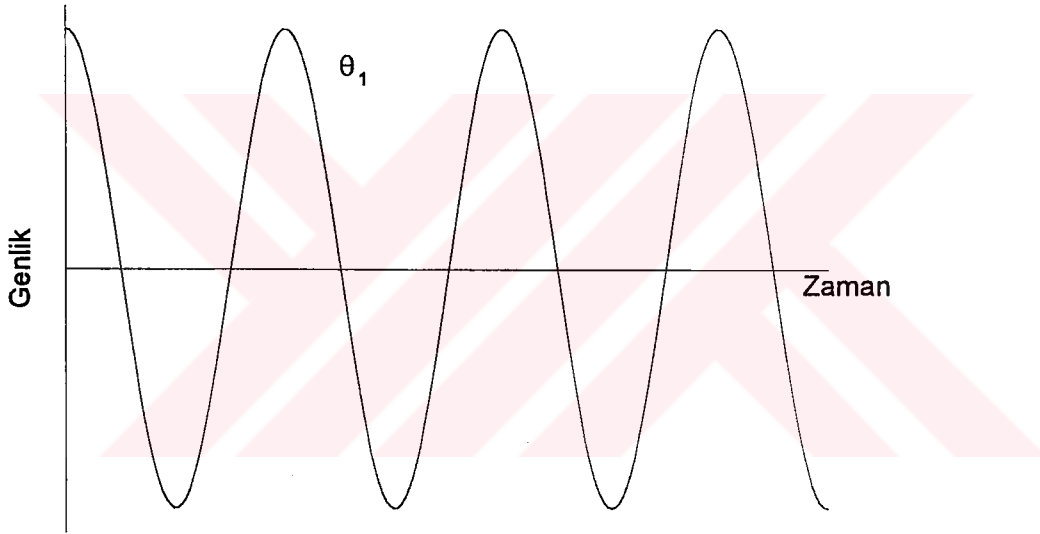
Nonlinearliğin etkisi bu kez α_4 'ün değerine göre olmaktadır: α_4 pozitif olduğunda sertleştirici, negatif olduğunda yumuşatıcı etki meydana getirmektedir. α_4 sıfır olduğunda ise nonlinearliğin frekansa herhangi bir etkisi olmamaktadır.

(3.69) ve (3.70) denklemleri (3.4) denklemlerine yerleştirildiği takdirde, hareket denklemleri

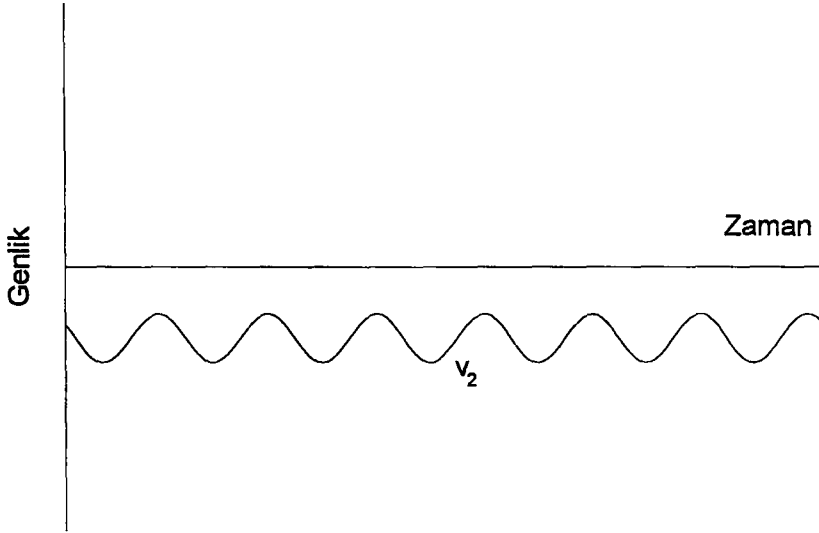
$$v(x, t) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 a_2^2 \left\{ Y_3(x) \cos 2[(\omega_b)_{nl} t + \beta_{2c}] + Y_4(x) \right\} + O(\varepsilon^3) \quad (3.72)$$

$$\theta(x, t) = \varepsilon a_2 \cos [(\omega_b)_{nl} t + \beta_{2c}] \xi(x) + O(\varepsilon^3) \quad (3.73)$$

şeklinde elde edilir. Burulma modları uyarıldığında, üst mertebede enine titreşim hareketi ortaya çıkmaktadır. Diğer bir deyişle, burulma modları uyarıldığında enine modlar da uyarılmaktadır. Ancak birinci mertebenin ötesinde üst mertebelerde herhangi bir burulma terimi görülmektedir. Burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum için, burulma titreşim genliğinin zamana göre değişimi Şekil 3.4a 'da, üst mertebede ortaya çıkan enine titreşimin genliğinin zamana göre değişimi ise Şekil 3.4b 'de şematik olarak görülmektedir.



Şekil 3.4a. Burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum için, burulma titreşim genliğinin zamana göre değişimi



Şekil 3.4b. Burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum için, üst mertebede ortaya çıkan enine titreşimin genliğinin zamana göre değişimi

3.2.3. Enine Titreşim Tabii Modlarından Birinin Burulma Titreşimi Tabii Modlarından Birine Çok Yakın Olduğu Durum

İki mod arasında kuvvetli bir etkileşim meydana gelmektedir ve etkileşimin kuvveti ile her iki mod arasında meydana gelen enerji alışverişi incelenmektedir. Bu durumda $a_1 \neq 0$ ve $a_2 \neq 0$ olur. Böylece (3.58a), (3.59a) ve (3.60) denklemleri ile ifade edilen genel duruma dönülür; (3.58a) ve (3.59a) denklemlerinden γ_1 elimine edilerek

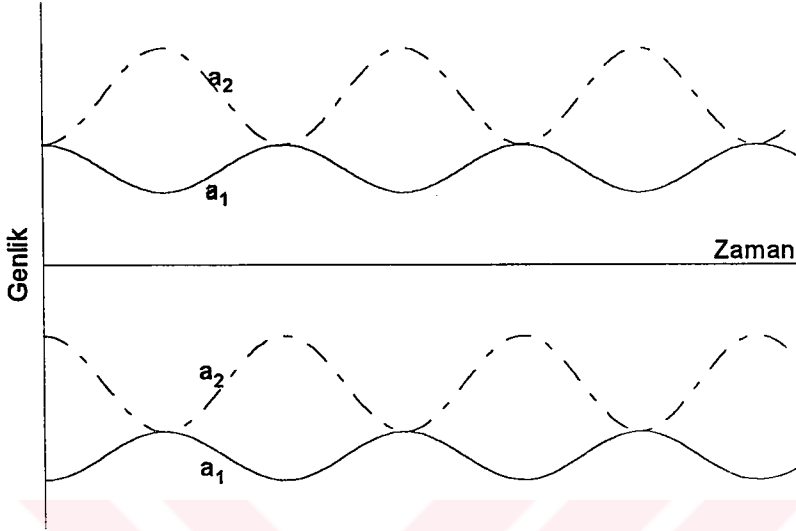
$$a_1 a_1' = -\frac{\omega_b \alpha_2}{\omega_e \alpha_5} a_2 a_2' \quad (3.74)$$

bulunur. Bu denklem integre edilirse

$$a_1^2 + \frac{\omega_b \alpha_2}{\omega_e \alpha_5} a_2^2 = E \quad (3.75)$$

elde edilir. Burada E sistemin başlangıçtaki enerjisi ile orantılı bir integrasyon sabitidir. Eğer α_2 ve α_5 aynı işaretli ve E pozitif belirli olursa, denklem (3.75) 'e göre a_1 ve a_2 her zaman sınırlı kalır. Ancak α_2 ve α_5 farklı işaretli olurlarsa, $a_1^2 - \left| \frac{\omega_b \alpha_2}{\omega_e \alpha_5} \right| a_2^2$ sınırlı kalmış olsa bile, a_1 ve a_2 zamanla çok büyüyebilir. Bu yüzden, E 'nin pozitif belirli olabilmesi için α_2 ve α_5 'in aynı

işaretili oldukları kabul edilmiştir. Buna göre, sönümlenme olmadığı takdirde, sistemin enerjisi enine ve burulma titreşim modları arasında sürekli olarak değişim gösterecektir. Şekil 3.5 'te bu durum şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.5. Birbirine yakın enine ve burulma modlarının serbest titreşim genliklerinin zamanla değişimi

a_1 ve a_2 'nin düzgün rejim çözümlerini analiz etmek için, (3.58a), (3.59a) ve (3.60) denklemlerinde $a_1' = a_2' = \gamma_1' = 0$ olarak kabul edilmelidir. Bu taktirde düzgün rejim çözümleri

$$\sin \gamma_1 = 0 \quad \text{veya} \quad \gamma_1 = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.76)$$

$$\left(\frac{\alpha_6}{\omega_b} - \frac{\alpha_1}{\omega_e} \right) a_1^2 + \left(\frac{\alpha_4}{\omega_b} - \frac{\alpha_3}{\omega_e} \right) a_2^2 + \left(\frac{\alpha_5}{\omega_b} a_1^2 - \frac{\alpha_2}{\omega_e} a_2^2 \right) \cos n\pi - 8\rho = 0 \quad (3.77)$$

şeklinde olur. Böylece, belli ρ , n ve a_1 değerleri için (3.77) denklemi, periyodik ve tek bir harekete karşılık gelen reel bir a_2 değerine sahip olabilir. Diğer bir deyişle, belli bir enerji seviyesi ile a_1 , a_2 , γ_1 ve ρ 'nun sabit değerleri için periyodik tek bir hareket meydana gelir. Ancak bu periyodik hareket kararsızdır ve en küçük bir değişiklik hareketin aperiodyk olmasına neden olur. Dolayısıyla farklı bir enerji seviyesindeki farklı değerler için farklı bir hareket elde edilecektir.

3.3. Zorlamalı ve Sönümlü Titreşimler

Zorlamalı ve sönümlü titreşim durumunda sistem belli bir zorlama kuvveti tarafından sürekli olarak uyarılmaktadır. Bir dış kaynak tarafından yapılan bu zorlama dikkate alındığında

$$f \neq 0, \sigma \neq 0, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0 \quad (3.78)$$

olur. Bu durumda, (3.54) ve (3.55) denklemleri (3.53) ve (3.56) denklemlerine yerleştirilerek bu denklemlerden β_1 ve β_2 terimleri elimine edilirse, sistem otonom hale getirilmiş olur ve aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$a_1' = \frac{f}{2\omega_e} \sin \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_1 a_2^2 \sin \gamma_1 - \frac{1}{2} \mu_1 a_1 \quad (3.79a)$$

$$a_2' = \frac{\alpha_5}{8\omega_b} a_2 a_1^2 \sin \gamma_1 - \frac{1}{2} \mu_2 a_2 \quad (3.79b)$$

$$\gamma_1' = \left(\frac{\alpha_6}{4\omega_b} - \frac{\alpha_1}{4\omega_e} \right) a_1^2 + \left(\frac{\alpha_4}{4\omega_b} - \frac{\alpha_3}{4\omega_e} \right) a_2^2 + \left(\frac{\alpha_5}{4\omega_b} a_1^2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_e} a_2^2 \right) \cos \gamma_1 + \frac{f}{\omega_e a_1} \cos \gamma_2 - 2\rho \quad (3.79c)$$

$$\gamma_2' = \sigma - \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 - \frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_2^2 \cos \gamma_1 - \frac{\alpha_3}{8\omega_e} a_2^2 + \frac{f}{2\omega_e a_1} \cos \gamma_2 \quad (3.79d)$$

Serbest titreşimlerde olduğu gibi burada da iç rezonansın olduğu ve olmadığı durumların ayrı ayrı incelenmesi gereklidir.

3.3.1. İç Rezonansın Olmadığı Durum

Bu durumda herhangi bir enine titreşim modu ile burulma modu arasında etkileşim mevcut değildir ve bizim problemimizde dış kuvvetlerin sadece enine titreşimleri uyardıkları kabul edildiği için düzgün rejim durumunda herhangi bir burulma hareketi meydana gelmez ($a_2 = 0$ olur). Modlar arası etkileşim olmadığından dolayı γ_1 terimi de ortadan kalkar. Bu taktirde (3.79) denklemleri aşağıdaki forma indirgenir:

$$a_1' = \frac{f}{2\omega_e} \sin \gamma_2 - \frac{1}{2} \mu_1 a_1 \quad (3.80a)$$

$$\gamma_2' = \sigma - \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 + \frac{f}{2\omega_e a_1} \cos \gamma_2 \quad (3.80b)$$

(3.80) denklemlerinin çözümünü inceleyebilmek için, önce tekil noktaların bulunması ve daha sonra bunların komşuluğundaki hareketin tahlil edilmesi gereklidir. Tekil bir noktada genlik ve faz değişmediği için, sistemin tepkisi düzgün rejim hareketi olarak adlandırılabilir. Tekil noktaların komşuluğundaki yörüngelerin yapısı, düzgün rejim hareketindeki küçük bir perturbasyonun zamanla kaybolacağını mı, yoksa büyüyeceğini mi gösterir; yani düzgün rejim hareketinin kararlılığını ortaya çıkarır.

Düzgün rejim hareketleri $a_1' = \gamma_2' = 0$ olduğu taktirde meydana gelir ki bu da (3.80) denklemlerinin tekil noktalarına karşılık gelir. Bu durumda aşağıdaki çözümlere ulaşılır:

$$\frac{1}{2} \mu_1 a_1 = \frac{f}{2\omega_e} \sin \gamma_2 \quad (3.81a)$$

$$\sigma a_1 - \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^3 = -\frac{f}{2\omega_e} \cos \gamma_2 \quad (3.81b)$$

Yukarıdaki denklemlerin kareleri alınarak eşitliklerin her iki tarafı toplanırsa

$$\frac{1}{4} \mu_1^2 a_1^2 + \left(\sigma a_1 - \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^3 \right)^2 = \frac{f^2}{4\omega_e^2} \quad (3.82)$$

sonucu bulunur. (3.82) denklemini, tepkinin genliğini (a_1), ayar parametresinin (σ) -dolayısıyla zorlama frekansının- ve zorlama genliğinin (f) bir fonksiyonu olarak veren kapalı bir denklemdir. Bu denklem *frekans-tepki denklemini* olarak adlandırılır.

(3.5), (3.51a) ve (3.55) denklemleri (3.10a) ve (3.22a) denklemlerine yerleştirilirse

$$v_1 = a_1 \cos(\Omega t - \gamma_2) \eta(x) \quad (3.83a)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} a_1^2 \left\{ Y_1(x) \cos[2(\Omega t - \gamma_2)] + Y_2(x) \right\} \quad (3.83b)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler de (3.4a) 'da yerlerine konulursa, düzgün rejim çözümü

$$v = \epsilon a_1 \cos(\Omega t - \gamma_2) \eta(x) + \frac{1}{2} \epsilon^2 a_1^2 \left\{ Y_1(x) \cos[2(\Omega t - \gamma_2)] + Y_2(x) \right\} + O(\epsilon^3) \quad (3.84)$$

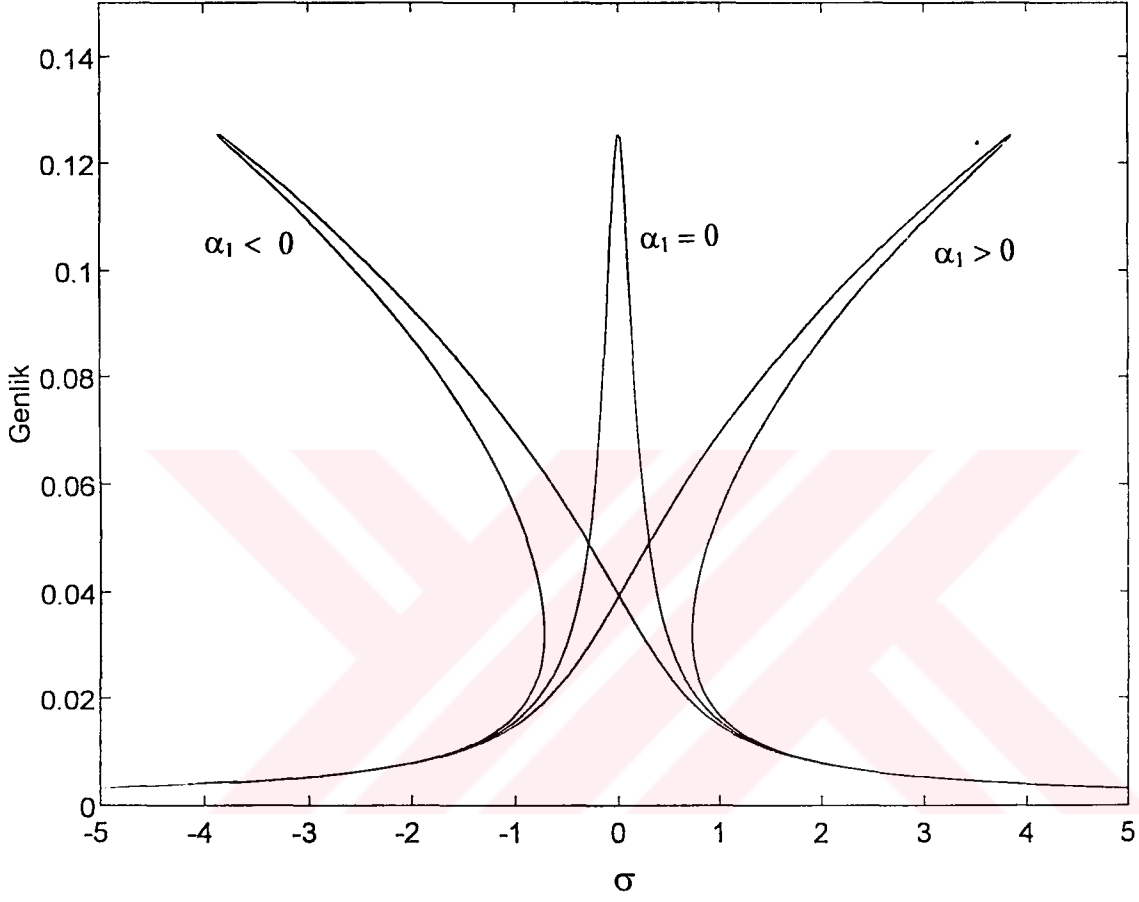
şeklinde bulunmuş olur. Burada a_1 ve γ_2 birer sabit olduğuna göre, düzgün rejim tepkisinin frekansı zorlamanın frekansı ile tamamen aynı olmakta ancak tepki ile zorlama arasında $-\gamma_2$ kadar bir faz farkı olmaktadır.

Belli μ_1 ve f değerleri için, a_1 σ 'nın bir fonksiyonu olarak çizilirse, buna *frekans-tepki eğrisi* adı verilir. Bu eğri üzerindeki her nokta, farklı bir durum düzlemindeki tekil bir noktaya karşılık gelir; parametrelerin her kombinasyonu için bir durum düzlemi mevcuttur. Böyle bir eğri çizilebilmek için, σ 'yı a_1 cinsinden ifade edersek

$$\sigma = \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{f^2}{a_1^2 \omega_e^2} - \mu_1^2 \right)} \quad (3.85)$$

elde edilir.

Şekil 3.6 'da lineer ve nonlinear tepki eğrilerinin karşılaştırması yapılmıştır. a_1 'in alabileceği en büyük değer (3.85) denkleminde kökün içini sıfırlayan değer olacaktır ($a_{1\max} = f/\mu_1 \omega_e$) ve dolayısıyla α_1 'in değerinden bağımsızdır. Lineer durumda ($\alpha_1 = 0$) tepki eğrisi düz iken, sertleştirici nonlinearlik durumunda ($\alpha_1 > 0$) sağa yatık, yumuşatıcı nonlinearlik durumunda ise ($\alpha_1 < 0$) ise sola yatık hale gelmektedir. Her iki nonlinear durumda da, çok-değerli bölgeler meydana gelmektedir.



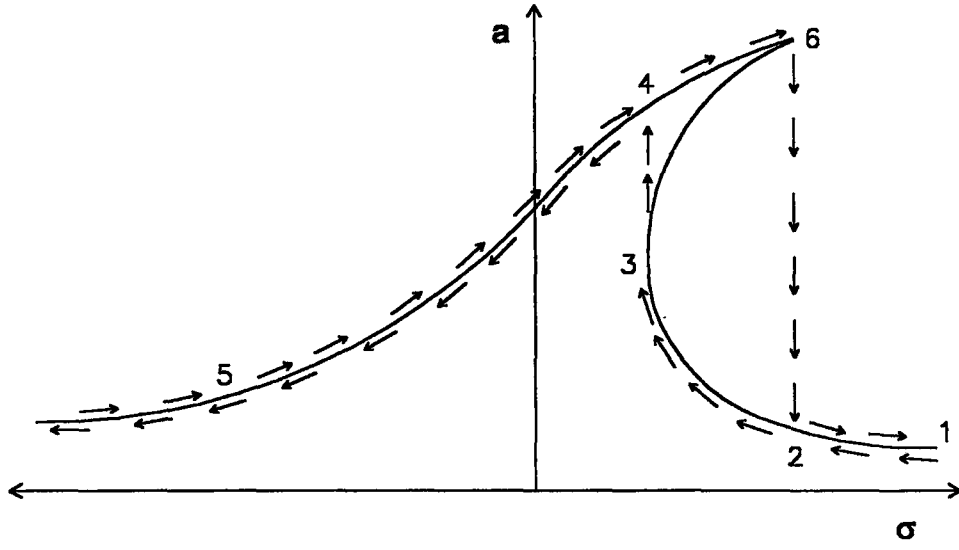
Şekil 3.6. Nonlineerliğin frekans-tepki eğrisine etkisi

Nonlineerlik nedeniyle tepki eğrilerinde meydana gelen çok-değerlilik fiziksel açıdan büyük bir öneme sahiptir çünkü bunun sonucu olarak sıçrama hadisesi meydana gelmektedir. Bunu açıklamak için, zorlama genliğinin sabit tutulduğu zorlama frekansının (yani, σ) lineer tabii frekans etrafında yukarı ve aşağı yavaşça değiştirildiği ve harmonik tepkinin genliğinin izlendiği bir deney düşünülebilir. Deneye Şekil 3.7a 'daki eğrinin üzerindeki 1 numaralı noktaya karşılık gelen frekans ile başlanılsın. Frekans düşürüldükçe, σ azalır ve genlik (a_1) yavaşça artarak 2 numaralı noktadan geçip 3 numaralı noktaya ulaşır. σ daha da azaldığında 3 numaralı noktadan 4 numaralı noktaya bir sıçrama olur. Buna bağlı olarak genlikte ani bir artış ve fazda (γ_2) bir kayma meydana gelir. σ 'nın azalmaya devam etmesiyle birlikte genlik azalmaya başlar. Eğer deneye 5 numaralı noktadan başlanırsa ve σ arttırılırsa, genlik 4 numaralı noktadan geçip 6 numaralı noktaya ulaşınca kadar artmaya devam eder. σ daha da arttırılırsa, 6 numaralı noktadan 2 numaralı noktaya bir sıçrama olur. Buna bağlı olarak genlikte ani bir azalma ve fazda bir kayma meydana gelir. σ 'nın artmaya devam etmesiyle birlikte genlik yavaşça azalır. Görüldüğü gibi, 6 numaralı noktaya karşılık gelen maksimum genliğe ancak daha düşük bir frekanstan başlayarak ulaşılabilir. Tepki eğrisinin 3 ve 6 numaralı noktalarının arasındaki kısım kararsız kısımdır ve bu yüzden deneysel olarak buradan geçmek mümkün değildir.

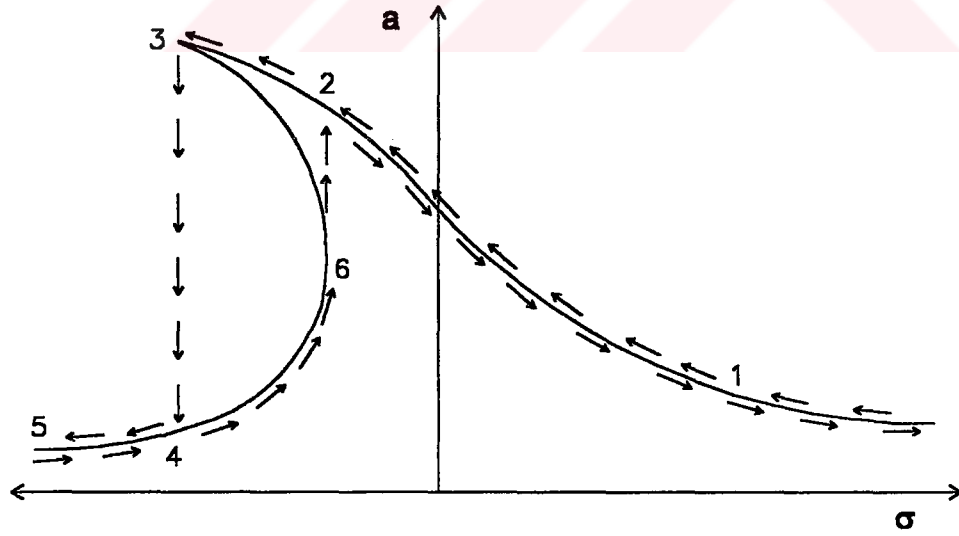
Yumuşatıcı nonlineerliğin olduğu durumda deneye Şekil 3.7b 'deki 1 numaralı noktadan başlanırsa ve σ yavaşça azaltılırsa, genlik 3 numaralı noktaya kadar artar ve bu noktadan 4 numaralı noktaya bir sıçrama meydana gelir. Öte yandan, eğer deneye 5 numaralı noktadan başlanırsa ve σ yavaşça arttırılırsa, 6 numaralı noktadan 2 numaralı noktaya bir sıçrama olur. Bu durumda yine 3 ve 6 numaralı noktaların arasındaki kısım kararsızdır ve fiziksel olarak ulaşılması mümkün değildir. Görüldüğü gibi, sıçrama hadisesi hem sertleştirici hem de yumuşatıcı nonlineerlik durumunda meydana gelmektedir.

İki kararlı düzgün rejim çözümü bulunduğu zaman, sistemin gerçek tepkisini bunlardan hangisinin temsil ettiğini başlangıç şartları belirlemektedir. Bu nedenle, lineer sistemlerin aksine, nonlineer bir sistemin düzgün rejim çözümü başlangıç şartlarına bağlı olabilir.

Bu sıçrama hadisesi (3.81b) denkleminde işaret edilen nonlineer faz-genlik etkileşiminin bir neticesidir.

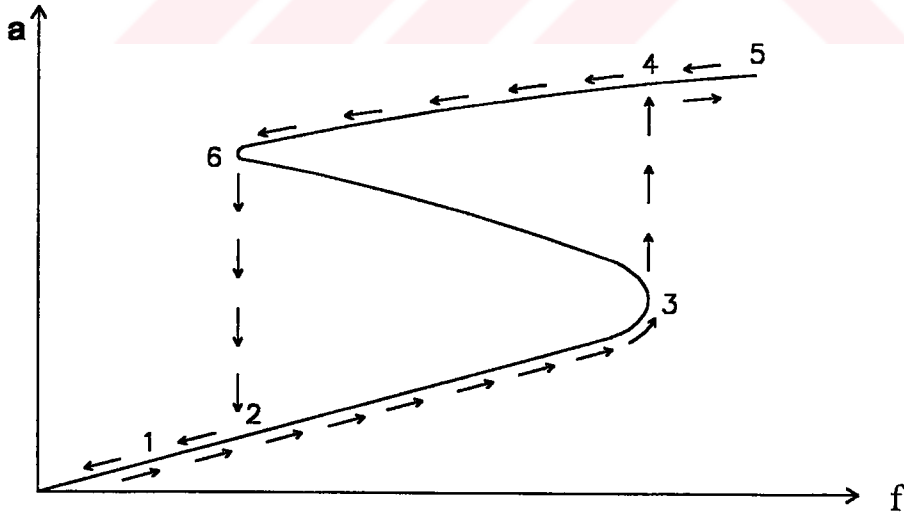


Şekil 3.7a. Sertleştirici nonlineerlik durumunda sıçrama hadisesi



Şekil 3.7b. Yumuşatıcı nonlineerlik durumunda sıçrama hadisesi

Eğer zorlama frekansı (Ω) sabit tutulup zorlama genliği (f) yavaşça değiştirilerek başka bir deney yapılırsa, benzer bir sıçrama hadisesi burada da görülür. Deneye Şekil 3.8 'deki 1 numaralı noktadan başlandığını kabul edelim. Zorlama genliği arttıkça, tepki genliği 2 numaralı noktadan geçerek 3 numaralı noktaya kadar artar. Zorlama genliği daha da arttırılırsa, 3 numaralı noktadan 4 numaralı noktaya bir sıçrama olur. Buna bağlı olarak tepki genliğinde ani bir artış ve fazda (γ_2) bir kayma meydana gelir. Bundan sonra zorlama genliğinin artışına bağlı olarak tepki genliği de yavaşça artmaya devam eder. Eğer deneye 5 numaralı noktadan başlanır ve zorlama genliği azaltılırsa, 6 numaralı noktaya ulaşınca kadar tepki genliğinde yavaş bir azalma görülür. Zorlama genliği daha da azaltılırsa, 6 numaralı noktadan 2 numaralı noktaya bir sıçrama olur ve buna bağlı olarak tepki genliğinde ani bir azalma görülür. Bu noktadan sonra zorlama genliğinin azalmasına bağlı olarak tepki genliği de yavaşça azalmaya devam eder.



Şekil 3.8. Zorlama frekansı - tepki frekansı eğrisinde sıçrama hadisesi

3.3.2. İç Rezonansın Olduğu Durum

Enine titreşim modlarından bir tanesi ile buna yakın bir burulma modu arasında etkileşim olduğu taktirde iç rezonans meydana gelmektedir. Sadece enine modlar uyarıldığı halde iç rezonans sayesinde enine moddan burulma moduna enerji aktarımı olabilmektedir. Bu taktirde (3.79) denklemleri ile ifade edilen en genel durum geçerli olmaktadır. Bölüm 4 'te a_1 , a_2 genlik ve γ_1 , γ_2 faz açısı fonksiyonlarının eğrileri nümerik integrasyon yoluyla çizilmiştir.

Düzgün rejim durumunda $a'_1 = a'_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$ olur. Bu durumda problem aşağıdaki denklemlerin çözümü haline gelir:

$$\frac{f}{2\omega_e} \sin \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_1 a_2^2 \sin \gamma_1 - \frac{1}{2} \mu_1 a_1 = 0 \quad (3.86a)$$

$$\frac{\alpha_5}{8\omega_b} a_2 a_1^2 \sin \gamma_1 - \frac{1}{2} \mu_2 a_2 = 0 \quad (3.86b)$$

$$\left(\frac{\alpha_6}{4\omega_b} - \frac{\alpha_1}{4\omega_e} \right) a_1^2 + \left(\frac{\alpha_4}{4\omega_b} - \frac{\alpha_3}{4\omega_e} \right) a_2^2 + \left(\frac{\alpha_5}{4\omega_b} a_1^2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_e} a_2^2 \right) \cos \gamma_1 + \frac{f}{\omega_e a_1} \cos \gamma_2 - 2\rho = 0 \quad (3.86c)$$

$$\sigma - \frac{\alpha_1}{8\omega_e} a_1^2 - \frac{\alpha_2}{8\omega_e} a_2^2 \cos \gamma_1 - \frac{\alpha_3}{8\omega_e} a_2^2 + \frac{f}{2\omega_e a_1} \cos \gamma_2 = 0 \quad (3.86d)$$

(3.86c) ve (3.86d) denklemlerinden $\cos \gamma_2$ terimi elimine edilirse

$$\alpha_6 a_1^2 + \alpha_4 a_2^2 - 8\omega_b (\sigma + \rho) = -\alpha_5 a_1^2 \cos \gamma_1 \quad (3.87)$$

elde edilir. (3.86b) denklemi ise

$$4\omega_b \mu_2 = \alpha_5 a_1^2 \sin \gamma_1 \quad (3.88)$$

şeklinde yazılabilir. (3.87) ve (3.88) denklemlerinin kareleri alınarak eşitliklerin her iki tarafı toplanırsa

$$16\omega_b^2\mu_2^2 + [\alpha_6 a_1^2 + \alpha_4 a_2^2 - 8\omega_b(\sigma + \rho)]^2 = \alpha_5^2 a_1^4 \quad (3.89)$$

sonucu bulunur. Bu denklem etkileşimli titreşimler için bire-bir iç rezonans durumundaki frekans-tepki denklemdir. σ ayar parametresi genlikler cinsinden ifade edilecek olursa

$$\sigma = \frac{\alpha_4}{8\omega_b} a_2^2 + \frac{\alpha_6}{8\omega_b} a_1^2 \mp \frac{a_1^2}{8\omega_b} \sqrt{\alpha_5^2 - \left(\frac{4\mu_2\omega_b}{a_1^2}\right)^2} - \rho \quad (3.90)$$

elde edilir.

Böylece analitik çözümler sona ermiş oldu; bundan sonra sayısal örneklere geçilecektir.



4. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, daha önceki bölümde elde edilen analiz sonuçları iki asma köprüye uygulanmıştır. Birinci köprü (Vincent-Thomas Köprüsü) kısa açıklıklı köprülere, ikinci köprü (Golden Gate Köprüsü) ise uzun açıklıklı köprülere örnek teşkil etmektedir. Her iki köprünün teknik özellikleri Ek.1 'de verilmiştir.

Köprülerin boyutsuz parametreleri (2.16) denklemlerine göre hesaplanarak Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Vincent-Thomas köprüsünün boyutsuz parametreleri

Kenar açıklık boyu (l_1)	0.844167
Orta açıklık boyu (l_2)	2.500
Kablo gerilmesinin yatay bileşeni (H_w)	$4.48994 \cdot 10^{-9}$
Köprü birim boyunun zati ağırlığı (w_b)	0.640
Elastisite modülü ve kesit alanı ile ilgili parametre (S_k)	$3.78401 \cdot 10^{-7}$
Kenar açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s1})	$6.69796 \cdot 10^{-10}$
Orta açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s2})	$6.48362 \cdot 10^{-10}$
Köprünün kütle kutupsal atalet momenti (I_m)	$12.64645 \cdot 10^{-4}$
Kenar açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s1})	$9.58240 \cdot 10^{-10}$
Orta açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s2})	$9.27540 \cdot 10^{-10}$
Tabliye kirişinin burulma rijitliği ($G_s J_s$)	$1.19575 \cdot 10^{-7}$
Köprü genişliği (b)	2.77451

Vincent-Thomas köprüsü için $\omega_{\text{boyutlu}} = 4321.57 \omega_{\text{boyutsuz}}$ olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 4.2. Golden Gate köprüsünün boyutsuz parametreleri

Kenar açıklık boyu (ℓ_1)	0.9375
Orta açıklık boyu (ℓ_2)	3.500
Kablo gerilmesinin yatay bileşeni (H_w)	$8.89125 \cdot 10^{-9}$
Kenar açıklıkta köprü birim boyunun zati ağırlığı (w_{b1})	0.51845
Orta açıklıkta köprü birim boyunun zati ağırlığı (w_{b2})	0.50948
Elastisite modülü ve kesit alanı ile ilgili parametre (S_k)	$6.25388 \cdot 10^{-7}$
Kenar açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s1})	$1.87543 \cdot 10^{-10}$
Orta açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s2})	$2.89352 \cdot 10^{-10}$
Kenar açıklık kütle kutupsal atalet momenti (I_{m1})	$8.42075 \cdot 10^{-4}$
Orta açıklık kütle kutupsal atalet momenti (I_{m2})	$8.47048 \cdot 10^{-4}$
Kenar açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s1})	$2.41675 \cdot 10^{-10}$
Orta açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s2})	$3.72533 \cdot 10^{-10}$
Kenar açıklık tabliye kirişinin burulma rijitliği ($G_s J_{s1}$)	$4.10671 \cdot 10^{-8}$
Orta açıklık tabliye kirişinin burulma rijitliği ($G_s J_{s2}$)	$4.08260 \cdot 10^{-8}$
Kenar açıklıkta köprü genişliği (b_1)	2.58456
Orta açıklıkta köprü genişliği (b_2)	2.57696

Golden Gate köprüsü 'nde kenar açıklık için $\omega_{\text{boyutlu}} = 2412.69 \omega_{\text{boyutsuz}}$

ve orta açıklık için $\omega_{\text{boyutlu}} = 2433.86 \omega_{\text{boyutsuz}}$ olarak hesaplanmıştır.

4.1. Tabii Frekansların Bulunması

Kısım 3.1.1 'de ε mertebesindeki (lineer) denklemin çözümünde, asimetric modlarda kenar açıklıklar için $\varphi = n\pi$, orta açıklık için $\varphi = 2n\pi$ olduğu görülmüştü. (3.16a) denklemi burada yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa asimetric enine modların tabii frekansları,

$$\text{kenar açıklıklar için} \quad \omega_e = \frac{n\pi}{\ell_1} \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 I_{s1}}{\ell_1^2} + 2H_w} \quad (4.1a)$$

orta açıklık için

$$\omega_e = \frac{2n\pi}{\ell_2} \sqrt{\frac{4n^2\pi^2 I_{s2}}{\ell_2^2} + 2H_w} \quad (4.1b)$$

şeklinde bulunur. Her iki denklemde de n mod sayısını ifade etmektedir.

Benzer şekilde asimetrik burulma modlarının tabii frekansları,

kenar açıklıklar için

$$\omega_b = \frac{m\pi}{\ell_1} \sqrt{\frac{m^2\pi^2\Gamma_{s1}}{\ell_1^2} + \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w\right)} \quad (4.2a)$$

orta açıklık için

$$\omega_b = \frac{2m\pi}{\ell_2} \sqrt{\frac{4m^2\pi^2\Gamma_{s2}}{\ell_2^2} + \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w\right)} \quad (4.2b)$$

şeklinde bulunur. Her iki denklemde de m mod sayısını ifade etmektedir.

Görüldüğü gibi asimetrik modların tabii frekanslarının hesaplanması basit bir denklemle doğrudan yapılabilmektedir. Ancak simetrik modların tabii frekanslarını veren denklemler oldukça karmaşık kapalı denklemlerdir. Bunlar, (3.15) ve (3.17) denklemlerinin (3.12a) ve (3.12b) denklemlerine yerleştirilmesi ile elde edilmişlerdir. Simetrik enine modların tabii frekanslarını veren kapalı denklem şudur:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\ell_i w_b^2}{\omega_e^2 (\varphi_{ei}^2 + \psi_{ei}^2)} \left(\frac{\varphi_{ei}^2 + \psi_{ei}^2}{2} - \frac{\psi_{ei}^2}{\varphi_{ei}} \tan \frac{\varphi_{ei}}{2} - \frac{\varphi_{ei}^2}{\psi_{ei}} \tanh \frac{\psi_{ei}}{2} \right) - \frac{1}{S_k} = 0 \quad (4.3)$$

Simetrik burulma modlarının tabii frekanslarını veren kapalı denklem ise şudur:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{b_i^2 \ell_i w_b^2}{\omega_b^2 (\varphi_{bi}^2 + \psi_{bi}^2)} \left(\frac{\varphi_{bi}^2 + \psi_{bi}^2}{2} - \frac{\psi_{bi}^2}{\varphi_{bi}} \tan \frac{\varphi_{bi}}{2} - \frac{\varphi_{bi}^2}{\psi_{bi}} \tanh \frac{\psi_{bi}}{2} \right) - \frac{1}{S_k} = 0 \quad (4.4)$$

Bu denklemlerin kökleri Mathematica paket bilgisayar programı kullanılarak deneme-yanılma yöntemi ile elde edilmiştir. Buna göre bulunan simetrik modların tabii frekansları Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.6 'da verilmiştir.

Vincent-Thomas Köprüsü

(4.1) ve (4.2) denklemleri kullanılarak hesaplanan Vincent-Thomas köprüsünün asimetric enine ve burulma modlarının tabii frekansları Çizelge 4.3 'te verilmiştir.

Çizelge 4.3. Vincent-Thomas köprüsünün asimetric enine ve burulma modlarının tabii frekansları

Mod No	Enine frekanslar		Burulma frekansları	
	(boyutsuz)	(rad/s)	(boyutsuz)	(rad/s)
1	$0.287 \cdot 10^{-3}$	1.24262 (orta açıklık)	$0.949 \cdot 10^{-3}$	4.10486 (orta açıklık)
2	$0.503 \cdot 10^{-3}$	2.17438 (kenar açıklık)	$1.442 \cdot 10^{-3}$	6.23425 (kenar açıklık)
3	$0.801 \cdot 10^{-3}$	3.46168 (orta açıklık)	$2.012 \cdot 10^{-3}$	8.70097 (orta açıklık)
4	$1.599 \cdot 10^{-3}$	6.91025 (kenar açıklık)	$3.244 \cdot 10^{-3}$	14.0258 (kenar açıklık)
5	$1.615 \cdot 10^{-3}$	6.98126 (orta açıklık)	$3.283 \cdot 10^{-3}$	14.1948 (orta açıklık)
6	$2.746 \cdot 10^{-3}$	11.8677 (orta açıklık)	$4.828 \cdot 10^{-3}$	20.8745 (orta açıklık)
7	$3.397 \cdot 10^{-3}$	14.6830 (kenar açıklık)	$5.655 \cdot 10^{-3}$	24.4408 (kenar açıklık)
8	$4.197 \cdot 10^{-3}$	18.1369 (orta açıklık)	$6.693 \cdot 10^{-3}$	28.9242 (orta açıklık)

Vincent-Thomas köprüsünün simetric enine ve burulma modlarının tabii frekansları (4.3) ve (4.4) denklemlerinden Mathematica paket bilgisayar programı kullanılarak elde edilmiştir. Bulunan değerler Çizelge 4.4 'te verilmiştir.

Çizelge 4.4. Vincent-Thomas köprüsünün simetric enine ve burulma modlarının tabii frekansları

Mod No	Enine frekanslar		Burulma frekansları	
	(boyutsuz)	(rad/s)	(boyutsuz)	(rad/s)
1	$0.319 \cdot 10^{-3}$	1.38026	$0.693 \cdot 10^{-3}$	2.99698
2	$0.508 \cdot 10^{-3}$	2.19408	$1.457 \cdot 10^{-3}$	6.29746
3	$0.667 \cdot 10^{-3}$	2.88472	$1.537 \cdot 10^{-3}$	6.64385
4	$1.172 \cdot 10^{-3}$	5.06400	$2.620 \cdot 10^{-3}$	11.3204
5	$2.140 \cdot 10^{-3}$	9.24878	$4.019 \cdot 10^{-3}$	17.3669
6	$3.397 \cdot 10^{-3}$	14.6794	$5.654 \cdot 10^{-3}$	24.4351
7	$3.429 \cdot 10^{-3}$	14.8183	$5.717 \cdot 10^{-3}$	24.7067
8	$5.038 \cdot 10^{-3}$	21.7734	$7.747 \cdot 10^{-3}$	33.4790

Golden Gate Köprüsü

(4.1) ve (4.2) denklemleri kullanılarak hesaplanan Golden Gate köprüsünün asimetrik enine ve burulma modlarının tabii frekansları Çizelge 4.5 'te verilmiştir.

Çizelge 4.5. Golden Gate köprüsünün asimetrik enine ve burulma modlarının tabii frekansları

Mod No	Enine frekanslar		Burulma frekansları	
	(boyutsuz)	(rad/s)	(boyutsuz)	(rad/s)
1	$0.246 \cdot 10^{-3}$	0.59773 (orta açıklık)	$0.480 \cdot 10^{-3}$	1.16870 (orta açıklık)
2	$0.473 \cdot 10^{-3}$	1.14020 (kenar açıklık)	$0.908 \cdot 10^{-3}$	2.19158 (kenar açıklık)
3	$0.527 \cdot 10^{-3}$	1.28169 (orta açıklık)	$0.984 \cdot 10^{-3}$	2.39552 (orta açıklık)
4	$0.871 \cdot 10^{-3}$	2.12066 (orta açıklık)	$1.534 \cdot 10^{-3}$	3.73403 (orta açıklık)
5	$1.085 \cdot 10^{-3}$	2.61767 (kenar açıklık)	$1.915 \cdot 10^{-3}$	4.61962 (kenar açıklık)
6	$1.299 \cdot 10^{-3}$	3.16051 (orta açıklık)	$2.149 \cdot 10^{-3}$	5.23014 (orta açıklık)
7	$1.820 \cdot 10^{-3}$	4.42866 (orta açıklık)	$2.844 \cdot 10^{-3}$	6.92084 (orta açıklık)
8	$1.927 \cdot 10^{-3}$	4.64890 (kenar açıklık)	$3.102 \cdot 10^{-3}$	7.48332 (kenar açıklık)

Golden Gate köprüsünün simetrik enine ve burulma modlarının tabii frekansları (4.3) ve (4.4) denklemlerinden Mathematica paket bilgisayar programı kullanılarak elde edilmiştir. Bulunan değerler Çizelge 4.6 'da verilmiştir.

Çizelge 4.6. Golden Gate köprüsünün simetrik enine ve burulma modlarının tabii frekansları

Mod No	Enine frekanslar		Burulma frekansları	
	(boyutsuz)	(rad/s)	(boyutsuz)	(rad/s)
1	$0.317 \cdot 10^{-3}$	0.77168	$0.543 \cdot 10^{-3}$	1.32177
2	$0.400 \cdot 10^{-3}$	0.97451	$0.753 \cdot 10^{-3}$	1.83293
3	$0.658 \cdot 10^{-3}$	1.60092	$1.071 \cdot 10^{-3}$	2.60591
4	$0.738 \cdot 10^{-3}$	1.79726	$1.266 \cdot 10^{-3}$	3.08007
5	$1.077 \cdot 10^{-3}$	2.62177	$1.835 \cdot 10^{-3}$	4.46645
6	$1.548 \cdot 10^{-3}$	3.76753	$2.486 \cdot 10^{-3}$	6.05179
7	$1.914 \cdot 10^{-3}$	4.65889	$3.079 \cdot 10^{-3}$	7.49322
8	$2.118 \cdot 10^{-3}$	5.15475	$3.225 \cdot 10^{-3}$	7.84965

4.2. Nonlineer Frekans - Genlik İlişkisi

Nonlineer frekans ile genlik arasındaki ilişki (3.65) ve (3.71) denklemlerinde verilmiştir. Bu denklemlerin nümerik integrasyonu yapılarak, Şekil 4.1 ve 4.2 'de Vincent-Thomas köprüsünde sırasıyla enine ve burulma titreşimlerinin baskın olduğu durumlar için frekans-genlik spektrumları çizilmiştir. Şekil 4.3 ve 4.4 'de ise Golden Gate köprüsü için sırasıyla enine ve burulma titreşimlerinin baskın olduğu durumlar için frekans-genlik spektrumları çizilmiştir.

Frekans-genlik etkileşimi nonlinear sistemleri lineer sistemlerden ayıran temel özelliklerden bir tanesidir. Lineer analizde herhangi bir modun frekansı her zaman sabit kalırken nonlinear analizde tabii frekansların genliğe göre değiştiği ortaya çıkmaktadır.

4.1 - 4.4 numaralı şekiller incelendiğinde, ilk modlarda nonlinearliğin frekans üzerindeki etkisinin çok küçük olduğu görülmektedir. Bunun nedeni, kuadratik ve kübik nonlinearliklerin birbirlerini götürmeleri nedeniyle ilk modlarda (Bölüm 3 'te geçen) çözülebilirlik şartlarındaki α_1 ve α_4 parametrelerinin değerlerinin sıfıra çok yakın çıkmasıdır. Daha sonraki modlarda bu parametrelerin değerlerinin büyümesine bağlı olarak nonlinearliğin sertleştirici etki yapmaya başladığı görülmektedir. Sertleştirici nonlinearlik, genliklerin artmasıyla birlikte frekansların yükselmesine neden olmaktadır.

Eğrilerin çizilmesine geçilmeden önce çözülebilirlik şartlarını veren (3.48) denklemlerindeki α katsayıları hesaplanmıştır. Bunun için (3.20) ve (3.21) denklemleri (3.49) denklemlerine yerleştirilerek asimetrik modlar için şu sonuçlar bulunmuştur:

$$\alpha_1 = \frac{3 S_k n^4 \pi^4}{\ell_1 B_1^2 + 0.5 \ell_2 B_2^2} \left(\frac{B_1^2}{\ell_1} + \frac{2B_2^2}{\ell_2} \right)^2 \quad (4.5a)$$

$$\alpha_2 = \frac{S_k m^2 n^2 \pi^4}{\ell_1 B_1^2 + 0.5 \ell_2 B_2^2} \left(\frac{B_1^2}{\ell_1} + \frac{2B_2^2}{\ell_2} \right) \left(\frac{C_1^2}{\ell_1} + \frac{2C_2^2}{\ell_2} \right) \quad (4.5b)$$

$$\alpha_3 = \frac{2 S_k m^2 n^2 \pi^4}{\ell_1 B_1^2 + 0.5 \ell_2 B_2^2} \left(\frac{B_1^2}{\ell_1} + \frac{2B_2^2}{\ell_2} \right) \left(\frac{C_1^2}{\ell_1} + \frac{2C_2^2}{\ell_2} \right) \quad (4.5c)$$

$$\alpha_4 = \frac{3b^2 S_k m^4 \pi^4}{4(\ell_1 C_1^2 + 0.5\ell_2 C_2^2)} \left(\frac{C_1^2}{\ell_1} + \frac{2C_2^2}{\ell_2} \right)^2 \quad (4.5d)$$

$$\alpha_5 = \frac{3b^2 S_k m^2 n^2 \pi^4}{4(\ell_1 C_1^2 + 0.5\ell_2 C_2^2)} \left(\frac{B_1^2}{\ell_1} + \frac{2B_2^2}{\ell_2} \right) \left(\frac{C_1^2}{\ell_1} + \frac{2C_2^2}{\ell_2} \right) \quad (4.5e)$$

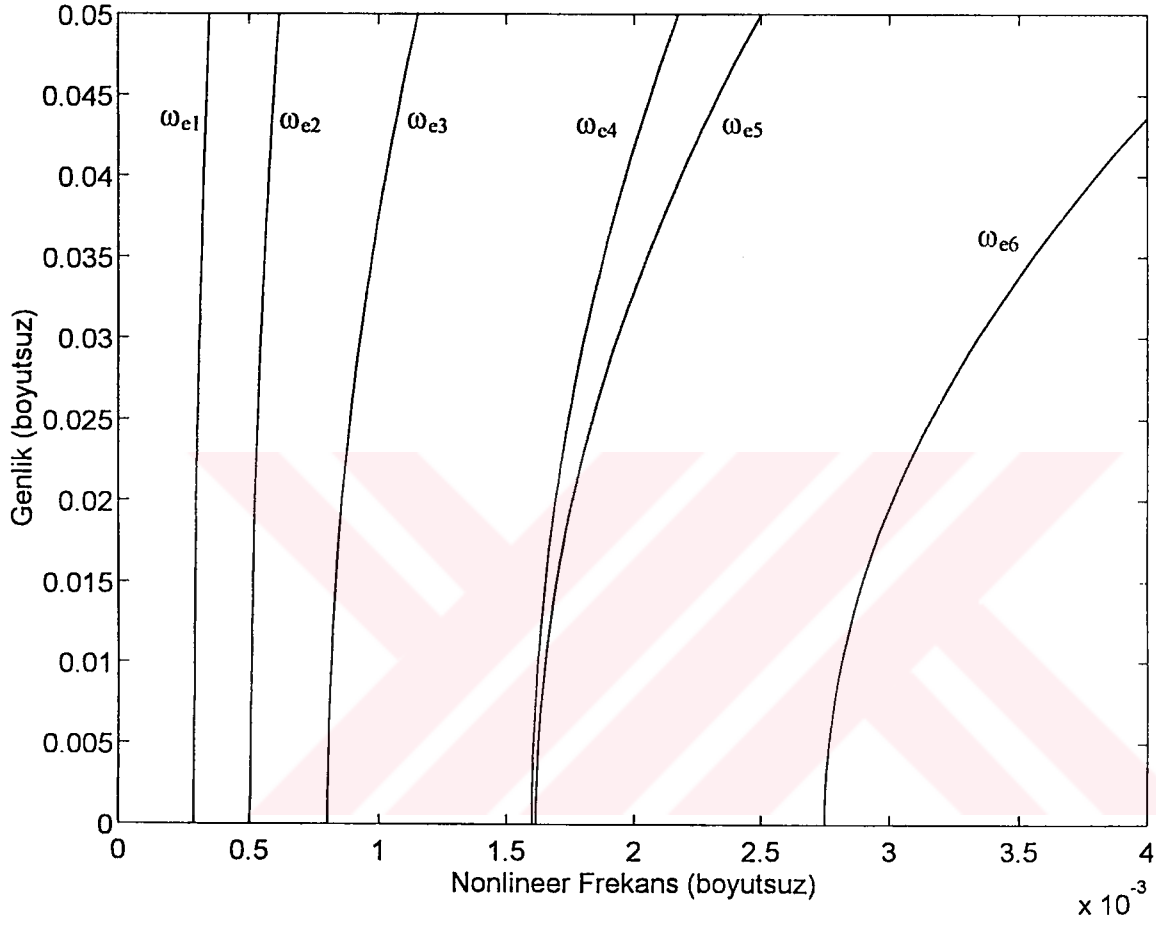
$$\alpha_6 = \frac{3b^2 S_k m^2 n^2 \pi^4}{2(\ell_1 C_1^2 + 0.5\ell_2 C_2^2)} \left(\frac{B_1^2}{\ell_1} + \frac{2B_2^2}{\ell_2} \right) \left(\frac{C_1^2}{\ell_1} + \frac{2C_2^2}{\ell_2} \right) \quad (4.5f)$$

Çizelge 4.1 ve 4.2 'de verilen değerler (4.5a) ve (4.5d) denklemlerine yerleştirilirse, her iki köprü için α_1 ve α_4 parametrelerinin değerleri bulunur. İlk 6 mod için hesaplanan değerler Çizelge 4.7 'de verilmiştir.

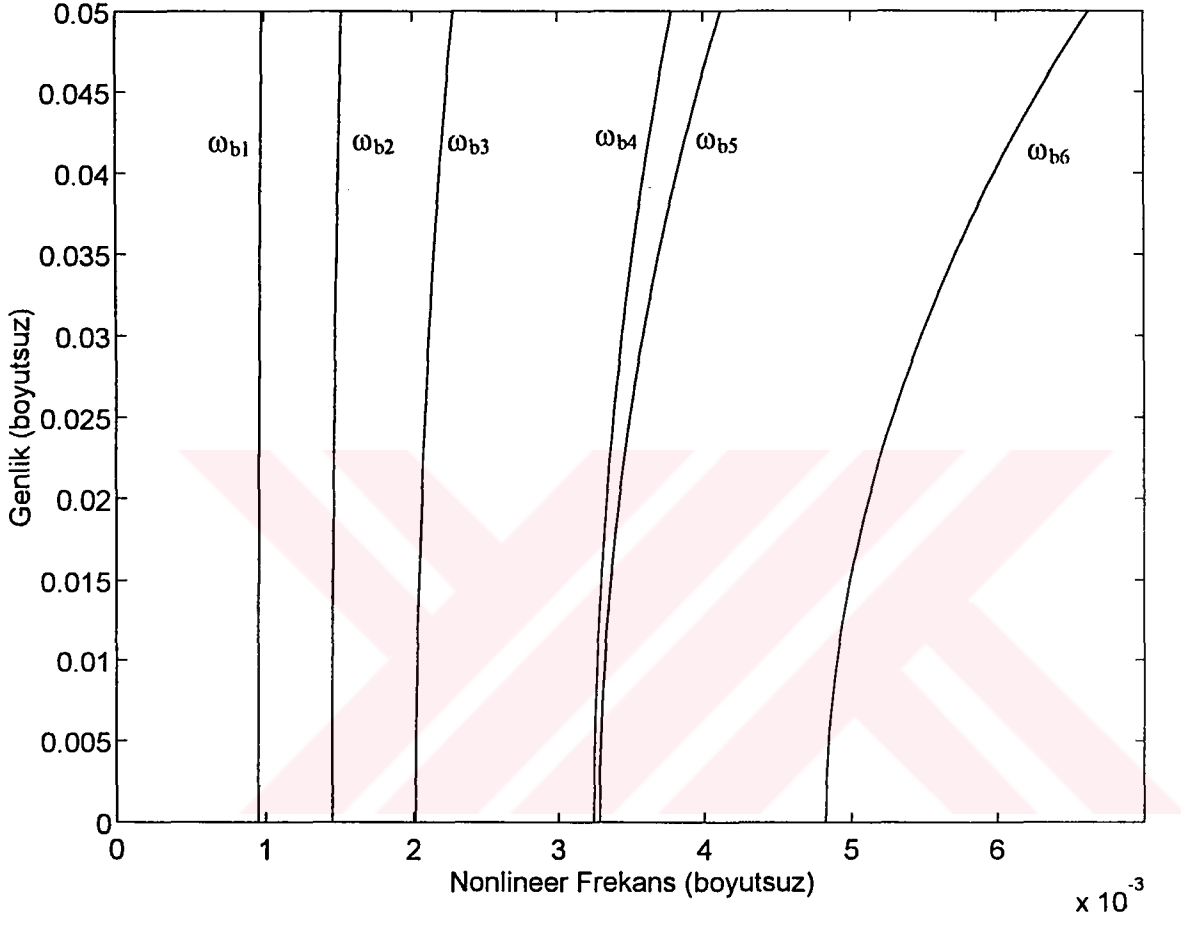
Çizelge 4.7. Vincent-Thomas ve Golden Gate köprüleri için α_1 ve α_4 parametrelerinin değerleri

Mod sayısı	Vincent-Thomas köprüsü		Golden Gate köprüsü	
	α_1	α_4	α_1	α_4
1	$0.056 \cdot 10^{-3}$	$0.109 \cdot 10^{-3}$	$0.034 \cdot 10^{-3}$	$0.057 \cdot 10^{-3}$
2	$0.184 \cdot 10^{-3}$	$0.354 \cdot 10^{-3}$	$0.222 \cdot 10^{-3}$	$0.369 \cdot 10^{-3}$
3	$0.906 \cdot 10^{-3}$	$1.743 \cdot 10^{-3}$	$0.546 \cdot 10^{-3}$	$0.908 \cdot 10^{-3}$
4	$2.941 \cdot 10^{-3}$	$5.661 \cdot 10^{-3}$	$2.762 \cdot 10^{-3}$	$4.596 \cdot 10^{-3}$
5	$4.586 \cdot 10^{-3}$	$8.825 \cdot 10^{-3}$	$3.549 \cdot 10^{-3}$	$5.906 \cdot 10^{-3}$
6	$14.49 \cdot 10^{-3}$	$27.89 \cdot 10^{-3}$	$8.730 \cdot 10^{-3}$	$14.52 \cdot 10^{-3}$

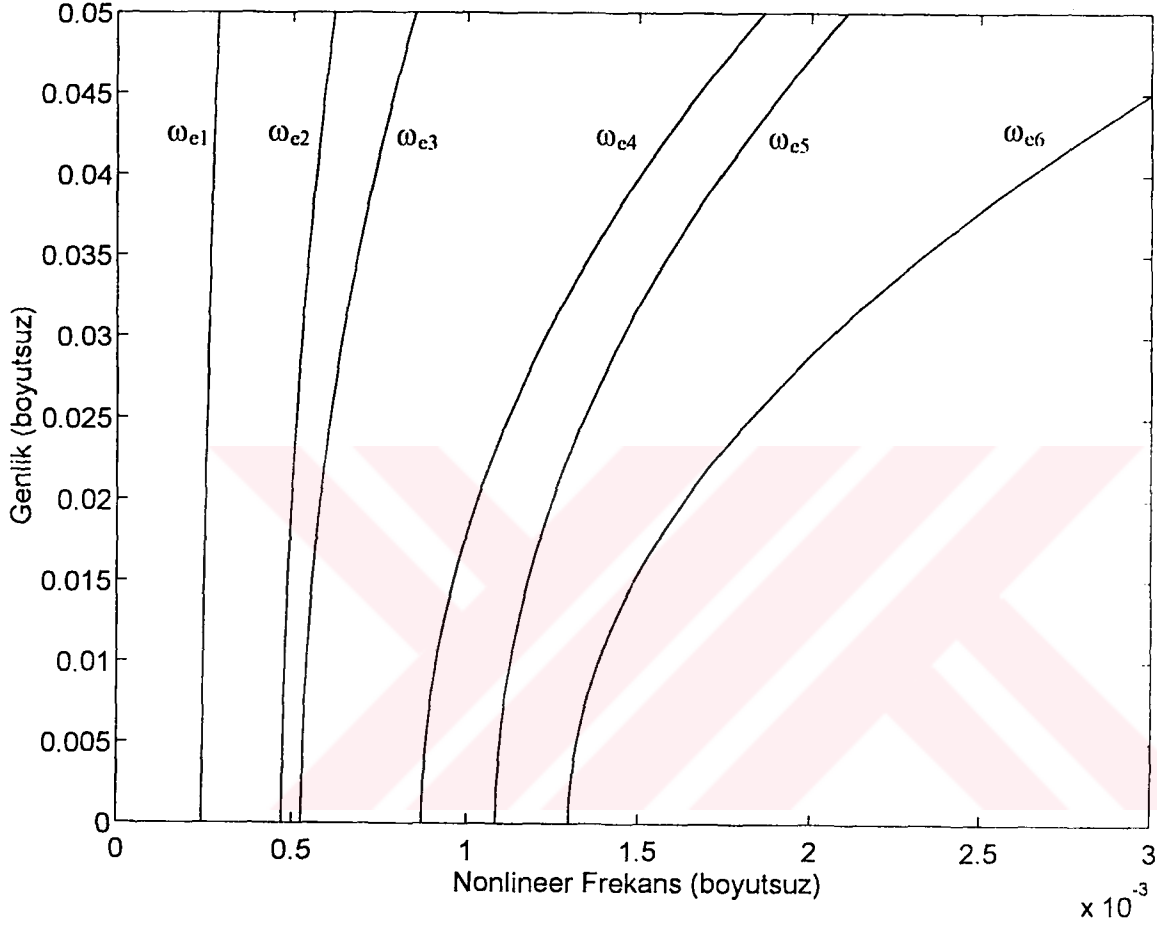
Bulunan α_1 ve α_4 değerleri (3.65) ve (3.71) denklemlerine yerleştirilerek 4.1 - 4.4 numaralı şekiller çizilmiştir.



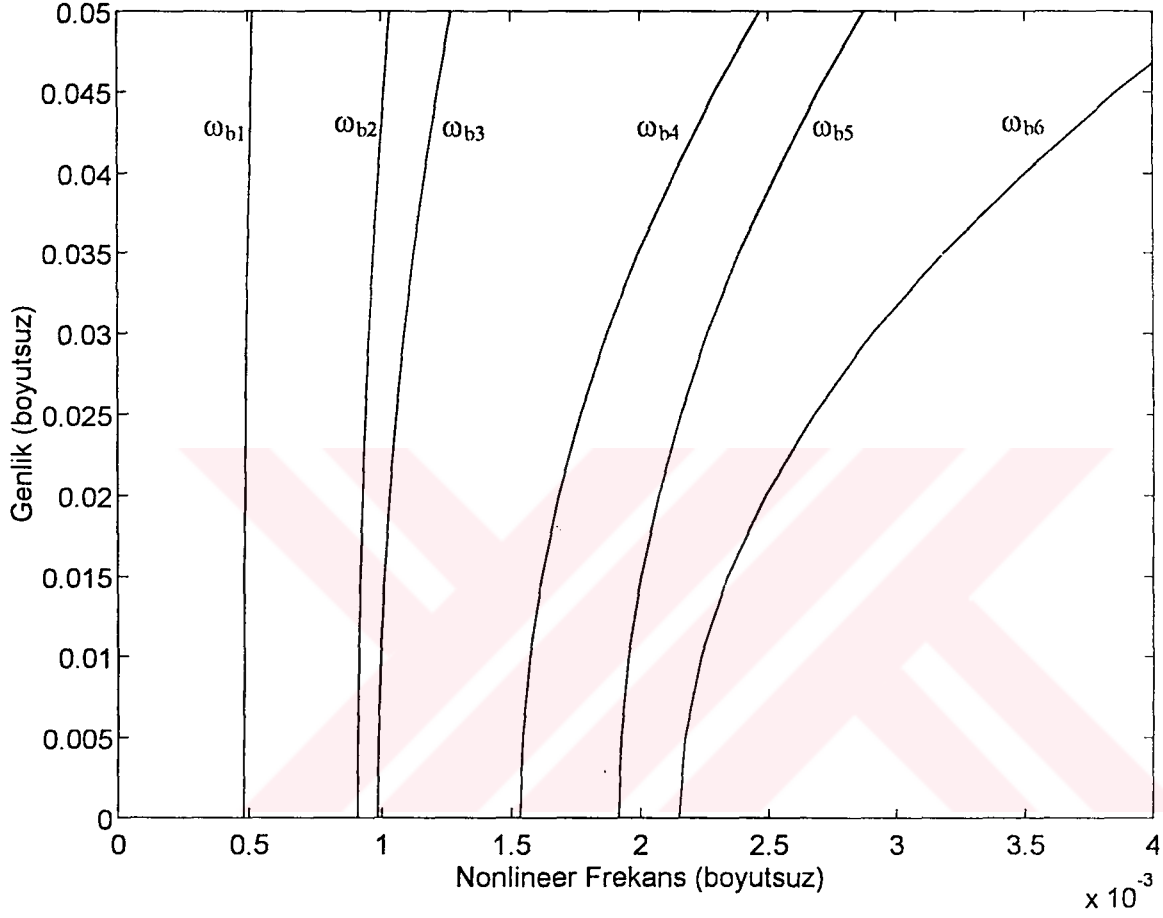
Şekil 4.1. Vincent-Thomas köprüsünde enine titreşimlerin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları



Şekil 4.2. Vincent-Thomas köprüsünde burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları



Şekil 4.3. Golden Gate köprüsünde enine titreşimlerin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları



Şekil 4.4. Golden Gate köprüsünde burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum için frekans-genlik spektrumları

4.3. Serbest Titreşimlerde Genliklerin ve Fazın Zamanla Değişimi

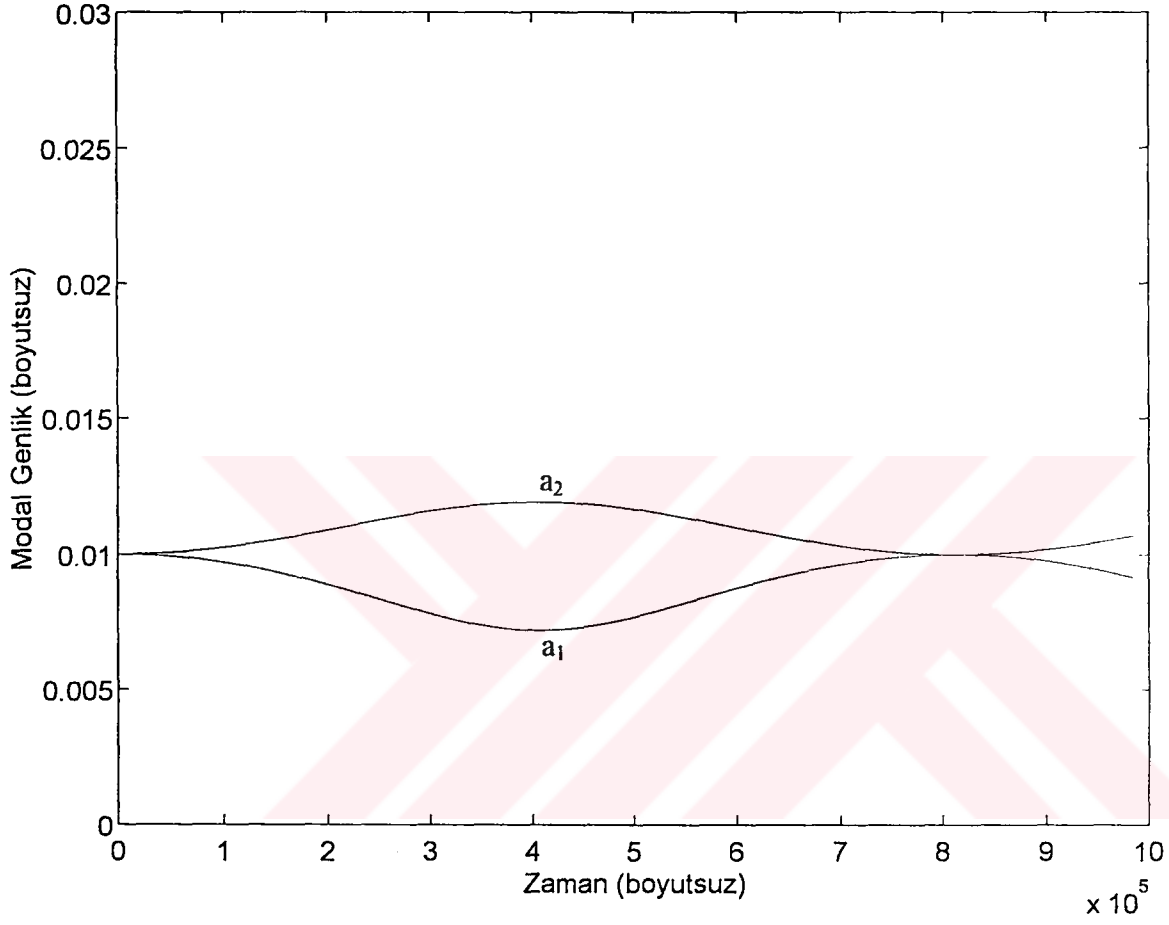
Enine titreşimlerin baskın olduğu durumda $a'_1 = 0$ ve burulma titreşimlerinin baskın olduğu durumda $a'_2 = 0$ olduğu için bu durumlarla ilgili nümerik integrasyonlara gerek görülmemiştir. Bu yüzden sadece birbirine yakın enine ve burulma modlarının etkileşimli hareketleri incelenmiştir. Bu durumda enine titreşim genliği (a_1), burulma titreşim genliği (a_2) ve enine frekans ile burulma frekansı arasındaki faz açısının (γ_1) zamanla değişimi (3.58a), (3.59a) ve (3.60) denklemlerinin nümerik integrasyonu ile elde edilir.

Birbirlerine en yakın modlar oldukları için Golden Gate köprüsüne ait ikinci asimetrik enine titreşim modu (ASE-2; $\omega_e \approx 1.14$ rad/s) ile birinci asimetrik burulma titreşim modunun (ASB-1; $\omega_b \approx 1.17$ rad/s) etkileşimli hareketi incelenmek için seçilmiştir. Çizelge 4.2 'deki değerler bu durum için (4.5) denklemlerine yerleştirilirse, Çizelge 4.8 'de görülen α değerleri bulunur:

Çizelge 4.8. Golden Gate köprüsü, (ASE-2) ve (ASB-1) için çözülebilirlik şartlarındaki katsayılar

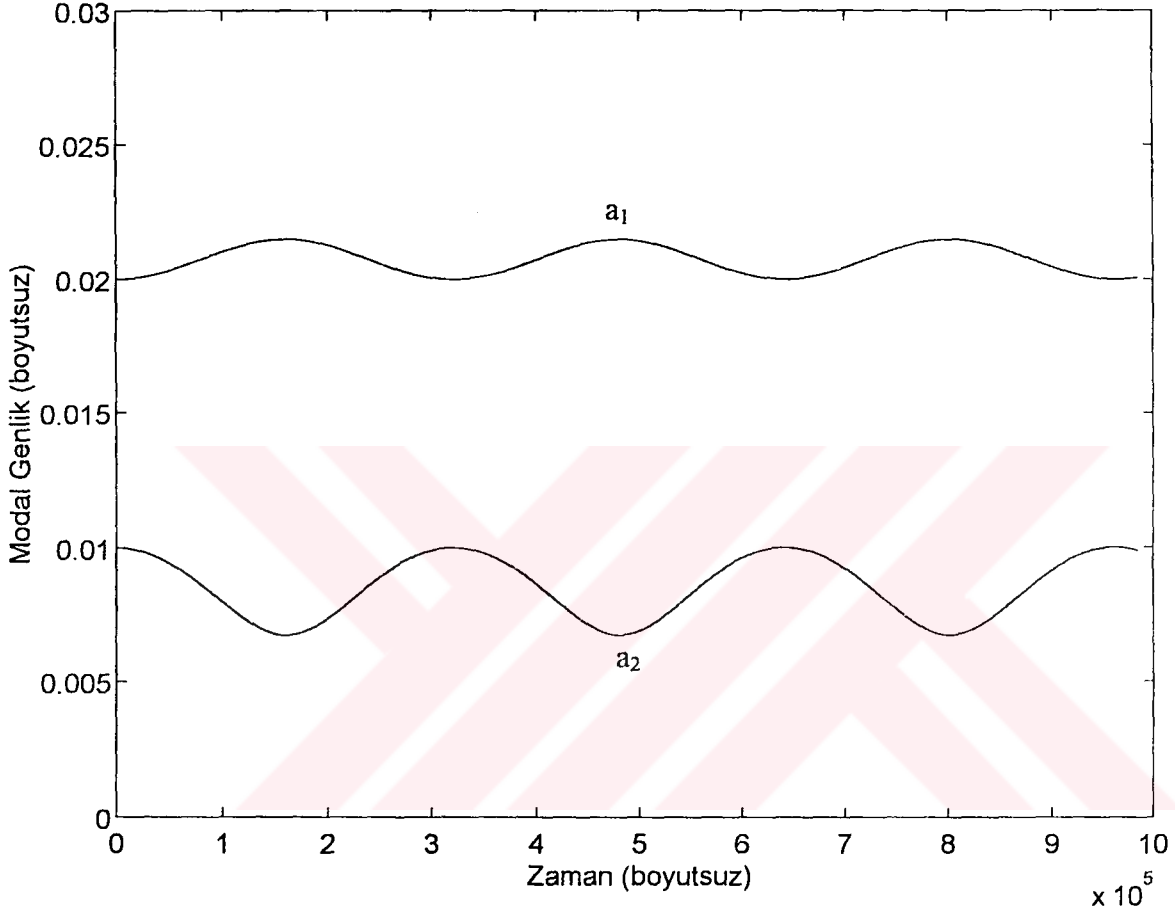
α_1	$2.21798 \cdot 10^{-4}$
α_2	$3.96069 \cdot 10^{-5}$
α_3	$7.92139 \cdot 10^{-5}$
α_4	$5.67466 \cdot 10^{-5}$
α_5	$3.53090 \cdot 10^{-5}$
α_6	$7.06180 \cdot 10^{-5}$

Bulunan α değerleri (3.58a), (3.59a) ve (3.60) denklemlerine, zorlama ve sönüm olmadığı varsayılarak yerleştirilmiş ve farklı başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri için genliklerin ve fazın zamanla değişim eğrileri nümerik integrasyonla çizilmiştir. Şekiller 4.5 - 4.10 genlik modülasyonlarını (a_1, a_2), Şekiller 4.11 - 4.13 faz modülasyonlarını (γ_1) göstermektedir. Grafiklerde a_{10} ve a_{20} başlangıç boyutsuz genlik değerlerini, γ_{10} başlangıç boyutsuz faz değerini ifade etmektedir.

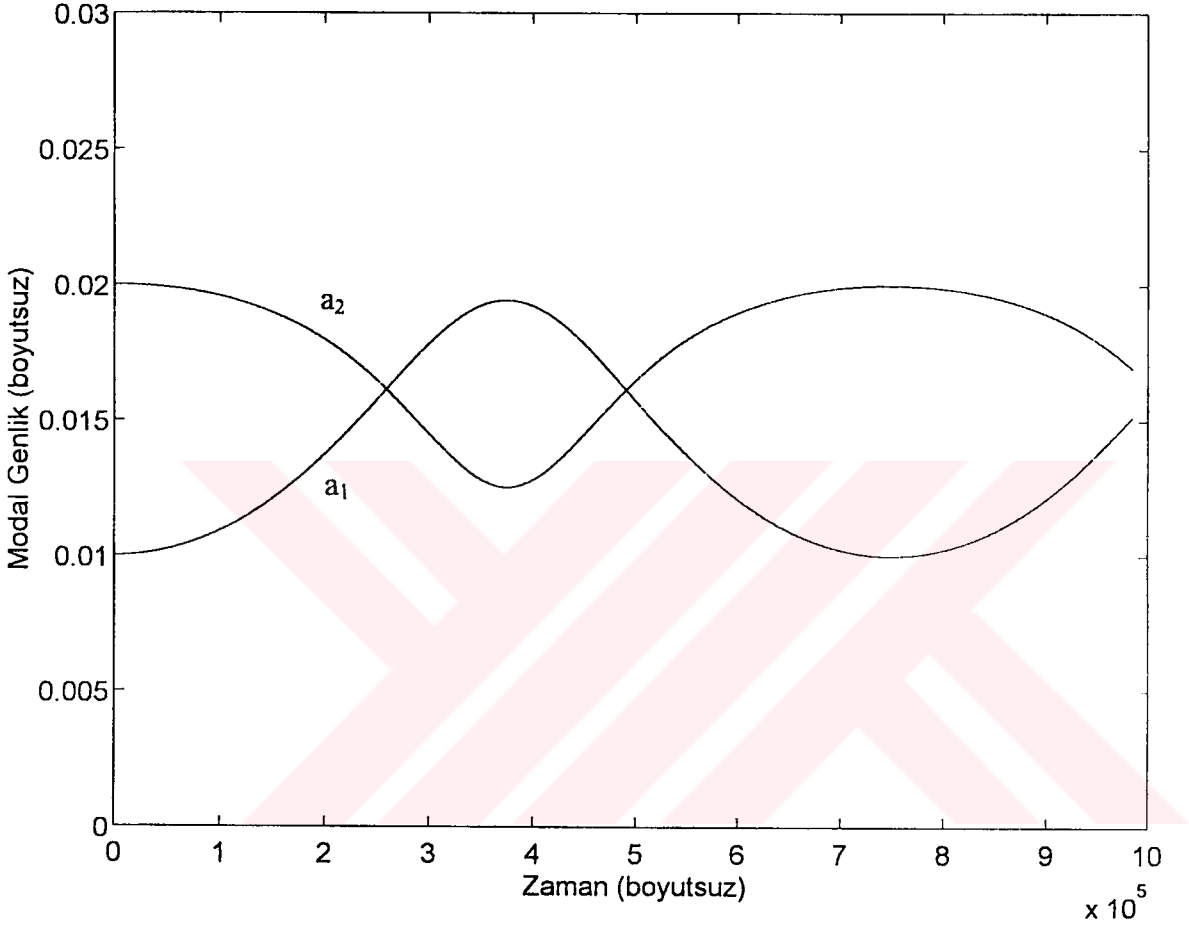


Şekil 4.5. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi

(Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.01$, $a_{20} = 0.01$, $\gamma_{10} = 0$)

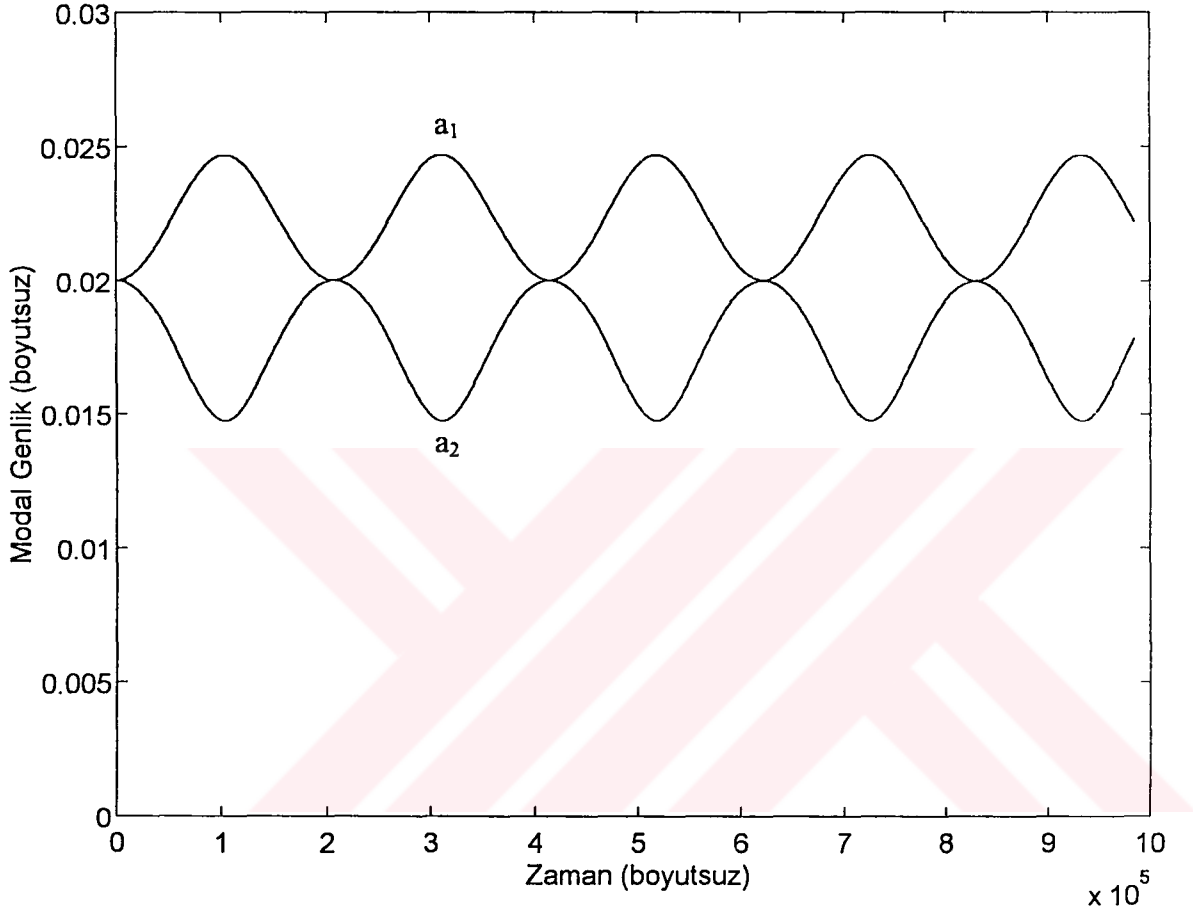


Şekil 4.6. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi
(Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.01$, $\gamma_{10} = 0$)

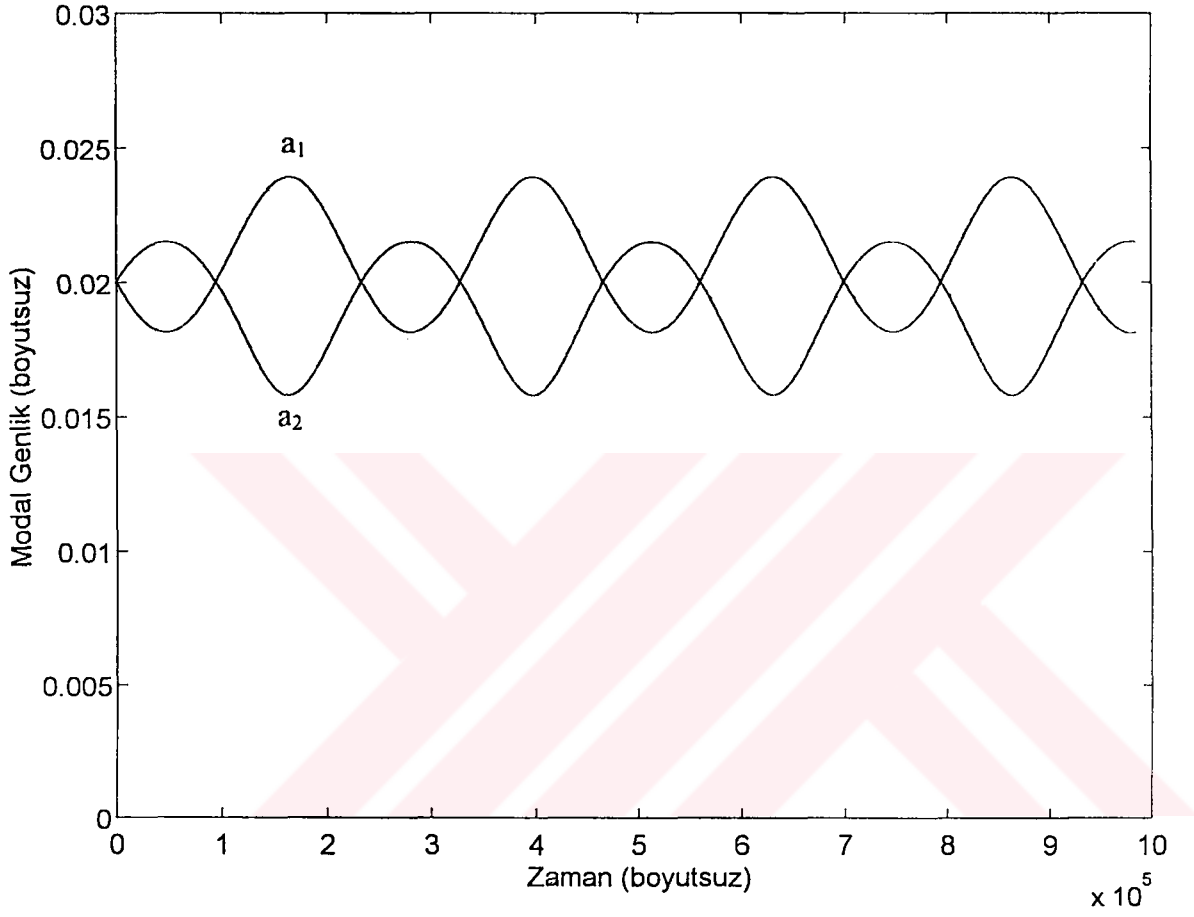


Şekil 4.7. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi

(Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.01$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$)

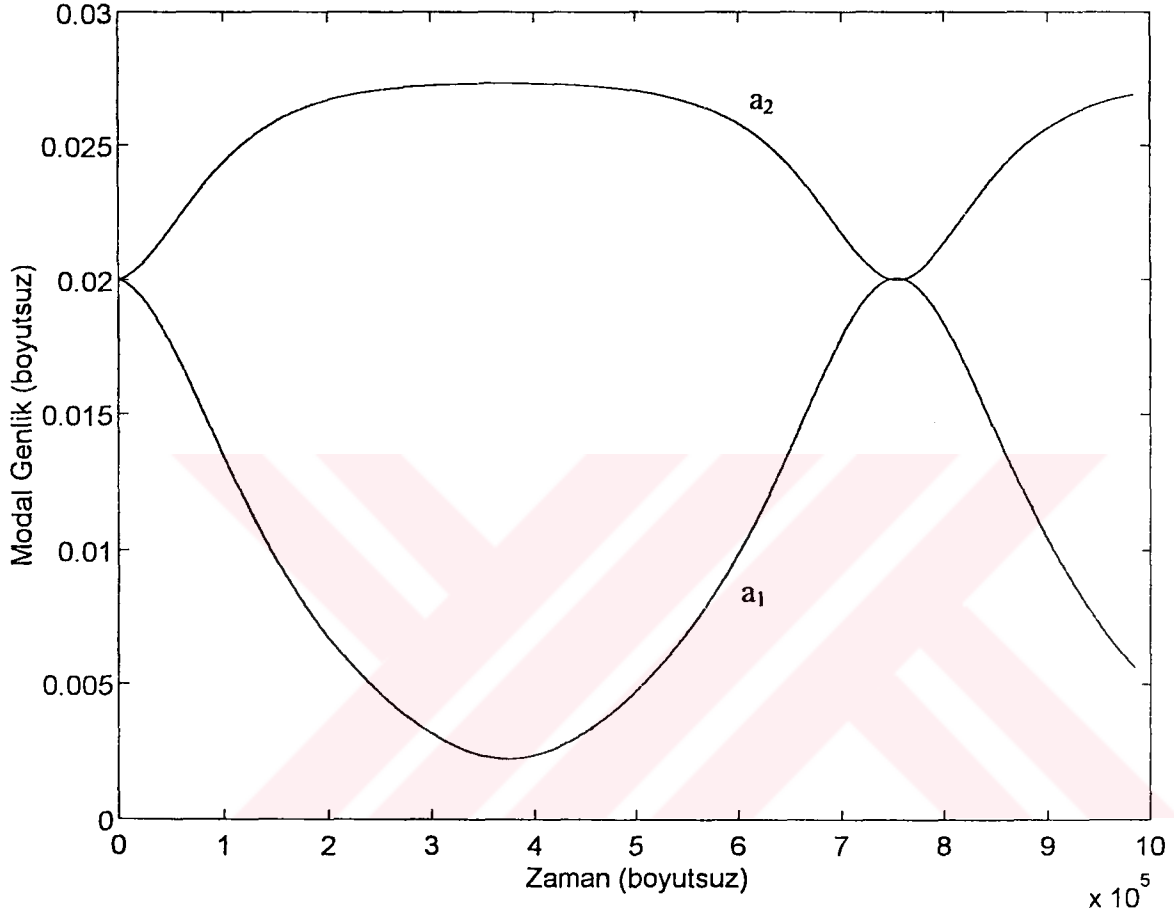


Şekil 4.8. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi
 (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$)



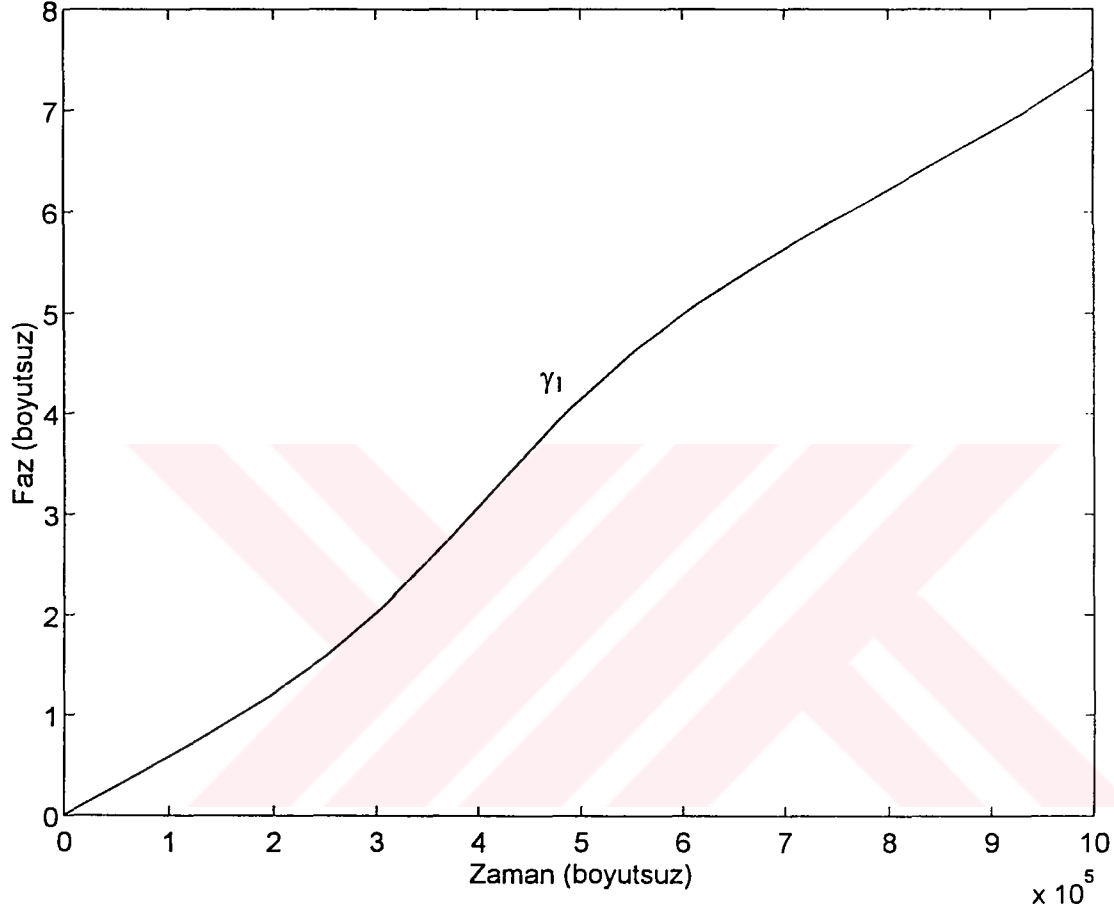
Şekil 4.9. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi

(Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 1$)

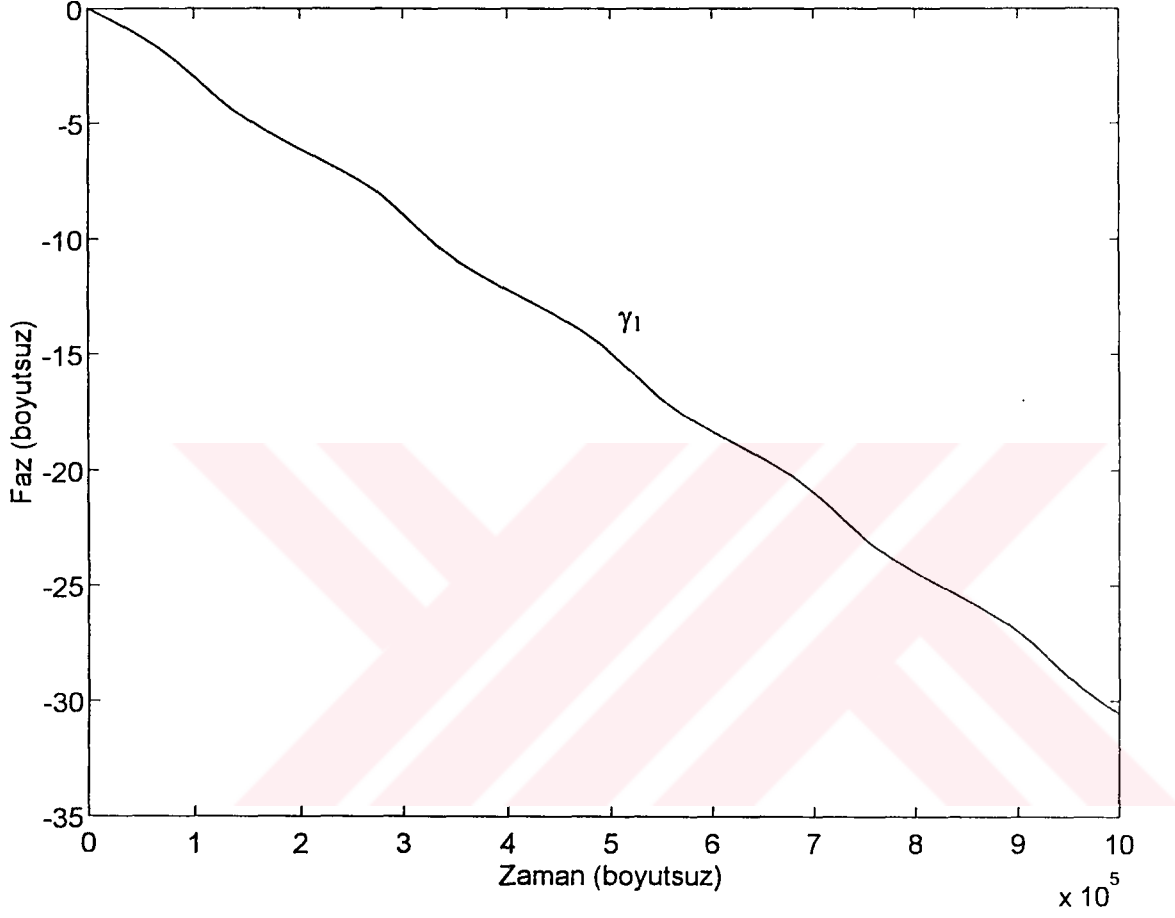


Şekil 4.10. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için genliklerin zamanla değişimi

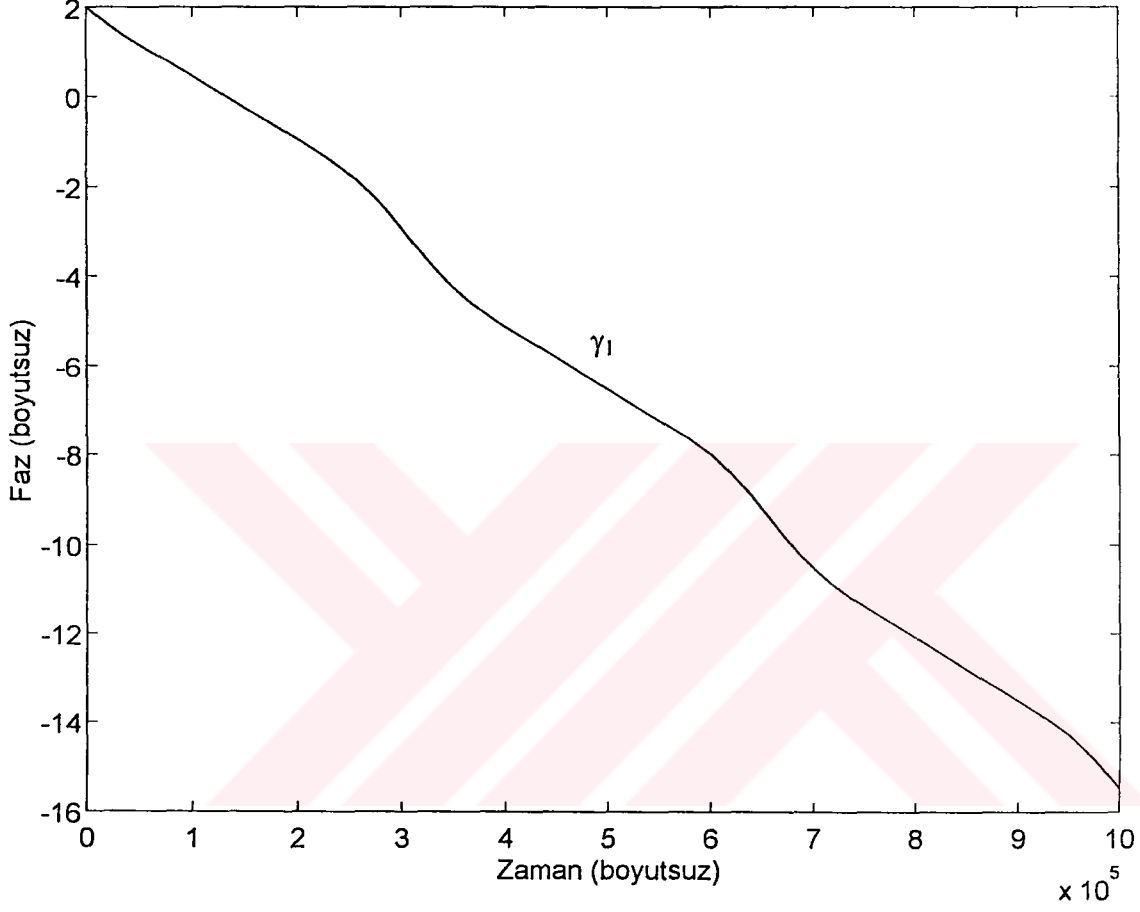
(Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 3$)



Şekil 4.11. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için fazın zamanla değişimi
(Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.01$, $a_{20} = 0.01$, $\gamma_{10} = 0$)



Şekil 4.12. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için fazın zamanla değişimi
 (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$)



Şekil 4.13. Golden Gate köprüsü serbest titreşim için fazın zamanla değişimi
 (Başlangıç boyutsuz genlik ve faz değerleri: $a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 2$)

Serbest titreşimlerde sistemdeki enerji etkileşim halindeki enine ve burulma modları arasında sürekli olarak alınıp verilmektedir. Yani, enine titreşim genlikleri artarken burulma titreşim genlikleri azalmakta ve enine titreşim genlikleri azalırken burulma titreşim genlikleri artmaktadır. Buna göre sisteme başlangıçta belli bir enerji verilmesi durumunda, sönüm olmadığı kabul edildiğinden dolayı, her iki mod arasında etkileşimli hareket sürekli devam edecektir. Bu durum, modlar arasında etkileşim olmadığını kabul eden lineer teorinin aksini göstermektedir. Hem nonlinearlik hem de frekansların birbirine çok yakın olması neticesinde ortaya çıkan bu kuvvetli etkileşim ρ ayar parametresi büyüdükçe azalacaktır.

4.5 - 4.8 şekilleri incelendiğinde, başlangıç genlik değeri arttıkça enerji alışverişinin (ve dolayısıyla fazın zamanla değişiminin) hızlandığı görülmektedir.

4.4. Zorlamalı ve Sönümlü Titreşimler

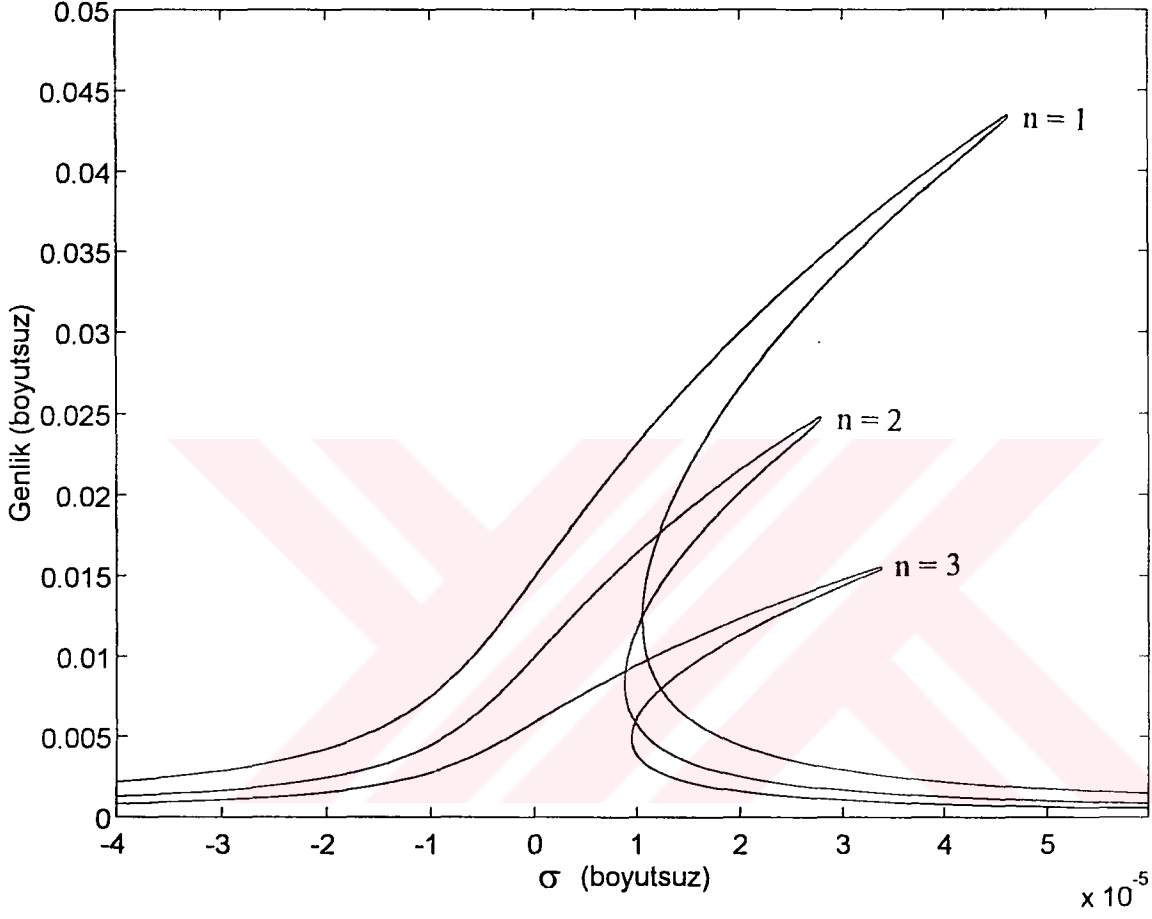
Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde iki ayrı durum incelenmiştir: (1) İç rezonansın olmadığı ve sadece enine titreşimlerin uyarıldığı durum. Bu durum için frekans-tepki grafikleri çizilmiştir. (2) İç rezonansın olduğu ve sadece enine titreşimlerin uyarıldığı durum. Bu durum için genlik ve faz modülasyonları çizilmiştir.

4.4.1. İç Rezonansın Olmadığı Durum

Zorlama frekansı ile genlik arasındaki ilişki (3.82) denkleminde verilmişti. Şekil 4.14 ve 4.17 'de sabit f ve μ_1 değerleri için sırasıyla Vincent-Thomas ve Golden Gate köprülerinin ilk üç enine modlarının frekans-tepki grafikleri; Şekil 4.15 ve 4.18 'de sabit μ_1 ve değişik f değerleri için ilk modların frekans-tepki grafikleri; Şekil 4.16 ve 4.19 'da sabit f ve değişik μ_1 değerleri için ilk modların frekans-tepki grafikleri görülmektedir.

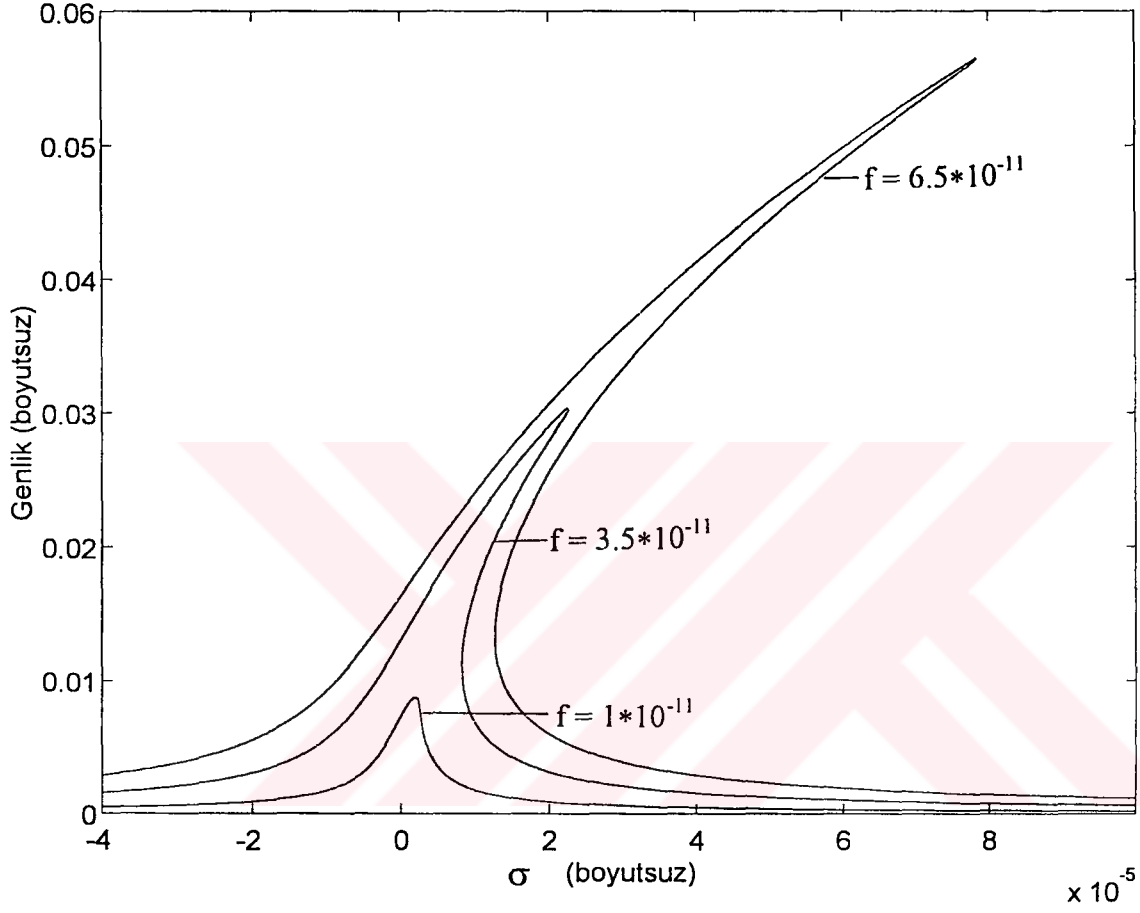
Şekil 4.14 ve 4.17 incelendiğinde, σ değerindeki artışın ilk modlarda büyük genliklere neden olurken, üst modlara gidildikçe daha düşük genliklere neden olduğu görülmektedir.

Şekil 4.15 ve 4.18 'de frekans-tepki eğrisinin zorlama fonksiyonunun genliğine (f) bağlı olarak değişimi görülmektedir. Zorlama fonksiyonunun genliği arttıkça, frekans-tepki eğrileri $\sigma = 0$ ekseninden sağa doğru eğilmektedir. f 'nin çok küçük değerleri için bu eğriler tek değerli iken, f büyüdükçe eğriler çok-değerli hale gelmekte ve sıçrama hadisesi ortaya çıkmaktadır.



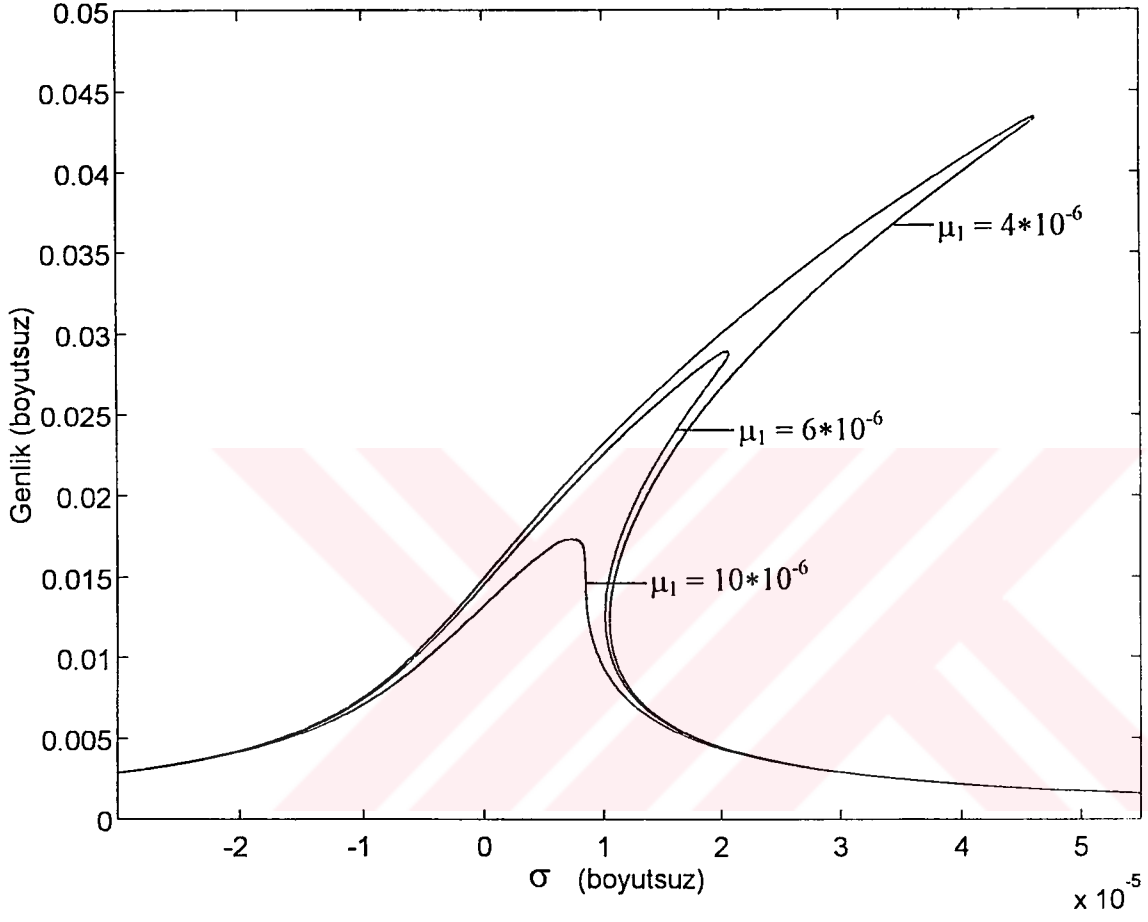
Şekil 4.14. Vincent-Thomas köprüsünün ilk üç modunun frekans-tepki grafikleri

$$(f = 5 \cdot 10^{-11}, \mu_1 = 4 \cdot 10^{-6})$$



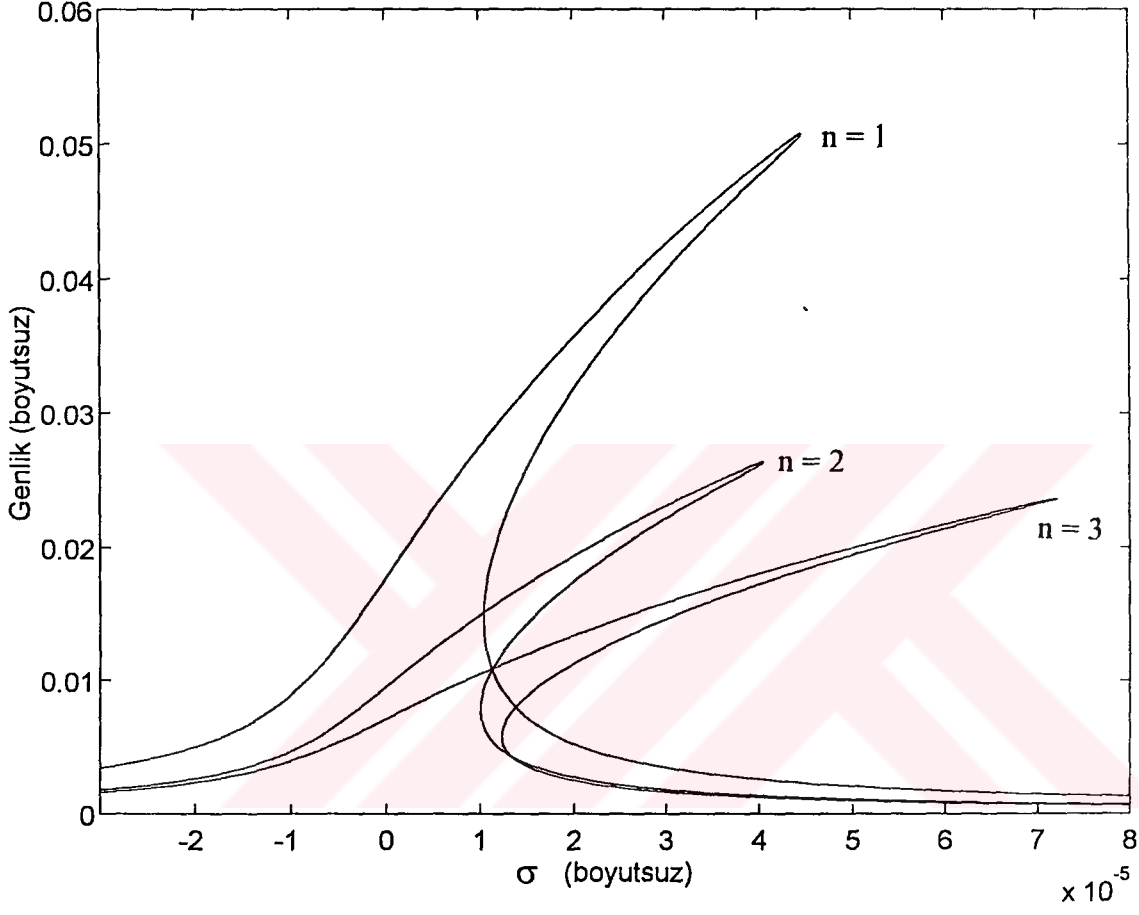
Şekil 4.15. Vincent-Thomas köprüsünde zorlama genliğinin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi

($\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$; $f = 1.0 \cdot 10^{-11}$; $3.5 \cdot 10^{-11}$; $6.5 \cdot 10^{-11}$)



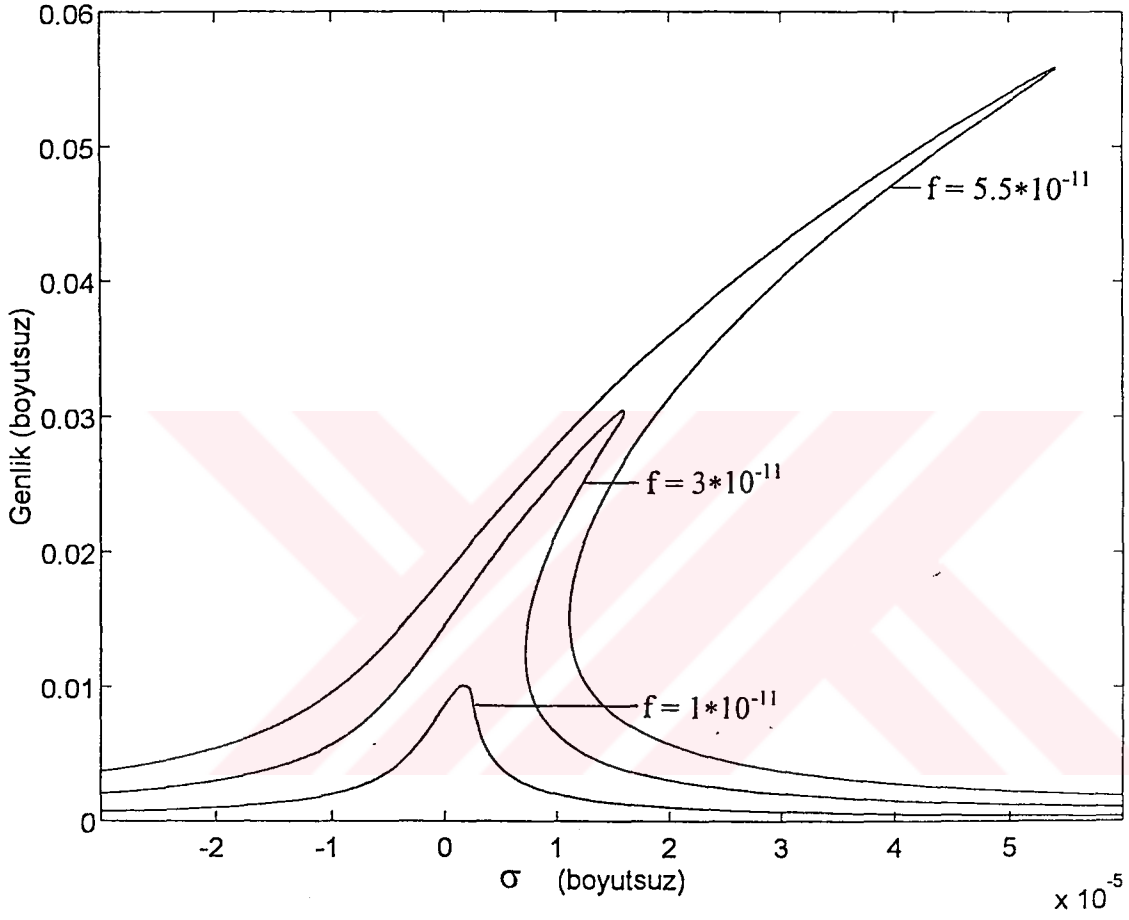
Şekil 4.16. Vincent-Thomas köprüsünde sönümlenmenin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi

($f = 5 \cdot 10^{-11}$; $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$; $6 \cdot 10^{-6}$; $10 \cdot 10^{-6}$)



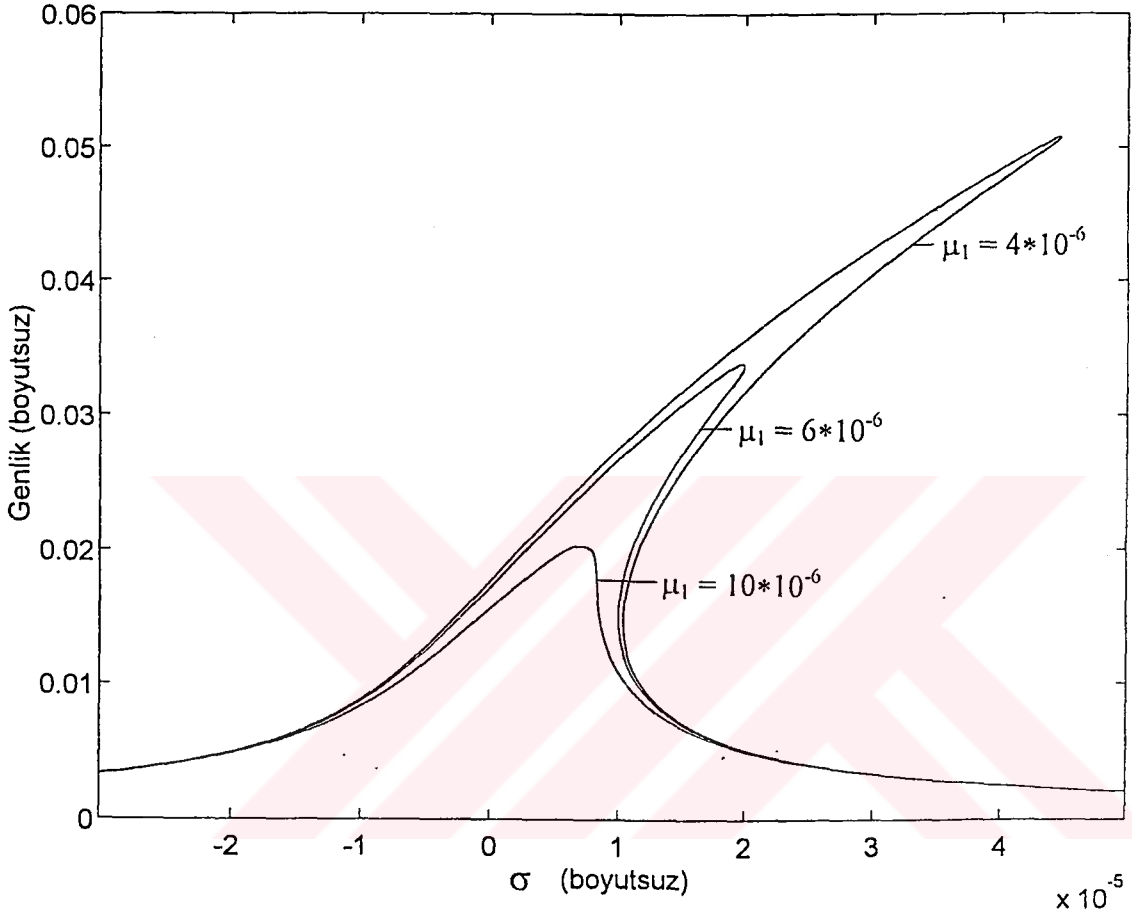
Şekil 4.17. Golden Gate köprüsünün ilk üç modunun frekans-tepki grafikleri

$$(f = 5 \cdot 10^{-11}, \mu_1 = 4 \cdot 10^{-6})$$



Şekil 4.18. Golden Gate köprüsünde zorlama genliğinin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi

$$(\mu_1 = 4 \times 10^{-6} ; f = 1.0 \times 10^{-11} ; 3.0 \times 10^{-11} ; 5.5 \times 10^{-11})$$



Şekil 4.19. Golden Gate köprüsünde sönümlenmenin sistemin tepkisi üzerindeki etkisi
 ($f = 5 \cdot 10^{-11}$; $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$; $6 \cdot 10^{-6}$; $10 \cdot 10^{-6}$)

Şekil 4.16 ve 4.19 'da sönüm (μ_1) katsayısının birinci mod için tepki eğrileri üzerindeki etkisi görülmektedir. Sönümlenme olmadığı takdirde, maksimum genlik sonsuz olmaktadır. Bu durumda, denklem (3.81a) 'ya göre $\gamma_2 = n\pi$ olur; n bir tamsayıdır. Buna göre denklem (3.84), tepkinin zorlama fonksiyonu ile fazda veya 180° faz dışında olduğunu gösterir. Ancak sönümlenme olduğu takdirde, maksimum genlik sonlu bir değerde kalır. Ayrıca, yine (3.81a) 'ya göre $\gamma_2 = \sin^{-1}(\mu_1 a_1 \omega_e / f)$ olur ve böylece sönümlenme tepkinin fazı üzerinde etkili olur.

4.4.2. İç Rezonansın Olduğu Durum

Enine titreşim modlarından birinin burulma titreşimi modlarından birine yakın olduğu durumda aralarında kuvvetli bir etkileşim meydana gelmektedir. Sadece enine modların uyarıldığı kabul edildiği halde iç rezonans sayesinde enine moddan burulma moduna enerji aktarımı olmakta ve burulma titreşimleri de ortaya çıkabilmektedir. Bu durum (3.79) denklemleri ile ifade edilmektedir. Bu denklemlerin nümerik integrasyonu yapılarak enine (a_1) ve burulma (a_2) titreşim genliklerinin, enine frekans ile burulma frekansı arasındaki faz açısının (γ_1) ve zorlama frekansı ile enine frekans arasındaki faz açısının (γ_2) zamana göre değişimleri incelenmiştir.

Birbirlerine yakın modlar olarak Golden Gate köprüsüne ait ikinci asimetrik enine titreşim modu (ASE-2; $\omega_e \approx 1.14$ rad/s) ile birinci asimetrik burulma titreşim modu (ASB-1; $\omega_b \approx 1.17$ rad/s) seçilmiştir. Bu iki modun etkileşimli hareketine ait katsayılar daha önce Çizelge 4.8 'de verilmişti. Bu değerler (3.79) denklemlerine yerleştirilerek değişik başlangıç genlik ve faz değerleri, zorlama genliği ve sönümlenme katsayısı değerleri için genliklerin ve fazların zamanla değişimini gösteren eğriler çizilmiştir. Şekillerin daha kolay takip edilebilmesini sağlamak için şekillere ait değerler toplu olarak Çizelge 4.9 'da verilmiştir.

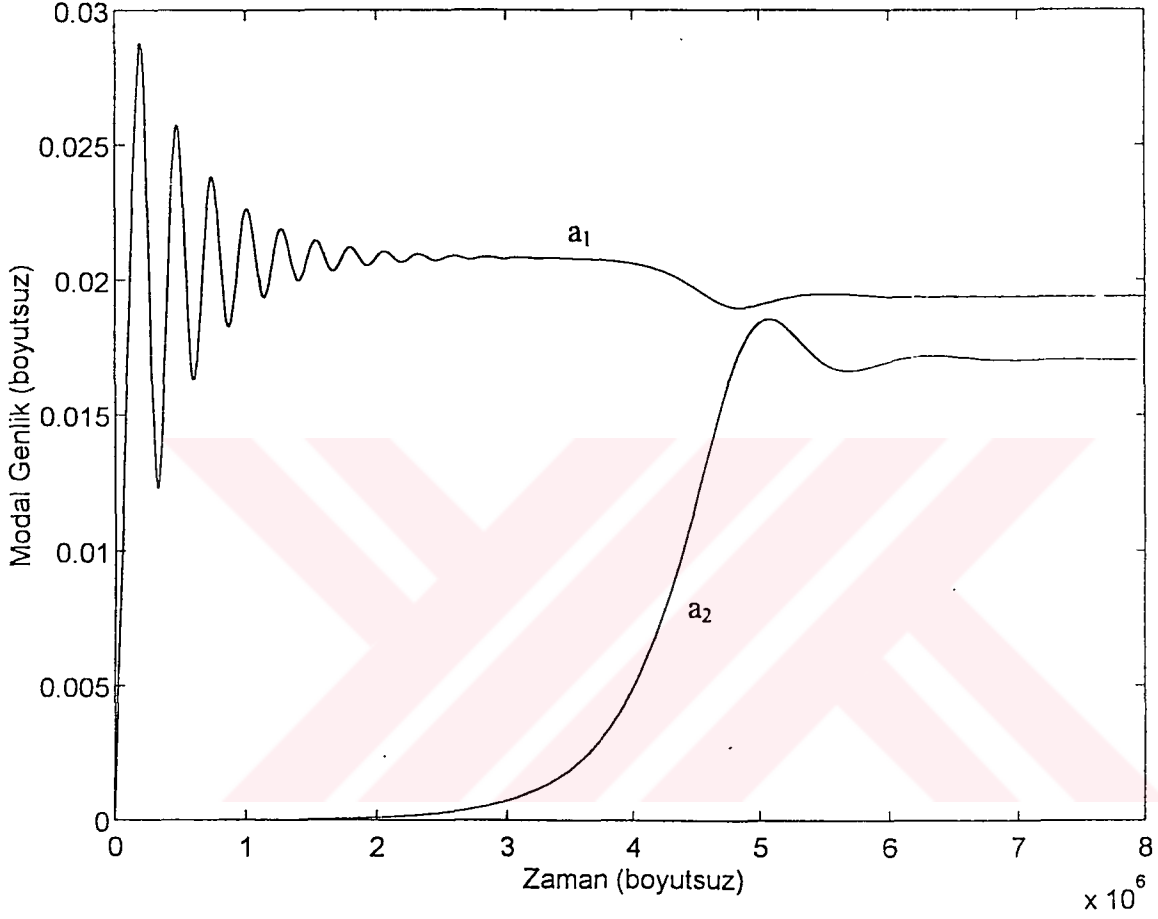
Şekil 4.20a 'da $a_{10} = a_{20} = \gamma_{10} = \gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$ ve $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$ olarak alınmıştır. Burada a_{10} ve a_{20} sırasıyla enine ve burulma titreşimlerinin başlangıç boyutsuz genlik değerleri, γ_{10} enine frekans ile burulma frekansı arasındaki faz açısının başlangıç boyutsuz değeri, γ_{20} zorlama frekansı ile enine frekans arasındaki faz açısının başlangıç boyutsuz değeri, μ_1 ve μ_2 sırasıyla enine ve burulma titreşimleri sönümlenme katsayıları, f zorlama fonksiyonunun genliği ve σ zorlama frekansı ile enine frekans arasındaki yakınlığı ifade eden ayar parametresidir.

Şekil 4.20a 'da görüldüğü gibi, enine titreşim genliğini ifade eden a_1 eğrisi sıfırdan başlayıp önce yükselmekte, daha sonra belli bir geçiş süresi salınım yapmakta ve 0.02 civarında düzgün rejim değerine ulaşmaktadır. Burulma titreşim genliğini ifade eden a_2 eğrisi ise, herhangi bir zorlama fonksiyonuna maruz kalmamasına rağmen sıfırdan başlayıp belli bir süre sonra yükselmekte ve hafif bir salınım yaparak 0.017 civarında düzgün rejim değerine ulaşmaktadır. Bu durum, enine moda verilen enerjinin belli bir kısmının etkileşimden dolayı burulma moduna aktarıldığını göstermektedir.

Şekil 4.20b 'de aynı başlangıç değerleri için fazların zamanla değişimi görülmektedir. Sıfırdan başlayan faz değerleri belli bir geçiş süresi salınım yaptıktan sonra düzgün rejim değerlerine ulaşmaktadırlar. Şekil 4.20c 'de ise $\gamma_{10} = 3$ ve $\gamma_{20} = 8$ olarak alınmıştır. Bu durumda da faz değerleri belli bir süre salınım yaptıktan sonra düzgün rejim değerlerine ulaşmaktadırlar.

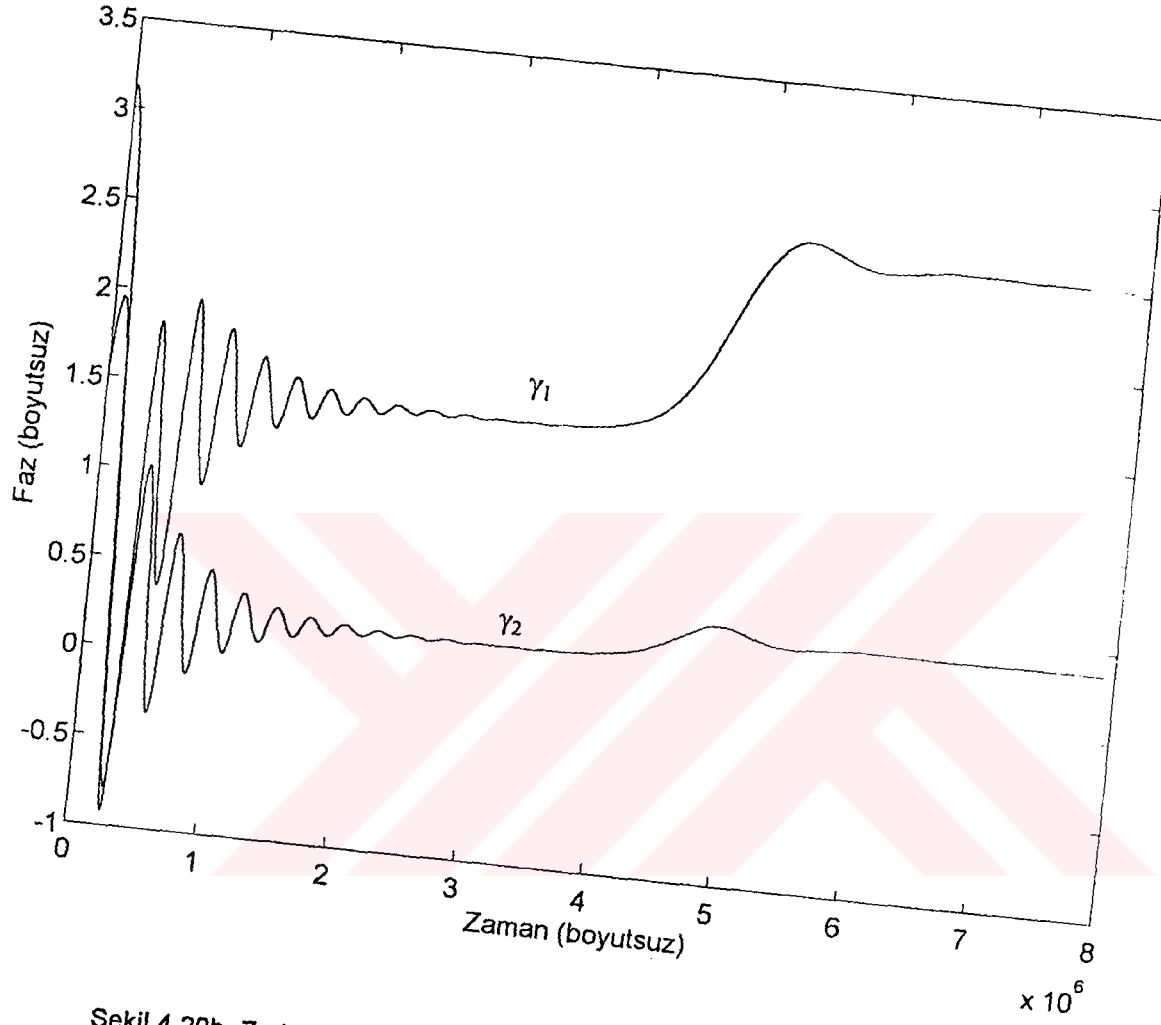
Çizelge 4.9. Şekiller 4.20 - 4.31 'e ait değerler

No	Şekil No	a_{10}	a_{20}	γ_{10}	γ_{20}	μ_1	μ_2	f	σ	Eğri
1	Şekil 4.20a	0	0	0	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
2	Şekil 4.20b	0	0	0	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Faz
3	Şekil 4.20c	0	0	3	8	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Faz
4	Şekil 4.21	0.02	0	0	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
5	Şekil 4.22	0.02	0.02	0	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
6	Şekil 4.23	0.04	0.02	0	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
7	Şekil 4.24a	0.02	0.02	3	8	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
8	Şekil 4.24b	0.02	0.02	3	8	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Faz
9	Şekil 4.25	0	0	0	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$38 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
10	Şekil 4.26	0	0	0	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
11	Şekil 4.27	0.02	0.02	0	0	$6 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-7}$	0	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
12	Şekil 4.28	0	0	0	0	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
13	Şekil 4.29	0	0	0	0	$8 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
14	Şekil 4.30	0	0	0	0	$8 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	Genlik
15	Şekil 4.31	0.02	0.02	0	0	0	0	$19 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-5}$	Genlik

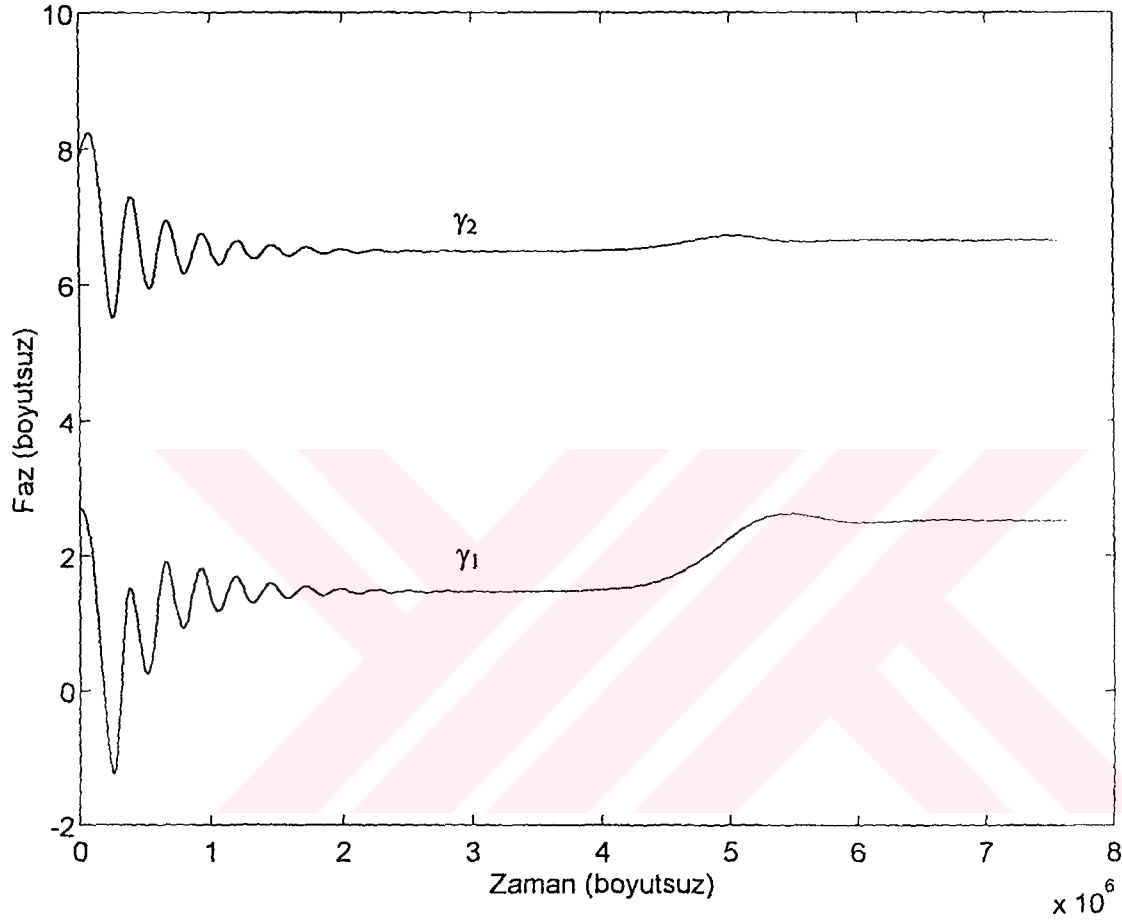


Şekil 4.20a. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.20b. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için fazların zamanla değişimi
 ($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.20c. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için fazların zamanla değişimi

($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 3$, $\gamma_{20} = 8$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)

Başlangıç genlik ve faz değerlerinin değişimi

Şekiller 4.21 - 4.24 'de değişik başlangıç genlik ve faz değerlerine göre sistemin davranışı incelenmiştir.

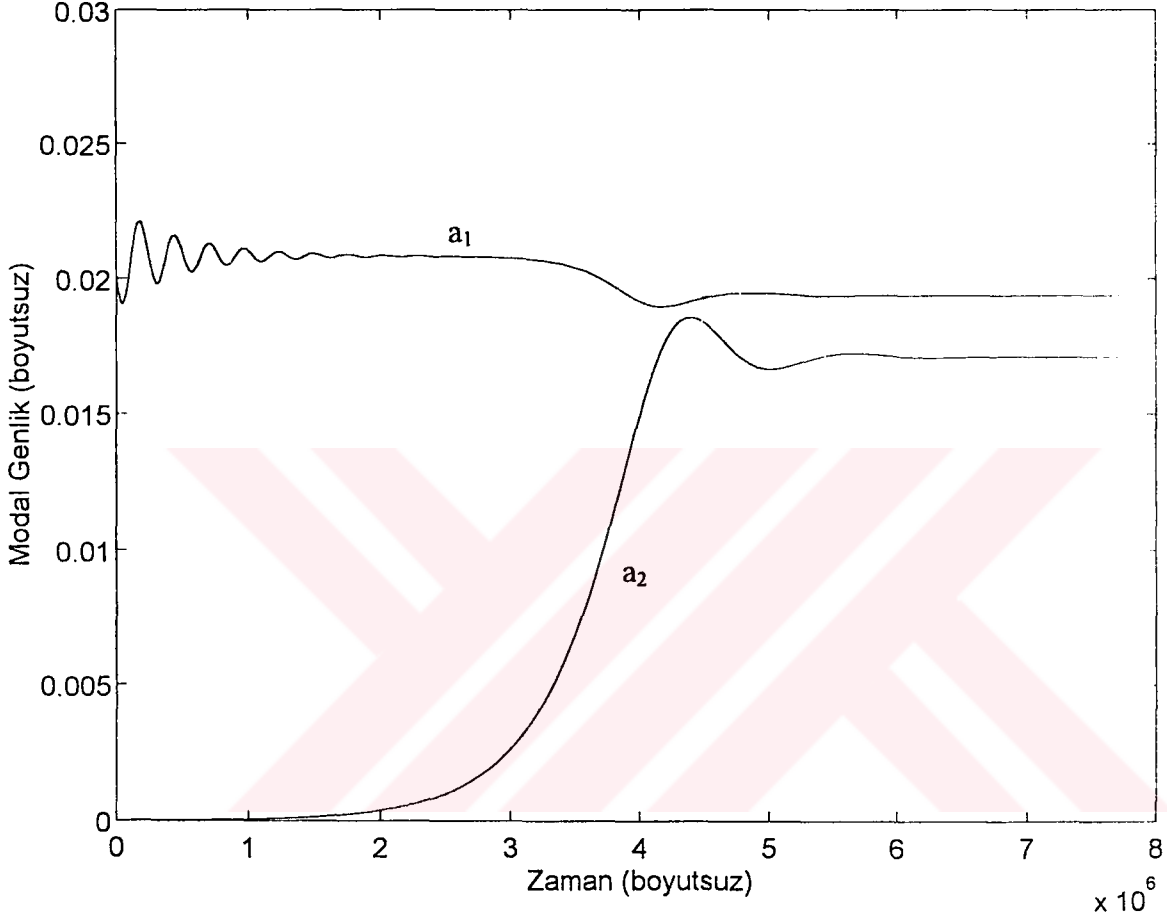
Şekil 4.21 'de $a_{10} = 0.02$ olmuştur. Bu durumda a_1 eğrisi daha az salınım yaparak önceki düzgün rejim değerine ulaşmaktadır. a_2 eğrisinin grafiği ise önceki ile tamamen aynıdır.

Şekil 4.22 'de $a_{10} = a_{20} = 0.02$ olmuştur. Bu durumda her iki eğri de belli bir geçiş süreci salınım yaparak yine önceki düzgün rejim değerlerine ulaşmaktadır.

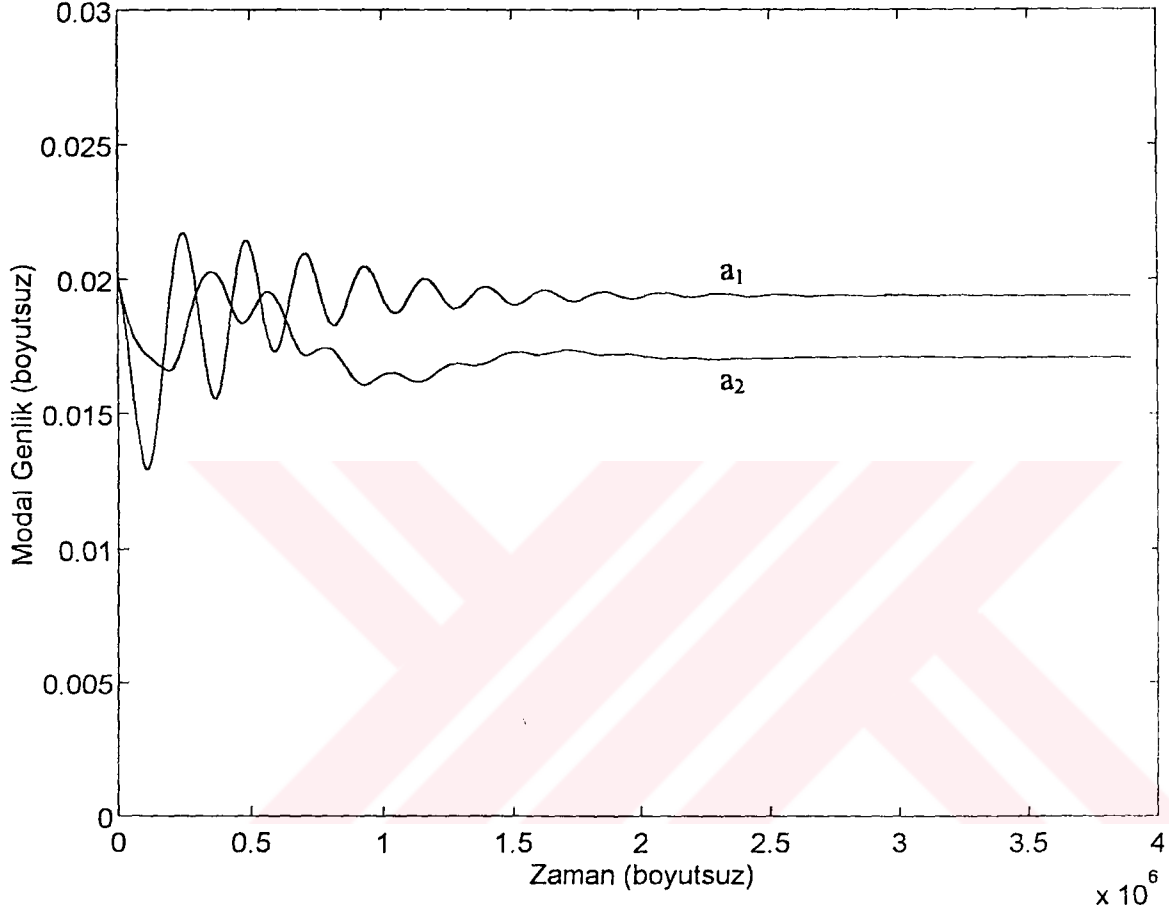
Şekil 4.23 'de $a_{10} = 0.04$ ve $a_{20} = 0.02$ olmuştur. Bu durumda her iki eğri de belli bir süre salınım yaparak yine önceki düzgün rejim değerlerine ulaşmaktadır. Sistem düzgün rejim genliklerine ne kadar yakın başlangıç genlikleri ile hareketine başlarsa, düzgün rejim değerlerine ulaşması o kadar çabuk olmaktadır.

Şekil 4.24a 'da $\gamma_{10} = 3$ ve $\gamma_{20} = 8$ olmuştur. Bu durumda yine her iki genlik eğrisi de belli bir geçiş süreci salınım yaparak önceki düzgün rejim değerlerine ulaşmaktadır. Şekil 4.24b 'de ise bu durum için faz eğrileri çizilmiştir. Her iki faz değeri de geçiş sürecinden sonra belli bir düzgün rejim değerine ulaşmaktadır.

4.20 - 4.24 numaralı şekiller genel olarak değerlendirildiğinde, başlangıç genlik ve faz değerleri ne olursa olsun sistemin belli bir geçiş sürecinden sonra belirli düzgün rejim değerlerine ulaştığı görülmektedir. Geçiş bölgelerinde önemsiz farklılıklar olmakla birlikte, düzgün rejim genlik değerleri başlangıç değerlerinden tamamen bağımsız olup sistemin enerji seviyesi ile orantılıdır. Ayrıca sıfırdan farklı başlangıç genlik değerlerinde sistemin düzgün rejime ulaşması çok daha kısa bir sürede olmuştur.

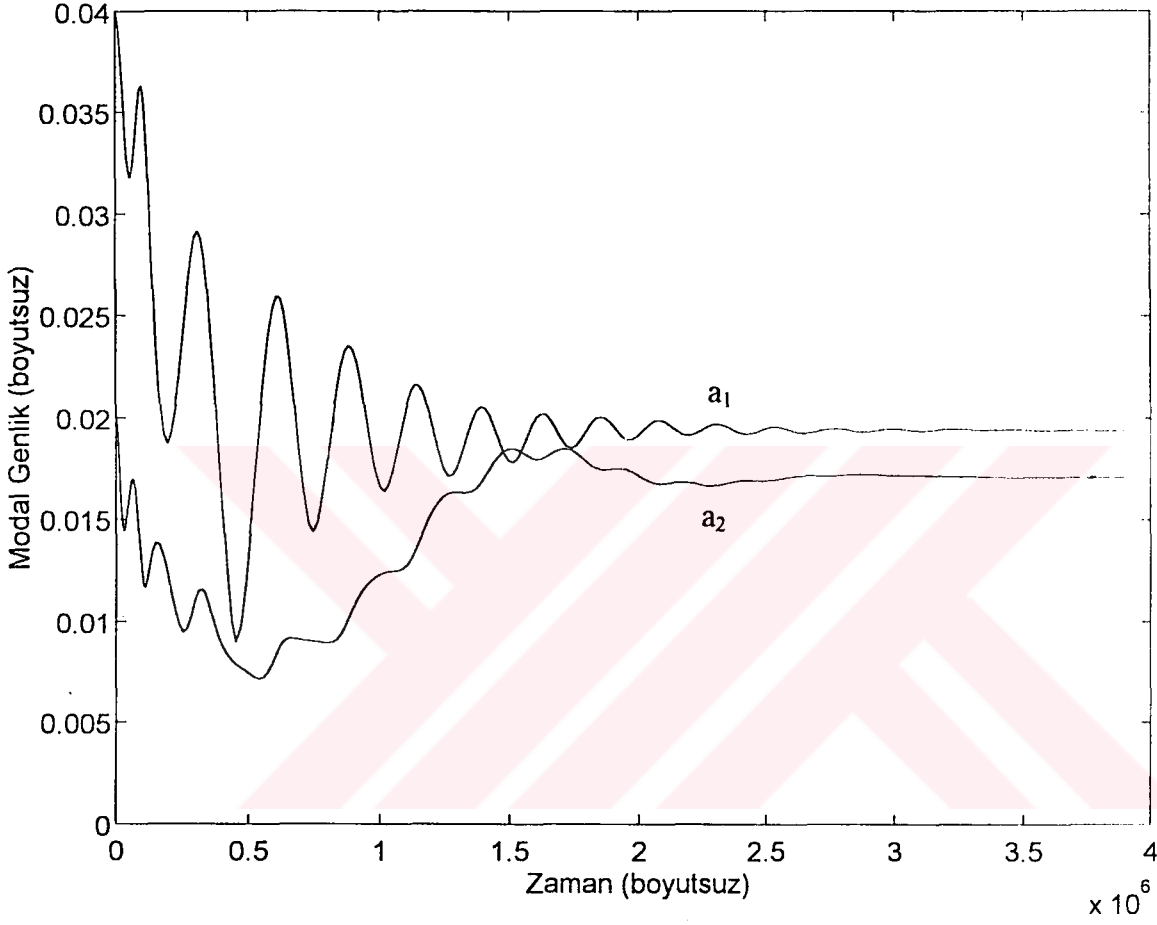


Şekil 4.21. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi
 ($a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



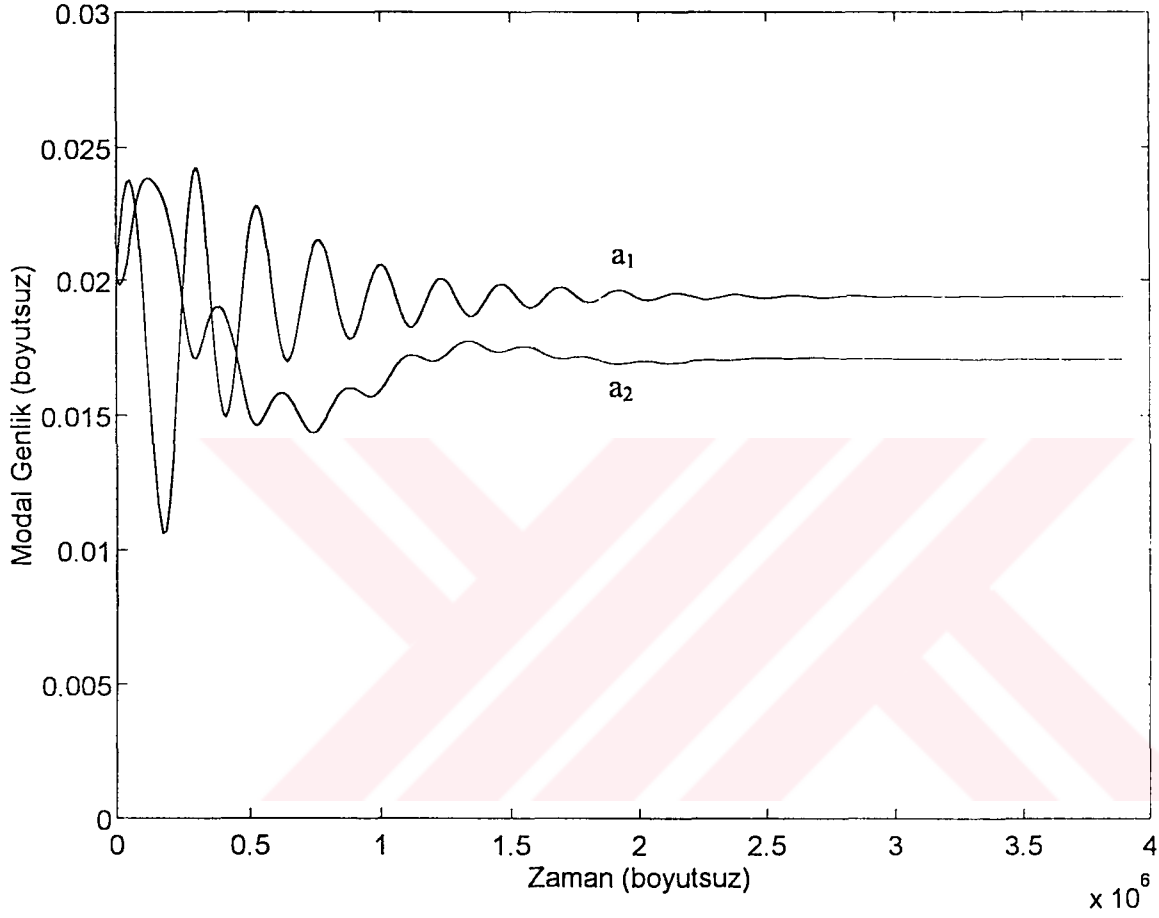
Şekil 4.22. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



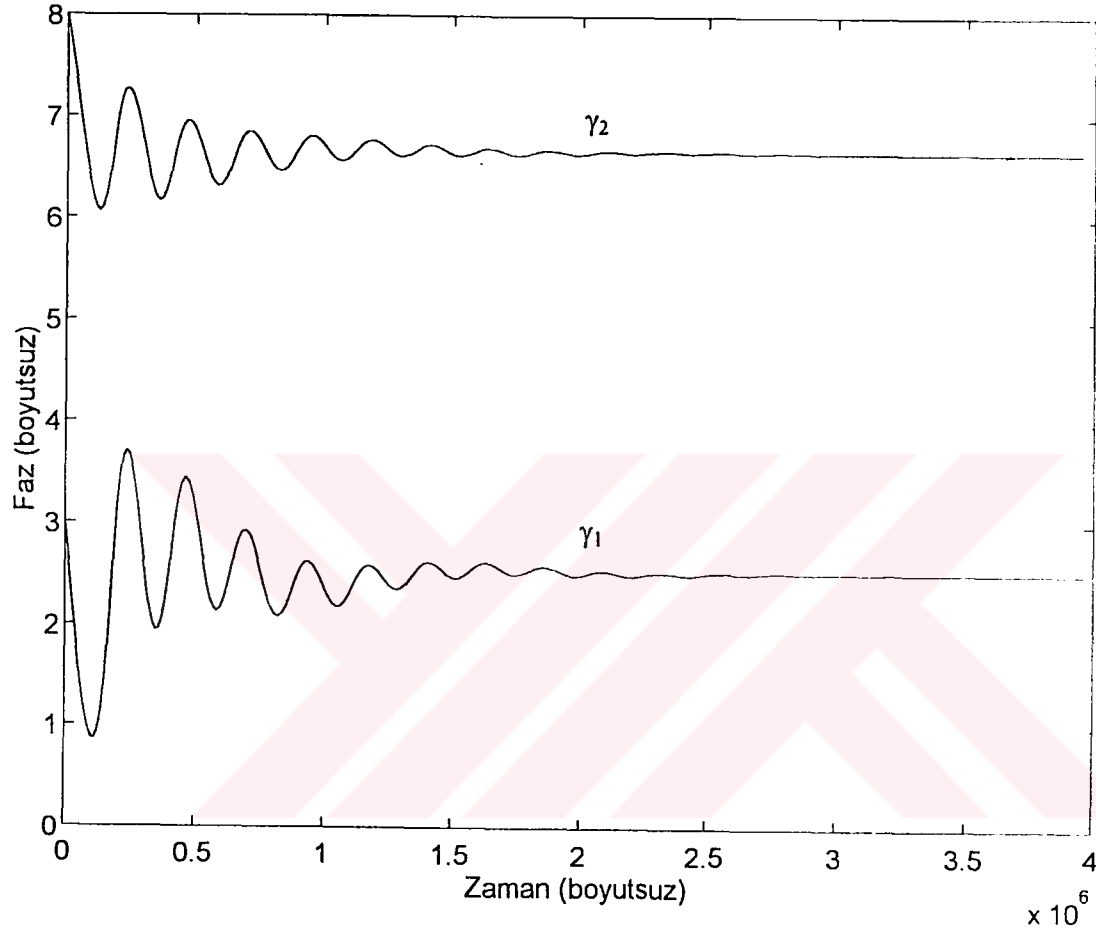
Şekil 4.23. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0.04$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.24a. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 3$, $\gamma_{20} = 8$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.24b. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için fazların zamanla değişimi

($a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 3$, $\gamma_{20} = 8$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)

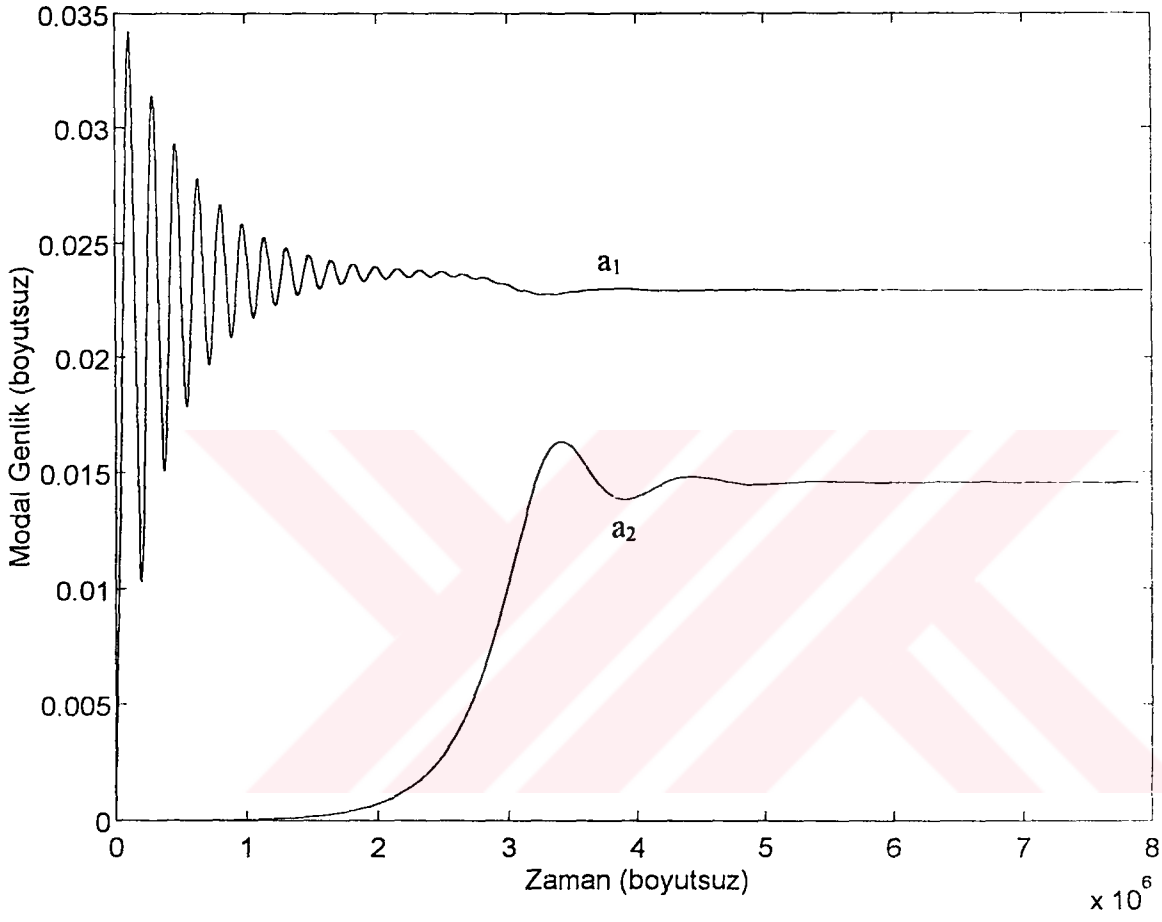
Zorlama genliğinin değişimi

şekiller 4.25 - 4.27 'de değişik zorlama genliği değerlerine göre sistemin davranışı incelenmiştir.

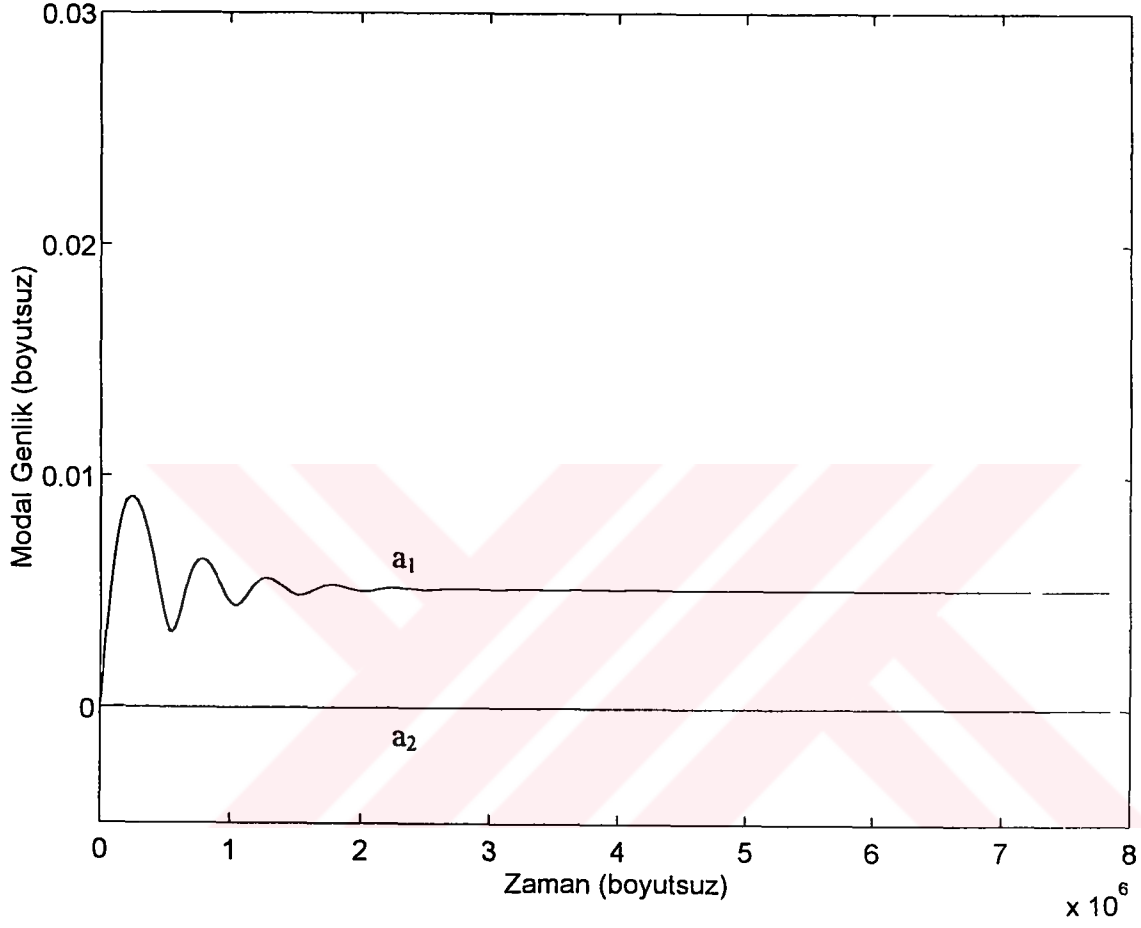
şekil 4.25 'de zorlama genliği şekil 4.20a 'ya göre iki katına çıkarılmıştır. Bu durumda genlik eğrilerinin formu aynı kalmakla birlikte a_1 eğrisinin düzgün rejim değeri yükselmiş, a_2 eğrisinin düzgün rejim değeri ise biraz azalmıştır.

şekil 4.26 'da zorlama genliği şekil 4.20a 'daki değerinin yaklaşık üçte birine düşürülmüştür. Bu durumda a_1 eğrisi çok hafif bir salınım yaptıktan sonra daha kısa bir süre içerisinde düzgün rejim değerine ulaşmıştır; bu değer öncekine göre çok daha düşüktür. Herhangi bir burulma titreşimi gözlenmemiştir; $a_2 = 0$ olarak kalmıştır. Bu durum zorlama genliğinin belli bir değerin altında kaldığı durumda, sistemin enerji seviyesinin etkileşimden dolay ı herhangi bir burulma titreşimi meydana gelmesine yetmediğini göstermektedir.

şekil 4.27 'de zorlama olmadığı ($f = 0$) kabul edilmiş ve oldukça düşük sönümlenme katsayıları alınmıştır. Bu durum sönümlü serbest titreşimi ifade etmektedir. Bu taktirde sistem önce serbest titreşim hareketine başlamış ancak sönümlenme nedeniyle genlikler zaman içerisinde sönümlenerek yok olmuştur.

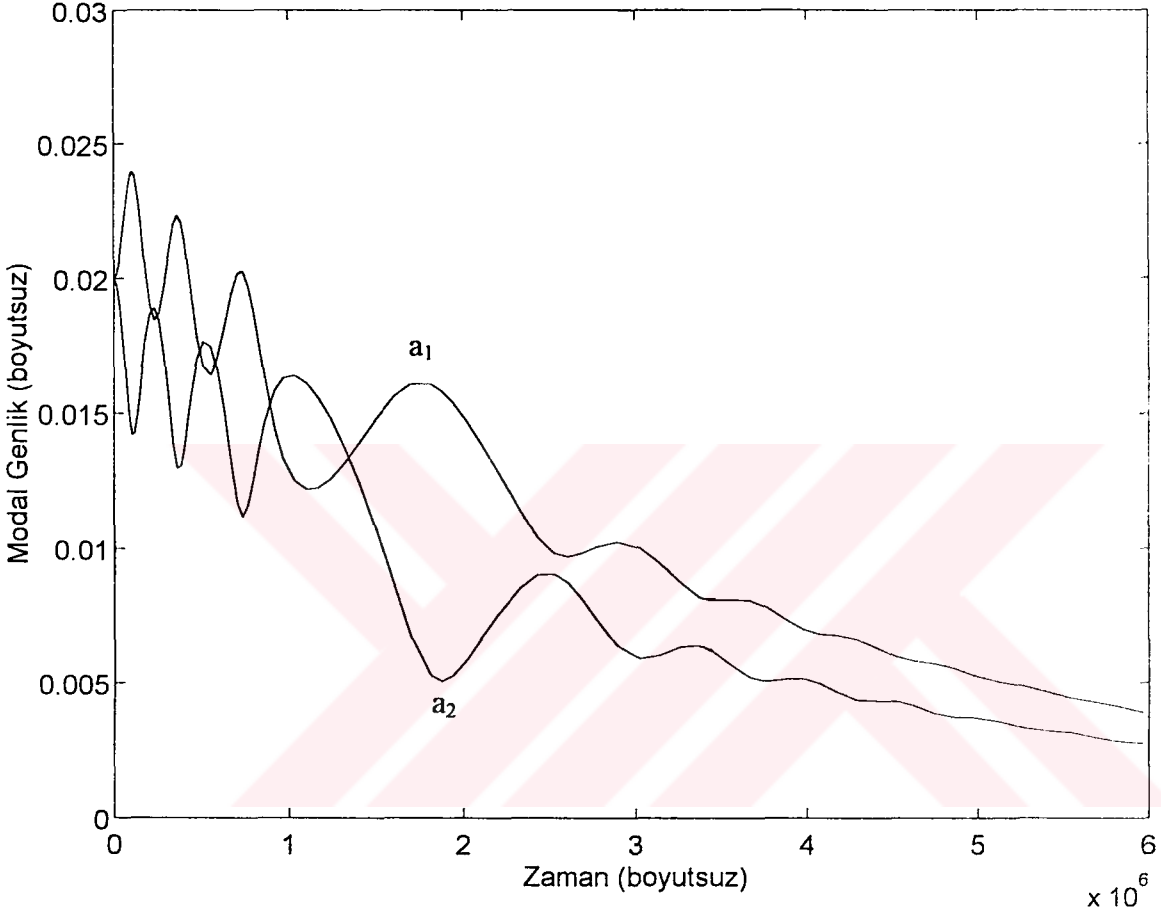


Şekil 4.25. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi
 ($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 38 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.26. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $f = 7 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.27. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 6 \cdot 10^{-7}$, $\mu_2 = 6 \cdot 10^{-7}$, $f = 0$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)

Sönüm katsayısının değişimi

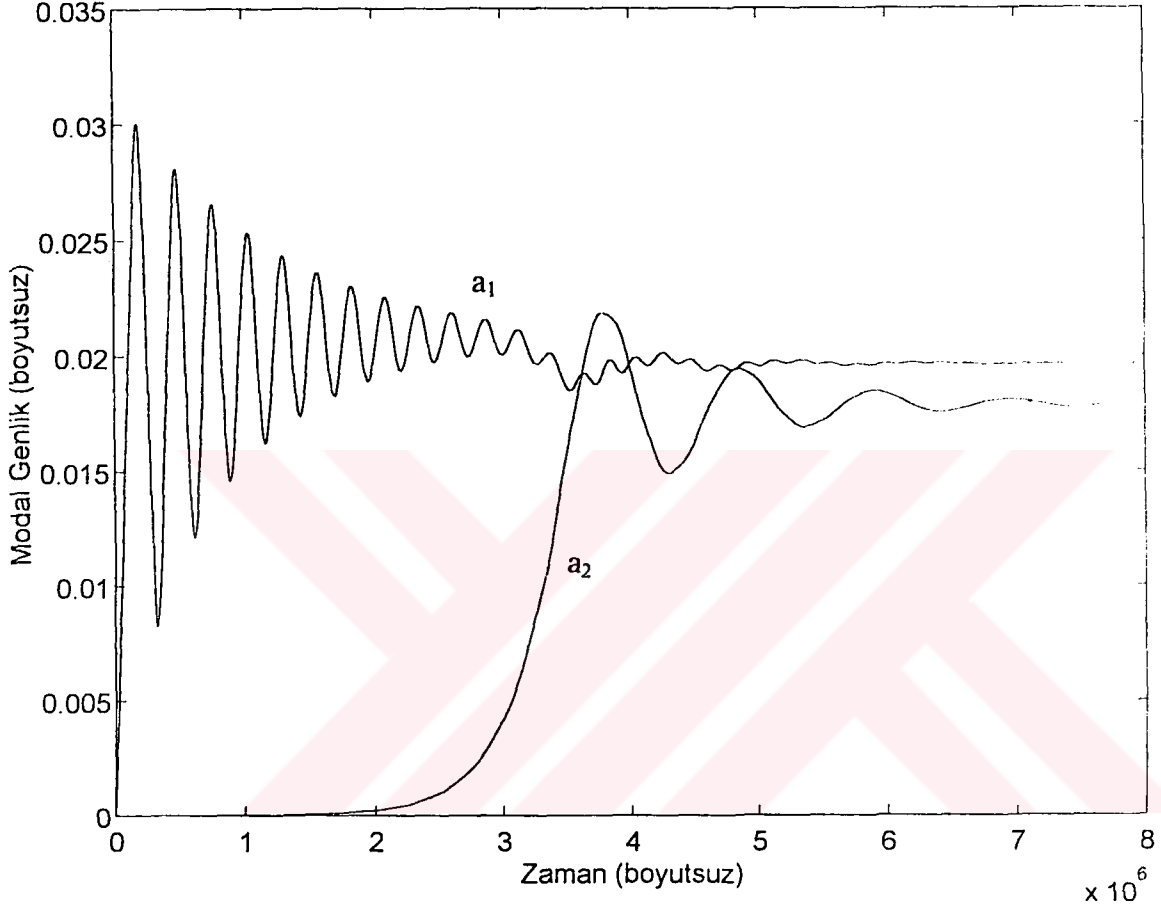
Şekiller 4.28 - 4.31 'de değişik sönümlenme katsayısı değerlerine göre sistemin davranışı incelenmiştir.

Şekil 4.28 'de sönümlenme katsayısı değerleri Şekil 4.20a 'daki değerlerinin yarısına düşürülmüştür. Bu durumda geçiş sürecinde daha büyük genlikli salınımlar olmuş ancak düzgün rejim değerlerinin fazla değişmediği gözlenmiştir.

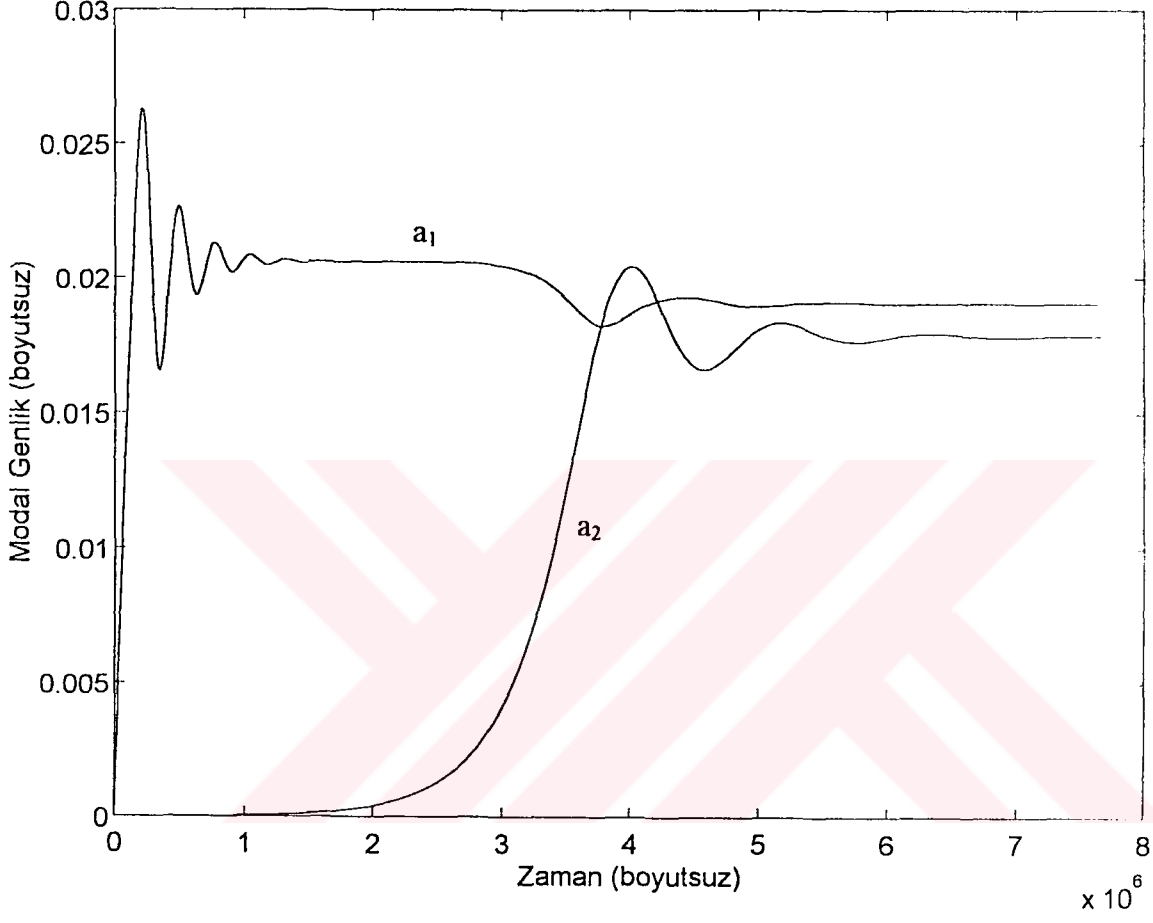
Şekil 4.29 'da enine sönümlenme katsayısı Şekil 4.20a 'ya göre iki katına çıkarken burulma sönümlenme katsayısı azaltılmıştır. Bu durumda a_1 eğrisinin salınımları belirgin bir şekilde azalmış, ancak düzgün rejim değerleri yine fazla değişmemiştir.

Şekil 4.30 'da sönümlenme katsayısı değerleri Şekil 4.20a 'daki değerlerinin iki katına çıkarılmıştır. Bu durumda a_1 eğrisi kısa bir geçiş sürecinde salınım yaparak öncekinin biraz üzerinde bir düzgün rejim değerine ulaşmıştır. Öte yandan sistemin enerji seviyesi herhangi bir burulma titreşimi meydana gelmesine yetmemiş; $a_2 = 0$ olarak kalmıştır. Buna göre sönümlenme katsayısı arttıkça sistemin düzgün rejim değerlerine daha çabuk ulaştığı söylenebilir.

Şekil 4.31 'de sönümlenmenin olmadığı kabul edilmiştir. Bu durumda lineer teoriye göre genliklerin sonsuza gitmesi gerektiği halde nonlineer etkilerden dolayı modal genlik sönümsüz titreşime göre daha yüksek olmakla birlikte belli bir değerde sınırlı kalmıştır.

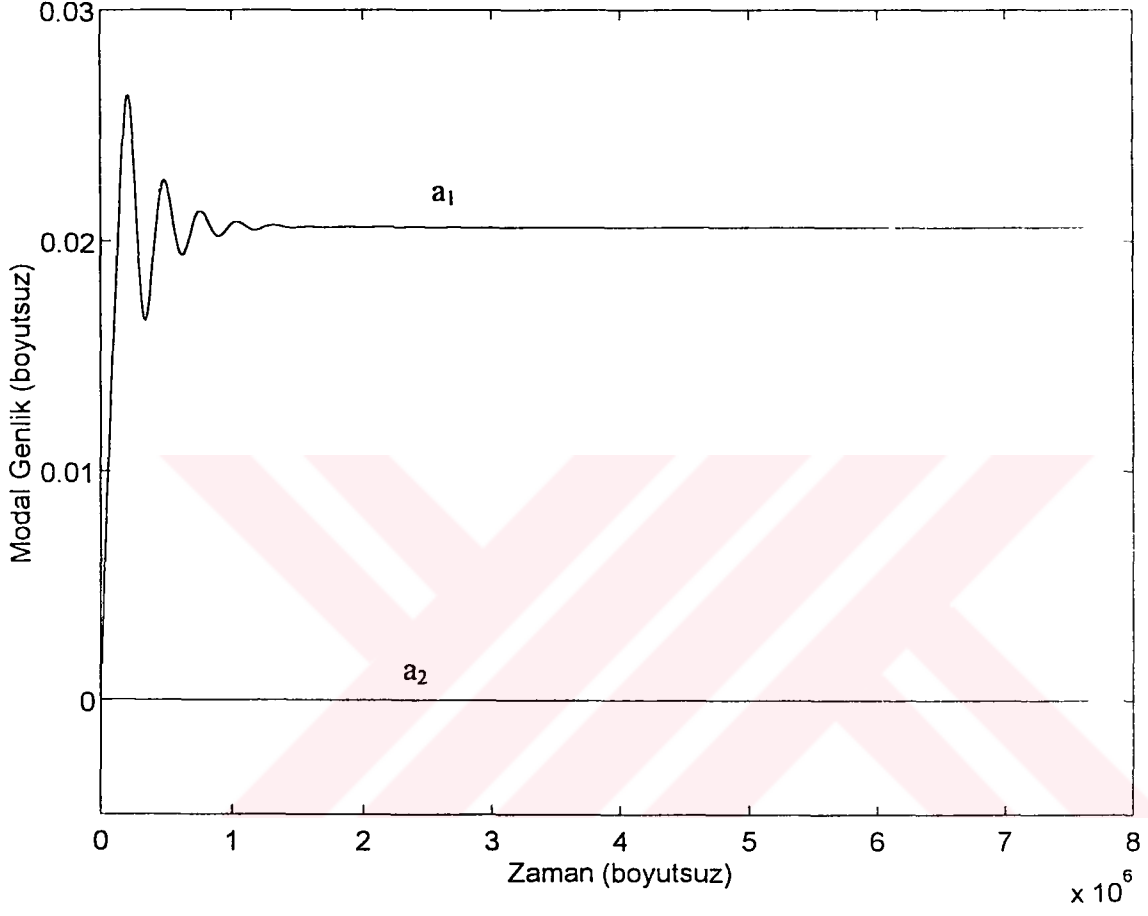


Şekil 4.28. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi
 ($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



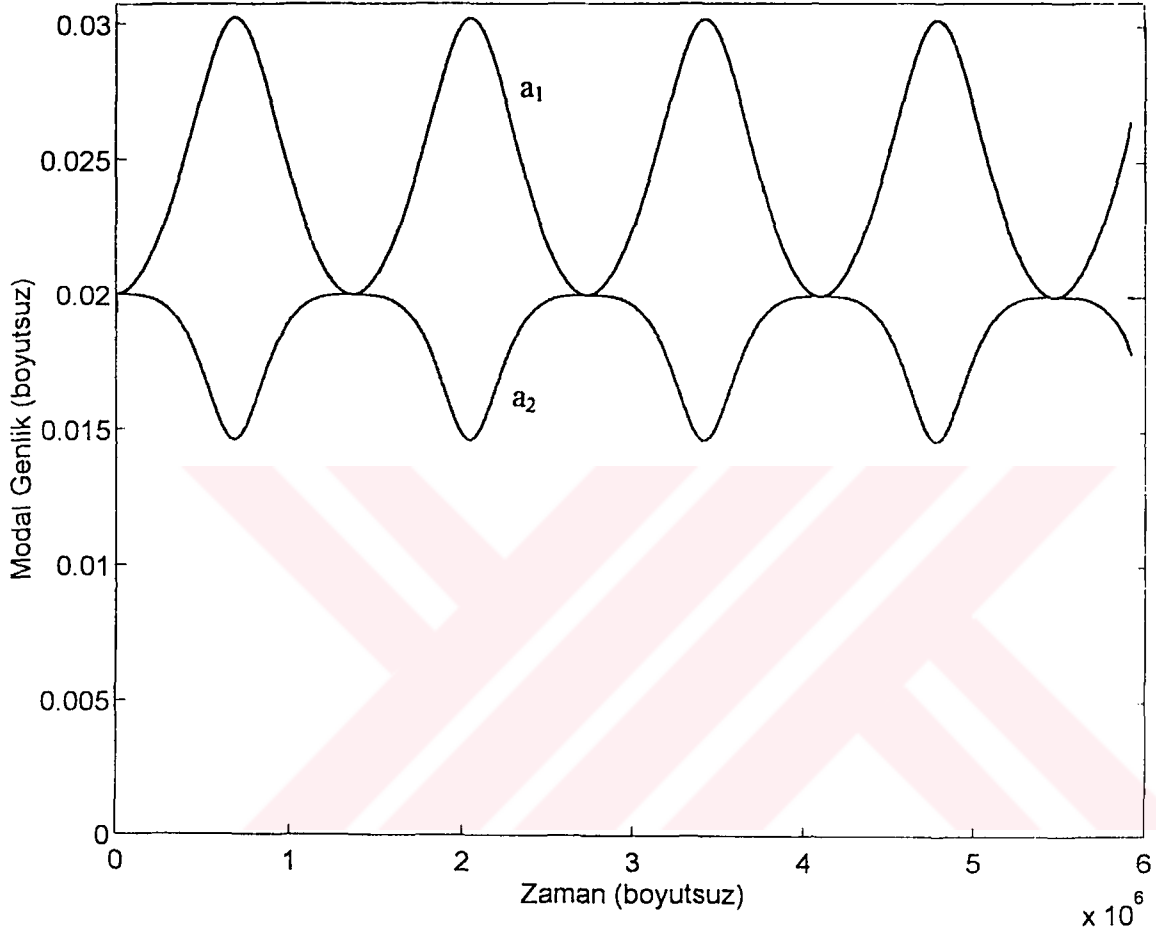
Şekil 4.29. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 8 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 3 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.30. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi

($a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 8 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 8 \cdot 10^{-6}$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 1.6 \cdot 10^{-5}$)



Şekil 4.31. Zorlamalı ve sönümlü titreşim için genliklerin zamanla değişimi
 ($a_{10} = 0.02$, $a_{20} = 0.02$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $f = 19 \cdot 10^{-11}$, $\sigma = 4 \cdot 10^{-5}$)

5. ASMA KÖPRÜLERİN TABİİ FREKANSLARININ HESAPLANMASINDA YAPAY SİNİR AĞLARININ KULLANILMASI

Asma köprülerin tabii frekanslarını veren geçiş denklemleri kapalı denklemlerdir. Kısım 4.1 'de bahsedildiği gibi, bu denklemler çok karmaşık olduğundan dolayı frekans değerlerinin bulunması ancak kök bulma yöntemleri kullanılarak yapılabilmektedir. Bu işlem çok uzun sürmekte ve köke yakın tahmini değerlerin verilememesi durumunda yakınsama problemleri ortaya çıkmaktadır. Ayrıca her mod için ayrı işlem yapılması gerekmektedir ki bu da çalışma süresini oldukça uzatmaktadır.

Bu bölümde asma köprülerin tabii frekanslarının hesaplanmasında alternatif bir metod olarak Yapay Sinir Ağları (YSA) kullanılmıştır. Önce YSA 'nın tanıtımı yapılarak bu çalışmada kullanılan ağın özelliklerinden bahsedilmiş, daha sonra algoritmanın eğitimi için kullanılan giriş ve çıkış setlerinin hazırlanışı, algoritmanın eğitilmesi ve sonuçların karşılaştırılması izah edilmiştir. Son olarak, tabii frekansların köprü parametrelerine bağlı olarak değişimi YSA kullanılarak incelenmiştir.

5.1. YSA 'nın tanıtımı

YSA insan beyninin çalışma sisteminin yapay olarak benzetimi çabalarının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Bugün temel bilimler, mühendislik ve tıp gibi farklı bilim dallarında yararlanılan YSA 'nın pratik kullanımı genellikle çok farklı yapı ve formlarda bulunabilen enformasyon verilerini hızlı bir şekilde tanımlama ve algılama üzerinedir. Mühendislik uygulamalarında YSA 'nın geniş çaplı kullanımının temel nedeni ise, klasik tekniklerle çözümü zor olan problemler için etkin bir alternatif oluşturmalarıdır.

YSA çevre şartlarına göre davranışlarını şekillendirebilir. Girişler ve bunlara karşılık istenilen çıkışların sisteme verilmesi ile kendisini farklı cevaplar verebilecek şekilde ayarlayabilir.

YSA paralel dağılmış bir bilgi işleme sistemidir ve son derece karmaşık bir içyapısı vardır. Bu sistem işaret kanalları (bağlantılar) ile birbirine bağlanan işlem elemanlarından oluşur. Her bir işlem elemanı, düğüm veya nöron adı verilen lineer olmayan bir devredir. Düğümler arasındaki bağlantılar tek yönlü iletim yolu olarak görev yaparlar. Her işlem elemanı istenilen sayıda giriş bağlantısı ve tek bir çıkış bağlantısı alabilir. Ancak bu tek çıkış birçok hücreyi besleyebilir. Ağdaki tek gecikme çıkışları ileten bağlantı yollarındaki iletim gecikmeleridir. İşlem elemanının çıkışı istenilen matematiksel tipte olabilir.

YSA, katman adı verilen birtakım alt bölümlere ayrılabilir. Ağ, katmanların birbirlerine hiyerarşik bir şekilde bağlanmalarından oluşmuştur. Her katmanda belirli sayılarda düğüm mevcuttur. Dışarıdan alınan bilgi giriş katmanı vasıtasıyla ağa taşınır; burada herhangi bir transfer fonksiyonu yoktur. Bilgi buradan ara (gizli) katmanlara aktarılır. Bu bölümlerdeki elemanların transfer fonksiyonları aynıdır. Her düğümde bulunan transfer fonksiyonu ve yerel bellek elemanı, bir öğrenme kuralı ile giriş/çıkış işareti arasındaki bağıntıya göre ayarlanır.

Bilgiyi saklama şekli YSA 'nın önemli bir özelliğidir. Toplam bellek, birçok yerel bellek oluşturularak dağıtılır. Bağlantı ağırlıkları bellek biçimleridir. Ağırlıkların değerleri ağın o andaki bilgi durumunu temsil eder. Örneğin, bir "verilen giriş/istenilen çıkış" çiftine ait bilgi parçası ağın içinde birçok belleğe dağıtılmıştır. Lineer olmayan çok katmanlı ağlar gizli katmandaki özelliklerden öğrenirler ve bunları o anda bellekte mevcut olan bilgi ile birleştirerek istenilen çıkışları üretmeğe çalışırlar.

Katmanların birbirlerine bağlanmalarını sağlayan bağlantıların geometrisi de farklı şekillerde olabilmektedir. Hedef bölgesindeki her işlem elemanı kaynak bölgesindeki her elemana bağlı ise buna *tam bağlı* denilir. Bizim çalışmamızda kullanılan ağ, tam bağlı bir ağıdır. Eğer hedef bölgesindeki bir eleman kaynak bölgesindeki elemanların bir kısmına bağlı ise buna *düzensiz dağılım* denilir. Hedef bölgesindeki her eleman kaynak bölgesindeki bir tek elemana bağlı ise buna da *bire-bir bağlı* denilir. (Karlık, 1994)

YSA 'da kullanılan başlıca iki tip ağ vardır:

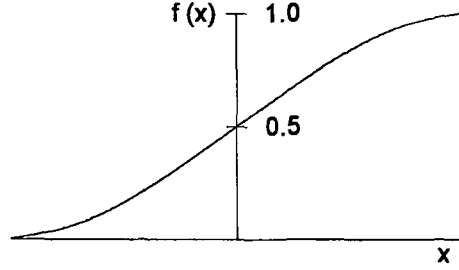
1- İleri beslemeli ağ: Her bir katmandaki hücreler sadece bir önceki katmanın hücrelerince beslenir. Bizim çalışmamızda bu ağ tipi kullanılmıştır.

3- Geri beslemeli ağ: Hücreler sadece önceki katmanın hücrelerince değil, sonraki katmanlardaki hücrelerce de beslenir.

Eşik fonksiyonu olarak da adlandırılan transfer fonksiyonları gelen girişleri, önceden belirlenmiş sınırlarda çıkış olarak düzenlerler. Yaygın olarak kullanılan eşik fonksiyonları rampa, basamak ve sigmoid fonksiyonlarıdır. Bizim çalışmamızda denklemin aşağıda verilen sigmoid fonksiyonu kullanılmıştır.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (5.1)$$

Bu fonksiyon seviyeli, lineer olmayan çıkış veren, sınırlı, ve monoton artan bir fonksiyondur. Fonksiyonun grafiği Şekil 5.1 'de görülmektedir.



Şekil 5.1. Sigmoid fonksiyonunun grafiği

Her işlem elemanı kendisine verilen yerel veriye göre kendisini ayarlar; böylece ağ kendi kendisini eğitmeye başlar. Her iterasyonda işlem elemanlarının ağırlıkları yeniden ayarlanarak ortalama karesel hata en aza indirilmeye çalışılır.

Eğitime işlemde yararlanılan belli eğitime algoritmaları vardır. Bunlar eldeki problemin özelliğine göre öğrenme kuralını YSA 'ya nasıl adapte edeceğimizi belirtir. Üç çeşit eğitime algoritması yaygın olarak kullanılmaktadır:

1- Öğreticili eğitime: Bu durumda elimizde doğru örnekler vardır. Yani, (x_1, x_2, \dots, x_n) şeklindeki giriş vektörünün (o_1, o_2, \dots, o_n) şeklindeki çıkış vektörü tam ve doğru olarak bilinmektedir. Her bir $(x_1, o_1), (x_2, o_2), \dots, (x_n, o_n)$ çifti için ağ doğru sonuçları verecek şekilde seçilen bir öğrenme kuralıyla eğitilir.

2- Skor ile eğitime: Giriş işaretlerine karşılık gelen çıkış işaretleri tam olarak bilinmemektedir. Bu yüzden çıkış işareti yerine skor verilir ve ağ bu şekilde değerlendirilir. Özellikle kontrol uygulamaları için idealdir ve çeşitli maliyet fonksiyonlarında kullanılır.

3- Kendini düzenleme ile eğitime: Bu durumda ağ giriş işaretlerine göre kendini düzenleyerek organize eder. Olasılık yoğunluk fonksiyonlarına, sınıflandırma ve şekil tanıma problemlerine uygulanabilir.

Bizim çalışmamızda öğreticili eğitime algoritması kullanılmıştır. Öğrenme kuralı, ne tür eğitime algoritması kullanılırsa kullanılsın, ağırlıkların verilen eğitime örneğine göre nasıl ayarlanacağını gösterir. Öğrenme kuralının oluşturulması için bir örneğin ağa defalarca

tanıtılması gerekebilir. Öğrenme kuralı ile ilişkili parametreler ağın zaman içinde gelişme kaydetmesiyle değişebilir.

Bilginin kurallar şeklinde açıklandığı klasik uzman sistemlerin tersine YSA, gösterilen örnekten öğrenerek kendi kurallarını oluşturur. Öğrenme, giriş örneklerine ve bu girişlerin çıkışlarına bağlı olarak ağın bağlantı ağırlıklarını değiştiren veya ayarlayan öğrenme kuralı ile gerçekleştirilir. Öğreticili eğitimde her giriş işareti için istenen çıkış sisteme tanıtılır ve YSA giriş/çıkış ilişkisini gerçekleştirene kadar kademe kademe kendini ayarlar. Rastlantısal, performans, kompetitif, filtreleme, spotitemporal ve genelleştirilmiş delta kuralı gibi çeşitli öğrenme kuralları mevcuttur. Bizim çalışmamızda genelleştirilmiş delta kuralı kullanılmıştır.

Genelleştirilmiş delta kuralı, çok-katmanlı perceptron ile birlikte kullanılmaktadır. Çok-katmanlı perceptron bir giriş katmanına, muhtelif gizli katmanlara ve bir çıkış katmanına sahiptir. Tanınması gereken seti ifade eden giriş vektörü giriş katmanı tarafından alınır. Ağ içinde yapılan işlemler sonucunda çıkış katmanında oluşan çıkış değerleri istenen cevaplar ile karşılaştırılır. Bulunan cevap ile istenen cevap arasında herhangi bir farklılık varsa ağırlıklar bu farkı azaltacak şekilde yeniden düzenlenir ve gerekirse hata belirtilir. Hata işareti gizli katmanlardan çıkış katmanına doğru olan ağırlıkları değiştirmekte kullanılır. Ancak gizli katmanlardan ne tür bir çıkış istendiği bilinmeyeceği için gizli katmandaki düğümlerin çıkışında hata işareti verilmesi kolay bir şey değildir. Bunun yerine gizli katmanlardaki her bir düğümün çıkış katmanındaki düğümlerin hatalarına olan etkisi bilinmelidir. Bunun için gizli katmandaki düğüme bağlı olan çıkış düğümlerinin hata işaretlerinin ağırlıklı toplamı alınır. Birden fazla gizli katmana sahip sistemlerde her katmanın hata işaretleri bir önceki katmanın düzeltilmiş işaretlerinden çıkartılarak işlem tekrarlanır. Sonuç olarak, ağırlık düzeltme işlemi çıkış seviyesine bağlı ağırlıklardan başlar ve geriye doğru giriş seviyesine varana kadar devam eder. Sistem hatalar yapar ama bu hatalardan bir şeyler öğrenerek istenileni bulana dek işlemi tekrar eder. Bu yöntem hatanın geriye yayılması algoritması adı verilir. Hatanın geriye yayılması algoritması, karesi alınmış hata fonksiyonunu minimize eden kodlu bir algoritma olup genelleştirilmiş delta kuralını eğitmek için kullanılır. Algoritma (Zurada, 1992) ana hatlarıyla aşağıda özetlenmiştir.

x ve o vektörleri sırasıyla giriş ve çıkış vektörleri olsun:

$$x_j = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^t \quad (5.2a)$$

$$o_i = [o_1 \quad o_2 \quad \dots \quad o_m]^t \quad (5.2b)$$

w_{ij} ağırlığı i 'inci nöronu j 'inci girişe birleştiren bağlantının ağırlığı olarak tanımlanırsa, i 'inci nöronun aktivasyon değeri

$$\text{net}_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.3)$$

olur. Bu değer, nöronun transfer fonksiyonuna (sigmoid fonksiyonu) tabi tutularak nöronun çıkış değeri şu şekilde oluşturulur

$$o_i = f(w_i^t x) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.4)$$

burada w_i ağırlık vektörü i 'inci çıkış düğümüne doğru olan ağırlıkları ifade eder. Nonlineer matris operatörü Γ tanımlanarak, ağın x giriş uzayını o çıkış uzayına eşlemesi şöyle ifade edilebilir:

$$o = \Gamma[Wx] \quad (5.5)$$

Burada W , ağırlık veya bağlantı matrisi olarak adlandırılan şu matristir

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.6a)$$

ve

$$\Gamma[\cdot] = \begin{bmatrix} f(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\cdot) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\cdot) \end{bmatrix} \quad (5.6b)$$

şeklinde dir. Giriş ve çıkış vektörleri genellikle giriş ve çıkış örüntüleri olarak da adlandırılır. Burada her bir giriş örüntüsü ileri-besleme eşlemesi ile kendisine karşılık gelen çıkış örüntüsüne gitmektedir. İstenen (hedeflenen) çıkış vektörü ise

$$t = [t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_m]^t \quad (5.7)$$

olsun. Buna göre belli bir p örüntüsü için çıkışlardaki karesel hata

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (t_{pi} - o_{pi})^2 = \frac{1}{2} \|t_p - o_p\|^2 \quad (5.8)$$

olur. Çıkış değerleri, W bağlantı ağırlıklarının fonksiyonu olduğu için, global hata (E) de W 'ye bağlıdır. Bundan sonra hatanın minimize edilmesi için ağırlık ayarlamaları yapılarak ağ tekrar tekrar eğitilir. İstenilen neticeye ulaşabilmek için, $\partial E / \partial W_{ij}$ kısmi türevi W tarafından değerlendirilir ve her nöron için şu şekilde bir ağırlık ayarlama değeri oluşturulur:

$$\Delta w_{ij} = \Lambda \delta_{pi} x_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

Burada, Λ öğrenme hızına, δ_{pi} ise i nöronunun hata sinyaline karşılık gelmektedir. Bu hata sinyali terimi delta öğrenme kuralında ağırlık ayarlamasını yapmak için kullanılır. Öğrenme hızı terimi, $0.01 < \Lambda < 1$ aralığında seçilen sabit bir sayıdır. δ_{pi} şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\delta_{pi} = (t_{pi} - o_{pi}) o_{pi} (1 - o_{pi}) \quad \text{çıkış nöronları için} \quad (5.10a)$$

$$\delta_{pi} = o_{pi} (1 - o_{pi}) \sum_k \delta_{pk} w_{ki} \quad \text{gizli nöronlar için} \quad (5.10b)$$

Burada k gizli katman numarasını ifade etmektedir. Bu delta (δ_{pi}) terimi kullanılarak ağırlıklar yeniden ayarlanır ve istenilen düzeyde bir eşleme yeterliliğine ulaşıncaya kadar bu işleme devam edilir.

Pratikte, istenen sonuçlara daha hızlı yakınsamayı sağlamak için (5.9) denklemine çoğu zaman bir momentum terimi (v) eklenmektedir. Momentum terimi eklendikten sonra ağırlıklar şu şekilde yeniden ayarlanmaktadır:

$$\Delta w_{ij}(n+1) = \Lambda \delta_{pi} x_j + v \Delta w_{ij}(n) \quad (5.11)$$

Burada n iterasyon sayısını ifade etmektedir. Momentum terimi $0 < v < 1$ aralığında seçilen sabit bir sayıdır.

5.2. Asma köprülerin tabii frekanslarının bulunması

Asma köprülerin simetrik enine modlarının tabii frekanslarını veren (4.3) denkleminde ℓ_1 , ℓ_2 , H_w , w_b , I_s ve S_k olmak üzere toplam 6 boyutsuz parametre mevcuttur. Üç açıklıklı asma köprülerde kenar/orta açıklıkların boylarının oranı genellikle 1/3 civarında olduğu (Abdel-Ghaffar, 1976) için, bir kabul yapılarak $\ell = \ell_2 = 3\ell_1$ olarak alınmıştır. Böylece giriş parametrelerinin sayısı bir azaltılarak 5 olarak belirlenmiştir. Çıkış parametreleri olarak ise ilk üç simetrik enine modun tabii frekansları seçilmiştir. Boyutsuz frekans değerlerinin yeniden boyutlu frekans değerlerine çevrilmesine gerek kalmaması için eğitimde doğrudan boyutlu frekans (rad/sn) değerleri kullanılmıştır. Örnek olması amacıyla birkaç giriş/çıkış seti Çizelge 5.1 'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1. Örnek giriş ve çıkış setleri

Giriş Setleri					Çıkış Setleri		
ℓ	H_w	w_b	I_s	S_k	ω_1	ω_2	ω_3
2.5	$8 \cdot 10^{-9}$	0.64	$18 \cdot 10^{-10}$	$20 \cdot 10^{-7}$	1.748	4.308	6.055
2.5	$3 \cdot 10^{-9}$	0.80	$6 \cdot 10^{-10}$	$14 \cdot 10^{-7}$	1.602	4.983	6.318
4.2	$15 \cdot 10^{-9}$	0.48	$30 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-7}$	0.811	1.647	2.747
4.2	$27.5 \cdot 10^{-9}$	0.64	$18 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-7}$	0.726	1.751	1.986
5.8	$15 \cdot 10^{-9}$	0.32	$6 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-7}$	0.669	1.398	1.703
5.8	$39 \cdot 10^{-9}$	0.22	$30 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-7}$	0.723	1.428	2.149
7.5	$21 \cdot 10^{-9}$	0.32	$30 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-7}$	0.551	1.249	1.433
7.5	$50 \cdot 10^{-9}$	0.32	$40 \cdot 10^{-10}$	$14 \cdot 10^{-7}$	0.563	1.290	1.696

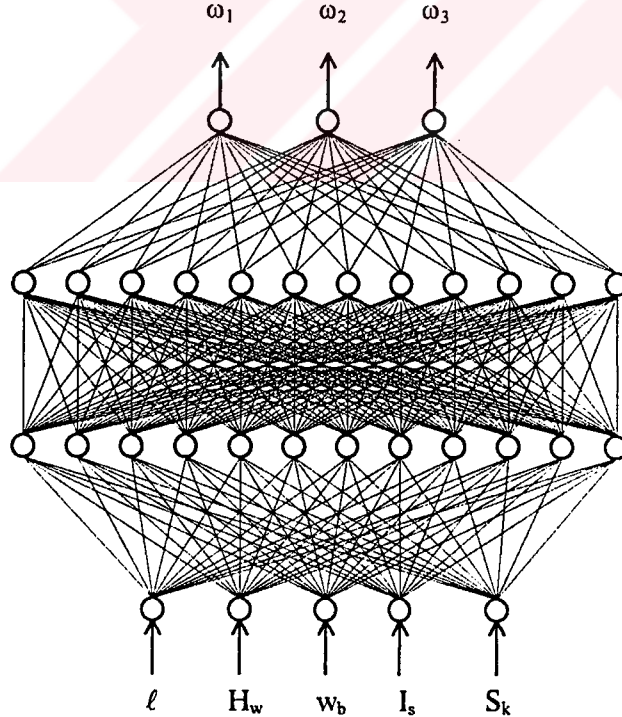
Giriş setlerinin hazırlanmasında Çizelge 5.2 'de verilen değerler kullanılmıştır. Bu değerler kullanılarak giriş setleri oluşturulurken, tüm değerlerin kombinasyonunu almak yerine, bunların fiziksel karşılıkları göz önünde bulundurularak anlamlı setler olmalarına dikkat edilmiştir. Diğer bir deyişle, değerler seçilirken birbirleriyle uyumlu ve gerçeğe uygun olmalarına özen gösterilmiştir. Örneğin, kısa açıklıklı köprülerin tabiiye giriş kesiti atalet momentleri daha küçük ve taşıyıcı ana kablo gerilme kuvvetleri daha düşük değerlerden seçilirken, açıklık arttıkça bu değerler de uygun bir biçimde artırılmıştır. Giriş değerlerinin sık aralıklarla seçilmeleri eğitimdeki hata oranını düşürmektedir. Ancak bu kez de değer sayısı çok arttığı için hem bunların hazırlanması zorlaşmakta, hem de eğitim uzamaktadır. Bu iki kriter dikkate alınarak toplam 495 giriş seti oluşturulmuştur.

Çizelge 5.2. YSA eğitimi için hazırlanan giriş setlerinde kullanılan değerler

l	2.5 , 4.2 , 5.8 , 7.5
H_w	$3 \cdot 10^{-9}$, $8 \cdot 10^{-9}$, $15 \cdot 10^{-9}$, $21 \cdot 10^{-9}$, $27.5 \cdot 10^{-9}$, $39 \cdot 10^{-9}$, $50 \cdot 10^{-9}$
w_b	0.80 , 0.64 , 0.48 , 0.32 , 0.22
I_s	$6 \cdot 10^{-10}$, $18 \cdot 10^{-10}$, $30 \cdot 10^{-10}$, $40 \cdot 10^{-10}$
S_k	$3 \cdot 10^{-7}$, $8 \cdot 10^{-7}$, $14 \cdot 10^{-7}$, $20 \cdot 10^{-7}$

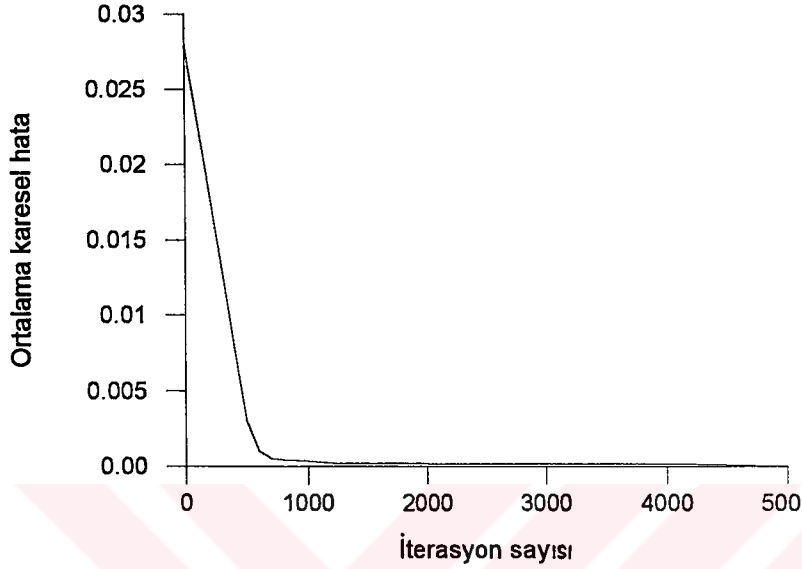
Çıkış seti olarak, en kritik modlar olmaları nedeniyle, ilk üç moda ait frekans değerleri seçilmiştir. Bu değerler denklem (4.3) 'ten Newton-Raphson yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu iş için Mathematica adlı paket bilgisayar programı kullanılmıştır. Böylece beş değerden oluşan her giriş seti için, üç değerden oluşan bir çıkış seti hazırlanmıştır. Momentum ve öğrenme hızı değerleri sırasıyla 0.9 ve 0.7 olarak alınmıştır. Bu değerler deneme-yanılma ile bulunmuştur. Ağırlıkların modifiye edildiği optimizasyonda, hatanın geri yayılımı algoritması kullanılmıştır.

Algoritmanın eğitilmesinde iyi bir sonuç alabilmek için 50000 iterasyon yapılmıştır. Kullanılan YSA mimarisi Şekil 5.1 'de görülen 5:12:12:3 çok katmanlı mimaridir. Bu mimari de yine deneme-yanılma yoluyla bulunmuştur.



Şekil 5.2. Kullanılan YSA mimarisi

Eğitme fazında ortalama karesel hatanın iterasyon sayısına göre azalma grafiği Şekil 5.2 'de verilmiştir. Buradan da görüldüğü gibi, ilk 5000 iterasyon sonunda hata sifıra oldukça yaklaşmaktadır. Ancak YSA ile bulunan sonuçların nümerik metodla hesaplanan sonuçlara çok yakın olması istendiği için 50000 iterasyona kadar eğitmeye devam edilmiştir.



Şekil 5.3. Ortalama karesel hatanın iterasyon sayısına göre azalma grafiği

Eğitme değerleri için YSA algoritmasının hata oranları Çizelge 5.3 'te verilmiştir.

Çizelge 5.3. Eğitim değerleri için YSA algoritmasının hata oranları

	ω_1	ω_2	ω_3
Maksimum hata (%)	3.019	2.999	3.026
Ortalama hata (%)	0.849	0.738	0.838

Ayrıca algoritmanın eğitilmesi tamamlandıktan sonra diğer bazı test değerleri için Newton-Raphson metodunun sonuçları ile YSA sonuçlarının karşılaştırılması yapılmıştır. Bu değerler Çizelge 5.4 'te görülmektedir.

Çizelge 5.4. Bazı test değerleri için Newton-Raphson metodunun sonuçları ile YSA sonuçlarının karşılaştırılması

No	ℓ	H_w	w_b	I_s	S_k	Newton - Raphson			YSA		
						ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	3.0	$5 \cdot 10^{-9}$	0.60	$10 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-7}$	1.296	2.978	4.315	1.306	2.945	4.401
2	3.8	$15 \cdot 10^{-9}$	0.44	$20 \cdot 10^{-10}$	$15 \cdot 10^{-7}$	1.057	2.667	3.086	1.075	2.664	3.114
3	4.0	$20 \cdot 10^{-9}$	0.56	$30 \cdot 10^{-10}$	$10 \cdot 10^{-7}$	0.888	2.209	2.593	0.906	2.234	2.613
4	4.5	$26 \cdot 10^{-9}$	0.50	$16 \cdot 10^{-10}$	$12 \cdot 10^{-7}$	0.766	1.840	2.191	0.767	1.862	2.199
5	4.8	$15 \cdot 10^{-9}$	0.60	$34 \cdot 10^{-10}$	$10 \cdot 10^{-7}$	0.750	2.021	2.828	0.766	2.022	2.893
6	5.0	$20 \cdot 10^{-9}$	0.40	$14 \cdot 10^{-10}$	$15 \cdot 10^{-7}$	0.779	1.853	2.515	0.776	1.845	2.529
7	5.2	$30 \cdot 10^{-9}$	0.30	$20 \cdot 10^{-10}$	$13 \cdot 10^{-7}$	0.811	1.797	2.109	0.812	1.794	2.080
8	5.5	$25 \cdot 10^{-9}$	0.24	$16 \cdot 10^{-10}$	$18 \cdot 10^{-7}$	0.869	2.003	2.259	0.871	2.000	2.254
9	6.0	$16.5 \cdot 10^{-9}$	0.30	$20 \cdot 10^{-10}$	$12 \cdot 10^{-7}$	0.755	1.825	2.380	0.752	1.819	2.376
10	6.2	$21 \cdot 10^{-9}$	0.28	$40 \cdot 10^{-10}$	$10 \cdot 10^{-7}$	0.758	1.847	2.094	0.756	1.835	2.100
11	6.5	$22.5 \cdot 10^{-9}$	0.24	$28 \cdot 10^{-10}$	$13 \cdot 10^{-7}$	0.759	1.812	2.087	0.751	1.807	2.085
12	6.8	$36 \cdot 10^{-9}$	0.28	$10 \cdot 10^{-10}$	$15 \cdot 10^{-7}$	0.649	1.453	1.857	0.639	1.449	1.828
13	7.0	$33 \cdot 10^{-9}$	0.24	$24 \cdot 10^{-10}$	$17 \cdot 10^{-7}$	0.692	1.594	1.971	0.681	1.604	1.937
14	7.2	$36 \cdot 10^{-9}$	0.32	$30 \cdot 10^{-10}$	$10 \cdot 10^{-7}$	0.585	1.352	1.689	0.575	1.351	1.700
15	7.4	$32.5 \cdot 10^{-9}$	0.24	$36 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-7}$	0.636	1.422	1.633	0.630	1.423	1.636

Test değerleri için YSA algoritmasının hata oranları ise Çizelge 5.5 'te verilmiştir.

Çizelge 5.5. Test değerleri için YSA algoritmasının hata oranları

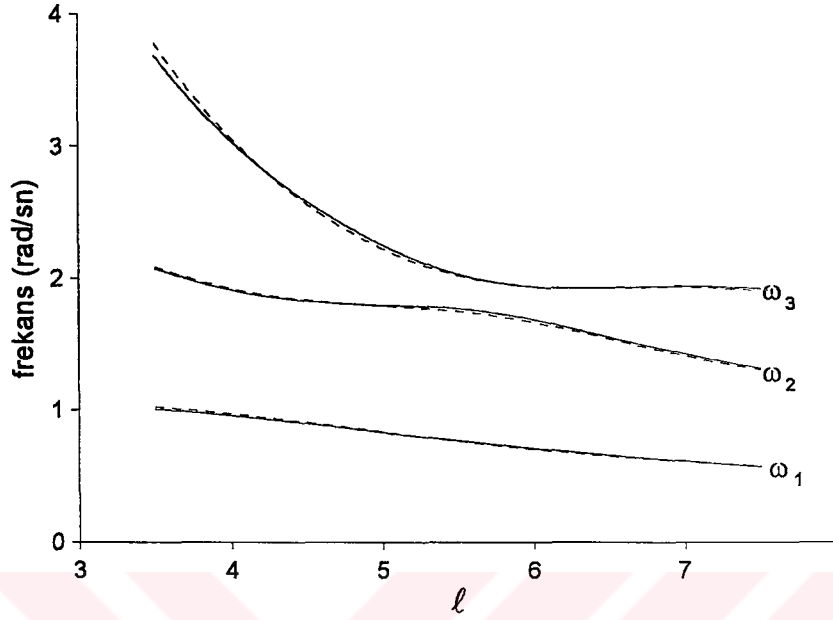
	ω_1	ω_2	ω_3
Maksimum hata (%)	2.156	1.216	2.289
Ortalama hata (%)	1.011	0.442	0.878

Görüldüğü gibi gerek eğitim değerleri gerekse de test değerleri için ortalama hata oranları %1 civarındadır. Bu da oldukça iyi bir sonuçtur. Elde edilen bu eğitilmiş YSA algoritması kullanılarak, istenilen bütün ℓ , H_w , w_b , I_s ve S_k değerleri için ilk üç tabii frekans değeri doğrudan ve çok az bir hata ile rahatlıkla hesap edilebilmektedir.

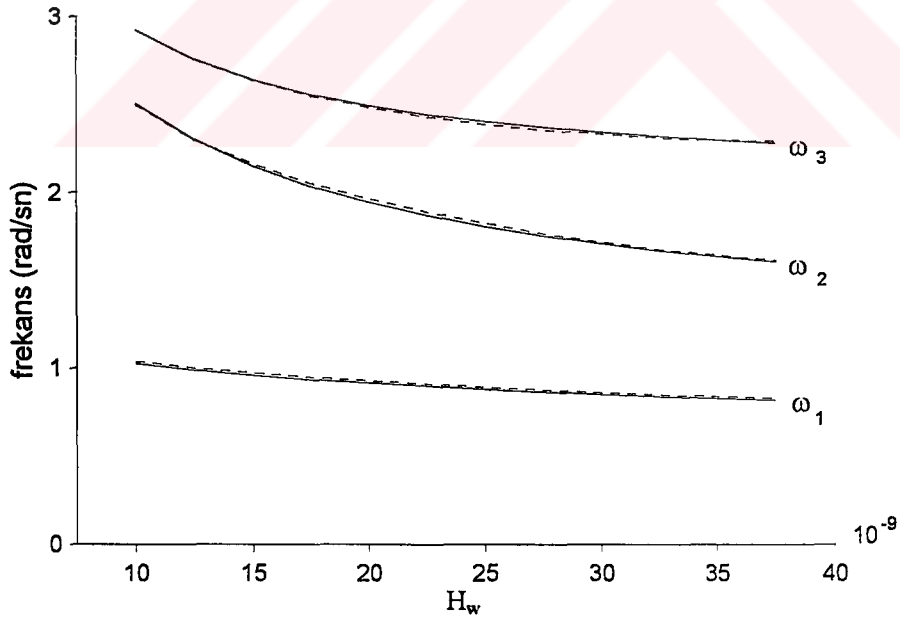
5.3. Asma köprülerin tabii frekanslarının köprünün özelliklerine göre değişimi

Bu bölümde asma köprülerin simetrik enine modlarının tabii frekanslarının ℓ , H_w , w_b , I_s ve S_k parametrelerine göre değişimi grafiklerle gösterilmiştir. Grafiklerde hem Newton-

Raphson metodu ile bulunan değerler, hem de YSA ile bulunan değerler verilerek aynı zamanda sonuçların birbirlerine yakınlığı da gösterilmiştir.



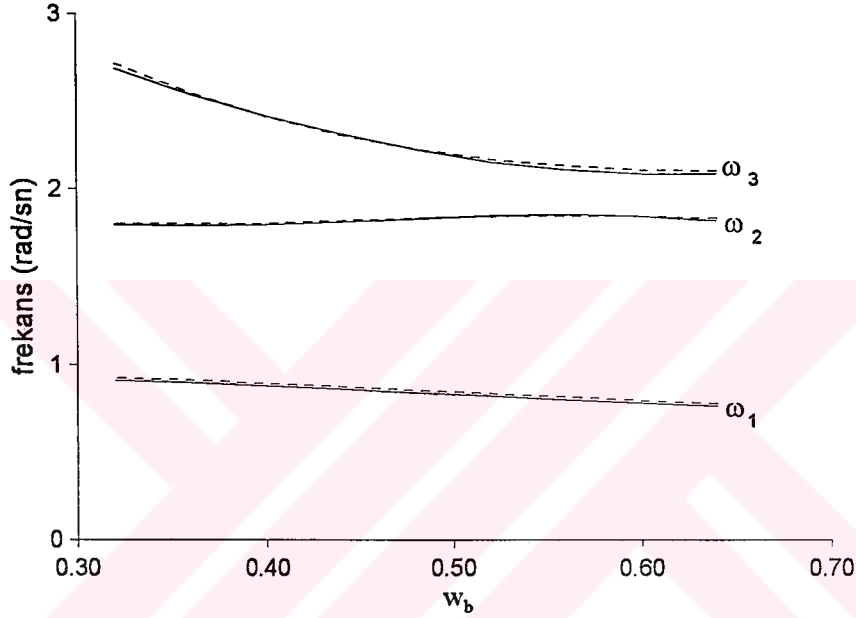
Şekil 5.4. Tabii frekansın l boyutsuz parametresine göre değişimi (New-Raph —, YSA...)
 ($H_w = 20 \cdot 10^{-9}$, $w_b = 0.32$, $I_s = 20 \cdot 10^{-10}$, $S_k = 8 \cdot 10^{-7}$)



Şekil 5.5. Tabii frekansın H_w boyutsuz parametresine göre değişimi (New-Raph —, YSA...)
 ($l = 4.5$, $w_b = 0.32$, $I_s = 16 \cdot 10^{-10}$, $S_k = 10 \cdot 10^{-7}$)

Şekil 5.4 'te tabii frekansın ℓ boyutsuz parametresine göre değişimi görülmektedir. Bu parametre doğrudan köprünün açıklık boyu ile orantılıdır. Köprünün açıklık boyu arttıkça tabii frekanslar azalmaktadır. Bu durum üst modlarda daha belirgin hale gelmektedir. Buna göre, uzun açıklıklı köprülerin titreşim periyotları da büyük olmaktadır.

Şekil 5.5 'te tabii frekansın H_w boyutsuz parametresine göre değişimi görülmektedir. Bu parametre kablo gerilmesinin yatay bileşeni ile doğru, tabliye kirişinin elastisite modülü ile ters orantılıdır. Buna göre, kablo gerilmesi arttıkça tabii frekanslar azalmaktadır. Ayrıca, tabliye kirişinin elastisite modülü arttıkça tabii frekanslar da artmaktadır.

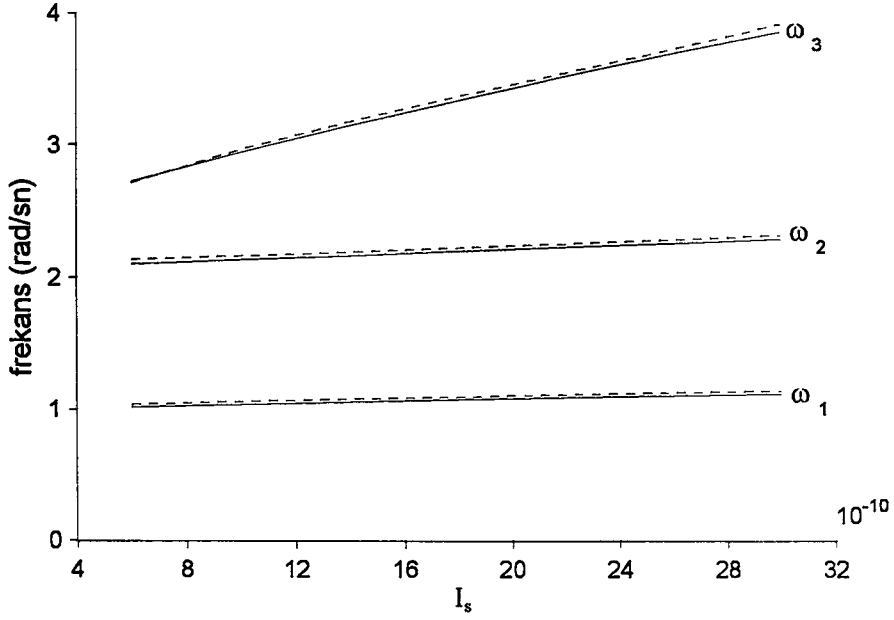


Şekil 5.6. Tabii frekansın w_b boyutsuz parametresine göre değişimi (New-Raph —, YSA...)

$$(\ell = 4.0, H_w = 20 \cdot 10^{-9}, I_s = 10 \cdot 10^{-10}, S_k = 7 \cdot 10^{-7})$$

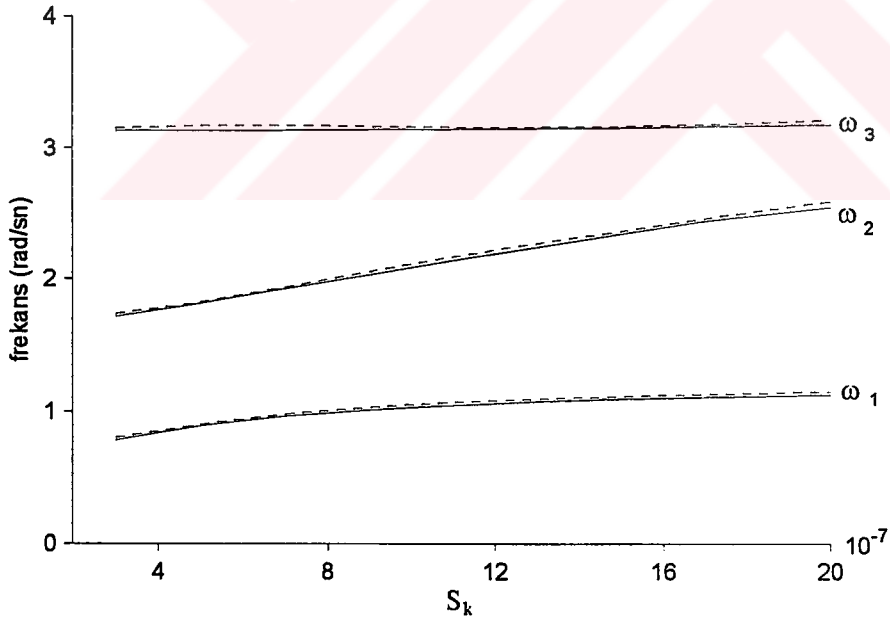
Şekil 5.6 'da tabii frekansın w_b boyutsuz parametresine göre değişimi görülmektedir. Bu parametre köprünün birim boyunun zati ağırlığı ile orantılıdır. Zati ağırlık arttıkça birinci ve üçüncü modlarda tabii frekanslar azalmakta, ikinci modun tabii frekansı ise fazla bir değişiklik göstermemektedir. Buna göre, zati ağırlıktaki artışın tabii frekansı azalttığı söylenebilir.

Şekil 5.7 'de tabii frekansın I_s boyutsuz parametresine göre değişimi görülmektedir. Bu parametre tabliye kirişinin yatay eksene göre atalet momenti ile orantılıdır. Atalet momenti arttıkça tabii frekanslar artmaktadır; artış üçüncü modda daha belirgin hale gelmektedir.



Şekil 5.7. Tabii frekansın I_s boyutsuz parametresine göre değişimi (New-Raph —, YSA...)

$$(\ell = 3.5, H_w = 17.5 \cdot 10^{-9}, w_b = 0.40, S_k = 10 \cdot 10^{-7})$$



Şekil 5.8. Tabii frekansın S_k boyutsuz parametresine göre değişimi (New-Raph —, YSA...)

$$(\ell = 3.5, H_w = 20 \cdot 10^{-9}, w_b = 0.40, I_s = 16 \cdot 10^{-10})$$

Şekil 5.8 'de tabii frekansın S_k boyutsuz parametresine göre değişimi görülmektedir. Bu parametre kablonun elastisite modülü ve kesit alanı ile doğru, tabliye kirişinin elastisite modülü ve uygulamadaki kablo boyu ile ters orantılıdır. Birinci ve üçüncü modlarda tabii frekansta belirgin bir değişiklik olmayıp sadece ikinci modda S_k arttıkça tabii frekans artmaktadır. Buna göre, bu parametrenin değişiminden kesin bir sonuç çıkarmak sağlıklı olmayacaktır.



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada asma köprülerin etkileşimli nonlineer enine ve burulma titreşimleri incelenmiştir. Hem serbest hem de zorlamalı-sönümlü titreşimler ayrı ayrı tetkik edilmiştir.

Bölüm 2 'de nonlineer hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Denklemler boyutsuzlaştırıldıktan sonra zorlama ve sönüm terimleri ilave edilmiştir.

Bölüm 3 'de yaklaşık analitik çözümler bulmak için bir perturbasyon tekniği olan Çok Zaman Ölçekli Metod kullanılmıştır. Denklemler genellikle yapıldığı gibi diskritize edilmemiş, perturbasyon metodu kısmi diferansiyel denklemlere direkt olarak uygulanmıştır. Problemin lineer kısmını teşkil eden ilk mertebede, tabii frekansları veren geçiş denklemleri, simetrik ve asimetrik modlar için ayrı formlarda olduklarından dolayı her iki durum için çözümler ayrı ayrı elde edilmiştir. Her iki durum için tabii frekansları veren denklemler çıkarılmıştır. İkinci mertebede simetrik modların çözüm fonksiyonları çok karmaşık olduğu için sadece asimetrik modların çözüm fonksiyonları bulunmuştur. Burada kenar ve orta açıklıklar için farklı çözüm fonksiyonları olduğu görülmüştür. Üçüncü mertebede önce çözülebilirlik şartları çıkarılmıştır. Daha sonra titreşimlerin faz ve genliklerinin zamanla değişimini gösteren denklemler elde edilmiştir. Bundan sonra serbest ve zorlamalı titreşimler ayrı ayrı incelenmiştir. Serbest titreşimlerde üç ayrı durum göz önünde bulundurulmuştur: (1) enine titreşimlerin baskın olduğu durum, (2) burulma titreşimlerinin baskın olduğu durum, (3) enine titreşim tabii modlarından birinin burulma titreşimi tabii modlarından birine çok yakın olduğu durum. İlk iki durumda, yer değiştirme ve burulma açısı fonksiyonları elde edilmiş, nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimini gösteren denklemler çıkarılmış ve yumuşama ile sertleşme davranışlarının kriterleri tespit edilmiştir. Üçüncü durumda etkileşimin kuvveti ile her iki mod arasında meydana gelen enerji alışverişi incelenmiş, serbest titreşim genliklerinin zamanla değişimi gösterilmiştir. Ayrıca düzgün rejim çözümleri analiz edilmiştir. Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde iç rezonansın olmadığı ve olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Birinci durumda enine titreşimler için frekans-tepki denklemi çıkarılarak düzgün rejim tepkisinin tamamen zorlamanın frekansına ve fazına bağlı olduğu görülmüştür. Frekans-tepki eğrisini çizmek için gerekli olan denklem çıkarılarak lineer ve nonlineer tepki eğrilerinin karşılaştırması yapılmıştır. Tepki eğrisinin, lineer durumda düz iken, sertleştirici nonlineerlik durumunda sağa yatık, yumuşatıcı nonlineerlik durumunda sola yatık hale geldiği görülmüştür. Her iki nonlineer durumda da nonlineer faz-genlik etkileşiminin neticesi olarak ortaya çıkan çok-değerli bölgeler ve sıçrama hadisesi izah edilmiştir. İkinci durumda düzgün rejim çözümleri incelenerek bu duruma ait frekans-tepki denklemi çıkarılmıştır.

Bölüm 4 'te, önceki bölümde elde edilen analiz sonuçları iki asma köprüye uygulanmıştır (Vincent-Thomas köprüsü ve Golden Gate köprüsü). Köprülerin tabii frekansları hesaplanmıştır. Enine ve burulma titreşimlerinin baskın olduğu durumlar için frekans-genlik spektrumları ayrı ayrı çıkarılmıştır. Frekans, ilk modlarda, genliğin büyümesiyle fazla değişmezken, üst modlara gidildikçe hızlı değişmeye başlamıştır. Her iki köprünün ilk beş modunda da sertleşme kriterlerinin sağlandığı görülmüştür.

Serbest titreşimlerde birbirine yakın enine ve burulma modlarının etkileşimli hareketleri incelenmiş ve değişik başlangıç genlik ve faz değerleri için genliklerin ve fazın zamanla değişimini gösteren grafikler nümerik integrasyon ile elde edilmiştir. Birbirlerine en yakın modlar oldukları için Golden Gate köprüsüne ait ikinci asimetrik enine titreşim modu ile birinci asimetrik burulma titreşim modu seçilmiştir. Enine titreşim genlikleri artarken burulma titreşim genliklerinin azaldığı ve enine titreşim genlikleri azalırken burulma titreşim genliklerinin arttığı görülmüştür. Bu durum, modlar arasında etkileşim olmadığını kabul eden lineer teorinin aksini göstermektedir.

Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde iç rezonansın olmadığı durumda farklı modlar, sönüm katsayıları ve zorlama genlikleri için frekans-tepki eğrileri çizilmiştir. Zorlama frekansı ile enine frekans arasındaki yakınlığı ifade eden ayar parametresinin (σ) değeri ilk modlarda büyük genliklere neden olurken, üst modlara gidildikçe genlikler azalmaktadır. Zorlama fonksiyonunun genliği arttıkça, frekans-tepki eğrileri $\sigma = 0$ ekseninden sağa doğru eğilmektedir. Zorlama fonksiyonunun genliğinin çok küçük değerleri için bu eğriler tek değerli iken, zorlama genliği büyüdükçe eğriler çok-değerli hale gelmektedir. Bu durumda eğrilerde kararsız bölgeler oluşmakta ve sıçrama hadisesi meydana gelmektedir.

Zorlamalı ve sönümlü titreşimlerde iç rezonansın olduğu durumda değişik başlangıç genlik ve faz değerleri, zorlama genlikleri ve sönümlenme katsayısı değerleri için genliklerin ve fazların zamanla değişimini gösteren eğriler nümerik integrasyon yoluyla elde edilmiştir. Başlangıç genlik ve faz değerleri ne olursa olsun sistemin belli bir geçiş sürecinden sonra belirli düzgün rejim değerlerine ulaştığı görülmüştür. Geçiş bölgelerinde önemsiz farklılıklar olmakla birlikte, düzgün rejim genlik değerleri başlangıç değerlerinden tamamen bağımsız olup sistemin enerji seviyesi ile orantılıdır. Ayrıca sıfırdan farklı başlangıç genlik değerlerinde sistemin düzgün rejime ulaşması çok daha kısa bir sürede olmuştur. Zorlama genliğinin belli bir değerin altında kaldığı durumda, sistemin enerji seviyesinin etkileşimden dolayı herhangi bir burulma titreşimi meydana gelmesine yetmediğini görülmüştür. Sönüm arttıkça, modal genlik-zaman eğrileri daha az salınım yaparak ve daha kısa sürede düzgün rejim değerlerine ulaşmaktadır.

Bölüm 5 'te, asma köprülerin tabii frekanslarının hızlı ve küçük hata miktarları ile hesaplanmasında alternatif bir metod olarak YSA 'nın kullanımı üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada ileri beslemeli, sigmoid transfer fonksiyonuna sahip, öğreticili eğitime algoritması ile eğitilmiş, genelleştirilmiş delta kuralı ve hatanın geriye yayılımının kullanıldığı bir YSA 'dan yararlanılmıştır. Giriş parametreleri olarak köprüye ait 5 adet boyutsuz parametre, çıkış parametreleri olarak ilk üç simetrik enine modun tabii frekansları seçilmiştir. Algoritmanın eğitimi için kullanılan giriş ve çıkış setlerinin hazırlanışı ve algoritmanın eğitilmesi izah edilmiştir. Gerek eğitim değerleri gerekse de test değerleri için ortalama hata oranları %1 civarındadır. Bu da oldukça iyi bir sonuçtur. Geliştirilen yöntemle farklı özelliklere sahip asma köprülerin tabii frekanslarının, sadece köprünün fiziksel özellikleri verilerek doğrudan, hızlı bir şekilde ve çok az bir hata ile hesaplanması mümkün olmaktadır. Asma köprülerin tabii frekanslarının köprünün özelliklerine göre değişimi YSA kullanılarak incelenmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda, etkileşimli denklemlerde bire bir haricindeki diğer iç rezonanslar ve ikincil rezonanslar incelenebilir ve bu rezonanslara ait durum düzlemleri bulunabilir. Bizim yaptığımız çalışmada sabit frekans ve genliklere sahip zorlamalar kullanıldı. Bundan sonra frekans ve genliği zamana bağlı olarak değişen zorlamalar dikkate alınarak çözüm yapılabilir ki bu tip zorlamalar kararsız (periyodik olmayan) rezonansları doğurur. Mafsal-mafsal tipi mesnetli giriş yerine sürekli giriş için çözümler yapılabilir. Yanal titreşimler analiz edilebilir. Bulunan analiz sonuçları başka asma köprülere uygulanabilir. Yaklaşık analitik yöntemle bulunan sonuçlar deneysel sonuçlarla karşılaştırılabilir. YSA, farklı kenar açıklık boyları ve burulma titreşimleri için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

1. Abdel-Ghaffar, A.M., 1976. Dynamic Analyses of suspension bridge structures. California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory, EERL 76-01, California, 1976.
2. Abdel-Ghaffar, A.M., 1978a. Free lateral vibrations of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 104: 503-525, 1978.
3. Abdel-Ghaffar, A.M., 1978b. Vibration studies and tests of a suspension bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6: 473-496, 1978.
4. Abdel-Ghaffar, A.M., and Housner, G.W., 1978. Ambient vibration tests of suspension bridges. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 104: 983-999, 1978.
5. Abdel-Ghaffar, A.M., 1979. Free torsional vibrations of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 105: 767-788, 1979.
6. Abdel-Ghaffar, A.M., 1980. Vertical vibration analysis of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 106: 2053-2075, 1980.
7. Abdel-Ghaffar, A.M., 1982. Suspension bridge vibration: Continuum formulation. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 108: 1215-1232, 1982.
8. Abdel-Ghaffar, A.M., and Rubin, L.I., 1982. Suspension bridge response to multiple-support excitations. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 108: 419-435, 1982.
9. Abdel-Ghaffar, A.M., and Rubin, L.I., 1983a. Nonlinear free vibrations of suspension bridges: Theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 109: 313-329, 1983.
10. Abdel-Ghaffar, A.M., and Rubin, L.I., 1983b. Nonlinear free vibrations of suspension bridges: Application. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 109: 330-345, 1983.
11. Abdel-Ghaffar, A.M., and Rubin, L.I., 1983c. Lateral earthquake response of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 109: 664-675, 1983.
12. Abdel-Ghaffar, A.M., and Rubin, L.I., 1983d. Vertical seismic behavior of suspension bridges. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 11: 1-19, 1983.
13. Abdel-Ghaffar, A.M., and Stringfellow, R.G., 1984. Response of suspension bridges to travelling earthquake excitations. *Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 3: 62-82, 1984.
14. Abdel-Ghaffar, A.M., and Scanlan, R.H., 1985. Ambient vibration studies of Golden Gate Bridge. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 111: 463-499, 1985.

15. Ahmed, N.U., and Harbi, H., 1998. Mathematical analysis of dynamic models of suspension bridges. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 55: 853-874, 1998.
16. Beliveau, J.G., Vaicaitis, Shinozuka, 1977. Motion of suspension bridge subject to wind loads. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 103: 1189-1205, 1977.
17. Bleich, F., McCullough, C.B., Rosecrans, R., and Vincent, G.S., 1950. The mathematical theory of vibration in suspension bridges. U.S. Government Printing Office, Washington, 1950.
18. Boyacı, H., 1998. Sürekli ortamların nonlinear titreşimlerine genel bir yaklaşım. Doktora Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 1998.
19. Boyacı, H., and Pakdemirli, M., 1997. A comparison of different versions of the method of multiple scales for partial differential equations. *Journal of Sound and Vibration*, 204: 595-607, 1997.
20. Brownjohn, J.M.W., Dumanoğlu, A.A., Severn, R.T., and Taylor, C.A., 1987. Ambient vibration measurements of the Humber suspension bridge and comparison with calculated characteristics. *Proc. Institution of Civil Engineers, Part 2*, 83: 561-600, 1987.
21. Brownjohn, J.M.W., Dumanoğlu, A.A., Severn, R.T., and Blakeborough, 1989. Ambient vibration survey of the Bosphorus suspension bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18: 263-283, 1989.
22. Brownjohn, J.M.W., Dumanoğlu, A.A., and Severn R.T., 1992. Ambient vibration survey of the Fatih Sultan Mehmet (Second Bosphorus) suspension bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21: 907-924, 1992.
23. Brownjohn, J.M.W., 1994a. Observations on non-linear dynamic characteristics of suspension bridges. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 23: 1351-1367, 1994.
24. Brownjohn, J.M.W., 1994b. Estimation of damping in suspension bridges. *Proc. Institution of Civil Engineers, Part 2*, 104: 401-415, 1994.
25. Brownjohn, J.M.W., 1997. Vibration characteristics of a suspension footbridge. *Journal of Sound and Vibration*, 202: 29-46, 1997.
26. Bryja, D., and Sniady, P., 1988. Random vibration of a suspension bridge due to highway traffic. *Journal of Sound and Vibration*, 125: 379-387, 1988.
27. Bryja, D., and Sniady, P., 1991. Spatially coupled vibrations of a suspension bridge under random highway traffic. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20: 999-1010, 1991.

28. Buckland, P.G., 1979. Suspension bridge vibrations: Computed and measured. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 105: 859-874, 1979.
29. Castellani, A., and Felloti, P., 1986. Lateral vibration of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 112: 2169-2173, 1986.
30. Chatterjee, Datta, Surana, 1994. Vibration of suspension bridges under vehicular movement. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 120: 681-703, 1994.
31. Dumanoğlu, A.A., and Severn, R.T., 1987. Seismic response of modern suspension bridges asynchronous vertical ground motion. *Proc. Institution of Civil Engineers, Part 2*, 83: 701-730, 1987.
32. Dumanoğlu, A.A., and Severn, R.T., 1989. Seismic response of modern suspension bridges asynchronous longitudinal and lateral ground motion. *Proc. Institution of Civil Engineers, Part 2*, 87: 73-86, 1989.
33. Dumanoğlu, A.A., and Severn, R.T., 1990. Stochastic response of suspension bridges to earthquake forces. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19: 133-152, 1990.
34. Dumanoğlu, A.A., Brownjohn, J.M.W., and Severn, R.T., 1992. Seismic analysis of the Fatih Sultan Mehmet (Second Bosphorus) suspension bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21: 881-906, 1992.
35. Harichandran, R.S., Hawwari, A., and Sweidan, B.N., 1996. Response of long-span bridges to spatially varying ground motion. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 122: 476-484, 1996.
36. Hayashikawa, T., and Watanabe, N., 1982. Suspension bridge response to moving loads. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 108: 1051-1066, 1982.
37. Hayashikawa, T., and Watanabe, N., 1984. Vertical vibration in Timoshenko beam suspension bridges. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 110: 341-356, 1984.
38. Hayashikawa, T., 1997. Torsional vibration analysis of suspension bridges with gravitational stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 204: 117-129, 1997.
39. Inbanathan, M., and Wieland, M., 1987. Bridge vibrations due to vehicle moving over rough surface. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 113: 1994-2008, 1987.
40. Irvine, H.M., 1974a. Torsional analysis of box-girder suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 100: 789-812, 1974.
41. Irvine, H.M., 1974b. Torsional vibrations in box-girder suspension bridges. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3: 203-214, 1974.

42. Irvine, H.M., 1980. The estimation of earthquake-generated additional tension in a suspension bridge cable. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8: 267-273, 1980.
43. Irvine, H.M., 1981. *Cable structures*. The MIT Press, Massachusetts, 1981.
44. Jain, A., Jones, and Scanlan, 1996. Coupled flutter and buffeting analysis of long span bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 122: 716-725, 1996.
45. Jennings, A., 1970. Approximate analysis of a single span suspension bridge using stress energy. *The Structural Engineer, ISE*, 48, 1970.
46. Jennings, A., 1983. Gravity stiffness of classical suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 109: 16-36, 1983.
47. Jones, N.P., and Spartz, C.A., 1990. Structural damping estimation for long-span bridges. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 116: 2414-2433, 1990.
48. Karlık, B., 1994. Çok fonksiyonlu protezler için yapay sinir ağları kullanılarak miyoelektrik kontrol. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 1994.
49. Kumarasena, T., Scanlan, R.H., and Morris, 1989a. Deer Isle Bridge: Efficacy of stiffening systems. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 115: 2297-2312, 1989.
50. Kumarasena, T., Scanlan, R.H., and Morris, 1989b. Deer Isle Bridge: Field and computed vibrations. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 115: 2313-2328, 1989.
51. Lazer, A.C., and McKenna, A.S., 1990. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with non-linear analysis. *SIAM Review*, 32: 537-578, 1990.
52. Littler, J.D., 1992. Ambient vibration tests on long span suspension bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 41: 1359-1370, 1992.
53. McLamore, V.R., Hart, G.C., and Stubbs, 1971. Ambient vibration two suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 97: 2567-2582, 1971.
54. Memory, T.J., Thambiratnam, D.P., and Brameld, G.H., 1995. Free vibration analysis of bridges. *Engineering Structures*, 17: 705-713, 1995.
55. Nayfeh, A.H., 1981. *Introduction to perturbation techniques*. Wiley-Interscience, New York, 1981.
56. Nayfeh, A.H., and Bouguerra, H., 1990. Non-linear response of a fluid valve. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 25: 433-449, 1990.

57. Nayfeh, A.H., Nayfeh, J.F., and Mook, D.T., 1992. On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 3: 145-162, 1992.

58. Nayfeh, A.H., and Nayfeh, S.A., 1994. On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics, ASME*, 116: 129-136, 1994.

59. Nayfeh, A.H., and Nayfeh, S.A., 1995. Nonlinear normal modes of a continuous system with quadratic nonlinearities. *Journal of Vibration and Acoustics, ASME*, 117: 199-205, 1995.

60. Nayfeh, A.H., Nayfeh, S.A., and Pakdemirli, M., 1995. On the discretization of weakly nonlinear spatially continuous systems. *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, N.S. Namachchivaya and W. Kliemann editors. Boca Raton: CRC Press, 175-200, 1995.

61. Pai, P.F., and Nayfeh, A.H., 1990. Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 25: 455-474, 1990.

62. Pakdemirli, M., 1994. A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Mechanics Research Communications*, 21: 203-208, 1994.

63. Pakdemirli, M., and Boyacı, H., 1995. Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for nonlinear vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 186: 837-845, 1995.

64. Pakdemirli, M., and Boyacı, H., 1996. Vibrations of continuous systems having arbitrary quadratic and cubic nonlinearities. *Applied Mechanics and Engineering*, 1: 445-463, 1996.

65. Pakdemirli, M., and Boyacı, H., 1997. The direct-perturbation method versus the discretization-perturbation method: Linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 199: 825-832, 1997.

66. Pakdemirli, M., Nayfeh, S.A., and Nayfeh, A.H., 1995. Analysis of one-to-one autoparametric resonances in cables -discretization versus direct treatment. *Nonlinear Dynamics*, 8: 65-83, 1995.

67. Pakdemirli, M., and Ulsoy, A.G., 1997. Stability analysis of an axially accelerating string. *Journal of Sound and Vibration*, 203: 815-832, 1997.

68. Pugsley, A.G., 1968. *The theory of suspension bridges*. Edward Arnold Pub., London, 1968.

69. Raouf, R.A., and Nayfeh, A.H., 1990. One-to-one autoparametric resonances in infinitely long cylindrical shells. *Computers and Structures*, 35: 163-173, 1990.

70. Rossikhin, Y.A., and Shitikova, M.V., 1995. Analysis of nonlinear free vibrations of suspension bridges. *Journal of Sound and Vibration*, 186: 369-393, 1995.

71. Tanaka, H., and Davenport, A., 1983. Wind induced response of Golden Gate Bridge. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 109: 296-312, 1983.

72. Tezcan, S.S., 1975. Forced vibration survey of Istanbul Boğaziçi Bridge. *Proc. 5th European Conference on Earthquake Engineering*, 2, 1975.

73. Van der Woude, F., 1976. Analysis of suspension bridges using energy principles. *The Structural Engineer, ISE*, 54, 1976.

74. Van der Woude, F., 1982. Natural oscillations of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 108: 1815-1830, 1982.

75. West, H.H., Suhoski, and Geschwinder, 1984. Natural frequencies and modes of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 110: 2471-2486, 1984.

76. Zurada, J.M., 1992. *Introduction to artificial neural systems*. West Publishing Co., St. Paul, 1992.

EK 1

VINCENT-THOMAS KÖPRÜSÜNÜN TEKNİK ÖZELLİKLERİ

Kenar açıklık boyu (l_1)	154.48 m
Orta açıklık boyu (l_2)	457.50 m
Kablonun uygulamadaki boyu (L_E)	1055.30 m
Karakteristik boy (L)	183.00 m
Köprü genişliği (b)	18.06 m
Kablo gerilmesinin yatay bileşeni (H_w)	30037.50 kN
Köprü birim boyunun zati ağırlığı (w_b)	105.05 kN/m
Tabliye kirişi elastisite modülü (E_s)	200.03 GPa
Kablo elastisite modülü (E_k)	186.23 GPa
Kablo kesit alanı (A_k)	0.0784 m ²
Kenar açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s1})	0.3751 m ⁴
Orta açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s2})	0.3631 m ⁴
Köprünün kütle kutupsal atalet momenti (I_m)	453.01 kN/s ²
Kenar açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s1})	45.4548 m ⁶
Orta açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s2})	43.9985 m ⁶
Tabliye kirişi kayma modülü (G_s)	80.01 GPa
Tabliye kirişi kesitinin burulma sabiti (J_s)	0.4234 m ⁴

GOLDEN GATE KÖPRÜSÜNÜN TEKNİK ÖZELLİKLERİ

Kenar açıklık boyu (ℓ_1)	343.12 m
Orta açıklık boyu (ℓ_2)	1281.00 m
Kablunun uygulamadaki boyu (L_E)	2347.89 m
Karakteristik boy (L)	366.00 m
Köprü genişliği (b)	27.45 m
Kablo gerilmesinin yatay bileşeni (H_w)	237928.15 kN
Kenar açıklık için köprü birim boyunun zati ağırlığı (w_{b1})	337.03 kN/m
Orta açıklık için köprü birim boyunun zati ağırlığı (w_{b2})	331.20 kN/m
Tabliye kirişi elastisite modülü (E_s)	200.03 GPa
Kablo elastisite modülü (E_k)	200.03 GPa
Kablo kesit alanı (A_k)	0.5367 m ²
Kenar açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s1})	1.6804 m ⁴
Orta açıklık tabliye kirişi kesitinin atalet momenti (I_{s2})	2.5927 m ⁴
Kenar açıklık için köprünün kütle kutupsal atalet momenti (I_{m1})	3871.06 kN/s ²
Orta açıklık için köprünün kütle kutupsal atalet momenti (I_{m2})	3826.56 kN/s ²
Kenar açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s1})	488.5395 m ⁶
Orta açıklık tabliye kirişinin çarpılma sabiti (Γ_{s2})	757.5111 m ⁶
Tabliye kirişi kayma modülü (G_s)	80.01 GPa
Tabliye kirişi kesitinin burulma sabiti (J_s)	1.5493 m ⁴

ÖZGEÇMİŞ

- Doğum Tarihi** : 30 Temmuz 1968
- Doğum Yeri** : Karşıyaka / İzmir
- Haziran 1986** : Bornova Anadolu Lisesi 'nden mezuniyet
- Temmuz 1990** : Boğaziçi Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Lisans Programı 'ndan
İnşaat Mühendisi olarak mezuniyet
- Temmuz 1993** : Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı 'ndan
İnşaat Yüksek Mühendisi olarak mezuniyet
- Eylül 1992 - Mayıs 1997** : Özel sektörde İnşaat Mühendisi olarak çalışma
- Eylül 1994** : Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı 'nda
Doktora Programı 'na başlama
- Haziran 1997** : Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı 'nda
Araştırma Görevliliği 'ne başlama