139022

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİDYEN OLMAYAN KRİSTALLOGRAFİK (NEC) GRUPLARIN NORMAL ALT GRUPLARININ SAYILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma ARSLAN

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi

MANİSA - 2003

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİDYEN OLMAYAN KRİSTALLOGRAFİK (NEC) GRUPLARIN NORMAL ALT GRUPLARININ SAYILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma ARSLAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01.09.2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 19.09.2003

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN
Prof. Dr. Necdet BİLDİK

MANİSA - 2003

ÖZET

Bu çalışmada, Γ/N bölüm grubu verilen bir G sonlu grubuna izomorfik olmak üzere, bir Γ yansımasız öklidyen olmayan kristallografik grubunun N normal alt gruplarının sayısını veren bir metot üzerine çalışılmıştır. Bu, orbifoldların düzgün örtülerinin sayılmasında uygulamalara sahiptir. Möbius inversionunu ve gösterim teorisini içeren bu metot, Γ daki sonlu indeksli torsion free normal alt grupların sayılmasında da uygulanır.

ABSTRACT

In this study, we work on a method for counting the number of normal subgroups N of a non-euclidean crystallographic group Γ without reflections, with quotient group Γ/N isomorphic to a given finite group G. This has applications to the enumeration of regular coverings of orbifolds. The method, which involves Möbius inversion and representation theory, is also applied to count torsion-free normal subgroups of finite index in Γ.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanmasında, düzenli bir şekilde yürütülmesinde ve oluşmasında bana yol gösteren ve destek olan, karşılaştığım zorluklarda ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hem lisans, hem de yüksek lisans eğitimim süresince bana karşılaştığım tüm sorunlarımda ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, her konuda destek olan Sayın Hocam Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e, Doç. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU'ya , Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ'a, Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU'ya, Yrd. Doç. Dr. Ali ÖZDEMİR'e, Öğrt. Gör. Osman KILIÇ'a, Öğrt. Gör. Emine USLU'ya ve bölümümüzün araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Her şeyin başında bu günlere gelmemi sağlayan, hayatımın her anında bana destek ve her açıdan yardımcı olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Fatma ARSLAN

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\lvert G \rvert$	: G Grubunun Mertebesi
$\vartheta(x)$	: x in Yörüngesi
G_x	: x in G deki Dengeleyeni
Gx	: x in G deki Yörüngesi
x^G	: x in G deki Eşlenik Sınıfı
μ	: Möbius Fonksiyonu
g	: Bir Yüzeyin Cinsi (Genus)
ρ	: Bir Grubun Gösterimi
χ	: Bir Gösterimin Karakteri
$Çek\chi$	: χ Dönüşümünün Çekirdeği
c_χ	: χ Karakterinin Frobenius Schur Belirleyicisi
$\sigma_\Gamma(G)$	: Γ dan G ye Homomorfizmaların Sayısı
$\phi_\Gamma(G)$	: Γ dan G ye Epimorfizmaların Sayısı
ϕ	: $\mathbb{N}$ Üzerinde Euler Fonksiyonu
$n_\Gamma(G)$	: $\Gamma/N \cong G$ Olacak Şekilde Γ nın N Normal Alt Gruplarının Sayısı
$Aut(G)$	: G nin Otomorfizmalarının Grubu
$\dot{\cup}$	: Ayrık Birleşim
$PGL(2,\mathbb{C})$	: Doğrusal Dönüşülerin (Möbius Dönüşümlerinin) Grubu
$PSL(2,\mathbb{R})$	: Gerçel Katsayılı Doğrusal Dönüşümlerin Grubu
C_∞	: Genişletilmiş Karmaşık Düzlem
$\mathbb{C}^*$	: $\mathbb{C}-\{0\}$

ÇİZELGE LİSTESİ

GİRİŞ

Γ bir NEC (Öklidyen olmayan Kristallografik) grup ve G de verilen herhangi bir sonlu grup olsun. Bu tezin amacı, Γ/N bölüm grubu G ye izomorfik olacak şekildeki Γ nın N normal alt gruplarının $n_\Gamma(G)$ sayısını veren bir yöntemi ifade etmek ve örneklerle incelemektir. Γ nın N normal alt grupları Γ dan G ye epimorfizmlerinin çekirdeklerine karşılık gelir. Dolayısıyla normal alt grupların sayısı farklı epimorfizmlerin sayısına eşittir. Γ dan G ye epimorfizmlerin sayısını bulmak için önce Γ dan G ye homomorfizmlerin sayısı bulunur. Bunun için sonlu grup teoride karakter teorik teknikler kullanılır. Buradan epimorfizmlerin sayısını bulmak için P. Hall'in metodu olarak bilinen sonlu G grubunun alt gruplarının latisi üzerinde Möbius İnversion Formülü kullanılır. Ayrıca bu teknikte, bölüm grubu G olan Γ nın torsion-free normal alt gruplarının sayısı bulunabilir.

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümde, sonlu grup teori, bir grubun alt grupları latisi üzerinde Möbius Fonksiyonu ve NEC gruplar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, sonlu grup gösterimleri ve karakterleri ile ilgili genel bir bilgi verilerek, bazı özel gruplar için bu bilgilerin uygulaması verilmiştir. Ayrıca sonlu bir grupta bazı denklemlerin çözümlerinin sayısını veren formüller verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, Γ/N bölüm grubu, verilen sonlu bir G grubuna izomorfik olacak şekilde bir Γ Öklidyen olmayan Kristallografik (NEC) grubunun N normal alt gruplarının $n_\Gamma(G)$ sayısını hesaplamak için bir metot tanımlanmış ve bazı gruplar için bu metot incelenmiştir. Bu metot iki bölümden oluşmaktadır: P. Hall'e ait olan birinci kısımda, Möbius İnversiyon formülü kullanılarak problem Γ dan G nin alt gruplarına olan homomorfizmlerin sayılması problemine indirgenir. Bu, herhangi bir sonlu üretilenli Γ grubuna ve böylece herhangi bir NEC gruba uygulanabilir. Bununla birlikte, metodun ikinci kısmında böyle homomorfileri saymak için sonlu grup teoriden gösterim teorisi ve karakter teori kullanılır. Bu ise sadece yansımasız NEC gruplar için etkilidir.

Bu normal alt grupların sayısının hesaplanması, orbifoldların düzgün örtülerinin sayısının hesaplanmasına karşılık gelir: Eğer ϑ, Γ NEC grubuna karşılık gelen orbifold ise bu takdirde $n_\Gamma(G)$, örtü grubu G olan ϑ nın düzgün örtülerinin denklik sınıfının sayısıdır.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda bazı grup teorik bilgiler verilmiştir. İkinci kısımda ise bir grubun alt gruplarının latisi üzerinde Möbius fonksiyonu tanımlanmıştır. Son kısımda, öklidyen olmayan kristallografik gruplar verilmiştir.

1.1 SONLU GRUP TEORİDE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1 : Bir $G \neq \varnothing$ kümesinde tanımlanmış bir $(a,b) \mapsto ab$ ikili işlemi aşağıdaki şartları gerçekliyorsa, G ye bir ***grup*** denir.

1) Her $a,b,c \in G$ için

$$(ab)c = a(bc)$$

verilir.

2) Her $a \in G$ için

$$ea = ae = a$$

olacak şekilde bir $e \in G$ elemanı vardır. e elemanına G nin ***birim elemanı*** denir.

3) Her $a \in G$ elemanına karşılık

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ elemanı vardır. a^{-1} elemanına a nın ***tersi*** denir.

Sonlu sayıda elemanı bulunan bir gruba ***sonlu grup***, sonlu olmayan gruba da ***sonsuz grup*** denir. Bir G grubunun eleman sayısına onun ***mertebesi*** denir ve $|G|$ ile gösterilir.

G bir grup olsun. Her $a,b \in G$ ikilisi için $ab = ba$ ise G ye ***değişmeli grup*** veya ***abel grup*** denir.

Tanım 1.1.2 : G bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H a G nin bir ***alt grubu*** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3 : G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin arakesitini $<A>$ ile gösterelim. Bu taktirde $<A>$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A yı içeren en küçük alt gruptur ve A ***tarafından üretilen alt grup*** olarak adlandırılır. Eğer $A = \{x\}$ şeklinde bir elemanlı bir küme ise bu taktirde $<A>$ yerine $< x >$ yazılır. $< x >$ e, G nin bir ***devirli alt grubu*** denir. Eğer G grubunun kendisi bir x elemanı tarafından üretiliyorsa G ye bir ***devirli grup*** denir.

$G = < x >$ bir devirli grup olsun. Bu taktirde

$$G = < x > = \left\{ x^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca $G = < x >$ devirli grubu daima değişmelidir.

Teorem 1.1.1 : i) Eğer $G = <g>$ devirli bir grup ise bu taktirde G nin her alt grubu da devirlidir. Üstelik, eğer G mertebesi n olan sonlu bir devirli grup ise bu taktirde n nin her pozitif m böleni için mertebesi m olan tek bir alt grubu vardır. Bu alt grup $<g^{n/m}>$ dir. Bunlar G nin bütün alt gruplarıdır

ii) $G = <a>$ mertebesi n olan bir devirli grup, $b \in G$ olsun. $b = a^s$ diyelim. Bu takdirde $H = <a^s>$, G nin devirli alt grubudur ve $|H| = \dfrac{n}{(n,s)}$ dir. Burada (n,s), n ile s nin en küçük ortak bölenini gösterir [15].

Tanım 1.1.4 : G bir grup, $H \leq G$ ve $g \in G$ olsun. Bu taktirde

$$Hg = \left\{ hg \mid h \in H \right\}$$

kümesine H ın G de bir ***sağ-yan sınıfı*** denir. H ın G deki bütün sağ-yan sınıflarının koleksiyonu G/H ile gösterilir:

$$G/_H = \{ Hg \mid g \in G \}$$

dır. H ın G deki herhangi iki sağ yan-sınıfı aynı sayıda elemana sahiptir. Ayrıca farklı sağ-yan sınıflar ayrık olduğundan

$$|G| = \left|G/_H\right| . |H|$$

elde edilir, böylece $|H|$, $|G|$ yi böler. $\left|G/_H\right|$ a H ın G deki ***indeksi*** denir.

Tanım 1.1.5 : G bir grup ve N de G nin bir alt grubu olsun. Eğer her $g \in G$ için $Ng = gN$ ise N ye G nin ***normal alt grubu*** denir ve N nin G nin normal alt grubu olduğunu göstermek için $N \lhd G$ yazılır.

Tanım 1.1.6 : N, G nin bir normal alt grubu olsun. $NgNh = Ngh$ çarpımı ile $G/_N$, bir gruptur. Bu gruba N ile G nin ***bölüm (faktör) grubu*** denir.

Tanım 1.1.7 : G_1 ve G_2 iki grup ve $\varphi : G_1 \to G_2$ bir dönüşüm olsun. Her $g_1, g_2 \in G_1$ için

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

ise φ ye G_1 den G_2 ye bir ***homomorfizm*** denir.

$\varphi : G_1 \to G_2$ bir homomorfi olsun. Bu taktirde $\varphi^{-1}(e_{G_2}) = \left\{ g \in G_1 \mid \varphi(g) = e_{G_2} \right\}$ kümesi G_1 in bir alt grubudur. Buna φ homomorfisinin ***çekirdeği*** denir ve $Çek\,\varphi$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.8 : Örten bir φ homomorfisine bir ***epimorfizm*** ve 1-1 bir φ homomorfisine bir ***monomorfizm*** denir. Örten ve 1-1 bir φ homomorfisine bir ***izomorfizm*** denir. Eğer G_1 ve G_2 grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara ***izomorfiktir*** denir ve $G_1 \cong G_2$ yazılır. Bir G grubunun kendi üzerine bir izomorfizmasına bir ***otomorfizma*** denir. G nin bütün otomorfizmalarının kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir. $Aut(G)$ bileşke işlemi altında bir gruptur.

Teorem 1.1.2 : $\varphi : G_1 \to G_2$ örten bir homomorfizma olsun. Bu taktirde

i) $Çek\,\varphi = N \lhd G_1$,

ii) $G_1/N \cong G_2$ [15].

Teorem 1.1.3 (Karşılık Getirme Teoremi) : N, G nin bir normal alt grubu ve S^*, $G^* = G/N$ nin bir alt grubu olsun. Bu taktirde

i) $S^* = S/N$ olacak şekilde bir tek $N \subset S \subset G$ alt grubu vardır.

ii) Eğer S^*, G^* ın bir normal alt grubu ise bu taktirde S de G de normaldir.

iii) $\left| G^* : S^* \right| = \left| G : S \right|$

iv) Eğer T^*, S^* da normal ise bu taktirde T, S de normaldir ve $S^*/T^* \cong S/T$ dır [15].

Tanım 1.1.9 : G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$y = g^{-1} x g$$

olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa y, x e ***eşleniktir*** denir.

G de x e eşlenik olan bütün elemanların kümesi

$$x^G = \left\{ g^{-1} x g \mid g \in G \right\}$$

ile verilir ve buna G de x in ***eşlenik sınıfı*** denir.

$Z(G) = \left\{ g \in G \mid \text{her } x \in G \text{ için } g^{-1} x g = x \right\}$ kümesine G nin merkezi denir. Açık olarak $Z(G)$, G nin bir değişmeli normal alt grubudur.

Teorem 1.1.4 : Her grup eşlenik sınıfların bir birleşimidir ve farklı eşlenik sınıfları ayrıktır [15].

Tanım 1.1.10 : $X \neq \varnothing$ bir küme ve G bir grup olsun. X üzerinde G nin bir ***etkisi*** aşağıdaki şartları sağlayan bir $\alpha : G \times X \to X$ dönüşümüdür:

i) $e \in G$ birim eleman olmak üzere her $x \in X$ için $\alpha(e,x) = x$ dir.

ii) Her $x \in X$ ve her $g, h \in G$ için $\alpha(gh,x) = \alpha(g, \alpha(h,x))$ dir.

$\alpha(g,x)$ yerine genellikle gx yazılır. Bu durumda yukarıdaki iki şart $ex = x$ ve $(gh)x = g(hx)$ şeklinde olur.

Bu şartlar altında X kümesine bir $G-$***küme*** adı verilir. Eğer X üzerinde G nin bir etkisi varsa, bu durumda G ye X üzerinde ***etkir (etki ediyor veya hareket ediyor)*** denir.

G, X üzerinde etki etsin. X üzerinde bir $\sim$ bağıntısını şöyle tanımlayalım: "$x \sim y :\Leftrightarrow gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı vardır". Bu takdirde $\sim$ nın bir denklik bağıntısı olduğunu göstermek kolaydır.

Tanım 1.1.11 : $\sim$ bağıntısının denklik sınıflarına ***etkinin yörüngeleri*** denir. Ayrıca bir $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye x in ***yörüngesi (orbiti)*** denir ve Gx ile gösterilir. Açık olarak $Gx = \{ gx \mid g \in G \}$ dir.

Tanım 1.1.12 : G, X üzerinde etkisin ve $x \in X$ olsun. $G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$ alt grubuna x in G deki ***sabitleyeni (dengeleyeni)*** denir.

Tanım 1.1.13 : G, X üzerinde etki etsin ve $x, y \in X$ keyfi olsun. $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde ***geçişli olarak etki ediyor*** denir. Eğer G, X üzerinde geçişli olarak etki ediyorsa $Gx = X$ olacağı açıktır. Ayrıca $G_{gx} = g G_x g^{-1}$ dır. Dolayısıyla her $x, y \in G$ için G_x ve G_y eşleniktir.

Tanım 1.1.14.: Eğer X bir G grubunun boştan farklı bir alt kümesi ise, bu takdirde X üzerinde bir ***kelime***,

$$w = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n} ,$$

biçimindeki bir $w \in G$ elemanıdır. Burada $x_i \in X$, $e_i = \pm 1$ ve $n \geq 1$ dır.

Tanım 1.1.15 : G bir grup ve $x,y \in G$ olsun. x ***ve*** y ***nin komütatörü*** $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ elemanıdır. G nin elemanlarının bütün komütatörleri tarafından üretilen, yani $\{[x,y] \mid x,y \in G\}$ kümesi tarafından üretilen G nin alt grubuna ***komütatör alt grubu*** denir ve G' ile gösterilir. $x \in G'$ olsun. $x=\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ yazalım. Bu taktirde $g^{-1}xg=\prod_{i=1}^{n}\left[g^{-1}a_i g\ ,\ g^{-1}b_i g\right]$ dir ve böylece $g^{-1}xg \in G'$ olur. Bu ise G' nün G nin bir normal alt grubu olduğunu söyler. Şimdi G/G' bölüm grubunu göz önüne alalım. Bu taktirde bu bölüm grubu değişmelidir. Gerçekten $[a,b] \in G'$ olduğundan $[a,b]G'=G'$ dır ve böylece

$$xG'yG'=xyG'=xy[y\ ,\ x]G'=yxG'=yG'xG'$$

olur.

G/G' bölüm grubuna G nin ***abelyenleştirilmesi*** denir.

G bir grup ve H bir değişmeli grup olsun. Eğer $\varphi : G \to H$ bir grup homomorfisi ise bu takdirde her $x \in G$ için

$$\hat{\varphi} : G/G' \to H$$

homomorfisi vardır.

Üstelik, φ homomorfizmi onun çekirdeği olan G' komütatör alt grubu ile ifade edilir. Bu G' komütatör alt grubu G nin yegane en küçük normal alt grubudur öyleki $G/G' \cong H$ değişmelidir.

Böylece abelyenleştirmeden sonra herhangi bir ifadede her çarpım değişmeli olur. Sonuç olarak, bazı eşit olmayan ifadeler, abelyenleştirmeden sonra eşit hale gelir. Ve hatta birim elemana eşit olabilir. Örneğin, $G=\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ mertebesi 8 olan quaternion grup olsun. Bu durumda $G'=\{\pm 1\}$ dır. G nin abelyenleştirilmesi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nin bir kopyasıdır. Abelyenleştirmede $i'j'=j'i'$ $\left(i'=G'i,\ j'=G'j\right)$ dir.

Teorem 1.1.5 : G' komütatör alt grubu G nin normal alt grubudur. Eğer $N \lhd G$ ise bu taktirde G/N değişmelidir ancak ve ancak $G' \leq N$ dir [15].

Şimdi bir grubun sunumu hakkında temel bilgileri verelim.

Bir G grubunun $R_j(X_i)$ $(j \in J)$ bağıntılarını sağlayan X_i $(i \in I)$ elemanları tarafından üretildiğini farz edelim (burada I ve J indis kümeleri ve $R_j(X_i)$, X_i üreteçleri ile bir kelimedir, yani $R_j(X_i)$, X_i üreteçlerinin sonlu çoklukta (pozitif veya negatif) kuvvetlerin bir çarpımıdır). $R_j(X_i)=1$ bağıntılarına G için ***belirleyici bağıntılar*** (defining relations) denir. Eğer G deki her bağıntı sadece grup aksiyomlarını kullanarak belirleyici bağıntılar tarafından elde edilirse bu durumda G ye bir sunuma sahip olduğu söylenir ve bu durum

$$G = <X_i \ (i \in I) \mid R_j(X_i) = 1 \quad (j \in J)>$$

ile gösterilir. Eğer I sonlu ise G ye ***sonlu üretenlidir*** denir.

G bir grup ve üreteçlerinin kümesi X olsun. Eğer üreteçler arasında belirleyici bir bağıntı mevcut değil ise G grubuna ***serbesttir (free)*** denir. Örneğin; $\mathbb{Z}$ bir serbest gruptur. X in kardinalitesine de G nin ***rankı*** denir. Bir serbest grubun her alt grubu da yine bir serbest gruptur [9].

Teorem 1.1.6 : Eğer $G = <X_i \mid R_j(X_i), (i \in I, j \in J)>$ ve H da herhangi bir grup ise bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i) Bir $\theta : G \rightarrow H$ epimorfizmi vardır.

ii) $G/N \cong H$ ile bir $N \lhd G$ normal alt grubu vardır

iii) H, $R_j(x_i)$ $(\forall j \in J)$ bağıntılarını sağlayan x_i $(i \in I)$ elemanları tarafından üretilir [12].

Tanım 1.1.16 : G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G nin mertebesi p nin bir kuvveti şeklinde ise G ye bir ***p-grup*** denir.

Bir G grubunun bir H alt grubunun mertebesi bir p asal sayısının kuvveti şeklinde ise H a G nin bir ***p-alt grubu*** denir.

Şimdi $|G| = p^n m\ ,\ \ (p,m)=1$ olsun. G nin bir H alt grubunun mertebesi tam olarak p^n ise bu taktirde H a G nin bir ***Sylow p-alt grubu*** denir.

Teorem 1.1.7 : G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde,

i) G bir Sylow p-alt grubuna sahiptir.

ii) Herhangi iki Sylow p-alt grup G de eşleniktir.

iii) G nin her p-alt grubu G nin bir Sylow p-alt grubunda içerilir [3].

Tanım 1.1.17 : Bir G grubunun maksimal alt gruplarının tümünün arakesitine G nin ***Frattini Alt Grubu*** denir ve $\phi(G)$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.8 (Burnside Temel Teoremi): Bir G p-grubunda $g_1,\dots,g_k$ elemanları G yi üretir ancak ve ancak onların görüntüleri ${G}/{\phi(G)} \cong C_p \times C_p$ yi üretir.

Tanım 1.1.18 : G bir grup olsun. Eğer her $x \in G$ için $x^n = 1$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa, bu şekildeki en küçük n tamsayısına G nin ***eksponenti*** denir. Aksi halde G nin sonsuz eksponentli olduğu söylenir. Sonlu bir G grubunun eksponenti, G nin elemanlarının mertebelerinin en küçük ortak katıdır.

Teorem 1.1.9 : Eğer $G \neq 1$ sonlu bir p grup ise, $Z(G) \neq 1$ dir.

Teorem 1.1.10 : Eğer bir G grubu abelyen değil ise, bu takdirde ${G}/{Z(G)}$ devirli değildir.

Teorem 1.1.11 : p bir asal olmak üzere, mertebesi p^2 olan bir değişmeli G grubu ya $\mathbb{Z}_{p^2}$ ye, yada $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ye izomorfiktir [15].

Teorem 1.1.12 : p asal, $|G|=p^3$ abelyen olmayan bir grup olsun. Bu takdirde $|Z(G)|=p$ ve $G/Z(G)\cong \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ dır.

İspat : Teorem (1.1.9) dan $Z(G)\neq 1$ dir. Ayrıca G abelyen olmadığından $Z(G)\neq G$ dir. Farz edelim ki $|Z(G)|=p^2$ olsun. Bu takdirde $\left|G/Z(G)\right|=p$ dır. p asal olduğundan $G/Z(G)$ devirlidir. Şimdi $G/Z(G)$ devirli ise G nin abelyen olduğunu gösterelim. $G/Z(G)$ devirli olsun. Bu takdirde bir $g\in G$ için

$$G/Z(G)=\langle gZ(G)\rangle=\{g^n Z(G) \mid n\in\mathbb{Z}\}$$

dır. Şimdi $g_1, g_2\in G$ keyfi olarak verilsin. $g_1 Z(G)$, $g_2 Z(G)\in\langle g\, Z(G)\rangle$ olduğundan

$$g_1 Z(G)=g^n Z(G) \quad \text{ve} \quad g_2 Z(G)=g^m Z(G)$$

olacak şekilde $n,m\in\mathbb{Z}$ vardır. Buradan $g_1\in g^n Z(G)$ ve $g_2\in g^m Z(G)$ dır. Dolayısıyla $g_1=g^n z_1$ ve $g_2=g^m z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2\in Z(G)$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= g^n z_1 g^m z_2 = g^n g^m z_1 z_2 = g^{n+m} z_1 z_2 \\ &= g^{m+n} z_1 z_2 = g^m g^n z_1 z_2 = g^m z_1 g^n z_2 = g_2 g_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani G değişmelidir. Bu ise bir çelişkidir. $|Z(G)|=p$ dır.

Şimdi $Z(G)=G'$ olduğunu gösterelim. $Z(G)\lhd G$ dir. $G/Z(G)$ abelyen olduğundan Teorem (1.1.5) den $G'\leq Z(G)$ dır. Bu ise $Z(G)=G'$ olduğunu gösterir.

$|Z(G)|=p$ olduğundan $G'=Z(G)$ yada $G'=\{1\}$ dır. $G'=\{1\}$ olamaz. Çünkü G/G' değişmeli bir grup olduğundan $G/G'\cong G$ olup G de değişmeli olur. Bu ise çelişki olur. O halde $G' = Z(G)$ olmalıdır. Ayrıca $G/Z(G)$ devirli olamayacağından (Teorem 1.1.10), Teorem (1.1.11) den $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ olur.

Tanım 1.1.19 : Eğer $z^n = 1$ ve $0<m<n$ için $z^m \neq 1$ ise z ye ***1 in bir n inci primitif kökü*** denir.

Tanım 1.1.20 : Eğer G değişmeli bir grup ise

$$T = \{ u \in G \mid |u| \text{ sonludur} \}$$

kümesi bir alt gruptur. Bu alt gruba, G nin ***torsion alt grubu*** denir.

Eğer $T = \{e\}$ ise G grubuna ***torsion free*** adı verilir; yani, eğer bir grup, birim elemanından başka hiçbir sonlu mertebeden eleman içermiyorsa ***torsion free*** olarak adlandırılır.

T, G değişmeli grubunun torsion alt grubu olmak üzere $G = T$ ise bu takdirde G grubuna ***torsion grup*** denir. Ayrıca G/T bölüm grubunun torsion-free olacağı açıktır.

Tanım 1.1.21 : Her bir p asal sayısı için mertebesi p^3 olan beş tipte grup vardır, bunlardan üçü değişmelidir:

I. $\mathbb{Z}_{p^3}$: $B^{p^3} = 1$

II. $A^{p^2} = 1,\ B^p = 1,\ AB = BA$

V $A^p = B^p = C^p = 1$, $AB = BA,\ AC = CA,\ BC = CB$.

Diğer ikisi değişmeli değildir. Bunlar $p = 2$ için III quaternion grup ve p nin tek olduğu durumda IV dihedral grup:

III $A^{p^2} = 1,\ B^p = 1,\ BAB^{-1} = A^{1+p}$

IV $A^p = B^p = [A,B]^p = 1$, $A[A,B] = [A,B]A$, $B[A,B] = [A,B]B$

dır [18].

1.2 BİR GRUBUN MÖBİUS FONKSİYONU

Bu kısımda, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanan Möbius Fonksiyonu, sonlu bir grubun alt gruplarının latisi üzerine genişletilmiştir. Ayrıca $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde verilen Möbius İnversion Formülünün karşılığı verilmiştir. Son olarak da, 1936 da P.Hall [5] tarafından verilen ve adına Philip Hall metodu denilen bir metot açıklanmıştır. Bu metot, sonlu üretilenli bir gruptan sonlu bir gruba olan bütün homomorfilerin sayısından epimorfilerin sayısını elde etmek için Möbius İnversion Formülünün kullanılmasıdır.

Tanım 1.2.1 : Bütün pozitif tamsayılar için tanımlı bir fonksiyona bir ***aritmetik fonksiyon*** denir.

Tanım 1.2.2 : $n \in \mathbb{Z}^+$ için Möbius μ Fonksiyonu,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^r, & n = p_1 p_2 \; . \; . \; . \; p_r \quad (p_1, \ldots, p_r \text{ farklı asal sayılar}) \\ 0, & p^2 \mid n \quad (p \text{ bir asal sayı }) \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Eğer $n > 1$ ise tanımdan

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 1.2.1 (Möbius İnversion Formülü) : f bir aritmetik fonksiyon olsun. Her pozitif n tamsayısı için

$$F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$$

ile tanımlanan F , aritmetik fonksiyon ise bu taktirde

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F(n/d)$$

dir [6].

Şimdi bir G grubunun alt gruplarının latisi üzerinde Möbius fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 1.2.3 : G sonlu üretilenli bir grup ve $S = \{ H \mid H \leq G$ ve $[G:H] < \infty \}$ olsun. Bu taktirde G nin alt grup latisi ile ilgili $\mu : S \to \mathbb{Z}$ Möbius fonksiyonu

$$\sum_{H \geq K} \mu(H) = \delta_{K,G} = \begin{cases} 1, & K = G \\ 0, & K < G \end{cases}$$

veya denk olarak, $\mu(G) = 1$ ve eğer $K \neq G$ ise bu taktirde $\mu(K) = -\sum_{H > K} \mu(H)$ olarak tanımlanır.

Örneğin; $G = \mathbb{Z}$ tamsayıların toplamlı grubu olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $K = \langle n \rangle \leq \mathbb{Z}$ dir. Böylece

$$\mu(K) = \mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^r, & n = p_1 p_2 \ . \ . \ . \ p_r \quad (p_1, \ldots, p_r \text{ farklı asal sayılar}) \\ 0, & p^2 \mid n \quad (p \text{ bir asal sayı}) \end{cases}$$

yani; μ tamsayılar üzerindeki Möbius fonksiyonu ile çakışır.

Möbius fonksiyonu ile ilgili aşağıda verilen teoremler P.Hall'ün [5] makalesinde bulunur.

Teorem 1.2.2 : Eğer H, G nin maksimal alt gruplarının bir arakesiti değil ise bu taktirde $\mu(H) = 0$ dır.

Teorem 1.2.3 : i) Eğer H, G nin bir maksimal alt grubu ise bu taktirde $\mu(H) = -1$ dir.

ii) Eğer $H \leq G$ bir maksimal alt grup değil fakat onu içeren farklı maksimal alt grupların arakesiti ise bu taktirde $\mu(H) = m - 1$ dir. Burada m, H ı içeren farklı maksimal alt grupların sayısıdır.

Teorem 1.2.4 : Eğer bir $\alpha \in Aut(G)$ için $\alpha(H_1) = \alpha(H_2)$ ise bu taktirde $\mu(H_1) = \mu(H_2)$ dir.

Möbius İnversion formülünü bir G grubuna uygulamak için G nin alt grupları üzerinde tanımlı fonksiyonların herhangi bir σ ve ϕ ikilisi ve her $H \leq G$ ikilisi için

$$\sigma(G) = \sum_{H \leq G} \phi(H)$$

ifadesini göz önüne alırız.

Şimdi P.Hall metodunu açıklayalım. Bu metot Γ sonlu üretilenli bir grup ve G de bir sonlu grup olmak üzere, Γ dan G ye epimorfizmlerin $\phi_\Gamma(G)$ sayısını bulmak için bir metottur. Γ aşağıda verilen sonlu bir sunuma sahip olsun:

$$\Gamma = < X_1, \dots, X_g \mid R_1(X_i) = \dots = R_n(X_i) = 1 \ , \ 1 \leq i \leq g > .$$

Γ dan G ye homomorfizmler aslında, $H \leq G$ olmak üzere Γ dan H a epimorfizmlerdir. Böylece

$$Hom\,(\Gamma, G) = \dot{\bigcup_{H \leq G}} Epi(\Gamma, H)$$

dır. Ayrık birleşimindeki elemanları saymakla

$$\sigma_\Gamma(G) = \sum_{H \leq G} \phi_\Gamma(H)$$

elde ederiz. Burada $\sigma_\Gamma(G) = |Hom\,(\Gamma, G)|$ ve $\phi_\Gamma(H) = |Epi(\Gamma, H)|$ dır. Buradan Möbius İnversion formülü ile

$$\phi_\Gamma(G) = \sum_{H \leq G} \sigma_\Gamma(H)\mu(H) \qquad (1.2.1)$$

elde edilir. Gerçekten, (1.2.1) denkleminin sağ tarafına $\sigma_\Gamma(H) = \sum_{K \le H} \phi_\Gamma(K)$ yazar ve toplamın sırasını değiştirirsek,

$$\sum_{H \le G} \sigma_\Gamma(H)\mu(H) = \sum_{H \le G}\left(\sum_{K \le H} \phi_\Gamma(K)\right)\mu(H)$$
$$= \sum_{H \le G}\left(\sum_{K \ge H} \phi_\Gamma(H)\mu(K)\right)$$
$$= \sum_{H \le G}\left(\phi_\Gamma(H)\sum_{K \ge H} \mu(K)\right)$$

dır. Böylece $\phi_\Gamma(H)$ ın katsayısı olarak

$$\sum_{K \ge H} \mu(K)$$

elde ederiz. μ nün tanımında $H = G$ hariç $\sum_{K \ge H} \mu(H)$ sıfırdır ve $H = G$ durumunda ise $\sum_{K \ge H} \mu(H) = 1$ dir. Böylece

$$\phi_\Gamma(G) = \sum_{H \le G} \sigma_\Gamma(H)\mu(H)$$

elde edilir.

1.3 ÖKLİDYEN OLMAYAN KRİSTALLOGRAFİK GRUPLAR

Tanım 1.3.1 : G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer $\theta: G \times G \to G$, $\theta(g,h) = gh$ ve $\alpha: G \to G$, $\alpha(g) = g^{-1}$ dönüşümleri sürekli ise G ye bir ***topolojik grup*** denir.

Topolojik grupların en önemli özelliklerinden birisi, herhangi bir $g \in G$ noktasının komşuluğu ile G nin birim elemanı olan e nin bir komşuluğunun topolojik eş yapılı olmasıdır.

Tanım 1.3.2 : G bir tolopojik grup ve X herhangi bir uzay olsun. Eğer her $g,h\in G$ ve her $x\in X$ için $\Delta:(g,h)\to g\Delta h$ ile tanımlanan bir $\Delta:G\times X\to X$ sürekli dönüşümü

i) $g\Delta(h\Delta x)=gh\Delta x$

ii) $e\Delta x=x$

koşullarını sağlıyorsa $[G,X]$ ikilisine bir ***topolojik dönüşüm*** denir.

Tanım 1.3.3 : G bir topolojik grup olsun.

1. G nin elemanlarının hiçbirisi G nin bir yığılma noktası değil ise G ye ***ayrık grup*** denir.

2. Her $g\in G$ elemanı için $\{g\}$ kümesi g nin bir komşuluğu ise G ye ***ayrık grup*** denir.

3. Her $g\in G$ elemanı G nin bir ayrık noktası ise G ye ***ayrık grup*** denir.

4. e, G nin birim elemanı, G nin bir ayrık noktası ise G ye ***ayrık grup*** denir.

Önerme 1.3.1 : Tanım (1.3.3) de yer alan her bir ayrık grup tanımı denktir.

Tanım 1.3.4 : $\mathbb{C}_\infty$ ile genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$,

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşümlerdir. Bu özellikteki $w=T(z)$ dönüşümlerine ***doğrusal dönüşüm*** yada ***Möbius dönüşümü*** denir. Bu tip dönüşümlerin kümesi bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $Aut(\mathbb{C}_\infty)=PGL(2,\mathbb{C})$ ile gösterilir. $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

dönüşümlerine de $\mathbb{C}_\infty$ un ***anti-otomorfizmleri*** denir. İki anti-ototmorfizmin bileşkesi bir otomorfizm ve bir anti-otomorfizm ile bir otomorfizmin bileşkesi bir anti-otomorfizmdir.

Tanım 1.3.5 : $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ve $ad-bc=1$ olmak üzere

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşüme ***gerçel katsayılı doğrusal dönüşüm*** denir. Bu dönüşümlerin kümesi $PSL(2,\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.6 : ***Düzlem hiperbolik geometri***, düzlem Öklid geometrideki paralellik aksiyomu yerine "verilen bir doğru üzerinde bulunmayan bir noktadan bu doğru ile kesişmeyen birden çok doğru çizilebilir" aksiyomu alınarak elde edilir. Kısaca ***N.E. geometri*** (Non-Öklidyen geometri) simgesiyle gösterilen ve Öklid geometrisinden farklı olan hiperbolik geometri için çeşitli gösterimler vardır. Burada Poincaré tarafından verilmiş, yarı-düzlem gösterimini kullanacağız.

Yarı-düzlem gösteriminde hiperbolik düzlem $U=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}z>0\}$ üst yarı düzlemi; ***hiperbolik noktalar***, U daki noktalar; ***hiperbolik doğru*** $\mathbb{R}$ eksenine dik olan (yani merkezi $\mathbb{R}$ de bulunan) çemberlerin U da kalan parçaları; ***hiperbolik açı***, Öklid anlamında ölçülen açıdır.

Bir yay elemanının hiperbolik uzunluğunun ds diferansiyeli, $z = x+iy$ olmak üzere, $ds=|dz|/y$ olarak tanımlanır. Böylece parçalı sürekli diferansiyellenebilir bir C ***eğrisinin uzunluğu***

$$l(C) = \int_C ds = \int_C \frac{1}{y}\sqrt{\left(dx/dt\right)^2+\left(dy/dt\right)^2}\,dt$$

olur. Benzer şekilde $d\mu$ ile gösterilen hiperbolik alan diferansiyeli $d\mu = dx\,dy/y^2$ olarak tanımlanır. Hiperbolik düzlemin ölçülebilir bir E alt kümesinin ***hiperbolik alanı***

$$\mu(E)=\iint_E \frac{dx\,dy}{y^2}$$

dir.

Tanım 1.3.7 : $\left[G,U\right]$ topolojik dönüşüm grubunun ayrık noktalarına ***Öklidyen Olmayan Kristallografik (Non-Euclidean Crstallographic) grup*** denir ve kısaca NEC grup şeklinde yazılır.

Tanım 1.3.8 : $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun alt grubu olan NEC gruplara ***Fuchsian gruplar*** denir.

Tanım 1.3.9 : Temel bölge düzlemin öyle bir alt kümesidir ki grup düzlemde gösterdiği tüm özellikleri bu küme üzerinde gösterir. Bir bakıma bu kümeye düzlemin grup için küçük bir kopyasıdır diyebiliriz.

Γ bir NEC grup ve F, U da kapalı bir küme ve F^0 de F nin içi olsun. Eğer F kümesi

(i) F her yörüngeden en az bir eleman bulunduruyorsa,

(ii) F^0 her yörüngeden en fazla bir eleman bulunduruyorsa,

(iii) $F \setminus F^0$ nin hiperbolik alanı sıfır, yani $\mu\left(F \setminus F^0\right)=0$

koşullarını gerçekliyorsa F alt kümesine Γ için bir ***temel bölgedir*** denir.

Tanım 1.3.10 : Bir möbius şeridinin bir noktasından başlayarak merkez çemberi etrafında bir kez dolanılırsa möbius şeridinin ters tarafında aynı noktaya ulaşılır. Dolayısıyla bir möbius şeridini içeren yüzeylere ***yönlendirilemeyen yüzey***, möbius şeridini içermeyen torus gibi bir yüzeye de ***yönlendirilebilir yüzey*** denir.

Tanım 1.3.11 : Wilkie, kopmak bölüm uzayına sahip olan Γ N.E.C. grubu verildiğinde bunun bir F temel bölgesinin ve temel bölgesi ile eşleştirilmiş bir yüzey simgesinin elde edilebileceğini, bu yüzey simgesinden yararlanılarak da Γ grubunun gösteriminin bulunabileceğini göstermiştir.

Yüzey simgesi şöyle elde edilir: F , Γ N.E.C. gurubunun temel bölgesi olmak üzere F nin köşelerini $A,B,C,\ldots,P,Q,R,\ldots$ biçiminde adlandıralım.

1. AB kenarının PQ kenarı ile yön koruyan bir g elemanı ile eşleştirildiğini kabul edelim ve AB kenarını α ile gösterelim. O halde $g(B)=P$ ve $g(A)=Q$ dır. Dolayısıyla F nin kenarı olarak düşünüldüğünde α kenarının yönü g tarafından değiştirilmiştir. Bu durumda PQ kenarını α' ile göstereceğiz. Böyle bir durumda α,α' simgesi bu kenarların yön koruyan bir dönüşüm ile eşlendiğini gösterir.

2. Eğer AB ve PQ kenarları h kayan yansıması ile eşleştirilmiş ise $h(A)=P$ ve $h(B)=Q$ olur. AB yi γ ile gösterirsek h,γ kenarının yönünü koruduğundan PQ kenarını da γ ile gösteririz. Eğer γ, γ olarak adlandırılmış en az bir çift eşlenmiş kenar varsa bu U/Γ bölüm uzayının yönlendirilemez yüzey olduğunu gösterir.

3. Hiçbir kenar ile eşleşmeyen kenarların olduğunu da biliyoruz. Böyle bir kenarı da δ ile gösterelim.

F, kenarları yukarıdaki kurala göre adlandırılmış bir temel bölge olsun. Kenarları belirten harfleri pozitif yönde yan yana (sıralarını değiştirmeksizin) yazmakla elde edilen gösterime ***yüzey simgesi*** denir.

Karşımıza iki çeşit yüzey simgesi çıkar. Bunlardan birisi yönlendirilebilir, diğeri yönlendirilemez bölüm uzayına sahip gruplar içindir. Yönlendirilebilir bölüm uzaylı gruplar için yüzey simgesi

$$\xi_1\,\xi_1'\ldots\xi_k\,\xi_k'\,\varepsilon_1\,\gamma_{10}\,\gamma_{11}\ldots\gamma_{1s_1}\,\varepsilon_1'\,\varepsilon_2\,\gamma_{20}\,\gamma_{21}\ldots\gamma_{2s_2}\,\varepsilon_2'\ldots\varepsilon_r\,\gamma_{r0}\ldots\gamma_{rs_r}\,\varepsilon_r'\,\alpha_1\,\beta_1\,\alpha_1'\,\beta_1'\ldots\alpha_g\,\beta_g\,\alpha_g'\,\beta_g'$$

ve yönlendirilemez bölüm uzaylı gruplar için yüzey simgesi

$$\xi_1\,\xi_1'\ldots\xi_k\,\xi_k'\,\varepsilon_1\,\gamma_{10}\,\gamma_{11}\ldots\gamma_{1s_1}\,\varepsilon_1'\,\varepsilon_2\,\gamma_{20}\,\gamma_{21}\ldots\gamma_{2s_2}\,\varepsilon_2'\ldots\varepsilon_r\,\gamma_{r0}\ldots\gamma_{rs_r}\,\varepsilon_r'\,\alpha_1\,\alpha_1^*\,\alpha_2\,\alpha_2^*\ldots\alpha_g\,\alpha_g^*$$

biçimindedir. Birinci tipteki bir yüzey simgesine sahip F temel bölgesinin eşlenmiş kenarlarının karşılıklı noktaları özdeşlenirse r-tane disk çıkarılmış ve g tane kulp takılmış bir küre, ikinci tipteki bir yüzey simgesine sahip olandan da r-tane disk çıkarılmış ve g-tane çapraz başlık (cross-cap) eklenmiş bir küre elde edilir.

m_i, n_{ij} sayıları Γ nın yön koruyan elemanlarının mertebeleridir ve bunlara Γ nın ***periyotları*** denir. Özel olarak m_i tamsayılarına da Γ nın ***has periyotları*** denir.

Γ grubunun NEC simgesi, yönlendirilebilir bölüm uzaylı olduğunda,

$$\left(g,+,[m_1,\ldots,m_k],\left\{\left(n_{11},\ldots,n_{1s_1}\right),\ldots,\left(n_{r1},\ldots,n_{rs_r}\right)\right\}\right), \qquad (1.3.1)$$

yönlendirilemez bölüm uzaylı olduğunda,

$$\left(g,-,[m_1,\ldots,m_k],\left\{\left(n_{11},\ldots,n_{1s_1}\right),\ldots,\left(n_{r1},\ldots,n_{rs_r}\right)\right\}\right) \qquad (1.3.2)$$

biçimindedir. Özel olarak Γ bir Fuchsian grup ise bütün periyotlar has periyot olacağından ve bölüm uzayı yönlendirilebilir olduğundan yüzey simgesi,

$$\left(g,+,[m_1,\ldots,m_k],\{\ \}\right)$$

olur. Böyle bir durumda yüzey simgesi genellikle

$$\left(g;m_1,\ldots,m_k\right)$$

olarak yazılır.

II. BÖLÜM

GRUP KARAKTERLERİ İLE DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SAYISININ BULUNMASI

2.1 SONLU GRUP GÖSTERİMLERİ

Tanım 2.1.1 : G sonlu bir grup ve F bir cisim olsun. Bu taktirde F üzerinde G nin bir gösterimi, bir

$$\rho : G \to GL(V)$$

homomorfizmidir. Burada V, F üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $GL(V)$ de V den V ye izomorfizmlerin grubudur.

V, F üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı olsun ve V nin bir $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bazını alalım. Bu taktirde V vektör uzayından F^n vektör uzayına tanımlanan

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Böylece V yi F^n vektör uzayı ile tanımlayabiliriz. Diğer taraftan lineer cebirden $GL(V) \cong GL_n(F)$ olduğu iyi bilinir. Burada $GL_n(F)$, F üzerinde bütün $n \times n$ tersinir matrislerin grubudur. Şimdi, eğer $\rho : G \to GL(V)$ bir gösterim ise bu taktirde $\rho : G \to GL_n(F)$ homomorfizmini elde ederiz. n tamsayısına ρ nun ***derecesi*** denir.

Herhangi bir G grubunun derecesi 1 olan bir gösterimine bir ***lineer gösterim*** adı verilir, yani; bir lineer gösterim bir $\rho : G \to GL_1(F) \cong F^* = F - \{0\}$ homomorfizmidir.

Tanım 2.1.2 : $\rho : G \to GL_n(V)$ ve $\rho' : G \to GL_n(V)$ F üzerinde G nin iki gösterimi olsun. Eğer her $g \in G$ için,

$$\rho'(g) = T^{-1} \rho(g) T$$

olacak şekilde bir T tersinir $n \times n$ matrisi varsa ρ ve ρ' gösterimlerine ***denktir*** denir.

Tanım 2.1.3 : $\rho : G \to GL(V)$, F üzerinde G nin bir gösterimi olsun. Eğer $\text{Çek}\,\rho = \{1\}$ ise ρ gösterimine ***faithfuldur*** denir. Yani; eğer $\rho(g) = I_n$ olan G nin yegane g elemanı birim eleman ise ρ faithfuldur.

G bir grup ve F bir cisim olsun. $\rho : G \to GL_n(V)$ nin G nin bir gösterimi olduğunu farz edelim. $x_i \in F$ olmak üzere $(x_1, \dots, x_n)^t$ şeklindeki bütün sütun vektörlerinin uzayı $V = F^n$ olsun. Burada $(x_1, \dots, x_n)^t$, $(x_1, \dots, x_n)$ nin transpozunu gösterir. $\forall v \in V$ ve $\forall g \in G$ için, v sütun vektörü ile $\rho(g)$ $n \times n$ matrisinin $\rho(g)v$ matris çarpımı V de bir sütun vektörüdür.

Tanım 2.1.4 : G bir grup ve V, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir gv $(g \in G \; , \; v \in V)$ çarpımı tanımlanırsa V ye bir $G-$***modül*** veya $FG-$***modül*** denir. Her $u, v \in V$, $\lambda \in F$ ve $g, h \in G$ için

1) $gv \in V$
2) $(gh)v = g(hv)$
3) $1v = v$
4) $g(\lambda v) = \lambda(gv)$
5) $g(u+v) = gu + gv$

dır. Tanımdaki (1) , (4) ve (5) şartları $\forall g \in G$ için

$$v \mapsto gv \, , \quad (v \in V)$$

fonksiyonunun V nin bir endomorfizmi, yani V den kendisine bir lineer dönüşüm olduğunu garanti eder.

V, F üzerinde bir vektör uzayı ve θ, V nin bir endomorfizmi olsun. V nin bir bazının $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ olduğunu farz edelim. Bu taktirde F de a_{ij} $(1 \le i \le n \; , \; 1 \le j \le n)$ skalerleri her i için,

$$\theta\left(v_i \right) = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{ij}v_j + \ldots + a_{in}v_n$$

olacak şekilde vardır. Buradan elde edilen $\left(a_{ij} \right)$ matrisine B bazına bağlı olan θ nın matrisi denir ve $\left[\theta \right]_B$ ile gösterilir.

Şimdi, $B' = \{ v_1', \ldots, v_n' \}$, V nin bir diğer bazı olsun. Bu taktirde $1 \leq i \leq n$ ve belirli t_{ij} skalerleri için,

$$v_i' = t_{i1}v_1 + \ \ldots + t_{in}v_n$$

olur. Böylece elde edilen $T = (t_{ij})$ $n \times n$ matrisi tersinirdir ve bu matrise B den B' ye ***baz değişim matrisi*** adı verilir. T nin tersi B' den B ye baz değişim matrisidir.

B ve B', V nin bazları ve θ, V nin bir endomorfisi ise bu taktirde T, B den B' ye baz değişim matrisi olmak üzere

$$\left[\theta \right]_B = T^{-1} \left[\theta \right]_{B'} T \qquad (2.1.1)$$

dir.

B, V nin bir bazı olsun. Bu taktirde her $g \in G$ için, B bazına bağlı olan V nin $v \mapsto gv$ endomorfisinin matrisi $\left[g \right]_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 : G, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Her i ve her $g \in G$ için $g e_i = e_{g(i)}$ olacak şekilde $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ bazı ile bir V, $G-$modülüne F üzerinde G için ***permütasyon modülü*** denir. $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ bazına V nin ***doğal bazı*** denir.

Permütasyon modülünün $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ bazını B ile gösterelim. Bu taktirde her $g \in G$ için $\left[g \right]_B$ matrisi her bir satırda ve sütunda sıfırdan farklı bir tek elemana sahiptir ve bu eleman 1 dir. Böyle bir matrise ***permütasyon matrisi*** denir. Her bir e_i yi sabit bırakan G

nin yegane elemanı birim eleman olduğundan permütasyon modülünün bir faithful $G-$modül olduğu görülür.

Teorem 2.1.1 : 1) $\rho : G \to GL_n(V)$, F üzerinde G nin bir gösterimi ve $V = F^n$ olsun. Bu taktirde

$$gv = (\rho(g))v\,, \quad (v \in V\,, g \in G)$$

ile bir gv çarpımı tanımlanırsa V bir $G-$modül olur. Ayrıca, V nin bir B bazı

$$\rho(g) = [g]_B \quad (g \in G)$$

olacak şekilde vardır.

2) V bir $G-$modül ve B, V nin bir bazı olsun. Bu taktirde G den $GL_n(F)$ ye $g \mapsto [g]_B$ $(g \in G)$ ile verilen fonksiyon F üzerinde G nin bir gösterimidir.

Teorem 2.1.2 : V, B bazı ile birlikte bir $G-$modül ve ρ, $\rho : g \mapsto [g]_B$ $(g \in G)$ ile tanımlanan F üzerinde G nin bir gösterimi olsun. Bu taktirde

1) B', V nin bir bazı ise G nin $\rho' : g \mapsto [g]_{B'}$ gösterimi ρ ya denktir,

2) ρ'', ρ ya denk olan G nin bir gösterimi ise bu taktirde V nin bir B'' bazı vardır öyle ki $\rho'' : g \mapsto [g]_{B''}$ dir.

Tanım 2.1.6 : V ve W, $G-$modüller olsun.

i) Bir $\theta : V \to W$ fonksiyonu bir lineer dönüşüm ve her $v \in V$ ve $g \in G$ için

$$(vg)\theta = (v\theta)g$$

sağlanırsa θ ya bir $G-$***homomorfizm*** (veya $FG-$***homomorfizm***) denir. Diğer bir ifadeyle, eğer θ, v yi w ye gönderirse bu taktirde vg yi de wg ye gönderir.

ii) Eğer $\theta : V \to W$, bir $G-$homomorfizm ve tersinir ise θ ya bir $G-$***izomorfizm*** denir. Böyle bir $G-$izomorfizm varsa V ve W ye izomorfik $G-$modüller denir ve $V \cong_G W$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 : V bir $G-$modül ve W, V nin bir alt kümesi olsun. Eğer W bir alt uzay ve her $w \in W$ ve her $g \in G$ için $wg \in W$ ise W ye V nin bir $G-$ ***alt modülü*** denir.

Böylece V nin bir $G-$alt modülü bir $G-$modül olan bir alt uzaydır. Her V $G-$modülü için $\{0\}$ (sıfır alt uzayı) ve V nin kendisi V nin $G-$alt modülleridir.

Tanım 2.1.8 : i) $V \neq 0$ bir $G-$modül olsun. Eğer V nin $\{0\}$ ve V den başka $G-$alt modülü yoksa V ye ***indirgenemezdir*** denir. Eğer V, $\{0\}$ ve V den başka bir W, $G-$alt modülüne sahipse V ye ***indirgenebilirdir*** denir.

ii) $\rho : G \to GL_n(F)$, G nin bir gösterimi olsun. Eğer bu gösterime karşılık gelen

$$gv = (\rho(g))v, \quad (v \in F^n, g \in G)$$

ile tanımlı F^n, $G-$modülü indirgenemez ise bu taktirde ρ gösterimi indirgenemezdir. Eğer F^n, indirgenebilir ise ρ gösterimi indirgenebilirdir.

V nin indirgenebilir bir $G-$modül olduğunu farz edelim. Böylece $0 < boy W < boy V$ olacak şekilde bir W, $G-$alt modülü vardır. V nin bir B bazına genişletebileceğimiz W nin bir B_1 bazını alalım. Bu taktirde her $g \in G$ için $[g]_B$ matrisi

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

formundadır. Burada A ve B matrisleri W ve V/W üzerinde g nin etkisini gösterir (böylece A matrisi $k \times k$ lı bir matristir, $k = boy W$ dir). Ayrıca, $g \mapsto A$ ve $g \mapsto B$ fonksiyonları G nin gösterimleridir. Böylece derecesi n olan bir gösterim indirgenebilirdir ancak ve ancak yukarıda verilen formdaki bir gösterime denktir.

Tanım 2.1.9 : V bir $G-$modül olsun. Eğer V, $\{0\}$ ve V den farklı W_1 ve W_2, $G-$alt modüllerinin $V = W_1 \oplus W_2$ direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa (veya yazılamıyorsa) V ye ***ayrışabilir*** (veya ***ayrışamaz***) denir.

Önerme 2.1.1 : İki V ve W, $G-$modül izomorfiktir ancak ve ancak V nin B_1 bazı ve W nin B_2 bazı her $g \in G$ için

$$[g]_{B_1} = [g]_{B_2}$$

olacak şekilde mevcuttur.

V bir $G-$modül olsun ve W_i ler V nin $G-$alt modülleri olmak üzere $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ . \ . \ . \oplus W_r$ olduğunu farz edelim. B_i, W_i nin bir bazı ise bu taktirde $B = \bigcup_i B_i$ nin, V nin bir bazı olduğu açıktır ve her $g \in G$ için

$$[g]_B = \begin{pmatrix} [g]_{B_1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & [g]_{B_2} & . & . & 0 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & [g]_{B_r} \end{pmatrix}$$

dir.

Teoremi 2.1.3 (Maschke Teoremi) : G sonlu bir grup olsun. F nin karakteristiğinin 0 veya $|G|$ ile aralarında asal olduğunu farz edelim. Eğer V, F üzerinde sonlu boyutlu bir $G-$modül ve W_1 de V nin bir $G-$alt modülü ise bu taktirde $V = W_1 \oplus W_2$ olacak şekilde V nin bir W_2, $G-$alt modülü vardır [8,16].

G sonlu bir grup ve $F = \mathbb{C}$ olsun.

Lemma 2.1.1 (Schur Lemması) : V ve W indirgenemez $G-$modüller olsun.

i) Eğer $\theta : V \to W$ bir $G-$homomorfizm ise bu taktirde ya θ bir $G-$izomorfizmdir ya da her $v \in V$ için $\theta(v) = 0$ dır.

ii) Eğer $\theta : V \to V$ bir $G-$izomorfizm ise bu taktirde θ, 1_V birim endomorfisinin bir skaler katıdır [8,16].

Önerme 2.1.2 : V, $\mathbb{C}$ üzerinde sıfırdan farklı bir $G-$modül olsun ve V den V ye her $G-$homomorfizmin 1_V nin bir skaler katı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde V indirgenemezdir.

Sonuç 2.1.1 : $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$, G nin bir gösterimi olsun. Bu taktirde ρ indirgenemezdir ancak ve ancak $\forall g \in G$ için $\rho(g)A = A\,\rho(g)$ şartını sağlayan her $n \times n$ A matrisi $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A = \lambda I_n$ formundadır.

Önerme 2.1.3 : G sonlu bir abel grup ise bu taktirde her indirgenemez $G-$modül 1 boyutludur.

Örnek 2.1.1 : $G = C_n = < a \mid a^n = 1 >$ mertebesi n olan bir devirli grup ve V sıfırdan farklı $G-$modül olsun. Maschke teoremine göre, $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, $\mathbb{C}$ üzerinde V nin U_i indirgenemez $G-$modüllerinin bir direkt toplamıdır. Önerme (2.1.3) e göre her bir U_i nin boyutu 1 dir. u_i, U_i yi geren vektör olsun ve $w = e^{2\pi i/n}$ olarak alalım. Buna göre her i için $g u_i = w^{m_i} u_i$ olacak şekilde bir m_i tamsayısı vardır. Böylece B, V nin $u_1, \ldots, u_r$ bazı ise bu taktirde,

$$[g]_B = \begin{pmatrix} w^{m_1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & w^{m_2} & . & . & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & w^{m_r} \end{pmatrix}$$

dir.

Önerme 2.1.4 : G sonlu bir grup ve V, $\mathbb{C}$ üzerinde bir $G-$modül olsun. Eğer $g \in G$ ise bu taktirde V nin bir B bazı vardır öyle ki $\left[g \right]_B$ matrisi köşegen matristir. Eğer g nin mertebesi n ise bu taktirde $\left[g \right]_B$ matrisinin köşegen üzerindeki elemanları birimin n inci kökleridir.

2.2 SONLU GRUP KARAKTERLERİ

Bu kısımda $F = \mathbb{C}$, G sonlu bir grup ve $boy V < \infty$ olduğunu kabul edelim.

Tanım 2.2.1 : Eğer $A = \left(a_{ij} \right)$ bir $n \times n$ li bir kare matris ise bu taktirde A nın ***izi*** $iz\,A$ ile gösterilir ve

$$iz\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2 : Eğer $\rho : G \to GL(V)$, G nin bir gösterimi ise bu taktirde ρ nun χ karakteri $g \in G$ için $\chi(g) = iz(\rho(g))$ ile verilen $\chi : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonudur ve ρ ya χ karakterini meydana getirir denir.

Tanım 2.2.3 : Eğer χ, G nin bir ρ gösteriminin karakteri ise bu taktirde χ nin ***derecesi*** $der\,\chi$ ile gösterilir ve $der\,\chi = der\,\rho$ olarak tanımlanır. Böylece

$$der\,\chi = \chi(1)$$

dir.

Tanım 2.2.4 : Eğer χ, G nin bir ρ gösteriminin bir karakteri ise bu taktirde χ in ***çekirdeği*** $Çek\,\chi = \{ g \in G : \chi(g) = \chi(1) \}$ ile tanımlanır. Böylece $Çek\,\chi = Çek\,\rho$ dir.

ρ nun faithful, lineer, indirgenemez veya indirgenebilir olması durumuna göre χ de faithful, lineer, indirgenemez veya indirgenebilirdir denir.

Teorem 2.2.1 : G sonlu bir grup ve χ, G nin bir karakteri olsun. Bu taktirde χ in değeri, G nin bir eşlenik sınıfının bütün elemanları üzerinden sabittir (yani; χ bir sınıf fonksiyonudur).

Önerme 2.2.1 : χ, $\mathbb{C}$ üzerinde bir $G-$modülünün karakteri olsun ve $g \in G$ için g nin mertebesinin m olduğunu farz edelim. Buna göre;

1) $\chi(1) = boy V$

2) $\chi(g)$, birimin m inci köklerinin bir toplamıdır.

3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

4) Eğer g, g^{-1} e eşlenik ise $\chi(g)$ bir reel sayıdır.

Tanım 2.2.5 : θ ve ϕ nin G den $\mathbb{C}$ ye fonksiyonlar olduğunu farz edelim.

$$<\theta,\phi> = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\theta(g)\overline{\phi(g)}$$

şeklinde bir skaler çarpım tanımlayalım. Bu taktirde $<,>$, G den $\mathbb{C}$ ye fonksiyonların vektör uzayı üzerinde bir iç çarpımdır. Yani;

i) $\forall\theta_1,\theta_2,\phi$ ve $\forall x_1,x_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$<x_1\theta_1 + x_2\theta_2, \phi> = x_1 <\theta_1,\phi> + x_2 <\theta_2,\phi>$$

ve $\forall\theta,\phi_1,\phi_2$ ve $\forall x_1,x_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$<\theta, x_1\phi_1 + x_2\phi_2> = \overline{x_1} <\theta,\phi_1> + \overline{x_2} <\theta,\phi_2>$$

ii) $<\theta,\phi> = \overline{<\phi,\theta>}$ (her θ,ϕ için)

iii) Eğer $\theta \neq 0$ ise $<\theta,\theta> > 0$ şartı sağlanır.

Önerme 2.2.2 : G nin, $g_1, \ldots, g_l$ temsilcileri ile tam olarak l tane eşlenik sınıfına sahip olduğunu farz edelim. χ ve ψ, G nin karakterleri olsun. Bu taktirde,

i) $<\chi,\psi> = \dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$ dir ve bu bir reel sayıdır.

ii) $<\chi,\psi> = \sum\limits_{i=1}^{l} \dfrac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$ dır.

Tanım 2.2.6 : $V_1, \ldots, V_k$ indirgenemez $G-$modüllerinin herhangi ikisi birbirine izomorfik değil ve her indirgenemez $G-$modül bir V_i ye izomorfik ise $V_1, \ldots, V_k$ ya izomorfik olmayan indirgenemez $G-$modüllerin bir tam kümesini oluşturur denir.

Teorem 2.2.2 : G sonlu bir grup ve $V_1, \ldots, V_k$ izomorfik olmayan indirgenemez $G-$modüllerin bir tam kümesi olsun. χ_i, V_i nin ($1 \le i \le k$) karakteri ise bu taktirde, $\forall i, j$ için

$$<\chi_i, \chi_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.2.3 : $\chi_1, \ldots, \chi_k$, G nin indirgenemez karakterleri olsun. Eğer ψ, G nin herhangi bir karakteri ise bu taktirde negatif olmayan $d_1, \ldots, d_k$ tamsayıları için

$$\psi = d_1 \chi_1 + \ldots + d_k \chi_k$$

dır. Ayrıca, her $1 \le i \le k$ için

$$d_i = <\psi, \chi_i> \quad \text{ve} \quad <\psi,\psi> = \sum_{i=1}^{k} d_i^2$$

dir.

Teorem 2.2.4 : V, karakteri χ olan bir $G-$modül olsun. Bu taktirde V indirgenemezdir ancak ve ancak $<\chi,\chi>=1$ dir.

Teorem 2.2.5 : G nin her indirgenemez $\rho^{(i)}$ gösterimi, $n_i = der\left(\rho^{(i)}\right)$ çarpanı ile birlikte $\overline{\rho}$ nun bir direkt toplamıdır. Böylece $\overline{\rho} = \oplus_{i\in I} n_i \, \rho^{(i)}$ dir.

Sonuç 2.2.1 : $\rho^{(i)}$ $(i \in I)$, G nin indirgenemez gösterimi ve $\chi_i = \chi_{\rho^{(i)}}$, $n_i = der(\chi_i) = boy(\rho^{(i)})$ ile $\rho^{(i)}$ nin karakteri olsun. Bu taktirde

$$\sum_{i\in I} n_i^2 = |G|$$

dir.

Tanım 2.2.7 : G üzerinde bir sınıf fonksiyonu, x ve y, G nin eşlenik elemanları olduğundan $\phi(x)=\phi(y)$ olacak şekilde bir $\phi : G \to \mathbb{C}$ fonksiyondur, yani; ϕ, G nin her bir eşlenik sınıfı üzerinde sabittir. G üzerinde bütün sınıf fonksiyonlarının $C(G)$ kümesi $boy\, C(G) = c$ boyutlu $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı oluşturur ($C(G)$, G den $\mathbb{C}$ ye bütün fonksiyonların vektör uzayının bir alt uzayıdır). Burada verilen c sayısı, G nin eşlenik sınıflarının sayısıdır. $C(G)$ nin bir bazı, $g \in C_j$ "G nin j inci eşlenik sınıfı" olmak üzere

$$\phi_i(g) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

fonksiyonları ile verilir (böylece ϕ_i, i inci C_i sınıfı üzerinde 1 değerine, diğer bütün durumlarda da 0 değerine sahip olur).

Teorem 2.2.6 : G nin $\rho^{(i)}$ indirgenemez gösterimlerinin χ_i karakteri, G üzerinde bütün $C(G)$ sınıf fonksiyonlarının vektör uzayı için bir ortonormal baz oluşturur.

Teorem 2.2.7 : G nin izomorfik olmayan indirgenemez karakterlerinin sayısı, G nin eşlenik sınıflarının sayısına eşittir.

Teorem 2.2.8 : G abel gruptur ancak ve ancak G, hepsinin derecesi 1 olan $|G|$ tane indirgenemez gösterime sahiptir.

Teorem 2.2.9 : i) (Satır Ortogonallik Bağıntısı) : $\chi_1, \dots, \chi_k$, G nin indirgenemez kompleks karakterleri ve $g_1, \dots, g_k$, G nin eşlenik sınıflarının temsilcileri olsun. Bu taktirde herhangi bir $r, s \in \{1, \dots, k\}$ çifti için

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{|C_i|}{|G|} \chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & , \quad r = s \\ 0 & , \quad r \neq s \end{cases}$$

dir.

ii) (Sütun Ortogonallik Bağıntıları) :

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \begin{cases} \dfrac{|G|}{|C_r|} & , \quad r = s \\ 0 & , \quad r \neq s \end{cases}$$

dır.

Önerme 2.2.3 : $N \lhd G$ ve $\tilde{\chi}$, G/N nin bir karakteri olsun. $\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng)$ $(g \in G)$ olacak şekilde $\chi : G \to \mathbb{C}$ tanımlayalım. Bu taktirde χ, G nin bir karakteridir ve χ ile $\tilde{\chi}$ aynı dereceye sahiptir.

Tanım 2.2.8 : $N \lhd G$ ve $\tilde{\chi}$, G/N in bir karakteri ise bu taktirde $\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng)$ $(g \in G)$ ile verilen G nin χ karakterine $\tilde{\chi}$ nın G ye ***taşınmışı*** denir.

Teorem 2.2.10 : $N \lhd G$ olsun. G/N nin her bir karakteri ile onun G ye taşınmışını birleştirerek, G/N nin karakterlerinin kümesi ile $N \leq Çek\,\chi$ ifadesini sağlayan G nin χ

karakterlerinin kümesi arasında bire bir ve örten bir eşleme elde ederiz. $G/_N$ nin indirgenemez karakterleri; çekirdekleri N yi içeren G nin indirgenemez karakterlerine karşılık gelir.

Önerme 2.2.4 : Eğer χ , G nin bir lineer karakteri ise bu taktirde $G' \leq Çek\,\chi$ dir.

Önerme 2.2.5 : G nin lineer karakterleri tamamen $G/_{G'}$ nün indirgenemez karakterlerinin G ye taşınmışıdırlar. Özellikle, G nin farklı lineer karakterlerinin sayısı $\left| G/_{G'} \right|$ e eşittir.

Teorem 2.2.11 : $G = H \times K$ olsun. $\phi_1, \ldots, \phi_n$, H ın farklı indirgenemez karakterleri ve $\theta_1, \ldots, \theta_m$ de K nın farklı indirgenemez karakterleri olsun. Bu taktirde G tam olarak, nm tane farklı indirgenemez karaktere sahiptir ve bunlar $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için

$$(\phi_i \times \theta_j)(g,h) = \phi_i(g)\theta_j(h) \qquad (g \in G\,,\, h \in H)$$

olmak üzere $\phi_i \times \theta_j$ lerdir.

Tanım 2.2.9 : 1) $x \in G$ olsun. Eğer x ve x^{-1} eşlenik ise bu x elemanına ***reeldir*** denir.
2) G nin bir karakteri χ olsun. Her $g \in G$ için $\chi(g)$ reel ise χ reeldir.

Önerme 2.2.6 : Bir G grubunun reel olan kompleks indirgenemez karakterlerinin sayısı, reel elemanların eşlenik sınıflarının sayısına eşittir. Özellikle;
i) Bir g elemanı reeldir ancak ve ancak her indirgenemez χ karakteri için $\chi(g)$ reeldir,
ii) Eğer G grubunun mertebesi tek ise bu taktirde sadece trivial karakterler reeldir,
iii) G trivial olmayan bir reel indirgenemez karaktere sahiptir ancak ve ancak G nin mertebesi çifttir,
iv) Eğer G bir abel grup ise bu taktirde G nin reel indirgenemez karakterlerinin sayısı $g^2 = 1$ olan G deki g elemanlarının sayısına eşittir [3,8,16].

Tanım 2.2.10 : ρ , karakteri χ olan bir G grubunun bir indirgenemez gösterimi olsun. Eğer ρ , $\mathbb{R}$ üzerinde alınabilirse bu taktirde ρ ya ***birinci çeşit*** , eğer ρ , $\mathbb{R}$ üzerinde değil fakat χ

reel ise ρ ya ***ikinci çeşit*** ve χ reel değil (böylece ρ da reel değil) ise ρ ya ***üçüncü çeşittir*** denir.

Frobenius-Schur belirleyicisi

$$c_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.12 : G nin her bir indirgenemez χ karakteri için, ρ nun sırasıyla birinci, ,ikinci veya üçüncü çeşit olmasına göre $c_\chi = 1$, -1 veya 0 olur [8].

Şimdi iyi bilinen bazı sonlu grupların karakterlerini, Möbius fonksiyonu altında değerlerini ve bu grupların alt gruplarını verelim.

Örnek 2.2.1 : $H = C_n = < a \mid a^n = 1 >$ mertebesi n olan bir ***devirli grup*** olsun. G nin, n nin her pozitif m böleni için mertebesi m olan tam olarak bir tane devirli $H \cong C_m$ alt grubu vardır. Möbius fonksiyonunun tanımından $\mu(H) = 1$ ve n nin her m $(m \leq n)$ böleni için $\mu(C_m) = \mu(\frac{n}{m})$ dir. Diğer taraftan ϕ Euler fonksiyonu, yani n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyon olmak üzere, C_n nin otomorfizm grubu $Aut(C_n)$ nin mertebesi

$$|Aut(C_n)| = \phi(n)$$

dir.

Şimdi C_n nin gösterimlerini ve karakterlerini yazalım. $F = \mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde, $0 \leq j < n$ olmak üzere

$$\rho_j(a) = [w^j] \quad \text{(böylece, } \rho_j(a^k) = [w^{jk}] \text{ , } 0 \leq k < n\text{),}$$

C_n nin 1 boyutlu indirgenemez gösterimlerinin tam listesidir. Burada $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ birimin bir n inci primitif köküdür, yani; $w^n = 1$ ve $1 \le m < n$ için $w^m \ne 1$ dir. Böylece mertebesi n olan bir devirli grubun tam olarak n tane boyutu 1 olan gösterimi vardır. Buradan C_n, aşağıda tanımlandığı gibi hepsinin derecesi 1 olan n tane indirgenemez kompleks karaktere sahiptir,

$$\chi_{\rho_j}(a) = w^j \quad , \quad (0 \le j \le n-1).$$

Örnek 2.2.2 : $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ mertebesi $2n$ olan bir ***dihedral grup***tur. Eğer n tek ise bu takdirde D_n in $\frac{n+3}{2}$ tane eşlenik sınıfı vardır. Bunlar

$$\{1\}; \{x^r, x^{-r}\} \ (1 \le r \le \tfrac{n-1}{2}); \{x^s y\} \ (0 \le s \le n-1)$$

dır. Böylece $\frac{n+3}{2}$ tane indirgenemez karaktere sahiptir.

Eğer n çift ise D_n in $\frac{n+6}{2}$ tane eşlenik sınıfı vardır. Bunlar

$$\{1\}; \left\{x^{n/2}\right\}; \{x^r, x^{-r}\} \ (1 \le r \le \tfrac{n-2}{2}); \{x^s y\} \ (s \text{ çift}); \{x^s y\} \ (s \text{ tek})$$

dır.

Eğer n tek ise D_n in derecesi 1 olan iki tane indirgenemez karakteri ve derecesi 2 olan $\frac{n-1}{2}$ tane indirgenemez karakteri vardır. D_n in $\mathbb{R}$ üzerinde bütün indirgenemez gösterimleri;

$$\rho_1 : g \mapsto [1], \ \forall g \in D_n$$

$$\rho_2 : g \mapsto \begin{cases} [1], & g = a^r \quad (\text{bir } r \text{ için}) \\ [-1], & g = a^r b \quad (\text{bir } r \text{ için}) \end{cases}$$

$$\rho_{j+2} : a \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi j}{n} & \sin\frac{2\pi j}{n} \\ -\sin\frac{2\pi j}{n} & \cos\frac{2\pi j}{n} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, \tfrac{n-1}{2}$$

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dır. Böylece D_n nin her gösterimi birinci çeşittir, yani reeldir. Dolayısıyla D_n in her bir χ karakteri için $c_\chi = 1$ dir.

Eğer n çift ise D_n in derecesi 1 olan dört tane indirgenemez karakteri ve derecesi 2 olan $\frac{n-2}{2}$ tane indirgenemez karakteri vardır. Yine D_n in her gösterimi reeldir ve böylece $c_\chi = 1$ dir.

D_n in her alt grubu ya devirlidir ya da yine dihedraldir. $m|n$ olan her m pozitif tamsayısı için mertebesi m olan ve $<x>$ de içerilen sadece bir tane devirli alt grup vardır. Bu alt grup $n=ml$ $(l\in\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$C_m = <x^l>$$

dir. D_n in mertebesi $2m$ olan l tane dihedral alt grubu vardır. Bunlar $u=x^l$, $v=x^i y$ $0\le i\le l-1$ olmak üzere

$$D_m = <u,v \mid u^m = v^2 = (uv)^2 = 1>$$

alt gruplarıdır.

Möbius fonksiyonunun tanımından her $m|n$ için

$$\mu(D_m) = \mu\left(\frac{n}{m}\right) \quad \text{ve} \quad \mu(C_m) = -\frac{n}{m}\mu\left(\frac{n}{m}\right)$$

dır.

D_n grubu mertebesi n olan $\phi(n)$ tane dönmeye karşılık gelen elemanlardan birini ve n tane yansımaya karşılık gelen elemanlardan birini içeren herhangi bir ikili tarafından üretildiğinden ve bu ikili diğer herhangi bir böyle ikiliyle tek bir otomorfizm ile dönüştürüldüğünden D_n in $n\phi(n)$ tane otomorfizmi vardır.

D_n in alt gruplarıyla ilgili aşağıdaki tabloyu verebiliriz. Tabloda birinci sütun D_n in alt gruplarını, ikinci sütun alt gruplarının sayısını, üçüncü sütun $\mu(H)$ değerlerini, dördüncü sütun alt grupların mertebelerini ve beşinci sütun bu alt grupların karakterlerinin derecesini gösterir (örneğin beşinci sütunda verilen $1^{(m)}$ ifadesinden m tane derecesi 1 olan karakterin olduğu anlaşılır).

H	$\#H$	$\mu(H)$	$\lvert H\rvert$	$\chi(1)$
$C_m\ (m\mid n)$	1	$-\frac{n}{m}\mu\left(\frac{n}{m}\right)$	m	$1^{(m)}$
$D_m\ (m\mid n$ tek$)$	$\frac{n}{m}$	$\mu\left(\frac{n}{m}\right)$	$2m$	$1^{(2)},\ 2^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}$
$D_m\ (m\mid n$ çift$)$	$\frac{n}{m}$	$\mu\left(\frac{n}{m}\right)$	$2m$	$1^{(4)},\ 2^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}$

Tablo 2.2.1 D_n in alt grupları

Örnek 2.2.3 : $G=\mathbb{Q}_{2^n}=<x,y\mid x^{2^{n-1}}=1,\ y^2=x^{2^{n-2}},\ yxy^{-1}=x^{-1}>$, mertebesi 2^n $(n>3)$ olan ***genelleştirilmiş quaternion gruptur***. $\mathbb{Q}_{2^n}$ nin her alt grubu ya devirlidir yada yine genelleştirilmiş quaternion grubudur.

$\mathbb{Q}_{2^n}$, $c=2^{n-2}+3$ tane eşlenik sınıfa sahiptir. Bunlar,

$$\{1\},\left\{x^{2^{n-2}}\right\},\left\{x^i,x^{-i}\right\}\ (1\le i\le 2^{n-2}-1),$$
$$\left\{x^{2i}y\right\}\ (0\le i\le 2^{n-2}-1),\left\{x^{2i+1}y\right\}\ (0\le i\le 2^{n-2}-1).$$

$\mathbb{Q}_{2^n}$, c tane indirgenemez karaktere sahiptir. $\left|\mathbb{Q}_{2^n}:\mathbb{Q}'_{2^n}\right|=4$ olduğundan derecesi 1 olan dört tane indirgenemez karakteri vardır, yani $n_1=n_2=n_3=n_4=1$ ve $n_j>1,\ 5\le j\le c$. Bu takdirde,

$$\left|\mathbb{Q}_{2^n}\right|=2^n=1^2+1^2+1^2+1^2+\sum_{j=5}^{c}n_j^2\ge 4+\left(2^{n-2}-1\right)2^2=2^n$$

dır, burada $n_j=2,\ \ 5\le j\le c$ dır.

$\mathbb{Q}_{2^n}$, indeksi 2 olan üç tane maksimal alt gruba sahiptir;

$$H_1 = <x> \cong C_{2^{n-1}}$$
$$H_2 = <x^2, y> \cong \mathbb{Q}_{2^{n-1}}$$
$$H_3 = <x^2, xy> \cong \mathbb{Q}_{2^{n-1}}$$

dır. Bu takdirde $\mu(H_i) = -1 \ (i = 1,2,3)$ dır. $K = \mathbb{Q}'_{2^n} = <x^2> \cong C_{2^{n-2}}$ komütatör alt grubu bu üç maksimalin arakesiti olduğundan $\mu(K) = 3-1 = 2$ dır. Diğer bütün H alt grupları için, bunlar maksimallerin arakesiti olmadığından, $\mu(H) = 0$ dır.

$\mathbb{Q}_{2^n}$ nin alt gruplarıyla ilgili aşağıdaki tabloyu verebiliriz.

H	$\#H$	$\mu(H)$	$\|H\|$	$\chi(1)$
$\mathbb{Q}_{2^n}$	1	1	2^n	$1^4, 2^{2^{n-2}-1}$
$\mathbb{Q}_{2^{n-1}}$	2	-1	2^{n-1}	$1^4, 2^{2^{n-3}-1}$
$C_{2^{n-1}}$	1	-1	2^{n-1}	$1^{2^{n-1}}$
$C_{2^{n-2}}$	1	2	2^{n-2}	$1^{2^{n-2}}$

Tablo 2.2.2 $\mathbb{Q}_{2^n}$ in alt grupları

Ayrıca $\mathbb{Q}_{2^n}$ $(n>3)$, 2^{2n-3} tane otomorfizmaya sahiptir.

Örnek 2.2.4 : $\mathbb{Q}_8 = <x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, yxy^{-1} = x^3>$ olmak üzere mertebesi 8 olan quaternion grubu olsun. $\mathbb{Q}_8$ grubu $\{1\}, \{x^2\}, \{x^2y, y\}, \{x, x^3\}, \{xy, x^3y\}$ eşlenik sınıflarına sahiptir. $\mathbb{Q}_8$ in 4 tane ρ_n $(n=1,2,3,4)$ 1 boyutlu reel gösterimi ve 1 tane 2 inci çeşit 2 -boyutlu ρ_5 indirgenemez gösterimi vardır. Bu gösterim

$$\rho_5 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad xy \mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ile verilir. Böylece $\mathbb{Q}_8$ grubunun derecesi 1 olan 4 tane ve derecesi 2 olan 1 tane indirgenemez karakteri vardır. $\mathbb{Q}_8$ in karakter tablosu aşağıda verilmiştir.

Eşlenik sınıflar

Karakterler	$\{1\}$	$\{x^2\}$	$\{x, x^3\}$	$\{y, x^2y\}$	$\{xy, x^3y\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	−1	1	−1
χ_3	1	1	1	−1	−1
χ_4	1	1	−1	−1	1
χ_5	2	−2	0	0	0

Tablo 2.2.3 $\mathbb{Q}_8$ grubunun karakter tablosu

Buradan, bu karakterlere karşılık gelen Frobenius Schur belirleyicisi $c_{\chi_1} = c_{\chi_2} = c_{\chi_3} = c_{\chi_4} = 1$ ve $c_{\chi_5} = -1$ dir.

Şimdi $\mathbb{Q}_8$ in at gruplarının Möbius fonksiyonu altındaki değerlerini bulalım: $\mathbb{Q}_8$ grubunun üç tane maksimal alt grubu vardır. Bunlar, mertebesi 4 olan $<x>\cong C_4$, $<x^2,y>\cong C_4$, $<x^2,xy>\cong C_4$, devirli alt gruplarıdır. Bunlara ek olarak bir tane mertebesi 2 olan $<x^2>\cong C_2$ devirli alt grubu vardır. Bu alt grup maksimal alt grupların arakesitidir. Bu alt gruplar için $\mu(H)$ değerleri,

$$\mu(\mathbb{Q}_8)=1,\ \mu(C_4)=-1,\ \mu(C_2)=2,\ \mu(C_1)=0$$

dır. Böylece $\mathbb{Q}_8$ ile ilgili aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

H	$\#H$	$\mu(H)$	$\lvert H\rvert$	$\chi(1)$
$\mathbb{Q}_8$	1	1	8	$1^4, 2$
C_4	3	−1	4	1^4
C_2	1	2	2	1^2
C_1	1	0	1	1

Tablo 2.2.4 $\mathbb{Q}_8$ in alt grupları

$Aut(\mathbb{Q}_8)\cong S_4$ olduğundan $\lvert Aut(\mathbb{Q}_8)\rvert = 24$ dür.

2.3 GRUP KARAKTERLERİ İLE SONLU BİR GRUPTA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SAYISININ BULUNMASI

Bu bölümde kompakt, bağlantılı yüzeylerin temel gruplarının üreteçleri arasındaki bağıntılara karşılık gelen denklemlerin sonlu bir grupta çözümlerinin sayısını veren formüller verilecektir. Bu formüller son bölümde yansımasız Öklidyen olmayan Kristallografik (NEC) grupların normal alt gruplarının sayısını veren formüllerin bulunmasında da kullanılacaktır (Kompakt, bağlantılı yüzeylerin temel gruplarıyla ilgili olarak [4, 13, 19] nolu referanslara bakınız).

Bu formüller için teoremleri vermeden önce gösterim teorisinde önemli yeri olan ve bu formüllerin ispatında kullanılan grup cebirleri ile ilgili bazı kavramları verelim.

Sonlu bir G grubunun ***grup cebiri,*** G üzerinde çarpma işlemini içeren ekstra yapı taşıyan $|G|$ boyutlu bir vektör uzayıdır. Bir anlamda grup cebirleri gösterim teorisiyle ilgili bilmek istediğimiz her şeyin kaynağıdır. Fakat biz burada ayrıntıya girmeyeceğiz.

G, elemanları $g_1, g_2, \dots, g_n$ olan sonlu bir grup olsun. $\mathbb{C}$ üzerinde baz elemanları $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$ olan bir vektör uzayı tanımlayacağız ve buna $\mathbb{C}G$ diyeceğiz. $\mathbb{C}G$ nin elemanları olarak

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}$$

formundaki bütün ifadeler alınır. $\mathbb{C}G$ de toplam ve skaler çarpım için kurallar doğal olarak tanımlanır: eğer $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ ve $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$ $\mathbb{C}G$ nin elemanları ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise bu taktirde

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i \quad \text{ve} \quad \lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) g_i$$

şeklindedir. Bu kurallar ile, $\mathbb{C}G$, $\mathbb{C}$ üzerinde $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$ bazı ile n boyutlu bir vektör uzayıdır. $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$ bazına $\mathbb{C}G$ nin ***doğal bazı*** denir. Bazen $\mathbb{C}G$ nin elemanlarını $\sum_{g \in G} \lambda_g g \quad (\lambda_g \in \mathbb{C})$ formunda yazarız.

Tanım 2.3.1 : $\mathbb{C}$ üzerinde G nin

$$\mathbb{C}G = \{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}^{|G|}$$

grup cebiri, $g(=1.g) \in G$ baz elemanları ile bir kompleks vektör uzayıdır. $\mathbb{C}G$ de

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g . \sum_{h \in G} \beta_h h = \sum_{g,h \in G} \alpha_g \beta_h (gh) = \sum_{k \in G} \left(\sum_{gh=k} \alpha_g \beta_h \right) k$$

ile verilen çarpımı tanımlamak için G deki çarpımı kullanırız. Bu $\mathbb{C}G$ yi bir halka ve vektör uzayı yapar. Böylece $\mathbb{C}G$ bir cebirdir. $\mathbb{C}G$ grup cebiri çarpım için bir birim içerir, bu eleman 1 $\mathbb{C}$ nin birimi ve e de G nin birimi olmak üzere $1.e$ elemanıdır. Bu elemanı basitçe 1 olarak yazarız.

$V = \mathbb{C}G$ olsun. Böylece V, $\mathbb{C}$ üzerinde $n = |G|$ boyutlu bir vektör uzayıdır. Her $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $g, h \in G$ için,

$$\begin{aligned} & gv \in V, \\ & (gh)v = g(hv), \\ & 1v = v, \\ & g(\lambda v) = \lambda(gv), \\ & g(u+v) = gu + gv \end{aligned}$$

dir. Buna göre $V = \mathbb{C}G$, bir G-modüldür.

Tanım 2.3.2 : G sonlu bir grup olsun. $v \in \mathbb{C}G$, $g \in G$ olmak üzere gv doğal çarpımı ile $\mathbb{C}G$ vektör uzayına ***düzgün (regüler)*** ***G*-modül** denir.

$\mathbb{C}G$ nin doğal bazı B alınarak elde edilen $g \mapsto [g]_B$ gösterimine $\mathbb{C}$ üzerinde G nin ***düzgün (regüler) gösterimi*** denir. Bu gösterim $|G|$ boyuta sahiptir.

G nin ($\mathbb{C}$ üzerinde) herhangi bir $\rho : G \to GL(V)$ gösterimi bir

$$\rho : \mathbb{C}G \to End(V)\,;\ \sum_{g \in G} \alpha_g\, g \mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g\, \rho_g$$

cebir homomorfizmine genişletilebilir.

Tanım 2.3.3 : $\mathbb{C}G$ ***grup cebirinin merkezi***

$$\{\, z \in \mathbb{C}G \mid\ za = az \quad \forall a \in \mathbb{C}G \,\}$$

şeklinde tanımlanır ve $Z = Z(\mathbb{C}G)$ ile gösterilir.

Lemma 2.3.1 : Z, $\underline{C} = \sum_{g \in C} g$ baz elemanları ile birlikte $\mathbb{C}G$ nin bir alt cebiridir. Burada C, G nin eşlenik sınıfları üzerinde dolaşır (böylece $boy\, Z$ = eşlenik sınıfların sayısıdır).

İspat : Z nin $\mathbb{C}G$ nin bir alt cebiri olduğunu kontrol etmek kolaydır. $C_1, \ldots, C_l$, G nin farklı eşlenik sınıfları olsun. İlk olarak her bir $\underline{C_i}$ nin Z ye ait olduğunu gösterelim. C_i, bir g elemanının r tane farklı $y_1^{-1} g\, y_1, \ldots, y_r^{-1} g\, y_r$ eşleniklerinden oluşsun. Böylece,

$$\underline{C_i} = \sum_{j=1}^{r} y_j^{-1}\, g\, y_j$$

dir. Her $h \in G$ için,

$$h^{-1}\, \underline{C_i}\, h = \sum_{j=1}^{r} h^{-1}\, y_j^{-1}\, g\, y_j\, h$$

olur. j yi, 1 ile r arasında alırsak,

$$h^{-1}\, y_j^{-1}\, g\, y_j\, h = h^{-1}\, y_k^{-1}\, g\, y_k\, h \iff y_j^{-1}\, g\, y_j = y_k^{-1}\, g\, y_k$$

olduğundan, $h^{-1} y_j^{-1} g y_j h$ elemanı C_i boyunca dolaşır. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{r} h^{-1} y_j^{-1} g y_j h = \underline{C_i}$$

olur ve dolayısıyla $h^{-1} \underline{C_i} h = \underline{C_i}$ dir. Yani; $\underline{C_i}\, h = h \underline{C_i}$ olur. Buna göre her bir $\underline{C_i}$, her $h \in G$ ile değişir, böylece her $\sum_{h \in G} \lambda_h h \in \mathbb{C}G$ ile değişir. Böylece $\underline{C_i} \in \mathbb{C}G$ dir. Şimdi, $\underline{C_1}, \ldots, \underline{C_l}$ nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim: $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \underline{C_i} = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{C})$ olsun. $\underline{C_1}, \ldots, \underline{C_l}$ sınıfları ikili tarzda ayrık olduğundan her $\lambda_i = 0$ dır.

Geriye $\underline{C_1}, \ldots, \underline{C_l}$ nin Z yi ürettiğini göstermek kalır. $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in Z$ olsun. $h \in G$ için, $rh = hr$ ve böylece $h^{-1} r h = r$ olur. Yani;

$$\sum_{g \in G} \lambda_g h^{-1} g h = \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

dir. Dolayısıyla her $h \in G$ için, G nin λ_g katsayısı, $h^{-1} g h$ ın $\lambda_{h^{-1}gh}$ katsayısına eşittir. Buna göre $g \mapsto \lambda_g$ fonksiyonu G nin eşlenik sınıfları üzerinde sabittir. Böylece λ_i, bir $g_i \in C_i$ için λ_{g_i} katsayısı olmak üzere, $r = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \underline{C_i}$ olduğu görülür.

Önerme 2.3.1 : V, $\mathbb{C}$ üzerinde bir indirgenemez G - modül ve $z \in Z$ olsun. Bu taktirde

$$zv = \lambda v \qquad (\forall v \in V)$$

olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ vardır.

İspat : Her $r \in \mathbb{C}G$ ve $v \in V$ için, $rzv = zrv$ olur ve böylece $v \mapsto zv$ fonksiyonu V den V ye bir G-homomorfizmdir. Schur lemmasına göre, bu G-homomorfizma bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda 1_V$ ye eşittir.

Teorem 2.3.1 : $C_1, \ldots, C_g$, sonlu bir G grubunda eşlenik sınıfları (ayrık olması gerekmez) olsun. Bu taktirde her i için $x_i \in C_i$ olmak üzere $x_1 \ldots x_g = 1$ denkleminin G de $x_1, \ldots, x_g$ çözümlerinin sayısı

$$\frac{|C_1|\ldots|C_g|}{|G|}\sum_{\chi}\frac{\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}}$$

ile verilir. Burada χ, G nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinde dolaşır.

İspat : Lemma (2.3.1) ile C, G nin eşlenik sınıfları üzerinden olmak üzere, $Z = Z(\mathbb{C}G)$, $\mathbb{C}G$ nin bir alt cebiridir öyle ki

$$\underline{C} = \sum_{x \in C} x$$

sınıf toplamlarından oluşan bir baza sahiptir. Buradan

$$\underline{C_1} \ldots \underline{C_g} = \sum_{C} a_C \underline{C} \qquad (2.3.1)$$

çarpımını yazabiliriz. Burada a_C, her i için $x_i \in C_i$ ile $x_1 \ldots x_g$ olarak ortaya çıkan her bir $x \in C$ elemanının sayısıdır. Buna göre (2.3.1) denkleminde $\underline{C} = \underline{1}$ sınıf toplamının a_1 katsayısını hesaplamak zorundayız.

χ, derecesi $d = der(\rho) = \chi(1)$ olan G nin bir indirgenemez kompleks ρ gösteriminin karakteri olsun. Schur Lemması, $\mathbb{C}G$ de merkez olan her bir $\underline{C}$ nin, bir

$$\rho(\underline{C}) = \lambda_C I_d$$

skaler matrisi ile ifade edilebileceğini verir. Burada bu matrisin izini alırsak

$$|C|\chi(x) = iz(\rho(\underline{C})) = \lambda_C\,\chi(1) \qquad x \in C$$

elde edilir. Böylece

$$\lambda_C = \frac{|C|\chi(x)}{\chi(1)}$$

olur. (2.3.1) denklemine ρ yu uygularsak

$$\lambda_{C_1}\ldots\lambda_{C_g} = \sum_C a_C\,\lambda_C$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla bütün λ_j ler için yerine koyarsak

$$\frac{|C_1|\ldots|C_g|\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^g} = \sum_C a_c \frac{|C|\chi(x)}{\chi(1)}$$

denklemine ulaşırız. Burada bunu ($x \in C$ olmak üzere her bir $x_i \in C_i$ dir) $\chi(1)^2$ ile çarparsak,

$$\frac{|C_1|\ldots|C_g|\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}} = \sum_C a_c|C|\chi(x)\overline{\chi(1)}$$

elde edilir.

Bu, indirgenemez her χ karakteri için doğrudur, böylece bütün χ ler üzerinden topladığımızda

$$|C_1|\ldots|C_g|\sum_\chi \frac{\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}} = \sum_C \{a_c|C|\chi(x)\chi(1)\} \qquad (2.3.2)$$

elde edilir. G için sütun ortogonallik bağıntıları

$$\sum_{\chi} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \begin{cases} |G|/|C|, & x,y \in C \\ 0, & x,y \notin C \end{cases}$$

ifadesini içerir. Böylece $y = 1$ alırsak,

$$\sum_{\chi} \chi(x)\overline{\chi(1)} = \begin{cases} |G|/|C|, & x \in C = \{1\} \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$$

olur ve dolayısıyla denklemi sağ taraftan $a_1|G|$ ile sadeleştirebiliriz. Bu taktirde (2.3.2) denklemi

$$|C_1|\ldots|C_g| \sum_{\chi} \frac{\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}} = a_1|G|$$

şekline dönüşür. $|G|$ ile bölersek, a_1 için çözümlerin sayısı olan istenilen formül elde edilir [11].

Teorem 2.3.2 (Frobenius, Mednykh) : G sonlu bir grup olsun. G de

$$[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g] = 1 \qquad (2.3.3.)$$

denkleminin çözümlerinin sayısını $\sigma_g(G)$ ile gösterelim. Bu taktirde, χ , G nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinden olmak üzere ve χ (1) de χ nin derecesini göstermek üzere,

$$\sigma_g(G) = |G|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g}$$

dir.

İspat : (2.3.3) denklemindeki her bir $[a_i,b_i]$ komütatörünü $a_i^{-1}c_i$ olarak yazalım. Burada $c_i = b_i^{-1}a_ib_i$ nin a_i nin bir eşleniği olduğu açıktır. Böylece Teorem 2.3.1 ile, her i için $a_i, c_i \in K_i$ olmak üzere G de

$$\prod_{i=1}^{g} a_i^{-1} c_i = 1$$

denkleminin a_i, c_i çözümlerinin sayısını, K_i^{-1}, K_i nin elemanlarının terslerinden oluşan sınıf olmak üzere

$$\frac{|K_1^{-1}||K_1||K_2^{-1}||K_2|\ldots|K_g^{-1}||K_g|}{|G|}\sum_{\chi}\frac{\chi(a_1^{-1})\chi(c_1)\chi(a_2^{-1})\chi(c_2)\ldots\chi(a_g^{-1})\chi(c_g)}{\chi(1)^{2g-2}}$$

$$=\frac{|K_1|^2|K_2|^2\ldots|K_g|^2}{|G|}\sum_{\chi}\frac{\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\overline{\chi(a_2)}\chi(a_2)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)}{\chi(1)^{2g-2}} \qquad (2.3.4)$$

dir. Yukarıda $\chi(a_i^{-1})=\overline{\chi(a_i)}$ ve $\chi(c_i)=\chi(a_i)$ özellikleri kullanılmıştır. Verilen herhangi bir $a_i \in K_i$ için her bir $c_i \in K_i$, $|C_G(a_i)|=|G|/|K_i|$ tane $b_i \in G$ elemanı için $b_i^{-1} a_i b_i$ olarak ortaya çıkar. Böylece (2.3.4) denklemini $\prod_i |G|/|K_i|$ ile çarparak her $a_i \in K_i$ ve $b_i \in G$ için (2.3.3) denkleminin çözümlerinin sayısını,

$$\sigma_g(G) = |G|^{g-1}|K_1|\ldots|K_g|\sum_{\chi}\frac{\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)}{\chi(1)^{2g-2}}$$

$$=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g}\sum_{a_1\in K_1}\cdots\sum_{a_g\in K_g}\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)\right\}$$

ile verebiliriz. Şimdi $a_i, b_i \in G$ ile (2.3.3) denkleminin çözümlerinin sayısını bulmak için, yukarıdaki ifade G de $K_1, K_2, \ldots, K_g$ sınıflarının bütün seçimleri üzerinden toplanır ve aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sigma_g(G) = |G|^{g-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g}\sum_{a_1\in K_1}\cdots\sum_{a_g\in K_g}\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)\right\}$$

$$=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g}\left(\sum_{a\in G}\overline{\chi(a)}\chi(a)\right)^{g}\right\}$$

Şimdi G nin karakterleri için ortogonallik bağıntıları, bütün indirgenemezleri χ karakterleri için,

$$|G| = \sum_{a\in G} \overline{\chi(a)}\chi(a)$$

eşitliğini verir. Böylece,

$$\sigma_g(G) = |G|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g}$$

elde edilir [11].

Örnek 2.3.1 : $G = C_n$ mertebesi n olan bir devirli grup olsun. G de $[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1$ yani; $a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 \ldots a_g^{-1} b_g^{-1} a_g b_g = 1$ denkleminin çözümlerinin sayısını bulalım. Bunun için Teorem 2.3.2' yi uygulayalım. G değişmeli olduğundan G nin $|G|$ tane χ indirgenemez karakteri vardır. Bu karakterlerin hepsinin derecesi $\chi(1) = 1$ dir. Böylece Teorem 2.3.2 ile

$$\begin{aligned}
\sigma_g(G) &= |G|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g} \\
&= n^{2g-1} \{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ tane}}\} \\
&= n^{2g-1} n \\
&= n^{2g}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.3.2 : $G = D_n = \langle x, y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$ mertebesi $2n$ olan dihedral grup olsun. $G = D_n$ de, Örnek 2.3.1 de verilen denklemin çözümlerinin sayısını bulalım.

Teorem (2.3.2) ve Örnek (2.2.2) de verilen bilgiler kullanılarak, eğer n tek ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}\sigma_g(D_n) &= |G|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g}\\ &=(2n)^{2g-1}\left\{1+1+\frac{n-1}{2}\cdot 2^{2-2g}\right\}\\ &=2^{2g-1}n^{2g-1}\left\{2+(n-1)\,2^{1-2g}\right\}\\ &=n^{2g-1}\left(2^{2g}+n-1\right),\end{aligned}$$

eğer n çift ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}\sigma_g(D_n) &= |G|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g}\\ &=(2n)^{2g-1}\left\{1+1+1+1+\frac{n-2}{2}\cdot 2^{2-2g}\right\}\\ &=2^{2g-1}n^{2g-1}\left\{4+(n-2)2^{1-2g}\right\}\\ &= n^{2g-1}(2^{2g+1}+n-2)\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.3 : $G=\mathbb{Q}_8 = \langle x, y \mid x^4=1,\ x^2=y^2,\ yxy=x^3\rangle$ mertebesi 8 olan quaternion grubu olsun. $G=\mathbb{Q}_8$ de, Örnek 2.3.1 de verilen denklemin çözümlerinin sayısını bulalım.

Teorem 2.3.2 ve Örnek 2.2.4 de verilen bilgiler kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sigma_g(G) &= |G|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g}\\ &=8^{2g-1}\left\{1+1+1+1+2^{2-2g}\right\}\\ &=2^{6g-3}\left(2^2+2^{2-2g}\right)\\ &=2^{4g-1}\left\{2^{2g}+1\right\}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.3 (Frobenius - Schur) : G sonlu bir grup olsun. G de

$$r_1^2 \ldots r_g^2 = 1 \qquad (2.3.5)$$

denkleminin çözümlerinin sayısı $\sigma_g^-(G)$ olsun. Bu taktirde χ, G nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinden olmak üzere

$$\sigma_g^-(G) = |G|^{g-1} \sum_{\chi} c_\chi^g \chi(1)^{2-g}$$

dir.

Not : Frobenius ve Schur, teoremi genel olarak ifade ettiler fakat ispatını sadece $g = 1$ için verdiler.

İspat : $g=1$ ve $\sigma(y)$, G de $r_1^2 = y$ denkleminin çözümlerinin sayısı olsun. $r_1^2 = y$ için (2.2.1) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{y \in G} \sigma^-(y)\chi(y) = |G| c_\chi$$

elde ederiz. Her iki tarafı $\chi(1)$ ile çarparsak,

$$\sum_{y \in G} \sigma^-(y)\chi(y)\chi(1) = |G| c_\chi \chi(1)$$

olur. Bu eşitlik bütün χ indirgenemez karakterleri için doğrudur. Böylece bütün χ üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_{y \in G} \sigma^-(y) \sum_{\chi} \chi(y)\chi(1) = |G| \sum_{\chi} c_\chi \chi(1) \qquad (2.3.6)$$

elde edilir. Şimdi sütun ortogonallik bağıntılarını hatırlarsak,

$$\sum_{\chi} \chi(y)\overline{\chi(h)} = \begin{cases} \dfrac{|G|}{|K|}, & y,h \in K \\ 0, & y,h \notin K \end{cases}$$

dır. Burada K eşlenik sınıftır. $h = 1$ alırsak,

$$\sum_{\chi} \chi(y)\overline{\chi(1)} = \begin{cases} |G|, & y \in K = \{1\} \\ 0, & y \neq 1 \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. (2.3.6) denkleminin sol tarafı $\sigma^{-}(1)\left|G\right|$ ye eşittir. Böylece (2.3.6) denklemi

$$\sigma^{-}(1)|G| = |G|\sum_{\chi} c_{\chi}\chi(1)$$

şekline dönüşür. Son eşitliği $\left|G\right|$ ile bölersek G de $r_1^2 = 1$ nin çözümlerinin sayısını veren

$$\sigma^{-}(1) = \sum_{\chi} c_{\chi}\chi(1)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi,

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(x)\sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2)\rho(x) &= \sum_{r_1 \in G} \rho^{-1}(x)\rho(r_1^2)\rho(x) \\ &= \sum_{r_1 \in G} \left[\rho^{-1}(x)\rho(r_1)\rho(x)\right]\left[\rho^{-1}(x)\rho(r_1)\rho(x)\right] \\ &= \sum_{r_1 \in G} \rho(r_1)\rho(r_1) \\ &= \sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2) \end{aligned}$$

olduğundan $\sum\limits_{r_1 \in G} \rho(r_1^2)$ matrisi $\rho(x)$ $(x \in G)$ indirgenemez gösterimlerinin matrisleri ile yer değiştirir. Sonuç (2.1.1)'den, $\sum\limits_{r_1 \in G} \rho(r_1^2)$, birim matrisin bir katı olmalıdır, yani;

$$\sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2) = \lambda I_n \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \qquad (2.3.7)$$

dir. Teorem (2.1.2)'yi kullanarak ve matrisin izini alarak, $c_{\chi}\left|G\right| = \lambda\chi(1)$ elde ederiz. Buna göre (2.3.8) denklemi

$$\sum_{r_1 \in G} \rho\left(r_1^2\right) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} I_n \qquad (2.3.8)$$

olur. Buradan (2.3.8) denklemini $\rho\left(r_2^2\right)$ ile çarparsak:

$$\sum_{r_1 \in G} \rho\left(r_1^2 r_2^2\right) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \rho(r_2^2) \qquad (2.3.9)$$

elde ederiz ve izini alırsak

$$\sum_{r_1 \in G} \chi\left(r_1^2 r_2^2\right) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \chi\left(r_2^2\right) \qquad (2.3.10)$$

eşitliğini buluruz. Son ifadeyi r_2 üzerinden topladığımızda,

$$\begin{aligned}\sum_{r_1 \in G} \chi\left(r_1^2 r_2^2\right) &= \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \sum_{r_2 \in G} \chi\left(r_2^2\right)\\ &= \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} c_\chi |G|\\ &= \frac{\left(c_\chi |G|\right)^2}{\chi(1)}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eğer $\sigma^-(z)$, $r_1^2 r_2^2 = z$ denkleminin çözümünün sayısı ise bu taktirde

$$\sum_{z \in G} \sigma^-(z)\, \chi(z) = \frac{\left(c_\chi |G|\right)^2}{\chi(1)}$$

dir. Her iki tarafı $\chi(1)$ ile çarparsak bu taktirde

$$\sum_{z \in G} \sigma^-(z)\, \chi(z) \chi(1) = \left(c_\chi |G|\right)^2$$

dir. Bu bütün indirgenemez χ için doğrudur, böylece bütün χ üzerinden toplarsak

$$\sum_{z\in G} \sigma^{-}(z) \sum_{\chi} \chi(z)\chi(1) = (|G|)^2 \sum_{\chi} (c_\chi)^2 \qquad (2.3.11)$$

denklemini elde ederiz. Sütun ortogonallik bağıntılarına göre (2.3.11) denkleminin sol tarafı $\sigma^{-}(1)\,|G|$ ye eşittir. Dolayısıyla

$$\sigma^{-}(1)|G| = (|G|^2) \sum_{\chi} (c_\chi)^2$$

dir. Bu son ifadeyi $|G|$ ile bölersek G de $r_1^2 r_2^2 = 1$ çözümlerinin sayısını veren aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\sigma^{-}(1) = |G| \sum_{\chi} (c_\chi)^2$$

Bu işlemi tekrarlarsak, yani g tane $r_1, \ldots, r_g$ elemanlarını (2.3.7) denklemi ile çarparsak

$$\sum_{r_1,\ldots,r_g \in G} \rho(r_1^2 \ldots r_g^2) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \rho(r_2^2 \ldots r_g^2) = \left(\frac{c_\chi |G|}{\chi(1)}\right)^g I_n$$

bulunur. Şimdi iz alınırsa,

$$\sum_{r_1,\ldots,r_g \in G} \chi(r_1^2 \ldots r_g^2) = \chi(1) \left(\frac{c_\chi |G|}{\chi(1)}\right)^g$$

denklemini buluruz. Daha önceki gibi aynı yöntem ile G de

$$r_1^2 \ldots r_g^2 = 1$$

denkleminin çözümlerinin sayısının

$$\sigma_g^-(G)=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\frac{(c_\chi)^g}{\chi(1)^{g-2}}$$

olduğunu elde ederiz [13].

Not : Hiçbir topolojik yöntem (2.3.5) denkleminin G de çözümlerinin sayısını vermez.

Örnek 2.3.4 : G değişmeli bir grup olsun. Bu taktirde G nin $|G|$ tane indirgenemez karakteri vardır ve hepsinin derecesi 1 dir. Eğer G nin Sylow 2-alt grubunun rankı r ise bu taktirde bunların 2^r tanesi birinci çeşit $(\pm 1$ değerlerini alır) ve geriye kalanlar üçüncü çeşittir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sigma_g^-(G)&=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\frac{(c_\chi)^g}{\chi(1)^{g-2}}\\&=|G|^{g-1}\{\underbrace{\frac{1^g}{1^{g-2}}+\ldots+\frac{1^g}{1^{g-2}}}_{2^r\text{ tane}}\}=|G|^{g-1}2^r\end{aligned}$$

dir.

Örnek 2.3.5 : $G=D_n=<a,b\mid a^n=b^2=1\ ,\ b^{-1}ab=a^{-1}>$ mertebesi $2n$ olan dihedral grup olsun. Örnek (2.2.2) de verilen bilgiler göz önüne alınarak G de $r_1\ldots r_g=1$ denkleminin çözümlerinin sayısını bulalım. Eğer n tek ise

$$\begin{aligned}\sigma_g^-(D_n)&=|D_n|^{g-1}\sum_{\chi}\frac{(c_\chi)^g}{\chi(1)^{g-2}}\\&=(2n)^{g-1}\left(1+1+\underbrace{\frac{1}{2^{g-2}}+\ldots\frac{1}{2^{g-2}}}_{\frac{n-1}{2}\text{ tane}}\right)=(2n)^{g-1}\left(2+\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{2-g}\right)\end{aligned}$$

n çift ise,

$$\sigma_g^-\left(D_n\right)=\left|D_n\right|^{g-1}\sum_\chi \frac{\left(c_\chi\right)^g}{\chi(1)^{g-2}}$$

$$=\left(2n\right)^{g-1}\left(1+1+1+1+\underbrace{\frac{1}{2^{g-2}}+\ldots\frac{1}{2^{g-2}}}_{\frac{n-2}{2}\text{ tane}}\right)=\left(2n\right)^{g-1}\left(4+\left(\frac{n-2}{2}\right)2^{2-g}\right)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.6 : $G=\mathbb{Q}_8=<x,y \mid x^4=1,\, x^2=y^2, yxy^{-1}=x^{-1}>$ mertebesi 8 olan quaternion grubu olsun. Örnek 2.3.4 de verilen bilgiler göz önüne alınarak, G de $r_1\ldots r_g=1$ denkleminin çözümlerinin sayısını bulalım. Örnek 2.3.4 ile,

$$\sigma_g^-\left(\mathbb{Q}_8\right)=\left|\mathbb{Q}_8\right|^{g-1}\sum_\chi \frac{\left(c_\chi\right)^g}{\chi(1)^{g-2}}$$

$$=8^{g-1}\left(1+1+1+1+(-1)^g\frac{1}{2^{g-2}}\right)$$

$$=2^{3g-1}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^g\right)=2^{3g-1}+(-1)^g\,2^{2g-1}$$

olur.

Teorem 2.3.4 : G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde G de

$$[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]\,x_1\ldots x_r=1 \qquad (2.3.12)$$

denkleminin çözümlerinin $\sigma_g\left(G\right)$ sayısı

$$\left|G\right|^{2g-1}\sum_\chi\left\{\chi(1)^{2-2g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\cdots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\right\}$$

ile verilir. Burada her bir x_j, G nin eşlenik sınıflarının bir L_j birleşiminde bulunur ve χ, G nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerindendir.

İspat : İlk olarak, ayrık birleşimleri alarak, her bir L_j nin bir tek eşlenik sınıf olduğu durumda bu sonucu ispatlamanın yeterli olacağını not edelim. (2.3.4) denkleminin her iki tarafını sağdan

$$\frac{|L_1|\ldots|L_r|\chi(x_1)\ldots\chi(x_r)}{\chi(1)^r}=\chi(1)^{-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)$$

ile çarparsak

$$\frac{|C_1|^2\ldots|C_g|^2}{|G|}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\frac{\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)}{\chi(1)^{2g-2}}\right\}$$

$$=|G|^{-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\left(\sum_{a_1\in C_1}\ldots\sum_{a_g\in C_g}\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)\right)\right.$$

$$=|G|^{-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\left(\sum_{a_1\in G}\ldots\sum_{a_g\in G}\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)\right)\right.$$

$$=|G|^{-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\left(\sum_{a\in G}\overline{\chi(a)}\chi(a)\right)^{2g}\right\} \qquad (2.3.13)$$

denklemlerini elde ederiz. Şimdi G nin karakterleri için ortogonallik bağıntıları bütün χ indirgenemez karakterleri için

$$\sum_{a\in G}\overline{\chi(a)}\chi(a)=|G|$$

eşitliğini verir. Böylece (2.3.12) denklemi

$$|G|^{-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)(|G|)^{2g}\right\}$$

$$=|G|^{2g-1}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{2-2g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\right\}$$

eşitliğine eşit olur [11].

Örnek 2.3.7 : $G = C_p$ (p asal) mertebesi p olan bir devirli grup olsun.

$$[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g]\, x_1 \ldots x_r = 1 \qquad (r \geq 1)$$

denkleminin $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x_1, \ldots, x_r$ çözümlerinin sayısını bulmak için Teorem (2.3.4)'ü uygulayalım.

Her bir L_j yi $G - \{1\}$ olarak alalım. C_p nin p tane indirgenemez χ karakteri vardır ve bunların hepsinin derecesi 1 dir. Buradan

$$\sum_{x \in L_j} \chi(x) = \begin{cases} p-1 & , \ \chi = \chi_1 \ ise \\ -1 & , \ \chi \neq \chi_1 \ ise \end{cases}$$

dır (buradan χ_1 trivial karakterdir, yani her $g \in G$ için $\chi_1(g) = 1$ dir). Böylece Teorem (2.3.4)'e göre verilen denklemin G de çözümlerinin sayısı

$$p^{2g-1}\left\{ \chi_1(1)^{2-2g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi_1(x_1) \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi_1(x_r) + \sum_{\chi \neq \chi_1} \chi(1)^{2-2g-r} \left\{ \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \right\} \right\}$$

$$= p^{2g-1}\left\{ \underbrace{(p-1)\ldots(p-1)}_{r \text{ tane}} + \underbrace{\underbrace{(-1)\ldots(-1)}_{r \text{ tane}} + \ldots + \underbrace{(-1)\ldots(-1)}_{r \text{ tane}}}_{p-1 \text{ tane}} \right\}$$

$$= p^{2g-1}\left((p-1)^r + (-1)^r (p-1) \right)$$

dir.

Teorem 2.3.5 : G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde G de

$$r_1^2 \ldots r_g^2\, x_1 \ldots x_r = 1 \qquad (2.3.14)$$

denkleminin çözümlerinin $\sigma_g(G)$ sayısı

$$|G|^{g-1}\sum_{\chi}\left\{c_\chi^g\,\chi(1)^{2-g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\cdots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\right\}$$

ile verilir. Burada her bir x_j, G nin eşlenik sınıflarının bir birleşimindedir ve χ, G nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerindedir.

İspat : Her bir L_j nin bir eşlenik sınıf olduğunu kabul edelim. (2.3.14) denklemini, x, G nin keyfi bir elemanı olmak üzere

$$r_1^2\ldots r_g^2=x \qquad (2.3.15)$$

$$x\,x_1\ldots x_r=1 \qquad (2.3.16)$$

denklem çifti olarak yazabiliriz. (2.3.15) ve (2.3.16) denklemlerinin çözümlerinin sayısını bulacağız ve her $x\in G$ üzerinden toplayacağız.

G nin her bir indirgenemez χ karakteri için, Teorem (2.3.3)'e göre

$$\sum_{r_1,\ldots,r_g}\chi\left(r_1^2\ldots r_g^2\right)=\chi(1)\left(\frac{c_\chi|G|}{\chi(1)}\right)^g$$

olur. Eğer $n_g(x)$, G de (2.3.15) denkleminin çözümlerinin sayısını gösterirse bu taktirde

$$\sum_{x\in G}n_g(x)\chi(x)=|G|^g c_\chi^g\,\chi(1)^{1-g}$$

olur, yani;

$$<n_g,\chi>=|G|^{g-1}c_\chi^g\,\chi(1)^{1-g}$$

dir. Burada $<\phi,\psi>$, ϕ ve ψ iki sınıf fonksiyonunun

$$|G|^{-1}\sum_{x\in G}\overline{\phi(x)}\psi(x))$$

şeklindeki iç çarpımını gösterir. İndirgenemez χ karakteri sınıf fonksiyonları için bir ortonormal baz oluşturduğundan

$$n_g = \sum_{\chi} |G|^{g-1} c_\chi^g \chi(1)^{1-g} \chi$$

olduğu görülür. Böylece (2.3.15) denkleminin çözümlerinin sayısı

$$n_g = |G|^{g-1} \sum_{\chi} \frac{c_\chi^g \chi(x)}{\chi(1)^{g-1}} \tag{2.3.17}$$

olarak elde edilir. Teorem (2.3.1)'e göre $x_j \in L_j$ olmak üzere (2.3.16) denkleminin çözümlerinin sayısı

$$\frac{|L_1|\ldots|L_r|}{|G|} \sum_{\xi} \frac{\xi(x)\xi(x_1)\ldots\xi(x_r)}{\xi(1)^{r-1}}$$

eşittir. Burada ξ, G nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinde dolaşır. Bunu (2.3.17) denklemi ile çarparsak (2.3.15) ve (2.3.16) denklemlerinin çözümlerinin sayısını

$$|L_1|\ldots|L_r||G|^{g-2} \sum_{\chi} \frac{c_\chi^g \chi(x)}{\chi(1)^{g-1}} \sum_{\xi} \frac{\xi(x)\xi(x_1)\ldots\xi(x_r)}{\xi(1)^{r-1}}$$

şeklinde elde ederiz. Bunu her $x \in G$ üzerinden toplar ve

$$\sum_{x\in G} \chi(x)\xi(x) = |G| < \overline{\chi}, \xi > = |G| \delta_{\overline{\chi},\xi}$$

eşitliğini kullanırsak, G de (2.3.15) denkleminin çözümlerinin toplam sayısı

$$|L_1| \ . \ . \ . |L_r||G|^{g-1} \sum_{\chi} \frac{c_\chi^g \overline{\chi(x_1)}\ldots\overline{\chi(x_r)}}{\chi(1)^{g-1}\overline{\chi}(1)^{r-1}}$$

dir. χ değişkenini $\overline{\chi}$ ile değiştirirsek ve $c_{\overline{\chi}} = c_\chi$ ve $\overline{\chi}(1) = \chi(1)$ eşitliklerini kullanırsak en son ifade

$$|G|^{g-1}\sum_{\chi}\left\{c_{\chi}^{g}\,\chi(1)^{2-g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\dots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\right\}$$

şekline dönüşür. Buda istenilendir.

Örnek 2.3.8 : i) C_p ($p > 2$ asal) mertebesi p olan bir devirli grup olsun. C_p nin trivial olmayan bütün indirgenemez karakterleri üçüncü çeşit olduğundan

$$c_\chi = \begin{cases} 1 \ , & \chi = \chi_1 \\ 0 \ , & \chi \neq \chi_1 \end{cases}$$

dir. Böylece C_p de

$$r_1^2\dots r_g^2\, x_1\,\dots\, x_r = 1$$

denkleminin çözümlerinin sayısı Teorem (2.3.5) ile

$$p^{g-1}\,(p-1)^r$$

olarak elde edilir.

ii) Şimdi $G = C_2$ olsun. G nin indirgenemez gösterimlerinin ikisi de reel olduğundan

$$c_{\chi_1} = c_{\chi_2} = 1$$

dir. Böylece

$$r_1^2\dots r_g^2\, x_1\,\dots x_r = 1$$

denkleminin C_2 deki çözümlerinin sayısı

$$2^{g-1}\left\{\,1+(-1)^r\,\right\} = \begin{cases} 2^g, & r \text{ çift} \\ 0\ , & r \text{ tek} \end{cases}$$

elde edilir.

III. BÖLÜM

ÖKLİDYEN OLMAYAN KRİSTALLOGRAFİK GRUPLARIN NORMAL ALT GRUPLARININ SAYILMASI

Bu bölümde Öklidyen Olmayan Kristallografik (NEC) Grupların normal alt gruplarının sayısı incelenmiştir. Birinci kısımda normal alt grupların sayılması için genel bir metot verilmiştir. İkinci ve üçüncü kısımlarda yansımasız yönlendirilebilir ve yönlendirilemeyen NEC grupların normal alt gruplarının sayısını veren formüller verilerek bu formüller bir çok sonlu gruba uygulanmıştır. Son kısımda ise metot torsion-free normal alt grupların sayısının bulunmasına uygulanmıştır [10,11].

3.1 NORMAL ALT GRUPLARIN SAYILMASI İÇİN GENEL METOT

Γ sonlu üretilenli bir grup ve G de verilen sonlu bir grup olsun. [5] de P. Hall, $\Gamma/N \cong G$ olacak şekilde Γ nın N normal alt gruplarının $n_\Gamma(G)$ sayısını yani $n_\Gamma(G) = \left|\left\{ N \lhd \Gamma \;\middle|\; \Gamma/N \cong G \right\}\right|$ kardinalitisini hesaplamak için bir genel teknik geliştirmiştir. Bu N alt grupları Γ dan G ye $\theta : \Gamma \to G$ epimorfizmlerinin çekirdekleridirler (Teorem 1.1.6). Bu şekildeki epimorfilerin $Epi(\Gamma, G)$ kümesi sonludur. Çünkü, Γ nın üreteçlerini, G nin içine resmetmenin sadece sonlu sayıda yolu vardır. Böylece $n_\Gamma(G)$ sonludur.

Eğer $\theta_1, \theta_2 \in Epi(\Gamma, G)$ ise $Çek\,\theta_1 = Çek\,\theta_2$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\theta_2 = \theta_1 \circ \alpha$ olacak şekilde G nin bir α otomorfisinin mevcut olmasıdır. Böylece $n_\Gamma(G)$ sayısı

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[dr, "\theta_1"'] & G \\ & G \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

$Epi(\Gamma,G)$ üzerine bileşke ile etki eden $Aut(G)$ nin yörüngelerinin $\left| Epi(\Gamma,G) \middle/ Aut(G) \right|$ sayısına eşittir. $Aut(G)$ üretici kümeleri ve dolayısıyla epimorfizmleri sabit-nokta-serbest değiştireceğinden, bütün yörüngelerin uzunlukları $|Aut(G)|$ dır. Dolayısıyla,

$$n_\Gamma(G)=\frac{|Epi(\Gamma,G)|}{|Aut(G)|}$$

dır.

Γ dan G ye epimorfizmleri saymak için önce Γ dan G ye homomorfizmler sayılır ve sonrada Γ dan $K < G$ öz alt gruplara olanlar çıkartılır. Γ dan G ye homomorfizmler, $K \leq G$ olmak üzere Γ dan K ya epimorfizmlerdir. Böylece

$$Hom(\Gamma,G) = \dot{\bigcup_{K\leq G}} Epi(\Gamma,K)$$

ayrık birleşimindeki elemanları saymakla

$$|Hom(\Gamma,G)| = \sum_{K\leq G} |Epi(\Gamma,K)|$$

olur. Buradan G nin alt grup latisi üzerinde Möbius Ters Çevirme Formülü kullanılarak

$$|Epi(\Gamma,G)| = \sum_{H\leq G} \mu(H)|Hom(\Gamma,H)|$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$n_\Gamma(G)=\frac{|Epi(\Gamma,G)|}{|Aut(G)|}=\frac{1}{|Aut(G)|}\sum_{H\leq G}\mu(H)\,|Hom(\Gamma,H)| \qquad (3.1.1)$$

olduğu bulunur.

Bir çok G grubu için, $|Aut(G)|$ ve $H \leq G$ ler için $\mu(H)$ ı bulmak rutin bir iştir. Böylece geriye her $H \leq G$ alt grubu için (veya en azından $\mu(H) \neq 0$ olmak üzere bütün $H \leq G$ ler için) $|Hom(\Gamma,H)|$ ı hesaplama problemi kalır. Çeşitli Γ NEC grupları için bunu yapabilmek amacıyla grup gösterimlerini kullanacağız.

3.2 YANSIMASIZ YÖNLENDİRİLEBİLİR NEC GRUPLARI

Bir Γ NEC grubu, $\mathcal{H}/\Gamma$ kompak bölüm uzayı ile $\mathcal{H}$ hiperbolik düzleminin izometrilerinin bir ayrık grubu olarak da tanımlanır. İlk olarak, Γ yı yansımasız yönlendirilebilir bir NEC grup olarak alalım, böylece $g, r, m_1, \ldots, m_r$ $(g, r \geq 0$ ve $m_i > 1$ (her i için)) tamsayılar olmak üzere, Γ

$$\left(g;+;[m_1,\ldots,m_r];\{-\}\right) \qquad \text{(S+)}$$

simgesine sahiptir. Bunun anlamı, Γ nın

$$X_i \ (i=1,\ldots,r),\ A_j, B_j \, (j=1,\ldots,g)$$

üreteçlerine sahip ve belirleyici bağıntılarının

$$X_i^{m_i}=1 \ (i=1,\ldots,r),\ \prod_{i=1}^{r} X_i \prod_{j=1}^{g}\left[A_j,B_j\right]=1$$

olduğunu ifade eder.

Buradan $\Gamma \to H$ homomorfizmlerinin

$$\sigma_{\Gamma}(H)=\left|Hom(\Gamma,H)\right|$$

sayısı

$$x_i^{m_i}=1 \ (i=1,\ldots,r), \qquad (3.2.1)$$

$$\prod_{i=1}^{r} x_i \prod_{j=1}^{g}\left[a_j,b_j\right]=1, \qquad (3.2.2)$$

denklemlerinin H da x_i, a_j, b_j ortak çözümlerinin sayısına karşılık gelir.

Bir H sonlu grubunda (3.2.2) denkleminin çözümlerinin sayısı, Teorem (2.3.4) ile verilir.

$\sigma_\Gamma(H)$ için bir formül elde etmek amacıyla, L_i kümelerini, (3.2.1) denkleminin $x_i \in H$ çözümlerinin kümeleri olarak seçeceğiz. İlk olarak, bir notasyona ihtiyacımız vardır. Eğer m pozitif bir tamsayı, H sonlu bir grup ve χ, H ın bir kompleks karakteri ise, bu takdirde

$$H[m]=\{\, h\in H \mid h^m=1 \}$$

(H ın eşlenik sınıflarının bir birleşimi), ve

$$\chi[m]=\sum_{h\in H[m]}\chi(h)$$

olsun. Bu takdirde Teorem (2.3.4) doğrudan aşağıdaki sonucu ifade eder.

Sonuç 3.2.1 : Eğer Γ, (S+) simgesine sahip ve H herhangi bir sonlu grup ise, bu takdirde

$$\sigma_\Gamma(H)=|H|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g-r}\,\chi[m_1]\ldots\chi[m_r]$$

dır. Burada χ, H ın indirgenemez kompleks karakterleri üzerinde dolaşır.

H ın karakter tablosu verilirse, bu sonuç $\sigma_\Gamma(H)$ değerini tam olarak verir.

Örnek 3.2.1 : $H=C_d$, mertebesi d olan bir devirli grup olsun. Bu durumda, karakter teori kullanmadan $\sigma_\Gamma(H)$ direkt olarak hesaplanabilir, örneğin Γ abelyenleştirilir ve sonlu üretilenli abelyen grupların yapısal teorisi kullanılır. Fakat, metodun basit bir uygulaması olarak Sonuç (3.2.1)'i uygulayalım.

H ın tümü 1 inci dereceden olan d tane indirgenemez χ karakteri vardır, bunlar H ın bir üretecini $\mathbb{C}$ de 1 in bir d inci köküne götürülmesiyle elde edilen $H\to\mathbb{C}^*$ homomorfizmlerdir. Eğer m herhangi bir pozitif tamsayı ise, bu takdirde $H[m]$, H da (m,d) inci mertebeden yegane alt gruptur. Gerçekten, $H^m=\{\, h^m \mid h\in H \}$ kümesini tanımlayalım. Buradan $H[m],\, H^m \trianglelefteq H$ ve $H/H[m]\cong H^m$ dır.

$$H=<x>=\{1,x,\ldots,x^{d-1}\},$$
$$H^m=\{1,x^m,\ldots,(x^{d-1})^m\}=\{1,x^m,\ldots,(x^m)^{d-1}\}=<x^m>$$

olur. Diğer taraftan Teorem (1.1.1) (ii)'den $|x^m|=\dfrac{d}{(m,d)}$ dir. Şimdi $\varphi:H\to H^m$, $h\mapsto h^m$ ile tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir. Bu epimorfizmin çekirdeği

$$Çek\varphi=\{h\in H \mid \varphi(h)=h^m=1\}=H[m]$$

dir. Buradan, Teorem (1.1.2)'den

$$H/H[m]\cong H^m$$

dır. Dolayısıyla $|H/H[m]|=|H^m|$ olup, buradan,

$$|H[m]|=|H/H^m|=\frac{d}{\frac{d}{(m,d)}}=(m,d)$$

bulunur. Böylece

$$\chi[m]=\begin{cases}(m,d), & H[m]\le Çek\chi\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dır. Böylece bir χ karakteri, $\sigma_\Gamma(H)$ için formüle sıfırdan farklı bir katkıda bulunur ancak ve ancak $Çek\,\chi$ tüm $i=1,\ldots,r$ için $H[m_i]$ alt gruplarını içerir; veya denk olarak, $Çek\,\chi$, onlarla üretilen (l,d) inci mertebeden $H[l]$ alt gruplarını içerir, burada l sayısı $m_1,\ldots,m_r$

sayılarının en küçük ortak katı olarak tanımlanır. Her biri $\chi[m_i]=(m_i,d)$ olmak üzere, $\frac{d}{(l,d)}$ tane böyle karakter vardır. Böylece

$$
\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(C_d) &= |C_d|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g-r}\,\chi[m_1]\ldots\chi[m_r] \\
&= d^{2g-1}\left\{\chi_1[m_1]\ldots\chi_1[m_r]+\ldots+\chi_{\frac{d}{(l,d)}}[m_1]\ldots\chi_{\frac{d}{(l,d)}}[m_r]\right\} \\
&= d^{2g-1}\frac{d}{(l,d)}\left[(m_1,d)\ldots(m_r,d)\right] \\
&= \frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d)
\end{aligned}
$$

dır. Örneğin d bir p asalı ve v_p de $p|m_i$ olan i lerin sayısı ise, bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(C_p) &= \frac{p^{2g}}{(l,p)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,p) \\
&= \begin{cases} \dfrac{p^{2g}}{p}\displaystyle\prod_{i=1}^{v_p} p, & v_p>0 \text{ için} \\[2ex] \dfrac{p^{2g}}{\underbrace{(l,p)}_{1}}\left[\underbrace{(m_1,p)}_{1}\cdots\underbrace{(m_r,p)}_{1}\right], & v_p=0 \text{ için} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p^{2g-1}\,p^{v_p}, & v_p>0 \text{ için} \\ p^{2g}, & v_p=0 \text{ için} \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir, dolayısıyla

$$
\sigma_\Gamma(C_p)=\begin{cases} p^{2g-1+v_p}, & v_p>0 \\ p^{2g}, & v_p=0 \end{cases}
$$

dır.

Şimdi, $G=C_n$, mertebesi n olan bir devirli grup olmak üzere $n_\Gamma(G)$ yi hesaplayabiliriz. İlk olarak ϕ, $\mathbb{N}$ üzerinde Euler fonksiyonu olmak üzere $|Aut(G)|=\phi(n)$ dir. Şimdi G, n nin her bir d böleni için bir tek $H\cong C_d$ alt grubuna sahiptir ve başka bir alt gruba sahip değildir. Bu şekildeki her bir H için $\mu(H)=\mu(n/d)$ dir. Burada sağ taraftaki μ, $\mathbb{N}$ üzerindeki Möbius fonksiyonunu gösterir. Bundan dolayı (3.1.1) denklemi,

$$\begin{aligned} n_\Gamma(G) &= \frac{1}{\phi(n)}\sum_{d|n}\mu(n/d)\sigma_\Gamma(C_d) \\ &= \frac{1}{\phi(n)}\sum_{d|n}\left\{\mu(n/d)\frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d)\right\} \end{aligned}$$

ifadesini verir. Örneğin eğer n bir p asalı ise, bu takdirde $d|p$ dir ancak ve ancak $d=1$ veya $d=p$ dir.

$v_p>0$ için

$$\begin{aligned} n_\Gamma(C_p) &= \frac{1}{\phi(p)}\sum_{d|p}\left\{\mu\left(\frac{p}{d}\right)\frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d)\right\} \\ &= \frac{1}{(p-1)}\left\{\mu(p)\frac{1^{2g}}{(l,1)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,1)+\mu(1)\frac{p^{2g}}{(l,p)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,p)\right\} \\ &= \frac{1}{(p-1)}\left\{-1+p^{2g-1+v_p}\right\}, \end{aligned}$$

$v_p=0$ için

$$\begin{aligned} n_\Gamma(C_p) &= \frac{1}{\phi(p)}\sum_{d|p}\left\{\mu\left(\frac{p}{d}\right)\frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d)\right\} \\ &= \frac{1}{(p-1)}\left\{\mu(p)\frac{1^{2g}}{(l,1)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,1)+\mu(1)\frac{p^{2g}}{\underbrace{(l,p)}_{1}}\prod_{i=1}^{r}\underbrace{(m_i,p)}_{1}\right\} \\ &= \frac{1}{(p-1)}\left\{-1+p^{2g}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$n_\Gamma(C_p)=\begin{cases}\left(p^{2g-1+v_p}-1\right)/(p-1) & , \quad v_p>0\\ \left(p^{2g}-1\right)/(p-1) & , \quad v_p=0.\end{cases}$$

Örnek 3.2.2 : Eğer H asal p eksponentine sahip ise, bu takdirde p, m i bölerse $H[m]=H$ dır. Çünkü, $p|m$ ise $m=pk$ olacak şekilde $k\in\mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla her $h\in H[m]$ için

$$h^m=h^{pk}=\left(h^p\right)^k=1$$

dır. H ın elemanları p eksponentine sahip olduğundan her $h\in H$ için $h^p=1$ dir. Bu ise $H[m]=H$ olduğunu gösterir. p, m i bölmezse $H[m]=1$ dır. Çünkü, $(m,p)=1$ olduğundan $h^m=1$ koşulunu sağlayan tek $h\in H$ elemanı 1 (birim) elemanıdır. Dolayısıyla $H[m]=1$ dır.

İlk durumda H ın karakterleri için, $\chi=\chi_1$ (esas karakter) ise

$$\chi_1[m]=\sum_{h\in H[m]=H}\chi_1(h)=\sum_{h\in H}1=|H|,$$

$\chi\neq\chi_1$ ise ortogonallik bağıntıları ile

$$<\chi_i,1>=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi_i(h)\underbrace{\overline{1(h)}}_{1}=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi_i(h)=0$$

dır. Buradan

$$\chi_i[m]=\sum_{h\in H[m]=H}\chi_i(h)=0$$

elde edilir. İkinci durumda

$$\chi[m] = \sum_{h \in H[m]=1} \chi(h) = \chi(1)$$

elde edilir (burada $\chi(1)$, χ nin derecesidir). Eğer $v_p > 0$ (dolayısıyla bazı i ler için $p|m_i$ dir) ise, bu takdirde sadece χ_1, $\sigma_\Gamma(H)$ a katkıda bulunur ve

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(H) &= |H|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g-r} \chi[m_1] \ldots \chi[m_r] \\
&= |H|^{2g-1} \chi_1(1)^{2-2g-r} \chi_1[m_1] \ldots \chi_1[m_{v_p}] \\
&= |H|^{2g-1} |H|^{v_p} \\
&= |H|^{2g-1+v_p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer durumda, eğer $v_p = 0$ ise, bu takdirde tüm χ ve tüm i ler için $\chi[m_i] = \chi(1)$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(H) &= |H|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g-r} \chi[m_1] \ldots \chi[m_r] \\
&= |H|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g-r} \chi(1)^r \\
&= |H|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g}
\end{aligned}$$

dır. Özellikle, $H = C_p \times \ldots \times C_p$ bir elemanter abelyen p grup olsun. Burada H değişmeli grup olduğundan $|H|$ tane ayrık eşlenik sınıfı vardır. Dolayısıyla derecesi 1 olan $|H|$ tane indirgenemez karaktere sahiptir. Buna göre $v_p = 0$ durumunda,

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(H) &= |H|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g} \\
&= |H|^{2g-1} \left\{ \chi_1(1)^{2-2g} + \ldots + \chi_{|H|}(1)^{2-2g} \right\} \\
&= |H|^{2g-1} \{ \underbrace{1 + \ldots + 1}_{|H| \text{ tane}} \} \\
&= |H|^{2g-1} |H| = |H|^{2g}
\end{aligned}$$

dır. $v_p > 0$ durumunda yukarıda bulduğumuz değerle aynı olur. Bu takdirde

$$\sigma_\Gamma(H) = \begin{cases} |H|^{2g-1+v_p}, & v_p > 0 \\ |H|^{2g}, & v_p = 0 \end{cases}$$

dır. Bu $H = C_p$ için Örnek (3.2.1) deki sonucu genelleştirir.

Eğer G, p eksponentine sahip ise bu takdirde trivial olmayan her $H \leq G$ alt grubu da böyledir ve $n_\Gamma(G)$ yi belirlemek için $|Aut(G)|$ ve $\mu(H)$ ın değerleri ile birlikte bu formüller uygulanır. Örneğin, G, p eksponentli ve mertebesi p^3 $(p > 2)$ olan değişmeli olmayan grup olsun (Bu şekilde bir tek grup vardır, Tanım (1.1.21)). G nin kendisinden başka $\mu(H) \neq 0$ olan $H \leq G$ alt grupları $p+1$ tane maksimal alt gruptur ki, bunların hepsi $C_p \times C_p$ ye izomorfiktir ve bu H lar için $\mu(H) = -1$ dir, bu maksimallerin arakesiti olan alt grup ki bunun için $\mu(H) = p$ dır (bunların arakesiti olan alt grup Frattini alt grubu (Tanım 1.1.17) $\phi(G) \cong C_p$, aynı zamanda $Z(G)$ merkezine sahiptir). ([7] III. 3.15) de Burnside Basis Teoreminden (Teorem 1.1.8) elemanların bir çifti G yi üretir ancak ve ancak onların görüntüleri $G/\phi(G) \cong C_p \times C_p$ bölüm grubunu üretir (Teorem 1.1.13); böylece her hangi iki çift, G nin bir tek otomorfizmi altında denktir, böylece böyle çiftleri saymakla $Aut(G)$ nin mertebesinin $(p^3 - p)(p^3 - p^2) = p^3(p^2 - 1)(p - 1)$ olduğunu görürüz. Denklem (3.1.1) den

$$\begin{aligned} n_\Gamma(G) &= \frac{1}{|Aut(G)|} \sum_{H \leq G} \mu(H) |Hom(\Gamma, H)| \\ &= \frac{1}{p^3(p^2-1)(p-1)} \{ \mu(G)\sigma_\Gamma(G) \\ &\quad + \underbrace{\mu(C_p \times C_p)\sigma_\Gamma(C_p \times C_p) + \ldots + \mu(C_p \times C_p)\sigma_\Gamma(C_p \times C_p)}_{(p+1) \text{ tane}} + \mu(C_p)\sigma_\Gamma(C_p) \} \\ &= \frac{1}{p^3(p^2-1)(p-1)} \{ \sigma_\Gamma(G) - (p+1)\sigma_\Gamma(C_p \times C_p) + p\sigma_\Gamma(C_p) \} \end{aligned}$$

elde edilir. G, derecesi 1 olan p^2 tane $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{p^2}$ ve derecesi p olan $p-1$ tane $\chi'_1, \chi'_2, \ldots, \chi'_{p-1}$ indirgenemez karaktere sahip olduğundan Sonuç (3.2.1) den

$\nu_p > 0$ için

$$\begin{aligned}\sigma_\Gamma(G) &= |G|^{2g-1} \sum_\chi \chi(1)^{2-2g-r} \chi[m_1] \ldots \chi[m_r] \\ &= p^{3(2g-1)} |G|^{\nu_p} \\ &= p^{3(2g-1)} p^{3\nu_p} = p^{3(2g-1+\nu_p)},\end{aligned}$$

$\nu_p = 0$ için

$$\begin{aligned}\sigma_\Gamma(G) &= |G|^{2g-1} \sum_\chi \chi(1)^{2-2g-r} \chi[m_1] \ldots \chi[m_r] \\ &= p^{3(2g-1)} \Big[\chi_1(1)^{2-2g-r} \chi_1[m_1] \ldots \chi_1[m_r] + \ldots + \chi_{p^2}(1)^{2-2g-r} \chi_{p^2}[m_1] \ldots \chi_{p^2}[m_r] \\ &\qquad + \chi'_1(1)^{2-2g-r} \chi'_1[m_1] \ldots \chi'_1[m_r] + \ldots + \chi'_{p-1}(1)^{2-2g-r} \chi'_{p-1}[m_1] \ldots \chi'_{p-1}[m_r] \Big] \\ &= p^{3(2g-1)} \left(1^{2-2g-r} p^2 1^r + p^{2-2g-r} (p-1) p^r \right) \\ &= p^{3(2g-1)} \left(p^2 + (p-1) p^{2-2g} \right)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$\sigma_\Gamma(G) = \begin{cases} p^{3(2g-1+\nu_p)}, & \nu_p > 0 \\ p^{3(2g-1)} \left(p^2 + (p-1) p^{2-2g}\right), & \nu_p = 0 \end{cases}$$

dır.

Elementer abelyen $H = C_p \times C_p$ ve C_p grupları için $\sigma_\Gamma(H)$ hesaplamıştık, böylece,

$\nu_p > 0$ için

$$\begin{aligned}n_\Gamma(G) &= \frac{1}{p^3(p^2-1)(p-1)} \left\{ p^{3(2g-1+\nu_p)} - (p+1) p^{2(2g-1+\nu_p)} + p\, p^{(2g-1+\nu_p)} \right\} \\ &= \frac{1}{(p^2-1)(p-1)} \left\{ p^{3h-3} - p^{2h-2} - p^{2h-3} + p^{h-2} \right\} \\ &= \frac{1}{(p^2-1)(p-1)} p^{h-2} (p^h - 1)(p^{h-1} - 1),\end{aligned}$$

$v_p = 0$ için

$$n_\Gamma(G) = \frac{1}{p^3(p^2-1)(p-1)}\left\{ p^{3(2g-1)}\left(p^2+(p-1)p^{2-2g}\right)-(p+1)p^{4g}+p\,p^{2g} \right\}$$

$$= \frac{1}{p^3(p^2-1)(p-1)}\left\{ p^{6g-1}+p^{4g}-p^{4g-1}-p^{4g+1}-p^{4g}+p^{2g+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{(p^2-1)(p-1)}\left\{ p^{6g-4}-p^{4g-4}-p^{4g-2}+p^{2g-2} \right\}$$

$$= \frac{1}{(p^2-1)(p-1)}\, p^{2g-2}\left(p^{2g}-1\right)\left(p^{2g-2}-1\right)$$

olarak bulunur, burada

$$h = 2g - 1 + v_p$$

dır. Böylece

$$n_\Gamma(G) = \begin{cases} p^{h-2}\left(p^h-1\right)\left(p^{h-1}-1\right)/\left(p^2-1\right)(p-1) \ , & v_p > 0 \\ p^{h-1}\left(p^{h+1}-1\right)\left(p^{h-1}-1\right)/\left(p^2-1\right)(p-1) \ , & v_p = 0 \end{cases}$$

yazılabilir.

Örnek 3.2.3.: $H = D_p = \left\langle a, b \mid a^p = b^2 = (ab)^2 = 1 \right\rangle$, p (p >2) bir asal sayı olmak üzere mertebesi $2p$ olan bir dihedral grup olsun. Birim elemandan başka, bu grubun mertebesi 2 olan $a^i b$ şeklindeki elemanlardan oluşan p tane ve elemanlarının mertebesi p olan $\{a^{\mp i}\}$ $(1 \le i \le \frac{p-1}{2})$ şeklindeki kümelerden oluşan $\frac{p-1}{2}$ tane eşlenik sınıfı vardır. χ_1 esas karakterine ilaveten H ın diğer indirgenemez karakterleri $\chi'_k\left(a^i\right) = \xi^{ik} + \xi^{-ik}$ ve $\chi'_k\left(a^i b\right) = 0$ ile verilen $\frac{(p-1)}{2}$ tane χ'_k $(k = 1, \dots, (p-1)/2)$ karakteri ve $\chi_2\left(a^i b^j\right) = (-1)^j$ ile verilen alterne karakteridir. Burada ξ, birimin bir p inci pirimitif köküdür.

m ile $2p$ nin en büyük ortak böleni $2p, p, 2$ veya 1 dir. Şimdi bu değerlere karşılık gelen $\chi[m]$ değerini hesaplayalım. Bunun için önce $H[m]$ kümelerini bulalım.

$(m, 2p) = 2p$ olsun. Bu takdirde $m = 2pk$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan her $h \in H$ için $h^{2p} = 1$ olduğundan,

$$h^m = h^{2pk} = \left(h^{2p}\right)^k = 1^k = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $H[m] = H$ dır.

$(m, 2p) = p$ olsun. Bu takdirde $m = pk$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $H[m] = \left\{ h \in H \mid h^m = 1 \right\}$ olduğundan

$$h^m = h^{pk} = \left(h^p\right)^k$$

şartını sağlayan $h \in H$ elemanları $a^p = 1$ olduğundan $H[m] = \left\{1, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\right\}$ dır.

$(m, 2p) = 2$ olsun. Bu takdirde $m = 2k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$h^m = h^{2k} = \left(h^2\right)^k$$

ifadesini sağlayan $h \in H$ elemanları $b^2 = 1$ ve $(ab)^2 = 1$ olduğundan $H[m] = \left\{1, b, ab, a^2b, \ldots, a^{p-1}b\right\}$ dır.

$(m, 2p) = 1$ olsun. Bu takdirde

$$h^m = 1$$

şartını sağlayan tek eleman birim eleman olup $H[m] = \{1\}$ dır. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
(m,2p)=2p &\Rightarrow H[m]=H\\
(m,2p)=p &\Rightarrow H[m]=\{1,a,a^2,\ldots,a^{p-1}\}\cong C_p\\
(m,2p)=2 &\Rightarrow H[m]=\{1,b,ab,a^2b,\ldots,a^{p-1}b\}=H[2]\\
(m,2p)=1 &\Rightarrow H[m]=\{1\}
\end{aligned}
$$

yazılır. Şimdi $\chi[m]$ değerlerini hesaplayalım. $(m,2p)=2p$ için, $H[m]=H$ olduğu göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
\chi_1[m] &= \sum_{h\in H[m]} \chi_1(h)\\
&= \chi_1(1)+\chi_1(a)+\ldots+\chi_1(a^{p-1})\\
&\quad +\chi_1(b)+\chi_1(ab)+\ldots+\chi_1(a^{p-1}b)\\
&= \underbrace{1+1+\ldots+1}_{2p\text{ tane}}= 2p.
\end{aligned}
$$

D_p nin eşlenik sınıflarını, $S_1=\{1\}$, $S_2=\{b,ab,a^2b,\ldots,a^{p-1}b\}=\{a^ib \mid 0\le i\le p-1\}$, ve $\frac{p-1}{2}$ tane $S_i'=\{a^i,a^{-i}\}$ ile gösterirsek, $H=D_p=S_1\cup S_2\cup\left(\bigcup_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} S_i'\right)$ dır. Böylece

$$
\begin{aligned}
\chi_2[m] &= \sum_{h\in H[m]} \chi_2(h)\\
&= \chi_2(1)+\sum_{h\in S_2}\chi_2(h)+\sum_{h\in \bigcup_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} S_2}\chi_2(h)\\
&= 1+p(-1)+\frac{p-1}{2}\left(\chi_2(a^i)+\chi_2(a^{-i})\right)\\
&= 1-p+\frac{p-1}{2}\,2=1-p+p-1=0
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\chi_1'[m] &= \sum_{h\in H[m]} \chi_1'(h) \\
&= \chi_1'(1)+\chi_1'(a)+\ldots+\chi_1'(a^{p-1})+\chi_1'(b)+\chi_1'(ab)+\ldots+\chi_1'(a^{p-1}b) \\
&= (\xi^p+\xi^{-p})+(\xi+\xi^{-1})+\ldots+(\xi^{p-1}+\xi^{-p+1})+0+0+\ldots+0 \\
&= 1+1+(\xi+\xi^{-1})+\ldots+(\xi^{p-1}+\xi^{-(p-1)}) \\
&= 2+\underbrace{\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{p-1}}_{-1}+\underbrace{\xi^{p-1}+\ldots+\xi^2+\xi}_{-1} \\
&= 2+(-2)=0
\end{aligned}
$$

şeklinde elde ederiz (eğer ξ birimin bir p inci pirimitif kökü ise bu takdirde $1+\xi+\ldots+\xi^{p-1}=0$ dır, buradan $\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{p-1}=-\xi^p=-1$ dir). Benzer şekilde diğerleri için de $\chi_i'[m]=0$ elde edilir.

$(m,2p)=p$ için $H[m]=\{1,a,a^2,\ldots,a^{p-1}\}$ kümesi göz önüne alınarak,

$$\chi_1[m]=\sum_{h\in H[m]}\chi_1(h)=\sum_{h\in C_p}1=\underbrace{1+\ldots+1}_{p \text{ tane}}=p$$

$$\chi_2[m]=\sum_{h\in H[m]}\chi_2(h)=\sum_{a^i\in C_p}\chi_2(a^i)=\sum_{a^i\in C_p}1=\underbrace{1+\ldots+1}_{p \text{ tane}}=p$$

$$\chi_1'[m]=\sum_{h\in H[m]}\chi_1'(h)=2+\xi+\xi^{p-1}+\ldots+\xi^{p-1}+\xi+0+\ldots+0=0$$

elde edilir. Diğerleri için de $\chi_i'[m]=0$ elde edilir.

$(m,2p)=2$ için $H[m]=\{1,b,ab,a^2b,\ldots,a^{p-1}b\}$ kümesini göz önüne alarak,

$$
\begin{aligned}
\chi_1[m] &= \sum_{h\in H[m]}\chi_1(h) \\
&= 1+\sum_{h\in S_2}\chi_1(h)=1+\underbrace{1+\ldots+1}_{p \text{ tane}}=p+1
\end{aligned}
$$

$$\chi_2[m] = \sum_{h\in H[m]} \chi_2(h)$$
$$= 1+\sum_{h\in S_2} \chi_2(h) = 1+\underbrace{(-1)+\ldots+(-1)}_{p \text{ tane}} = 1-p$$

$$\chi_1'[m] = \sum_{h\in H[m]} \chi_1'(h)$$
$$= 2+\sum_{h\in S_2} \chi_1'(h) = 2+0=2$$

elde edilir. Diğerleri için de $\chi_i'[m]=2$ elde edilir.

$(m,2p)=1$ için $H[m]=\{1\}$ kümesi göz önüne alınarak

$$\chi_1[m] = \sum_{h\in H[m]} \chi_1(h) = \chi_1(1) = 1$$

$$\chi_2[m] = \sum_{h\in H[m]} \chi_2(h) = \chi_2(1) = 1$$

$$\chi_k'[m] = \sum_{h\in H[m]} \chi_k'(h) = \chi_k'(1) = 2$$

elde edilir. Dolayısıyla

$(m,2p)=2p$ ise, $\chi[m]=\begin{cases} 2p, & \chi=\chi_1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

$(m,2p)=p$ ise, $\chi[m]=\begin{cases} p, & \chi=\chi_1 \text{ veya } \chi_2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

$(m,2p)=2$ ise, $\chi[m]=\begin{cases} p+1, & \chi=\chi_1 \\ 1-p, & \chi=\chi_2 \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

$(m,2p)=1$ ise, $\chi[m]=\begin{cases} 1, & \chi=\chi_1 \text{ veya } \chi_2 \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

olacak şekilde yazabiliriz. Eğer n_h, $(m_i,2p)=h$ $(h=2p,p,2,1$ olabilir) olacak şekildeki i lerin sayısını gösterirse, Sonuç (3.2.1)

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(D_p)&=|D_p|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g-r}\chi[m_1]\ldots\chi[m_r]\\
&=(2p)^{2g-1}\Big\{\chi_1(1)^{2-2g-r}\chi_1[m_1]\ldots\chi_1[m_r]+\chi_2(1)^{2-2g-r}\chi_2[m_1]\ldots\chi_2[m_r]\\
&\quad\chi_1'(1)^{2-2g-r}\chi_1'[m_1]\ldots\chi_1'[m_r]+\ldots+\chi'_{\frac{p-1}{2}}(1)^{2-2g-r}\chi'_{\frac{p-1}{2}}[m_1]\ldots\chi'_{\frac{p-1}{2}}[m_r]\Big\}\\
&=(2p)^{2g-1}\Big\{(2p)^{n_{2p}}p^{n_p}(p+1)^{n_2}+0^{n_{2p}}p^{n_p}(1-p)^{n_2}\\
&\qquad+\frac{p-1}{2}2^{2-2g-r}0^{n_{2p}}0^{n_p}2^{n_2+n_1}\Big\}
\end{aligned}$$

olduğunu verir, burada 0^0 ı, 1 olarak alırız.

Eğer $G=D_p$ alırsak G nin H alt grupları $H=D_p$, C_p ye izomorfik bir tek $H=<a>$ alt grubu, p tane $<a^ib>\cong C_2$ alt grubu ve C_1 aşikar alt grubudur. Bu alt gruplar için $\mu(H)$ değeri sırasıyla 1, -1, -1 ve p dir. Ayrıca $|Aut(D_p)|=p(p-1)$ dir. Böylece denklem (3.1.1)

$$\begin{aligned}
n_\Gamma(D_p)&=\frac{1}{|Aut(D_p)|}\sum_{H\le D_p}\mu(H)|Hom(\Gamma,H)|\\
&=\frac{1}{p(p-1)}\Big\{\sigma_\Gamma(D_p)+\mu(C_p)\sigma_\Gamma(C_p)\\
&\qquad+\underbrace{\mu(C_2)\sigma_\Gamma(C_2)+\ldots+\mu(C_2)\sigma_\Gamma(C_2)}_{p\ \text{tane}}+\mu(C_1)\sigma_\Gamma(C_1)\Big\}\\
&=\frac{1}{p(p-1)}\big\{\sigma_\Gamma(D_p)-\sigma_\Gamma(C_p)-p\sigma_\Gamma(C_2)+p\sigma_\Gamma(C_1)\big\}
\end{aligned}$$

olduğunu verir. $H=D_p$ için $\sigma_\Gamma(H)$ ı yeni hesapladık ve Örnek (3.2.1) diğer H alt grupları ile ilgilidir. Böylece bunların değerleri yerine konulabilir ve $n_\Gamma(D_p)$ bulunur. $|G|$ nin bir asal olmaması durumunda sonuç formülü oldukça karmaşıktır.

Örnek 3.2.4 : $H=\mathbb{Q}_8=\left\langle x,y \mid x^4=1,\, x^2=y^2,\, yxy^{-1}=x^3\right\rangle$ mertebesi 8 olan quaternion grubu olsun. Örnek (2.2.4) de $\mathbb{Q}_8$ in eşlenik sınıfları, bu eşlenik sınıflara karşılık gelen karakter tablosu verilmiştir. Buradan

$$H[m]=\left\{h\in H \mid h^m=1\right\}, \qquad \chi[m]=\sum_{h\in H[m]}\chi(h)$$

ifadelerini kullanarak,

$$(m,8)=1 \;\Rightarrow\; \chi[m]=\begin{cases}2\,, & \chi=\chi_5\\ 1\,, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$(m,8)=2 \;\Rightarrow\; \chi[m]=\begin{cases}0\,, & \chi=\chi_5\\ 2\,, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$(m,8)=4 \;\Rightarrow\; \chi[m]=\begin{cases}8\,, & \chi=\chi_1\\ 0\,, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olduğunu elde ederiz. Eğer n_h, $(m_i,8)=h$ olacak şekildeki h ların sayısını gösterirse,

$$\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8)=8^{2g-1}\left\{2^{n_2+3n_4}+3.2^{n_2}0^{n_4}+2^{2-2g-r+n_1}.0^{n_2+n_4}\right\}$$

şeklinde buluruz. Burada 0^0 ı 1 olarak yorumlarız.

$\mathbb{Q}_8$ grubunun alt grupları ve bu alt gruplara karşılık gelen $\mu(H)$ değerleri Örnek (2.2.4) de verilmiştir. Bunları kullanarak $n_\Gamma(\mathbb{Q}_8)$ değerini hesaplayalım. $H=\mathbb{Q}_8$ için $\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8)$ değerini yeni hesapladık. Örnek 3.2.1 de, diğer H alt grupları için $\sigma_\Gamma(H)$ değerlerini bulduk. Bu değerleri yerine koyarak,

$$\begin{aligned} n_\Gamma(\mathbb{Q}_8)&=\frac{1}{\left|Aut(\mathbb{Q}_8)\right|}\sum_{H\leq\mathbb{Q}_8}\mu(H)\left|Hom(\Gamma,H)\right| \\ &=\frac{1}{24}\left\{\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8)-3\,\sigma_\Gamma(C_4)+2\sigma_\Gamma(C_2)\right\}\end{aligned}$$

formülünü elde ederiz. Böylece $\Gamma/N\cong\mathbb{Q}_8$ olacak şekildeki N normal alt grupların sayısını elde etmiş oluruz.

Örnek 2.3.5 : Tekrar $\mathbb{Q}_8 = \left\langle a,b \mid a^4 = 1,\, a^2 = b^2,\, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$ quaternion grubunu göz önüne alalım. Sonlu üretilenli Γ grubu olarak da $\Delta(4,4,4)$ üçgen gurubunu alalım, yani $\Gamma = \Delta(4,4,4) = \left\langle x,y,z \mid x^4 = y^4 = z^4 = xyz = 1 \right\rangle$ olsun Bu durumda Γ, $(0,+,[4,4,4];\{-\})$ simgesine sahiptir, yani $g=0,\, r=3$ ve $m_1 = m_2 = m_3 = 4$ dür. $\Gamma/N \cong \mathbb{Q}_8$ olacak şekildeki N normal alt gruplarının sayısını hesaplayalım.

Eğer $n_h, (m_i, 8) = h$ olacak şekildeki h ların sayısını gösterirse, $n_1 = 0, n_2 = 0, n_4 = 3$ olur. Bu takdirde Örnek 3.2.1 ve 3.2.4 yardımıyla,

$$\begin{aligned}\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8) &= 8^{2g-1}\left\{2^{n_2+3n_4} + 3.2^{n_2}0^{n_4} + 2^{2-2g-r+n_1}.0^{n_2+n_4}\right\}\\ &= 8^{-1}\left\{2^{0+3.3} + 3.2^0 0^3 + 2^{2-3+0}.0^{0+3}\right\}\\ &= 2^{-3}\, 2^9 = 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\Gamma(C_4) &= \frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d) = = \frac{4^{2g}}{(4,4)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,4)\\ &= \frac{1}{4}(4,4)(4,4)(4,4) = 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\Gamma(C_2) &= \frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d) = = \frac{2^{2g}}{(4,2)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,2)\\ &= \frac{1}{2}(4,2)(4,2)(4,2) = 4\end{aligned}$$

şeklinde buluruz. Şimdi bu değerleri Örnek (3.2.4) de bulduğumuz $n_\Gamma(\mathbb{Q}_8)$ formülünde yerine koyalım.

$$\begin{aligned}n_\Gamma(\mathbb{Q}_8) &= \frac{1}{24}\left\{\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8) - 3\,\sigma_\Gamma(C_4) + 2\sigma_\Gamma(C_2)\right\}\\ &= \frac{1}{24}\left\{64 - 3.16 + 2.4\right\} = \frac{1}{24}.24 = 1\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu sonuç $\Gamma/N \cong \mathbb{Q}_8$ olacak şekildeki N normal alt gruplarının sayısının 1 olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.5 : $C_6 = \langle x \mid x^6 = 1 \rangle$ olacak şekilde mertebesi 6 olan devirli grup olsun. Sonlu üretilenli Γ grubu $\Gamma = \Delta(2,2,3,3) = \langle x, y, z, t \mid x^2 = y^2 = z^3 = t^3 = xyzt = 1 \rangle$ olsun. Bu durumda Γ nın simgesi $(0,+,[2,2,3,3];\{-\})$ dır. Böylece $g=0$, $r=4$ ve $m_1=2$, $m_2=2$ $m_3=3$, $m_4=3$ dır. $l=[2,2,3,3]=6$ olur. $\Gamma/N \cong C_6$ olacak şekildeki N normal alt gruplarının sayısını bulalım.

Örnek (3.2.1) de elde edilen formül yardımıyla $n_\Gamma(C_6)$ değerini basitçe hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
n_\Gamma(C_6) &= \frac{1}{\phi(6)} \sum_{d|6} \mu(6/d)\sigma_\Gamma(C_d) \\
&= \frac{1}{\phi(6)} \sum_{d|6} \left\{ \mu(6/d) \frac{d^{2g}}{(6,d)} \prod_{i=1}^{4} (m_i, d) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \mu(6) \frac{1}{(6,1)} \prod_{i=1}^{4} (m_i,1) + \mu(3) \frac{1}{(6,2)} \prod_{i=1}^{4} (m_i,2) \right. \\
&\qquad \left. + \mu(2) \frac{1}{(6,3)} \prod_{i=1}^{4} (m_i,3) + \mu(1) \frac{1}{(6,6)} \prod_{i=1}^{4} (m_i,6) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 + (-1).\frac{1}{2}.2.2 + (-1).\frac{1}{3}.3.3 + (1).\frac{1}{6}.2.2.3.3 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \{ 1-2-3+6 \} = \frac{1}{2}.2 = 1
\end{aligned}
$$

olarak buluruz. Bu ise $\Gamma/N \cong C_6$ olacak şekildeki N normal alt grupların sayısının 1 olduğunu ifade eder.

Örnek 3.3.6 : Tekrar $\mathbb{Q}_8 = \langle a,b \mid a^4=1,\ a^2=b^2,\ bab^{-1}=a^{-1} \rangle$ quaternion grubunu alalım. Sonlu üretilenli Γ grubu $\Gamma=\Delta(2)=\langle x,a,b \mid x^2=1,\ x^2[a,b]=x^2aba^{-1}b^{-1}=1 \rangle$ olsun. Bu durumda Γ nın simgesi $(1,+,[2];\{-\})$ dır. Böylece $g=1, r=1$ ve $m_1=2$ dır. Buradan $l=2$ olur. $\Gamma/N \cong \mathbb{Q}_8$ olacak şekildeki N normal alt gruplarının sayısını hesaplayalım.

Örnek 3.2.1 ve 3.2.4 yardımıyla hesaplamayı yapalım. Eğer $n_h, (m_i,8)=h$ olacak şekildeki h ların sayısını gösterirse $n_1=0, n_2=1, n_4=0$ olduğunu görmek kolaydır.

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8) &= 8^{2g-1}\{2^{n_2+3n_4}+3.2^{n_2}0^{n_4}+2^{2-2g-r+n_1}.0^{n_2+n_4}\} \\
&= 8\{2^1+3.2^1 0^0+2^{-1}.0^{1+0}\} \\
&= 8\{2+6\} = 64
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(C_4) &= \frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d) \\
&= \frac{4^{2g}}{(2,4)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,4) = \frac{4^2}{2}(2,4) = 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma(C_2) &= \frac{d^{2g}}{(l,d)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,d) \\
&= \frac{2^{2g}}{(2,2)}\prod_{i=1}^{r}(m_i,2) = \frac{2^2}{2}(2,2) = 4
\end{aligned}$$

şeklinde buluruz. Şimdi bu değerleri Örnek (3.2.4) de bulduğumuz $n_\Gamma(\mathbb{Q}_8)$ formülünde yerine koyalım.

$$\begin{aligned}
n_\Gamma(\mathbb{Q}_8) &= \frac{1}{24}\{\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8)-3\,\sigma_\Gamma(C_4)+2\sigma_\Gamma(C_2)\} \\
&= \frac{1}{24}\{64-3.16+2.4\} \\
&= \frac{1}{24}.24 = 1
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu sonuç $\Gamma/N \cong \mathbb{Q}_8$ olacak şekildeki N normal alt gruplarının sayısının 1 olduğunu gösterir.

Not edelim ki, bu normal alt grupların sayılması, sınırsız 2 boyutlu orbifoldların düzgün örtülerinin sayılmasına karşılık gelir.

3.3 YANSIMASIZ YÖNLENDİRİLEMEYEN NEC GRUPLARI

Şimdi Γ yansımasız yönlendirilemeyen bir NEC grup olsun, böylece Γ,

$$\left(g;-;[m_1,\ldots,m_r];\{-\}\right) \qquad \text{(S-)}$$

simgesine sahiptir, burada $g, r, m_1, \ldots, m_r$, $g \geq 1, r \geq 0$ ve tüm i ler için $m_i > 1$ olacak şekilde tamsayılardır. Böylece Γ,

$$X_i \quad (i=1,\ldots,r), \qquad A_j \quad (j=1,\ldots,g)$$

üreteçlerine sahiptir ve belirleyici bağıntıları

$$X_i^{m_i}=1 \quad (i=1,\ldots,r), \qquad \prod_{i=1}^{r} X_i \prod_{j=1}^{g} A_j^2 = 1$$

dır. Bu durumda $\Gamma \to H$ homomorfizmlerinin

$$\sigma_\Gamma(H) = \left| Hom(\Gamma, H) \right|$$

sayısı

$$x_i^{m_i}=1 \quad (i=1,\ldots,r) \qquad (3.3.1)$$

$$\prod_{i=1}^{r} x_i \prod_{j=1}^{g} a_j^2 = 1 \qquad (3.3.2)$$

denklemlerinin H daki ortak x_i, a_j çözümlerinin sayısına eşittir. $\sigma_\Gamma(H)$ için formül yönlendirilebilir durumdakine benzerdir, fakat ekstra bir durum içerir. χ, bir ρ gösteriminden elde edilen H ın bir indirgenemez karakteri olsun. χ nin (veya ρ nun) c_χ Frobenius-Schur belirleyicisini (Tanım 2.2.10, Teorem 2.2.12) göz önüne alalım.

Sonlu bir H grubunda (3.3.2) denkleminin çözümlerinin sayısı Teorem (2.3.5) ile verilir.

Sonuç 3.3.1 : Eğer Γ, (S-) simgesine sahip ve H herhangi bir sonlu grup ise

$$\sigma_\Gamma(H)=|H|^{g-1}\sum_{\chi} c_\chi^g\,\chi(1)^{2-g-r}\,\chi[m_1]\ldots\chi[m_r]$$

dir. Burada χ, H ın indirgenemez kompleks karakterlerini tarar.

Örnek 3.3.1 : $H=C_d$, mertebesi d olan bir devirli grup olsun. Örnek (2.1.2) H ın χ karakterleri verilmişti. Buna göre ya $\chi=\chi_1$ (her h için $\chi(h)=1$ ile verilen esas karakter), yada d çift ve $\chi=\chi_2$ (H ın bir üretecini -1 e gönderen alterne karakter) olmadığı sürece $c_\chi=0$ dır. Bu χ_1 ve χ_2 karakterlerinin her ikisi içinde $c_\chi=1$ dir. Böylece yönlendirilebilir durumdakine benzer bir bakış açısı

$$\sigma_\Gamma(C_d)=\delta\, d^{g-1}\prod_{j=1}^{r}(m_i,d)$$

olduğunu verir. Burada;

$$\delta=\begin{cases}1\,, & d/(l,d)\ \text{tek}\\ 2\,, & d/(l,d)\ \text{çift}\end{cases}$$

ve l, m_i periyotlarının en küçük ortak katıdır. Böylece eğer $(m)_2$ bir m tamsayısını bölen 2 nin en büyük kuvveti olarak tanımlanırsa, bu takdirde

$$\delta=\begin{cases}1\,, & \text{eğer bir } i \text{ için } (m_i)_2 \geq (d)_2 \\ 2\,, & \text{eğer bir } i \text{ için } (m_i)_2 < (d)_2\end{cases}$$

dır. Örneğin, eğer d yi bir p (p >2) asalı olarak alırsak (bu durumda $p \mid m_i$ ise $(m_i, p) = p$ olup p asal olduğundan $(m_i)_2 \geq (d)_2$ dır. Dolayısıyla $\delta=1$ olur),

$$\begin{aligned}\sigma_\Gamma(C_p) &= \delta\, d^{g-1} \prod_{j=1}^{r} (m_i, d) \\ &= p^{g-1}\, p^{v_p} = p^{g-1+v_p}\end{aligned}$$

buluruz. Bununla birlikte $d=2$ aldığımızda, $v_2>0$ durumunda $\delta=1$ dir. $v_2=0$ durumunda $(m_i, 2) = 1$ olduğundan $(m_i)_2 < (d)_2$ dır. Dolayısıyla $\delta=2$ olur. Buradan

$$\sigma_\Gamma(C_2)=\begin{cases}2^{g-1+v_2}\,, & v_2>0 \\ 2^g\,, & v_2=0\end{cases}$$

elde ederiz.

Örnek 3.3.2 : H asal p eksponentine sahip olsun. Örnek (3.2.2) de belirlediğimiz $\chi[m]$ nin değerini kullanabiliriz. Eğer $v_p>0$ ise $\chi=\chi_1$ esas karakteri için $c_\chi=1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\sigma_\Gamma(H) &= |H|^{g-1} \sum_{\chi} c_\chi^g\, \chi(1)^{2-g-r}\, \chi[m_1] \ldots \chi[m_r] \\ &= |H|^{g-1}\, \chi_1(1)^{2-g-r}\, \chi_1[m_1] \ldots \chi_1[m_r] \\ &= |H|^{g-1}\, |H|^{v_p} \\ &= |H|^{g-1+v_p}\end{aligned}$$

elde ederiz. Üstelik eğer $v_p=0$ ise

$$\sigma_\Gamma(H)=|H|^{g-1}\sum_\chi c_\chi^g\,\chi(1)^{2-g-r}\,\chi[m_1]\dots\chi[m_r]$$
$$=|H|^{g-1}\sum_\chi c_\chi^g\,\chi(1)^{2-g-r}\,\chi(1)^r$$
$$=|H|^{g-1}\sum_\chi c_\chi^g\,\chi(1)^{2-g}$$

dır. Bu son durumda eğer p (p >2) ise, her $\chi\neq\chi_1$ için $c_\chi=0$ dır. Böylece

$$\sigma_\Gamma(H)=|H|^{g-1}\sum_\chi c_\chi^g\,\chi(1)^{2-g}$$
$$=|H|^{g-1}\left\{c_{\chi_1}^g\,\chi_1(1)^{2-g}+c_{\chi_2}^g\,\chi_2(1)^{2-g}+\dots+c_{\chi_k}^g\,\chi_k(1)^{2-g}\right\}$$
$$=|H|^{g-1}=|H|^{g-1+\nu_p}$$

dır. Bununla birlikte önceki gibi $p=2$ ise her χ için (H, değişmeli olduğundan), $\chi(1)=1$ ve $c_\chi=1$ dır. Böylece

$$\sigma_\Gamma(H)=|H|^{g-1}\sum_\chi c_\chi^g\,\chi(1)^{2-g}$$
$$=|H|^{g-1}\{\underbrace{1+1+\dots+1}_{|H|}\}$$
$$=|H|^{g-1}|H|$$
$$=|H|^g$$

dır. Yönlendirilebilir durumdaki gibi bu sonuçlar, $H=C_p$ için Örnek (3.3.1) dekileri genişletir. Benzer olarak G, p eksponentine sahip olduğu zaman $n_\Gamma(G)$ hesaplanmasında bu sonuçlar kullanılabilir. Böylece eğer G, p ($p>0$) eksponentli ve mertebesi p^3 olan değişmeli olmayan bir grup ise, bu takdirde önceki gibi

$$n_\Gamma(G)=\frac{1}{p^3(p^2-1)(p-1)}\left\{\sigma_\Gamma(G)-(p+1)\sigma_\Gamma(C_p\times C_p)+p\,\sigma_\Gamma(C_p)\right\}$$

elde ederiz. p tek olduğundan, yukarıdaki sonuç, sağ taraftaki her bir $H \leq G$ için $\sigma_\Gamma(H) = |H|^h$ olduğunu verir, burada $h = g - 1 + v_p$ dir. Böylece

$$n_\Gamma(G) = \frac{p^{h-2}(p^h - 1)(p^{h-1} - 1)}{(p^2 - 1)(p - 1)}$$

olduğunu buluruz.

Örnek 3.3.3 : $\sigma_\Gamma(D_p)$ nin hesaplanması, yönlendirilebilir durumunkine benzerdir. $\chi[m]$ nin değeri aynıdır ve bir dihedral grubun her bir indirgenemez gösterimi reeldir. Tüm χ ler için $c_\chi = 1$ dir. D_p nin karakter tablosunu ve yönlendirilebilir durumdaki $\chi[m]$ değerlerini göz önüne alarak,

$$\sigma_\Gamma(D_p) = (2p)^{g-1}\Big\{2^{n_{2p}}\, p^{n_{2p}+n_p}(p+1)^{n_2} + p^{n_p}(1-p)^{n_2}\, 0^{n_{2p}} + \tfrac{p-1}{2} 2^{2-g-r+n_2+n_1} 0^{n_{2p}+n_p}\Big\}$$

elde edilir. Burada 0^0 ı, 1 olarak yorumlarız.

Örnek 3.3.4 : $\mathbb{Q}_8$ quaternion grubu için yansımasız yönlendirilemeyen Γ NEC grubunu alarak $\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8)$ i hesaplayalım.

$\chi[m]$ değerleri yönlendirilebilir durumdaki ile aynıdır. $\mathbb{Q}_8$ grubunun dört tane 1 boyutlu reel, bir tane 2 boyutlu kompleks gösterimi vardır. Fakat beş karakteri de reeldir. Dolayısı ile

$$c_\chi = \begin{cases} -1, & \chi = \chi_5 \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır. Bu takdirde, n_h ile, $(m_i, 8) = h$ olacak şekildeki i lerin sayısını gösterirsek

$$\sigma_\Gamma(\mathbb{Q}_8) = 8^{g-1}\Big\{2^{n_2+3n_4} + 3.2^{n_2}.0^{n_4} + (-1)^g.2^{2-g-r+n_1}.0^{n_2+n_4}\Big\}$$

olarak buluruz. Burada 0^0 ı, 1 olarak yorumlarız.

3.4 TORSİON - FREE NORMAL ALT GRUPLAR

Γ yansıma ihtiva etmediğinden torsion elemanları X_i eliptik üreteçlerinin kuvvetlerinin eşlenikleridir. Böylece Γ nun bir N normal alt grubu torsion-free dir ancak ve ancak hiç bir X_i nin trivial olmayan kuvvetlerini içermez, yani her bir X_i, $G = \Gamma/N$ bölüm grubunda mertebesi kesin olarak m_i.olan bir x_i elemanına gider. Bu (koni noktasız) bir yüzey olarak, N e karşılık gelen orbifolda denktir. Böylece daha öncede olduğu gibi N alt grupların $n_\Gamma^f(G)$ sayısının

$$n_\Gamma^f(G) = \frac{1}{|Aut\,G|} \sum_{H \le G} \mu(H)\sigma_\Gamma^f(H) \qquad (3.4.1)$$

ile verildiğini göstermek için Hall'ın teorisi uygulanabilir. Burada $\sigma_\Gamma^f(H)$, torsion-free çekirdekli, yani, her bir $i=1,\dots,r$ için $x_i = X_i\theta$ m_i inci mertebeye sahip olacak şekilde $\theta:\Gamma \to H$ homomorfizmlerinin sayısını gösterir.

Her bir sonlu H grubu ve her bir $m \ge 1$ tamsayısı için, $H<m>$, H daki m inci mertebeden elemanların cümlesi olarak tanımlansın ve H ın her bir χ karakteri için

$$\chi<m> = \sum_{h \in H\langle m\rangle} \chi(h)$$

olsun. Teorem (3.2.1) ve (3.3.1) aşağıdaki iki sonucu verir.

Sonuç 3.4.1 : H her hangi bir sonlu grup olsun. Eğer Γ, (S+) simgesine sahip ise,bu takdirde

$$\sigma_\Gamma^f(H) = |H|^{2g-1} \sum_\chi \chi(1)^{2-2g-r} \chi<m_1>\dots\chi<m_r>$$

ve eğer Γ, (S-) simgesine sahip ise, bu takdirde

$$\sigma_\Gamma^f(H) = |H|^{g-1} \sum_\chi c_\chi^g \chi(1)^{2-g-r} \chi<m_1>\dots\chi<m_r>$$

dır. Burada, her bir durumda, χ, H ın indirgenemez karakterleri üzerinde dolaşır.

Örnek 3.4.1 : $H=C_d$ olsun. h, H ın herhangi bir üreteci ve ξ, $\mathbb{C}$ de 1 in d inci pirimitif kökü olsun. Bu takdirde, H ın indirgenemez χ karakterleri, h ı ξ^j ($j=1, \ldots, d$) ye götürmesiyle belirlenen $\lambda_j : H \to S' \subset \mathbb{C}$ homomorfizmleridir. $\chi=\lambda_j$ nin çekirdeği $k=(j, d)$ inci mertebeden ve görüntüsü d/k ıncı mertebedendir. Eğer m, d yi bölmez ise, bu takdirde $\chi<m>=0$ dır. Böylece $m|d$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $H<m>$, onun yegane alt grubu olan C_m in üreteçleri olan H ın elemanlarından oluşur. Buradan $C_m \cap Çek\chi=C_{(m,k)}$ olur, böylece χ, C_m i birimin $m/(m,k)$ inci köklerinin grubu üzerine dönüştürür, üreteçleri pirimitif köklere gönderir. Her bir pirimitif kök $H<m>$ in $\phi(m)/\phi(m/(m,k))$ tane elemanının görüntüsüdür ve her n için 1 in $\mathbb{C}$ deki n inci pirimitif köklerinin toplamı $\mu(n)$ olduğundan,

$$\chi\langle m\rangle=\frac{\phi(m)\mu(m/(m,k))}{\phi(m/(m,k))}$$

olduğunu buluruz. Bunu,

$$\phi(m)\left(\frac{\mu}{\phi}\right)\left(\frac{m}{(m,k)}\right)$$

olarak kısaltacağız. (Bu,

$$c_m(j)=\phi(m)\left(\frac{\mu}{\phi}\right)\left(\frac{m}{(m,j)}\right)$$

ile verilen, 1 in m inci pirimitif köklerinin j inci kuvvetlerinin toplamı olan $c_m(j)$ Ramanujan toplamıdır. Burada $m|d$ olduğundan $(m,k)=(m,(j,d))=(m,j,d)=(m,j)$ dır.)

Şimdi Γ, (S+) simgesine sahip olsun. Bu takdirde eğer bir m_i, d yi bölmezse, yani eğer m_i periyotlarının en küçük ortak katı l, d yi bölmezse, $\sigma_\Gamma^f(C_d)=0$ dır. l, d yi bölerse, yukarıdaki ifade

$$\sigma_\Gamma^f(C_d)=d^{2g-1}\sum_{\chi}\left\{\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i)\left(\frac{\mu}{\phi}\right)\left(\frac{m_i}{(m_i,k)}\right)\right\}$$
$$=d^{2g-1}\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i)\sum_{\chi}\left\{\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\mu}{\phi}\right)\left(\frac{m_i}{(m_i,k)}\right)\right\}$$
$$=d^{2g-1}\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i)\sum_{k|d}\left\{\phi\left(\frac{d}{k}\right)\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\mu}{\phi}\right)\left(\frac{m_i}{(m_i,k)}\right)\right\}$$

olduğunu verir. Burada d yi bölen her bir k için $|Çek\chi|=k$ olmak üzere $\phi(d/k)$ tane indirgenemez χ karakterin olduğu gerçeğini kullandık.

Eğer $G=C_n$ alırsak, onun bütün H alt grupları, devirli C_d gruplarıdır. Bundan dolayı denklem (3.4.1) de $\sigma_\Gamma^f(H)$ için yukarıdaki formülü yerine koyabiliriz;

$$n_\Gamma^f(C_n)=\frac{1}{\phi(n)}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sigma_\Gamma^f(C_d)$$
$$=\frac{1}{\phi(n)}\sum_{l|d|n}\left\{\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^{2g-1}\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i)\sum_{k|d}\left\{\phi\left(\frac{d}{k}\right)\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\mu}{\phi}\right)\left(\frac{m_i}{(m_i,k)}\right)\right\}\right\}$$
$$=\frac{1}{\phi(n)}\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i)\sum_{l|d|n}\left\{\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^{2g-1}\sum_{k|d}\left\{\phi\left(\frac{d}{k}\right)\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\mu}{\phi}\right)\left(\frac{m_i}{(m_i,k)}\right)\right\}\right\}$$

olduğunu verir.

Örneğin, n bir p asal sayısı olsun. Eğer $r\geq 1$ ise, bu takdirde $l=p$, yani her bir i için $m_i=p$ olmadıkça ana toplamdan bir şey gelmez (ve böylece $n_\Gamma^f(C_n)=0$ dır), dir. Bu durumda, toplamda d için yegane mümkün olabilecek değer $d=p$ dir, böylece $k=1$ veya p dir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
n_\Gamma^f(C_n) &= \frac{1}{p-1}\left[\prod_{i=1}^{r}(p-1)\left\{\mu(1)p^{2g-1}\left\{(p-1)\prod_{i=1}^{r}\frac{(-1)}{p-1}+1\cdot\prod_{i=1}^{r}1\right\}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{p-1}\left[(p-1)^r p^{2g-1}\left(\frac{p-1}{(p-1)^r}(-1)^r+1\right)\right] \\
&= p^{2g-1}\left[(p-1)^{r-1}\left(\frac{1}{(p-1)^{r-1}}(-1)^r+1\right)\right] \\
&= p^{2g-1}\left((p-1)^{r-1}+(-1)^r\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer yandan, eğer $r=0$ ise $l=1$ dir. Böylece $d=1$ veya p dir. $r=0$, $d=p$ için

$$
\begin{aligned}
n_\Gamma^f(C_p) &= p^{2g-1}\left((p-1)^{-1}+(-1)^0\right) \\
&= p^{2g-1}\left(\frac{1+p-1}{p-1}\right) = p^{2g-1}\left(\frac{p}{p-1}\right) \\
&= \frac{p^{2g}}{p-1}
\end{aligned}
$$

$r=0$, $d=1$ için

$$
\begin{aligned}
n_\Gamma^f(C_p) &= \frac{1}{p-1}(p-1)^r\left(\mu(p)1^{2g-1}\left(\phi(1)\frac{(-1)^r}{(p-1)^r}\right)\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\left((-1)(1)\right) = -\frac{1}{p-1}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$
n_\Gamma^f(C_p) = \frac{p^{2g}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = \frac{p^{2g}-1}{p-1}
$$

dır ($r=0$ olduğu zaman Γ torsion-free olduğundan bu $n_\Gamma(C_p)$ için bulunan değer daha önce bulduğumuz değerle çakışır).

Yönlendirilemeyen durumda $\sigma_\Gamma^f(C_d)$ nin hesabı biraz daha basittir, çünkü C_d nin $c_\chi \neq 0$ olan yegane karakterleri χ_1 esas karakterleri ve (d çift olduğunda) χ_2 alterne karakterleridir. Bu iki karakter (sırasıyla; C_d nin bir üretecini ± 1 e gönderir) için $c_\chi = 1$ dir. Daha önceki gibi; m, d yi bölmediği sürece $\chi\langle m\rangle = 0$ dır ve $m|d$ ise $\chi_1\langle m\rangle = \phi(m)$ ve (eğer d çift ise) $\chi_2\langle m\rangle = (-1)^{d/m}\phi(m)$ dir. Eğer w_d, d/m_i tek tamsayı olacak şekildeki i lerin sayısını gösterirse, bu takdirde

$$\sigma_\Gamma^f(C_d) = \begin{cases} d^{g-1}\phi(m_1)\ldots\phi(m_r), & l|d \text{ ve } d, \text{ tek tamsayı} \\ 2d^{g-1}\phi(m_1)\ldots\phi(m_r), & l|d\,,\ d \text{ çift tamsayı ve } w_d \text{ çift tamsayı} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. Böylece denklem (3.4.1)

$$n_\Gamma^f(C_n) = \frac{1}{\phi(n)}\left\{ \sum_{\substack{l|d|n \\ d \text{ tek}}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{g-1}\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i) + \sum_{\substack{l|d|n \\ d,w_d \text{ çift}}} 2\mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{g-1}\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i) \right\}$$

$$= \frac{1}{\phi(n)}\prod_{i=1}^{r}\phi(m_i)\left\{ \sum_{\substack{l|d|n \\ d \text{ tek}}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{g-1} + \sum_{\substack{l|d|n \\ d,w_d \text{ çift}}} 2\mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{g-1} \right\}$$

olduğunu verir.

Örneğin n bir p tek asal sayı olsun. Eğer $r \geq 1$ ise, bu takdirde $l = p$, yani, tüm i ler için $m_i = p$ olmadıkça $n_\Gamma^f(C_p) = 0$ dır, diğer durumda $n_\Gamma^f(C_p) = (p-1)^{r-1}p^{g-1}$ dir. Eğer $r = 0$ (böylece $l = 1$) ise, bu takdirde $n_\Gamma^f(C_p) = (p^{g-1}-1)/(p-1)$ dır. Benzer olarak, eğer $n = p = 2$ ve $r \geq 1$ ise, r nin çift veya tek olmasına göre $n_\Gamma^f(C_2) = 2^g$ veya 0 dır. $r = 0$ iken $n_\Gamma^f(C_2) = 2^{g-1}$ elde ederiz. Yönlendirilebilir durumdaki gibi, sonlu abelyen $\Gamma/\Gamma'\Gamma^p$ grubundan C_p ye epimorfizmleri (örten homomorfizmleri) göz önüne almakla bu sonuçları kolaylıkla onaylayabiliriz.

KAYNAKLAR

[1] G. FROBENIUS, Über Gruppencharaktere, Sitzber. Königlich Pruss. Akad. Wiss. Berlin (1896), 985-1021.

[2] G. FROBENIUS and I. SCHUR, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, Sitzber. Königlich Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1906), 186-208.

[3] D. GORENSTEIN, Finite Groups, Chelsea Publishing Company, New York, (1980), Second Edition.

[4] T. GÜROĞLU, Örtü Uzayları ve Düzgün Örtü Uzaylarının Sayılması, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, (2002).

[5] P. HALL, The Eulerian Functions of a Group, Quarterly J. Math. Oxford 7 (1936), 134-151.

[6] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, Introduction to the Theory of Numbers (5 th ed.), Oxford University Pres, Oxford (1979).

[7] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1979).

[8] I. M. ISAACS, Character Theory of Finite Groups, Academic Pres, New York, (1976).

[9] D. L. JOHNSON, Topics in the Theory of Group Presentations, L. M. S. Lecture Note Series 42 (1980), Cambridge Üniversity Pres.

[10] G. A. JONES, Counting Normal Subgroups of Non-Euclidean Crystallographic Groups, Department of Mathematics Üniversity of Southampton, Southampton SO17 1BJ, United Kingdom.

[11] G. A. JONES, Enumeration of homomorphisms and surface-coverings, Quaterly J. Math. Oxford, to appear.

[12] G. A. JONES and D. SINGERMAN, Complex Functions, Cambridge Üniversity Press, (1987).

[13] M. KAZAZ, Regular Coverings and Gayley Graph, Hadronic Journal Supplement, Vol.18, (2003).

[14] A. D. MEDNYH, Determination of the number of nonequivalent coverings over a compact Riemann surface, Dokl. Akad. Nauk SSSR 239 (1978), 269-271 (Russian); Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 318-320 (English transl.).

[15] J. J. ROTMAN, An Introduction to the Theory of Groups, Springer – Verlag, New York / Berlin, (1995), Fourth Edition.

[16] J. P. SERRE, Linear Rpresentations of Finite Groups, Springer-Verlag, New York / Berlin, (1977).

[17] J-P. SERRE, Topics in Galois Theory, Jones and Bartlett, Boston (1992).

[18] H. J. ZASSENHAUS, The Theory of Groups, Chelsea Publishing Company, New York , (1949).

[19] H. ZIESCHANG, E. VOGT and H-D. COLDEWEY, Surfaces and Planar Discontinuous Groups, Lecture Notes in Mathematics 835, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1980).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma ARSLAN

Doğum Yeri : Orta-Çankırı

Doğum Tarihi : 20.03.1980

Medeni Hali : Bekâr

Eğitimi

1991, İlkokul, Bornova Özkanlar İlkokulu, İzmir.

1994, Ortaokul, Bornova Yahya Kemal Beyatlı İlköğretim Okulu, İzmir.

1997, Lise, Karşıyaka Lisesi, İzmir.

2001, Lisans, Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Manisa.

Yürütülen Görevler : Aralık 2001'de Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlayan Fatma ARSLAN halen bu görevde çalışmaya devam etmektedir.