

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİMLİŞİL KÜMELERİN ALT KATEGORİLERİNDE SERRE HOMOTOPİ  
TEORİSİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Çiğdem KONURALP**

**Anabilim Dalı : Matematik  
Programı : Topoloji**

**MANİSA 2005**

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİMPLEŞİL KÜMELERİN ALT KATEGORİLERİNDE SERRE HOMOTOPI  
TEORİSİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK –Çiğdem KONURALP**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12. 09. 2005**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 21. 09. 2005**

**Tez Danışmanı  
Diğer Jüri Üyeleri**

**:Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU (Celal Bayar Üniversitesi)  
:Prof. Dr. Necdet BİLDİK (Celal Bayar Üniversitesi)  
:Yrd. Doç. Dr. İlkay KARACA (Ege Ün.v.Fen.Fak.Mat.Böl)**

**MANİSA 2005**

## İÇİNDEKİLER

	<b>TEŞEKKÜR</b>	iv
	<b>ÖZET</b>	v
	<b>ABSTRACT</b>	vi
	<b>ÖNSÖZ</b>	vii
<b>0</b>	<b>TEMEL KAVRAMLAR ve TANIMLAR</b>	<b>1</b>
0.1	Simplişil Kümeler ve Topolojik Uzaylar	1
0.2	Temel Kavramlar ve Tanımlar	16
0.3	Kapalı Model Kategorileri ve Kümelerde Serre Teorisi	26
<b>1</b>	<b>SİMPLEŞİL KÜMELERİN ALT KATEGORİLERİNDE SERRE HOMOTOPİ TEORİSİ</b>	<b>58</b>
1.1	Giriş	58
1.2	$[_r T_n]$ de Quillen' in Bir Model Yapısı	60
1.3	$[_r T_n]^s$ de Homotopi Teorisi	67
1.4	$[_r T_n]$ de Simplişil Yapı	72
1.5	$[_r T_{r+1}]$ de Serre Teorisi	78
	<b>KAYNAKLAR</b>	<b>80</b>

## TEŞEKKÜR

Bu alıőma konusunu veren, çalıőmalarım sũresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU'ya ve ayrıca bu çalıőmam sırasında yardımlarıyla ve desteğiyle yanımda olan değerli eőim Ali KONURALP'e ve tũm hayatım ve eğitim-œėrenimimde maddi manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme ve eğitim-œėrenimimde emeiği geçen bũtũn hocalarıma sonsuz teőekkũrlerimi sunarım.

Çiğdem KONURALP

## ÖZET

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümün başında, simplişil kümeler ve topolojik uzaylar, simplişil nesnelere ve dönüşümler, topolojik standart simpleks konularına yer verildi. Daha sonra, diğer bölümde bize gerekli olan temel kavramlar ve tanımlar verildi. Son olarak da kapalı model kategorilerine kısaca değinildi.

İkinci bölümde de, eğer  $S \subseteq \mathcal{Z}$  bir çarpımsal sistem ve  $\mathcal{C}$ , S-burulma abelyan kümelerinin bir sınıfı ise,  $0 \leq r \leq n$  için  $n$  den daha büyük ve  $r$  den daha küçük boyutlarda aşık Moore komplekslere sahip olan simplişil kümelerin alt kategorilerinde Serre mod-  $\mathcal{C}$  homotopi teorisini inceledik. Bu, böyle kategorilerde bir kapalı model yapısını vererek sonra da birleştirilmiş homotopi teorisini çalışarak elde edilmiştir.  $n \rightarrow \infty$  olduğunda, [6]'da Quillen tarafından çalışılmış  $r$ -indirgenmiş simplişil kümeler için Serre homotopi teorisini elde ederiz.  $n=r+1$  durumu, cat-kümelerinin kategorilerinde veya kümelerin crossed modüllerinde Serre homotopi teorisini göz önüne almaya imkan sağladı.

## ABSTRACT

The thesis consists of two chapters.

In the first chapter, the notions of simplicial sets and topological spaces, simplicial objects and maps, topological standard simplex are described in the early sections. However the notions and definitions that will be used in the other chapter, are also expressed. The rest of this chapter the closed model categories are shortly described.

In the second chapter, if  $S \subseteq \mathbb{Z}$  is a multiplicative system and  $\mathcal{E}$  is the class of the  $S$ -torsion abelian sets, we study Serre mod- $\mathcal{E}$  homotopy theory in the subcategories of simplicial sets whose objects have trivial Moore in dimensions less than  $r$  and greater than  $n$  for  $0 \leq r \leq n$ . This is carried by giving a closed model structure in these categories and then studying the associated homotopy theory. When  $n \rightarrow \infty$ , we obtain the Serre homotopy theory for  $r$ -reduced simplicial sets studied by Quillen in [6]. The case  $n=r+1$  allows to consider Serre homotopy theory in categories of cat-sets or crossed modules of sets.

## ÖNSÖZ

Öncelikle çalışmamızda, yardımcı olması ve yol göstermesi açısından, ilk bölümde simplişil kümeleri tanımlayacağız, birkaç örnek vereceğiz ve simplişil kümelerin  $\mathcal{S}$  kategorisi ile topolojik uzayların  $\mathcal{T}$  kategorisi arasındaki singüler ve realizasyon funktörlerini inşa edeceğiz.  $\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{T}$  kategorilerinin homotopi teorileri arasında bir denklik doğurmak üzere Quillen'in belirli formülünü içerir. Bunun için her iki kategoride de fabreyşin, eşfabreyşin ve zayıf denklik notasyonlarına ihtiyaç duyulur. Simplişil dönüşümler için homotopi bağıntısının bir tartışması ile devam edip, simplişil kümeler için fonksiyon uzaylarının bağlantılı kavramlarına bakacağız. Diğer bölümlerde kullanacağımız temel kavram ve tanımları vererek konunun daha iyi anlaşılmasını hedefliyoruz. Bu tanımlardan başlıcaları, kategori, small kategori, alt kategori, funktör, doğal dönüşüm, baz noktası, silindir, silindir nesnesi, loop (ilmek), homotopi, geri çekilim ve bozulmuş geri çekilim, suspension, homotopi bağıntısı, homotopi kategorisi, Kan fabreyşindir. Daha sonra kısaca kapalı model kategorilerine değindik, burada da simplişil kümelere fabreyşin (aşık fabreyşin), kapalı simplişil model kategorisi tanımlarını vererek başlayacağız ve gerekli bazı önermelerle devam edeceğiz.

Birinci bölümde ise genel anlamda simplişil kümelerin alt kategorilerinde Serre Teorisini inceledik. 1-noktasal bağlantılı  $X$  ve  $Y$  uzayları verildiğinde, bunların arasında bir rasyonel homotopi denkliği,  $\pi_*(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : \pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  bir izomorfizm olacak şekilde  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümüdür, rasyonel homotopi denkliklerine göre 1-noktasal bağlantılı uzayların  $\mathcal{T}_2$  kategorisinin yerelleştirilmesine rasyonel homotopi teorisi denir. Bu kategori,  $\pi_*(X)$  bir burulmasız-serbest bölünebilen abelyan küme olmak üzere  $X$  den ibaret olan baz noktaları-korunumlu dönüşümlerin 1-noktasal bağlantılı  $CW$  komplekslerinin ve homotopi sınıflarının kategorisinin bütün alt kategorilerine denktir.

Daha genel olarak, eğer  $r \geq 2$  için  $X$  ve  $Y$ ,  $(r-1)$ -noktasal bağlantılı uzaylar ve  $S$   $\mathbb{Z}$  de bir çarpımsal sistem ise,  $X$  ve  $Y$  arasındaki bir  $S$ -denkliği,  $S^{-1}\pi_*$  funktörü için izomorfizimleri meydana getiren bir  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümüdür.  $S$ -denkliklerine göre  $(r-1)$ -bağlantılı topolojik uzayların  $\mathcal{T}_r$  kategorisinin yerelleştirilmesine  $S$ -burulma abelyan kümelerinin bir homotopi kategorisi modül sınıfı denir ve bu,  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi kümeleri ile birlikte elemanları  $(r-1)$ -noktasal bağlantılı  $CW$ -kompleksleri olan ve morfizimleri baz nokta-korunumlu dönüşümlerin homotopi sınıfları olan kategoriye denktir.

$S$ -burulma abelyan kümelerinin homotopi kategori modül sınıfının çalışması Serre mod  $\mathcal{C}$  homotopi teorisidir ( $\mathcal{C}$ ,  $S$ -burulma abelyan kümelerinin sınıfı olmak üzere) [16] ve [6]'da, Quillen bu homotopi teorisinin simplişil kümelerin bir uygun kapalı model kategorisinin homotopi teorisi olarak gerçekleştirilebileceğini göstermiştir. Daha açık olarak Quillen, rasyonel homotopi teorisinin (yani,  $r = 2$  ve  $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ ) indirgenmiş simplişil kümelerinin bir kapalı model kategorisi ile birleştirilmiş homotopi teorisine denk olduğunu ve, genel olarak da  $r \geq 2$  için, homotopi teorisinin,  $(r - 1)$ -indirgenmiş simplişil kümelerinin bir kapalı model kategorisi ile birleştirilmiş homotopi teorisine denk olduğunu göstermiştir.

Burada  $\text{Simp}(M_p)_r$  ile gösterilmiş olan  $r$ -indirgenmiş simplişil kümelerin kategorisi sadece, elemanları  $r$  den daha küçük boyutlarda aşikar Moore kompleksine sahip olan simplişil kümelerin kategorisinin full alt kategorisidir. Bundan sonra herhangi bir  $n \geq r$  için, elemanları  $n$  den daha büyük boyutlardaki aşikar Moore kompleksine sahip olan ve  ${}_{[r]}T_n$  ile gösterilen,  $\text{Simp}(M_p)$ 'nin full alt kategorisini göz önüne alıp bu simplişil kümelerin alt kategorilerinde Serre teorisini çalışırız.  $\mathbb{Z}$  deki herhangi  $S$  çarpımsal sistemi için  ${}_{[r]}T_n$  de  $S$ -(eş) fabreyşinleri ve zayıf  $S$  denkliklerini tanımlayıp, ayrık morfizimlerin bu sınıfları ile bu kategorinin bir kapalı model kategorisi olduğunu göstereceğiz. Fabreyşin ve eşfabreyşin nesnelere karakterize ederek birleştirilmiş homotopi teorisini çalışırız. Özellikle (Sonuç 1.4.5'e bakınız) eğer  $S = \mathbb{Z} - \{0\}$  ve  $r = 1$  ise, homotopi kategorisinin  $2 \leq q \leq n + 1$  için bir  $\pi_q(X)$  burulma serbest bölünebilir abelyan kümesi ile birlikte nesnelere 1-bağlantılı ve  $(n + 1)$ -eşbağlantılı  $CW$   $X$  kompleksleri olan ve morfizimleri korunan-baz noktası dönüşümlerin homotopi sınıfları olan kategoriye denk olduğunu gösteririz.

$n = r + 1$  olduğunda  ${}_{[r]}T_n$  kategorisi, kümelerde iç kategorilerin diğer iyi-bilinen kategorilerine yada kümelerin crossed modüllerinin kategorilerine denktir. Homotopi teorisi bu kategorilerde [1]'de sık sık çalışıldı ve şimdi, bu denklikleri kullanıp bunların içindeki Serre mod  $\mathcal{C}$  teorisini göz önüne alarak homotopi teorisini genişletelim.

Birinci bölümde anlatılmak istenen kısaca aşağıdaki gibidir. Bölüm 1.1'de, simplişil kümelerin kategorisindeki bazı yapıları ve Quillen tarafından çalışılan  $r$ -indirgenmiş simplişil kümelerin kategorisindeki Serre teorisini hatırlatalım. Bölüm 1.2'de herhangi  $S \subseteq \mathbb{Z}$  için,  ${}_{[r]}T_n$  kategorisinin bir kapalı model kategorisi olduğunu gösterip bu yapı için fabreyşin ve eşfabreyşin



nesnelerini karakterize ederiz. Bölüm 1.3'te, yol uzayı nesnelere ve silindirik nesnelere açık tanımlarını vererek birleştirilmiş homotopi teorisini inceleriz. Bölüm 1.4'te,  $S = \{1\}$  olduğunda, Bölüm 1.2'de tanımlanmış model yapısının bir basitleştirilmiş model olduğunu gösteririz ve sonrada herhangi bir  $S$  için homotopi kategorisini tanımlarız. Son olarak, Bölüm 1.5'de  $n = r + 1$  durumunu inceleriz ve [1]'de çalışılan ile birlikte homotopi teorisinin sonuçlarını karşılaştırırız.

## 0. BÖLÜM TEMEL KAVRAMLAR ve TANIMLAR

### 0.1 Simplişil Kümeler ve Topolojik Uzaylar

#### 0.1.1 Giriş

Bu bölümün amacı

- (i) Simplişil homotopi teorisinin temel notasyonlarının bazılarını incelemek,
- (ii) Bu simplişil homotopi teorisinin genel topolojik teoriye denk olduğunu okuyucuyu ikna etmektir (en az bir defa ikna etmeye çalışmak).

Burada simplişil kümeleri tanımlayacağız, birkaç örnek vereceğiz ve simplişil kümelerin  $\mathcal{S}$  kategorisi ile topolojik uzayların  $\mathcal{T}$  kategorisi arasındaki singüler ve realizasyon fanktörlerini inşa edeceğiz.

$\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{T}$  kategorilerinin homotopi teorileri arasında bir denklik doğurmak üzere Quillen'ın belirli formülünü içerir. Bunun için her iki kategoride de fabreyşin, eşfabreyşin ve zayıf denklik notasyonlarına ihtiyaç duyulur.

Simplişil dönüşümler için homotopi bağıntısının bir tartışması ile bölümü sonlandırılıp, simplişil kümeler için fonksiyon uzaylarının bağlantılı kavramlarına bakacağız.

#### 0.1.2 Simplişil Kümeler

Bu bölümde biz

(i) Simplişil kümelerin, ve daha genel olarak, keyfi bir kategorinin üzerindeki simplişil kümelerin bir tanımını hatırlatacağız.

(ii) Simplişil kümelerin bazı basit örneklerini tartışacağız ve

(iii) Simplişil kümelerin  $\mathcal{S}$  kategorileri ve adjoint fanktörler, realizasyon fanktör  $| \cdot | : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ 'nin her ikisi ile ilişkili  $\mathcal{T}$  topolojik uzayları, singüler fanktör  $\text{Sin} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ 'i inceleyeceğiz.

Aşağıdaki ile başlayalım.

##### 0.1.2.1 Simplişil nesnelere ve dönüşümler

Bir  $\mathcal{C}$  kategorisi üzerindeki bir  $X$  simplişil nesnesi aşağıdakilerden meydana gelir:

(i) Her tamsayı için  $n \geq 0$  için, bir  $X_n \in \mathcal{C}$  nesnesi ve

(ii)  $0 \leq i \leq n$  ile her tamsayı ikilisi  $(i, n)$  için, yüz ve bozulmuş dönüşümler olan

$$d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1} \text{ ve } s_i : X_n \longrightarrow X_{n+1} \in$$

simpliciil özdeşlikleri sağlar:

$$\begin{aligned} i < j \text{ için,} & & d_i d_j &= d_{j-1} d_i \\ i < j \text{ için,} & & d_i s_j &= s_{j-1} d_i \\ i = j, j+1 \text{ için,} & & &= id \\ i > j+1 \text{ için,} & & &= s_j d_{i-1} \\ i > j \text{ için,} & & s_i s_j &= s_j s_{j-1} \end{aligned}$$

Benzer olarak iki simpliciil nesnenin arasındaki bir  $f : X \rightarrow Y$  simpliciil dönüşümü,

$$f : X_n \rightarrow Y_n \in \mathcal{C}$$

yüz ve bozulmuş dönüşümler ile gidip gelen dönüşümlerden meydana gelir, yani her  $i$  için,

$$d_i f = f d_i \text{ ve } s_i f = f s_i$$

Şimdi bunu özelleştirelim.

### 0.1.2.2 Simpliciil kümeler

Kümeler kategorisi üzerinde bir simpliciil nesne, bir simpliciil küme olarak adlandırılacak, ve  $\mathcal{S}$  ile simpliciil kümelerin kategorisini ifade edeceğiz.

$X \in \mathcal{S}$  için,  $X_n$ ' nin elemanları  $n$ -simpleksler olarak adlandırılır;  $0$ -simpleksler de bazen köşeler olarak adlandırılır.

İki çeşit simpleks vardır:

### 0.1.2.3 Bozulmuş ve bozulmamış simpleksler

$X \in \mathcal{S}$  için, eğer bazı  $x' \in X$  ve  $i$  için,  $x = s_i x'$  bir  $x \in X$  simpleksi bozulmuş olarak adlandırılır. Aksi takdirde bozulmamış olarak adlandırılır.

Bozulmuş simplekslerin aşağıdaki özellikleri çok kullanışlıdır ve doğruluğunu ispat etmek zor değildir.

Her bozulmuş  $x \in X$  bir tek ayrışımaya sahiptir.

$$x = s_{i_n} \dots s_{i_1} x$$

Ayrıca  $x$  bozulmuş olmak üzere,  $i_1, \dots, i_n$  tam olarak “yönlendirmelerdir”, yani  $x$   $s_{i_k}$ ’nin görüntüsündedir ancak ve ancak  $k \in \{i_1, \dots, i_n\}$ ’dir.

Örneğin bu, iki  $X$  ve  $Y$  simplişil kümelerin  $X \times Y \in \mathcal{S}$  çarpımı (bütün  $n$ ’ler için

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$$

ile ve aşikar yüz ve bozulmuş dönüşümler ile tanımlanan) her iki  $x \in X$  ve  $y \in Y$ ’ler bozulmuş (fakat farklı “yönlerde”) olmak üzere bir bozulmamış  $(x, y)$  simpleksini içerebilir.

Genelde, simplişil kümelerin  $\mathcal{S}$  kategorisi ile topolojik uzayların  $\mathcal{T}$  kategorisi arasındaki singüler ve realizasyon fanktörlerini göz önüne alarak bir simplişil kümenin neye benzediği daha iyi bir düşünce halini alabilir.

#### 0.1.2.4 Topolojik standart simpleksler

Her  $n \geq 0$  için, topolojik  $\underline{\Delta}[n]$   $n$ -simpleksi bütün  $n$ ’ler için  $0 \leq t_i \leq 1$  ve  $\sum t_i = 1$  olmak üzere  $(t_0, \dots, t_n)$  noktalarından meydana gelen  $(n+1)$ -boyutlu Euclidean uzayının alt uzayıdır. Benzer olarak bütün  $0 \leq i \leq n$  için

$$\underline{d}^i : \underline{\Delta}[n-1] \rightarrow \underline{\Delta}[n] \quad \underline{s}^i : \underline{\Delta}[n+1] \rightarrow \underline{\Delta}[n]$$

standart dönüşümleri

$$\begin{aligned} \underline{d}^i(t_0, \dots, t_{n-1}) &= (t_0, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}) \\ \underline{s}^i(t_0, \dots, t_{n+1}) &= (t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1}) \end{aligned}$$

formülleri ile verilir ve bu standart dönüşümlerin simplişil özdeşlikler (0.1.2.1)’in dualini sağladıklarını kontrol etmek kolaydır, yani

$$\begin{aligned} i < j \text{ için} \quad \underline{d}^j \underline{d}^i &= \underline{d}^i \underline{d}^{j-1} \\ i < j \text{ için} \quad \underline{s}^j \underline{d}^i &= \underline{d}^i \underline{s}^{j-1} \\ i = j, j+1 \text{ için} &= i d \\ i > j+1 \text{ için} &= \underline{d}^{i-1} \underline{s}^j \\ i > j \text{ için} \quad \underline{s}^j \underline{s}^i &= \underline{s}^{i-1} \underline{s}^j. \end{aligned}$$

### 0.1.2.5 Singüler Fanktör

Singüler fanktör

$$\text{Sin} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$$

aşağıdaki gibi tanımlanır.  $X \in \mathcal{F}$  için dönüşümün  $d_i x$  yüzleri ve  $s_i x$  bozulmaları

$$\underline{\Delta}[n-1] \xrightarrow{d^i} \underline{\Delta}[n] \xrightarrow{x} X$$

$$\underline{\Delta}[n+1] \xrightarrow{s^i} \underline{\Delta}[n] \xrightarrow{x} X$$

bileşkeleri olan herhangi bir

$$\underline{\Delta}[n] \xrightarrow{x} X \in \mathcal{F}$$

dönüşümü  $\text{Sin } X$ 'in bir  $n$ -simpleksidir. Benzer olarak bir  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{F}$  dönüşümü ve bir  $n$ -simpleks  $x \in \text{Sin } X$  için  $n$ -simpleks  $(\text{Sin } f)x \in \text{Sin } Y$

$$\underline{\Delta}[n] \xrightarrow{x} X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{F}$$

bileşkesi olacaktır.

### 0.1.2.6 Realizasyon Fanktörü

Bu,

$$| : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$$

fanktörü aşağıdaki gibi tanımlanır.  $X \in \mathcal{S}$  için  $|X|$  realizasyonu,

$$x \in X_{n+1}, u \in \underline{\Delta}[n] \text{ için} \quad (d_i x, u) \sim (x, d^i u)$$

$$x \in X_{n+1}, u \in \underline{\Delta}[n] \text{ için} \quad (s_i x, u) \sim (x, s^i u)$$

bağıntıları altında tanımlama uzayı alınarak

$$\coprod_n x_n \times \underline{\Delta}[n]$$

ayrık birleşim uzayından elde edilir ( $X_n$ 'in bu yapısında ayrık topoloji verilmiştir). Aşağıdaki gösterilebilir [15]:

Her simplişil  $x \in \mathcal{S}$  kümesi için, onun realizasyonu  $|X|$ ,  $X$ 'in bozulmamış her  $n$ -simpleksi için bir  $n$ -hücre ile bir  $CW$ -komplekstir.

$\text{Sin}$  ve  $| \cdot |$  fanktörleri, aşağıdakilerden dolayı birbirini tanımlar.

#### 0.1.2.7. $| \cdot |$ ve $\text{Sin}$ 'in adjointness

Yukarıdaki tanımlar kolaylıkla belirtir ki [15]:

Realizasyon fanktör, singüler fanktöre sol adjointtir, yani  $X \in \mathcal{S}$  ve  $Y \in \mathcal{T}$  için dönüşümler arasında bir doğal 1-1 eşleme vardır.

$$|X| \rightarrow Y \in \mathcal{T} \text{ ve } X \rightarrow \text{Sin} Y \in \mathcal{S}$$

Karşılıklı dönüşümler adjoint olarak adlandırılırlar. Özellikle, bir  $f : |X| \rightarrow Y \in \mathcal{T}$  dönüşümünün adjointi,  $x \in X_n$ ,

$$\Delta[n] \xrightarrow{(x, \cdot)} \prod_n X_n \times \Delta[n] \xrightarrow{\text{özdeş}} |X| \xrightarrow{f} Y$$

bileşkesi ile verilmiş olan  $\text{Sin} Y$ 'nin simpleksine dönüştürülecektir. Özel olarak ilgilendiğimiz,

$$|X| \xrightarrow{\text{özdeş}} |X| \text{ ve } \text{Sin} Y \xrightarrow{\text{özdeş}} \text{Sin} Y$$

dönüşümlerine adjoint olan

$$X \longrightarrow \text{Sin} X \text{ ve } |\text{Sin} Y| \longrightarrow Y$$

adjunction dönüşümleri olarak adlandırılır. Şimdi bir simplişil kümenin en çok aşikar örneğini göz önüne alalım:

#### 0.1.2.8 Bir Sıralı Simplişil Kompleksin simplişil kümesi

$K$  bir sıralı simplişil kompleks olsun, yani onun köşelerinin bir sıralanması ile birlikte bir simplişil kompleksdir. Bu taktirde,

$$(i) v_0 \leq \dots \leq v_n, \text{ ve}$$

$$(ii) d_i(v_0, \dots, v_n) = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

$$s_i(v_0, \dots, v_n) = (v_0, \dots, v_i, v_i, \dots, v_n)$$

ile verilen yüz ve bozulmuş operatörler ile ve bazı  $m \leq n$  için,  $\{v_0, \dots, v_n\}$  kümesi  $K$ 'nin bir  $m$ -simpleksidir. (i) ve (ii) için  $K$ 'nin köşelerinin  $(v_0, \dots, v_n)$   $(n+1)$ -sıralı  $n$ -simpleksleri olmak üzere  $K$ , bir  $\Delta K$  simplişil kümesini doğurur.  $\Delta K$ 'nın, tam olarak  $K$ 'nin her simpleksi için bir bozulmamış simplekse sahip olduğunu göstermek ve onun  $|\Delta K|$  realizasyonunda genellikle  $K$  ile birleştirilmiş topolojik uzaydan başka bir şey olmadığını göstermek zor değildir [9].

Bir önemli özel durum, topolojik  $n$ -simplekslerin benzeridir.

#### 0.1.2.9 Standart simpleksleri

$[n]$ , (sıralı) küme  $\{0, \dots, n\}$  ve onun tüm alt kümelerini göz önüne alan sıralı simplişil kompleksi belirtmek üzere, son derece kullanışlı bir simplişil küme standart  $n$ -simpleks  $\Delta[n]$ 'dir.  $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_q \leq n$  olacak şekilde  $\Delta[n]$ 'nin bir  $q$ -simpleksi şu halde tam sayıların  $(a_0, \dots, a_q)$  herhangi  $(q+1)$ -sıralıdır. Şu halde,  $\Delta[n]$ ,  $i_n$  ile göstereceğimiz tam olarak bir bozulmamış  $n$ -simplekse sahiptir ve onun  $|\Delta[n]|$  realizasyonu  $\underline{\Delta}[n]$  topolojik standart simpleksinden başka bir şey değildir.

Standart simplekslerin yararı, aşağıdakilere göre faydalıdır.

#### 0.1.2.10 Standart simplekslerin evrensel özelliği

$X \in \mathcal{S}$  ve  $x \in X_n$  olsun. Bu takdirde,

$$\Delta x : \Delta[n] \longrightarrow X \quad \in \mathcal{S}$$

$i_n$ 'yi  $x$ 'in içine dönüştüren bir tek dönüşüm vardır.

Bunun kolay bir uygulaması olarak, adjunction dönüşüm (0.1.2.7)  $X \rightarrow \text{Sin} | X | \in \mathcal{S}$ ,  $x \rightarrow |\Delta x|$  ile verildiğine dikkat edelim.

Evrensel özelliğin bir kolay sonucu olarak aşağıdakini elde ederiz.

#### 0.1.2.11 Standart dönüşümler

Standart dönüşümler,

$$\begin{aligned}
d_j = \Delta(d_j i_n) : \Delta[n-1] &\longrightarrow \Delta[n] & 0 \leq j \leq n \\
s_j = \Delta(s_j i_n) : \Delta[n+1] &\longrightarrow \Delta[n] & 0 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

simplişil özdeşlikler 0.1.2.1'in dualini sağlar, yani

$$\begin{aligned}
d^j d^i &= d^i d^{j-1} & i < j \text{ için} \\
s^j d^i &= d^i s^{j-1} & i < j \text{ için} \\
&= id & i = j, j+1 \text{ için} \\
&= d^{i-1} s^j & i > j+1 \text{ için} \\
s^j s^i &= s^{i-1} s^j & i > j \text{ için}
\end{aligned}$$

Bir simplişil kümenin daha az aşikar bir örneği ile bitirelim.

#### 0.1.2.12 $n$ -küre $S^n$

Bu, bütün  $i$ ' ler için

$$d_i y = s_{n-1} \dots s_0 x$$

yüzleri ile sadece iki bozulmamış 0-simpleks  $x$  ve bir  $n$ -simpleks  $y$ 'den ibaret olan bir simplişil kümedir, yine bu onun  $\overset{\circ}{\Delta}[n]$  sınırının "collapsing" olması ile  $\Delta[n]$  standart simpleksinden elde edilebilir, yani onun simplişil alt kümesi, onun  $d_0 i_n, \dots, d_n i_n$   $(n-1)$ -simpleksleri ile üretilir.

Bir köşe ve bir  $n$ -hücreyi göz önüne alan  $n$ -küre için, onun realizasyonu  $|S^n|$  genel olarak  $CW$ -kompleksidir.

#### 0.1.2.13 Bir simplişil kümenin $n$ -skeletonu

$X \in \mathcal{S}$  için,  $n$ -skeleton  $X^{[n]} \in \mathcal{S}$  alt-nesnesi,  $\leq n$  boyutlarının  $X$ 'in bütün simpleksleri ile doğrulmuştur. Örneğin,

(i) Standart  $n$ -simpleks  $\Delta[n]$ 'in  $(n-1)$ -skeletonu onun  $\overset{\circ}{\Delta}[n]$  sınırından (0.1.2.12)'den başka bir şey değildir.



(ii)  $X \in \mathcal{S}$ ,  $n$ -skeletonun  $|X^{[n]}|$  realizasyonu, onun realizasyonun  $n$ -skeletonu olan  $CW$ -kompleks  $|X|$ 'dir.

### 0.1.3 Simplişil ve Topolojik Homotopi Teorilerinin Denkliği

Burada aşağıdaki anlamda  $\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{T}$  kategorilerinin homotopi teorileri arasındaki bir denkliği, realizasyon ve singüler fanktörlerin doğurduğu anlamına gelen simplişil kümeler ve topolojik uzaylar üzerinde çeşitli sonuçları tekrar hatırlarız.

(i) Her iki kategori kapalı model kategorisidir, yani, her birinde Quillen aksiyomlarını kapalı bir model kategorisi için sağlayan [6] zayıf denklik, fabreyşin ve eşfabreyşinlerin kavramları vardır.

(ii)  $| \cdot |$  ve  $\text{Sin}$  fanktörleri her ikisi zayıf denklikleri ve adjunction dönüşümlerin her iki tipini korur:

$$X \longrightarrow \text{Sin} |X| \in \mathcal{S} \text{ ve } |\text{Sin} Y| \longrightarrow Y \in \mathcal{T}$$

zayıf denkliklerdir.

(iii)  $| \cdot |$  ve  $\text{Sin}$  fanktörleri her ikisi fabreyşinleri ve eşfabreyşinleri korur ( $\text{Sin}$ 'in eşfabreyşinleri sadece bir zayıf denkliğe kadar korumasına rağmen).

[5]'e göre, (i) zayıf denkliklere göre (yani formal olarak tersini alma)  $\mathcal{S}$ 'den  $\mathcal{T}$ 'ya kadar yerleştirilen  $\text{Ho} \mathcal{S}$  ve  $\text{Ho} \mathcal{T}$  homotopi kategorilerinin biçimleştirilebilmesi (kümeğe geçişte teorik zorluklar olmaksızın) anlamına gelir. Bu takdirde (ii)'den  $| \cdot |$  ve  $\text{Sin}$  fanktörlerinin

$$\text{Ho} \mathcal{S} \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|} \\ \xleftarrow{\text{Sin}} \end{array} \text{Ho} \mathcal{T}$$

kategorilerinin bir zayıf denkliği doğurduğu çıkar. Üstelik (ii) ve (iii),  $| \cdot |$  ve  $\text{Sin}$  fanktörlerinin adjointleri;  $\mathcal{T}$  kategorisi üzerindeki her homotopi teorik ifadesinin,  $\mathcal{S}$  kategorisi üzerindeki bir homotopik denkliğe ve bunun tam tersine yol açtığı anlamına gelir.

Zayıf denklikleri tanımlamak için kullanacağımız homotopi kümelerinin kısa bir tartışması ile başlarız.

#### 0.1.3.1 Homotopi Kümeleri (noktasal kümeler)

Bir  $X$  simplişil kümesinin homotopi kümesi "simplişil" olarak tanımlanabilir olmasına rağmen, onları  $|X|$  realizasyonunun homotopi kümeleri olarak tanımlamak kolaydır. Daha açık

olması açısından:  $X \in \mathcal{S}$  ve  $* \in X$  bir baz noktası (yani bir keyfi fakat sabit köşe) olsun ve yine  $*, * \in |X|$  karşılık gelen noktayı gösterebilirsin. Bu takdirde bütün  $n \geq 0$  için

$$\pi_n(X, *) = \pi_n(|X|, *)$$

yazılır ve hiçbir karmaşıklık mümkün olmadığında  $\pi_n X$  yerine çoğunlukla  $\pi_n(X, *)$  da yazılır.

### 0.1.3.2 Zayıf Denklikler

Eğer  $* \in X$  baz noktasının her seçimi ve bütün  $n \geq 0$  için,  $f$  bir

$$\pi_n X \approx \pi_n Y$$

izomorfizimini üretirse,  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  veya  $\mathcal{T}$  dönüşümüne bir zayıf denklik denir. Bu takdirde aşağıdakilere sahibiz:

- (i)  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{T}$  dönüşümü bir zayıf denkliktir ancak ve ancak  $\text{Sin } f : \text{Sin } X \rightarrow \text{Sin } Y \in \mathcal{S}$  dönüşümü bir zayıf denkliktir.
- (ii)  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  dönüşümü bir zayıf denkliktir ancak ve ancak  $|f| : |X| \rightarrow |Y| \in \mathcal{T}$  dönüşümü bir zayıf denkliktir.
- (iii)  $X \rightarrow \text{Sin } |X| \in \mathcal{S}$  ve  $|\text{Sin } Y| \rightarrow Y \in \mathcal{T}$  adjunction dönüşümleri bütün  $X \in \mathcal{S}$  ve  $Y \in \mathcal{T}$  için zayıf denkliklerdir.

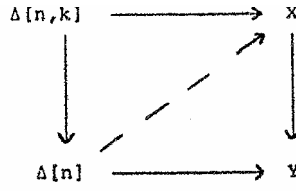
### 0.1.3.3 Fabreyşinlar

$0 \leq k \leq n$  için

$$\Delta[n, k] \subset \Delta[n],$$

$$d_0 i_n, \dots, d_{k-1} i_n, d_{k+1} i_n, \dots, d_n i_n$$

simpleksler tarafından üretilen simplişil alt kümeleri gösterebilirsin (yani  $|\Delta[n, k]|$  tümünden fakat  $|\underline{\Delta}[n]| = \underline{\Delta}[n]$ 'nin bir yüzünden oluşmuştur). Bu takdirde eğer her (değişmeli) kesikli ok diyagramında



noktalı ok mevcut ise,  $f: X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  dönüşümüne bir fabreyşin denir. Üstelik her  $* \in Y$  baz noktası için aynı  $*$  sembolü ile,  $*$  ile üretilen  $Y$ 'nin simplişil alt kümesini  $(s_0, \dots, s_0^*)$  simplekslerden ibaret olan) göstereceğiz ve  $f^{-1} * \subset X$  simplişil alt kümesine  $*$  üzerinde  $f$ 'in fiberi denir.

$\mathcal{S}$ 'deki bu fabreyşinlar  $\mathcal{T}$ 'da (Serre) fabreyşinlari ile yakından ilgilidir. Gerçekten:

(i) Bir  $f: X \rightarrow Y \in \mathcal{T}$  dönüşümü bir fabreyşindir ancak ve ancak  $\text{Sin } f: \text{Sin } X \rightarrow \text{Sin } Y \in \mathcal{S}$  dönüşümü bir fabreyşin olduğu açıktır.

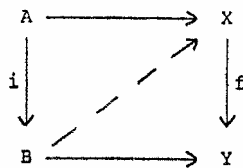
Diğer yandan [7]'den

(ii) Eğer  $f: X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  bir fabreyşin ise, bu takdirde böylece,  $|f|: |X| \rightarrow |Y| \in \mathcal{T}$ 'da bir fabreyşindir ve  $* \in Y$  baz noktasının her seçimi için reelleştirilmiş fiberi'de fiber'in reelleştirilmesini sağlayan  $|f^{-1} *| \rightarrow |f^{-1}|$  kapsamasi, bir homeomorfizim olduğu açıktır.

Uygun ilgili kavram, bir  $X \in \mathcal{S}$  veya  $\mathcal{T}$  faybrint nesnesidir yani  $X \rightarrow * \in \mathcal{S}$  veya  $\mathcal{T}$  (tek) dönüşümü ( $* = \Delta[0]$  veya  $\underline{\Delta}[0]$ ) olacak şekildeki bir nesne bir fabreyşindir. Açık olarak her topolojik uzay faybrinttir fakat her simplişil küme örneğin  $n > 0$  için  $\Delta[n]$  faybrint değildir. Bir faybrint simplişil kümeye bir Kan kompleksi denir veya genişleme şartını sağladığı söylenir.

#### 0.1.3.4 Eşfabreyşinlar

Bir  $i: A \rightarrow B \in \mathcal{S}$  dönüşümü eğer 1-1 ise bu dönüşüme bir eşfabreyşin denir, aynı zamanda bir  $i: A \rightarrow B \in \mathcal{T}$  dönüşümü, zayıf denklik olan bütün fabreyşinlara göre eğer sol lifting özelliğine sahip ise bu dönüşüme bir eşfabreyşin denir yani her (değişmeli) kesikli ok diyagramı için  $f$  bir zayıf denklik olan bir fabreyşin olmak üzere noktalandırılmış ok mevcut ise



$i: A \rightarrow B \in \mathcal{T}$  dönüşümüne sol lifting özelliği denir. Bu tanımlar aşağıdakileri gösterir:

(i) Bir  $i: A \rightarrow B \in \mathcal{S}$  dönüşümü bir eşfabreyşindir ancak ve ancak  $|i|: |A| \rightarrow |B| \in \mathcal{T}$  dönüşümü bir eşfabreyşindir.

(ii) Eğer  $i: A \rightarrow B \in \mathcal{T}$  bir eşfabreyşin ise, bu takdirde  $\text{Sin } i: \text{Sin } A \rightarrow \text{Sin } B \in \mathcal{S}$  dönüşümü de eş fabreyşindir ve  $\text{Sin } i$ 'nin eşfaybrıntından  $i$ 'nin eşfaybrının sinüsüne kadar olan  $\text{Sin } B / \text{Sin } A \rightarrow \text{Sin}(B/A)$  aşikar dönüşümü bir zayıf denkliktir.

Tekrar uygun bir bağlantılı ifade,  $B \in \mathcal{S}$  veya  $\mathcal{T}$  eşfaybrint nesnesidir, yani  $\phi \rightarrow B \in \mathcal{S}$  veya  $\mathcal{T}$  (tek) dönüşümü ( $\phi$  boş olmak üzere) bir eşfabreyşin olacak şekilde bir nesnedir. Açıkça her simplişil küme eşfaybrint ve her  $CW$ -kompleksi ( fakat her topolojik uzay değil) eşfaybrinttir.

Şimdi aşağıdakiyle anlatılmak istenen açık hale gelir.

#### 0.1.3.5 $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}$ kategorileri kapalı model kategorisidir

[5]'e göre  $\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{T}$  kategorileri zayıf denklik ile yukarıda tanımlı fabreyşinlar ve eşfabreyşinlar kapalı model kategorisidir, yani [6] bunlar kapalı model kategorisinin beş aksiyomunu sağlarlar.

Bu beş aksiyom;

(i) Fabreyşinların sınıfı (sırasıyla zayıf denklikler olan fabreyşinlar) bileşke ve baz değişimi altında kapalıdır ve bütün izomorfizimleri içerir,

(ii) Eşfabreyşinların sınıfı (sırasıyla zayıf denklikler olan fabreyşinlar) bileşke ve baz değişimi altında kapalıdır ve bütün izomorfizimleri içerir, olduğunu belirtir.

Gerçekten, Quillen [5] bir kapalı model kategorisinde homotopi teorisinin örneğin dönüşümler için homotopi bağıntısı, looplar ve suspension'lar, fabreyşin ve eşfabreyşin tam dizileri, Toda parantezleri vs. gibi benzer ailelerin çoğunun geliştirilebileceğini göstermiştir.

Özellikle şimdi aşağıdakini tartışabiliriz.

#### 0.1.3.6 $\text{Ho } \mathcal{S}$ ve $\text{Ho } \mathcal{T}$ Homotopi kategorileri

Bunlar, zayıf denkliklere göre (yani formal olarak tersini alma) yerelleşmesiyle  $\mathcal{S}$ 'den  $\mathcal{T}$ 'ya elde edilen kategorilerdir. Daha kesin olması için,  $\Sigma$ 'daki dönüşümleri denkliklere taşıyan ve bu özellik için evrensel olan bir

$$\gamma: \mathcal{G} \rightarrow \Sigma^{-1} \mathcal{G}$$

fanktörü ile birlikte bir kategoriden ibaret olan,  $\mathcal{C}$ 'deki dönüşümlerin bir  $\Sigma$  sınıfına göre bir  $\mathcal{C}$  kategorisinin yerelleştirilmesini [6]'dan hatırlatalım. Eğer bu mevcut ise,  $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \Sigma^{-1}\mathcal{C}$  nesnelere üzerinde bir izomorfizmdir ve  $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$ 'nin her bir dönüşümü,  $g \in \mathcal{C}$  ve  $u \in \Sigma$  olmak üzere  $\gamma g$  veya  $(\gamma u)^{-1}$  formundaki dönüşümlerin bir sonlu bileşimidir. Bu nedenle  $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$ 'nin  $\mathcal{C}$ 'de olduğu gibi aynı nesnelere sahip olduğunu daima kabul edebiliriz (ve edeceğiz).

[5]'de herhangi bir kapalı model kategorisinin, onun zayıf denkliklerine göre bir yerelleştirmesine sahip olduğu gösterilmiştir; şu halde  $\text{Ho}\mathcal{S}$  ve  $\text{Ho}\mathcal{T}$ 'nin yukarıdaki tanımları legitimate'dir. 0.1.3.2'yi kullanarak,

$$\mathcal{S} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \text{Sin} \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{T}$$

adjoint fanktörlerin

$$\text{Ho}\mathcal{S} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \text{Sin} \\ \longrightarrow \end{array} \text{Ho}\mathcal{T}$$

kategorilerinin bir denkleğini doğurduğunu göstermek kolaydır.

Gerçekten, bu bölümün başında da ifade edildiği gibi,  $| |$  ve  $\text{Sin}$  fanktörleri, simplişil ve topolojik "homotopi teorilerinin" bir denkleğini doğurur.

#### 0.1.4 Homotopi Bağıntısı ve Fonksiyon Uzayları

Bir önceki bölümde  $\text{Ho}\mathcal{S}$  ve  $\text{Ho}\mathcal{T}$  homotopi kategorilerini tanımlamak için dönüşümler üzerindeki homotopi bağıntılarında ziyade zayıf denklikleri kullanmıştık; simplişil ve topolojik yaklaşımların benzerliklerini vurgulamıştık. Bu bölümde homotopi bağıntısını tartışıp  $\text{Ho}\mathcal{S}$  ve  $\text{Ho}\mathcal{T}$ 'lerin faybrıntı simplişil kümelerin ve  $CW$ -komplekslerin alışılmış homotopi kategorilerine denk olduklarını göstereceğiz. Ek olarak, simplişil kümeler için fonksiyon uzayların bağlantılı başlıklarını inceleyeceğiz.

Kolay topolojik durumu açıklayarak başlayalım.

##### 0.1.4.1

$\text{Ho}\mathcal{T}$  homotopi kategorisi alışılmış  $CW$ -homotopi kategorisine denktir yani, nesneleri  $CW$ -kompleksler ile birlikte kategori olarak ve dönüşümleri de dönüşümlerin homotopi sınıfları olarak denktir. Üstelik herhangi bir  $K$   $CW$ -kompleksi ve  $X$  topolojik uzayı için

$$\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{T}}(K, X) \approx \{K \rightarrow X \text{ dönüşümlerin homotopi sınıfları} \} .$$

**İSPAT:** Bu aşağıdaki benzer gerçekleri kullanarak kolaylıkla çıkar.

(i) Bir  $X \rightarrow Y \in \mathcal{T}$  dönüşümü zayıf denklidir ancak ve ancak her  $K$   $CW$ -kompleksi için, bu

$$K \longrightarrow X \text{ ve } K \longrightarrow Y$$

dönüşümlerinin homotopi sınıfları arasında bir izomorfizm doğurur.

(ii) Her  $X \in \mathcal{T}$  için,  $K$ 'nin bir  $CW$ -kompleksi olduğu bir  $K \rightarrow X \in \mathcal{T}$  zayıf denkliği vardır.

(iii) Eğer  $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$ , zayıf denklikleri izomorfizimlere dönüştüren bir funktör ise, bu takdirde  $T$ , homotopik dönüşümleri aynı dönüşümlere dönüştürür.  $\square$

#### 0.1.4.2 Noktasal durum:

Benzer bir yolla  $\text{Ho} \mathcal{T}_*$  noktasal homotopi kategorisinin (noktasal topolojik uzayların  $\mathcal{T}_*$  kategorisini zayıf denklilere göre yerleştirilerek elde edilen) alışılmış noktasal  $CW$ -homotopi kategorisine denk olduğu gösterilebilir.

Simplişil kümeler için benzer sonuçları elde etmek için simplişil homotopi bağıntısına ihtiyacımız vardır.

#### 0.1.4.3 Simplişil Homotopi Bağıntısı

Eğer  $\Delta[1] \times X$ 'in üstünü ve altını sırasıyla  $f_0$  ve  $f_1$  ile dönüştüren

$$f : \Delta[1] \times X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$$

dönüşümü (homotopi) mevcut ise, yani sırasıyla

$$X = \Delta[0] \times X \xrightarrow{d^0 \times X} \Delta[1] \times X \xrightarrow{f} Y$$

ve

$$X = \Delta[0] \times X \xrightarrow{d^1 \times X} \Delta[1] \times X \xrightarrow{f} Y$$

$f_0$  ve  $f_1$ 'e eşit ise, iki  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  dönüşümüne homotopiktir denir.

$Y$  bir faybrint olduğunda, bu homotopi bağıntısı bir denklidir ve  $X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  dönüşümlerinin homotopi sınıfları  $|X| \rightarrow |Y| \in \mathcal{T}$  dönüşümlerinin homotopi sınıflarına karşılık gelir.

Şimdi 0.1.4.1'in simplişil benzerini verebiliriz.

**0.1.4.4**

$\text{Ho } \mathcal{S}$  homotopi kategorisi, faybrint simplişil kümelerin alışılmış homotopi kategorisine denktir, yani nesnelere faybrint simplişil kümeler ile kategori olarak ve dönüşümleri de dönüşümlerin homotopi sınıfları olarak denktir. Üstelik,  $X, Y \in \mathcal{S}$  ve  $Y$  faybrinti için

$$\text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{S}}(X, Y) \approx \{X \longrightarrow Y \text{ dönüşümlerin homotopi sınıfları}\}.$$

Bunun bir kolay sonucu olarak 0.1.4.5 verilir.

**0.1.4.5 Homotopi denklikleri olan  $\mathcal{S}$  'deki zayıf denklikler**

Eğer  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  bir zayıf denklik,  $X$  ve  $Y$  faybrint ise, bu takdirde  $f$  gerçekten bir homotopi denkliğidir, yani  $gf$  ve  $fg$   $X$  ve  $Y$  'nin birim dönüşümlerine homotopik olacak şekilde bir  $g : Y \rightarrow X \in \mathcal{S}$  dönüşümü vardır.

**0.1.4.6 Noktasal durum**

$\mathcal{S}_*$ , noktasal simplişil kümelerin kategorisini (=baz noktaları ile birlikte simplişil kümeler=simplişil noktasal kümeler) gösterebilir. Eğer  $(\Delta[1] \times X)/(\Delta[1] \times *)$  'in üstünü ve altını sırasıyla  $f_0$  ve  $f_1$  ile dönüştüren bir

$$f : (\Delta[1] \times X)/(\Delta[1] \times *) \longrightarrow Y \in \mathcal{S}_*$$

dönüşümü (homotopi) var ise, bu takdirde

$$f_0, f_1 : X \longrightarrow Y \in \mathcal{S}_*$$

iki dönüşüm de homotopiktir denir. Tekrar  $Y$  faybrint olduğundan, bu bir denklik bağıntısıdır ve  $X \rightarrow Y \in \mathcal{S}_*$  dönüşümlerinin homotopi sınıfları  $|X| \rightarrow |Y| \in \mathcal{T}_*$  dönüşümlerinin noktasal homotopi sınıflarına karşılık gelir. Üstelik  $\text{Ho } \mathcal{S}_*$  noktasal homotopi kategorisi ( $\mathcal{S}_*$  'ı zayıf denkliklerine göre yerleştirerek elde edilen) noktasal faybrint simplişil kümelerin alışılmış homotopi kategorisine denktir. Ayrıca, tabikide  $\text{Ho } \mathcal{S}_* \cong \text{Ho } \mathcal{T}_*$  'a denktir.

Simplişil fonksiyon uzaylarının ilgili başlığını tekrar inceleyerek sonuca varırız.

#### 0.1.4.7 Simplişil fonksiyon uzayları

$X, Y \in \mathcal{S}$  için fonksiyon uzayı, yüzleri ve bozulmuşları

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n-1] \times X & \xrightarrow{d^i \times X} & \Delta[n] \times X \longrightarrow Y \\ \Delta[n+1] \times X & \xrightarrow{s^i \times X} & \Delta[n] \times X \longrightarrow Y \end{array}$$

bileşkeleri ile birlikte bir

$$\Delta[n] \times X \longrightarrow Y \in \mathcal{S}$$

dönüşümü bir  $n$ -simpleks olan simplişil kümedir.

Fonksiyon uzayının bazı yararlı özellikleri şunlardır:

- (i) Eğer  $Y$  faybrint ise, bu takdirde  $\pi_0 \text{Hom}(X, Y)$  'nin elemanları,  $X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  dönüşümlerinin homotopi sınıflarına karşılık gelir.
- (ii) Eğer  $i : K \rightarrow L \in \mathcal{S}$  bir eşfabreyşin ve  $p : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$  bir fabreyşin ise, bu takdirde  $i$  veya  $p$  bir zayıf denklik ise bir zayıf denklik olan,

$$(i, p) : \text{hom}(L, X) \longrightarrow \text{hom}(K, X) \times_{\text{hom}(K, Y)} \text{hom}(L, Y) \in \mathcal{S}$$

dönüşümü bir fabreyşindir.

- (iii)  $K, X, Y \in \mathcal{S}$  için bir

$$\text{hom}(K \times X, Y) \approx \text{hom}(K, \text{hom}(X, Y)) \in \mathcal{S}$$

doğal izomorfizimi vardır.

#### 0.1.4.8 Noktasal simplişil fonksiyon uzayları

$X, Y \in \mathcal{S}_*$  için

$$\text{hom}_*(X, Y) \in \mathcal{S}_*$$

noktasal fonksiyon uzayı, 0.1.4.7'deki gibi yüz ve bozulmuş dönüşümleri standart simplişillar arasındaki standart dönüşümler ile doğrulan ve bir

$$(\Delta[n] \times X) / (\Delta[n] \times *) \longrightarrow Y \in \mathcal{S}_*$$

dönüşümü  $n$ -simpleks olan noktasal simplişil kümedir.



Tekrar bazı yararlı özdeşlikler şunlardır:

(i) Eğer  $Y$  faybrint ise, bu takdirde  $S^n X$ ,  $X$ 'in  $n$ -kat indirgenmiş suspension'ı olmak üzere  $\pi_n \text{hom}_*(X, Y)$ 'nin elemanları  $S^n X \rightarrow Y$  dönüşümlerinin noktasal homotopi sınıflarına karşılık gelir [15].

(ii) Eğer  $i: K \rightarrow L \in \mathcal{S}_*$  bir eşfabreyşin ve  $p: X \rightarrow Y \in \mathcal{S}_*$  bir fabreyşin ise, bu takdirde  $i$  veya  $p$  bir zayıf denklik ise bir zayıf denklik olan

$$(i, p): \text{hom}_*(L, X) \longrightarrow \text{hom}_*(K, X) \times_{\text{hom}_*(K, Y)} \text{hom}_*(L, Y) \in \mathcal{S}_*$$

dönüşümü bir fabreyşindir.

(iii)  $K, X, Y \in \mathcal{S}_*$  için,  $K \wedge Y \in \mathcal{S}$

$$K \wedge Y = (K \times Y) / ((* \times Y) \cup (K \times *))$$

karma çarpım olmak üzere bir

$$\text{hom}_*(K \wedge X, Y) \approx \text{hom}_*(K, \text{hom}_*(X, Y)) \in \mathcal{S}_*$$

doğal izomorfizimi vardır.

#### 0.1.4.9 Uyarı

$\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{S}_*$  kategorileri [5,6] anlamında kapalı simplişil model kategorileridir, yani onlar “bağdaşık fonksiyon uzayları” ile kapalı model kategorileridir.

## 0.2 Temel Kavramlar ve Tanımlar

### 0.2.1 Kategori:

$\mathcal{H}$  kategorisi üç bileşeni içerir. Nesnelerin sınıfı  $\text{obj } \mathcal{H}$ ;  $A, B \in \text{obj } \mathcal{H}$ 'nin her sıralı çifti için  $\text{hom}(A, B)$  şeklindeki morfizmlerin kümesini; her  $A, B, C \in \text{obj } \mathcal{H}$  için

$(f, g) \rightarrow g \circ f$  ile gösterilen  $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$  bileşkesi, ayrıca aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

(i)  $\text{Hom}(A, B)$  'nin ailesi ayrık çiftlerden oluşur.

(ii) Tanımlanmış ise bileşke bileşimlidir.

(iii) Her bir  $A \in \text{obj } \mathcal{K}$  için her  $f \in \text{Hom}(B, A)$ , tüm  $B \in \text{obj } \mathcal{K}$  için  $1_A \circ f = f$  şartını ve her  $g \in \text{Hom}(A, C)$ , tüm  $C \in \text{obj } \mathcal{K}$  için  $g \circ 1_A = g$  şartını sağlayan  $1_A \in \text{Hom}(A, A)$  şeklinde verilen bir özdeşlik dönüşümü vardır.

### 0.2.2 Small Kategori:

Kısaca kategori; nesnelerin bir sınıfıdır. Nesneleri birer küme olan bir sınıf ise small kategori olarak adlandırılır.

### 0.2.3 Alt Kategori, Full Alt Kategori:

$\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  kategoriler olmak üzere

(1)  $\mathcal{A}$  'nın her nesnesi  $\mathcal{B}$  'nin bir nesnesi,

(2)  $\mathcal{A}$  'nın  $X, Y$  nesnelere için  $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{B}}(X, Y)$ ,

(3)  $\mathcal{A}$  'nın iki morfizminin bileşkesi  $\mathcal{B}$  kategorisindeki bileşkesi ile aynı,

(4)  $\mathcal{A}$  'nın tüm  $A$  nesnelere için  $id_{\mathcal{A}}$  özdeşlik morfizmi  $\mathcal{B}$  'de de benzer şekilde mevcut

ise  $\mathcal{A}$  kategorisine  $\mathcal{B}$  kategorisinin bir alt kategorisidir denir.

Üstelik  $\mathcal{A}$  'nın  $X, Y$  nesnelere için  $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{B}}(X, Y)$  ise  $\mathcal{A}$  'ya  $\mathcal{B}$  'nin Full Alt Kategorisi denir.

### 0.2.4 Fanktör:

Eğer  $\mathcal{A}$  ile  $\mathcal{D}$  kategoriler olmak üzere  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa fanktör olarak adlandırılır.

(i)  $\mathcal{A} \in \text{obj } \mathcal{A}$  iken  $T\mathcal{A} \in \text{obj } \mathcal{D}$

(ii) Eğer  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$   $\mathcal{A}$  'da bir morfizm ise  $Tf : T\mathcal{A} \rightarrow T\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{D}$  'deki bir morfizmdir.

(iii) Eğer  $f$  ve  $g$   $\mathcal{A}$  'daki morfizmler ise  $T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$  'dir.

(iv)  $T(1_{\mathcal{A}}) = 1_{T\mathcal{A}}$  eşitliği her  $\mathcal{A} \in \text{obj } \mathcal{A}$  için sağlanır.

Fanktörün bir başka tanımı ise;

$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  kategoriler olmak üzere  $F : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  dönüşümü,

$$F1) F(1_{\mathcal{A}}) = 1_{F\mathcal{A}}$$

$$F2) F(gf) = F(g).F(f)$$

özelliklerini sağlıyorsa bir kategoriden diğer bir kategoriye olan  $F$  dönüşümüne bir fanktör denir.

### 0.2.5 Kapsama Fanktör:

Eğer  $\mathcal{C}$  kategorisi,  $\mathcal{D}$  kategorisinin bir alt kategorisi ise  $\mathcal{C}$ 'nin her  $X$  nesnesi için  $IX = X$  ile tanımlanmış  $I: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ayırımı ve  $\mathcal{C}$ 'nin her morfizmi için  $I f = f$  olduğunu kabul edelim. Açıkça, bu bir fanktör tanımlar ve bu fanktör  $\mathcal{C}$ 'den  $\mathcal{D}$ 'ye kapsama fanktörü olarak adlandırılır.

### 0.2.6 Adjoint:

$F: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}$  ve  $G: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$  fanktörler olsunlar. Eğer  $\mathcal{F}$ 'daki her bir  $A$  nesnesi ve  $\mathcal{L}$ 'deki her bir  $C$  nesnesi için her bir değişkende doğal olan

$$\tau: \tau_{AC}: \text{Hom}_{\mathcal{L}}(FA, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(A, GC)$$

karşılıklı birebir fonksiyonu var ise  $(F, G)$  sıralı ikilisine adjoint ikilisi denir. Aşağıdaki diyagramlar tüm  $\mathcal{F}$ 'deki  $f: A' \rightarrow A$  ve  $\mathcal{L}$ 'deki  $g: C \rightarrow C'$  için değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{L}}(FA, C) & \xrightarrow{(Ff)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{L}}(FA', C) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \text{Hom}_{\mathcal{F}}(A, GC) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{F}}(A', GC) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{L}}(FA, C) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_{\mathcal{L}}(FA, C') \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \text{Hom}_{\mathcal{F}}(A, GC) & \xrightarrow{(Gg)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{F}}(A, GC') \end{array}$$

Kısaca,  $\mathcal{T} = \text{Hom}_{\mathcal{L}}(F \_, \_) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\_, G \_)$  bir doğal denklidir. Eğer  $V$  bir iç çarpım uzayı ve eğer  $f : V \rightarrow V$  bir lineer dönüşüm ise, bu taktirde bunun adjointi tüm  $v, w \in V$  vektörleri için  $(fv, w) = (v, gw)$  olacak şekilde  $g : V \rightarrow V$  lineer dönüşümdür.

### 0.2.7 Doğal Dönüşüm:

$A$  herhangi bir küme ve  $R$ ,  $A$  içinde bir denklik bağıntısı olsun. Denklik sınıfları kümesini  $B = A/R$  ile gösterelim.  $B$ 'nin her elemanı,  $A$ 'nın elemanlarının bir sınıfından ibaret olup  $B$ 'ye bölüm kümesi denir.  $A$ 'ın her elemanını içinde bulunduğu sınıfa götüren  $f : A \rightarrow B$  dönüşümüne de doğal dönüşüm denir.

### 0.2.8 Dual Kavramı:

Eğer  $\mathcal{S}$  bir small kategori ise, bu taktirde  $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{G}$  fanktörü için kaynak (source) tarafından  $\mathcal{G}$ 'nin  $A$  nesnesinden meydana gelmiş  $(A, \eta)$  ikilisini ve  $\eta : K_A \rightarrow F$  doğal dönüşümünü kastedeceğiz ve bu  $\text{Sin } k$ 'nin bir dual kavramdır.

### 0.2.9 Baz Noktası:

$T$  bir topolojik uzay ve  $x_0$ ,  $T$ 'in bir sabit noktası olsun. Başlangıç ve bitim noktası  $x_0$ 'da olan bütün kapalı eğrilerin kümesini düşünelim.  $x_0$  noktasına bu eğrilerin baz noktası denir. Bu eğrilere de  $x_0$  noktasındaki kapalı eğriler denir.

### 0.2.10 Silindir (Cylinder):

\* bir baz (taban) noktası ile birlikte  $\text{Top}^*$  topolojik uzayların kategorisi olsun ve baz (taban) noktası dönüşümünü korusun.  $Hi_0 = f$  ve  $Hi_1 = g$  ile birlikte bir  $H : I_*X \rightarrow Y$  dönüşümü ile verilen  $\text{Top}^*$ 'de  $H : f \cong g$  bir homotopidir. Burada

$$I_*X = (I \times X) / (I \times *)$$

$I = [0,1]$  birim aralığı vasıtasıyla verilen  $X$  üzerinde (indirgenmiş) silindir ve  $t \in I$  için  $i_t(x) = (t, x)$  ile birlikte  $i_t : X \rightarrow I_*X$  kapsamadır.

### 0.2.11 Silindir (Cylinder) Nesnesi:

Bir  $A$  nesnesinin silindir nesnesi,  
 $\sigma(\partial_0 + \partial_1) = \nabla_A$  ile  $A \nabla A \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} A \times I \xrightarrow{\sigma} A$  dönüşümleri ile birlikte bir  $A \times I$  nesnesidir.

**0.2.12 Yol Nesnesi:**

$B$  için, yol nesnesi  $s$  bir zayıf denklik ve  $(d_0, d_1)$  bir fabreyşin olduğunda  $\Delta_B$ 'nin bir  $B \xrightarrow{s} B^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} B \times B$  çarpanlara ayırması ile birlikte bir  $B^I$  nesnesidir.

**0.2.13 Çarpanlara Ayırma:**

Keyfi bir  $f$  dönüşümü iki yolla çarpanlara ayrılabilir:

(i)  $i$  bir eşfabreyşin ve  $p$  bir aşikar fabreyşin olmak üzere  $f = pi$ .

(ii)  $i$  bir aşikar eşfabreyşin ve  $p$  bir fabreyşin olmak üzere  $f = pi$ .

**0.2.14 Loop (ilmek):**

Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan bir yol veya yol sınıfına loop denir.

**0.2.15 ( $S^n$ )  $n$ -küresi :**

Bu sadece iki bozulmuş simplekslerle birlikte bir simplişil kümedir. Bütün  $i$ 'ler için  $d_i y = s_{n-1} \dots s_0 x$  yüzeleriyle birlikte bir 0-simpleks  $X$  ve bir  $n$ -simpleks  $Y$ 'dir.  $\Delta^0$ 'nin sınırlılığı ile birlikte  $\Delta[n]$  standart simpleksten sağlanır. Yani  $d_0 i_n, \dots, d_n i_n$ ,  $(n-1)$  simpleksinden genelleştirilmiş simplişil alt kümedir.

**0.2.16 Homotopi :**

$F(x, 0) = f_0(x)$ ,  $F(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x \in X$  şartları ile birlikte  $F : X \times I \rightarrow Y$  sürekli dönüşümüne homotopi denir. Burada  $X, Y$  uzaylar olmak üzere  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sürekli dönüşümlerdir ve  $f_0, f_1$ 'e homotopiktir denir.

**0.2.17 Homotopi Grupları:**

$Top^*$ 'daki  $X \rightarrow Y$  dönüşümlerinin homotopi sınıflarının kümesi

$$[X, Y] = Top^*(X, Y) / \cong$$

olsun. Bu küme  $Top^* / \cong$  bölüm kategorisindeki  $\{f\} : X \rightarrow Y$  morfizmlerinin kümesidir.  $0 \in [X, Y]$  olduğunu gösteren  $0 : X \rightarrow * \rightarrow Y$  aşikar dönüşümüne sahibiz.  $X$ 'in konisi

$CX = I_*X / i_1X$  ve  $X$ 'in suspension'ı  $\Sigma X = CX / i_0X$ .  $S^n$   $n$ -küresi  $\Sigma S^n = S^{n+1}$ 'i sağlar ve  $(Y, X)$ ,  $Top^*$ 'daki bir ikili olduğunda;

$$\begin{aligned}\pi_n(X) &= [S^n, X] \\ \pi_{n+1}(Y, X) &= [(CS^n, S^n), (Y, X)]\end{aligned}$$

vasıtasıyla verilen homotopi grubudur.

### 0.2.18 Homotopi Kategorisi:

Nesneleri  $X$  topolojik uzayları, Hom kümeleri  $\text{Hom}(X, Y) = [X, Y]$  ve birleşimleri  $[g] \circ [f] = [g \circ f]$  biçimindeki bölüm kategorisi homotopi kategorisi olarak adlandırılır ve  $hTop$  ile ifade edilir.

### 0.2.19 Eş çekirdek (Cokernel):

$\mathcal{G}$  bir 0 nesnesi ile birlikte bir kategori olsun. Eğer  $f: A \rightarrow B$   $\mathcal{G}$ 'deki bir morfizm ise bu taktirde  $f$ 'in bir çekirdeği olarak  $f$ , bir  $0_{AB}$  eşitleyicisinden bahsedebiliriz.

### 0.2.20 Geri Çekilim:

Eğer herhangi bir  $a \in A$  için  $r(a) = a$  olacak şekilde sürekli bir  $r: X \rightarrow A$  dönüşümü varsa  $X$  uzayının  $A$  alt kümesine  $X$ 'in bir geri çekilimi denir.

### 0.2.21 Bozulmuş Geri Çekilim:

Eğer bir  $r: X \rightarrow A$  geri çekilimi ve  $x \in X$ ,  $a \in A$  ve  $t \in I$  olmak üzere

$$\begin{aligned}f(x, 0) &= x \\ f(x, 1) &= r(x) \\ f(a, t) &= a\end{aligned}$$

olacak şekilde  $f: X \times I \rightarrow X$  homotopisinin  $r: X \rightarrow A$  geri çekilimi varsa  $A \subset X$  kümesine bir bozulmuş geri çekilim denir.

### 0.2.22 Köşegen Dönüşümü, Eş Köşegen Dönüşümü:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\ B & \xrightarrow{\delta} & Y \end{array}$$

Verilen  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümünün  $\Delta f = (id_X, id_X) : X \rightarrow X \times_Y X$  köşegen dönüşümü ve  $\nabla f : id_Y + id_Y : Y \vee_X Y \rightarrow Y$  eş köşegen dönüşümü vardır ve eğer  $Y = e$  (belirtilen sıraya göre  $X = 0$ ) ise  $\Delta_X$  (belirtilen sıraya göre  $\nabla_Y$ ) yazılır.

### 0.2.23 Homotopi Bağıntısı:

Eğer  $0 \rightarrow X$  dönüşümü bir eşfabreyşin ise  $X$  nesnesi eşfabrınt olarak adlandırılır ve eğer  $X \rightarrow e$  dönüşümü bir fabreyşin ise  $X$  nesnesi faybrınt olarak adlandırılır. Böylece eğer;

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f+g} & B \\ id+id \downarrow & \searrow^{i_0+i_1} & \uparrow h \\ A & \xrightarrow{\sigma} & A' \end{array}$$

değişmeli diyagramı mevcut ise  $\vee$  direkt toplama,  $f+g$ ,  $f$  ve  $g$  bileşenleri ile birlikte bir dönüşüm ve  $\sigma$  bir zayıf denklik olmak üzere  $A$  eşfabrınt nesnesinden  $B$  faybrınt nesnesine olan  $f$ ,  $g$  dönüşümlerine homotopiktir denir.

### 0.2.24 Suspension :

$S^n$ ,  $n$ -küresi olmak üzere  $n \geq 0$  için verilmiş olan  $f : S^n \rightarrow S^n$  dönüşümü için birleşmeli olduğu  $g : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$  dönüşümü var ise  $g$ 'ye  $f$ 'nin suspension'ını denir ve  $\Sigma f$  ile gösterilir.

### 0.2.25 Pullback, Pushout:

$\mathcal{C}$  bir kategori ve  $\mathcal{C}$ 'deki morfizmlerin ve nesnelerin diyagramı:

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

şeklinde verilmiş olsun.  $\mathcal{H}$  kategorisinin inşası aşağıdaki gibidir:

$\mathcal{H}$  'nin nesneleri  $[A, B, C, D]$  içindeki değişmeli karelerin şeklini

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

alır ve  $[A, B, C; D]$ 'den  $[A, B, C; X]$ 'e tanımlanan morfizmlerin kümesi için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde  $\mathcal{G}$  'nin  $\gamma: D \rightarrow X$  morfizmlerini alalım;

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \swarrow \gamma & \nearrow \beta \\ & D & \\ \downarrow & \swarrow \alpha & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

$f, g$  için  $\mathcal{H}$

'daki  $A$  bitiş nesnesi pullback olarak adlandırılır. Burada  $f, g$  'nin fibred çarpımıdır.

Pullback'in dualine (Dual kavramına) ise pushout denir.

### 0.2.26 CW-Kompleks

$CW$  -kompleks ilk olarak Whitehead tarafından hücrelerin koleksiyonu gibi verilmiş ve simplişil dönüşümlerle simplişil kompleksler arasındaki dönüşümlere benzetilmiş.

$(X, A)$ , kompakt  $A$  kümesinin bir çifti olsun.  $(X, A)$  'nın bir  $CW$  -kompleksi aşağıdaki özellikleri sağlar:

- 1)  $A \subset X_0$
- 2)  $\forall n \geq 0$  için  $X_n, X_{n-1}$  'in  $n$  -hücreli genişlemesi olacak şekilde  $X$  'de bir  $X_n$  dizisi vardır.

### 0.2.27 Kan Fabreyşin:

$E$  ile  $B$  birer kompleks olmak üzere  $p: E \rightarrow B$  bir simplişil dönüşüm olsun.  $i < j, i \neq k, j \neq k, \partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$  uyarlılık koşulunu doğruluyor olan  $E$  'nin  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$   $n$  -simplekslerinin her  $n+1$  koleksiyonu için ve  $i \neq k, \partial_i y = p(x_i)$  olacak şekilde  $B$  'nin her  $y$  ( $n+1$ ) -simpleksi için  $i \neq k, \partial_i x = x_i$  ve  $p(x) = y$  olacak şekilde



$E$ 'in  $x$   $(n+1)$ -simpleksi var ise  $p$ 'e Kan fabreyşin denir.  $E$  total kompleks,  $B$  baz (taban) kompleks olarak adlandırılır ve  $(E, p, B)$ 'e fibre uzayı denir. Eğer  $\phi$ ,  $B$ 'nin köşesi tarafından üretilmiş kompleksi gösteriyor ise,  $F = p^{-1}(\phi)$   $\phi$  üzerindeki fibre olarak adlandırılır. Eğer  $\psi$ ,  $F$ 'nin köşesi tarafından üretilmiş kompleks ise, bu taktirde

$$(F, \psi) \xrightarrow{i} (E, \psi) \xrightarrow{p} (B, \phi)$$

dizisi fibre dizisi olarak adlandırılır.

### 0.2.28 Geometrik $n$ -Simpleks, Geometrik $0$ -Simpleks:

Bir geometrik  $n$ -simpleksi,  $\sigma^n$  ( $n > 0$ )  $(n-1)$  lineer bağımsız  $P_0, P_1, \dots, P_n$  noktaları ile

$x_i = \sum_{\alpha=0}^n t_\alpha P_{\alpha i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) şeklinde tanımlanan  $X = (x_i)$  noktalarının bir kümesidir. Burada

$\sum_{\alpha=0}^n t_\alpha = 1$  ve  $0 \leq t_\alpha \leq 1$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, n$ ). Böylece bir geometrik  $n$ -simpleks  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ile

gerilen lineer alt uzayda, bir dışbükey lineer alt uzaydır. Bir geometrik  $0$ -simpleks  $\sigma^0$ , basit bir noktadır. Bu  $n$  sayısına simpleksin boyutu denir.

### 0.2.28 Minimal Fabreyşin :

Eğer  $i \neq k$ ,  $p(x) = p(y)$  ve  $\partial_i x = \partial_i y$ ,  $\partial_k x = \partial_k y$  belirtiyor ise  $p: E \rightarrow B$  Kan fabreyşin minimal fabreyşin olarak adlandırılır. Eğer  $p$  bir minimal fabreyşin ve  $B$  bir minimal kompleks ise, bu taktirde  $(E, p, B)$ 'e minimal fibre uzayı denir.

### 0.2.29 Kan Kompleksi:

$E$  bir kompleks,  $\phi$  nokta tarafından üretilmiş kompleks olsun. Bu taktirde yegane tanımlanabilen  $E \rightarrow \phi$  simlişil dönüşümü bir Kan fabreyşin ise Kan kompleksi olarak adlandırılır.

### 0.2.30 Minimal Kompleksi:

Eğer  $i \neq k$ ,  $\partial_i x = \partial_i y$ ,  $\partial_k x = \partial_k y$  belirtiyor ise  $K$  kompleksi minimal kompleks olarak adlandırılır.

**0.2.31 Cat küme:**

Bir cat-küme  $M$ , her bir  $A$  nesnesi için, bir  $A^*$  nesnesi ve bir  $\eta_A : I \rightarrow A \otimes A^*$  oku mevcut olacak şekilde bir  $M = (M, \otimes, I, \dots)$  monodial groupoiddir

**0.2.32 Cat kategorisi:**

Aşağıdaki önerme ile verilen kategoriye küçük kategorilerin kategorisi denir ve cat ile gösterilir.

**Önerme:**  $\mathcal{C}$  bütün küçük kategorilerin sınıfı,  $\mathcal{M}$  küçük kategoriler arasındaki bütün fanktörlerin sınıfı, dom ve cod her bir  $F \in \mathcal{M}_0$ 'ı sırasıyla tanım kümesine (domain) ve eş tanım kümesine (codomain) atayan fonksiyonlar olmak üzere ve  $\mathcal{M}$ 'deki fanktörlerin alışılmış bileşkesi olan bir kategori  $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$  mevcuttur.

**0.2.33 Lemma beş:**

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 \end{array}$$

Tam satırlarla toplamsal Abelyan grupların değişmeli diyagramı verildiğinde, aşağıdaki şartları sağlayan bir diyagram lemmasına "lemma beş" denir:

- 1) Eğer  $f_0$  örten,  $f_1$  ve  $f_3$  birebir ise, bu takdirde  $f_2$  birebirdir.
- 2) Eğer  $f_4$  birebir,  $f_1$  ve  $f_3$  örten ise, bu takdirde  $f_2$  örtendir.

**0.2.34 Postnikov sistemi:**

Eilenberg-Mac Lane uzaylarının tekrarlanmış bir fabreyşınıdır. Her topolojik uzay bu homotopi tipine sahiptir.

**0.2.35 Tanım:**

Bir model kategorisi ile anlatmak istediğimiz aşağıdaki aksiyomları sağlayan fabreyşınlar, eşfabreyşınlar ve zayıf denklikler olarak adlandırılan  $\mathcal{C}$  deki dönüşümlerin üç sınıfı ile birlikte bir kategori olduğudur:

**M0:**  $\mathcal{C}$ , sonlu izdüşümler ve tümevarım limitler altında kapalıdır.

**M1:**  $i$  bir fabreyşın,  $p$  bir fabreyşın ve  $i$  veya  $p$ 'nin birisi bir zayıf denklik olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \dashrightarrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

bir kesikli ok diyagramı verildiğinde noktalandırılmış ok mevcuttur.

**M2:** Herhangi bir  $f$  dönüşümü,  $i$  bir eşfabreyşin ve zayıf denklik ve  $p$  bir fabreyşin olmak üzere  $f = pi$  şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Ayrıca  $i$  bir eşfabreyşin,  $p$  fabreyşin ve zayıf denklik olmak üzere  $f = pi$ .

**M3:** Fabreyşinler bileşke baz değişimi altında kararlıdır ve her hangi bir izomorfizim bir fabreyşindir. Eşfabreyşinler bileşke, eş-baz değişimi altında kararlıdır ve herhangi bir izomorfizim bir eşfabreyşindir.

**M4:** Bir fabreyşin ve bir zayıf denklik olan bir dönüşümün baz genişletmesi bir zayıf denklidir. Bir eşfabreyşin ve bir zayıf denklik olan bir dönüşümün eş-baz genişletmesi bir zayıf denklidir.

**M5:**  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$   $\mathcal{G}$  'de dönüşümler olsun. Bu takdirde eğer  $f$ ,  $g$  ve  $gf$  dönüşümlerinin ikisi zayıf denklik ise böylece üçüncüsü de zayıf denklidir. Herhangi bir izomorfizim bir zayıf denklidir.

### 0.2.36 Tanım:

Bir  $\mathcal{G}$  model kategorisine aşağıdaki aksiyomu sağlıyorsa kapalıdır denir:

**M6:**  $\mathcal{G}$  'deki dönüşümlerin aşağıdaki sınıflarının her hangi ikisi-fabreyşinler, eşfabreyşinler ve zayıf denkliler-aşağıdaki kurallar ile üçüncü elde edilir:

(a) Bir dönüşüm bir fabreyşindir  $\Leftrightarrow$  bu dönüşüm, her ikisi eşfabreyşinler ve zayıf denkliler olan dönüşümlere göre sağ lifting özelliğine sahiptir.

(b) Bir dönüşüm bir eşfabreyşindir  $\Leftrightarrow$  bu dönüşüm, her ikisi fabreyşinler ve zayıf denkliler olan dönüşümlere göre sol lifting özelliğine sahiptir.

(c) Bir  $f$  dönüşümü zayıf denklidir  $\Leftrightarrow \nu$  fabreyşinlerin sınıfına göre sol lifting özelliğine ve  $u$  da eşfabreyşinlerin sınıfına göre sağ lifting özelliğine sahip olmak üzere  $f = uv$ .

## 0.3 Kapalı Model Kategorileri ve Kümeler Üzerinde Serre Teorisi

Bu bölümün amacı, [6]'da Teorem I'in kategorilerinin denkliğini homotopi teorilerinin bir denkliğine geliştirmektir. [5]'de sunulmuş homotopi teorisinin aksiyomlaştırılmasını kullanacağız. [5]'nin temel tanımlarının ve teoremlerinin bir görünüşü 0.3.1'de verilmiştir. Teorem 0.3.1.6'nın ispatı için [6]'ya bakınız. Bazı uygulamalar [6]'da sunulmuştur. Aksi belirtilmedikçe bütün diyagramlar değişmelidir.

### 0.3.1 Kapalı Model Kategorileri ve Teorem 0.3.1.6'nın İfadesi:

[5]'deki Bölüm 1'in teoremlerini ve tanımlarını tekrar inceleyerek başlayacağız.

**Tanım 0.3.1.1:** Bir kapalı model kategorisi, aşağıdaki CM1-CM5 aksiyomlarını sağlayan eşfabreyşinler, fabreyşinler ve zayıf denklikler olarak adlandırılmış dönüşümlerin üç ayrık ailesi donatılmış bir  $\mathcal{C}$  kategorisidir.

**CM1.**  $\mathcal{C}$  sonsuz izdüşümler ve tümevarım limitler altında kapalıdır.

**CM2.**  $fg$  tanımlanmış olmak üzere  $f$  ve  $g$  dönüşümler ise, bu takdirde eğer  $f$ ,  $g$  ve  $fg$ 'lerin her ikisi denklik iseler, böylece üçüncüsü de zayıf denkliktir.

$\mathcal{C}$ 'deki dönüşümlerin, morfizimler için değişmeli karelere sahip bir  $\mathcal{UC}$  kategorisinin nesnelerini ifade ettiğini tekrarlayalım.  $\psi\varphi = id_f$  olacak şekilde  $\mathcal{UC}$ 'de  $\varphi: f \rightarrow g$  ve  $\psi: g \rightarrow f$  morfizimleri mevcut ise,  $\mathcal{C}$ 'de bir  $f$  dönüşümünün  $g$ 'nin bir geri çekilmesi olduğunu söyleriz.

**CM3.** Eğer  $f$ ,  $g$ 'nin bir geri çekilmesi ve  $g$  bir fabreyşin, eşfabreyşin, veya zayıf denklik ise, böylece  $f$  de fabreyşin, eşfabreyşin veya zayıf denkliktir.

Hem bir fabreyşin (sırasıyla eşfabreyşin) hem de zayıf denklik olan dönüşüme, bir aşikar fabreyşin (sırasıyla aşikar eşfabreyşin) denir.

**CM4.** (Lifting) Aşağıdaki diyagram verilsin

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(\*)

aşağıdaki durumların her birinde noktalandırılmış ok mevcuttur.

(i)  $i$  bir eşfabreyşin ve  $p$  bir aşikar fabreyşindir,

(ii)  $i$  bir aşikar eşfabreyşin ve  $p$  bir fabreyşindir.

**CM5.** (Çarpanlar). Herhangi bir  $f$  dönüşümü iki yolla çarpanlara bölünebilir.

(i)  $f = pi$  burada  $i$  bir eşfabreyşin ve  $p$  bir aşikar fabreyşindir.

(ii)  $f = pi$  burada  $i$  bir aşikar eşfabreyşin ve  $p$  bir fabreyşindir.

Bir kategoride bir  $i: A \rightarrow B$  dönüşümünün, diğer bir  $p: X \rightarrow Y$  dönüşümüne göre (LLP) sol kaldırma özelliğine sahip olduğunu söyleriz ve (\*) formunun herhangi bir

diyagramında noktalandırılmış ok mevcut ise,  $p$ 'nin  $i$ 'ye göre (RLP) sağ kaldırma özelliğine sahip olduğu söylenir.

Şimdi,  $\mathcal{G}$ 'nin bir kapalı model kategorisi olduğunu kabul edelim.

**Önerme 0.3.1.2:** Eşfabreyşinler (sırasıyla aşikar eşfabreyşinler) tam olarak bunlar tüm aşikar fabreyşinlere (sırasıyla aşikar fabreyşinlere)'a göre LLP'ye sahip olan dönüşümlerdir. Fabreyşinler (sırasıyla aşikar fabreyşinler)'a göre RLP'ye sahip olan dönüşümlerdir.

**İSPAT:** CM4, bir eşfabreyşinin herhangi bir aşikar fabreyşine göre LLP'ye sahip olduğunu ifade eder. Sonuç olarak,  $f$  tüm aşikar fabreyşinlere göre RLP'ye sahip ve CM5 (i)'deki gibi  $f = pi$  ise, bu takdirde  $f$ ,  $p$ 'ye göre LLP'ye sahiptir, böylece  $f$ ,  $i$ 'nin bir geri çekilmesidir ve şu halde  $f$ , CM3 ile bir eşfabreyşindir. Diğer olasılıklar benzerdir.  $\square$

**Sonuç 0.3.1.3:** Fabreyşinlerin sınıfı (sırasıyla aşikar fabreyşinler) bileşke ve baz değişimi altında kapalıdır ve bütün izomorfizimleri içerir. Eşfabreyşinlerin sınıfı (sırasıyla aşikar eşfabreyşinler) bileşke ve eşbaz değişimi altında kapalıdır ve bütün izomorfizimleri içerir.

$\mathcal{G}$ 'nin bir  $X$  nesnesi,  $\varphi \rightarrow X$  ( $\varphi = \mathcal{G}$ 'nin başlangıç nesnesi CM1 ile mevcut olduğunda) dönüşümü eşfabreyşin ve fabreyşin,  $X \rightarrow e$  ( $e = \text{son nesne}$ ) de bir fabreyşin ise eşfabreyşin olarak adlandırılır. Eğer  $A \vee A$ ,  $in_i : A \rightarrow A \vee A$ ,  $i = 1, 2$ ,  $A$ 'nın iki kopyasının direk toplamı ise,  $\partial_i : A \rightarrow A_I$  dönüşümü ile birlikte bir  $A_I$  nesnesi  $i$  olan  $A$  için bir silindir nesnesi tanımlarız ve  $\sigma : A_I \rightarrow A$  öyle ki  $\partial_0 + \partial_1 : A \vee A \rightarrow A_I$  bir eşfabreyşin,  $\sigma$  bir zayıf denkliktir ve  $i = 0, 1$ ,  $\sigma \partial_i = id_A$ . Burada  $\partial_0 + \partial_1$ ,  $(\partial_0 + \partial_1)in_i = \partial_{i-1}$  ile bir tek dönüşüm belirtir. Eğer  $f, g \in \text{Hom}(A, B)$  ise,  $f$ 'den  $g$ 'ye bir sol homotopi bir  $h : A_I \rightarrow B$  dönüşümü olarak tanımlanmıştır, burada  $h\partial_0 = f$  ve  $h\partial_1 = g$  olmak üzere  $A_I$ ,  $A$  için bir silindir nesnesidir. Eğer böyle bir sol homotopi mevcutsa  $f$  ve  $g$ 'ye sol homotopiktir denir.  $A$  eşfabrybrint olmak üzere "sol homotopik"  $\text{Hom}(A, B)$  üzerinde bir denklik bağıntısıdır [5]. Yol nesnelerinin notasyonları ve sağ homotopi bir dual manner'da tanımlanmıştır. Eğer  $A$  eşfabreyşin ve  $B$  fabreyşin ise, bu takdirde  $\text{Hom}(A, B)$  üzerinde sol ve sağ homotopi bağıntıları çakışıktır ve  $[A, B]$  ile denklik sınıflarının kümesini ifade ederiz.  $\pi_{\mathcal{G}_{cf}}$ ,  $\mathcal{G}$ 'nin nesnelerinin her ikisi de,  $\text{Hom}_{\pi_{cf}}(A, B) = [A, B]$  ve  $\mathcal{G}$ 'den doğurulmuş bileşke ile faybrint ve eşfabrybrint nesne olan kategoriyi ifade eder.

Bir kapalı model kategorisi olan  $\mathcal{C}$ 'nin  $\text{Ho } \mathcal{C}$  homotopi kategorisi, zayıf denklik kategorilerine göre  $\mathcal{C}$ 'nin yerelleştirmesi ile tanımlanır.  $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$  fanktörünü doğurur ve aşağıdaki fanktör bir  $\bar{\gamma} : \pi_{\mathcal{C}_{cf}} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$  fanktörünü doğurur ve aşağıdaki sonucu elde ederiz [5].

**Teorem 0.3.1.4:** (a)  $\text{Ho } \mathcal{C}$  mevcuttur.

(b)  $\bar{\gamma} : \pi_{\mathcal{C}_{cf}} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$  kategorilerin bir denkleğidir.

(c) Eğer  $A$  eşfaybrint ve  $B$  faybrint ise, bu takdirde

$$\gamma : [A, B] \xrightarrow{\sim} \text{Ho}_{\text{Ho } \mathcal{C}}(\gamma A, \gamma B).$$

(d)  $\gamma(1)$  bir izomorfizimdir ancak ve ancak  $f$  bir zayıf denklidir.

Eğer  $\mathcal{C}$  kapalı model kategorisi, ilk nesne  $\simeq$  son nesne'yi gösteriyorsa bu takdirde [5]'de gösterilmiş,  $\text{Ho } \mathcal{C}$  kategorisinde loop ve suspension fanktörlerini, fabreyşin ve eşfabreyşin dizilerinin ailelerini inşa ederiz. Homotopi kategorisi üzerinde daha çok yapı  $\mathcal{C}$ 'nin homotopi teorisinin bir kısmıdır. Gelecek çalışmanın amacı olarak  $\mathcal{C}$ 'nin homotopi teorisini; loop ve suspension fanktörlerinin, fabreyşin ve eşfabreyşin dizilerinin ekstra yapısı ile birlikte  $\text{Ho } \mathcal{C}$  kategorisi olarak tanımlayacağız. Bu takdirde homotopi teorilerinin bir denkleği için aşağıdaki kritere sahibiz.

**Teorem 0.3.1.5:**  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  kapalı model kategorileri olsun ve

(i)  $F$ ,  $\mathcal{C}_1$ 'deki eşfabreyşinleri  $\mathcal{C}_2$ 'deki eşfabreyşinlere ve  $M$   $\mathcal{C}_2$ 'deki fabreyşinleri  $\mathcal{C}_1$ 'deki fabreyşinlere dönüştürür.

(ii) Eğer  $f : A \rightarrow B$   $\mathcal{C}_1$ 'de bir zayıf denklik,  $A$  ve  $B$  eşfaybrint ise, bu takdirde  $F(f)$   $\mathcal{C}_2$ 'de bir zayıf denklidir.

(iii) Eğer  $g : X \rightarrow Y$   $\mathcal{C}_2$ 'de bir zayıf denklik ise, bu takdirde  $M(g)$   $\mathcal{C}_1$ 'de bir zayıf denklidir.

(iv) Eğer  $A$   $\mathcal{C}_1$ 'de bir eşfaybrint nesnesi ve  $X$   $\mathcal{C}_2$ 'de bir faybrint nesnesi ise, bu takdirde bir  $f : A \rightarrow MX$  dönüşümünün bir zayıf denklik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşüme karşılık gelen  $f^b : FA \rightarrow X$  dönüşümünün bir zayıf denklik olmasıdır, olacak şekilde

$$\mathcal{C}_1 \xrightleftharpoons[F]{F} \mathcal{C}_2$$

adjoint fanktörlerin bir çifti olsun (üst ok daima sol adjoint fanktörüdür.).

Bu takdirde türetilmiş fanktörler [6]

$$\text{Ho } \mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{LF} \\ \xleftarrow{RG} \end{array} \text{Ho } \mathcal{G}_2$$

kategorilerin denklikleridir. Üstelik eğer  $\mathcal{G}_1$  ve  $\mathcal{G}_2$  belirtilmiş iseler, bu takdirde bu denklik, loop ve suspension fanktörleri, fabreyşın ve eşfabreyşın dizilerin ailelerini korur.

**Teorem 0.3.1.6:**  $\mathcal{S}_2$ ,  $(SGP)_1$ ,  $(SCHA)_1$ ,  $(SLA)_1$ ,  $(DGL)_1$  ve  $(DGC)_2$  kategorilerinin her biri üzerinde kapalı model kategori yapılarını şöyle tanımlamak mümkündür:

(a) Zayıf denkliklerin aileleri tam olarak [6]'da tanımlandığı gibidir.

(b) [6]'da Kısım I, §2, Şekil 1'deki adjoint fanktörler 0.3.1.4 şartlarını sağlar. Bu nedenle  $\text{Ho}_Q \mathcal{S}_2$ 'nin sağındaki Şekil 2'nin fanktörleri homotopi teorilerinin denklikleridir.

Bu [6]'da ispatlanacaktır. Kategorilerin her biri için eşfabreyşınların tam tanımları, vs. ele alınacağı gibi verilecektir; burada bunların doğal ifadeler olduğuna dikkat etmeliyiz.

Sonlu limitler altında kapalı olmayan aşıkâr sebep için basit-bağlantılı uzayların  $\mathcal{T}_2$  kategorisinin aksiyomları sağlamaz. Bununla beraber uygun tanımlar ile geri kalan aksiyomlar sağlanır. Bu [6]'da tartışılacaktır.

### 0.3.2 Simplişıl Kümeler için Serre Teorisi

$\mathcal{S}$ ,  $Z$ 'de bir çarpımsal sistem olsun. Eğer  $A \rightarrow \mathcal{S}^{-1}A$  kanonik dönüşümü örten, sıfır, birebir veya birebir-örten ise, sırasıyla  $A$  abelyan grubuna  $\mathcal{S}$ -bölünebilir,  $\mathcal{S}$ -burulma,  $\mathcal{S}$ -serbest burulma veya  $\mathcal{S}$ -tek olarak bölünebilir denir. Bu bölümde;  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{S}$ -burulma abelyan kümelerin bir sınıfı olmak üzere, birleştirilmiş homotopi teorisi Serre mod  $\mathcal{G}$  teorisi [16] olacak olan simplişıl kümeleri içeren bir kapalı model kategorisi inşa edeceğiz.

$\mathcal{S}$ , simplişıl kümelerin kategorisi olsun. Eşfabreyşınları birebir (her bir boyutta) olan dönüşümler; fabreyşınları Kan anlamında fiber dönüşümler olan ve geometrik gerçekleştirme fanktörü ile zayıf denklikleri homotopi denkliklerine taşınan dönüşümler olmak üzere bu bir kapalı model kategorisidir [5]. Benzer yapı, simplişıl kümelerde ifade edilen  $\mathcal{S}_0$  kategorisi için de doğrudur. Eğer  $X$  bir belirtilen simplişıl küme ise, bunun  $q$ . homotopi  $\pi_q X$  kümesini (eğer  $q = 0$  ise) onun geometrik gerçekleştirmesinin bir  $q$ . homotopi grubu olduğunu veya eşit olarak  $Y$  bir Kan kompleks ve  $X \rightarrow Y$  bir zayıf denklik var olmak üzere Kan homotopi  $\pi_q Y$  grubunu

tanımlarız. Simplişil kümeleri [12], [17] ve uzayların homotopi teorilerinin denkliklerini kullanarak, Serre'nin aşağıdaki sonucuna sahibiz.

**Önerme 0.3.2.1:**  $f : X \rightarrow Y$ , 1-bağlantılı belirtilen simplişil kümenin bir dönüşümü olsun. Aşağıdakiler denktir:

$$(i) \mathcal{S}^{-1}\pi_*f : \mathcal{S}^{-1}\pi_*X \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^{-1}\pi_*Y$$

$$(ii) \mathcal{S}^{-1}H_*f : \mathcal{S}^{-1}H_*X \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^{-1}H_*Y$$

(iii) Bütün  $\mathcal{S}$ -tek olarak bölünebilir  $A$  abelyan kümeleri için

$$f^* : H^*(Y, A) \xrightarrow{\sim} H^*(X, A).$$

Bu şartları sağlayan bir dönüşüme bir  $\mathcal{S}$ -denkliği diyeceğiz.  $r \geq 1$  tam sayı olsun. Bir  $X$  simplişil kümesine, eğer onun  $(r-1)$ -skeletonu bir noktaya indirgeniyorsa  $r$ -indirgenmiş adlandıracağız.  $r$ -indirgenmiş simplişil kümeleri içeren  $\mathcal{S}$ 'in full alt kategorisi  $\mathcal{S}_r$  olsun.

$r$  ve  $\mathcal{S}$ 'in verildiğini ve eğer  $r=1$  ise  $\mathcal{S} = \{1\}$  olduğunu kabul edelim.  $\mathcal{S}(r, \mathcal{S})$ , bir kapalı model kategorisi için aşağıdakini verelim:  $\mathcal{S}(r, \mathcal{S})$ ,  $\mathcal{S}_r$  kategorisidir ve bunun zayıf denklikleri ve eşfabreyşinleri,  $\mathcal{S}$ -denkliğidir ve  $\mathcal{S}_r$ 'de birebir  $\mathcal{S}$ -denkliklerine göre RLP ile birlikte  $\mathcal{S}_r$ 'deki bu dönüşümlerdir.

**Teorem 0.3.2.2:**  $\mathcal{S}(r, \mathcal{S})$  bir kapalı model kategorisidir.

**İSPAT:** CM1, CM2, CM3 ve CM4 (ii) aksiyomları açıktır. CM5 (i)'yi açıklamak için;  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\mathcal{S}_r$ 'de bir dönüşüm ve  $i$  bir eşfabreyşin ve  $p$  bir aşikar fabreyşin olmak üzere  $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y$ ,  $\mathcal{S}$ 'de  $f$ 'in bir çarpanı olsun.  $x_0$   $X$ 'in baz noktası olmak üzere  $Z$ 'ye  $i(x_0)$  baz noktası verilsin. Baz noktasında  $(r-1)$ -skeletonuyla  $Z$ 'nin bu simplişillerini içeren  $Z$ 'nin Eilenberg alt kompleksi  $E_r Z$  olsun.  $X \xrightarrow{i'} E_r Z \xrightarrow{p'} Y$ ,  $i$  ve  $p$  tarafından ifade edilen dönüşüm olsun.  $i'$ 'nin  $\mathcal{S}(r, \mathcal{S})$ 'de bir eşfabreyşin olduğu açıktır. Ayrıca  $p'$ 'nin  $q \geq 0$  için  $\Delta(q)^\bullet \hookrightarrow \Delta(q)$ 'ya göre RLP'ye sahip olduğu da kolayca görülür, böylece  $\mathcal{S}$ 'de aşikar fabreyşin olan  $\mathcal{S}_r$ 'de dönüşümdür ve  $\mathcal{S}(r, \mathcal{S})$  de bir fortioridir. Böylece bu da CM5 (i)'yi ispatlar. Eğer  $f$ ,  $\mathcal{S}(r, \mathcal{S})$ 'de bir aşikar fabreyşin ise, bu takdirde CM2'yi  $f = p'i'$ 'ne



uygulayarak  $i'$ 'nin bir  $\mathcal{S}$ -denkliği olduğu dikkat edilirse  $i' f$ 'e göre LLP' ye sahip,  $f p'$ 'nin bir geri çekilimidir ve böylece  $f$   $\mathcal{S}$ 'de aşikar bir fabreyşindir. Bundan dolayı  $f$  eşfabreyşinlara göre RLP'ye sahiptir ve bu da CM4 (i)'dir. Böylece CM4 ve CM5 (i)'yi ispatlamış olduk.  $\square$

**Önerme 0.3.2.3:**  $\mathcal{S}(r, \mathcal{S})$ 'de aşikar fabreyşinlar,  $\mathcal{S}$ 'deki aşikar fabreyşinlar olan  $\mathcal{S}_r$ 'de tam olarak bu dönüşümlerdir.

CM5(ii)'nin ispatı, birincisi  $S^{-1}\pi_r f$ 'in örten olduğu durumu belirten adım olan iki adımdan oluşur. Bu referans [3]'deki minimal fabreyşin teorisini kullanır.

**Önerme 0.3.2.4:** Aşağıdaki şartlar  $\mathcal{S}_r$ 'de  $f$  dönüşümü için denktir.

(i)  $f$ ,  $\mathcal{S}$ 'de bir fabreyşindir ve  $S^{-1}\pi_r f$  örtendir.

(ii)  $f$ ,  $\mathcal{S}$ 'de bir fabreyşindir ve  $\pi_* \text{Çek } f$   $\mathcal{S}$ -tek olarak-bölünebilirdir (Çek  $f = f$ 'in fiberi).

**İSPAT:** (ii)  $\Rightarrow$  (i). İlk önce  $\pi_r f$ 'in, Çek  $f$ 'in  $r$ -indirgenmiş olması gerektiğinden ve  $f$  için tam homotopi dizisinden dolayı örten olduğuna dikkat etmeliyiz. Eğer  $S = \{1\}$  ise, sonuç açıktır böylece  $r \geq 2$  kabul edebiliriz. Minimal fabreyşin teorisinden,  $p: X \rightarrow Y$  bir minimal fabreyşin ve  $q$  bir aşikar fabreyşin olmak üzere  $f$ ,  $f = pq$  şeklinde çarpanlara ayrılabilir.  $p_n A = \pi_n \text{Çek } p = \pi_n \text{Çek } f$  için  $K(A, n)$  fiber ile birlikte bir minimal fabreyşin olmak üzere  $p$  sırasıyla

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{r-1} = Y$$

$$X = \lim_{\leftarrow} X_n$$

Postnikov sisteminin içinde dönüşerek çarpanlara ayrılabilir.

$\mathcal{S}$  üzerinde fanktörlerin aşağıdaki morfizmini temsil eden fabreyşin

$$\varphi(A, n): L(A, n) \longrightarrow K(A, n+1)$$

olsun:

$$\begin{array}{ccc}
C^n(X, A) = \{A \text{ değerli } \text{ \u00fczerindeki normalle\u015ftirilmi\u015f } n\text{-e\u015f zincirler} \} & & \\
\downarrow \delta & & \downarrow \text{e\u015fmir} \\
Z^{n+1}(X, A) = \{A \text{ değerli } \text{ \u00fczerindeki normalle\u015ftirilmi\u015f } n\text{-e\u015f \u00e7emberler} \} & & 
\end{array}$$

Bu takdirde e\u011fer  $Z$  1-ba\u011flantılı ise, son izomorfizim bir  $u$  d\u00f6n\u00fc\u015fm\u00fcn\u00fc  $u^* \varphi(A, n)$  do\u011frulan fabrey\u015fina ta\u015fıyan bir d\u00f6n\u00fc\u015f\u00m verilmek \u00fczere

$$\begin{aligned}
H^n(Z, A) &\simeq [Z, K(A, n+1)] \\
&\xrightarrow{\sim} \{Z \text{ bazlı minimal fabrey\u015finlerin izomorfizim sınıfları ve } K(A, n) \text{ fiber} \}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

sahibiz.  $r \geq 2$  oldu\u011fundan her bir  $X_n$   $r$ -indirgenmi\u015ftir, b\u00f6ylece 1-ba\u011flantılıdır.  $f$ ,  $\mathcal{S}(r, S)$ 'de a\u015fikar fabrey\u015finlara g\u00f6re RLP'ye sahiptir. Bu nedenle  $A$ ,  $S$ -tek olarak b\u00f6l\u00fcnebilir olmak \u00fczere  $p_n$ ,  $\varphi(A, n)$ 'nin RLP'ye sahip oldu\u011funu g\u00f6stermek yeterlidir. Fakat e\u011fer  $h: U \rightarrow V$  birebir bir  $\mathcal{S}$ -denkli\u011fi ise,  $h^*: C^*(V, A) \rightarrow C^*(U, A)$  e\u015f zincir komplekslerin \u00f6rten bir zayıf denkli\u011fidir, b\u00f6ylece

$$C^n(V, A) \xrightarrow{(h^*, \delta)} C^n(U, A) \times_{Z^n(U, A)} Z^{n+1}(V, A)$$

\u00f6rtendir. Bundan dolayı  $\varphi(A, n)$ ,  $\varphi$ 'nin tanımından  $h$ 'a g\u00f6re RLP'ye sahiptir. Bu (i)'yi ispatlar. 0.3.2.4'\u00fcn ispatını bitirmek i\u00e7in Lemma 0.3.2.5'e ihtiyacımız vardır:

**Lemma 0.3.2.5:** E\u011fer  $f$ ,  $S^{-1}\pi_r f$  \u00f6rten olacak \u015fekilde  $\mathcal{S}_r$ 'de bir d\u00f6n\u00fc\u015f\u00m ise, bu takdirde  $i$   $\mathcal{S}(r, S)$ 'de bir a\u015fikar e\u015ffabrey\u015fin ve  $p$ , 0.3.2.4'\u00fcn (ii) \u015fikkını sa\u011flamak \u00fczere  $f = pi$ 'dir.

**Lemma' nın İspatı:**  $i$  bir  $\mathcal{S}$ -denkli\u011fi ve  $p$ , (ii)'yi sa\u011flamak \u00fczere  $\mathcal{S}_r$ 'de  $f = pi$  \u00e7arpımını yazmak yeterlidir. Bu takdirde e\u011fer CM5 (i) kullanarak  $i = qj$  yazarsak,  $j$  CM2'den  $\mathcal{S}(r, S)$  de a\u015fikar bir e\u015ffabrey\u015findir ve b\u00f6ylece  $f = (pq)j$  lemma i\u00e7in istenilen \u00e7arpımdır.

$i$  bir zayıf denklik ve  $p: X \rightarrow Y$ ,  $F$  fiber ile birlikte bir minimal fabrey\u015fin olmak \u00fczere  $\mathcal{S}$ 'de  $f = pi$  \u00e7arpımı yazılır. E\u011fer  $S = \{1\}$  ise, bu takdirde  $\pi_r p \simeq \pi_r f$  \u00f6rtendir bu y\u00fczden  $q < r$  i\u00e7in  $\pi_q F = 0$ 'dir.  $p$  minimal oldu\u011fu gibi  $F$   $r$ -indirgenmi\u015f ve b\u00f6ylece  $Y$  ve  $F$ 'nin

çevrilmiş bir kartezyen çarpımı olan  $X$ 'de  $r$ -indirgenmiştir. Bu takdirde  $i$  bir zayıf denkliktir ve  $p$ , (ii)'yi sağlamak üzere  $f = pi$   $\mathcal{S}_r$ 'de  $f$ 'nin bir çarpımıdır. Eğer  $S \neq \{1\}$  ise, bu takdirde  $r \geq 2$ 'dir ve birinci satır  $p$ 'nin Postnikov sistemi,  $j_n$  bir  $S$ -denklik ve  $K(S^{-1}\pi_n F, n)$  fiberi ile birlikte  $q_n$  bir minimal fabreyşin olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{p_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{r-1} & \longrightarrow & Y \\ & \downarrow j_n & & \downarrow j_{n-1} & & & & \downarrow j_{r-1} & & \parallel \\ \longrightarrow & W_n & \xrightarrow{q_n} & W_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W_{r-1} & \xlongequal{\quad} & Y \end{array} \quad (2.2)$$

diyagramı tümevarımla inşa ederiz.  $n = r - 1$  ve  $q \geq r$  için,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_r X & \xrightarrow{p_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{r-1} & \longrightarrow & Y \\ 0 & \longrightarrow & \pi_{r-1} X_{r-1} & \xrightarrow{\pi_r p_{r-1}} & \pi_r Y & \longrightarrow & \pi_{r-1} F & \longrightarrow & 0 \\ & & \pi_q X_{r-1} & \xrightarrow{\pi_q p_{r-1}} & \pi_q Y & & & & & & \end{array}$$

tam dizisine sahibiz. Hipotezden  $S^{-1}\pi_r p \simeq S^{-1}f$  örtendir bu yüzden  $p_{r-1}$  bir  $S$ -denkliğidir ve  $W_{r-1} = Y$ ,  $q_{r-1} = id_r$  ve  $j_{r-1} = p_{r-1}$  alabiliriz.  $W_{n-1}$ 'in elde edildiği kabul edilerek  $A = \pi_n F$  ve  $p_n$  için  $u: X_{n-1} \rightarrow K(A, n+1)$  bir sınıflandırma dönüşümü (yani,  $p_n \simeq u^* \varphi(A, n)$ ) olsun.  $\rho: K(A, n+1) \rightarrow K(S^{-1}A, n+1)$ ,  $A \rightarrow S^{-1}A$  katsayı homeomorfizmi ile üretilmiş olsun. Tümevarım hipotezinden  $j_{n-1}$  bir  $S$ -denkliğidir böylece  $Z = W_{n-1}$  ile (2.1)'den ve  $A$ ,  $S^{-1}A$  ile yer değiştirirse  $v j_{n-1}$ ,  $\rho u$ 'ya homotopik olacak şekilde bir  $v: W_{n-1} \rightarrow K(S^{-1}A, n+1)$  dönüşümü vardır.  $q_n: W_n \rightarrow K(S^{-1}A, n+1)$ ,  $v^* \varphi(S^{-1}A, n)$  pull-back olsun. Bu takdirde  $j_{n-1}^* q_n = (v j_{n-1})^* \varphi(S^{-1}A, n) \simeq (\rho u)^* \varphi(S^{-1}A, n)$ , böylece

$$\begin{array}{ccc} K(A, n) & \xrightarrow{\rho} & K(S^{-1}A, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \xrightarrow{j_n} & W_n \\ \downarrow p_n & & \downarrow q_n \\ X_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & W_{n-1} \end{array}$$

fabreyşınların bir  $j_n$  dönüşümü vardır. Homotopi tam dizisi ve beş lemma, (2.2)'nin üretilen yapısını tamamlayan  $j_n$ 'in bir  $S$ -denkliği olduğunu gösterir.

$W = \lim_{\leftarrow} W_n$ ,  $j = \lim_{\leftarrow} j_n : X \rightarrow W$  ve  $q = \lim_{\leftarrow} q_{r-1} \dots q_n : W \rightarrow Y$  olsun.  $q$ 'nun (ii)'yi sağlayan  $\mathcal{S}_r$ 'de bir dönüşüm olduğu açıktır.  $j$ , baz ve fiberler üzerinde  $S$ -denkliklerini üreten  $p$  faybreyşınından  $q$  faybreyşınına bir dönüşümdür. Böylece  $j$  bir  $S$ -denkliğidir. Şu halde  $f = q(ji)$   $f$ 'in çarpımı olup bu da lemmanın istenen ispatını tamamlar.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Eğer  $f$  (i)'yi sağlıyorsa, lemmada  $f = pi$  yazılır. Bu taktirde faybreyşının tanımından  $i$ ,  $f$ 'ye göre LLP'ye sahiptir, böylece  $f$   $p$ 'nin geri çekilmesidir ve  $f$ , (ii)'yi sağlar. Bu önerme 0.3.2.4'ün ispatını tamamlar.  $\square$

**Sonuç 0.3.2.6:**  $\mathcal{S}(r, S)$ 'in faybrint nesnelere, homotopi kümeleri  $S$ -tek olarak-bölünebilir  $r$ -indirgemiş Kan Kompleksleridir.

**Lemma 0.3.2.7:** Eğer  $f$ ,  $\mathcal{S}_r$ 'de bir dönüşüm ise, bu taktirde  $j$   $\mathcal{S}(r, S)$ 'de bir birebir faybreyşın ve  $S^{-1}\pi_r g$  örten olmak üzere  $f = jg$ 'dir.

**İspat:** Sadece  $r \geq 2$  durumundan bahsedeceğiz;  $r = 1$  durumu için yalnız ufak bir değişimine ihtiyaç vardır. Hurewicz teoremi, herhangi bir  $r$ -indirgenmiş simplişil kümesi için  $\pi_r X \xrightarrow{\sim} H_r X$  olduğunu iddia eder, böylece

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, K(A, r)) \simeq \text{Hom}_{ab}(\pi_r X, A) \quad (2.3)$$

$\mathcal{S}_r$ 'de bir  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümü verilsin;  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\rho$  birebir ve örten (2.3) altında sırasıyla  $\pi_r Y \longrightarrow S^{-1}\pi_r Y$ ,  $\pi_r X \longrightarrow \text{Gör}S^{-1}\pi_r f$  ve  $\text{Gör}S^{-1}\pi_r f \hookrightarrow S^{-1}\pi_r Y$  aşikar dönüşümlerine karşılık gelmek üzere ve kare kartezyen olacak şekilde

$$\begin{array}{ccc}
X & & \\
\downarrow f_1 & \searrow \beta & \\
Y' & \xrightarrow{\quad} & K(\text{Gör } S^{-1}\pi_r f, \tau) \\
\downarrow j_1(f) & & \downarrow \rho \\
Y & \xrightarrow{\alpha} & K(S^{-1}\pi_r Y, \tau)
\end{array}$$

(2.4)

diyagramı ile verilen çarpım  $f = j_1(f)f_1$  olsun.  $\mathcal{S}_r$ 'de  $U$  için,  $\rho$   $\mathcal{S}(r, S)$ 'de herhangi bir zayıf denkleğe göre RLP'ye sahip olduğu ve ek olarak bire bir olduğu görülen

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}^{-1}}(U, K(A, r)) = Z'(U, A) = H'(U, A)$$

sahibiz. Üstelik eğer  $i_r(f)$  bir izomorfizim ise, bu takdirde  $S^{-1}\pi_r f$  örten olduğunu gösteren bir

$$\begin{array}{ccc}
S^{-1}\pi_r Y' & \longrightarrow & \text{Gör } S^{-1}\pi_r f \\
\downarrow \wr & & \downarrow \\
S^{-1}\pi_r Y & \xrightarrow{\text{id}} & S^{-1}\pi_r Y
\end{array}$$

diyagramına sahibiz. Şimdi her bir  $\alpha$  sayısı için bir  $f = i_\alpha(f)f_\alpha$  faktörizasyonunu transfinite tümevarım ile

$$\begin{array}{l}
j_{n+1}(f) = j_n(f)j_1(f_n) \\
f_{n+1} = (f_n)_1 \\
\left. \begin{array}{l} j_\beta(f) = \lim\text{-inv}_{\alpha < \beta} j_\alpha(f) \\ f_\beta = \lim\text{-inv}_{\alpha < \beta} f_\alpha \end{array} \right\} \text{ eğer } \beta \text{ bir limit ise.}
\end{array}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça her bir  $\alpha$  için  $j_\alpha(f)$ ,  $\mathcal{S}(r, S)$ 'de bir birebir fabreyşindir ve  $Y$ 'nin alt-nesneleri bir kümeyi biçimlendirdiğinden,  $j_1(f_\alpha)$ 'nin yeterince büyük  $\alpha$  için bir izomorfizim olmasına sahibiz, böylece  $\text{Gör } S^{-1}\pi_r f_\alpha$  örtendir. Bu lemmayı ispatlar.

CM5 (ii) aksiyomunu ispatlamak için,  $f \in \mathcal{S}_r$ 'de bir dönüşüm olsun. Lemma 0.3.2.7'deki gibi  $f = ig$  ve Lemma 0.3.2.5'teki gibi  $g = pi$  yazılsın. Önerme 0.3.2.4'den  $p$  bir fabreyşindir ve böylece CM5 (ii)'de istenildiği gibi  $f = (jp)i$   $f$ 'in bir çarpımıdır. Bu Teorem 0.3.2.2'nin ispatını tamamlar.  $\square$

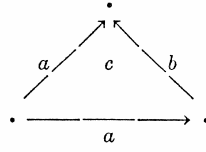
**Önerme 0.3.2.8:**  $\text{Ho}\mathcal{S}(r, S)$  homotopi kategorisi, nesnelere  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi kümeleri ile birlikte  $r$ -indirgenmiş Kan kompleksleri olan ve morfizimleri simplişil küme dönüşümleri olan kategoriye denktir.

**İSPAT:**  $\mathcal{S}(r, S)$ 'nin her nesnesi eşfaybrıttır, böylece  $\mathcal{S}(r, S)$ 'nin eşfaybrıt nesnelere,  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi kümeleri ile birlikte  $r$ -indirgenmiş Kan kompleksleridir. Eğer  $Y$  bir  $r$ -indirgenmiş Kan kompleksi ise;  $Y^{\Delta(1)}$   $Y$ 'nin "yol uzay" kompleksi,  $j_e : Y^{\Delta(1)} \rightarrow Y$ ,  $e = 0, 1$  bitiş nokta dönüşümleri ve  $s : Y \rightarrow Y^{\Delta(1)}$ ,  $\Delta(1) \rightarrow \Delta(0)$  tek dönüşümü ile indirgenmiş dönüşüm olsun. Bu takdirde  $s$  bir aşikar eşfabreyşin ve  $(j_0, j_1) : Y^{\Delta(1)} \rightarrow Y \times Y$  bir fabreyşindir.  $Y^{\Delta(1)}$  bir  $(r-1)$ -bağlantılı Kan kompleksi olduğundan kapsama  $E_r Y^{\Delta(1)} \rightarrow Y^{\Delta(1)}$  bir zayıf denklidir. Açıkça

$$(j_0, j_1) : E_r Y^{\Delta(1)} \rightarrow Y \times Y$$

$\mathcal{S}_r$ 'de bir fabreyşindir, böylece  $s, j_0, j_1$  ile birlikte  $E_r Y^{\Delta(1)}$   $\mathcal{S}_r$ 'de  $Y$  için bir yol nesnesi  $Y_1$ 'dir. Buradan iki simplişil olarak  $\mathcal{S}_r$ 'de herhangi  $X$ 'den  $Y$ 'ye homotopik dönüşüm, sağ homotopiktir. Fakat eğer  $f$  ve  $g$  bir eşfaybrıt  $X$  nesnesinden bir faybrıt  $Y$  nesnesine iki dönüşüm ve eğer  $Y^I$ ,  $Y$  için bir yol nesnesi ise, bu takdirde  $f$  ve  $g$  sol (veya sağ, fark yaratmaz) homotopiktir ancak ve ancak  $j_0 h = f$  ve  $j_1 h = g$  ile bir  $h : X \rightarrow Y^I$  vardır [5]. Sonuç olarak eğer  $Y \in \mathcal{S}(r, S)$ 'de faybrıt ise,  $[X, Y] = X$ 'ten  $Y$ 'ye dönüşümlerin simplişil homotopi sınıfları Önerme 0.3.1.4 (b)'den elde edilir.  $\square$

**Uyarı 0.3.2.9:**  $\mathcal{S}(1, \{1\})$  kategorisi, bir fabreyşin ile bir zayıf denkleğin baz uzantısının bir zayıf denklik olmadığını doğrulayan kapalı model kategorisinin bir örneğidir. Örneğin,  $K \in \Delta(2)$ 'nin aşağıdaki bölüm kümesi



indirgenmiş simplişil küme olsun.  $f(\alpha)=1$  ve  $f(b)=0$  1-devir normalleştirilmesi ile  $f : K \rightarrow K(Z,1)$  verilsin. Eğer  $L, b$  tarafından üretilen  $\Delta(1)/\Delta^\bullet(1)$ 'e alt kompleks izomorfik ise, bu takdirde aşağıdaki kare değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f'} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow^p \\ K & \xrightarrow{f} & K(Z,1) \end{array}$$

üstelik  $f$  bir zayıf denklik,  $p$  bir fabreyşındır ve  $f'$  bir zayıf denklik değildir.

**Uyarı 0.3.2.10:** Önerme 0.3.2.4, fabreyşınların olması gerektiği gibi örten özelliğine sahip  $\mathcal{S}(r, S)$ 'de fabreyşınları gösterir. Diğer taraftan tamamı adi fabreyşınlara benzemeyen Uyarı 0.3.2.9'un  $* \hookrightarrow K \mathcal{S}(1, \{1\})$ 'de kapsama dönüşümleri gibi fabreyşınlar vardır. Aşağıdaki önerme,  $Y$  bir Kan kompleksi olduğunda  $\mathcal{S}(r, S)$ 'de  $f : X \rightarrow Y$  fabreyşınlarının olduklarını gösterir.

**Önerme 0.3.2.11:**  $\mathcal{S}_r$ 'de bir dönüşüm  $f : X \rightarrow Y$  olsun. Bu takdirde  $f, \mathcal{S}(r, S)$ 'de bir fabreyşın ve  $Y$  bir Kan kompleksidir ancak ve ancak  $f$  aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i)  $\pi_*(\text{Çek } f)$   $S$ -tek olarak bölünebilirdir.
- (ii) EşÇek  $\pi_r f$   $S$ -serbest-burulmadır.
- (iii)  $f : X \rightarrow fX, \mathcal{S}'$ 'de bir fabreyşındır.
- (iv)  $Y \rightarrow K(\text{EşÇek } \pi_r f, r), fX$  fiber ile  $\mathcal{S}'$ 'de bir fabreyşındır.

**İSPAT:**  $f$ 'in (i)-(iv) sağladığını kabul edelim. (iv)'den  $Y$  bir Kan kompleksidir. 0.3.2.4'ten (i) ve (iii)  $X \rightarrow fX$ 'in  $\mathcal{S}(r, S)$ 'de bir fabreyşın olduğunu gerektirir.  $A = \text{EşÇek } \pi_r f$  olsun. Bu takdirde birinci kare (iv)'den dolayı değişmeli ve ikincisi (ii)'den değişmeli olan bir

$$\begin{array}{ccccc}
fX & \longrightarrow & * & \longrightarrow & * \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Y & \longrightarrow & K(A,r) & \longrightarrow & K(S^{-1}A,r)
\end{array}$$

diyagramı vardır.  $\mathcal{S}(r,S)$ 'de en son dikey dönüşüm bir fabreyşin olduğundan böylece  $f : X \rightarrow Y$ 'de bir fabreyşindir ve bu yüzden  $f$ 'de bileşke özelliğinden fabreyşindir.

$Y$  bir Kan kompleks iken  $\mathcal{S}(r,S)$ 'de  $f$ 'in bir fabreyşin olduğunu kabul edelim.  $B$ ,  $B$ 'nin  $S$ -burulma alt grubu ile EşÇek  $\pi_r f$ 'in bölümü olsun.  $Y$  bir Kan kompleks,  $Y \rightarrow K(\pi_r Y, r)$  kanonik dönüşümü  $\mathcal{S}$ 'de bir fabreyşin ve bu yüzden  $u$  ile göstereceğiz.  $u$ ,  $Y \rightarrow K(\pi_r Y, r) \rightarrow K(B, r)$  bileşke dönüşümünde bir fabreyşindir.  $j : Z \rightarrow Y$ ,  $u$ 'nun faybrıntının kapsaması ve  $fg = f$  ile  $g : X \rightarrow Z$  tek bir dönüşüm olsun.  $f$ ,  $\mathcal{S}(r,S)$ 'de bir fabreyşin ve  $j$  birebir olduğundan  $g$ 'nin  $\mathcal{S}(r,S)$ 'de bir fabreyşin olduğu kolayca görülür.  $B$  ve  $u$ 'nun tanımından  $S^{-1}\pi_r g$  örtendir bu yüzden 0.3.2.4'ten  $g$ ,  $\mathcal{S}$ 'de bir fabreyşindir. Şu halde  $g$  örtendir, bu yüzden  $fX = Z = \text{Çek } u$  ve  $g$ , (iii)'i sağlayan  $g = f : X \rightarrow fX$  dönüşümüdür. Ayrıca  $\pi_*(\text{Çek } f) = \pi_*(\text{Çek } g)$  (i)'yi sağlayan  $S$ -tek olarak bölünebilir. Son olarak (ii)'yi sağladığı kadar (iv)'yi de sağlayan ve  $A = \text{EşÇek } \pi_r f$  olduğunu gösteren  $\pi_r X$ ,  $\pi_r fX$ 'e ve sonra  $\text{Çek}\{\pi_r u : \pi_r Y \rightarrow A\}$  içine dönüştürür. Şu halde önermenin ispatı tamamdır.  $\square$

$S = \{1\}$  olduğunda, baz için bir Kan kompleks ile  $\mathcal{S}_r$ 'deki fabreyşinlerin kolay bir karakterizasyonu vardır. Bütün yüzlerin  $k$ . birleşimi olan standart olan  $n$ -simpleks  $\Delta(n)$ 'in alt kompleksi  $V(n,k)$  ile gösterilmek üzere,  $\mathcal{S}$ 'de bir dönüşümün bir fabreyşin olması için gerek ve yeter şart  $0 \leq k \leq n > 0$  için  $V(n,k) \rightarrow \Delta(n)$  kapsama dönüşümüne göre RLP'ye sahip olmasıdır.

Aşağıdaki (ii) şartı bu yüzden  $\mathcal{S}_r$ 'de bir fabreyşin için bir sebep kriteridir; bununla beraber Örnek 0.3.2.9,  $Y$ 'nin bir Kan kompleksi olma hipotezinin olduğunu göstermek için kullanılabilir.

**Önerme 0.3.2.12:**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $Y$  bir Kan kompleksi olmak üzere  $\mathcal{S}_r$ 'de bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(i)  $f$ ,  $\mathcal{S}_r$ 'de bir fabreyşindir.



(ii)  $0 \leq k \leq n > 0$  için  $V(n, k) \rightarrow \Delta(n)$  kapsamısına göre  $f$  RLP'ye sahiptir.

(iii)  $X \rightarrow Y \times_{K(\pi_r Y, r)} K(\pi_r X, r)$  kanonik dönüşümü  $\mathcal{S}$ 'de bir fabreyşindir.

**İSPAT:** (iii)  $\Rightarrow$  (i).  $f$

$$X \longrightarrow Y \times_{K(\pi_r Y, r)} K(\pi_r X, r) \xrightarrow{p_r} Y$$

bileşkesidir. Birinci dönüşüm, 0.3.2.4 kullanılarak (iii)'den  $\mathcal{S}_r$ 'de bir fabreyşin olan  $K(\pi_r X, r) \rightarrow K(\pi_r Y, r)$ 'nin bir baz genişletmesidir. Şu halde  $f$   $\mathcal{S}_r$ 'de bir fabreyşindir.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Eğer  $K$  bir simplişil küme ise,  $K_{(r)}$ ,  $K$ 'nin  $(r-1)$ -skeletonunu bir noktaya azaltarak elde edilen  $r$ -indirgenmiş simplişil küme olsun. Açıkça eğer  $L \in \text{Ob} \mathcal{S}_r$

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}_r}(K_{(r)}, L) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, L)$$

ise (ii) ispatlamak için  $f$ 'nin  $V(n, k)_{(r)} \rightarrow \Delta(n)_{(r)}$  dönüşümüne göre RLP'ye sahip olduğunu göstermeliyiz. Fakat  $r > n$  için  $V(n, k)$ ,  $\Delta(n)$ 'in  $(r-1)$ -skeletonunu içerdiğinden bu dönüşüm bir zayıf denklidir. Şu halde bu dönüşüm  $\mathcal{S}_r$ 'de bir aşikar eşfabreyşindir ve  $f$  buna göre RLP'ye sahiptir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). İlk önce  $X$ 'in bir Kan kompleksi olduğuna dikkat edelim.  $\alpha : V(n, k) \rightarrow X$  verilmesiyle eğer  $n \leq r$  ise, bu takdirde  $\alpha$  "sıfır" dönüşümüdür böylece  $\alpha$  aşikar olarak  $\Delta(n)$ 'e genişletilir; eğer  $n > r$  ise, bu takdirde  $Y$  bir Kan kompleksi olarak  $f\alpha$ 'yı,  $\beta : \Delta(n) \rightarrow X$ 'e genişletebiliriz ve  $\alpha$ 'nın  $\Delta(n) \rightarrow X$  genişletmesini elde etmek için (ii)'yi kullanırız.  $\varepsilon_x : X \rightarrow K(\pi_r X, r)$  kanonik dönüşüm olsun; (iii)'yi ispatlamak için  $0 \leq k \leq n > 0$  olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} V(n, k) & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow (f, \varepsilon_x) \\ \Delta(n) & \xrightarrow{(\beta, z)} & Y \times_{K(\pi_r Y, r)} K(\pi_r X, r) \end{array}$$

(2.5)

formundaki herhangi bir diyagramda  $\gamma$  noktalandırılmış ok inşa edilmelidir. Eğer  $n < r$  ise,  $\gamma = 0$  olarak almamız. Eğer  $n > r$  ise, (ii)'den  $\gamma$ 'yı  $\gamma_i = \alpha$  ve  $f\gamma = \beta$  olacak şekilde seçebiliriz.  $\varepsilon_x \gamma = z$  olduğunu iddia ediyoruz.  $\varepsilon_x \gamma$  ve  $z$ 'nin  $\Delta(n) \rightarrow K(\pi_r X, r)$  iki dönüşüm olmasıyla böylece  $\pi_r X$ 'de değerleri ile  $\Delta(n)$ 'in  $r$ -eş devir olarak tanımlanabilir. Bu eş devirler  $V(n, k)$  üzerinde çakışır, böylece eşit olmalıdırlar.  $n > r+1$  için bu aşıkardır bu taktirde  $V(n, k)$ ,  $\Delta(n)^{(r)}$ 'yi içerir ancak bu  $n = r+1$  içinde doğrudur Çünkü bu eş devirler  $\Delta(n)$ 'in yüzeylerinin birinde çakışırlar ve bu nedenle eş devir formülünden bütün hepsinin üzerinde çakışırlar.

Eğer  $n = r$  ise, bu taktirde  $\alpha$  dönüşümünün sıfır olması gerekir ve  $(\pi_r f)(c)$ ,  $y$ 'nin homotopi sınıfı olacak şekilde  $(\beta, z)$  dönüşümü  $Y$ 'de bir  $r$ -simpleks  $y$ 'ye ve  $\pi_r X$ 'in bir  $c$  elemanına denktir.  $X$  bir Kan kompleks olduğunda;  $c$ ,  $X_r$ 'nin bir  $X$  elemanı ile temsil edilir; bu taktirde  $f_x$  ve  $y$   $\pi_r Y$ 'nin aynı elemanını temsil eder, bu yüzden  $d_0 z = y$   $d_1 z = f_x$  bu taktirde ve  $1 \leq j \leq r+1$  için  $d_j z = *$  ile birlikte bir  $z \in Y_{r+1}$  elemanı vardır.  $\xi: \Delta(r+1) \rightarrow Y$ , kanonik  $r+1$ -simpleks  $\sigma_{r+1}$ 'i  $z$ 'ye taşıyan dönüşüm olsun ve  $\eta: V(r+1, 0) \rightarrow X$ ,  $i < j \leq r+1$  için  $\eta(d_i \sigma) = x$ ,  $\eta(d_j \sigma) = *$  ile verilsin.  $f\eta = \xi$   $V(r+1, 0)$ 'a kısıtlanmıştır, bu yüzden (ii) hipotezinden  $\xi$  ve  $\eta$  ile yazılabilen bir  $\zeta: \Delta(r+1) \rightarrow X$  dönüşümü vardır. Şu halde  $x' = d_0 \zeta(\sigma_{r+1})$  olarak,  $f x' = y$  ve  $x'$ 'nin  $c$ 'yi temsil etmesine sahibiz. Bu nedenle  $\gamma$ , kanonik simpleksi  $x'$  taşıyan dönüşüm olarak alınmasıyla (2.5)'deki istenilen noktalandırılmış  $\gamma$  oku elde edilir. Önermenin ispatı böylece tamamlanır.  $\square$

### 0.3.3. Kümelerde Moore Anlamıyla Serre Teorisi:

Eğer  $M$  bir simplişil küme ise,  $N_* M$  ve  $\pi_* M$ , Moore anlamında  $M$ 'nin normalleştirilmiş kompleksi ve  $M$ 'nin homotopi kümeleri olsun. Simplişil kümelerin  $\mathcal{G}$  kategorisi; zayıf denklikler homotopi kümeleri üzerinde izomorfizimleri doğuran dönüşümler, fabreyşinlar  $q > 0$  için  $N_q f$  örten olacak şekilde  $f$  dönüşümler ve eşfabreyşinları serbest simplişil küme dönüşümlerinin geri çekimleri olan dönüşümler olmak üzere bir kapalı model kategorisidir [5]. [19] ile tanımlanan adjoint fanktörlerin bir çifti

$$\mathcal{S} \xrightleftharpoons[W]{M} \mathcal{G}$$

olsun. Bu takdirde  $M$  eşfabreyşinleri,  $\overline{W}$ ,  $M$  ve  $\overline{W}$ 'nin ikisi de zayıf denklikleri ve  $X \rightarrow \overline{W}MX$ ,  $G\overline{W}M' \rightarrow M'$  adjunction morfizimlerin her ikisi de zayıf denklikleri korur. 0.3.1.5'den  $\mathcal{S}_1$ 'in homotopi teorisinin ve  $\mathcal{C}$ 'nin denk olduğu ortaya çıkar.

Eğer  $\pi_0 M = 0$  ise, bir simplişil kümeye bağlantılıdır denir. Eğer  $S^{-1}\pi_* f$  bir izomorfizm ise, bağlantılı simplişil kümelerin bir  $f : M \rightarrow M'$  dönüşümüne bir  $s$ -denkliği denir.  $\mathcal{C}_r$ ,  $r$ -indirgenmiş simplişil kümeleri içeren  $\mathcal{C}$ 'nin bütün alt kategorisi olsun (yani boyut  $< r$ 'de birime indirgenmiş) ve bir kapalı model kategorisi için  $\mathcal{C}(r, S) r > 0$  aşağıdaki gibi olsun: eşfabreyşinler ve zayıf denklikler ile  $\mathcal{C}_r$  kategorisi,  $\mathcal{C}$ 'de sırasıyla eşfabreyşinler ve  $S$ -denklikler olan  $\mathcal{C}_r$ 'deki bu dönüşümler olması için tanımlandı ve fabreyşinler ile birlikte  $\mathcal{C}_r$  kategorisi,  $\mathcal{C}(r, S)$ 'de hem eşfabreyşin hem de zayıf denklikler olan dönüşümlere göre RLP ile  $\mathcal{C}_r$ 'de bu dönüşümler olması için tanımlandı.

**Teorem 0.3.3.1:**  $\mathcal{C}(r, S)$  bir kapalı model kategorisidir.

$$\mathcal{S}(r+1, S) \xrightleftharpoons[\overline{W}]{M} \mathcal{C}(r, S)$$

adjoint fanktörü, birleştirilmiş homotopi teorilerinin bir denkliğini kurar.

Teoremin ispatı, bu bölümün sonunda verilecek olan aşağıdaki önermenin ispatını kullanır.

**Teorem 0.3.3.2:**  $i$  veya  $f$  bir eşfabreyşin olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ M'' & \xrightarrow{i'} & M'_1 \end{array}$$

$\mathcal{C}$ 'de bir eş-değişmeli kare olsun. Eğer  $f$  bir zayıf denklik ise, böylece  $f'$ 'de bir zayıf denkliktir. Eğer  $f$  bir  $S$ -denkliği ve  $M$  bağlantılı ise, bu takdirde  $f'$  bir  $S$ -denkliğidir.

**Teoremin ispatı:** CM1, CM2, CM3, ve CM4 (ii) aksiyomları açıktır. CM4 (i) ispatlamak için ilk önce eğer  $M'$  bir simplişil küme ise, bu takdirde  $M\overline{W}M' \rightarrow M'$  adjunction dönüşümünün

örten olduğuna dikkat edelim. Bu,  $\tau$  ve  $\tau'$  kanonik dönme fonksiyonları ve  $\tau$ 'nin izdüşüm olma gerçeğinden  $(\overline{WM})_q = M'_0 \times \cdots \times M'_{q-1} \rightarrow M'_{q-1}$

$$\begin{array}{ccc} (\overline{WM})_q & \xrightarrow{\tau} & M'_{q-1} \\ \downarrow \tau' & \searrow & \\ (M\overline{WM})_{q-1} & & \end{array}$$

diyagramından elde edilir.  $\mathcal{C}$ 'de herhangi bir örten dönüşüm bir fabreyşindir, böylece  $M\overline{WM}' \rightarrow M'$   $\mathcal{C}$ 'de bir aşikar fabreyşindir. Şimdi  $\mathcal{C}_r$ 'de  $f: M \rightarrow M'$  verildiğinde,  $\overline{WM} \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} \overline{W}$   $\mathcal{S}(r+1, S)$ 'de  $\overline{W}$ 'nin bir eşfabreyşin aşikar fabreyşin çarpımı olsun. Bu takdirde  $u$  birebir ve  $v$  bir örten zayıf denklidir, bu yüzden birinci kare eş değişmeli ve  $Z$  tanımlı olmak üzere bir

$$\begin{array}{ccccc} M\overline{WM} & \xrightarrow{\text{kofabreyşin}} & MX & \xrightarrow{\text{örten zayıf denklik}} & M\overline{WM}' \\ \downarrow \text{zayıf denklik} & & \downarrow i' & & \downarrow \text{örten zayıf denklik} \\ M & \xrightarrow{\text{kofabreyşin}} & Z & \xrightarrow{p} & M' \end{array}$$

diyagramını elde ederiz. 0.3.3.2'den  $i'$  bir zayıf denklik olduğundan  $p$  de bir zayıf denklidir. Şu halde CM5(i) ispatlamak üzere  $i$  bir eşfabreyşin ve  $p$   $\mathcal{C}$ 'de bir aşikar fabreyşin ise, bu takdirde yukarıdaki gibi  $f = pi$  olduğunu göstermiş olduk. Ancak eğer  $f$ ,  $\mathcal{C}(r, S)$ 'de bir aşikar fabreyşin ise, bu takdirde yukarıdaki gibi  $f = pi$  yazılarak  $f$   $p$ 'in bir geri çekilmesidir ve  $i$ ,  $f$ 'e göre LLP' ye sahip iken CM2'den  $i$ 'nin  $\mathcal{C}(r, S)$ 'de bir aşikar fabreyşin olmasına sahibiz. Bu CM4(i) olan,  $f$ 'in  $\mathcal{C}(r, S)$ 'deki eşfabreyşinlere göre RLP'ye sahip olmasını ispatlar.  $\square$

**Önerme 0.3.3.3:**  $\mathcal{C}(r, S)$ 'deki aşikar fabreyşinler, örten zayıf denklikler olan  $\mathcal{C}_r$ 'deki bu dönüşümlerdir.

Geriye CM5(ii)'yi ispatlamak kalır.

**Önerme 0.3.3.4:** Aşağıdaki iddialar  $\mathcal{C}_r$ 'deki bir  $f$  dönüşümü için denktir.

(i)  $f$ ,  $\mathcal{G}(r, S)$ 'de bir fabreyşindir.

(ii)  $q > r$  için  $N_q f$  örtendir,  $\pi_* \text{Çek } f$   $S$ -tek olarak bölünebilir ve EşÇek  $\pi_r f$   $S$ -serbest burulmadır.

**Lemma 0.3.3.5:**  $\mathcal{G}_r$ 'deki herhangi bir  $f$  dönüşümü,  $i \in \mathcal{G}(r, S)$ 'de bir aşikar fabreyşin ve  $p$  3.4'ün (ii) şartını sağlamak üzere  $f = pi$  şeklinde çarpanlarına bölünebilir.

**0.3.3.5' in ispatı:**  $f : M' \rightarrow M$  olsun. Öncelikle  $S^{-1}\pi_r f$ 'i örten kabul edelim.  $\overline{WM}' \xrightarrow{u} K \xrightarrow{v} \overline{WM}$ ,  $\mathcal{S}(r+1, S)$ 'de  $\overline{W}f$ 'in bir aşikar eşfabreyşin-fabreyşin çarpımı olsun. Bu takdirde  $u$  bir örten  $S$ -denkliğidir ve  $v$  fiberi  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi (0.3.2.4) kümelerine sahip olan  $\mathcal{S}$ 'de bir fabreyşindir.  $Mv$ 'nin örten olduğunu ve  $\pi_* \text{Çek } Mv$ 'nin  $S$ -tek olarak bölünebilir olduğu sonucunu elde ederiz.  $v$  bir fabreyşin olduğundan örtenlik açıktır, geriye kalan  $\pi_q \text{Çek } Mv = \pi_{q+1}(\overline{W} \text{Çek } Mv) \simeq \pi_{q+1} \text{Çek } v$  olduğunu göstermek

$$\begin{array}{ccccc} \text{Çek } v & \longrightarrow & K & \xrightarrow{v} & \overline{WM} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{W} \text{Çek } Mv & \longrightarrow & \overline{WM}K & \xrightarrow{\overline{W}Mv} & \overline{WM} \overline{WM} \end{array}$$

fabreyşinlerin dönüşümüne lemma beş uygulanarak elde edilir. Şu halde eğer diyagramı

$$\begin{array}{ccccc} M \overline{WM}' & \xrightarrow{\text{eşfabreyşin}} & MK & \xrightarrow{Mv} & M \overline{WM} \\ \text{zayıf denklik} \downarrow & & i' \downarrow & & \downarrow \text{örten zayıf denklik} \\ M' & \xrightarrow{i} & Z & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

biçimine getirirsek, birinci kare eş-değişmeli,  $i'$  0.3.3.2'den bir zayıf denklik,  $p$  örten ve  $\pi_* \text{Çek } p \simeq \pi_* \text{Çek } Mv$   $S$ -tek olarak bölünebilirdir. Aynı zamanda  $i$  bir  $S$ -denkliği ve bir eşfabreyşindir böylece lemmada istenilen çarpım  $f = pi$  dir.

$S^{-1}\pi_r f$ 'in örten olmama durumunda, bazı  $s \in S$  için  $s\alpha \in \text{Gör } \pi_r f$  olacak şekilde bu  $\alpha$  elemanlarını ihtiva eden  $\pi_r M$ 'nin alt grubu  $A$  olsun ve kare değişmeli ve,  $\alpha$  ve  $\beta$ 'lar aşikar dönüşümler olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
 HM' & & & & \\
 \downarrow f & \searrow \beta & & & \\
 GM' & \xrightarrow{\alpha'} & & & K(A, r) \\
 \downarrow j & & & & \downarrow \\
 GM & \xrightarrow{\alpha} & & & K(\pi_r M, r)
 \end{array}$$

(3.1)

diyagramı oluşturulsun.  $\alpha$  örten ve  $\pi_r \text{Çek } \alpha = 0$  olduğundan  $\alpha'$  için de aynısı doğrudur, böylece  $\alpha$  ve  $\alpha'$ 'nin homotopi tam dizileri  $\pi_r M'_1 \xrightarrow{\sim} A$ 'yı ve  $S^{-1} \pi_r g$ 'nin örten olduğunu verir. Bu takdirde yukarıdaki gibi  $g = pi$  yazılabilir.  $q > r$  için  $N_q j$ 'nin bir izomorfizim olduğuna ve  $p$  örten olduğundan bütün  $q$ 'lar için  $N_q p$ 'nin örten olduğuna dikkat edelim. Şu halde  $p' = jp$ ,  $q > r$  için örten  $N_q p'$ 'ne sahiptir ve  $\pi_* \text{Çek } p' = \pi_* \text{Çek } p$   $S$ -tek olarak bölünebilirdir ve  $\text{EşÇek } \pi_r p' = \text{EşÇek } \pi_r j = (\pi_r M)/A$   $S$ -serbest burulmadır. Şu halde  $f = p'i$ , lemma'da istenildiği gibi  $f$ 'in istenilen çarpımıdır.  $\square$

**0.3.3.4'ün ispatı:** (i)  $\Rightarrow$  (ii).  $f$ ,  $\mathcal{S}(r, S)$ 'de bir fabreyşin olsun ve 0.3.3.5' teki gibi  $f = pi$  yazılsın. Bu takdirde  $i$ ,  $f$ 'ye göre LLP'ye sahiptir, bu yüzden  $f$   $p$ 'nin bir geri çekilmesidir ve  $f$  (ii)'yi sağlar.

(ii)  $\Rightarrow$  (i).  $f = jg$ , (3.1) diyagramı ile verilen  $f$ 'in çarpımı olsun. Bu takdirde  $\text{EşÇek } \pi_r f$   $S$ -serbest burulma olduğundan  $A = \text{Gör } \pi_r f$ 'dir, bu yüzden  $\pi_r g$  örtendir. Aynı zamanda  $q > r$  için  $N_q g = (N_q j)(N_q g) = N_q f$  örtendir. Ve  $\pi_r g$ 'nin örtenliği ile birlikte,  $N_* g$ 'nin örten olmasını gerektirir. Sonuç olarak,  $\pi_* \text{Çek } g = \pi_* \text{Çek } f$   $S$ -tek olarak bölünebilir ile örtendir, bu yüzden  $\overline{W}g$ ,  $\pi_* \text{Çek } \overline{W}g$   $S$ -tek olarak bölünebilir ile  $\mathcal{S}$ 'de bir örten fabreyşindir ve bu yüzden  $\overline{W}g$  0.3.2.4'den  $\mathcal{S}(r+1, S)$ 'de bir fabreyşindir.  $\overline{W}$ , (3.1)'deki değişmeli kareyi

$$\begin{array}{ccccc}
 \overline{W}M'_1 & \longrightarrow & K(A, r+1) & \longrightarrow & K(S^{-1}A, r+1) \\
 \downarrow \overline{W}j & & \downarrow & & \downarrow u \\
 \overline{W}M & \longrightarrow & K(\pi_r M, r+1) & \longrightarrow & K(S^{-1}\pi_r M, r+1)
 \end{array}$$

diyagramında ki birinci kareye dönüştürür ve ikinci kareye de  $(\pi_r M)/A$   $S$ -serbest burulma olduğundan değişmelidir.  $u$  ile ifade edilmiş dönüşümün  $\mathcal{S}(r+1, S)$ 'de bir fabreyşin olduğunu gördük, böylece  $\overline{W}j$ 'de bir fabreyşindir ve bu yüzden  $K \rightarrow L$ ,  $\mathcal{S}_{r+1}$ 'de bir bire bir  $S$ -denklik olmak üzere  $f$  herhangi  $MK \rightarrow ML$  dönüşümüne göre RLP'ye sahiptir.  $i: M' \rightarrow M$   $\mathcal{G}(r, S)$ 'de bir aşikar eşfabreyşin olsun. 0.3.3.2'den  $q$  bir zayıf denklik olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
 M \overline{W} M' & \xrightarrow{i'} & M \overline{W} M \\
 \downarrow & & \downarrow q \\
 M' & \xrightarrow{i''} & M_1 \\
 & \searrow i & \downarrow q'' \\
 & & M
 \end{array}$$

diyagramını göz önüne alalım, böylece  $q'$  bir aşikar fabreyşin olduğundan  $q''$  bir aşikar fabreyşindir, şu halde  $i$ ,  $q'$ 'ne göre LLP'ye sahiptir ve  $i$ ,  $i''$ 'nün geri çekilimidir. Fakat  $q'$   $f$ 'e göre LLP'ye sahip olduğunu gördüğümüzden böylece  $i''$  ve  $i$  de  $f$ 'e göre LLP'ye sahiptir. Şu halde  $f$   $\mathcal{G}(r, S)$ 'de bir fabreyşindir ve Önerme 0.3.3.4'ün ispatı tamamlanır.

0.3.3.4 ve 0.3.3.5 birleştirilirse,  $\mathcal{G}(r, S)$ 'in kapalı bir model kategorisi olduğunu ispatlama işlemini tamamlayan  $\mathcal{G}(r, S)$  CM5(ii)'yi sağlar. Bu  $M$  ve  $\overline{W}$ , 0.3.1.4'den aşikar olarak elde edilen  $\mathcal{G}(r, S)$  ve  $\mathcal{G}(r+1, S)$  homotopi teorileri arasında bir denklik doğurur. Şu halde Teorem 0.3.3.1 ispatlanır.  $\square$

**Önerme 0.3.3.6:**  $\mathcal{G}(r, S)$ 'in faybrint nesnelere, homotopi kümeleri  $S$ -tek olarak bölünebilir olan bu  $r$ -indirgenmiş simplişil kümeleridir. Eşfaybrint nesnelere, serbest olan  $r$ -indirgenmiş simplişil kümeleridir.  $\text{Ho } \mathcal{G}(r, S)$ , nesnelere  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi kümeleri ile  $r$ -indirgenmiş serbest simplişil kümeler olan ve morfizimleri simplişil kümelerin dönüşümlerinin simplişil homotopi sınıfları olan kategoriye denktir.

**İSPAT:** Birinci ifade 0.3.3.4'ün sonucundan elde edilirken, ikinci sonuç bir serbest simplişil grubun herhangi bir simplişil alt grubu serbest olduğu gerçeğinden elde edilir. Son ifade ise 0.3.2.8'de yapıldığı gibi ispatlanır.

Bu bölümün geri kalanı 0.3.3.2'nin ispatına ve bazı ilgili sonuçlara ayrılmıştır.

Eğer  $M$  bir simplişil küme ve  $G$  bir simplişil  $M$  modülü ise,  $H_q(M, G)$ ,  $G$ 'deki değerler ile  $M$ 'nin (küme) homolojisi olsun [5].

$P$  (sırasıyla  $\mathbb{Q}$ ), her bir boyutta  $ZG$  üzerine taşınan bir  $P \rightarrow G$  (sırasıyla  $\mathbb{Q} \rightarrow Z$ ) zayıf denklik ile donatılan herhangi bir simplişil  $M$  modülü olmak üzere

$$H_q(M, G) \simeq \pi_q(Z \otimes_M P) \simeq \pi_q(\mathbb{Q} \otimes_M G)$$

kanonik izomorfizimleri vardır. Burada  $Z$  aşıkâr  $M$  etkisi ile her bir boyuta tam sayı olan sabit simplişil abelyan grubunu temsil eder. Eğer  $A$  bir  $\pi_0 M$  modülü ise ve aşıkâr yolda  $\pi_0 M$  etkisi ile indirgenen  $M$  etkisi ile her bir boyutta  $A$  olan simplişil  $M$  modülü  $A$  ile gösterilsin, bu takdirde  $\mathbb{Q} = ZWM$  alabiliriz ve son küme  $A$ 'dan gelen yerel katsayı sisteminde ki değerler  $\overline{WM}$ 'nin homolojisi olmak üzere

$$H_q(M, A) = \pi_q(ZWM \otimes_M A) = H_q(\overline{WM}, A),$$

ya sahibiz. □

**Önerme 0.3.3.7:** Simplişil kümelerin bir  $f: M' \rightarrow M$  dönüşümünün bir zayıf denklik olması için gerek ve yeter şart

$$\pi_0(f, A): H_*(M', A) \rightarrow H_*(M, A)$$

bütün  $\pi_0 M$  modülleri  $A$ 'lar için bir izomorfizim olmasıdır. ( $A = Z\pi_0 M$  gerçeği istenendir).

**İSPAT:**  $f$  bir zayıf denklidir ancak ve ancak  $\overline{W}f$ 'in [5]'den bir zayıf denkliği doğrudur ancak ve ancak  $\pi_1 \overline{W}f \simeq \pi_0 f$  bir izomorfizim ve  $H^*(\overline{W}f, A)$ ,  $\overline{WG}$  üzerinde bütün yerel katsayılar sistemleri  $A$  için bir izomorfizmdir. Fakat bütün  $A$ 'lar için  $H^*(\overline{W}f, A)$ 'nın bir izomorfizim olduğu sonucuna varmamızı sağlayan

$$\begin{aligned} E_2^{pq} &= \text{Ext}_{Z\pi_0 G}^p(H_q(\overline{WM}, Z\pi_0 M) \Rightarrow H^{p+q}(\overline{WM}, A) \\ E_{pq}^2 &= \text{Tor}_p^{Z\pi_0 G}(H_q(\overline{WM}, Z\pi_0 M) \Rightarrow H^{p+q}(\overline{WM}, A) \end{aligned}$$

evrensel katsayı spektral dizileri vardır ancak ve ancak sadece  $A = Z\pi_0 M$  gerçeğinden bütün  $A$ 'lar için  $H_*(\overline{W}f, A)$  bir izomorfizmdir. □



**Lemma 0.3.3.8:**  $M'$  bir küme ve  $M$ ,  $i \in I$ ,  $M_i$  üreteçleri ile serbest küme ve  $M'$ 'in serbest çarpımı olsun.  $IM'$  ve  $IM$ ,  $ZM'$  ve  $ZM$  küme halkalarının eklenmiş idealleri olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \bigoplus_i ZM \oplus ZM \otimes_{ZH} IM' &\longrightarrow IM \\ (a_i) + a \otimes x &\mapsto \sum a_i(\sigma_i - 1) + ax \end{aligned}$$

dönüşümü sol  $ZM$  modüllerinin bir izomorfizmidir.

**İSPAT:** Eğer  $G$  bir  $M$  modül ise, bu takdirde  $D: M \rightarrow G$  türetmesinin,  $D(g_1g_2) = Dg_1 + g_1Dg_2$  olacak şekilde bir küme dönüşümü olduğunu ve böyle türetmelerin,  $Dg = \theta(g-1)$  formülü ile sol  $ZM$  modül homomorfizimleri  $\theta: IM \rightarrow G$ 'e bire bir dönüşüme karşılık geldiğini hatırlatalım. Ayrıca  $G \times_r M$  yarı direk çarpım olmak üzere  $sg = (Dg, g)$  formülü ile  $pr_2 \cdot s = id$  olacak şekilde böyle  $D$  türetmeleri  $s: M \rightarrow G \times_r M$  homomorfizimlerine bire bir karşılık gelir. Önceki ifadeleri ve  $M$  üzerindeki hipotezleri kullanarak  $D$  türetmelerinin,  $zi = D\sigma_i$ ,  $D' = D|_{M'}$  formülü ile  $D': M' \rightarrow G$ 'e ve  $i \in I$  için  $z_i \in G$  elemanlarına karşılık geldiğini görürüz. Böylece lemmayı tamamlayan

$$\begin{aligned} \text{Hom}(IM, G) &\simeq \text{Der}(M, G) \\ &\simeq G^I \text{Hom}(IM', G) \\ &\simeq \text{Hom}_M(\bigoplus_i ZM \oplus ZM \otimes_{ZM'} IM', G) \end{aligned}$$

dır. □

Lemma,  $\sigma_i - 1$  bazı ile  $IM/ZM \cdot IM'$ 'in bir serbest sol  $ZM$  modülü olmasını gerektirir.  $\sigma_i$ 'yi  $\sigma_i^{-1}$  ile yer değiştirerek ve  $ZM$ 'nin kanonik anti-otomorfizmini uygulayarak aşağıdaki sonucu buluruz.

**Sonuç 0.3.3.9:** Eğer  $M'$  ve  $M$  0.3.3.8'deki gibiyse, bu takdirde  $i \in I$  için  $IM/IM' \cdot ZM$   $\sigma_i - 1$  bazı ile bir serbest sağ  $ZM$  modüldür.

**0.3.3.2'nin ispatı:**  $f$ 'in her bir eşfabreyşin hem de bir zayıf denklik olması durumu  $\mathcal{C}$ 'nin bir (0.3.1.2) kapalı model kategorisi olma gerçeğinden elde edilir. En zor kısım, bir  $i$  eşfabreyşin

tarafından bir zayıf denkleğin  $f'$  eş baz genişletmesinin yine bir zayıf denklik olduğunu göstermektedir. 0.3.3.7 kriterini kullanırız.  $\pi_0 : \mathcal{C} \rightarrow (\text{kümeler})$  funktörü, sabit simplişil küme funktörüne sol adjoint olduğundan sağ tamdır. Şu halde  $\pi_0 f' = \pi_0 f'$  in eşbaz genişletmesidir ve böylece  $\pi_0 f'$  bir izomorfizmdir.  $\square$

$f'$  'nün, twisted katsayılarla homoloji üzerinde bir izomorfizm doğurduğunu göstermek için,  $A$  bir  $\pi_0 M = \pi_0 M'_1$  modülü olsun ve bir  $P \rightarrow A$  (sırasıyla  $P' \rightarrow A$ ) aşikar fabreyşin ile bir serbest simplişil  $M$  modülü  $P$  (sırasıyla  $P'$ ) seçilsin. Bu takdirde  $P' \rightarrow A$   $M$  modüllerinin aşikar fabreyşinidir bundan dolayı

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P' \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ P & \longrightarrow & A \end{array}$$

diyagramında ki lifting ile  $f' : M \rightarrow M'_1$  için bir di-homomorfizm olan bir  $P \rightarrow P'$  dönüşümünü elde ederiz.

$$0 \longrightarrow IM/IM' \cdot ZM \longrightarrow ZM/IM' \cdot ZM \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

$P$  ile tensör edilirse ve benzer olarak asallar ile yapılarca  $N = IM/IM' \cdot ZM$  ve  $N'$ 'de  $N$  gibi benzer şekilde olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N \otimes_M P & \longrightarrow & (M/IM' \cdot ZM) \otimes_M P & \longrightarrow & Z \otimes_M P \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow^{u_1} & & \downarrow^{u_2} & & \downarrow^{u_3} \\ 0 & \longrightarrow & N' \otimes_{M'_1} P' & \longrightarrow & (ZM'_1/IM'' \cdot ZM'_1) \otimes_{M'_1} P' & \longrightarrow & Z \otimes_{M'_1} P' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3.2)$$

tam dizilerin bir dönümü elde edilir. Tanımdan

$$\pi_*(u_3) = H_*(f', A) : H_*(M, A) \rightarrow H_*(M'_1, A).$$

$P, A$  'nın bir serbest kesin  $M'$  modül aynı zamanda  $P$  olduğundan

$$\pi_*(u_2) = H_*(f, A) : H_*(M', A) \rightarrow H_*(M'', A)$$

olduğunu gösteren  $Z \otimes_H P \rightarrow Z \otimes_H P'$  tekrardan yazılabilir. Şimdi  $u_1$ 'in bir zayıf denklik olduğunu göstereceğiz. Eğer  $i$  simplişil kümelerin bir serbest dönüşümü olmak için meydana

geliyorsa bu takdirde 0.3.3.8'i boyutsal olarak uygulayarak  $N = IM/IM' \bullet ZM$ 'nin bir serbest simplişil sağ  $ZM$  modülü olduğunu görürüz. Genelde  $i$  bir serbest dönüşümün geri çekilimidir. Böylece herhangi bir durumda  $N$  bir (boyutsal) düz sağ simplişil  $ZM$  modüldür. Fakat bir düz simplişil modül ile tensör etmek zayıf denklikleri korur [5], bundan dolayı  $N \otimes_M P \rightarrow N \otimes_M A$  bir zayıf denkliktir. Ancak bu dönüşüm bir izomorfizmdir. 0.3.3.9'dan  $N$  (sırasıyla  $N'$ ),  $\sigma_i - 1$  bazı ile serbest sağ  $ZM$  (sırasıyla  $ZM'_1$ ) olduğunda  $M$ 'yi (sırasıyla  $M'_1$ )  $\sigma_i$  üreteçleri ile serbest kümedir ve  $M'$ 'in (sırasıyla  $M''$ ) serbest çarpımı olduğunu kabul etmesi durumunda ki bir sabit boyuta bakmaya ihtiyaç vardır. Şu halde  $u_1$  bir zayıf denkliktir. Kabulden  $f$  bir zayıf denklik, bundan dolayı  $u_2$  bir zayıf denklik ve böylece (3.2)'den ve lemma beş'den  $u_3$  bir zayıf denkliktir. Bu nedenle  $\pi_* u_3 = H_*(f', A)$ ,  $f'$ 'nün bir zayıf denklik olması ispatını tamamlayan bir izomorfizmdir.  $\square$

$S$ -denkliği hakkında 0.3.3.2'nin kısmını önce ispatlayarak şimdiye kadar ispatlanılan bir sonuç veririz. Eğer  $M$  bir simplişil küme ise  $H_*(M) = H_*(M, Z)$  olsun.

**Önerme 0.3.3.10:** Eğer  $i: M' \rightarrow M // M'$ , eşfiber ile bir eşfabreyşin ise, bu takdirde  $i$ 'de doğal olan

$$\cdots \pi_q((M // M')_{ab}) \longrightarrow H_q(M') \xrightarrow{i_*} H_q(M) \longrightarrow \pi_{q-1}((M // M')_{ab}) \cdots$$

bir tam dizisi vardır.

**İSPAT:**  $N \otimes_G P$ 'nin,  $IM/IM' \bullet ZM \otimes_M Z \simeq (M // M')_{ab}$ 'ye zayıf denklik olması durumunda  $A = Z$  olmak üzere, bu uzun tam dizi (3.2)'nin birinci satırının uzun tam homotopi dizisidir. Son izomorfizim; her iki taraf, aşkar etki ile bir  $M$  modülündeki değerler ile  $M'$  üzerinde yok olan  $M$ 'nin türetme fanktörlerini temsil etmesi elde edilir. Dizinin doğallığı,  $P$ ,  $P'$ 'nün seçimleri ve  $P \rightarrow P'$  dönüşümünün simplişil homotopiye kadar tek olmaları gerçeğinden elde edilir.  $\square$

**Sonuç 0.3.3.11:** Eğer  $M$  bir simplişil küme ise,

$$H_q(M) = \begin{cases} Z & q = 0 \\ \pi_{q-1}(M_{ab}) & q > 0 \end{cases}$$

'dır.

**Sonuç 0.3.3.12:** Eğer  $i : M' \rightarrow M$   $M // M'$  eş fiber ile eşfabreyşin ise, bu takdirde  $i$ 'de doğal bir

$$\cdots H_q(M') \longrightarrow H_q(M) \longrightarrow \widetilde{H}_q(M // M') \longrightarrow H_{q-1}(M') \cdots$$

tam dizisi vardır.

Bağlantılı kümelerin bir  $f$  dönüşümünün bir  $S$ -denkliği olduğunu ispatlamak için,  $\pi_q M = \pi_{q+1}(\overline{WM})$ ,  $H_*(M) = H_*(\overline{WM})$  formülleri ve 0.3.2.1'e dayanarak  $S^{-1}H_*(f)$ 'in bir izomorfizim olduğunu göstermek yeterdir. 0.3.3.2'nin geri kalanı bu takdirde 0.3.3.10 tam dizilerini  $i$  ve  $i'$ 'ye uygulayarak ve  $i$  ve  $i'$ 'nün aynı eş fibere sahip olması ile elde edilir.

**Uyarı 0.3.3.13:** 0.3.3.11, Kan'ın bir formülüdür ve  $M'$ 'in serbest olma durumunda hemen 0.3.3.12'yi sağlar. Eğer  $M'$ ,  $M$ 'nin bir alt-simplişil küme olmak üzere  $H_*(M, M')$ 'i  $H_*(\overline{WM}, \overline{WM}')$  rölatif homoloji olarak tanımlarsak, bu takdirde  $M' \hookrightarrow M$  bir eşfabreyşin olmak üzere, 0.3.3.12

$$H_q(M, M') \xrightarrow{\sim} H_q(M // M', \{e\})$$

(dönüşümlerin doğasını analiz ederek)'i sağlar. Şu halde, simplişil kümelerin homolojisi için excision aksiyomunu ispatlamış oluruz.  $\square$

#### 0.3.4 Kapalı Simplişil Model Kategorileri:

$n \geq 0$  için  $\Delta(n)$  (sırasıyla,  $0 \leq k \leq n > 0$  için  $V(n, k)$ ),  $0 \leq i \leq n$  (sırasıyla  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ ) için  $\partial_i : \Delta(n-1) \rightarrow \Delta(n)$  yüzlerinin görüntülerinin birleşimi olan  $\Delta(n)$ 'in simplişil alt kümelerini gösterir.  $\underline{S}$ 'de  $\Delta(0) = \emptyset$  başlangıç nesnesidir. Aşağıdaki RLP (sırasıyla LLP), sağ (sırasıyla sol) lifting özelliğini belirtir.

**Önerme 0.3.4.1:** Aşağıdakiler,  $\underline{S}$ 'de bir  $f$  dönüşümü için denktir:

(i)  $f$ , bütün  $n$ 'ler için  $\Delta(n) \hookrightarrow \Delta(n)$ 'e göre RLP'e sahiptir.

(ii)  $f$ , simplişil kümelerin herhangi bir bire bir (yani, her bir derecede bire bir) dönüşümüne göre RLP'ye sahiptir.

Bu, bire bir dönüşümün skeletal decomposition'undan doğrudan doğruya çıkarılır ([10]'a bakınız). Aşağıdakilerden, [10]'da ispatlandı.  $e = 0,1$  olmak üzere,  $\{e\} \subset \Delta(1)$ ,  $e$  köşesinin bozulmuşlarından oluşan alt kompleksini gösterir.

**Önerme 0.3.4.2:** Aşağıdakiler,  $\underline{S}$ 'de bir  $f$  dönüşümü için denktir.

(i)  $f$ ,  $0 \leq k \leq n > 0$  için  $V(n, k) \hookrightarrow \Delta(n)$ 'e göre RLP'ye sahiptir.

(ii)  $f$ ,  $n \geq 0$  ve  $e = 0,1$  için  $\Delta(n) \times \Delta(1) \cup \Delta(n) \times \{e\} \hookrightarrow \Delta(n) \times \Delta(n)$ 'e göre RLP'ye sahiptir.

(iii)  $f$ ,  $e = 0,1$  ve  $\underline{S}$ 'de bütün  $L \hookrightarrow K$  bire bir dönüşümleri için

$$L \times \Delta(1) \cup K \times \{e\} \hookrightarrow K \times \Delta(1)$$

'e göre RLP'ye sahiptir.

**Tanım 0.3.4.3:** Simplişil kümelerin bir dönüşümü, eğer Önerme 0.3.4.1'in (sırasıyla Önerme 0.3.4.2'nin) denklik şartlarını sağlıyorsa aşikar fabreyşin (sırasıyla fabreyşin) olarak adlandırılmış olacaktır.

Şu halde, Kan'a göre bir fabreyşin bir fiber dönüşümdür. Bir aşikar fabreyşinin, kısaltılmış fiberlerinin bir fabreyşin olduğunu görmek kolaydır.

**Tanım 0.3.4.4:** Bir kapalı simplişil model kategorisinin anlamı, bir  $\underline{\mathcal{C}}$  kapalı model kategorisinin bir simplişil kategorisinin aşağıdaki iki şartı sağlamasıdır.

**SM0:** Eğer  $x \in \text{Ob} \underline{\mathcal{C}}$  ise, bu takdirde herhangi sonlu  $K$  simplişil kümesi için  $X \otimes K$  ve  $X^K$  nesnelere vardır.

**SM7:** Eğer,  $i : A \rightarrow B$  bir eşfabreyşin ve  $p : X \rightarrow Y$  bir fabreyşin ise, bu takdirde eğer  $i$  veya  $p$  aşikar ise, aşikar olan,

$$\underline{\text{Hom}}(B, X) \xrightarrow{(i^*, p_*)} \underline{\text{Hom}}(A, X) \times_{\underline{\text{Hom}}(A, Y)} \underline{\text{Hom}}(B, Y) \quad (4.1)$$

simplişil kümelerin bir fabreyşinidir.

**Uyarı 0.3.4.5:** (4.1) dönüşümünün hedefi için  $\underline{\text{Hom}}(i, p)$  notasyonunu kullanmak uygun olacaktır.

**Önerme 0.3.4.6:**  $M(6)$  (a) ve (b)'deki lifting özellikleri ile birinci ve dördüncü (sırasıyla ikinci ve üçüncü) birbirini tanımlıyor olacak şekilde,  $\underline{\mathcal{C}}$ 'nin, fabreyşin, eşfabreyşin, aşikar fabreyşin, ve aşikar eşfabreyşin dönüşümlerin dört seçilmiş sınıfları ile  $M0$  ve  $SM0$ 'ı sağlayan bir simplişil kategori olduğunu kabul edelim. (Özellikle  $\underline{\mathcal{C}}$  bir kapalı simplişil model kategorisi ise bu elde edilir.). Bu takdirde  $SM7$ , aşağıdakilerin her birine ayrı ayrı denktir:

**SM7(a).** Eğer  $X \rightarrow Y$  bir fabreyşin (sırasıyla aşikar fabreyşin) ise, bu takdirde  $e = 0, 1$  için

$$X^{\Delta(n)} \rightarrow X^{\Delta(n)} \times_{Y^{\Delta(n)}} \bullet Y^{\Delta(n)} \quad \text{bir fabreyşindir (sırasıyla aşikar fabreyşindir) ve}$$

$$X^{\Delta(1)} \rightarrow X^{\{e\}} \times_{Y^{\{e\}}} Y^{\Delta(1)} \quad \text{bir aşikar fabreyşindir.}$$

**SM7(b).** Eğer  $A \rightarrow B$  bir eşfabreyşin (sırasıyla aşikar eşfabreyşin) ise, bu takdirde  $e = 0, 1$  için

$$A \otimes \Delta(n) \vee_{A \otimes \Delta(n)} \bullet B \otimes \Delta(n) \rightarrow B \otimes \Delta(n) \quad \text{bir eşfabreyşindir (sırasıyla aşikar}$$

$$\text{eşfabreyşindir), ve } A \otimes \Delta(1) \vee_{A \otimes \{e\}} \bullet B \otimes \{e\} \rightarrow B \otimes \Delta(1) \text{ bir aşikar eşfabreyşindir.}$$

**İSPAT:**  $L \rightarrow K$ , sonlu simplişil kümelerin bir dönüşümü olmak üzere  $X^K \rightarrow X^L \times_{Y^L} Y^K$ 'ın bir fabreyşin olduğunu göstermek için, herhangi bir  $A \rightarrow B$  aşikar eşfabreyşine göre  $X^K \rightarrow X^L \times_{Y^L} Y^K$ 'nın RLP'ye sahip olduğunu göstermek yeterlidir.  $X^K$  nesnesinin tanımından bu,  $\underline{\text{Hom}}(B, X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, X) \times_{\underline{\text{Hom}}(A, B)} \underline{\text{Hom}}(B, Y)$ 'nin  $L \rightarrow K$  dönüşümüne göre RLP'ye sahip olduğunu göstermeye denktir. Önermenin bir ispatını bu yolla verir.  $\square$

**Hatırlatma:**  $\underline{S}$ 'de fabreyşinler ve aşikar fabreyşinler için  $SM7(a)$ 'nın sağlandığı aşikardır.

Bu bölümün geri kalanı için,  $\underline{\mathcal{C}}$  bir kapalı simplişil model kategorisini gösterir. [5]'deki sol ve sağ homotopi yapısı ile  $\underline{\mathcal{C}}$ 'nin simplişil homotopi yapısı ile ilişki kurmayla ilgileneceğiz.

$f \overset{S}{\sim} g$  (sırasıyla  $f \overset{S}{\sim} g$ ),  $f$ 'in kesinlikle (simplişil olarak)  $g$ 'ye homotopik (sırasıyla (simplişil olarak) homotopik) olduğunu gösterir. Simplişil homotopiler için, aşağıdaki örtü homotopi genişletilmesi teoremidir. [5]'den ne kadar güçlü olduğuna dikkat etmeliyiz.

**Önerme 0.3.4.7:**  $i: A \rightarrow b$  bir eşfabreyşin ve  $p: X \rightarrow Y$  bir fabreyşin olsun. Simplişil homotopiler olan  $h: A \otimes J \rightarrow X$  ve  $h: B \otimes J \rightarrow Y$ ,  $pk = h(i \otimes id_j)$  eşitliğinden  $i$  ve  $p$  ile çakışır.

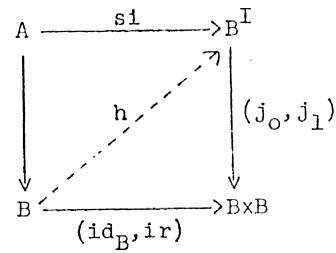
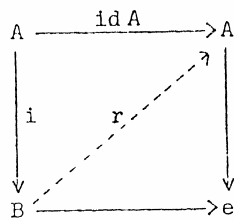
(1) Eğer  $\theta: B \rightarrow K$ ,  $p\theta = hj_0$  ve  $\theta i = ki_0$ 'i sağlarsa, bu takdirde  $Hi_0 = \theta$ ,  $pH = h$  ile bir  $H: B \otimes J \rightarrow X$  homotopisi vardır, ve  $H(i \otimes id_j) = k$ .

(2)  $i$  ve  $p$ 'den biri aşikar ise ve  $e = 0,1$  için  $\theta_e: B \rightarrow X$ ,  $p\theta_e = hi_e$ ,  $\theta_e i = ki_e$  sağlıyorsa, bu takdirde  $e = 0,1$  için  $Hi_e = \theta_e$ ,  $pH = h$  ile bir  $H: B \otimes J \rightarrow X$  homotopisi vardır ve  $H(i \otimes id_j) = k$ .

**İSPAT:** Bu kesinlikle,  $J$ 'nin uzunluğu üzerinde SM7'den bir tümevarımla elde edilir.  $\square$

**Sonuç 0.3.4.8:**  $i: A \rightarrow B$ , faybrint nesnelerin bir eşfabreyşini olsun. Şu halde  $i$  aşikardır ancak ve ancak  $i$  bir kuvvetli bozulmuş geri çekilim dönüşümüdür (yani,  $ri = id_A$ ,  $h_0 = id_B$ ,  $h_1 = ir$ ,  $h(i \otimes \Delta(1)) = i\sigma$  ile birlikte  $r: B \rightarrow A$ ,  $h: B \otimes \Delta(1) \rightarrow B$  mevcuttur.). Eğer  $p: X \rightarrow Y$  dual olarak, eşfaybrint nesnelerin bir fabreyşini ise, bu takdirde  $p$  aşikardır ancak ve ancak  $ps: id_Y$ ,  $h_0 = id_X$ ,  $h_1 = sp$ ,  $ph = \sigma(p \otimes \Delta(1))$  ile birlikte  $s: Y \rightarrow X$ ,  $h: X \otimes \Delta(1) \rightarrow X$  dönüşümleri vardır.

**İSPAT:** ( $\Rightarrow$ )



Sırası ile birinci ve ikinci diyagramda lifting ile  $r$  ve  $h$  elde edilebilir.

( $\Leftarrow$ ). Önerme 0.3.4.7'den açıktır.  $\square$

**Önerme 0.3.4.9:** (1) Eğer  $f, g: X \rightrightarrows Y$   $\mathcal{C}$ 'de iki yönlü dönüşüm ise, bu takdirde

$f \overset{S}{\sim} g \Rightarrow f \overset{r}{\sim} g$  ve  $f \overset{r}{\sim} g$ .  $X$  eşfaybrint ve  $Y$ 'de faybrint ise, bu takdirde  $\text{boy}(X, Y)$

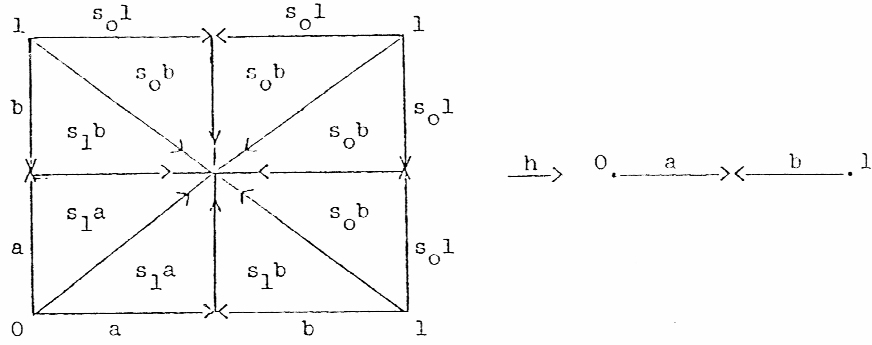
üzerinde kuvvetli simpliştir, simpliştir, sol ve sağ homotopi bağıntıları çakışır ve denklik bağıntılarıdır.

(2). [5]'de Ünite I, § 1, Teorem 1'in sonucu, eğer  $\pi_{\underline{\mathcal{G}}_c}$ ,  $\pi_{\underline{\mathcal{G}}_f}$  ve  $\pi_{\underline{\mathcal{G}}_{cf}}$  sırasıyla  $\pi_0 \underline{\mathcal{G}}_c$ ,  $\pi_0 \underline{\mathcal{G}}_f$  ve  $\pi_0 \underline{\mathcal{G}}_{cf}$  ile yer değiştirmesiyle elde edilir.

**İSPAT:** (2).  $\{0\} \subset J$  kapsamı,  $\underline{S}$ 'de fabreyşinlara göre LLP'ye sahiptir, böylece eğer  $X$  eşfabryınt ise Önerme 0.3.4.6 (b)'nin ispatında olduğu gibi  $i_0: X \rightarrow X \otimes J$ 'nin bir aşkar eşfabryın olduğu bulunur. M5'den dolayı  $\sigma: X \otimes J \rightarrow X$  bir zayıf denklittir. Ayrıca Önerme 0.3.4.6 (b)'den  $X \vee X \xrightarrow{i_0+i_1} X \otimes J$  bir eşfabryın ve böylece  $X \otimes J$ ,  $J$  için bir silindir nesnesidir. [5]'de Ünite I, § 1 Lemma 8 (ii)'nin ispatındaki gibi, eğer  $f, g: X \rightrightarrows Y$   $\underline{\mathcal{G}}_c$  de iki dönüşüm ve  $f \stackrel{S}{\sim} g$  ise, bu takdirde  $Y_c(f) = Y_c(g)$  olduğu elde edilir ve böylece  $Y_c \bar{Y}_c: \pi_0 \underline{\mathcal{G}}_c \rightarrow \text{Ho } \underline{\mathcal{G}}_c$  'ye indirgenir. Benzer olarak, [5]'de Ünite I, § 1 Teorem 1'deki gibi  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Y}_f$ 'nin,  $\pi$ 'nin  $\pi_0$  ile yer değiştirilmesiyle mevcut olduğu gösterilir. Daha sonra bu teoremin ispatının  $X \rightarrow Q(X)$  ve  $X \rightarrow R(X)$  "yarı-" fanktörlerinin yukarıdaki Önerme 0.3.4.7 (2)'nin özelliğindeki  $\bar{Q}: \pi_0 \underline{\mathcal{G}} \rightarrow \pi_0 \underline{\mathcal{G}}_c$ ,  $\bar{R}: \pi_0 \underline{\mathcal{G}} \rightarrow \pi_0 \underline{\mathcal{G}}_f$  fanktörlerini verdiği dikkat edelim. [5]'de Ünite I, § 1, Teorem 1'in ispatının geri kalanı herhangi bir değişme yapmaksızın devam eder böylece (2) elde edilir.

(1). [5]'de Ünite I, § 1, Teorem 1'in ispatında inşa edilmiş  $\bar{\gamma}: \pi_0 \underline{\mathcal{G}}_{cf} \rightarrow \text{Ho } \underline{\mathcal{G}}$  'nin yarı-tersi,  $\bar{RQ}: \underline{\mathcal{G}} \rightarrow \pi_0 \underline{\mathcal{G}}_{cf}$  tarafından indirgenir fakat biz sadece  $f \stackrel{S}{\sim} g \Rightarrow RQ(f) \stackrel{S}{\sim} RQ(g)$  'yi gördük ve bu nedenle  $f \stackrel{S}{\sim} g \Rightarrow \gamma(f) = \gamma(g)$  olduğu sonucuna varırız. Şimdi, eğer  $J$  bir genelleştirilmiş birim aralık ise;  $\tilde{e}: \Delta(0) \rightarrow J$ ,  $\tilde{e}(id_{[0]}) = e$ ,  $e = 0, 1$  ile birlikte dönüşüm ve  $\sigma: J \rightarrow \Delta(0)$  tek bir dönüşüm olmak üzere  $h(id_j \times \tilde{0}) = id_j$  ve  $h(id_j \times \tilde{1}) = id_j$  ile birlikte bir  $h: J \times J \rightarrow J$  kanonik homotopi vardır. Bir temsili durumdaki bu homotopi; oklar  $J \times J$  'nin her bir 1 simpleksinin doğrultusunu göstermek üzere ve  $s_0 a$  ile gösterilmiş bir  $J \times J$  simpleks,  $h$  altında  $J$  deki  $s_0 a$  'ya gitmek üzere,





diyagramı çizilebilir. Sonuç olarak eğer  $X$ ,  $\underline{\mathcal{C}}$ 'nin herhangi bir nesnesi ise,  $\sigma: X \otimes J \rightarrow X$  bir simplişil homotopi denkliği ve bundan dolayı  $\gamma(\sigma)$  bir izomorfizmdir. [5]'de Ünite I, § 5, Önerme 1'den,  $\sigma$  bir zayıf denkliktir ve bu yüzden  $f \stackrel{S}{\sim} g \Rightarrow f \stackrel{L}{\sim} g$ . Benzer olarak  $X \stackrel{s}{\sim} X^J$ ,  $\underline{\mathcal{C}}$ 'deki bütün  $X$ 'ler için bir zayıf denkliktir, böylece  $f \stackrel{S}{\sim} g \Rightarrow f \stackrel{r}{\sim} g$ ; şu halde (1)'in bu ilk kısmı ispatlanır. Son iddia,  $X$  eşfaybrint ve  $Y$  faybrint olmak üzere  $X \otimes \Delta(1)$  silindir nesnesinin, herhangi bir sol homotopiyi temsil edebildiğini gösteren [5]'de Lemma 1'den (yukarıdaki 2'nin ispatına bakınız) ve [5]'de Ünite 1, § 1 Lemma 4'den çıkar.  $\square$

**Uyarı 0.3.4.10:** Önerme 5,  $\text{Hom}(X, Y)$  üzerindeki simplişil homotopi bağıntısının hem sol hem de sağ homotopiden daha iyi olduğunu fakat  $X$  eşfaybrint ve  $Y$  faybrint olmak üzere bu üç bağıntısının çakıştığını gösterir. [5]'de Ünite I'nin § 2 ve § 3' deki yapıları, bunlara karşılık gelen iyi bilinen simplişil yapılar ile karşılaştırılabilir ve  $\text{Ho}\underline{\mathcal{C}}$  üzerinde sonuçlanan yapının aynı olduğu gösterilir. Şu halde  $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$  Kan kompleksinin temel grupoidi [5]'de Ünite I § 2'deki inşa edilen temel grupoid ile çakışır ve eğer  $\underline{\mathcal{C}}$  belirtilmiş olmak üzere  $E \rightarrow B$ ,  $\underline{\mathcal{C}}_f$ 'de bir fabreyşin ise, bu takdirde  $\underline{\text{Hom}}(A, E) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, B)$  fabreyşindan ortaya çıkan homotopi kümelerinin uzun tam dizisi, [5]'de Ünite I § 3'deki uzun tam dizisi ile çakışır.

**Önerme 0.3.4.11:** Eğer  $\underline{\mathcal{C}}$  bir kapalı simplişil model kategorisi ise bu takdirde  $\underline{\mathcal{C}}^0$  ve bir sabit  $X$  nesnesi üzerinde  $\underline{\mathcal{C}}$ 'nin nesnelerinin  $\underline{\mathcal{C}}/X$  kategorisi doğal bir yoldan dualleridir.

**İSPAT:**  $\underline{\mathcal{C}}^o$  hakkındaki iddia,  $\underline{\mathcal{C}}^o$ 'nin aşikar olduğudur. Eğer  $A$  ve  $B$ ,  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'in iki nesnesi ise,  $u: A \rightarrow B$  ve  $v: B \rightarrow X$  yapısal dönüşümler olmak üzere  $(s_o^n v) \circ f = s_o^n u$  ile birlikte  $n$  boyutlu  $f_n$  elemanlarını içeren  $\underline{\text{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, B)$ 'nin alt kompleksi  $\underline{\text{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}/X}(A, B)$  olsun. İndirgenmiş düzenleme ile  $\underline{\mathcal{C}}/X$ , sonlu limitler altında bir sonlu kapalı simplişil kategori haline gelir. Eğer  $K$ 'nin bütün elemanlarını  $id_X$ 'in "bozulmalarına" yollayan  $K \rightarrow \underline{\text{Hom}}(X, X)$  dönüşümüne karşılık gelen dönüşüm  $\sigma: X \otimes K \rightarrow X$  olmak üzere,  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'de  $(A^u X) \otimes K$  nesnesi,  $A \otimes K \xrightarrow{\sigma(u \otimes id)} X$  dönüşümüdür.  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'de  $(A^u X)^K$  nesnesi; kaynağı  $u^K$ 'nin fiber çarpımı ve  $\sigma$ 'ya karşılık gelen  $s: X \rightarrow X^K$  dönüşümü olan  $pr_2: A^K \times_{X^K} X$  dönüşümüdür. Şu halde  $\underline{\mathcal{C}}/X$  SM0'ı sağlar.  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'deki bir dönüşüme eğer aynı zamanda  $\underline{\mathcal{C}}$ 'de iseler, bir fabreyşin, eşfabreyşin veya zayıf denklik adlandırılmış olacaktır. M2 ve M5 aksiyomları açıktır. Eğer  $i: A \rightarrow A'$  ve  $p: B' \rightarrow B$   $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'de dönüşümler ise, bu takdirde  $\underline{\text{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}}(A', B') \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}}(i, p)$  dönüşümünün  $\Delta(0) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}}(A', X)$  yapısal dönüşümü ile  $\underline{\text{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}/X}(A', B') \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}/X}(i, p)$  dönüşümü baz uzantısıdır. Böylece SM7 ve aynı zamanda M1 sağlanır. M6'yı elde etmek için, aşağıdaki gibi düşünelim:  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'de bir  $f$  dönüşümünün,  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'de fabreyşinlere göre LLP'ye sahip olduğunu ve  $i$  bir aşikar eşfabreyşin,  $p$  de  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'de bir fabreyşin olmak üzere  $f = pi$  çarpımı olduğunu kabul edersek, bu takdirde  $f$ ,  $i$ 'nin bir geri çekilimidir, bu yüzden  $f$ ,  $\underline{\mathcal{C}}$ 'de bir aşikar eşfabreyşin ve böylece  $\underline{\mathcal{C}}/X$ 'de bir aşikar eşfabreyşindir. M6'nın diğer durumları benzerdir.

## 1.BÖLÜM:

### SİMLİŞİL KÜMELERİN ALT KATEGORİLERİNDE SERRE HOMOTOPİ TEORİSİ

#### 1.1 Giriş:

Bundan sonra  $\text{Simp}(M_p)$ , simpliştiril kümelerin kategorisini gösterecek ve eğer  $M_*$  bir simpliştiril küme ise  $N_*(M_*)$  ve  $\pi_*(M_*)$  sırasıyla Moore anlamında normalleştirilmiş kompleksi ve  $M_*$ 'nin homotopi kümelerini gösterecektir.

Simpliştiril çekirdek yapısı kullanılarak ([2,20]'ye bakınız),  $n$ -kesik simpliştiril kümelerin kategorisinden  $\text{Simp}(M_p)$ 'ye kadar bir fanktör  $\text{cos}k^n$  vardır. Bu fanktör,  $n$  boyutta bir simpliştiril kümesi kesen,  $n$ -kesik fanktörün  $tr^n$  sağ adjointidir ve bunu  $\text{Cos}k^n = \text{Cos}k^n tr^n$  olarak göstereceğiz.

Kesik fanktör  $tr^n$ ,  $(n+1)$ -simpliştiril eşçekirdeğinin tekrarlanan notasyonu ile tanımlanabilen  $n$ -skeleton fanktörü olarak adlandırılan bir  $sk^n$  sol adjointine de sahiptir ([20]'ye bakınız).  $Sk^n = sk^n tr^n$  yazacağız ve bu takdirde, bu fanktör  $\text{cos}k^n$ 'nin sol adjointidir.

$\text{Simp}(M_p)$  kategorisi, fabreyşınları Kan fabreyşınlar olan zayıf denklikleri morfizimler olan, aşık fabreyşınlara göre LLP ile birlikte  $\pi_*$  fanktörü için meydana gelen izomorfizimleri ve eşfabreyşınları morfizimler olan, [5]'teki Quillen anlamında kapalı bir model kategorisidir (yani, fabreyşınlar ve zayıf denklikler morfizimlerdir). Fabreyşınların karakterizasyonları ve aşık fabreyşınlar [5]'de verilmiştir. Eşfabreyşınlar, serbest simpliştiril küme dönüşümlerinin geri çekilmesi olarak karakterize edilmiştir.

Şimdi,  $r \geq 0$  için,  $\text{Simp}(M_p)_r$   $r$ -indirgenmiş simpliştiril kümelerden meydana gelmiş olan  $\text{Simp}(M_p)$ 'nin full alt kategorilerini gösterecektir yani,  $< r$  boyutlarda birime indirgenir. Şu halde  $\text{Simp}(M_p)_0 = \text{Simp}(M_p)$ .

Eğer  $r > 0$  için  $M_* \in \text{Simp}(M_p)_r$  ve  $M'_* \in \text{Simp}(M_p)$  ise, herhangi bir  $f_* : M_* \rightarrow M'_*$  morfizmi verildiğinde,  $M'_* \rightarrow \text{Cos}k^{r-1}(M'_*)$  kanonik morfizmi ile  $f_*$ 'nin bileşimi,

sıfır morfizimidir, böylece  $f. M. E_r(M') = \text{Çek}(M' \rightarrow \text{Cosk}^{r-1}(M'))$  verilen bir morfizme denktir. Şu halde  $E_r : \text{Simp}(M_p) \rightarrow \text{Simp}(M_p)_r$ ,  $I$  kapsama fanktörüne sağ adjointtir.

$N_*$  sol tam olduğundan,  $N_q(E_r(M.)) = \text{Çek}(N_q(M.) \rightarrow N_q(\text{Cosk}^{r-1}(M.)))$  ve böylece

$$N_q(E_r(M.)) = \begin{cases} 0 & q \leq r-1 \text{ için,} \\ \text{Çek}(N_r(M.) \rightarrow N_{r-1}(M.)) & q = r \text{ için,} \\ N_q(M.) & q \geq r+1 \text{ için,} \end{cases}$$

ifadelerine sahip olduğumuza dikkat edelim.

Sonuç olarak,  $q \leq r$  için  $\pi_q(E_r(M.)) = 0$  ve  $q \geq r$  için de  $\pi_q(E_r(M.)) = \pi_q(M.)$  olarak yazılabilir.

$I : \text{Simp}(M_p)_r \rightarrow \text{Simp}(M_p)$  kapsama fanktörü ayrıca,  $L_r = \text{EşÇek}(Sk^{r-1}(M.) \rightarrow M.)$  ile tanımlanmış bir  $L_r : \text{Simp}(M_p) \rightarrow \text{Simp}(M_p)_r$  sol adjointe sahiptir.  $L_r I = E_r I = \text{Id}_{\text{Simp}(M_p)_r}$  olduğuna dikkat edelim.

$\mathbb{Z}$ 'de verilen bir  $S$  çarpımsal sistemi verildiğinde,  $A \rightarrow S^{-1}A$  canonical morfizimi örten (sırasıyla sıfır, birebir, birebir-örten) ise bir  $A$  abelyan kümesinin  $S$ -bölünebilir (sırasıyla  $S$ -burulma,  $S$ -serbest burulma,  $S$ -tek olarak bölünebilir) olarak adlandırıldığını hatırlatalım.

Eğer  $S^{-1}\pi_q(f.)$  tüm  $q$ 'lar için bir izomorfizm ise bağlantılı simplişil kümelerin bir  $f. : M. \rightarrow M'$  morfizimine bir  $S$ -denkliği denir.

[5]'de, Quillen,  $\mathbb{Z}$ 'deki herhangi bir  $S$  çarpımsal sistem için ( $r = 0$  ise,  $S = \{1\}$ ),  $\text{Simp}(M_p)_r$ 'de aşağıdaki kapalı model yapısını göz önünde bulundurmuştur: Eşfabreyşinlar ve zayıf denklikler,  $\text{Simp}(M_p)$ 'de söylenen sıraya göre eşfabreyşinlar ve  $S$ -denklikler olan bu morfizimler olarak tanımlanmıştır ve bu fabreyşinlar RPL ile birlikte, her iki eşfabreyşin ve  $S$ -denklikler olan morfizimler ile bu morfizimler olarak tanımlanmıştır. Bu kapalı model

kategorisi  $\mathcal{G}(r, S)$  olarak gösterilecektir ve fabreyşinlara ve zayıf denklilere, sırasıyla  $S$ -fabreyşinlar ve zayıf  $S$ -denklikler denir.

Aşağıdaki önerme ile,  $\mathcal{G}(r, S)$ 'deki (aşıkarak) fabreyşinların karakterizasyonlarını hatırlatalım.

**Önerme 1.1.1:** (Quillen [6, önerme 3.3 ve 3.4]).  $\text{Simp}(M_p)_r$  de  $f: M \rightarrow M'$  bir morfizm olsun.

(i)  $f$ ,  $\mathcal{G}(r, S)$ 'de bir fabreyşindir ancak ve ancak  $q > r$  için  $N_q(f)$  örtendir,  $q \geq r$  için  $\pi_q$  (Çek  $f$ )  $S$ -tek olarak bölünebilir ve  $\text{EşÇek}(\pi_r, f)$   $S$ -serbest burulmadır.

(ii)  $\mathcal{G}(r, S)$ 'de  $f$  bir aşıkarak fabreyşindir yalnız ve yalnız  $f$  simplişil kümelerin bir örten zayıf denkliğidir.

## 1.2. $[_r T_n]$ 'de Quillen'in Bir Model Yapısı:

$0 \leq r \leq n$  olmak üzere  $n$ 'den daha büyük boyutlu aşıkarak Moore kompleksi ile birlikte, nesneleri bu  $r$ -indirgenmiş simplişil kümeler olan  $\text{Simp}(M_p)_r$ 'in full alt kategorisi  $[_r T_n]$  olsun.

$\mathcal{S}_n$  yansıyan faktör olmak üzere bu  $\text{Simp}(M_p)_r$ 'nin bir yansıyan alt kategorisidir.

$$M'_{n+1} = \{x \in M_{n+1} \mid d_{ix} \in d_{n+1} (N_{n+1} M_\bullet) \ 0 \leq i \leq n+1\}$$

olmak üzere  $\text{Simp}(M_p)_r \rightarrow [_r T_n]$ , kapsama fanktörü  $J$ 'ye göre sol adjoint

$$\mathcal{S}_n(M_\bullet) = \text{cos } k^{n+1} \left( \frac{M_{n+1} \xrightarrow{\quad} M_n \xrightarrow{\quad} M_{n-1} \cdots M_r \xrightarrow{\quad} 0 \cdots 0}{M'_{n+1} \xrightarrow{\quad} d_{n+1} (N_{n+1} M_\bullet) \xrightarrow{\quad} M_{n-1} \cdots M_r \xrightarrow{\quad} 0 \cdots 0} \right)$$

ile tam olarak verilir.

$[_r T_n]$ 'de kolimitler,  $\mathcal{S}_n$  fanktörünün  $\text{Simp}(M_p)_r$ 'de oluşturulmuş eş limitlere uygulanmasıyla hesaplandı. Özellikle  $M_\bullet, M'_\bullet \in [_r T_n]$  verildiğinde eş çarpımı  $\text{Simp}(M_p)_r$ 'de

$M. \amalg M'$  ile ve  $[_r T_n]$ 'de  $M. * M'$  ile göstereceğiz, şu halde  $\mathcal{S}_n(M. \amalg M') = M. * M'$  olarak ifade edilir.

$[_0 T_n]$ 'in, [13]'de göz önüne alınan kümelerin  $n$ -hypergrupoidlerinin kategorisi olduğuna dikkat edelim.  $n \rightarrow \infty$  olduğunda  ${}_r T_\infty = \text{Simp}(M_p)_r$  elde ederiz.

Sonra,  $\mathcal{S}_n(M.)$ 'nin Moore kompleksinin ve  $\pi_q(\mathcal{S}_n(M.))$  homotopi kümelerinin kullanacağımız değerlerini oluşturalım.

$$N_q(\mathcal{S}_n M.) = \begin{cases} N_q M., & q \leq n-1 \\ \frac{N_q M.}{d_{n+1}(N_{n+1} M.)}, & q = n \\ 0, & q \geq n+1 \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$\pi_q(\mathcal{S}_n M.) = \begin{cases} \pi_q(M.), & q \leq n \\ 0, & q \geq n+1 \end{cases}.$$

Şimdi,  $\mathbb{Z}$ 'de herhangi bir  $S$  çarpımsal sistemi için ( $r = 0$  ise  $S = \{1\}$ ), Bölüm 1.1'de hatırlattığımız  $\mathcal{C}(r, S)$  kapalı model kategorisini göz önüne alalım ve  $[_r T_n]$ 'de aşağıdaki yapıyı göz önüne alalım:

**Tanım 1.2.1:**  $f. : M. \rightarrow M', [_r T_n]$ 'de bir morfizm olsun.

- (i)  $J(f.)$ ,  $\mathcal{C}(r, S)$ 'de bir fabreyşin ise,  $f.$ 'ya bir  $S$ -fabreyşin denir.
- (ii)  $J(f.)$ ,  $\mathcal{C}(r, S)$ 'de bir zayıf denklik ise,  $f.$ 'ya bir zayıf  $S$ -denkliği denir.
- (iii) Eğer  $f.$  aşikar  $S$ -fabreyşinlere göre LLP'ye sahip ise,  $f.$ 'ya bir  $S$ -eşfabreyşin denir (yani,  $S$ -fabreyşinler ve zayıf  $S$ -denklikler olan morfizimler).

$[_r T_n]$ 'de  $f.$  morfizminin bir zayıf  $S$ -denkliği olması için gerek ve yeter şartın  $r \leq q \leq n$  için  $S^{-1}\pi_q(f.)$ 'nin bir izomorfizm olduğuna dikkat edelim.

$\mathcal{S}_n \vdash J$  adjunction'ı kullanarak,  $\mathcal{S}_n$ 'nin  $S$ -eşfabreyşinleri koruduğunu görmek aşıkardır ve  $\pi_q(\mathcal{S}_n(M.))$ 'nin değerine göre,  $\mathcal{S}_n$ 'nin, zayıf  $S$ -denkliklerini koruduğu açıktır.

$\mathcal{C}(r, S)$ 'deki fabreyşinlerin karakterizasyonu (Önerme 1.1.1'e bakınız) doğrudan doğruya aşağıdaki önermeyi verir:

**Önerme 1.2.2:**  $[_r T_n]$ 'de,  $f$ . bir morfizim olsun. Bu takdirde  $f$ . bir  $S$ -fabreyşindir ancak ve ancak  $r+1 \leq q \leq n$  için  $N_q(f.)$  örtendir,  $r \leq q \leq n$  için  $\pi_q(\text{Çek } f.)$   $S$ -tek olarak bölünebilirdir. ve  $E\text{şÇek}(\pi_r(f.))$   $S$ -serbest burulmadır.

Özellikle, sahip olduğumuz:

**Sonuç 1.2.3:**  $M. \in [_r T_n]$  olsun. Bu takdirde  $M.$   $S$ -faybrinttir ancak ve ancak  $M.$ 'nin homotopi kümeleri  $S$ -tek olarak bölünebilirdir. Özellikle,  $S = \{1\}$  ise,  $[_r T_n]$ 'nin herhangi bir nesnesi faybrinttir.

Eğer  $F$ , serbest küme fanktörü olarak gösterilirse,  $\Delta[n] = Sk^{n-1}\Delta[n]$  eşitliğini,  $\mathcal{C}(r, S)$ 'de aşık fabreyşinlerin karakterizasyonunu (Önerme 1.1.1'e bakınız) ve  $L_r : \text{Simp}(M_p) \rightarrow \text{Simp}(M_p)_r$  fanktörünü (Bölüm 1.1'e bakınız) kullanırsak, aşağıdakileri elde ederiz.

**Önerme 1.2.4:**  $f.$ ,  $[_r T_n]$ 'de bir morfizim olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $f.$  aşık bir  $S$ -fabreyşindir.
- (ii)  $r \leq q \leq n+1$  için  $f.$ ,  $\mathcal{S}_n L_r F\Delta[q] \rightarrow \mathcal{S}_n L_r F\Delta[q]$ 'e göre RLP'ye sahiptir,
- (iii)  $N_q(f.)$  örtendir ve  $r \leq q \leq n$  için  $\pi_q(\text{Çek } f.) = 0$ .

**İSPAT:**  $f.$  aşık bir  $S$ -fabreyşindir ancak ve ancak  $J(f.)$  simplişil kümelerin örten bir zayıf denkleğidir yalnız ve yalnız  $q \geq 0$  için  $J(f.)$ ,  $F\Delta[q] \rightarrow F\Delta[q]$ 'ya göre RLP'ye sahiptir. ([5]'e bakınız). Bu son şart,  $r-1 \leq q \leq n+1$  için  $J(f.)$ ,  $F\Delta[q] \rightarrow F\Delta[q]$ 'ya göre, RLP'ye sahip

olmasına denktir ([2]'ye bakınız). Şimdi,  $Sk^{-1}F\Delta[r-1] = F\Delta[r-1]$  ve  $Sk^{-1}F\Delta[r-1]$  olduğundan,  $f_.$  bir aşikar  $S$ -fabreyşindir ancak ve ancak  $r \leq q \leq n+1$  için  $J(M_.)$ ,  $L_r F\Delta[q] \rightarrow L_r F\Delta[q]$ 'ya göre RLP'ye sahiptir.  $\mathcal{F}_n \vdash J$  adjunctionu kullanılarak (i) ve (ii) arasındaki denklik görülür. (i) ve (iii) arasındaki denklik, Önerme 1.1.1'e göre açıktır.  $\square$

Aşikar  $S$ -fabreyşinların (ve böylece,  $S$ -lar)  $S$  alt kümesine bağlı olmadığına dikkat edelim.

Önerme 1.2.2'nin kullanılmasıyla, aşağıdakileri ispatlayabiliriz:

**Lemma 1.2.5:**  $\mathcal{F}_n$  fanktörü  $S$  fabreyşinlarını korur.

**İSPAT:**  $f_.: M_. \rightarrow M'_.$   $\text{Simp}(M_p)_r$ 'de bir  $S$ -fabreyşin olduğunu kabul edelim. Bu takdirde  $q > r$   $N_q(f_.)$  örtendir ve böylece  $r+1 \leq q \leq n$  için  $N_q(\mathcal{F}_n(f_..))$ 'da örtendir. Diğer taraftan, EşÇek( $\pi_r(f_.)$ )  $S$ -serbest burulma ve  $\pi_r(f_.) = \pi_r(\mathcal{F}_n(f_..))$  olduğunda sahip olduğumuz EşÇek( $\pi_r(\mathcal{F}_n(f_..))$ )  $S$ -serbest burulmadır. Geriye,  $r \leq q \leq n$  için  $\pi_q(\text{Çek}(\mathcal{F}_n(f_..)))$ 'nin  $S$ -tek olarak bölünebilir olduğunu ispatlamak kalır. Bunun için,  $K_. = \text{Çek}(f_.)$  ve  $K'_. = \text{Çek}(\mathcal{F}_n(f_..))$  ise,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_n(K_.) & \longrightarrow & \pi_n(M_.) & \longrightarrow & \pi_n(M'_.) \longrightarrow \pi_{n-1}(K_.) \dots \\
 & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \pi_n(K'_.) & \longrightarrow & \pi_n(\mathcal{F}_n(M_..)) & \longrightarrow & \pi_n(M'_.) \longrightarrow \pi_{n-1}(K'_.) \dots
 \end{array}$$

uzun tam dizi diyagramının kullanımıyla  $r \leq q \leq n$  için,  $\pi_q(K_.) \cong \pi_q(K'_.)$ 'yi elde ederiz ve böylece  $\pi_q(K'_.)$   $S$ -tek olarak bölünebilirdir.  $\square$

Şimdi, aşağıdaki teoremi verebiliriz:

**Teorem 1.2.6:**  $0 \leq r \leq n$  için  ${}_r T_n$  kategorisi, Tanım 1.2.1'de verilen yapıyla birlikte kapalı bir model kategorisidir ( Bu kapalı model kategorisi  ${}_r T_n^S$  ile göstereceğiz).



**İSPAT:** [6]'da ifade edildiği gibi CM1-5 aksiyomlarını kullanırız. CM1 açıktır, CM2 ve CM3  $\mathcal{C}(r, S)$ 'de yapının ve  $\mathcal{F}_n + J$  adjunctionunun kullanılmasıyla kolayca ispatlanır. CM5'in bir bölümünün ispatı için, herhangi bir  $f_\bullet : M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$  morfizminin çarpanı olarak bir  $S$ -fabreyşinden elde edilmiş aşikar bir  $S$ -eşfabreyşin olarak verip,  $\mathcal{C}(r, S)$ 'deki  $J(f_\bullet)$ 'nin çarpanını aşağıdaki şekilde göz önüne alalım.  $j_\bullet$  bir aşikar  $S$ -eşfabreyşin ve  $p_\bullet$  bir  $S$ -fabreyşin olmak üzere aşağıdaki diyagrama sahibiz.

$$\begin{array}{ccc} J(M_\bullet) & \xrightarrow{J(f_\bullet)} & J(M'_\bullet) \\ & \searrow j_\bullet & \nearrow p_\bullet \\ & & T_\bullet \end{array}$$

Şimdi,  $\mathcal{F}_n(f_\bullet)$ , Lemma 1.2.5'e göre bir  $S$ -fabreyşin ve  $\mathcal{F}_n(J_\bullet)$ , tüm  $S$ -fabreyşinlere göre LLP'ye sahip olan bir aşikar  $S$ -eşfabreyşin olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} M_\bullet & \xrightarrow{f_\bullet} & M'_\bullet \\ & \searrow \mathcal{F}_n(j_\bullet) & \nearrow \mathcal{F}_n(p_\bullet) \\ & & \mathcal{F}_n(T_\bullet) \end{array}$$

$\mathcal{F}_n$ 'nin uygulanmasıyla,  $f_\bullet$ 'nin bir çarpımını elde ederiz. Bu doğrudur, çünkü  $g_\bullet$  bir  $S$ -fabreyşin olmak üzere, verilen herhangi bir değişmeli diyagram,

$$\begin{array}{ccc} M_\bullet & \longrightarrow & A_\bullet \\ \mathcal{F}_n(j_\bullet) \downarrow & & \downarrow g_\bullet \\ \mathcal{F}_n(T_\bullet) & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

verildiğinde  $\mathcal{F}_n + J$  adjunctionu kullanılarak;  $J(g_\bullet)$   $\mathcal{C}(r, S)$ 'de bir fabreyşin olduğundan  $h_\bullet : T_\bullet \rightarrow JA_\bullet$  lifting'i mevcut olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} M_\bullet & \longrightarrow & J(A_\bullet) \\ j_\bullet \downarrow & \nearrow h_\bullet & \downarrow J(g_\bullet) \\ T_\bullet & \longrightarrow & J(B_\bullet) \end{array}$$

değişmeli diyagram vardır. Bu  $h_\bullet$  morfizimini birinci diyagramdaki istenilen lifting olarak ifade ederiz.

CM5'in diğer kısmı, yeniden  $\mathcal{G}(r, S)$ 'de karşılık gelen çarpanların kullanılmasıyla ispatlanabilir.

Son olarak CM4'ü ispatladık ve ispatlamak için kalan tek bir şey,  $i_*$  aşık bir  $S$ -eşfabreyşin ve  $q_*$  bir  $S$ -fabreyşin olmak üzere herhangi bir

$$\begin{array}{ccc} M_* & \longrightarrow & A_* \\ i_* \downarrow & & \downarrow q_* \\ M'_* & \longrightarrow & B_* \end{array}$$

değişmeli diyagramdaki lifting'in varlığının ispatıdır. Bunu yapmak için,  $j_*$ ,  $S$ -fabreyşinlere göre LLP'ye sahip olan bir aşık  $S$ -eşfabreyşin ve  $p_*$  bir  $S$ -fabreyşin olmak üzere  $i_* = p_* j_*$  çarpanı için CM5 kullanılır. Şu halde  $p_*$  bir zayıf  $S$ -denkliğidir ve böylece diyagramda bir  $s_*$  lifting'i mevcut olup

$$\begin{array}{ccc} M_* & \xrightarrow{j_*} & T_* \\ i_* \downarrow & \nearrow s_* & \downarrow p_* \\ M'_* & \xlongequal{\quad} & M'_* \end{array}$$

aşağıdaki diyagramda istenilen lifting  $s_*$  birleştirilmesiyle elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} M_* & \longrightarrow & A_* \\ j_* \downarrow & \nearrow v_* p_* & \downarrow q_* \\ T_* & \longrightarrow & B_* \end{array}$$

Çünkü  $j_*$   $S$ -fabreyşinlere göre LLP'ye sahiptir. □

Şimdi,  $S$ -eşfabreyşinleri karakterize edebiliriz. Bunun için ilk olarak aşağıdaki lemmayı ispatlarız.

**Lemma 1.2.7:**  $f_* : M_* \rightarrow M'_*$ ,  $[_r T_n]$ 'de bir morfizm olsun. Bu takdirde  $f_*$  bir  $S$ -eşfabreyşindir ancak ve ancak  $j_* : M_* \rightarrow T_*$  bir serbest dönüşüm olmak üzere,  $f_*$ ,  $\mathcal{S}_n(j_*) : M_* \rightarrow \mathcal{S}_n T_*$  morfiziminin bir geri çekilmesidir.

Özellikle  $M_*$ ,  $S$ -eşfabreyşindir ancak ve ancak  $M_*$ ,  $F_*$  serbest bir simplişil küme olmak üzere  $\mathcal{P}_n(F_*)$ 'nin bir geri çekilmesidir.

**İSPAT:** Teorem 1.2.6'nın CM5'inde iddia edilen, bir aşikar  $S$ -fabreyşinla bir  $S$ -eşfabreyşinin elde edilmesi gibi  $f_*$ 'nin çarpanını  $f_* = \mathcal{P}_n(p_*)\mathcal{P}_n(j_*)$ 'dan elde ederiz, burada  $\mathcal{G}(r, S)$ 'de  $j_*$  morfizimi bir eşfabreyşindir ve böylece  $J_*$  bir serbest dönüşümün geri çekilmesidir.

Şimdi,  $f_*$  bir  $S$ -eşfabreyşin olduğundan, diyagramda bir lifting vardır.

$$\begin{array}{ccc}
 M_* & \xrightarrow{\mathcal{P}_n(j_*)} & \mathcal{P}_n(T_*) \\
 f_* \downarrow & \nearrow s_* & \downarrow \mathcal{P}_n(p_*) \\
 M'_* & \xlongequal{\quad} & M'_*
 \end{array}$$

ve böylece  $f_*$ ,  $\mathcal{P}_n(j_*)$ 'nin bir geri çekilmesidir.  $\square$

$S$ -eşfabreyşinlerin karakterizasyonları, bu takdirde aşağıdaki gibi verilir.

**Önerme 1.2.8:**  $f_* : M_* \rightarrow M'_*$ ,  $[_r T_n]$ 'de bir morfizm olsun. Bu takdirde  $f_*$  bir  $S$ -eşfabreyşindir ancak ve ancak  $tr^{n-1}(f_*)$  bir serbest dönüşümün bir geri çekilmesidir.

Özellikle,  $M_*$   $S$ -eşfabreyşindir ancak ve ancak  $tr^{n-1}(M_*)$  bir  $(n-1)$ -kesik serbest simplişil kümedir.

**İSPAT:**  $tr^{n-1}(f_*) = tr^{n-1}(\mathcal{P}_n(f_*))$  olduğundan, eğer  $f_*$  bir  $S$ -eşfabreyşin ise bu takdirde  $tr^{n-1}(f_*)$  serbest bir dönüşümün bir geri çekilmesi olacağından Lemma 1.2.7'ye göre ispat açıktır.

Aksi takdirde,  $tr^{n-1}(f_*)$ 'in serbest bir dönüşümün bir geri çekilmesi olduğunu kabul edelim.  $g_*$  bir aşikar  $S$ -fabreyşin olmak üzere herhangi bir diyagramda bir  $h_*$  lifting'i olduğunu ispatlamalıyız.

$$\begin{array}{ccc}
M_{\bullet} & \xrightarrow{u_{\bullet}} & X_{\bullet} \\
f_{\bullet} \downarrow & & \downarrow g_{\bullet} \\
M'_{\bullet} & \xrightarrow{v_{\bullet}} & Y_{\bullet}
\end{array}$$

$tr^{n-1}(f_{\bullet})$  bir serbest dönüşümün bir geri çekilmesi olmak üzere  $\text{Simp}(M_p)_r$ 'de bir  $S$ -eşfabreyşin olan  $Sr^{n-1}(f_{\bullet})$ 'e sahibiz, ve böylece aşağıdaki diyagramda bir lifting vardır:

$$\begin{array}{ccc}
Sk^{n-1}M_{\bullet} & \longrightarrow & X_{\bullet} \\
Sk^{n-1}f_{\bullet} \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow g_{\bullet} \\
Sk^{n-1}M'_{\bullet} & \longrightarrow & Y_{\bullet}
\end{array}$$

Şimdi,  $Sk^{n-1} = sk^{n-1}tr^{n-1}$  ve  $sk^{n-1} \vdash tr^{n-1}$  olduğundan, aşağıdaki değişmeli diyagrama sahibiz

$$\begin{array}{ccc}
tr^{n-1}(M_{\bullet}) & \xrightarrow{tr^{n-1}(u_{\bullet})} & tr^{n-1}(X_{\bullet}) \\
tr^{n-1}(f_{\bullet}) \downarrow & \nearrow tr^{n-1}(h_{\bullet}) & \downarrow tr^{n-1}(g_{\bullet}) \\
tr^{n-1}(M'_{\bullet}) & \xrightarrow{tr^{n-1}(v_{\bullet})} & tr^{n-1}(Y_{\bullet})
\end{array}$$

ve böylece  $q \geq n$  için  $h_q : M'_q \rightarrow X_q$  tanımlamalıyız.

$x \in M'_n$  olduğu verilsin,  $g_{\bullet}$  aşikar bir  $S$ -fabreyşin olduğundan,  $0 \leq i \leq n$  için  $d_i x' = h_{n-1} d_i x$  ve  $g_n(x') = v_n(x)$  olacak şekilde bir tek  $x' \in X_n$  vardır. Bu takdirde  $h_n(x) = x'$  tanımlarız. Açıkça,  $0 \leq i \leq n$  için  $g_n h_n = v_n$  ve  $d_i h_n = h_{n-1} d_i$ .  $x'$ 'in tekliği  $h_n$ 'nin bir küme morfizimi olmasını ve  $h_n f_n = u_n$  ve  $s_i h_{n-1} = h_n s_i$  olmasını gerektirir. Bu dönüşüm,  $h_{\bullet} : M'_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$  simplişil bir dönüşüme genişletilir (örneğin, [4, Sonuç 1.8]'e bakınız).  $\square$

### 1.3 ${}_{|r}T_n^s$ 'de Homotopi Teorisi:

$\text{Simp}(M_p)$ 'de kapalı model yapısı ile ilişkilendirilmiş homotopi teorisinde bazı yapıları hatırlatmaya başlayalım.

Herhangi bir  $M_.$  simplişil küme ve herhangi bir  $K_.$  simplişil kümesi için  $M_. \otimes K_.$ ,  $(M_. \otimes K_.)_n = \coprod_{x \in K_n} (M_n)_x$ ,  $(M_n)_x = M_n \quad \forall x \in K_n$  ve doğal simplişil işlemler ile birlikte simplişil kümedir. Özellikle,  $I = \Delta[1]$  ise,  $\forall i$  için  $(M_. \otimes I)_n = \coprod_{i=0}^{n+1} (M_n)_i$ ,  $(M_n)_i = M_n \cdot M_.$  eşfabreyşin ise, eşdiagonal morfizimin bir çarpanına sahip olduğundan  $\text{Simp}(M_p)$ 'deki  $M_.$  için bir silindir nesnesinin bu yapısını verir, özdeşlikler ile üretilen morfizim  $\sigma$  olmak üzere  $M_. \coprod M_. \xrightarrow{i_0+i_1} M_. \otimes I \xrightarrow{\sigma} M_.$  zayıf denklidir ve  $i_0 + i_1$  sırasıyla ilk ve son kapsamalarla doğrulan morfizimler olup eşfabreyşindir.

$M'_. \in \text{Simp}(M_p)$  ve  $K_. \in \text{Simp}(\text{Küme})$  verilsin,  $M_.'^{K_.'}$ 'nin,  $n$ -simplişilları  $(M_.'^{K_.'})_n = \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{küme})}(K_. \times \Delta[n], M'_.)$  olan  $\text{Hom}_{\text{Simp}(\text{küme})}(K_., M'_.)$  simplişil kümesi olduğunu hatırlatalım.  $K_. = I$  ise, bu takdirde  $(M_.'^I)_n$ ,

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in M_{n+1}' \mid d_i x_i = d_i x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesi ile tanımlanabilir, yüz (face) ve bozulmuş operatörler

$$\begin{aligned} d_i(x_0, \dots, x_n) &= (d_{i+1}x_0, \dots, d_{i+1}x_{i-1}, d_i x_{i+1}, \dots, d_i x_n), & 0 \leq i \leq n; \\ s_j(x_0, \dots, x_n) &= (s_{j+1}x_j, \dots, s_{j+1}x_j, \dots, s_j x_n), & 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

ile verilir.

$P_n(x) = (s_0 x, \dots, s_n x)$  ile verilen  $\rho$  bir zayıf denklik ve  $(\partial_0)_n(x_0, \dots, x_n) = d_0 x_0$  ve  $(\partial_1)_n(x_0, \dots, x_n) = d_{n+1} x_n$  tarafından oluşturulan  $(\partial_0, \partial_1)$  bir fabreyşin olmak üzere  $M'_. \xrightarrow{\rho} M_.'^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} M'_. \times M'_.$  diogonal morfizimin bir çarpanına sahip olduğundan  $\text{Simp}(M_p)$ 'deki  $M'_.$  için simplişil küme bir yol uzayıdır ( $\partial_0$  ve  $\partial_1$ 'in her ikisi de homotopik ters  $\rho$  ile birlikte bir kuvvetli bozulmuş geri çekilme olduğuna dikkat edelim.).

Bu silindirler ve yol yapıları,  $- \otimes I$  sol adjoint olduğunda  $(-)^I : \text{Simp}(M_p) \rightarrow \text{Simp}(M_p)$   $- \otimes I$  adjoint fanktörünü belirtir ve ayrıca onlar, (suspension ve loop fanktörler)  $\Sigma, \Omega : \text{Simp}(M_p) \rightarrow \text{Simp}(M_p)$  adjoint fanktörleri oluşturur ([2]'ye bakınız).

$[_r T_n]^S$ 'de yol uzayı nesnesinin yapısı aşağıdakileri gerektirir:

**Önerme 1.3.1:**  $M' \in [_0 T_n] \subseteq \text{Simp}(M_p)$  ve  $K' \in \text{Simp}(\text{küme})$  olsun. Bu takdirde  $M'^{K'} \in [_0 T_n]$ .

**İSPAT:** Aşağıdaki özdeşlikleri kullanacağız:  $\Delta_n$  standart  $n$ -simpleks ve  $\delta_i : \Delta[n] \rightarrow \Delta[n+1]$  "kapsama olarak  $i$ . yüz" ([8]'e bakınız) olmak üzere  $0 \leq i \leq n+1$  için  $d_i \Delta_{n+1} = \delta_i \Delta_n$  ve  $0 \leq j \leq n$  için  $d_j \delta_{n+1} \Delta_n = \delta_j d_n \Delta_n$ .

$f' \in N_{n+1}(M'^{K'})$  olsun, yani,  $f' : K' \times \Delta[n+1] \rightarrow M'$  bir simplişil dönüşümdür.  $f'$  sıfır dönüşüm olduğunu görmeliyiz ve ispat aşağıdaki basamaklarda yapılır:

- Herhangi bir  $x \in K'_{n+1}$  için,  $f'_{n+1}(x, \Delta_{n+1}) = 0$ .
- Herhangi bir  $x \in K'_{n+1}$  ve  $0 \leq j \leq n$  için  $f'_{n+1}(x, s_j(\delta_{n+1} \Delta_n)) = 0$ .
- Herhangi bir  $x \in K'_n$  ve herhangi  $\tau \in (\Delta[n+1])_n$  için  $f'_n(x, \tau) = 0$ .
- Herhangi bir  $q \geq 0$  için  $f'_q = 0$ .

Her bir basamağın ispatı açıktır. □

Özellikle, herhangi bir  $M' \in [_r T_n]$  için  $[_0 T_n]$ 'de bir nesne olan  $\text{Simp}(M_p)$ 'de  $M'$ ,  $M'^I$  için yol elemanına sahibiz. Bu takdirde,  $M'^I = E_r(M'^I) \in [_r T_n]$  tanımlarız.

$\text{Simp}(M_p)$ 'de köşegen morfizimin bir çarpanını göz önüne alırsa

$$M' \xrightarrow{\rho} M'^I \xrightarrow{(\hat{c}_0, \hat{c}_1)} M' \times M',$$

ve bir  $E_r$  fanktörü uygulanırsa,  $[_r T_n]$ 'de köşegen morfizimin çarpanını

$$M' \xrightarrow{E_r \rho} M'^I \xrightarrow{E_r(\hat{c}_0, \hat{c}_1)} M' \times M'$$

olarak elde ederiz. Bu takdirde aşağıdakilere sahibiz:

**Önerme 1.3.2:**  $M', [{}_r T_n]^S$  'de bir fabreyşin nesne olarak verilmiş,  $M'^L [{}_r T_n]^S$  'de  $M'$  için bir yol elemanıdır.

**İSPAT:**  $E_r(\rho)$  nin zayıf  $S$  -denkliği olduğu açıktır.

Şimdi, Önerme 1.2.2'nin kullanılmasıyla  $E_r(\partial_0, \partial_1)$  'in bir  $S$  -fabreyşin olduğunu göreceğiz.  $(\partial_0, \partial_1)$  bir fabreyşin olduğunda,  $r+1 \leq q \leq n$  için  $N_q(E_r(\partial_0, \partial_1))$  'nin örten olduğunu elde ederiz ve  $\pi_q(\text{Çek}(E_r(\partial_0, \partial_1)))$  'in  $S$  -tek olarak bölünebilir olduğunu ve  $\text{EşÇek}(\pi(E_r(\partial_0, \partial_1)))$  'nin  $S$  -serbest burulma olduğunu ispatlamalıyız.

İlkini ispatlamak için,

$$K. = \text{Çek}(E_r(\partial_0, \partial_1)) \rightarrow M'^L \xrightarrow{E_r(\partial_0, \partial_1)} M' \times M'$$

fiber dizisi ile birleştirilmiş

$$\dots \rightarrow \pi_q(M'^L) \rightarrow \pi_q(M' \times M') \rightarrow \pi_{q-1}(K.) \rightarrow \pi_{q-1}(M'^L) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisini göz önüne alalım.

Şimdi,  $r \leq q \leq n$  için  $\pi_q(M'^L) \cong \pi_q(M')$  ve  $M'$ ,  $S$  -fabreyşin olduğundan,  $\pi_q(M') \cong S^{-1}\pi_q(M')$  'dir. Diğer taraftan,

$$\pi_q(M' \times M') \cong \pi_q(M') \times \pi_q(M') \cong S^{-1}(\pi_q(M' \times M'))$$

bu nedenle  $\pi_q(K.) \cong S^{-1}\pi_q(K.)$ , yani,  $r \leq q \leq n$ ,  $\pi_q(K.)$  'nin  $S$  -tek olarak bölünebilir olduğu açıktır.

Eğer  $C. = \text{EşÇek}(\pi_r, (E_r(\partial_0, \partial_1)))$  ise,  $C. \cong S^{-1}C.$  olduğundan ve her iki  $\pi_r(M'^L) \rightarrow S^{-1}(\pi_r(M'^L))$  ve  $\pi_r(M' \times M') \rightarrow S^{-1}(\pi_r(M' \times M'))$  morfizmi de izomorfizm olduğundan ikincisinin de ispatı açıktır.  $\square$

Yukarıdaki yapı,  $\Omega(M') = \text{Çek}(M'^L \rightarrow M' \times M')$  ile tanımlanan başka bir  $\underline{\Omega}: {}_{[r]T_n} \rightarrow {}_{[r]T_n}$  fanktörünü oluşturan  $(-)^L: {}_{[r]T_n} \rightarrow {}_{[r]T_n}$  fanktörünü verir.  $\underline{\Omega}(M') \cong E_r(\Omega(M'))$  ve bu fanktörün  $\text{Ho}({}_{[r]T_n}^S)$ 'de loop fanktörünü tanımladığına dikkat edelim.

Daha sonra,  ${}_{[r]T_n}^S$ 'de bir silindir yapısı vereceğiz.  $M. \in {}_{[r]T_n}$  verildiğinde  $M. \otimes I \in \text{Simp}(M_p)_r$  ve böylece  $\mathcal{S}(M. \otimes I) \in {}_{[r]T_n}$  elde edilir. Bu takdirde  $M. \otimes I = \mathcal{S}_n(M. \otimes I)$  tanımlanır ve  $\text{Simp}(M_p)_r$  (veya  $\text{Simp}(M_p)$ )'deki benzer çarpanlara  $\mathcal{S}_n$  fanktörünün uygulanmasıyla

$$M. * M. \xrightarrow{i_0 + i_1} M. \otimes I \xrightarrow{\sigma} M.,$$

eşdiagonal morfizimin bir çarpımını elde ederiz.

**Önerme 1.3.3:**  $M., {}_{[r]T_n}^S$ 'de bir eşfabreyşin nesne olsun. Bu takdirde  $M. \otimes I, {}_{[r]T_n}^S$ 'de  $M.$  için bir silindir nesnesidir.

**İSPAT:**  $\sigma = \mathcal{S}_n(\sigma)$ 'nin bir zayıf  $S$ -denklik olduğu,  $\mathcal{S}_n(M.)$ 'nin homotopi kümelerinin değerine göre açıktır.

Üstelik,  $tr^{n-1}(M.)$  bir kesik serbest simplişil küme olduğunda,  $i_0 + i_1$  morfizimi bir eşfabreyşindir, çünkü  $tr^{n-1}(i_0 + i_1)$  bir serbest dönüşümdür (Önerme 1.2.8'e bakınız).  $\square$

Yukardaki yapı, bir  $-\otimes I: {}_{[r]T_n} \rightarrow {}_{[r]T_n}$  fanktörünü verir. Daha sonra, bunun  $(-)^L$  fanktörünün sol adjointi olduğunu ispatlayacağız.

Bunun için, ilk önce aşağıdakileri ispatlayalım:

**Önerme 1.3.4:**  $-\otimes I: {}_{[0]T_n} \rightarrow {}_{[0]T_n}$  fanktörü,  $(-)^L$  fanktörünün bir sol adjointidir. Sonuç olarak, herhangi bir  $M. \in \text{Simp}(M_p)_r$  için  $\mathcal{S}_n(M.) \otimes I \cong \mathcal{S}_n(M. \otimes I)$  olduğunu elde ederiz.



**İSPAT:**  $M_., M' \in {}_{[0]T_n}$  verildiğinde

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{[0]T_n}(M_., \underline{\otimes} I, M') &= \text{Hom}_{[0]T_n}(\mathcal{S}_n(M_., \underline{\otimes} I), M') \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_.)}(M_., \underline{\otimes} I, M') \\ &\cong \text{Hom}_{[r]T_n}(M_., E_r(M'^I)) = \text{Hom}_{[r]T_n}(M_., M'^I). \end{aligned}$$

Şimdi,  $(-\underline{\otimes} I)_{\mathcal{S}_n}$  ve  $\mathcal{S}_n(-\underline{\otimes} I)$  fanktörleri doğal olarak denkliklidir, çünkü ikisi de  $(-)^I J = J(-)^I$  fanktörünün sol adjointidir.  $\square$

**Sonuç 1.3.5:**  $-\underline{\otimes} I : [r]T_n \rightarrow [r]T_n$  fanktörü,  $(-)^I$  fanktörünün sol adjointidir.

**İSPAT:**  $M_., M' \in [r]T_n$  verildiğinde

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{[r]T_n}(M_., \underline{\otimes} I, M') &= \text{Hom}_{[0]T_n}(M_., \underline{\otimes} I, M') \cong \text{Hom}_{[0]T_n}(M_., M'^I) \\ &\cong \text{Hom}_{[r]T_n}(M_., E_r(M'^I)) = \text{Hom}_{[r]T_n}(M_., M'^I). \end{aligned}$$

elde ederiz.  $\square$

$M_., \in [r]T_n$  verildiğinde,  $\underline{\Sigma}(M_.) = \text{EşÇek}(M_., * M_., \rightarrow M_., \underline{\otimes} I)$  tanımlanır ve  $\underline{\Sigma} M_., \cong \mathcal{S}_n(\underline{\Sigma} M_.)$  olduğu açıktır. Bu takdirde  $\underline{\Omega}$ 'nın sol adjointi olan bir  $\underline{\Sigma} : [r]T_n \rightarrow [r]T_n$  fanktörünü elde ederiz ve bu  $\text{Ho}([r]T_n^S)$ 'de suspension fanktörünü üretir.

#### 1.4 $[r]T_n$ 'de Simplişil Yapı:

$\text{Simp}(M_p)$  kategorisi [5]'de bir kapalı simplişil model kategorisidir, burada  $F_t(x) = F_q(x, t)$  ile verilen  $F_t : M_q \rightarrow M'_q$  bir küme morfizimi veya denk olarak  $M_., \underline{\otimes} \Delta[n] \rightarrow M'$  simplişil morfizimi olacak şekilde  $F_., : M_., \times \Delta[n] \rightarrow M'$   $n$ -simplişil dönüşümleri gibi  $\underline{\text{Hom}}_{\text{Simp}(M_p)}(M_., M')$  kompleks fonksiyonuna sahiptir.

$f_., g_., : M_., \rightarrow M'$  verilen morfizimi,  $f_.,$  ve  $g_.,$   $\underline{\text{Hom}}_{\text{Simp}(M_p)}(M_., M')$ 'nin 0-simpleksleri olduğunda  $f_., g_.,$ 'ya homotopik ise  $f_., g_.,$ 'ya simplişil homotopiktir,  $f_.,$ 'den  $g_.,$ 'ye bir simplişil homotopi  $d_0 F_., = f_.,$  ,  $d_1 F_., = g_.,$  ve  $F_t : M_q \rightarrow M'_q$  bir küme morfizimi olacak şekilde  $F_., : M_., \times I \rightarrow M'$  bir simplişil dönüşümdür. Bu, ya  $K_i_0 = f_.,$  ve  $K_i_1 = g_.,$  eşitliklerini sağlayan

bir  $K : M_\bullet \otimes I \rightarrow M'_\bullet$  simplişil morfizimin yada  $\partial_0 K' = f$  ve  $\partial_1 K' = g$  eşitliklerini sağlayan bir  $K' : M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$  simplişil morfizimini vermeye denktir.

Kapalı bir simplişil model kategorisi için,  $f, g : X \rightarrow Y$  morfizimler ve  $X$  bir eşfabreyşin,  $Y$  de fabreyşin ise, bu takdirde sol ve sağ homotopi bağıntıları birbirine çakışan ve bunların denk bağıntılar olması genel bir gerçektir. Bu,  $\text{Simp}(M_p)$ 'nin herhangi bir simplişil  $M'_\bullet$  kümesi için  $\text{Hom}_{\text{Ho}(\text{Simp}(M_p))}(M_\bullet, M'_\bullet) = [M_\bullet, M'_\bullet]$ 'in  $M_\bullet$ 'dan  $M'_\bullet$ 'ya simplişil homotopi kümelerinin simplişil homotopi sınıflarının kümesi olduğunda  $M_\bullet$ 'nin bir serbest simplişil küme olması durumudur.

Herhangi  $r \geq 0$  için, aşağıdaki morfizimlerin sınıflarını göz önüne alarak,  $\text{Simp}(M_p)$ 'de kapalı model yapısı genelleştirilmiştir: Fabreyşinler ( $\bar{r}$ -eşfabreyşin olarak adlandırılır) boyutları  $> r+1$  de Kan fabreyşin olan  $f$  morfizimleridir;  $q \geq r$  için  $\pi_q(f)$  bir izomorfizm olacak şekilde zayıf denklikler (zayıf  $\bar{r}$ -denklikleri olarak adlandırılır) bu  $f$  morfizimleridir; eşfabreyşinler ( $\bar{r}$ -eşfabreyşinler olarak adlandırılır), aşikar  $\bar{r}$ -fabreyşinlere göre LLP'ye sahip olan morfizimlerdir.

Amacımız,  ${}_{[r]T_n}^{\{1\}}$  kategorisinin kapalı bir simplişil model kategorisi olduğunu göstermektir. Bunun için, öncelikle  $\text{Simp}(M_p)$ 'nin  $\bar{r}$ -yapısı ile aynı zamanda kapalı bir simplişil model kategorisi olduğunu görürüz.

Geriye sadece,  $i : M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$  verilen bir  $\bar{r}$ -eşfabreyşin (bunu bir serbest dönüşüm olarak kabul edeceğiz) verildiğinde aşağıdaki diyagramda  $u_\bullet + v_\bullet$  (sırasıyla  $s_\bullet + t_\bullet$ ) morfiziminin bir  $\bar{r}$ -eşfabreyşin (sırasıyla bir aşikar  $\bar{r}$ -eşfabreyşin) olduğunu ve ayrıca  $i_\bullet$ 'da bir  $\bar{r}$ -zayıf denklik ise  $u_\bullet + v_\bullet$ 'nin da bir zayıf  $\bar{r}$ -denkliği olduğunu ispatlamak kalır.

$$\begin{array}{ccc}
 M_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n] & \xrightarrow{\quad} & M_\bullet \otimes \Delta[n] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M'_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n] & \xrightarrow{\quad} & M_\bullet \otimes \Delta[n] \amalg_{M_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n]} M'_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n] \\
 & \searrow^{u_\bullet} & \searrow^{v_\bullet} \\
 & & M'_\bullet \otimes \Delta[n] \\
 & \searrow^{u_\bullet + v_\bullet} & \\
 & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
M_{\bullet} \otimes \Delta[1, k] & \longrightarrow & M_{\bullet} \otimes \Delta[1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
M_{\bullet} \otimes \Delta[1, k] & \longrightarrow & M_{\bullet} \otimes \Delta[1] \amalg_{M_{\bullet} \otimes \Delta[1, k]} M'_{\bullet} \otimes \Delta[1, k] \\
& \searrow & \nearrow \\
& & M'_{\bullet} \otimes \Delta[1]
\end{array}
\quad k = 0, 1$$

$t_{\bullet}$

$s_{\bullet} + t_{\bullet}$

$s_{\bullet}$

$u_{\bullet} + v_{\bullet}$ 'nin bir  $\bar{r}$ -eşfabreyşin olduğunu ispatlamak için, [2]'de verilmiş olan karakterizasyonu kullanırız.  $i_{\bullet}$  simplişil kümelerin bir eşfabreyşini olduğunda,  $u_{\bullet} + v_{\bullet}$ 'nin da simplişil kümelerin bir eşfabreyşini olduğuna dikkat edelim. (Çünkü  $\text{Simp}(M_p)$  kapalı bir simplişil model kategorisidir).  $tr^{r-1}(u_{\bullet} + v_{\bullet})$ 'nin bir izomorfizim olduğu açıktır ve bu nedenle sadece  $y \in (M'_{\bullet} \otimes \Delta[n])_r$  için,  $(x_0, \dots, x_r, y) \in \Delta^{r+1}(M'_{\bullet} \otimes \Delta[n])$  olacak şekilde  $x_0, \dots, x_r \in M_{\bullet} \otimes \Delta_n[n] \amalg_{M_{\bullet} \otimes \Delta[n]} M'_{\bullet} \otimes \Delta[n]$  var olduğunu ispatlamalıyız (burada  $\Delta^{r+1}$ ,  $(r+1)$ -simplişil çekirdeğini gösterebiliriz).

Şimdi,  $M'_r = M_r \amalg FU_r$  yazarsak,  $u_r + v_r$ 'nin aşağıdaki kapsama morfizimi olduğunu elde ederiz:

$$\begin{array}{c}
\left[ \amalg_{\tau \in (\Delta[n])_r} M'_r \right] \amalg \left[ \amalg_{\tau \in (\Delta[n])_r, -(\Delta[n])_r} M_r \right] \\
\downarrow u_r + v_r \\
\left[ \amalg_{\tau \in (\Delta[n])_r} M'_r \right] \amalg \left[ \amalg_{\tau \in (\Delta[n])_r, -(\Delta[n])_r} M_r \right] \amalg \left[ \amalg_{\tau \in (\Delta[n])_r, -(\Delta[n])_r} FU_r \right]
\end{array}$$

ve böylece,  $\amalg_{\tau \in (\Delta[n])_r, -(\Delta[n])_r} FU_r$ 'nin temel elemanları için yukarıdaki şartı ispatlamak yeterlidir.

Herhangi bir  $y \in M'_r$  ve  $\tau \in (\Delta[n])_r$  için,  $j_{\tau}$  birebir  $\tau$  elemanına karşılık gelmek üzere  $y^{\tau} = j_{\tau} y$ 'i göstereceğiz.

Şimdi,  $y \in U_r$  ve  $\tau \in (\Delta[n])_r - (\dot{\Delta}[n])_r$  olsun.  $i$ . bir  $\bar{r}$ -eşfabreyşin olduğundan  $(x_0, \dots, x_r, y) \in \Delta^{r+1}(M')$  olacak şekilde  $x_0, \dots, x_r \in M_r$  vardır ve  $0 \leq i \leq r$  için  $x'_i = x_i^{Sd_i \tau}$  eşitliği göz önüne alınırsa  $(x'_0, \dots, x'_r, y^\tau) \in \Delta^{r+1}(M' \otimes \Delta[n])$  olduğunu görmek açıktır. Bu takdirde  $u. + v.$ 'nin bir  $\bar{r}$ -eşfabreyşin olduğu sonucuna varırız.

Diğer iddialar benzer şekilde ispatlanabilir ve bu takdirde aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

**Önerme 1.4.1:**  $\bar{r}$ -yapılı  $\text{Simp}(M_p)$  kategorisi bir kapalı simplişil model kategorisidir.

Şimdi,  ${}_{[r]T_n}^{\{1\}}$ 'in bir kapalı simplişil model kategorisi olduğunu göstermeliyiz. Simplişil yapısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$M., M' \in {}_{[r]T_n}$  verilsin,  $\underline{\text{Hom}}_{{}_{[r]T_n}}(M., M') = \underline{\text{Hom}}_{\text{Simp}(M_p)}(M., M')$  alalım. Herhangi  $K. \in \text{Simp}(\text{Küme})$  için

$$\alpha. : K. \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{Simp}(M_p)}(M., M. \otimes K.) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{Simp}(M_p)}(M., \mathcal{S}_n(M. \otimes K.)),$$

$$\beta. : K. \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{Simp}(M_p)}(M.'^{K.}, M') \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{Simp}(M_p)}(E_r(M.'^{K.}), M').$$

ile verilen,  $\alpha. : K. \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{{}_{[r]T_n}}(M., M. \otimes K.)$  ve  $\beta. : K. \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{{}_{[r]T_n}}(M.'^{K.}, M')$  ayrık dönüşümleri ile birlikte  ${}_{[r]T_n}$ 'de  $M. \otimes K. = \mathcal{S}_n(M. \otimes K.)$  ve  $M.'^{K.} = E_r(M.'^{K.})$  nesnelere vardır.

Bu takdirde aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

**Teorem 1.4.2:**  ${}_{[r]T_n}^{\{1\}}$  kategorisi bir kapalı simplişil model kategorisidir.

**İSPAT:**  ${}_{[r]T_n}$  kategorisi,

$$\underline{\text{Hom}}_{{}_{[r]T_n}}(M. \otimes K., M') \cong \underline{\text{Hom}}_{{}_{[r]T_n}}(M., M.'^{K.})$$

olduğundan aşağıdaki tanımlarla birlikte simplişil kategorisidir. Çünkü,

$$\begin{aligned}
[\underline{\text{Hom}}_{[rT_n]}(M. \otimes K., M')]_q &= \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}((M. \otimes K.) \otimes \Delta[q], M') \\
&= \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(\mathcal{S}_n(M. \otimes K.) \otimes \Delta[q], M') \\
&\cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(\mathcal{S}_n(M. \otimes K.), M'^{\Delta[q]}) \\
&= \text{Hom}_{[0T_n]}(\mathcal{S}_n(M. \otimes K.), M'^{\Delta[q]}) \\
&\cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(M. \otimes K.), M'^{\Delta[q]}) \\
&\cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(M., (M'^{\Delta[q]})^{K.}) \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(M., M'^{\Delta[q] \times K.}) \\
&\cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(M., (M'^{K.})^{\Delta[q]}) \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(M. \otimes \Delta[q], M'^{K.}) \\
&\cong \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)_r}(M. \otimes \Delta[q], E_r(M'^{K.})) = \text{Hom}_{\text{Simp}(M_p)}(M. \otimes \Delta[q], M'^{K.}) \\
&= [\underline{\text{Hom}}_{[rT_n]}(M., M'^{K.})]_q.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak [6]'da ifade edildiği gibi SM7(a) aksiyomunu ispatlayacağız. Bu takdirde  $[rT_n]$ 'de  $f. : M. \rightarrow M'$  bir (aşıkâr) fabreyşin verilsin,  $e = 0, 1$  için  $\gamma. : M.^{\Delta[q]} \rightarrow M.^{\Delta[q]} \times_{M.^{\Delta[q]}} M.'^{\Delta[q]}$ , in bir (aşıkâr) fabreyşin ve  $\lambda. : M.^{\Delta[1]} \rightarrow M.^{\{e\}} \times_{M.^{\{e\}}} M.'^{\Delta[1]}$ , in bir aşıkâr fabreyşin olduğunu ispatlamalıyız.

Şimdi,  $\text{Simp}(M_p)$ 'de  $f.$ 'nin bir aşıkâr  $\bar{r}$ -fabreyşin olduğu açıktır ve böylece  $\bar{r}$ -yapısı ile  $\text{Simp}(M_p)$ 'nin kullanılması SM7(a)'yı sağlar (Önerme 1.4.2'ye bakınız),

$\delta. : M.^{\Delta[q]} \rightarrow M.^{\Delta[q]} \times_{M.^{\Delta[q]}} M.'^{\Delta[q]}$ , in bir (aşıkâr)  $\bar{r}$ -fabreyşin olmasına sahibiz. Şu halde,  $E_r$  uygulanırsa  $E_r(\delta.) = \gamma.$ 'in  $\mathcal{S}(r, \{1\})$ 'de bir (aşıkâr) fabreyşin olduğunu elde ederiz ve böylece  $[rT_n]^{\{1\}}$ 'de bu bir (aşıkâr) fabreyşindir.

Benzer bir yolla  $\lambda.$  morfiziminin bir aşıkâr fabreyşin olduğu ispat edilebilir.  $\square$

**Teorem 1.4.3:**  $\text{Ho}([rT_n]^S)$  homotopi kategorisi;  $r \leq q \leq n$  için  $tr^{n-1}(M.)$  bir  $(n-1)$ -kesik serbest simplişil küme ve  $\pi_q(M.)$ ,  $S$ -tek olarak bölünebilir olacak şekilde nesnelere  $M. \in [rT_n]$  olan ve morfizimleri, simplişil küme morfizimlerinin simplişil homotopi sınıfları olan kategorisine denktir.

**İSPAT:**  ${}_{[r]T_n}^S$ 'de fabreyşin ve eşfabreyşin nesnelere, serbest  $(n-1)$ -kesik ve  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi kümeleri ile birlikte  ${}_{[r]T_n}$ 'in nesnelere dir. Eğer  $M_.$ ,  ${}_{[r]T_n}^S$ 'de faybrint (sırasıyla eşfaybrint ise)  $M_.$ ,  ${}_{[r]T_n}^{\{1\}}$ 'de faybrint (sırasıyla eşfaybrint) ve  ${}_{[r]T_n}^S$  ve  ${}_{[r]T_n}^{\{1\}}$ 'de model kategorilerinin her ikisinde yol ve silindir yapıları aynı olduğundan  $\text{Hom}_{\text{Ho}({}_{[r]T_n}^S)}(M_., M'_.) = \{M_.'\text{den } M'_.'\text{ya morfizimlerin } {}_{[r]T_n}^S\text{'deki sağ homotopi sınıfları} \equiv \text{sol homotopi sınıfları}\} = \{M_.'\text{dan } M'_.'\text{ya morfizimlerin } {}_{[r]T_n}^{\{1\}}\text{'deki sağ homotopi sınıfları} \equiv \text{sol homotopi sınıfları}\}$  ifadesini elde ederiz.

Fakat bu son küme,  ${}_{[r]T_n}^{\{1\}}$  bir kapalı simplişil model kategorisi olduğundan  $M_.'$ 'dan  $M'_.'$ 'ya morfizimlerin simplişil homotopi sınıflarının kümesidir, ve böylece  $M_.$  eşfaybrint ve  $M'_.$  faybrint için sol, sağ ve simplişil homotopi bağıntıları çıkarılır.

**Teorem 1.4.4:**  $\text{Ho}({}_{[r]T_n}^S)$  kategorisi;  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi kümeleri ile birlikte nesnelere, noktasal  $r$ -bağılantılı ve  $(n+1)$ -eşbağılantılı  $CW$ -kompleksler ve morfizimleri, baz nokta-korunumlu dönüşümlerin homotopi sınıfları olan kategoriye denktir.

**İSPAT:**  $I \vdash E_r$  adjunction'u

$$\text{Ho}({}_{[r]T_n}^S) \cong \text{Ho}({}_{[r]T_\infty}^S | (n+1)\text{-eşbağılantılı})$$

denkliğini üretir ve  $\text{Ho}({}_{[r]T_\infty}^S)$ ;  $S$ -tek olarak bölünebilir homotopi kümeleri ile birlikte nesnelere noktasal  $r$ -bağılantılı  $CW$ -kompleksleri ve morfizimleri, baz nokta-korunumlu dönüşümlerin homotopi sınıfları olan kategoriye denktir ( [6, Teorem 3.1 ve 6.1 ]'e bakınız ).  $\square$

**Sonuç 1.4.5:** Eğer  $S = \mathbb{Z} - \{0\}$  ise,  $\text{Ho}({}_{[1]T_n}^S)$ ;  $2 \leq q \leq n+1$  için  $\pi_q(X)$  bir serbest burulma bölünebilir abelyan küme ile birlikte nesnelere, 1-bağılantılı ve  $(n+1)$ -eşbağılantılı noktasal  $CW$ -kompleksleri  $X$  ve morfizimleri, baz nokta-korunumlu dönüşümlerin homotopi sınıfları olan kategoriye denktir.

### 1.5 ${}_r T_{r+1}$ 'de Serre Teorisi:

$r$ 'nin özel değerleri için  $n = r + 1$  olmak üzere  ${}_r T_n$  kategorisi diğer iyi-bilinen kategorilere denktir.  ${}_{[0]1} T_1$  cat-kümelerinin  $\text{Cat}(M_p)$  kategorisine,  ${}_{[1]2} T_2$  braided cat-kümelerinin  $\mathcal{B}\text{Cat}(M_p)$  kategorisine denktir ve eğer  $r \geq 2$  ise  ${}_r T_{r+1}$  simetrik cat-kümelerinin  $\mathcal{C}\text{Cat}(M_p)$  kategorisine denktir (Örneğin bütün bu kategorilerin açık tanımlamaları için [1]'e bakınız).

Eğer  $\underline{C}$ ,  $\text{Cat}(M_p)$ ,  $\mathcal{B}\text{Cat}(M_p)$  veya  $\mathcal{C}\text{Cat}(M_p)$  kategorilerinin herhangi birini gösterirse,  $\psi_r : {}_r T_{r+1} \rightarrow \underline{C}$  denkliği aşağıdaki gibi açıkça verilir ([11]'e bakınız):

Eğer  $M. \in {}_r T_{r+1}$  ise,  $r \geq 1$  için "braiding" herhangi  $p, q \in M_r$  için  $\tau_{p,q} = s_{r-1}p + s_r q - s_{r-1}p + s_r p$  ile verilmek üzere

$$\psi_r(M_\bullet) = M_{r+1} \cap (\text{Ker } d_0 \cap \dots \cap \text{Ker } d_{r-1}) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_r} \\ \xrightarrow{d_r} \\ \xrightarrow{d_{r+1}} \end{array} M_r$$

$(\psi_{r-1})^{-1} \psi_r : {}_r T_{r+1} \rightarrow {}_{r-1} T_r$ 'in [8]'de göz önüne alınan loop  $\Omega$  fanktörü olduğuna dikkat edelim; bu fanktör  $r \geq 3$  için  ${}_r T_{r+1} \cong {}_{r-1} T_r$  denkliğini verir.

Eğer  ${}_r T_{r+1}$ 'deki  $S$ -yapısı göz önüne alınırsa,  $\Omega$ 'nın  $S$ -fabreyşinlarını ve zayıf  $S$ -denkliklerini koruduğunu ve yansıttığını ispat etmek kolaydır ve böylece bu denklik  $r \geq 2$  için  ${}_r T_{r+1}$ 'deki  $S$ -yapısını  ${}_{[2]3} T_3$ 'deki  $S$ -yapısına taşır.

[1]'de  $\text{Cat}(M_p)$  kategorisi bir kapalı model kategorisi olarak gösterilmiştir ve şimdi  $\psi_0$  yoluyla  $\text{Cat}(M_p)$ 'nin bu  ${}_{[0]1} T_1$  model yapısından başka bir model yapısına kalıtsal özelliğine sahibiz. Her iki yapının aynı olduğunu göstermek açıktır.

$\psi_1$  (sırasıyla  $\psi_r$ ,  $r \geq 2$  için) denkliği, herhangi  $S$  için  $\mathcal{B}\text{Cat}(M_p)$ 'de (sırasıyla  $\mathcal{C}\text{Cat}(M_p)$ ) bir kapalı model yapısını tanımlar.  $S = \{1\}$  olması durumundaki bu yapı daha önce [1]'de çalışıldı.

$\psi_0$ 'ın yol uzayı ve silindir nesnesinin homotopi inşa yapısının korunduğunun ilginç olduğuna dikkat edelim, yani, eğer  $M_0, M'_0 \in [0T_1]$  ise,  $\psi_0(M'_0) = (\psi_0(M_0))'$  ve  $\psi_0(M_0 \otimes I) = \psi_0(M_0) \otimes I$ 'dir (  $(\psi_0(M_0))'$  ve  $\psi_0(M_0) \otimes I$  inşaları için [1]'e bakınız). Bununla beraber  $r \geq 1$  için  $\psi_r$  denkleği bu homotopi inşalarını korumaz.

Örneğin,  $\mathcal{H} = M'_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} M'_0$  [1]'de verilen bir braided cat-kümesi  $\mathcal{H}^I$  yol uzayı inşasını ve de  $\mathcal{H}^L = \psi_1[(\psi_1^{-1} \mathcal{H})^L]$  nesnesini göz önüne alabiliriz (  $\mathcal{H}^L, \mathcal{H}$  için bir yol uzay nesnesidir). Şimdi verilmiş iki morfizm  $f, g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$  olsun,  $f$ 'ten  $g$ 'ye bir sağ homotopi tanımdan dolayı,  $\mathcal{C}$ 'den  $\mathcal{H}$  için bir yol uzayı nesnesine bir morfizmdir ([5]'e bakınız). Eğer  $\mathcal{H}^L$  göz önüne alınır, bu takdirde  $f$ 'ten  $g$ 'ye bir sağ homotopi sadece bir küme morfizmi olan  $\alpha = f \Rightarrow g$  doğal dönüşümdür; eğer  $\mathcal{H}^L$  göz önüne alınır bu takdirde  $f$ 'ten  $g$ 'ye bir sağ homotopi, küme morfizmi olan  $\alpha_0 - \alpha_1 + I f_0$   $f$ 'ten  $g$ 'ye bir doğal dönüşüm olmak üzere  $\alpha_0, \alpha_1: M_0 \rightarrow M'_1$  iki küme morfizminden ibarettir. Şimdi her iki inşanın da aynı olmadığı fakat sağ homotopi bağıntısının kesiştiği sonucunu çıkartmak açıktır.

$\mathcal{S} \text{Cat}(M_p)$  kategorisinde bütün bunların aynı sağ homotopi bağıntısını vermesine rağmen  $\mathcal{S} \text{Cat}(M_p)$ 'de herhangi  $\mathcal{H}$  nesnesi için,  $r \geq 2$  olmak üzere  $[rT_{r+1}]$  ile birlikte denkliklerden sonsuz yol uzayı yapılarının bir sonucunu elde ederiz. Silindir yapısı ve sol homotopi bağıntısı için de benzer bir durum vardır.

Sonuç olarak,  $[rT_{r+1}]$ 'deki  $S$ -yapısı, [1]'de göz önüne alınmış crossed modüllerin kategorisine de taşınabildiğine dikkat edelim.



## KAYNAKLAR

- [1] A.R. Garzon, J.G. Miranda, Homotopy theory for (braided) cat-groups, *Cahiers Topologie et Geom. Differentielle Categoriqes* **XXXVIII-2** (1997) 99-139.
- [2] A.R. Garzon, J.G. Miranda, Homotopy theory for truncated weak equivalences of simplicial groups, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **121** (1997) 51-74.
- [3] Barrat, Guggenheim, Moore, On semi-simplicial fibre bundles, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 636-657
- [4] D. Conduche, Modules croises generalises de longueur 2, *J. Pure Appl. Algebra* **34** (1984) 155-178.
- [5] D. Quillen, Homotopical Algebra, *Lecture Notes in Math.*, **Vol. 43**, Springer, Berlin, 1967.
- [6] D. Quillen, Rational homotopy theory, *Ann. Math.* **90** (1969) 205-295.
- [7] D. Quillen, The geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration, *Proc. AMS* **19** (1968), 1499-1500
- [8] E.B. Curtis, Simplicial homotopy theory, *Adv. in Math.* **6** (1971) 107-209.
- [9] E. H. Spanier, Algebraic topology, *McGraw-Hill* (1966)
- [10] Gabriel, P. and Zisman, M.: Calculus of Fractions and Homotopy Theory, *Springer, Berlin* (1966)
- [11] M. Bullejos, P. Carrasco, A.M. Cegarra, Cohomology with coefficients in symmetric cat-groups. An extension of Eilenberg-Mac Lane's classification theorem, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **114** (1993)163-189.
- [12] Milnor, J., The geometric realization of a semi-simplicial complex, *Ann. of Math.* **65** (1957), 357-362
- [13] J.G. Cabello, A.R. Garzon, Closed model structures for algebraic models of n-types, *J. Pure Appl. Algebra* **103** (1995) 287-302.
- [14] J.G. Miranda, Estructuras de modelos y teoria de homotopia en categorias de grupos y grupoides simpliciales, *Ph.D. Thesis, University of Granada*, 1995.
- [15] J.P. May, Simplicial objects in algebraic topology, *Van Nostrand* (1967)
- [16] J.P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abeliens, *Ann. Math.* **58** (1953) 258-294.
- [17] Kan, D. M., On c.s.s. complexes, *Amer. J. Math.* **78** (1957), 449-476
- [18] Kan, D. M., On homotopy theory and c.s.s. groups, *Ann. of Math.* **68** (1958), 38-53
- [19] Mutlu A., Peiffer pairings in the moore complex of a simplicial group, *Ph. D. Thesis*, 1997 U.W.B. Maths Preprint 97.11
- [20] P. Carrasco, A.M Cegarra, Group theoretic algebraic models for homotopy types, *J. Pure Appl. Algebra* **75** (1991) 195-235.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Çiğdem KONURALP  
Baba Adı : Kemal  
Ana Adı : Hidayet  
Doğum Tarihi : 26/11/1979  
Doğum Yeri : İstanbul

İlk öğrenimini İstanbul'da Firuzköy İlkokulunda 1986-90, Ortaokulu Bursa Kız Lisesinde 1990-92, liseyi Bursa Kız Lisesinde 1993-97 yılında tamamladı. 1998-2002 yıllarında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2002-2003 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladı, 2004 şubat ayında Rize iline öğretmen olarak atandı ve öğrenimini bir yıl süreyle dondurdu. 2005 şubat ayında eş durumu özrüyle Manisa Akhisar Lisesine atanarak, öğrenimine kaldığı yerden başladı ve hala öğrenimine devam etmektedir.