CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMPLİŞIL CEBİRLERİN KESİLMİŞ ZAYIF DENKLİKLERİ İÇİN HOMOTOPİ TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emel ÜNVER

Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Programı	**:**	**Topoloji**

MANİSA 2005

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMPLİŞIL CEBİRLERİN KESİLMİŞ ZAYIF DENKLİKLERİ İÇİN HOMOTOPİ TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK - Emel ÜNVER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12. 09. 2005

Tezin Savunulduğu Tarih : 21. 09. 2005

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU (Celal Bayar Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Necdet BİLDİK (Celal Bayar Üniversitesi)

:Prof. Dr. İsmet KARACA(Ege Ünv.Fen.Fak.Mat.Böl.)

MANİSA 2005

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu veren, çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU'ya, eğitimimde emeği geçen bütün hocalarıma ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Emel ÜNVER

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Sıfırıncı bölüm olarak adlandırılan önsözde bütün tezde yapılan çalışma kısaca sunulmuştur.

Birinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilerek simplişıl nesneler ve dönüşümler, k-cebir, simplişıl cebirler, kesilmiş simplişıl cebirler ve CW-kompleksleriyle beraber serbest simplişıl cebirler konularından bahsedildi.

İkinci bölümde simplişıl cebirlerin Quillen yapısı için homotopi teorisi, simplişıl cebirler için bazı sonuçlar ve hypercebirlerin özelliklerinin tanımları verilerek örneklerle incelendi.

Üçüncü bölümde r-bağlantılı uzayların cebirsel modelleri için Quillen model yapıları teoremlerle verildi.

Dördüncü bölümde simplişıl cebirlerin n-tipi için model yapısı teoremlerle ifade edildi.

Beşinci bölümde üçüncü ve dördüncü bölümde ifade edilen r ve n tipleri birleştirilerek simplişıl cebirlerin (r,n)-tipleri için Quillen model yapısı incelendi.

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.

In the preface chapter, the study at the whole thesis is presented shortly.

In the first chapter, basic definitions and theories that will be used in the other chapters are stated, and mentioned about simplicial objects and maps, k-algebras, simplicial algebras, truncated simplicial algebras and free simplicial algebras with CW-komplexes.

In the second chapter, homotopy theory for Quillen structure of simplicial algebras, some results for simlicial algebras are examined and definitions of peculiarities of hyperalgebras are given with examples.

In the third chapter, Quillen model structures for algebraic models of r-connected spaces are given with the theories.

In the fourth chapter, model structure for n-type of simplicial algebras is expressed with the theories.

In the fifth chapter, Quillen model structure for (r,n)-types of simplicial algebras is examined by associating r and n types which are expressed in the third and fourth chapters.

ÖNSÖZ

Simplişıl grupların bir zayıf denkliği $q \geq 0$ için homotopi grupları üzerinde $\pi_q(f_\bullet)$ izomorfizmlerini üreten bir $f_\bullet$ morfizmidir. Bundan başka, iyi bilindiği gibi, simplişıl grupların kategorisinin homotopi kategorisi (yani zayıf denkliklerine göre yerelleştirilmesi) indirgenmiş (yani bir köşe) Kan simplişıl cümlelerinin standart homotopi kategorisine denktir ve bu ayrıca bağlantılı CW-komplekslerin standart homotopi kategorisine denktir. Böylelikle, genel olarak simplişıl grupların bütün bağlantılı homotopi tiplerine model olduğunu söyleriz.

Bu gerçek, daha genel bir perspektiften görülebilir. Simplişıl cebirlerin $Simp(Alg)$ kategorisi **[35]**'teki Quillen'in fikrine göre bir kapalı model kategorisinin dikkate değer bir örneğidir $Simp(Alg)$'deki homotopi teorisi bu kapalı model yapısına birleştirilen homotopi teorisi gibi olur. Quillen tarafından kullanılan terminolojiye göre $Simp(Alg)$'deki homotopi teorisinin indirgenmiş simplişıl cümlelerin kategorisindeki homotopiye denk olduğuna ve bu sonuncunun da noktasal bağlantılı topolojik uzayların homotopi kategorisine denk olduğuna sahibiz.

Şimdi, $r \geq 0$ için noktasal r-bağlantılı $(X,*)$ uzaylarının kategorileri (yani, $q \leq r$ için $\pi_q(X,*) = 0$ ile birlikte) ya da n-eşbağlantılı uzayların kategorileri düşünülürse, ilk olarak $Simp(Alg)$'deki zayıf denkliklerin daha zayıf kavramlarını göz önüne alınırsa, bu takdirde bir homotopi teorisinin bir gelişmesine karşılık gelir. Zayıf denkliklerin daha zayıf tanımlarına karşılık gelen birleştirilmiş model yapılarının (yani, fibration ve cofibrationların uygun sınıfları) var olduğu gösterilerek yapılır ve daha sonra birleştirilmiş homotopi teorisi incelenir.

Bölüm 1'de konumuzda geçen temel tanım ve teoremleri vererek başlarız. Daha sonra k-cebir; simplişıl cebirler; bir cebirin yeniden simplişıl inşası; Moore kompleksi ve bir simplişıl cebirin homotopi modülü; n-kesilmiş, n. simplişıl çekirdek ve $Cosk^n$; serbest simplişıl cebirler ve son olarak simplişıl cebirlerin kapalı model kategorisini veririz.

Bölüm 2'de, simplişıl cebirlerin kategorisindeki bazı iyi bilinen yapıları hatırlatarak başlarız ve bir $f_\bullet$ morfizmi bir sabit boyutta bir Kan fibration olduğunda ve $\pi_q(f_\bullet)$ üretilmiş morfizmi bire bir ya da örten olduğunda inceleriz. Bundan başka, $Simp(Alg)$'deki homotopi teorisinde bazı yapılar veririz ve bu bölümün sonunda, homotopi kategorilerinin (teorileri) $Simp(Alg)$'ye kapalı olarak bağlantılı olan iki kapalı model kategorisini hatırlatırız. Bu bölümde cebirler için toplam notasyonunu kullanırız.

Bölüm 3'te herhangi bir $r \geq 0$ için, zayıf $\overline{r}$-denklikleri olarak adlandırılan, zayıf denklikleri $q \geq r$ olmak üzere $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizm olacak şekilde $f_\bullet$ morfizmleri olarak göz önüne alırız. Zayıf denkliğin bu çeşidinin simplişıl grup durumu ayrıca **[15]**'te de göz önüne alınmıştır. $\overline{r}$-fibration ve $\overline{r}$-cofibrationın ($\overline{r}$-yapısı) uygun tanımları ile birlikte $Simp(Alg)$'nin bir kapalı model kategorisi olduğuna sahibiz ve birleştirilmiş homotopi teorisinin r-indirgenmiş simplişıl cebirlerin kapalı model kategorisine birleştirilen teoriye denk olduğunu gösteririz. Böylece, $\overline{r}$-yapısına birleştirilen homotopi teorisi ayrıca r-bağıntılı CW-komplekslerin homotopi teorisine denk olacaktır. Bu bölümün sonunda, $\overline{r}$-yapısına birleştirilen homotopi teorisindeki bazı aşikâr yapıları silindir ve yol nesneleri ve loop ve suspension functor gibi göz önüne alırız.

Bölüm 4'te birinci durumu geliştiririz, yani zayıf n-denklikleri olarak adlandırılan, herhangi bir $n \geq 0$ için zayıf denklikleri $0 \leq q \leq n$ olmak üzere $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizm olacak şekilde $f_\bullet$ morfizmleri gibi göz önüne alırız. n-fibration ve n-cofibration tanımları ile birlikte $Simp(Alg)$ kategorisinde bir kapalı model yapısına (n-yapısına) sahibiz. Bu yöntemin diğer genel durumlarda da (**[19]**, **[14]**) göz önüne alındığına dikkat edelim. n-eşbağlantılı (yani, $q \geq n+1$ olmak üzere $\pi_q = 0$ ile birlikte) uzayların kategorisindeki homotopi teorisi bu n-yapısına birleştirilen homotopi teorisi gibi algılanabilir ve sonuncusu, **[6]**'da incelenen, boyutları n'den büyük olan aşikâr Moore kompleksi ile birlikte simplişıl cebirlerin kapalı model kategorisindeki teoriye denktir. n-yapısı için silindir ve yol nesneleri verilir ve kesilmiş simplişıl homotopi bağıntısı tarafından sağlanan homotopi bağıntısı üretilir. Ayrıca bu yapı için loop ve suspension functorlerini inceleriz.

Herhangi bir r, n için $0 \leq r \leq n$ ile göz önüne aldığımızda Bölüm 5'te $r \leq q \leq n$ için $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizm olacak şekilde bir morfizm $f_\bullet$ iken zayıf (r,n)-denkliğinin kavramı olan genel durum incelendi. Bu durumda model yapısı (ve bundan dolayı homotopi teorisi) iki özel durum (ve $n = r-1$ için tümleyen): $r = 0$ durumu ve $n \to \infty$ durumu birleştirilerek tanımlanır. Her iki işlem birlikte $Simp(Alg)$'deki klasik model yapısını (homotopi teorisini) verir. Bunların her biri için, örneğin silindir ve yol nesneleri ve loop ve suspension functorler gibi birleştirilmiş homotopi teorileri için bazı açık yapılar oluştururuz ve ayrıca simplişıl homotopi bağıntısından bu yapılardan bulunan homotopi bağıntısına kadar olan konularla ilgileneceğiz.

BİRİNCİ BÖLÜM

SİMPLİŞIL YAPILARIN İNŞAASI ve CEBİRLERİN KROSS MODÜLLERİ

1.0 Giriş

Bu bölüme konumuzda geçen temel tanım ve teoremleri vererek başlarız. Daha sonra k-cebir; simplişıl cebirler; bir cebirin yeniden simplişıl inşası; Moore kompleksi ve bir simplişıl cebirin homotopi modülü; n-kesilmiş, n. simplişıl çekirdek ve $Cosk^n$; serbest simplişıl cebirler ve son olarak simplişıl cebirlerin kapalı model kategorisini veririz.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

1.1.1 Kategori :

$\mathscr{K}$ kategorisi üç bileşeni içerir: Nesnelerin sınıfı $obj\,\mathscr{K}$; $A,B \in obj\,\mathscr{K}$'nın her sıralı çifti için $Hom(A,B)$ şeklindeki homeomorfizmlerin cümlesi; her $A,B,C \in obj\,\mathscr{K}$ için $(f,g) \to g \circ f$ ile gösterilen $Hom(A,B) \times Hom(B,C) \to Hom(A,C)$ bileşkesi, ayrıca aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

i) $Hom(A,B)$ ailesi ayrık çiftlerden oluşur.

ii) Tanımlanmış ise bileşke birleşmelidir.

iii) Her bir $A \in obj\,\mathscr{K}$ için her $f \in Hom(B,A)$, bütün $B \in obj\,\mathscr{K}$ için $1_A \circ f = f$ şartını ve her $g \in Hom(A,C)$, bütün $C \in obj\,\mathscr{K}$ için $g \circ 1_A = g$ şartını sağlayan $1_A \in Hom(A,A)$ şeklinde verilen bir özdeşlik dönüşümü vardır.

1.1.2 Small Kategori:

Kategori, nesnelerin bir sınıfıdır. Nesneleri birer cümle olan bir sınıf ise *small kategori* olarak adlandırılır.

1.1.3 Alt Kategori, Full Alt Kategori :

$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ kategoriler olmak üzere

(1) $\mathscr{A}$ ’nın her nesnesi $\mathscr{B}$ ’nin bir nesnesi,

(2) $\mathscr{A}$ ’nın X, Y nesneleri için $Mor_{\mathscr{A}}(X,Y) \subseteq Mor_{\mathscr{B}}(X,Y)$,

(3) $\mathscr{A}$ ’nın iki morfizminin bileşkesi $\mathscr{B}$ kategorisindeki bileşkesi ile aynı,

(4) $\mathscr{A}$ ’nın tüm A nesneleri için id_A özdeşlik morfizmi $\mathscr{B}$ ’de de benzer şekilde var

ise $\mathscr{A}$ kategorisine $\mathscr{B}$ kategorisinin bir *alt kategorisidir* denir.

Üstelik $\mathscr{A}$ ’nın X, Y nesneleri için $Mor_{\mathscr{A}}(X,Y) = Mor_{\mathscr{B}}(X,Y)$ ise $\mathscr{A}$ ’ya $\mathscr{B}$ ‘nin *Full Alt Kategorisi* denir.

1.1.4 Simplişıl Nesneler ve Dönüşümler :

(i) $n \geq 0$ tam sayısı için $X_n \in \mathscr{C}$ nesnesini ve

(ii) $0 \leq i \leq n$, yüz ve bozulmuş dönüşümler ile her (i,n) tam sayı çifti için

$$d_i : X_n \to X_{n-1} \text{ ve } s_i : X_n \to X_{n+1}$$

dönüşümlerini ihtiva eden bir $\mathscr{C}$ kategorisi üzerindeki bir X simplişıl nesnesi aşağıdaki tanımları sağlar;

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \qquad i < j \quad \text{ise}$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & i < j \quad \text{ise} \\ \mathrm{id} & i = j \quad \text{veya} \quad i = j+1 \quad \text{ise} \\ s_j d_{i-1} & i > j+1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$s_i s_j = s_j s_{i-1} \qquad i > j \quad \text{ise}$$

Benzer olarak $f_n : X_n \to Y_n \in \mathscr{C}$ dönüşümünü içeren iki simplişıl nesne arasında bir $f : X \to Y$ simplişıl dönüşümü yüz ve bozulmuş dönüşümler ile birlikte $\forall i$ için

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \quad \text{ve} \quad s_i f_n = f_{n+1} s_i \,.$$

1.1.5 Functor:

$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{D}$ kategoriler olmak üzere $T : \mathscr{A} \to \mathscr{D}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa *functor* olarak adlandırılır:

i) $A \in obj\,\mathscr{A}$ iken $TA \in obj\,\mathscr{D}$.

ii) $f : A \to A$ $\mathscr{A}$ ’da bir morfizm ise, $Tf : TA \to TA$ $\mathscr{D}$ ’deki bir morfizmdir.

iii) f ve g $\mathscr{A}$ ’daki morfizmler ise $T(g \circ f) = (Tg)(Tf)$.

iv) $T(1_A) = 1_{TA}$ eşitliği her $A \in obj\,\mathscr{A}$ için sağlanır.

Functorun bir başka tanımı ise şöyledir:

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ kategoriler olmak üzere $F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ dönüşümü,

F1) $F(1_A) = 1_{FA}$,

F2) $F(gf) = F(g)F(f)$,

özelliklerini sağlıyorsa bir kategoriden diğer bir kategoriye olan F dönüşümüne bir *functor* denir.

1.1.6 Kapsama Functoru:

$\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ 'nin bir alt kategorisi ise, $\mathscr{C}$ 'nin her X nesnesi için $IX = X$ ve $\mathscr{C}$ 'nin her f morfizmi için $If = f$ ile tanımlanan $I : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bunun bir functor tanımladığı açıktır ve $\mathscr{C}$ 'den $\mathscr{D}$ 'ye *kapsama functoru* olarak adlandırılır.

1.1.7 Sağ ve Sol Tam Functor:

$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ binormal kategoriler olsun. Bir $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ functorü

$$0 \to A \to A' \to A'' \text{ tam} \Rightarrow 0 \to FA \to FA' \to FA'' \text{ tam}$$

ise *sol tam* denir; eğer

$$A \to A' \to A'' \to 0 \text{ tam} \Rightarrow FA \to FA' \to FA'' \to 0 \text{ tam}$$

ise *sağ tam* denir. Hem sağ hem de sol olan functore *tamdır* denir.

1.1.8 Değişmeli Diyagram:

Verilen bir $\mathscr{C}$ kategorisinde, verilen bir çıkış nesnesinden verilen bir varış nesnesine bütün bileşke morfizmleri eşit ise, nesnelerin ve morfizmlerin diyagramına değişmelidir denir. Örneğin A, B, C ve D, $\mathscr{C}$ 'deki nesneler olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & D \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmelidir ancak ve ancak, sırasıyla, $h = g \circ f$ ve $\beta \circ \alpha = g \circ f$ olmasıdır.

1.1.9 Adjoint:

$F:\mathscr{F}\to\mathscr{C}$ ve $G:\mathscr{C}\to\mathscr{A}$ functorler olsunlar. Eğer $\mathscr{F}$ ’deki her bir A nesnesi ve $\mathscr{C}$ ’deki her bir C nesnesi için her bir değişkende doğal olan

$$\tau:\tau_{AC}:Hom_{\mathscr{C}}(FA,C)\to Hom_{\mathscr{F}}(A,GC)$$

karşılıklı bire bir fonksiyonu varsa (F,G) sıralı ikilisine *Adjoint ikilisi* denir.

1.1.10 Doğal Dönüşüm:

A herhangi bir küme ve R, A içinde bir denklik bağıntısı olsun. Denklik sınıfları kümesini $B=A/R$ ile gösterelim. B ’nin her elemanı, A ’nın elemanlarının bir sınıfından ibaret olup B ’ye *bölüm kümesi* denir. A ’nın her elemanını içinde bulunduğu sınıfa götüren $f:A\to B$ dönüşümüne de *doğal dönüşüm* denir.

1.1.11 Dual Kavramı:

$\mathscr{C}$ bir kategori ise, bu takdirde kategorinin *duali* (ya da *karşıtı*) aşağıda tanımlanan $\mathscr{C}^d$ kategorisidir. $\mathscr{C}^d$ ’nin nesneleri $\mathscr{C}$ ’nin nesneleri ve A,B nesnelerinin her ikilisi için $Mor_{\mathscr{C}^d}(A,B)$ cümlesi $Mor_{\mathscr{C}}(B,A)$ cümlesidir. $\mathscr{C}$ ’deki bir nesne ya da morfizm ile elde edilebilen bir özellik P ise, bu takdirde P ’nin *duali* olan P^d özelliğinin $\mathscr{C}$ ’deki P^d ’ye sahip olan bir nesne ya da morfizmin kabul edilerek elde edilmesi için gerek ve yeter şart $\mathscr{C}^d$ ’deki P ’ye sahip olmasıdır. P^d 'nin dualinin P olduğu açıktır.

1.1.12 Limit ve Colimit

$\mathscr{I}$ bir small kategori ise, bu takdirde bir $F:\mathscr{I}\to\mathscr{C}$ functorü için bir *kaynak* ile $\mathscr{C}$ ’nin bir A nesnesi ve bir $\eta:K_A\to F$ doğal dönüşümünden meydana gelen bir (A,η) ikilisinden bahsederiz. Bu, *gömmenin* bir dual kavramıdır.

Bir doğal dönüşümü oluşturan diyagramı koruyarak bütün değişmeli diyagramların cümlesi ile bir kaynağı ifade edebiliriz.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "f"'] \\ j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Fi \arrow[dd, "Ff"] \\ A \arrow[ur, "\eta_i"] \arrow[dr, "\eta_j"'] & \\ & Fj \end{tikzcd}$$

Nesneleri $F : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ için kaynaklar ve (A,η)'den (A',η')'ne morfizmleri her $i \in \mathscr{I}$ için $\eta_i' \circ v = \eta_i$ olacak şekilde $\mathscr{C}$'deki $v : A \to A'$ morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategorinin bitiş nesnesi F functorünün bir *limiti* olarak adlandırılır. Bunun duali olan kavram da *colimittir.*

1.1.13 CW -Kompleksi:

CW -kompleksi ilk olarak Whitehead tarafından hücrelerin koleksiyonu gibi verildi ve simplişıl dönüşümlerle simplişıl kompleksler arasındaki dönüşümlere benzetildi. (X, A) kompakt A cümlesinin bir çifti olsun. (X, A)'nın bir CW *-kompleksi* aşağıdaki özellikleri sağlar:

(1) $A \subset X_0$,

(2) $\forall n \geq 0$ için X_n , X_{n-1}'in n -hücreli genişlemesi olacak şekilde X'de bir X_n dizisi vardır.

1.1.14 Simpleks:

Verilen bir boyutun geometrik şeklidir. Bir boyutta doğru, iki boyutta üçgen, üç boyutta dörtyüzlüdür.

1.1.15 Bozulmuş ve Bozulmamış Simpleksler:

$X \in S$ olmak üzere eğer bazı $x' \in X$ ve bazı i'ler için $0 \leq i \leq n-1$ olacak şekilde $x = s_i x'$ ise $x \in X$ *bozulmuş*, bunun terside *bozulmamış* olarak adlandırılır. Bozulmuşluğun aşağıdaki özelliği çok kullanışlıdır ve doğruluğunu ispat etmekte zor değildir. $i_n > ... > i_1$ ve $x' \in X$ bozulmamış simpleks olacak şekilde her $x \in X$ bozulmuşu bir tek

$$x = s_{i_n} ... s_{i_1} x'$$

ayrışmasına sahiptir. Üstelik x'i bozulmuş olan $i_1,...,i_n$'ler yönlendirmelerdir, yani x'in s_k'nın görüntüsünde olması için gerek ve yeter şart $k \in \{i_1,...,i_n\}$ olmasıdır.

Bu belirtmeler, örneğin X ve Y tüm n'ler için $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$ (aşikâr yüz ve bozulmuş dönüşümler ile tanımlanmış olan) iki simplişıl cümlenin $X \times Y \in S$ çarpımı, $x \in X$ ve $y \in Y$'nin her ikisi de bozulmuş olmak üzere (fakat farklı yönlendirmelerdir) (x, y) bozulmuş olmayan simpleksi içerebilir.

Her $n \geq 0$ için, $\overline{\Delta}[n]$ topolojik n*-simpleksi tüm* i'ler ve $0 \leq t_i \leq n$ için $\sum t_i = 1$ olmak üzere $(t_0,...,t_n)$ noktalarından meydana gelen $n+1$-boyutlu Euclidean uzayının bir alt uzayıdır. Tüm $0 \leq i \leq n$ için,

$$\overline{d}_i : \overline{\Delta}[n-1] \to \overline{\Delta}[n] \ , \ \overline{s}_i : \overline{\Delta}[n+1] \to \overline{\Delta}[n] \ ,$$

standart dönüşümleri

$$\overline{d}_i \ (t_0,...,t_{n-1}) = (t_0,...,t_i,0,t_{i+1},...,t_{n-1}),$$

$$\overline{s}_i \ (t_0,...,t_{n+1}) = (t_0,...,t_i + t_{i+1},...,t_{n+1})$$

formülleri ile verilmiştir ve bu standart dönüşümler (1.1) simplişıl özdeşliklerini sağlar ve bunu kontrol etmek kolaydır.

K bir sıralı simplişıl kompleks olsun, yani köşelerinin bir sırasıyla K bir simplişıl komplekstir. Bu takdirde

(i) $v_0 \leq ... \leq v_n$ ve

(ii) $v_0,...,v_n$ cümlesi bazı $m \leq n$ için K'nın m simpleksidir ve

$$d_i \ (v_0,...,v_n) = (v_0,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n),$$

$$s_i \ (v_0,...,v_n) = (v_0,...,v_i,v_i,...,v_n)$$

yüz ve bozulmuş dönüşümleri ile verilmiş olan K'nın köşelerinin $(v_0,...,v_n)$ $(n+1)$-tuples n-simplişıl elemanları ile birlikte K, ΔK simplişıl cümlesi elde edilir. (1.1) simplişıl özdeşlikleri doğruladığını kontrol etmek kolaydır.

1.1.16 Skeleton:

Simplicial komplekslerin büyük boyutuna *skeleton* denir.

1.1.17 Baz (Taban) Noktası:

T bir topolojik uzay ve x_0, T'nin bir sabit noktası olsun. Başlangıç ve bitim noktası x_0'da olan bütün kapalı eğrilerin kümesini düşünelim. x_0 noktasına bu eğrilerin *taban (baz) noktası* denir. Bu eğrilere de x_0 noktasındaki *kapalı eğriler* denir.

1.1.18 Kan Fibration:

E ile B birer kompleks olmak üzere $p : E \to B$ bir simplişıl dönüşüm olsun. $i < j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$ uyarlılık koşulunu doğruluyor olan E'nin $x_0,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_{n+1}$ $n-$simplekslerinin her $n+1$ koleksiyonu ve $i \neq k$ için, $\partial_i y = p(x_i)$

olacak şekilde B'nin her y $(n+1)$-simpleksi için $i \neq k$, $\partial_i x = x_i$ ve $p(x) = y$ olacak şekilde E'nin x $(n+1)$-simpleksi var ise p'ye *Kan fibration* denir. E *total kompleks*, B *baz (taban) kompleks* olarak adlandırılır ve (E, p, B)'ye *fibre uzayı* denir. Eğer ϕ, B'nin köşesi tarafından üretilmiş kompleksi gösteriyor ise, $F = p^{-1}(\phi)$ ϕ üzerindeki *fibre* olarak adlandırılır. Eğer ψ, F'nin köşesi tarafından üretilmiş kompleks ise, bu takdirde

$$(F,\psi) \xrightarrow{i} (E,\psi) \xrightarrow{p} (B,\phi)$$

dizisi *fibre dizisi* olarak adlandırılır.

1.1.19 Kan Kompleksi:

E bir kompleks, ϕ nokta tarafından üretilmiş kompleks olsun. Bu takdirde tanımlanabilen yegâne $E \to \phi$ simplişıl dönüşümü bir Kan fibration ise bu dönüşüm *Kan kompleksi* olarak adlandırılır.

1.1.20 Silindir (Cylinder):

Bir $*$ taban (baz) noktası ile birlikte Top^* topolojik uzayların kategorisi olsun ve taban (baz) noktası dönüşümünü korusun. $Hi_0 = f$ ve $Hi_1 = g$ ile birlikte Top^*'de bir $H : I_* X \to Y$ dönüşümü ile verilen $H : f \cong g$ bir homotopidir. Burada $I = [0,1]$ birim aralığı ile verilen

$$I_* X = (I \times X) / (I \times *)$$

X üzerinde (indirgenmiş) *silindir* (*cylinder*) ve $t \in I$ için $i_t(x) = (t, x)$ ile birlikte $i_t : X \to I_* X$ kapsamadır.

1.1.21 Silindir (Cylinder) Nesnesi:

Bir A nesnesinin *silindir (cylinder) nesnesi*,

$$\sigma\ (\partial_0 + \partial_1) = \nabla_A \text{ ile } A \nabla A \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} A \times I \xrightarrow{\sigma} A$$

dönüşümleri ile birlikte bir $A \times I$ nesnesidir.

1.1.22 Unit – Counit:

Bir $\langle F, G, \varphi \rangle : X \to A$ adjunctionı aşağıdakileri belirler:

(i) Her bir $f : Fx \to a$'nın sağ adjuctionı

$$\varphi f = Gf \circ \eta_x : x \to Ga$$

iken her bir x nesnesi için $\eta : I_x \to GF$ bir doğal dönüşüm olacak şekilde x'ten G'ye olan η_x evrenseldir;

(ii) Her bir $g : x \to Ga$

$$\varphi^{-1} g = \varepsilon_a \circ Fg : Fx \to a$$

sol adjunctionına sahip iken F'den a'ya her bir ε_a evrensel olacak şekilde bir dönüşüm $\varepsilon : FG \to I_A$.

Bundan başka aşağıdaki bileşkelerin ikisi de özdeşliktir (sırasıyla G'nin ve F'nin)

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G,\ F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F .$$

η adjunctionın *uniti* ve ε da *couniti* olarak adlandırılır.

1.1.23 k -Horn:

$X_\bullet$, $n > 1$ ve $0 \le k \le n$ verilsin, $j < i$, $i, j \ne k$ için $d_j p_i = d_{i-1} p_j$ koşulunu sağlayan $0 \le j \le n$ ve $j \ne k$ olmak üzere sahip olduğu $p_j : \Lambda^k(n) X_\bullet \to X_{n-1}$ izdüşümlerine göre evrensel nesne $\Lambda^k(n)(X_\bullet)$ ile gösterilsin.

$\Lambda^k(n)(X_\bullet)$'nın bir elemanı, v_i'nin karşısındaki yüzü 'eksik' olan n-simpleksin bir 'boşluğu'dur; böylece $\Lambda^k(n)(X_\bullet)$'nin bir elemanı için '*açık* k *-horn*' terimini kullanırız.

1.1.24 Yol Nesnesi:

B için *yol nesnesi* s bir zayıf denklik ve (d_0, d_1) bir fibration olduğunda Δ_B'nin bir $B \xrightarrow{s} B^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} B \times B$ çarpanlara ayırması ile birlikte bir B^I nesnesidir.

1.1.25 Geri Çekilim:

$\mathscr{C}$ bir kategori olsun. Eğer $f \circ g = \mathrm{id}_B$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ morfizmi varsa, $\mathscr{C}$'deki bir $f : A \to B$ morfizmine bir *geri çekilim* adı verilir.

1.1.26 Bozulmuş Geri Çekilim:

$r : X \to A$ bir geri çekilim ve $x \in X,\ a \in A$ ve $t \in \mathrm{I}$ olmak üzere

$$f(x, 0) = x$$
$$f(x, 1) = r(x)$$
$$f(a, t) = a$$

olacak şekilde $f : X \times \mathrm{I} \to X$ homotopisi varsa, $A \subset X$ cümlesine bir *bozulmuş geri çekilim* denir.

1.1.27 Suspension:

Verilen $n \geq 0$ için $f : S^n \to S^n$ dönüşümü için birleşmeli olduğu $g : S^{n+1} \to S^{n+1}$ dönüşümü var ise g 'ye f 'nin *suspensionı* denir ve $\sum f$ ile gösterilir.

1.1.28 Eş çekirdek (Cokernel):

$\mathscr{C}$ bir 0 nesnesi ile birlikte bir kategori olsun. Eğer $\mathscr{C}$ 'deki bir morfizm $f : A \to B$ ise, bu takdirde f 'in bir *çekirdeği* olarak $f\,, 0_{AB}$ bir eşitleyicisinden bahsederiz. f 'in *eşçekirdeği* (*cokernel*) olarak da $f, 0_{AB}$ ikilisinin eş eşitleyicisinden (coequaliser) bahsederiz.

1.1.29 Homotopi :

$F(x,0) = f_0(x),\ F(x,1) = f_1(x) \quad \forall x \in X$ şartları ile birlikte $F : X \times I \to Y$ sürekli dönüşümüne *homotopi* denir. Burada X, Y uzaylar olmak üzere $f_0, f_1 : X \to Y$ sürekli dönüşümlerdir ve $f_0,\ f_1$ 'e *homotopiktir* denir.

1.1.30 Homotopi Kategorisi:

Nesneleri X topolojik uzayları, Hom cümleleri $Hom(X,Y) = [X,Y]$ ve birleşimleri $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ biçimindeki bölüm kategorisi *homotopi kategorisi* olarak adlandırılır ve $hTop$ ile ifade edilir.

1.1.31 Homotopi Bağıntısı:

Eğer $0 \to X$ dönüşümü bir cofibration ise X nesnesi *cofibrant* olarak adlandırılır ve eğer $X \to e$ dönüşümü bir fibration ise X nesnesi *fibrant* olarak adlandırılır. Böylece eğer;

$$\begin{tikzcd}
A \vee A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "\mathrm{id}+\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "i_0+i_1"] & B \\
A & A' \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı var ise $\vee$ direkt toplama, $f+g$ f ve g bileşenleri ile birlikte bir dönüşüm ve σ bir zayıf denklik olmak üzere A cofibrant nesnesinden B fibrant nesnesine olan f , g dönüşümlerine *homotopiktir* denir.

1.1.32 Pullback, Pushout:

$\mathscr{C}$ bir kategori ve $\mathscr{C}$ ’deki morfizmlerin ve nesnelerin diyagramı:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

şeklinde verilmiş olsun. $\mathscr{K}$ kategorisinin inşası aşağıdaki gibidir:

$\mathscr{K}$ ’nın nesneleri $[A, B, C, D]$ içindeki değişmeli karelerin şeklini

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

alır ve $[A, B, C; D]$ ’den $[A, B, C; X]$ ’e tanımlanan morfizmlerin cümlesi için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde C ’nin $\gamma : D \to X$ morfizmlerini alalım;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd, "g"] \\ & D \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dl, "\alpha"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & C \end{tikzcd}$$

f, g için $\mathscr{K}$ ’daki A bitiş nesnesi *pullback* olarak adlandırılır. Burada f, g ’nin fibre çarpımıdır.

Pullback’in dualine (dual kavramına) ise *pushout* denir.

1.1.33 Eş Çarpım (Coproduct):

$\mathscr{C}$ bir kategori ve $\mathscr{C}$'nin nesnelerinin bir ailesi $(A_i)_{i\in I}$ olsun. Bir $\mathscr{K}$ kategorisini aşağıdaki gibi oluşturalım: $\mathscr{K}$'nin nesneleri için $\mathscr{C}$'nin bir E nesnesinden ve $f_i : A_i \to E$ morfizmlerinin bir $(f_i)_{i\in I}$ ailesinden meydana gelen $(E,(f_i)_{i\in I})$ ikilisini alalım, ve $Mor_{\mathscr{K}}((E,(f_i)_{i\in I}),(E',(f_i')_{i\in I}))$ cümlesi için, her $i \in I$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
E & A_i \arrow[l, "f_i"'] \arrow[d, "f_i'"] \\
& E' \arrow[ul, "v"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\mathscr{C}$'deki $v : E' \to E$ morfizmlerini alalım.

Yukarıda tanımlanan $\mathscr{K}$ kategorisindeki bir $(Q,(q_i)_{i\in I})$ başlangıç nesnesi $(A_i)_{i\in I}$ ailesinin bir *eşçarpımı* (*coproduct*) olarak adlandırılır.

1.1.34 Underlying Cümle:

$\mathscr{C}$ bir kategori ve $\mathscr{O}$, $\mathscr{C}$'nin nesnelerinin bir sınıfı olmak üzere $\mathscr{C}$'nin her A nesnesi için cümle-değerli bir $U : \mathscr{O} \to \mathscr{U}$ fonksiyonu A'nın bir *underlying cümlesi* olarak adlandırılır.

1.1.35 Lifting:

X'in bir örtü uzayı $(\tilde{X}, p)$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, $y_0 \in Y$ ve $\varphi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ olsun. Aşağıdaki

$$\begin{tikzcd}
& (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dd, "p"] \\
(Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
& (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\tilde{\varphi}$ dönüşümü varsa $\tilde{\varphi}$'ye φ'nin *liftingi* denir.

1.1.36 Uzun Tam Dizi:

∂ kısıtlama ve j $(CS^n, S^n) \to (S^{n+1}, *)$ bölüm dönüşümü ile indirgendiğinde $(n \geq 0)$

$$\pi_{n+1}(X) \xrightarrow{i} \pi_{n+1}(Y) \xrightarrow{j} \pi_{n+1}(Y,X) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X) \xrightarrow{i} \pi_n(Y)$$

uzun tam dizisini elde ederiz.

1.2 k -Cebir

$1 \neq 0$ olmak üzere bir sabit değişmeli halka k olsun (yani, k aşikâr değildir). Burada göz önüne alınan k cebirlerinin tümünün değişmeli ve birleşmeli olduğu kabul edilir fakat idealleri ve modülleri cebir olarak göz önüne almak istiyoruz, böylece birim elemanlara sahip cebirleri gerektirmeyecektir. Bütün k -modüllerinin kategorisi Mod ile ifade edilir.

Bir *değişmeli* k *-cebiri* (ya da k üzerindeki cebir) bütün $m_1, m_2, m_3 \in M$ için

i) $m_1 m_2 = m_2 m_1$

ii) $(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3)$

şartlarını sağlayan bir k -bilineer

$$\begin{aligned} M \times M &\rightarrow M \\ (m_1, m_2) &\rightarrow m_1 m_2 \end{aligned}$$

dönüşümü ile birlikte M bir k -modülüdür. Değişmeli cebirlerin kategorisini Alg ile ifade edeceğiz.

Bu üniteye simplişıl cebirlerin teorisinin bazı görüşlerini sunarak başlarız. Birinci bölümde, simplişıl nesneler üzerindeki bazı genel sonuçları hatırlatırız. Özel olarak, değişmeli cebirlerin kategorisindeki simplişıl nesnelere dikkatimizi odaklarız.

1.3 Simplişıl Cebirler

Bu bölümde simplişıl cebirler ve homotopi modülleri hakkında birkaç iyi bilinen tanımı ve gerçekleri hatırlatırız. Bunun hakkında daha fazla ayrıntı için, M. André 'nin *Homologie des algébres commutatives* kitabına bakınız **[1]**.

Tanım 1.3.1 Bir A *simplişıl cebiri*, her bir $n \geq 0$ için, sırasıyla, yüz ve bozulmuş (dejenere) operatörleri olarak adlandırılan

$$\begin{aligned} d_i^n &: A_n \rightarrow A_{n-1} \qquad && 0 \leq i \leq n \neq 0 \\ s_j^n &: A_n \rightarrow A_{n+1} \qquad && 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

k -cebir homomorfizmleri ile birlikte $A_n \, (n \in \mathbb{N})$ k -cebirlerinin bir koleksiyonudur. Bu homomorfizmler aşağıdaki aksiyomları sağlar:

1. $0 \leq i < j \leq n$ için $d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n$,
2. $0 \leq i \leq j \leq n$ için $s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$,
3. $0 \leq i < j \leq n$ için $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n$,
4. $i = j$ ya da $i = j+1$ için $d_i^{n+1} s_j^n = \mathrm{id}$,

5. $0 \le j < i-1 \le n$ için $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n$.

Hesaplamada kullanmak için yukarıdaki eşitliklerin aşağıdakilerden birini gerektirdiğini hatırlatmak uygundur:

1. $0 \le j \le i \le n$ için $d_i d_j = d_j d_{i+1}$,

2. $0 \le j < i \le n$ için $s_i s_j = s_j s_{i-1}$,

3. $j \le i$ için $s_i d_j = d_j s_{i+1}$,

4. $i > j$ için $s_i d_j = d_{j+1} s_i$.

Bu denklemler standarttır ve **[9]**,**[10]**,**[22]** ve **[23]**'te bulunabilir.

$x \in A_n$ elemanları n *-boyutlu simpleksler* olarak adlandırılır. Bir x simpleksi bazı y 'ler için $x = s_i(y)$ ise *bozulmuş* (*dejenere*) olarak adlandırılır.

$f : A \to B$ *simplişıl cebirlerinin bir homomorfizmi*, bütün d_i^n yüz operatörleri ve s_i^n bozulmuş (dejenere) operatörleri ile değişmeli $f : A_n \to B_n$ k -cebiri homomorfizmlerinin bir cümlesidir, yani

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i , \qquad f_n s_i = s_i f_{n+1} .$$

Böylece $Simp(Alg)$ ile göstereceğimiz, simplişıl cebirlerin kategorisi tanımlanır.

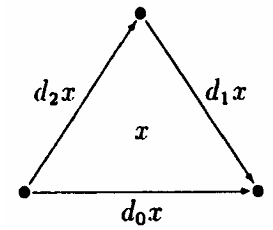
$X_\bullet \to X$ ile gösterilen bir *eklenmiş simplişıl nesne*, $pd_0 = pd_1$ olacak şekilde bir $p : X_0 \to X$ dönüşümü ile birlikte bir $X_\bullet$ simplişıl nesnesidir. $X_\bullet \to X$ ve $X_\bullet' \to X$ arasındaki bir simplişıl dönüşüm $p' f_0 = p$ olacak şekilde bir $f_\bullet$ simplişıl dönüşümüdür.

Bu tanım için küçük boyutların bir geometrik yorumu aşağıdaki şekilde düşünülebilir:

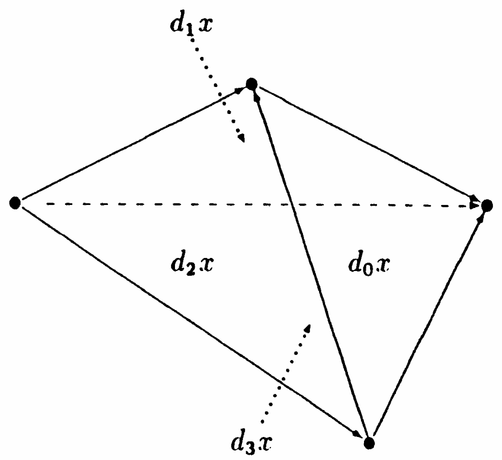
$n = 0$ için, bir 0 -boyutlu simpleks basitçe bir $x \in A_0$ noktasıdır ve bir 1-boyutlu simpleks, $x \in A_1$ için,

$$d_1 x \bullet \xrightarrow{\quad x \quad} \bullet\, d_0 x$$

2-boyutlu simpleksler üçgenlerdir: $x \in A_2$ için



ve 3-boyutlu simpleksler düzgün dörtyüzlüdür:



ve böyle devam eder.

Hatırlatma 1.3.2 Herhangi bir A simplişıl modülü için k-modüllerinin birleşmeli bir zincir kompleksi vardır. $\partial_n : A_n \to A_{n-1}$ diferansiyelleri

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n$$

ile tanımlanır. Simplişıl cebirlerin tanımındaki 1. aksiyomdan, $\partial_{n+1}\partial_n = 0$. Böylelikle bu A simplişıl modülüne birleşmeli bir zincir kompleksidir. Böylece

$$H_n(A) = \frac{\text{Çek}\,\partial_n}{\text{Gör}\,\partial_{n+1}}$$

ile tanımlanan A simplişıl k-modülünün $H_n(A)$ *n. homoloji modülünden* söz edebiliriz.

Tanım 1.3.3 Bir A simplişıl cebiri, bir sabit $K(A,0)$ simplişıl cebiri ve $fd_o' = fd_1' : A_1 \to A$ ile birlikte bir $f = d_0^0 : A_0 \to A$ örten k-cebir homomorfizmini belirtmek vasıtasıyla arttırılır. A simplişıl cebirinin bir *artışı* bir

$$A \to K(A,0)$$

dönüşümüdür. Eğer ona karşılık gelen kompleks devirli ise bir artmış simplişıl cebiri devirlidir, yani $n > 0$ için $H_n(A) \cong 0$ ve $H_0(A) \cong A$.

1.4 Bir B Cebirinin Yeniden Simplişıl İnşaası

Tanım 1.4.1 B değişmeli bir k-cebiri olsun. B'nin bir *serbest simplişıl yapıların inşası*, (A, f) devirli ve her bir A_n serbest olacak şekilde bir $f : A_0 \to B$ artışı ile birlikte bir A simplişıl cebirinden meydana gelir.

1.5 Moore Kompleksi ve Bir Simplişıl Cebirin Homotopi Modülü

Bir A simplişıl cebiri verilsin, A'nın (NA, ∂) *Moore kompleksinin* kısıtlama ile d_n^n'den üretilen $\partial_n : NA_n \to NA_{n-1}$ ile birlikte

$$(NA)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek}\, d_i^n$$

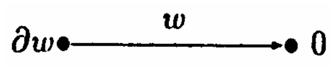
ile tanımlanan zincir kompleksi olduğunu hatırlatalım.

A'nın $\pi_n(A)$ n. *homotopi modülü*, A'nın Moore kompleksinin n. homolojisidir, yani,

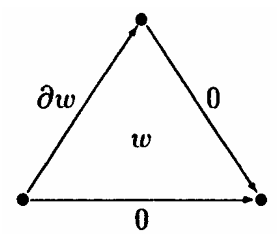
$$\begin{aligned}\pi_n(A) &\cong H_n(NA, \partial) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n} \text{Çek}\, d_i^n \,/\, d_{n+1}^{n+1}\Big(\bigcap_{i=0}^{n} \text{Çek}\, d_i^{n+1}\Big)\end{aligned}$$

NA ve $\pi_n(A)$'nın yorumları aşağıdaki gibidir:

$n = 1$ için, $w \in NA_1$,

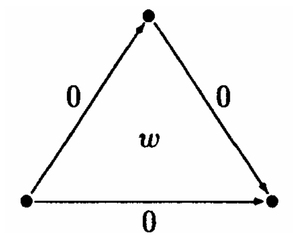


ve $w \in NA_2$



ve böyle devam eder.

Not: $w \in NA_2$, Çek ∂ 'dakine benziyorsa



ki onun 3.yüzü ve bütün diğer yüzleri sıfır üzerinde w ile birlikte bir x 3-simpleksi var ise $\pi_2(A)$'nın aşikâr elemanını verecektir.

NA ve $\pi_n(A)$'nın elemanlarının bu basit açıklaması, diğer durumlardaki elemanların bazılarının açıklamasına yardım ederek daha sonra "sıfır (pay off)" olacaktır.

1.6 n-Kesilmiş, n. Simplişıl Çekirdek ve $Cosk^n$

Tanım 1.6.1 $X_{\bullet,tr}$ ile gösterilen bir n-*kesilmiş simplişıl nesne* (sadece) $x_0,...,x_n$ ve onlar arasındaki alışılmış yüz ve dejenere operatörlerinden oluşurlar.

n-kesilmiş yöntemi bir fanktördür. Eğer Alg sonlu limite sahipse, bu takdirde $cosk^n$ ile gösterilen bir sağ adjoint vardır ve 'simplişıl çekirdek' kavramı kullanılarak açıklanabilir.

$n > 1$ olsun. $X_\bullet$'nın n. *simplişıl çekirdeği* $\dot{\Delta}(n)(X_\bullet)$ ile gösterilen, bütün $i < j$ için $d_i p_j = d_{j-1} p_i$'yi sağlamasına göre evrensel olan $p_i : \dot{\Delta}(X_\bullet) \to X_{n-1}$, $i = 0,...,n$ dönüşümleri ile birlikte bir nesnedir.

$\dot{\Delta}(n)(X_\bullet)$'nın bir elemanı, $x_i \in X_{n-1}$ olmak üzere bütün $i < j$ için $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ ve $p(x_0,...,x_n) = x_i$ olduğunda $(x_0,...,x_n)$ olur. Yüzleri n-simplekslerin bir "çukuru" olacak şekilde $(n-1)$-simplekslerin bir koleksiyonu gibi gözümüzde canlandırabiliriz.

p_i izdüşümleri yüz dönüşümlerinin rolünü oynarlar. Simplişıl özdeşlikleri kullanarak dejenerelerin rolünü oynayan $q_j : X_{n-1} \to \dot{\Delta}(n)(X_\bullet)$, $0 \le j \le n-1$ tanımlanır; mesela $q_0 x = (x, x, s_0 d_1 x, ..., s_0 d_{n-1} x)$. Böylelikle, $X_{\bullet,tr}$ n-kesilmiş simplişıl nesne ile başlayan biri simplişıl çekirdek yapısını ($n+1$ boyutta başlayan) tekrar ederek yeni bir simplişıl nesne oluşturabilir. Sonuç $cosk^n(X_{\bullet,tr})$ ile gösterilir.

n-boyutu keserek ve daha sonra $cosk^n$'i uygulayarak bulunan $Simp(Alg) \to Simp(Alg)$ fanktörü $COSK^n$ ile gösterilir. $X_\bullet \cong COSK^n$ iddiası, X_m'in bütün $m > n$ için bir simplişıl çekirdek olduğunu söylemenin kısa bir yoludur.

x'i $(d_0x, ..., d_nx)$'e götüren $X_n \to \overset{\bullet}{\Delta}(n)(X_\bullet)$ kanonik izdüşümünün epic olmasına ihtiyaç yoktur. Eğer epic ise, $X_\bullet$'ya n boyutta *aspherical* denir. Bütün boyutlarda aspherical olan kompleksler aspherical olarak adlandırılır.

Bir k*-kesilmiş simplişıl cebir* ile, bir A simplişıl cebirindeki mertebesi $> k$ olan boyutları unutarak bir $tr^k A$ simplişıl cebirinin bulunduğunu söylemek isteriz. k-kesilmiş simplişıl cebirlerin kategorisini $Tr^k\, Simp(Alg)$ ile ifade ederiz. **[10]**'dan skeleton functor hakkında bazı gerçekleri hatırlatalım. Cebirlerin kategorisinde, Alg, k*-coskeleton functor* olarak adlandırılan

$$cosk^k : Tr^k Simp\,(Alg) \to Simp\,(Alg)$$

bir sağ adjoint, ve bir k*-skeleton functor* olarak adlandırılan

$$sk^k : Tr^k Simp(Alg) \to Simp\,(Alg)$$

bir sol adjoint olarak kabul eden bir

$$tr^k : Simp\,(Alg) \to Tr^k Simp\,(Alg)$$

kesilmiş functorü vardır.

$tr^k(A) = \{A_0, A_1, ..., A_k\}$'nın bir k-kesilmiş simplişıl cebir olarak verildiğini kabul edelim. Aşağıdaki evrensel özelliğe sahip ise,

$$(\delta_0, ..., \delta_{k+1}) : X_{k+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_{k+1}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[\delta_0]{} \end{array} A_k \begin{array}{c} \xrightarrow{d_k} \\ \vdots \\ \xrightarrow[d_0]{} \end{array} A_{k-1}$$

homomorfizmlerinin bir ailesine, $(d_0, ..., d_k)$ yüz homomorfizmlerinin ailesinin *simplişıl çekirdeği* denir:

Kesilmiş simplişıl cebirin son kısmı ile birlikte $d_i x_j = d_{j-1} x_i \quad (0 \le i < j \le k+1)$ eşitliklerini sağlayan

$$Y \begin{array}{c} \xrightarrow{x_{k+1}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[x_0]{} \end{array} A_k$$

$k+2$ homomorfizmlerinin herhangi bir $(x_0,...,x_{k+1})$ ailesi verilsin, $\delta_i x = x_i$ olacak şekilde bir tek

$$x = \langle x_0,...,x_{k+1}\rangle : Y \to X_{k+1}$$

homomorfizmi vardır.

X_{k+1} simplişıl çekirdeği verilsin,

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} s_{j-1}d_i & i<j \text{ ise} \\ \text{id} & i=j \text{ yada } i=j+1 \text{ ise} \\ s_j d_{i-1} & i>j+1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan

$$(\alpha_{k+1,j},...,\alpha_{1j},\alpha_{0j})$$

homomorfizmlerinin ailesi, kesilmiş simplişıl cebirin son kısmı ile birlikte simplişıl özdeşlikleri sağlar; böylece $\delta_i s_j = \alpha_{ij}$ olacak şekilde bir tek $s_j : A_k \to X_{k+1}$ vardır. $(s_j)_{0\le j\le k}$ tanımı bozulmuşların (dejenerelerin) bir sistemini oluşturur ve şimdi bir

$$\{A_0, A_1,..., A_k, X_{k+1}\}$$

$(k+1)$-kesilmiş simplişıl cebiri tanımlanmış olur. Bu yöntemi tekrarlayarak kesilmiş simplişıl cebirin *coskeletonu* olarak adlandırılan

$$cosk^k(tr^k(A)) = \{A_0, A_1,..., A_k, X_{k+1}, X_{k+2},...\}$$

simplişıl cebirini elde ederiz. Eğer B bir simplişıl cebir ise, bu takdirde herhangi bir

$$x : tr^k(A) \to tr^k(B)$$

kesilmiş simplişıl cebiri bir

$$x : A \to cosk^k(tr^k(B))$$

simplişıl dönüşümüne genişletilir. Bir dual yöntem ile oluşturulabilen k-skeleton functorleri

$$(s_0,...,s_k) : A_k \; \begin{matrix} \xrightarrow{s_k} \\ \vdots \\ \xrightarrow[s_0]{} \end{matrix} \; X_{k+1}$$

simplişıl eşçekirdeklerini gerektirir. Yani, $0 \le i \le j \le k-1$ için $s_i s_j = s_{j+1} s_i$'nin doğruluğunu kanıtlayan $k+1$ dönüşümlerinin evrensel sistemleridir. Ayrıntılar için **[10]** ve **[2]**'ye bakınız.

Aşağıdaki lemma Conduché **[8]**'den dolayı grup durumu içindir. Değişmeli cebir versiyonu için açık bir benzerini veririz, fakat **[12]**'deki karşılık gelen sonuçta ufak değişiklikler ile elde edilebilen ispatını almayız.

Lemma 1.6.2 *A bir simplişıl cebir olsun. Onun $cosk^k(tr^k(A))$ k-coskeletonunun Moore kompleksinin uzunluğu $k+1$'dir, yani,*

$$N(cosk^k(tr^k(A)))_i = 0$$

ve boyutu $k+1$'den küçük boyutta A'nın Moore kompleksine özdeştir. Bundan başka

$$N(cosk^k(tr^k(A)))_{k+1} = \text{Çek}(\partial_k : NA_k \to NA_{k-1})$$

ve

$$\partial_{k+1} : N(cosk^k(tr^k(A)))_{k+1} \to N(cosk^k(tr^k(A)))_k = NA_k$$

morfizmi bire-birdir.

1.7 Serbest Simplişıl Cebirler

Aşağıdaki tanımları **[29]** ve **[30]** makalelerinden hatırlatalım;

Tanım 1.7.1 Eğer;

(i) Her $n \geq 0$ tamsayısı için, verilmiş olan baz ile birlikte A_n bir serbest cebir,

(ii) Bazlar tüm bozulmuş dönüşümler altında değişmez yani $0 \leq i \leq n$ ile birlikte (i,n) tamsayı çifti ve verilen her $x \in A_n$ üreteci için $s_i(x)$ elemanı A_{n+1}'in verilmiş olan üreteci ise A simplişıl cebiri serbest olarak adlandırılacaktır.

Tanım 1.7.2 A bir serbest simplişıl cebir olsun. (Yukarıdaki gibi). Eğer
(a) Tüm $n \geq 0$ için serbest olarak A_n, $U_n = U \cap A_n$'i üretir,

(b) U bozulmuşlar altında kapalıdır, yani, tüm $0 \leq i \leq n$ için $x \in U_n$ ise $s_i(x) \in U_{n+1}$ belirtir,

(c) Eğer $x \in U_n$ bozulmamış ise, bu takdirde tüm $0 \leq i < n$ için (e_{n-1}, A_{n-1}'in özdeşlik elemanı) $d_i(x) = e_{n-1}$ olmak üzere $U \subset A$ alt cümlesi A için CW*-bazı* olarak adlandırılacaktır.

A, verilen U CW-bazı ile birlikte bir serbest simplişıl cebir olsun, bu takdirde serbest olarak $X_0 = U_0$ A_0'ı üretir, bu $A_0 = A[X_0]$. Eğer devam edilirse, bu takdirde serbest olarak U_1 A_1'i üretir ve $s_0(X_0) \subseteq U_1$ ayrıca eğer $Y_1 = U_1 / s_0(X_0)$ ise bu takdirde $y \in Y_1$ olmak üzere $0 \leq i < 1$ için $d_i(y) = 0$, bu sebep ile $A = A[\, s_0(X_0) \cup Y_1] \cong A[s_0(X_0)] * A[Y_1]$, $A[s_0(X_0)]$ ve $A[Y_1]$'in serbest çarpımıdır. A_2 için, $s_0(U_1) \cup s_1(U_1) \subseteq U_2$ ve $y \in Y_2 = U_2 \setminus \bigcup_{i=0}^{1} s_i(U_i)$ ise, bu takdirde $d_0(y) = d_1(y) = 1$, ve $y \in NA_2$. Genel olarak eğer

$Y_n = U_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} s_i(U_i)$ ise, bu takdirde $Y_n \subseteq NA_n$ ve normal olarak Y_n'in NA_n'i ürettiğine dikkat edelim.

1.8 Simplişıl Cebirlerin Kapalı Model Kategorisi

Bu çalışmaya simplişıl cebirler üzerinde tanımlanacak olan zayıf denklikler, fibrationlar, cofibrationlar, LLP (left lifting property) ve RLP (right lifting property) tanımlarını vererek başlarız ve Quillen (**[35]**, **[37]**) tarafından tanıtılan simplişıl gruplar üzerinde tanımlanan kapalı model kategori kavramını simplişıl cebirler üzerine aktararak devam eder, Strom yapısı ile topolojik uzayların kategorisini veririz.

Tanım 1.8.1 A bir simplişıl cebir olmak üzere, eğer her $* \in X$ taban (baz) noktasının seçimi ve tüm $n \geq 0$ için $f : X \to Y \in A$ dönüşümü

$$\pi_n(X,*) \approx \pi_n(Y,*)$$

izomorfizmini doğurursa f *zayıf denklik* olarak adlandırılacaktır.

Tanım 1.8.2 $0 \leq k \leq n$ için $\Delta[n,k] \subset \Delta[n]$, $d_0 i_n, \ldots, d_{k-1} i_n, d_{k+1} i_n, \ldots, d_n i_n$ tarafından meydana getirilen simplişıl alt kümeyi göstersin. Eğer aşağıdaki diyagramda nokta ile gösterilmiş ok varsa, $f : X \to Y \in A$ dönüşümüne bir *fibration* denir.

$$\begin{tikzcd} \Delta[n,k] \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Tanım 1.8.3 Zayıf denklikler olan bütün fibrationlara göre left lifting özelliğine (LLP) sahip $i : A \to B \in T$ dönüşümü bir *cofibration* olarak adlandırılacaktır, yani $i : A \to B \in T$ dönüşümü bire bir ise bu dönüşüme *cofibration* denir. Yani aşağıdaki diyagramda noktalı ok ile gösterilen dönüşüm vardır.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Tanım 1.8.4 Bir *kapalı model kategorisi*, aşağıdaki CM1'den CM5'e kadar aksiyomları sağlayan ibrationlar, cofibrationlar ve zayıf denklikler olarak adlandırılan dönüşümlerin üç ayrık ailesi ile verilen bir $\mathscr{C}$ kategorisidir:

CM 1. $\mathscr{C}$, sonlu, izdüşümsel ve tümevarımsal limitler altında kapalıdır.

CM 2. Eğer f ve g dönüşümleri gf tanımlanmış olacak şekilde varsa ve eğer f, g ve gf'den ikisi zayıf denklikler ise bu takdirde üçüncüsü de zayıf bir denkliktir.

$\mathscr{C}$'deki dönüşümlerin, morfizmler için değişmeli karelere sahip olan Maps($\mathscr{C}$) kategorisinin nesnelerini teşkil ettiğini hatırlatalım. Eğer Maps($\mathscr{C}$)'de $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde $g : B \to A$ morfizmi varsa $f : A \to B$ morfizmine bir *geri çekilim* denir.

Zayıf denklik ve fibration olan bir dönüşüme bir *aşikâr fibration* denir ve benzer şekilde zayıf denklik ve cofibration olan bir dönüşüme de bir *aşikâr cofibration* denir.

CM 3. Eğer f g'nin bir geri çekilimi ve g bir fibration, cofibration veya zayıf denklik ise, bu takdirde f de bir fibration, cofibration veya zayıf denkliktir.

CM 4. (Lifting) Verilmiş olan kesikli ok diyagramı:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Noktalı ok aşağıdaki durumlardan herhangi birisinde vardır:

(i) i bir cofibration ve p bir aşikâr fibrationdır.

(ii) i bir aşikâr cofibration ve p bir fibrationdır.

CM 5. (Çarpanlara ayırma) Keyfi bir f dönüşümü iki yolla çarpanlara ayrılabilirdir:

(i) i bir cofibration ve p bir aşikâr fibration olmak üzere $f = pi$.

(ii) i bir aşikâr cofibration ve p bir fibration olmak üzere $f = pi$.

Eğer ($*$) şeklinin keyfi bir diyagramı içinde noktalı ok var ise diğer bir $p : X \to Y$ dönüşümüne göre kategorideki i dönüşümü left lifting özelliğine (LLP) sahiptir ve $i : A \to B$'ye göre p dönüşümü de right lifting özelliğine (RLP) sahiptir denir.

$\mathscr{C}$'nin başlangıç nesnesi ϕ ile ve bitim nesnesi de $*$ ile gösterilsin. $\mathscr{C}$'nin X nesnesine; $X \to *$ morfizmi bir fibration ise *fibrant*, $\phi \to X$ bir cofibration ise *cofibrant* denir.

Aşağıda belirtilen iki tanımla da eş-silindir (cocylinder) kavramına sahip oluruz:

Tanım 1.8.5 $\mathscr{C}$ 'nin bir nesnesi X olsun. X için bir *eş-silindir* (*cocylinder*) aşağıdaki gibi belirtilen bir değişmeli diyagramdır:

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[r, "\partial_0+\partial_1"] \arrow[d, "\nabla"'] & X' \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Burada $\partial_0 + \partial_1$ bir cofibration, p bir zayıf denklik ve $p(\partial_0 + \partial_1) = \mathrm{id}_X + \mathrm{id}_X = \nabla$.

Tanım 1.8.6 $\mathscr{C}$ 'nin X nesnesi için bir *eş-silindir* (*cocylinder*) aşağıdaki gibi belirtilen bir değişmeli diyagramdır:

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[d, "(d_0,d_1)"] \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Burada (d_0, d_1) bir fibration, s bir zayıf denklik ve $(d_0, d_1)s = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) = \Delta$.

Verilmiş olan $\mathscr{C}$ model kategorisi, kesirlerin kategorisi (**[18]**'e bakınız.), zayıf denkliklerin genel ters dönmesi tarafından elde edilmiştir ki $Ho(\mathscr{C})$ ile gösterilmiştir. Eğer başlangıç ve bitim nesneleri izomorfik iseler $\mathscr{C}$ kategorisine *noktalanmıştır* denir.

İKİNCİ BÖLÜM
SİMPLİŞIL CEBİRLERİN QUILLEN YAPISI İÇİN HOMOTOPİ TEORİSİ

2.0 Giriş

Bu bölümde, simplişıl cebirlerin kategorisinde sık kullanılan yapıları vererek giriş yaparız ve $f_\bullet$ morfizmi bir sabit boyutta bir Kan fibration olduğunda ve $\pi_q(f_\bullet)$ doğrulmuş morfizminin bire bir ya da örten olduğu durumu göz önüne alırız. Daha sonra $Simp(Alg)$'deki homotopi teorisindeki yapıları sunarız ve sonuç olarak, homotopi kategorilerinin $Simp(Alg)$'ye kapalı olarak bağlantılı olan iki kapalı model kategorisini veririz.

2.1 Simplişıl Cebirler İçin Bazı Sonuçlar

Şu andan itibaren, simplişıl cebirlerin kategorisini $Simp(Alg)$ ile göstereceğiz ve eğer $A_\bullet$ bir simplişıl cebir ise, Moore anlamında $A_\bullet$'nın normalleştirilmiş kompleksini $N_*(A_\bullet)$ ve homotopi modüllerini $\pi_*(A_\bullet)$ ile göstereceğiz. $\pi_*(A_\bullet)$'daki elemanları göstermek için köşeli parantez kullanacağız. Bir simplişıl cebirin underlying simplişıl cümlesinin bir Kan kompleksi olduğuna dikkat edelim (**[22]**'ye bakınız).

$\Delta^n(A_{\bullet tr})$ ile gösterilen, bir $(n-1)$-kesilmiş simplişıl cebir olan $A_{\bullet tr}$'nin $n.$ simplişıl çekirdeğinin $i<j$ için $d_i x_j = d_{j-1}x_i$ olmak üzere elemanları $(x_0,...,x_n)$ olan $(A_{n-1})^{n+1}$'in alt cebiri olduğunu hatırlatalım. Bu simplişıl çekirdek yapısını kullanarak $(n-1)$-kesilmiş simplişıl cebirlerin kategorisinden $Simp(Alg)$'ye kadar bir $cosk^{n-1}$ functorüne sahiptir. Bu functor, $(n-1)$-kesilmiş functorüne sağ adjointtir. Kesilmiş olan tr^{n-1}, $n-1$ boyutta bir simplişıl cebirdir. $Cosk^{n-1} = cosk^{n-1}tr^{n-1}$ ve $\Delta^n(A) = \Delta^n(tr^{n-1}(A_\bullet))$ şeklinde göstereceğiz.

$$N_q(Cos\,k^{n-1}(A_\bullet)) = \begin{cases} N_q(A_\bullet) & q \le n-1 \text{ için} \\ \text{Çek}\,(N_{n-1}(A_\bullet) \to N_{n-2}(A_\bullet)) & q = n \quad \text{için} \\ 0 & q \ge n+1 \text{ için} \end{cases}$$

olduğu doğrudan görülür.

tr^{n-1} kesilmiş functorü ayrıca bir sol adjointe sahiptir. n-simplişıl eşçekirdek notasyonunu incelemek vasıtasıyla tanımlanabilen sk^{n-1}, $(n-1)$-skeleton functor olarak adlandırılır (**[7]**, **[10]**'a bakınız). $Sk^{n-1} = sk^{n-1}tr^{n-1}$ şeklinde yazacağız ve bu durumda bu functor $Cosk^{n-1}$'e sol adjointtir.

Bir $(n-1)$-kesilmiş simplişıl cebir olan $A_{\bullet tr}$ verilsin, $A_{\bullet tr}$'nin açık k-hornlarının cebirini $0 \leq k \leq n$ için $\Lambda_k^n(A_{\bullet tr})$ ile göstereceğiz, yani, $\Lambda_k^n(A_{\bullet tr})$ $i, j \neq k,\ i < j$ için $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ olacak şekilde elemanları $(x_0, ..., x_k, ..., x_n)$ olan $(A_{n-1})^n$'in alt cebiridir. Bir $A_\bullet$ simplişıl cebiri için $\Lambda_k^n(A_\bullet) = \Lambda_k^n(tr^{n-1}(A_\bullet))$ şeklinde göstereceğiz.

$g_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ ve $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ verilen morfizmler olmak üzere eğer herhangi bir değişmeli

$$\begin{tikzcd}
X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g_\bullet"'] & A_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\
Y_\bullet \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B_\bullet
\end{tikzcd}$$

diyagramı için her iki üçgeni de değişmeli yapan bir köşegen varsa, $f_\bullet$'nın $g_\bullet$'ya göre sağ lifting özelliğine (RLP) ve $g_\bullet$'nın da $f_\bullet$'ya göre sol lifting özelliğine (LLP) sahip olduğunu söyleyeceğiz.

Eğer $\Delta[n]$'in simplişıl alt cümlelerinden biri göz önüne alınırsa, $\dot{\Delta}[n] = Sk^{n-1}(\Delta[n])$, $\Delta^n(A_\bullet)$'nın verilen bir elemanının verilen bir $\dot{\Delta}[n] \to A_\bullet$ simplişıl dönüşümüne denk olduğunu göstermek kolaydır, ya da, denk olarak F bir serbest cebir functorü olduğunda $F\dot{\Delta}[n] \to A_\bullet$ bir simplişıl morfizmdir. Ayrıca $\Delta[n,k]$ $i \neq k$ olmak üzere bütün $d_i((0,1,...,n))$ tarafından üretilen $\Delta[n]$'in simplişıl alt cümlesi olduğunda, $\Lambda_k^n(A_\bullet)$'nın bir elemanının verilen bir $F\Delta[n,k] \to A_\bullet$ simplişıl morfizmine denk olduğu açıktır. Bu takdirde aşağıdaki önermeyi göstermek basittir:

Önerme 2.1.1. *$f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ simplişıl cebirlerin bir morfizmi olsun.*

(i) $A_n \to B_n \times_{\Delta^n(H_\bullet)} \Delta^n(A_\bullet)$ *doğal dönüşümünün örten olması için gerek ve yeter şart* $f_\bullet$ *'nın* $\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ *kanonik kapsama dönüşümü tarafından üretilmiş* $F\dot{\Delta}[n] \to F\Delta[n]$ *simplişıl morfizmlerine göre RLP'ye sahip olmasıdır.*

(ii) $0 \le k \le n$ *olmak üzere* $A_n \to B_n \times_{\Lambda_k^n(H_\bullet)} \Lambda_k^n(A_\bullet)$ *doğal morfizminin örten olması için gerek ve yeter şart* $0 \le k \le n$ *olmak üzere* $\Delta[n,k] \hookrightarrow \Delta[n]$ *kanonik kapsaması tarafından üretilen,* $F\Delta[n,k] \to F\Delta[n]$ *simplişıl morfizmlerine göre RLP'ye sahip olmasıdır.*

Bu önermedeki (ii) koşulu n-boyutta Kan koşulunu sağlayan $f_\bullet$ morfizmine denktir ve böylece bu önermenin (ii) koşulunu sağlayan bir morfizm 'n *boyutta bir Kan fibration*' olarak adlandırılacaktır.

Şimdi, bu bölümde sıkça kullanılacak olan bir teknik lemmayı ispatlayacağız:

Lemma 2.1.2. $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ *simplişıl cebirlerin bir morfizmi olsun:*

(i) $f_\bullet$*'nın* n *boyutta bir Kan fibration olması için gerek ve yeter şart* $N_n(f_\bullet)$*'nın örten olmasıdır;*

(ii) *Eğer* $f_\bullet$ $F\Delta[n+1,n+1] \to F\Delta[n+1]$*'e göre RLP'ye sahip,* $\pi_n(f_\bullet)$ *örten ve* $\pi_{n-1}(f_\bullet)$ *bire bir ise, bu takdirde* $f_\bullet$*,* $F\dot{\Delta}[n] \to F\Delta[n]$*'e göre RLP'ye sahiptir;*

(iii) *Eğer* $f_\bullet$*,* $F\dot{\Delta}[n] \to F\Delta[n]$*'e göre RLP'ye sahip ise, bu takdirde* $\pi_n(f_\bullet)$ *örtendir ve* $\pi_{n-1}(f_\bullet)$ *bire birdir;*

(iv) *Eğer* $f_\bullet$ *her iki* $F\dot{\Delta}[n+1] \to F\Delta[n+1]$ *ve* $F\dot{\Delta}[n] \to F\Delta[n]$ *morfizmlerine göre RLP'ye sahip ise, bu takdirde* $f_\bullet$*,* $n+1$ *boyutta bir Kan fibrationdır;*

(v) $f_\bullet$*'nın* $F\Delta[n,k] \to F\dot{\Delta}[n]$*'e göre RLP'ye sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart* $h_n :$ Çek$(N_{n-1}A_\bullet \to N_{n-2}A_\bullet) \to$ Çek$(N_{n-1}B_\bullet \to N_{n-2}B_\bullet)$ *üretilmiş morfizminin örten olmasıdır.*

İspat. Bu ispat boyunca Önerme 2.1.1'de verilen özellikleri kullanacağız.

(i) $(y,(x_0,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n)) \in B_n \times_{\Lambda_k^n(B_\bullet)} \Lambda_k^n(A_\bullet)$ olsun. $A_\bullet$ bir Kan kompleksi olduğundan $i \ne k$ olmak üzere $d_i x = x_i$ olacak şekilde $x \in A_n$ vardır ve bu takdirde

$y - f_n(x) \in N_n^k(A_\bullet) = \text{Çek}\, d_0 \cap ... \cap \widehat{\text{Çek}\, d_k} \cap ... \cap \text{Çek}\, d_n$. $N_n^k(A_\bullet)$'nın $N_n(A_\bullet)$'ya doğal olarak bire bir ve örten olmasını kullanarak (**[7]**'ye bakın), $N_n^k(A_\bullet) \to N_n^k(B_\bullet)$ üretilmiş örten morfizmine sahibiz, bu sebeple $f_n(z) = y - f_n(x)$ olacak şekilde $z \in N_n^k(A_\bullet)$ vardır ve bu takdirde ispatta istenen eleman $z + x$. Tersi açıktır.

(ii) $(y,(x_0,...,x_n)) \in B_n \times_{\Delta_k^n(B_\bullet)} \Delta_k^n(A_\bullet)$ verilsin ve $A_\bullet$'nın bir Kan kompleksi olduğunu kullanarak $0 \le i \le n-1$ olmak üzere $d_i x' = x_i$ olacak şekilde $x' \in A_n$ vardır ve $0 \le i \le n-1$ için $d_i(f_n x' - y) = 0$ ve $d_n(f_n x' - y) = f_{n-1}(d_n x' - x_n)$ olduğundan , $\pi_{n-1}(f_\bullet)[d_n x' - x_n] = 0$ olduğuna sahibiz. Şimdi, $\pi_{n-1}(f_\bullet)$ bire bir iken $0 \le i \le n-1$ için $d_i x'' = 0$ olacak şekilde $[d_n x' - x_n] = 0$ ve $d_n x'' = d_n x' - x_n$ olması bir $x'' \in X_n$ elemanının var olduğu anlamına gelir. Bu takdirde $z = -x'' + x'$ elemanı $0 \le i \le n$ için $d_i z = x_i$'yi sağlar ve böylece $0 \le i \le n$ için $d_i(y - f_n z) = 0$; $\pi_n(f_\bullet)$ örten olduğundan $[t] \in \pi_n(A_\bullet)$ ve, $0 \le i \le n-1$ için $d_i w = 0,\ d_n w = f_n(t)$ ve $d_{n+1} w = y - f_n(z)$ olacak şekilde $w \in B_{n+1}$ vardır. Sonuç olarak, $A_{n+1} \to B_{n+1} \times_{\Lambda_{n+1}^{n+1}(B_\bullet)} \Lambda_{n+1}^{n+1}(A_\bullet)$ morfizminin örten olduğunu kullanarak $0 \le i \le n-1$ için $d_i u = 0,\ d_n u = t$ ve $f_{n+1}(u) = w$ olacak şekilde $u \in A_{n+1}$ vardır. İspatta istenen eleman $x = d_{n+1} u + z$.

(iii) $[y] \in \pi_n(B_\bullet)$ olsun. Bu takdirde $(y,(0,...,0)) \in B_n \times_{\Delta^n(B_\bullet)} \Delta^n(A_\bullet)$ ve böylece $0 \le i \le n$ için $d_i x = 0$ olacak şekilde $x \in A_n$ vardır ve $f_n(x) = y$; böylelikle $\pi_n(f_\bullet)[x] = [y]$. Diğer taraftan, $\pi_{n-1}(f_\bullet)[x] = [0]$ ise, $0 \le i \le n-1$ için $d_i y = 0$ olacak şekilde $y \in B_n$ vardır ve $d_n y = f_{n-1}(x)$. Bu takdirde $(y,(0,...,0,x)) \in B_n \times_{\Delta^n(B_\bullet)} \Delta^n(A_\bullet)$ ve böylece $0 \le i \le n-1$ için $d_i z = 0$ olacak şekilde $z \in A_n$ vardır ve $d_n(z) = x$ olması $[x] = [0]$ olmasını gerektirir.

(iv) Bunun için, $0 \le k \le n+1$ iken herhangi bir $(y,(x_0,...,\hat{x}_k,...,x_{n+1})) \in B_{n+1} \times_{\Lambda_k^{n+1}(B_\bullet)} \Lambda_k^{n+1}(A_\bullet)$ elemanını göz önüne alalım ve $A_\bullet$'nın $(n-1)$-simplekslerinin $n+1$ tanesinin koleksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$z_i = \begin{cases} d_{k-1} x_i & 0 \le i \le k-1 \\ d_k x_{i+1} & k-1 < i \le n \end{cases}$$

$(d_k y,(z_0,...,z_n)) \in B_n \times_{\Delta^n(B_\bullet)} \Delta^n(A_\bullet)$ olduğunu görmek basittir ve böylece $f_n(x_k) = d_k y$ ve $0 \le i \le n$ için $d_i x_k = z_i$ olacak şekilde $x_k \in A_n$ vardır. Şimdi, $(y,(x_0,...,x_{n+1})) \in B_{n+1} \times_{\Delta^{n+1}(B_\bullet)} \Delta^{n+1}(A_\bullet)$ olduğuna sahibiz ve bu takdirde $f_{n+1}(x) = y$ ve $0 \le i \le n+1$ için $d_i x = x_i$ olacak şekilde $x \in A_{n+1}$ vardır. Bu ifade ise $f_\bullet$'nın $n+1$ boyutta bir Kan fibration olduğunu iddia eder.

(v) h_n örtendir ancak ve ancak $N_n(Cosk^{n-1}A_\bullet) \to N_n(Cosk^{n-1}B_\bullet)$ örtendir ancak ve ancak $Cosk^{n-1}f_\bullet$, $F\Delta[n,k] \to F\Delta[n]$'e göre RLP'ye sahiptir ancak ve ancak $f_\bullet$, $Sk^{n-1}F\Delta[n,k] \to Sk^{n-1}F\Delta[n]$'e göre RLP'ye sahiptir ancak ve ancak $f_\bullet$, $F\Delta[n,k] \to F\dot{\Delta}[n]$'e göre RLP'ye sahiptir. ❑

Fibrationların Kan fibration, zayıf denkliklerin π_* functorleri için izomorfizmleri içeren morfizmler ve cofibrationların aşikâr fibrationlara göre LLP ile morfizmler olmak üzere Quillen **[12]**'nin anlamında $Simp(Alg)$ kategorisi bir kapalı model kategorisidir (yani, fibration ve zayıf denklikler olan morfizmler). **[35]**'te fibration ve aşikâr fibrationların karakterizasyonları verilmiştir. Cofibrationlar, serbest simplişıl cebir dönüşümlerinin geri çekilimleri gibi karakterize edilmiştir (**[35]**'e bakınız).

[30]'dan, bir $F_\bullet$ simlişıl cebirinin her bir $q \ge 0$ için bir serbest simplişıl cebir olduğunu hatırlatalım. F_q, verilen bir baz ile birlikte bir serbest cebirdir ve bazlar bozulmuş operatörler altında değişmezdir. Kapsama dönüşümü tarafından üretilen morfizm g_q ve U_q bazı ile birlikte FU_q serbest cebir olmak üzere, bütün q'lar için $f_q + g_q : A_q \coprod FU_q \to B_q$ doğrulmuş morfizmi bir izomorfizm olacak şekilde bozulmuşlar altındaki her bir q değişmezi için $U_q \subset B_q$ alt cümleleri var ise, bir $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ morfizmi bir *serbest simplişıl cebir* olarak adlandırılır (**[35]**'e bakınız).

Daha sonra, bu kapalı model yapısına birleştirilmiş homotopi teorisindeki bazı yapıları hatırlatalım.

$A_\bullet$ herhangi bir simplişıl cebir ve $I = \Delta[1]$ olsun. $\forall i$ için $(A_\bullet \otimes I)_n = \coprod_{i=0}^{n+1}(A_n)_i$, $(A_n)_i = A_n$ ile birlikte $A_\bullet \otimes I$ simplişıl cebir ve doğal simplişıl işlemleridir. $A_\bullet$ cofibrant ise, eşdiagonal morfizmin bir faktorizasyonuna sahip olduğundan bu yapı $Simp(Alg)$'de $A_\bullet$ için bir silindir verir. σ, özdeşlikler ile üretilen morfizm olduğunda $A_\bullet \coprod A_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} A_\bullet \otimes I \xrightarrow{\sigma} A_\bullet$ bir zayıf denkliktir (gerçekten, bir kuvvetli bozulmuş geri çekilimdir) ve sırasıyla birinci ve son kapsamalar ile üretilen morfizm olan i_0+i_1 de cofibrationdır.

$B_\bullet \in Simp(Alg)$ verilsin,

$$\{(x_0,...,x_n) \in B_{n+1}^{n+1} \,/\, d_i x_i = d_i x_{i-1},\ 1 \le i \le n\}$$

cebiri ile tanımlanabilen, $(B'_\bullet)_n = Hom_{Simp(Alg)}(I \times \Delta[n], B_\bullet)$ ile verilen $B'_\bullet = Hom_{Simp(Alg)}(I, B_\bullet)$ n-simplekslerinin simplişıl cebir olduğunu hatırlatalım ve yüzey ve bozulmuş operatörler de

$$\begin{aligned} d_i(x_0,...,x_n) &= (d_{i+1}x_0,...,d_{i+1}x_{i-1}, d_i x_{i+1} ..., d_i x_n),\ \ 0 \le i \le n; \\ s_j(x_0,...,x_n) &= (s_{j+1}x_0,...,s_{j+1}x_j, s_j x_j,..., s_j x_n),\ \ 0 \le j \le n \end{aligned}$$

ile verilsin.

Bu simplişıl cebir, diagonal morfizmin bir faktorizasyonuna sahip olduğundan $Simp(Alg)$'de $B_\bullet$ için bir yol uzayı nesnesidir. $\rho, \rho_n(x) = (s_0 x,..., s_n x)$ ile verildiğinde $B_\bullet \xrightarrow{\rho} B_\bullet^I \xrightarrow{(\partial_0,\partial_1)} B_\bullet \times B_\bullet$ bir zayıf denkliktir ve $(\partial_0)_n(x_0,...,x_n) = d_0 x_0$ ve $(\partial_1)_n(x_0,...,x_n) = d_{n+1}x_n$ ile üretilen (∂_0,∂_1) de bir fibrationdır (∂_0 ve ∂_1'in her ikisinin de ρ'nun homotopik tersi ile birlikte kuvvetli bozulmuş geri çekilimi olduğuna dikkat edelim).

Bu silindir ve yol yapıları, $-\otimes I$'nın sol adjoint olduğu yerde $(-)^I : Simp(Alg) \to Simp(Alg)$ olmak üzere $-\otimes I$ adjoint functorlerini belirtir, ayrıca $\Sigma, \Omega : Simp(Alg) \to Simp(Alg)$ functorleri de (suspension ve loop functorleri) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$A_\bullet \in Simp(Alg)$ verilsin,

$$A_\bullet \coprod A_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} A_\bullet \otimes I$$

morfizminin $(\Sigma A_\bullet)$ cofibresi $(\Sigma A_\bullet)_n = \coprod_{i=1}^{n}(A_n)_i$ ile birlikte simplişıl cebirdir, $\forall i$ için $(A_n)_i = A_n$ şeklindedir ve yüz ve bozulmuş morfizmler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$1 \le i \le n-1$ için $u_i : (A_{n-1})_i \to (\Sigma A)_{n-1}$ ile birlikte

$$d_k^i = \begin{cases} u_i d_k & i+k \le n \\ u_{i-1} d_k & i+k > n \end{cases}$$

olduğunda $d_k : (\Sigma A)_n \to (\Sigma A)_{n-1}$, $d_k^i : (A_n)_i \to (\Sigma A)_{n-1}$ tarafından belirtilen morfizmdir.

$s_k : (\Sigma A)_n \to (\Sigma A)_{n+1}$,

$$s_k^i = \begin{cases} u_i s_k & i+k \le n \\ u_{i+1} s_k & i+k > n \end{cases}$$

olduğunda $s_k^i : (A_n)_i \to (\Sigma A)_{n+1}$ tarafından belirlenen morfizmdir.

Şimdi, eğer $PB_\bullet$'yı $\partial_1 : B_\bullet^I \to B_\bullet$ (aşikâr) fibrationının fibresi olarak göz önüne alırsak $\forall n \ge 0$ için $\pi_n(PB_\bullet) = 0$ olduğu açıktır ve $\partial_0 : PB_\bullet \to B_\bullet$ fibrationını göz önüne alarak $\Omega B_\bullet$'yı bu fibrationın ((∂_0, ∂_1)'in fibresi olan) fibresi olarak tanımlarız. Homotopi gruplarına birleştirilen uzun tam dizi $\forall n \ge 1$ için $\pi_n(B_\bullet) \cong \pi_{n-1}(\Omega B_\bullet)$ olduğunu verir.

$(\Omega B_\bullet)_n = \{(x_0, ..., x_n) \in B_{n+1}^{n+1} / d_i x_i = d_i x_{i-1}, 1 \le i \le n; d_0 x_0 = d_{n+1} x_n = 0\}$ olduğuna ve bu yapının Σ'a sağ adjoint olan bir $\Omega : Simp(Alg) \to Simp(Alg)$ functorünü belirlediğine dikkat edelim. $Ho(Simp(Alg))$ homotopi kategorisindeki üretilmiş functorleri adjoint suspension ve loop functorleridir.

[30]'da verilen, loop kompleksinin bir Kan kompleksine birleştirilmesi tanımını kullanarak, herhangi bir $B_\bullet$ simplişıl cebiri, başka bir $\Omega' B_\bullet$ simplişıl cebiri için $(P'B_\bullet)_n = \{x \in B_{n+1} / d_1 ... d_{n+1} x = 0\}$ olduğunda $d_0 : P'B_\bullet \to B_\bullet$ fibrationının fibresi olarak tanımlandığını biliyoruz, i. yüzey morfizmi d_{i+1}'in kısıtlanmışı, ve d_0, d_0'dan $P'B_\bullet$'ya kısıtlanmasıdır. $P'B_\bullet$ büzülebilir olduğundan, $n \ge 1$ için $\pi_n(B_\bullet) \cong \pi_{n-1}(\Omega' B_\bullet)$ olduğu açıktır.

$x_0 = x$ ve $x_{i+1} = s\, d_{i+1} x_i$ ile birlikte $\phi_n(x) = (x_0, ..., x_n)$ olduğunda fibration dizilerinin aşağıdaki değişmeli diyagramı

$$\begin{tikzcd}
\Omega' B_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & P'B_\bullet \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\phi"'] & B_\bullet \arrow[d, equal] \\
\Omega B_\bullet \arrow[r] & PB_\bullet \arrow[r, "\partial_0"] & B_\bullet
\end{tikzcd}$$

her iki fibration dizisine birleştirilen homotopi cebirlerindeki uzun tam dizilerin kullanımıyla $\phi : \Omega' B_\bullet \to \Omega B_\bullet$'nın bir zayıf denklik olduğunu verir. Böylece Ω ve Ω' aynı $\Omega : Ho(Simp(Alg)) \to Ho(Simp(Alg))$ functorünü tanımlar.

[35]'e göre $Simp(Alg)$ kategorisi bir kapalı simplişıl model kategorisidir, burada $F_t(x) = F_q(x,t)$ ile verilen $F_t : A_q \to B_q$ bir cebir morfizmi olacak şekilde $Hom_{Simp(A\lg)}(A_\bullet, B_\bullet)$ kompleks fonksiyonları $F_\bullet : A_\bullet \times \Delta[n] \to B_\bullet$ n-simpleksli simplişıl dönüşümlerine sahiptir. $f_\bullet, g_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ morfizmleri verilsin, $f_\bullet$ ve $g_\bullet$ $Hom_{Simp(A\lg)}(A_\bullet, B_\bullet)$'nın 0-simpleksleri olarak dikkate alındığında $f_\bullet$, $g_\bullet$'ya homotopik ise, bu takdirde $f_\bullet$ $g_\bullet$'ya simplişıl olarak homotopiktir. $f_\bullet$'dan $g_\bullet$'ya bir simplişıl homotopi, $F_t : A_q \to B_q$ bir cebir morfizmi ve $d_0 F_\bullet = f_\bullet$ ve $d_1 F_\bullet = g_\bullet$ olacak şekilde $F_\bullet : A_\bullet \times I \to B_\bullet$ şeklinde bir simplişıl dönüşümdür. Bu, ya $\kappa_\bullet i_0 = f_\bullet$ ve $\kappa_\bullet i_1 = g_\bullet$'yı sağlayan $\kappa_\bullet : A_\bullet \otimes I \to B_\bullet$ şeklinde bir simplişıl morfizme ya da $\partial_0 \kappa'_\bullet = f_\bullet$ ve $\partial_1 \kappa'_\bullet = g_\bullet$'yı sağlayan $\kappa'_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet^I$ şeklinde bir simplişıl morfizme denktir.

Verilen böyle bir $\kappa_\bullet$ morfizmi aşağıdaki özdeşlikleri sağlayan $(k_j^n : A_n \to B_n\,,\, 1 \le j \le n)$ morfizmlerinin verilen bir sistemine denk olduğuna dikkat edelim:

$d_0 k_1^n = f_{n-1} d_0$	$d_i k_j^n = k_{j-1}^n d_i \quad i < j$ için	$s_i k_j^n = k_j^{n+1} s_i \quad i \ge j$ için
$d_n k_n^n = g_{n-1} d_n$	$d_i k_j^n = k_j^{n-1} d_i \quad i \ge j$ için	$s_i k_j^n = k_{j+1}^{n+1} s_i \quad i < j$ için

Ayrıca verilen böyle bir $\kappa'_\bullet$ morfizminin yüz ve bozulmuş operatörlere göre aşağıdaki homotopi özdeşliklerini sağlayan $(h_j^n : A_n \to B_{n+1},\, 0 \le j \le n)$ morfizmlerinin verilen bir sistemine denk olduğuna dikkat edelim:

$d_0 h_0^n = f_n$	$d_{n+1} h_n^n = g_n$	$d_i h_j^n = h_{j-1}^{n-1} d_i$	$i < j$ için
$s_i h_j^{n-1} = h_{j+1}^n s_i$	$i \le j$ için	$d_{j+1} h_{j+1}^n = d_{j+1} h_j^n$	
$s_i h_j^{n-1} = h_j^n s_{i-1}$	$i > j$ için	$d_i h_j^n = h_j^{n-1} d_{i-1}$	$i > j+1$ için

Morfizmlerin iki sistemi arasındaki denklik $k_i^n = d_i h_{i-1}^n$ ve $h_i^n = k_{i+1}^{n+1} s_i$ kuralları ile verilir.

Eğer $f, g : X \to Y$ morfizmler ve X cofibrant ve Y fibrant ise, bu takdirde simplişıl sol ve sağ homotopi bağıntılarının çakıştığı ve denklik bağıntıları olduğu bir kapalı simplişıl model kategori (**[35]**'e bakınız) için genel bir gerçektir. Bu, herhangi bir $B_\bullet$ simplişıl cebiri için $Hom_{Ho(Simp(Alg))}(A_\bullet, B_\bullet) = [A_\bullet, B_\bullet]$ 'nin $A_\bullet$'dan $B_\bullet$'ya simplişıl morfizmlerin simplişıl homotopi sınıflarının cümlesi olması halinde, $Simp(Alg)$'de $A_\bullet$'nın bir serbest simplişıl cebir olduğu durumdur.

Bölümün son kısmı, iki kapalı model kategorisinin $Simp(Alg)$'ye kapalı olarak bağlantılı olduğunu hatırlatmaya ayrılmıştır.

$r>0$ için $Simp(Alg)_r$, r-indirgenmiş, yani, boyutları $<r$'de özdeşliğe indirgenmiş simplişıl cebirlerden meydana gelen $Simp(Alg)$'nin full alt kategorilerini gösterecektir.

$A_\bullet \in Simp(Alg)$ ve $B_\bullet \in Simp(Alg)$, verilen herhangi bir morfizm $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ ise, $B_\bullet \to Cosk^{r-1}(B_\bullet)$ kanonik morfizmi ile $f_\bullet$'nın bileşeni sıfır morfizmidir, bu sebeple $f_\bullet$'yı vermek $A_\bullet$'dan $E_r(B_\bullet) =$ Çek$(B_\bullet \to Cosk^{r-1}(B_\bullet))$'ya bir morfizm vermeye denktir. Böylece $E_r : Simp(Alg) \to Simp(Alg)_r$, I kapsama functorüne sağ adjointtir.

N_* tam sol olduğundan $N_q(E_r(A_\bullet)) =$ Çek$(N_q(A_\bullet) \to N_q(Cosk^{r-1}(A_\bullet)))$ olduğuna sahibiz ve böylece

$$N_q(E_r(A_\bullet)) = \begin{cases} 0 & q \le r-1 \text{ için} \\ \text{Çek}(N_r(A_\bullet) \to N_{r-1}(A_\bullet)) & q = r \quad \text{için} \\ N_q(A_\bullet) & q \ge r+1 \text{ için}. \end{cases}$$

Sonuç olarak, aynı zamanda $q<r$ için $\pi_q(E_r(A_\bullet)) = 0$ ve $q \ge r$ için $\pi_q(E_r(A_\bullet)) = \pi_q(A_\bullet)$ olduğuna sahibiz.

$I : Simp(Alg)_r \to Simp(Alg)$ kapsama functorü ayrıca $L_r A_\bullet$:Eşçek$(Sk^{r-1}(A_\bullet) \to A_\bullet)$ şeklinde tanımlanan bir $L_r : Simp(Alg) \to Simp(Alg)_r$ sol adjointine sahiptir. $L_r I = E_r I = \mathrm{id}_{Simp(Alg)_r}$ olduğuna dikkat edelim.

[37]'de $r>0$ için, $Simp(Alg)_r$'de aşağıdaki kapalı model yapısını göz önüne alalım: Cofibrationlar ve zayıf denklikler sırasıyla $Simp(Alg)$'deki cofibrationlar ve zayıf denklikler olan morfizmler olarak tanımlanmıştır ve fibrationlar hem cofibration ve hem de zayıf denklikler olan morfizmlere göre RLP ile birlikte bu morfizmler olarak tanımlanmıştır. Aşağıdaki önermede kapalı model kategorisindeki (aşikâr) fibrationların karakterizasyonlarını hatırlatmadan önce kullanacağımız hypercebirlerin tanımını verelim.

2.2 Hypercebirler

Bir n-boyutlu hypercebir, basitçe, tanımlanan genelleştirilmiş bileşkeleri içeren bir cebirsel yapıdır. Bir cebir, 1-boyutlu bir hypercebirdir. Hypercebir etkileri ve torların tartışması cebir durumu için kapalı olarak paraleldir ve '1-torla bağlantılı' anahtar kavramını içerir.

Tanım 2.2.1 Bir n-boyutlu hypercebir ($n \geq 1$) aşağıdaki aksiyomu sağlayan bir $A_\bullet$ simplişıl nesnesidir.

***n*-HYPALG:** $i = 0,...,m$ ve bütün $m > n$ için $A_m \to \Lambda^i(m)(A_\bullet)$ bir izomorfizmdir.

n-boyutlu hypercebirlerin bir dönüşümü bir simplişıl dönüşümdür. Alg kategorisindeki n-boyutlu hypercebirlerin kategorisi $Hypalg_n(Alg)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.2 $Alg = 1\text{-}Hypalg$ olduğundan bir cebir, 1-boyutlu bir hypercebirdir.

Örnek 2.2.3 $X_\bullet = COSK^{n-1}(X_\bullet)$ ise, bu takdirde $X_\bullet$ bir n-boyutlu hypercebirdir.

Örnek 2.2.4 Her bir $n' > n$ için $n - Hypalg$'nin izomorfizmleri $n' - Hypalg$'ninkileri içerdiğinden herhangi bir n-boyutlu hypercebir ayrıca bir n'-boyutlu hypercebirdir.

Örnek 2.2.5 A bir değişmeli cebir nesnesi olsun. $n \geq 1$ alalım. $K(A,n)$ simplişıl nesnesini aşağıdaki gibi tanımlayalım. $m = 0,1,...,n-1$ için $K(A,n)_m = 1$ olsun. $K(A,n)_n = A$ ve

$$K(A,n)_{n+1} = \{(a_0,...,a_{n+1}) \in A^{n+2} \mid a_{n+2} - a_n + a_{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1} a_0 = 0\}$$

olsun. $n-1$ boyuttan küçük olan bütün yüz ve bozulmuş dönüşümler özdeşlik dönüşümüdür. $1 \to A$ bozulmuş dönüşümler A'nın bütün 'sıfır' elemanlarıdır. n-boyutta, i. sırada meydana gelen ilk a olmak üzere $s_i(a) = (0,...,a,a,...,0)$ olur. $d_i : K(A,n)_{n+1} \to K(A,n)_n$ yüz dönüşümleri $d_i(a_0,...,a_{n+1}) = a_i$ olur. Yüksek boyutlarda $K(A,n)$, simplişıl çekirdeklerden oluşur. Şu halde, bir $n+2$-simpleksi satırları $K(A,n)_{n+1}$'de olan bir matristir. Bu satırlardan herhangi biri diğerleri tarafından tamamen hesaplanabilir; standart çift-toplam argümanı, onun $K(A,n)_{n+1}$'de olması gerektiğini gösterir. $n = 1$ ise, bu takdirde $K(A,1)$ basitçe bir simplişıl nesne olarak yazılan A cebir nesnesidir. $K(A,n)$, n. homotopi modülü olan A ve diğer homotopi modüllerinin hepsi sıfır olan bir Kan kompleksidir. Ayrıca $Hypalg_n(Alg)$ kategorisinde $K(A,n)$ bir değişmeli cebir nesnesidir.

Örnek 2.2.6 $X_\bullet \in Simp(Alg)$ bir Kan kompleksi olsun. (Örneğin, $X_\bullet$ bir topolojik uzayın tek kompleksi olabilir.) $i = 0,...,n-1$ için $d_i z = s_{n-1} d_i x$, $d_n z = x$ ve $d_{n+1} z = y$ olacak şekilde bir $z \in X_{n+1}$ varsa $x \sim y$ ile X_n üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı vardır. (Bu, bütün i'ler için $d_i x = d_i y$ olmasını gerektirir.) Şimdi, $m = 0,...,n-1$ için $A_m = X_m$ ile $A_\bullet$ simplişıl nesnesini tanımlayalım ve biraz önce tanımlandığı gibi $A_n =$denklik bağıntılarının denklik sınıfları olsun. $x \in X_n$ ile ifade edilen denklik sınıflarını $[x]$ ile gösterelim ve $d_i([x]) = d_i x$ olsun. Şimdi

$$(-,[x_1],...,[x_{n+1}]) \in \Lambda^0(n+1)(A_\bullet)$$

elemanını göz önüne alalım. Bu durumda $(-,x_1,...,x_{n+1}) \in \Lambda^0(n+1)(X_\bullet)$. $X_\bullet$ bir Kan kompleksi olduğundan, $i = 1,...,n+1$ için $d_i y = x_i$ olacak şekilde bir $y \in X_{n+1}$vardır. Bu takdirde $(-,[x_1],...,[x_{n+1}])$'i $[d_0 y]$'ye götüren bir $\Lambda^0(n+1)(A_\bullet) \to A_n$ dönüşümüne sahip oluruz. Bu dönüşüm iyi tanımlıdır çünkü $[d_0 y]$ sınıfı x_i'lerin temsili seçiminden ve y'nin seçiminden bağımsızdır. Şimdi $A_{n+1} = \Lambda^0(n+1)(A_\bullet)$ olsun, d_0 gibi tanımlanan ve diğer yüz dönüşümleri gibi izdüşümleri diğer $[x_i]$'lerin olan dönüşümü alalım. Sonuç, n-boyutlu hypercebirin, $X_\bullet$'nın $n.$ temel hypercebiri olarak adlandırılmasıdır. Bunun 1- boyutlu versiyonu, $X_\bullet$'nın temel cebiridir. $n.$ temel cebirden $X_\bullet$'nın bütün $n.$ homotopi modülleri yeniden elde edilebilir.

Önerme 2.2.7. (**[37]**, Önermeler 3.3 ve 3.4). $Simp(Alg)_r$ *'de bir morfizm* $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ *olsun:*

(i) $f_\bullet$ *'nın bir morfizm olması için gerek ve yeter şart* $p > r$ *için* $N_p(f_\bullet)$ *'nın örten olmasıdır;*

(ii) $f_\bullet$ *'nın bir aşikâr fibration olması için gerek ve yeter şart* $f_\bullet$ *'nın, simplişıl cebirlerin bir örten zayıf denkliği olmasıdır.*

E_r, fibrationları ve zayıf denklikleri (Önerme 3.0.11) koruduğundan, $Ho(Simp(Alg))$'nin full alt kategorilerinin sağ tarafından gösterilen elemanları r-bağlantılı simplişıl cebirlerin nesneleri, yani $i \le r-1$ için $\pi_i = 0$ olmak üzere

$$Ho(Simp(Alg)_r)) \cong Ho(Simp(Alg) \mid r - \text{bağlantılı})$$

kategorilerinin bir denkliğini üreten

$$I : Ho(\,Simp\,(Alg)_r\,) \rightleftarrows Ho(\,Simp\,(Alg)) : E_r$$

homotopi kategorilerinin seviyesinde bir adjoint durumu vardır (**[35]**'e bakınız).

Eğer τ_r, $(r-1)$-bağlantılı topolojik uzayların kategorisini gösteriyorsa, bu takdirde aşağıdaki teoreme sahibiz:

Teorem 2.2.8. (**[37]**, Teoremler 3.1 ve 6.1). $Simp\,(Alg)_{r-1}$ *kapalı model kategorisinin homotopi teorisi ile birlikte* τ_r *'deki homotopi teorisinin bir denkliği vardır.*

$Simp\,(Alg)_r$ kategorisinin, boyutları $< r$'de olan aşikâr Moore kompleksi ile birlikte nesneleri bu simplişıl cebirler olan $Simp\,(Alg)$'nin tam olarak full alt kategorileri olduğuna dikkat edelim. Bunu tamamlayan durumu göz önüne alalım, boyutları $> n$'de olan aşikâr Moore kompleksi ile birlikte nesneleri bu simplişıl cebirler olan $Simp\,(Alg)$'nin full alt kategorileridir. Cebirlerin n-hypercebirlerinin kategorisi olduğundan $n\text{-}Hypalg\,(Alg)$ ile gösterilen bu kategori bir kapalı model kategorisidir. Fibrationlar ve zayıf denklikler, sırasıyla, $Simp\,(Alg)$'de olan fibrationlar ve zayıf denklikler olan bu morfizmler olarak tanımlanmıştır, ve cofibrationlar LLP tarafından aşikâr fibrationlara göre tanımlanmışlardır. Bu kategori, $B_{n+1} = \{x \in A_{n+1} \mid d_i x \in d_{n+1}(N_{n+1}A_\bullet)\}$ olduğunda $\mathscr{P} : Simp\,(Alg) \to n\text{-}Hypalg\,(Alg)$ yansıma functorü

$$\mathscr{P}(A_\bullet) = cosk^{n+1}\left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} \;\; \begin{matrix}\to\\ \cdots\\ \to\end{matrix} \;\; \frac{A_n}{d_{n+1}(N_{n+1}A_\bullet)} \;\; \begin{matrix}\to\\ \cdots\\ \to\end{matrix} \;\; A_{n-1} \;\; \begin{matrix}\to\\ \cdots\\ \to\end{matrix} \;\; \cdots \;\; \begin{matrix}\to\\ \to\\ \to\end{matrix} \;\; A_1 \;\; \begin{matrix}\to\\ \to\end{matrix} \;\; A_0 \right)$$

ile açıkça verildiğinde $Simp\,(Alg)$'nin bir yansımalı alt kategorisidir.

$$N_q(\mathscr{P}\,A_\bullet) = \begin{cases} N_q A_\bullet & q \le n-1 \\ \dfrac{N_n A_\bullet}{d_{n+1}(N_{n+1}A_\bullet)} & q = n \\ 0 & q \ge n+1 \end{cases}$$

$$\pi_q(\mathscr{P}\,A_\bullet) = \begin{cases} \pi_q(A_\bullet) & q \le n \\ 0 & q \ge n+1 \end{cases}$$

olduğuna da dikkat edelim.

$\mathscr{P}$, cofibrationları ve zayıf denklikleri koruduğundan $Ho(Simp(Alg))$'nin full alt kategorilerinin sağ tarafından gösterilen, n-eşbağlantılı simplişıl cebirlerin nesneleri, yani, $i \geq n+1$ için $\pi_i = 0$ olmak üzere

$$Ho(n\text{-}Hypalg(Alg)) \cong Ho(Simp(Alg)\,|\, n\text{-eşbağlantılı})$$

kategorilerin bir denkliğini üreten

$$\mathscr{P} : Ho(Simp(Alg) \rightleftarrows Ho(n\text{-}Hypalg(Alg)) : J$$

homotopi kategorilerinin seviyesinde bir adjoint durumu vardır (**[35]**'ye bakınız). Böylece $Ho(n\text{-}Hypalg(Alg))$ ve $(n+1)$-eşbağlantılı CW-komplekslerin homotopi kategorileri arasında bir denkliğe sahip oluruz.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

r -BAĞLANTILI UZAYLARIN CEBİRSEL MODELLERİ İÇİN QUILLEN MODEL YAPILARI

3.0 Giriş

$r \geq 0$ olmak üzere zayıf $\overline{r}$ -denklikleri olarak adlandırdığımız zayıf denklikleri, $q \geq r$ için $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizm olacak şekilde $f_\bullet$ morfizmlerini inceleriz. Zayıf denkliğin simplişıl grup durumu **[15]**'te verilmiştir. $\overline{r}$ -fibration ve $\overline{r}$ -cofibrationın ($\overline{r}$ -yapısı) verilen tanımlarla birlikte $Simp(Alg)$'nin bir kapalı model kategorisini ve birleştirilmiş homotopi teorisinin r -indirgenmiş simplişıl cebirlerin kapalı model kategorisini bağlayan teoriye denk olduğunu ifade ederiz. Bundan dolayı $\overline{r}$ -yapısına birleştirilen homotopi teorisi r -bağıntılı CW -komplekslerin homotopi teorisine denktir. Sonuç olarak $\overline{r}$ -yapısına birleştirilen homotopi teorisindeki aşikâr yapıları silindir, yol nesneleri, loop ve suspension functor olarak sunarız.

Tanım 3.0.1. Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun:

(i) Boyutları $\geq r+1$'deki bir Kan fibration ise, $f_\bullet$'ya bir $\overline{r}$ *-fibration* denir.

(ii) $q \geq r$ için $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizm ise, $f_\bullet$'ya bir *zayıf* $\overline{r}$ *-denklik* denir.

(iii) Aşikâr $\overline{r}$ -fibrationlara göre LLP'ye sahip ise, $f_\bullet$'ya bir $\overline{r}$ *-cofibration* denir.

Morfizmlerin bu sınıfları $\overline{r}$ *-yapısı* olarak adlandırılacak olan bir yapı verir.

$r = 0$ için bu kavramların, $Simp(Alg)$'de iyi bilinen model yapısını verdiğine dikkat edelim, (**[35]**). Ayrıca herhangi bir simplişıl cebirin $\overline{r}$ -fibrant olduğuna ve aşağıdaki kapsamaların dizilerine sahip olduğuna dikkat edelim:

$$(fibs.) \subseteq (\overline{1} - fibs.) \subseteq ... \subseteq (\overline{r} - fibs.) \subseteq (\overline{r+1} - fibs.) \subseteq ...$$

$$(aşikâr\ fibs.) \subseteq (\overline{1} - aşikâr\ fibs.) \subseteq ... \subseteq (\overline{r} - aşikâr\ fibs.) \subseteq (\overline{r+1} - aşikâr\ fibs.) \subseteq ...$$

Lemma 2.1.2'yi kullanarak, $\overline{r}$ -fibrationların aşağıdaki karakterizasyonuna sahibiz.

Önerme 3.0.2. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi* $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ *olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $f_\bullet$ *bir* $\overline{r}$ *-fibrationdır;*

(ii) $q \geq r+1,\ 0 \leq k \leq q$ *olmak üzere* $F\Delta[q,k] \to F\Delta[q]$ *morfizmlerinin ailesine göre* $f_\bullet$ *RLP'ye sahiptir;*

(iii) $q \geq r+1$ *için* $N_q(f_\bullet)$ *örtendir.*

Aşağıdaki sonuç, uzun tam dizinin bir $\overline{r}$ -fibrationa birleştirildiğini verir.

Önerme 3.0.3. *Eğer* $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ *bir* $\overline{r}$ *-fibration,* $N_*(f_\bullet)$*'nın görüntüsü* I *ve* $H_*(I)$, I *kompleksinin homolojisini gösteriyorsa, bir uzun tam dizi*

$$... \to \pi_{r+1}(A_\bullet) \to \pi_{r+1}(B_\bullet) \to \pi_r(\text{Çek } f_\bullet) \to \pi_r(A_\bullet) \to B_r(I)$$

ve γ *bire bir olduğunda* $\pi_r(f_\bullet)$ *morfizminin* $\pi_r(A_\bullet) \to B_r(I) \xrightarrow{\gamma} \pi_r(B_\bullet)$ *şeklinde bir faktorizasyonu vardır.*

İspat. $q \geq r+1$ için $I_q = N_q(B_\bullet)$, $f_\bullet$ bir $\overline{r}$ -fibration olduğunda

$$0 \to N_*(\text{Çek } f_\bullet) \to N_*(A_\bullet) \to I \to 0$$

abel olmayan cebir komplekslerinin tam dizisini göz önüne alalım. Buradan, $B_q(I) = \pi_q(B_\bullet)$ olduğunda $q \geq r+1$ için

$$... \to \pi_q(\text{Çek } f_\bullet) \to \pi_q(A_\bullet) \to B_q(I) \to \pi_{q-1}(\text{Çek } f_\bullet) \to ...$$

şeklinde bir uzun tam dizi elde ederiz. Bundan başka, $B_r(I)$ boyunca $\pi_r(f_\bullet) : \pi_r(A_\bullet) \to \pi_r(B_\bullet)$ üretilmiş morfizminin çarpanları ve bir basit hesaplama γ'nın bire bir olduğunu gösterir. ❑

Aşikâr $\overline{r}$ -fibrationlar ayrıca aşağıdaki gibi karakterize edilebilir:

Önerme 3.0.4. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $f_\bullet$ *bir aşikâr $\overline{r}$ -fibrationdır;*

(ii) $f_\bullet$, $q \geq r+1$ *için* $F\dot{\Delta}[q] \to F\Delta[q]$ *ve* $0 \leq k \leq r+1$ *için* $F\Delta[r+1,k] \to F\dot{\Delta}[r+1]$ *morfizmlerinin ailelerine göre RLP'ye sahiptir;*

(iii) $q \geq r$ *için* $N_{q+1}(f_\bullet)$ *örten,* π_q(Çek $f_\bullet) = 0$ *ve* $\pi_r(f_\bullet)$ *örtendir.*

İspat. **(i)$\Rightarrow$(ii).** Çek $(N_r A_\bullet \to N_{r-1}A_\bullet) \to$ Çek $(N_r B_\bullet \to N_{r-1}B_\bullet)$ morfizminin örten olduğu doğrudan görüldüğünden, Lemma 2.1.2 (ii)'den $f_\bullet$'nın $q \geq r+1$ için $F\dot{\Delta}[q] \to F\Delta[q]$'a göre RLP'ye sahip olduğunu ve $0 \leq k \leq r+1$ için $F\Delta[r+1,k] \to F\dot{\Delta}[r+1]$'e göre RLP'ye sahip olduğuna da Lemma 2.1.2 (v)'in bir neticesinden sahibiz.

(ii)$\Rightarrow$(i). Lemma 2.1.2 (iii)'den $q \geq r+1$ için $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizmdir ve $\pi_r(f_\bullet)$ bire birdir. Şimdi, Lemma 2.1.2 (v)'ten $\pi_r(f_\bullet)$'nın örten olduğuna ve böylece $f_\bullet$'nın bir zayıf $\overline{r}$ -denklik olduğuna sahibiz. Boyut $> r+1$'de olan Kan koşulu Lemma 2.1.2 (iv)'nin bir sonucudur, ve, boyut $r+1$ olduğunda $F\Delta[r+1,k] \to F\dot{\Delta}[r+1]$ ve $F\dot{\Delta}[r+1] \to F\Delta[r+1]$'e göre RLP'den kolayca bulunur.

(i)$\Rightarrow$(iii). Lemma 2.1.2 (i)'den $q \geq r$ için $N_{q+1}(f_\bullet)$ örtendir, ve, Önerme 3.0.3'teki tam diziyi kullanarak $q \geq r$ için π_q(Çek $f_\bullet) = 0$ olduğunu görürüz.

(iii)$\Rightarrow$(i). Önerme 3.0.3'teki tam dizi $q \geq r+1$ için $\pi_q(f_\bullet)$'nın bir izomorfizm olmasını gerektiriyorsa, ve, $\pi_r(f_\bullet)$ bire bir ise, bu takdirde $f_\bullet$ bir zayıf $\overline{r}$ -denkliktir. Sonuç olarak, Lemma 2.1.2 (i)'den $f_\bullet$'nın bir $\overline{r}$ -fibration olduğuna sahibiz. ❑

İspatı aşikâr olan aşağıdaki lemmada, bu bölümün temel teoreminin ispatında kullanacağımız $\overline{r}$ -cofibrationlar ve zayıf $\overline{r}$ -denklikleri hakkında bazı sonuçları özetliyoruz.

Lemma 3.0.5.

(i) $Simp(Alg)$ *'de* $\overline{r}$ *-cofibrationların bir ailesi* $\{f_{i\bullet} : A_{i\bullet} \to B_{i\bullet}\}$ *ise, eşçarpımlar üzerindeki* $\coprod_{i \in I} A_{i\bullet} \to \coprod_{i \in I} B_{i\bullet}$ *üretilmiş morfizmleri bir* $\overline{r}$ *-cofibrationdır.*

(ii) $Simp(Alg)$ *'de bir* $\overline{r}$ *-cofibration* $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ *ve* $A_\bullet \to K_\bullet$ *herhangi bir morfizm ise, pushout içine* $K_\bullet \to B_\bullet \coprod_{A_\bullet} K_\bullet$ *üretilmiş morfizmi bir* $\overline{r}$ *-cofibrationdır.*

(iii) $A_{0_\bullet} \to A_{1_\bullet} \to \ldots \to A_{n_\bullet} \to \ldots$ *simplişıl cebirlerin* $\overline{r}$ *-cofibrationlarının (zayıf* $\overline{r}$ *-denkliklerine göre) bir dizisi ise,* $A_{0_\bullet} \to Colim\, A_{n_\bullet}$ *kanonik morfizmi bir* $\overline{r}$ *-cofibrationdır (zayıf* $\overline{r}$ *-denkliğine göre).*

$\underline{C}$'deki herhangi bir $\{D_n\}$ yönlü sistemi için $Hom_{\underline{C}}(C, Colim\, D_n) \cong Colim(Hom_{\underline{C}}(C, D_n))$ ise, $\underline{C}$ kategorisindeki bir C nesnesine '*dizisel olarak küçük*' denildiğini hatırlatalım. $F\Delta[q,k]$ ve $F\dot{\Delta}[q]$ simplişıl cebirleri 'dizisel olarak küçük' olduğundan, bir sonraki ispatta 'küçük nesne argümanı' ifadesini kullanacağız (**[35]**'e bakınız):

Teorem 3.0.6. $\overline{r}$ *-fibration,* $\overline{r}$ *-cofibration ve* $\overline{r}$ *-denklik tanımları ile birlikte* $r \geq 0$ *için* $Simp(Alg)$ *kategorisi bir kapalı model kategorisidir.*

İspat. **[37]**'de ifade edildiği gibi CM1-5 aksiyomlarını kullanacağız. CM1, CM2 ve CM3 aksiyomları aşikâr olarak sağlanır. CM5 kısmını ispatlamak için bir aşikâr $\overline{r}$ -fibration ile elde edilen bir $\overline{r}$ -cofibration gibi herhangi bir faktorizasyon vererek küçük nesne argümanını kullanacağız. Bunun için $A_{n_\bullet}$ elde edilmiş olduğunda ve

$$\begin{tikzcd} F\dot{\Delta}[q] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & A_{n\bullet} \arrow[d] \\ F\Delta[q] \arrow[r] & B_\bullet \end{tikzcd} \quad q \geq r+1. \qquad \begin{tikzcd} F\Delta[r+1,k] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mu"] & A_{n\bullet} \arrow[d] \\ F\dot{\Delta}[r+1] \arrow[r] & B_\bullet \end{tikzcd} \quad 0 \leq k \leq r+1$$

formunun bütün değişmeli diyagramlarını alarak bir

$$\begin{tikzcd}
A_\bullet \arrow[r, "i_{0_\bullet}"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & A_{0_\bullet} \arrow[r, "i_{1_\bullet}"] \arrow[dl, "q_{0_\bullet}"'] & A_{1_\bullet} \arrow[r] \arrow[dll, "q_{1_\bullet}"'] & \cdots \arrow[r, "i_{n_\bullet}"] & A_{n_\bullet} \arrow[r] \arrow[dllll, "q_{n_\bullet}"'] & \cdots \\
B_\bullet
\end{tikzcd}$$

diyagramını elde ederiz, $i_{n+1_\bullet}$ morfizmi de

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_\lambda F\,\dot{\Delta}[q])\coprod(\coprod_\mu F\Delta[r+1,k]) \arrow[r] \arrow[d] & A_{n\bullet} \arrow[d, "i_{n+1_\bullet}"] \\
(\coprod_\lambda F\Delta[q])\coprod(\coprod_\mu F\,\dot{\Delta}[r+1]) \arrow[r] & A_{n+1\bullet}
\end{tikzcd}$$

pushout diyagramı ile bulunur.

Önerme 3.0.4'e göre $q_\bullet$ bir aşikâr $\overline{r}$-fibration ve Lemma 3.0.5'e göre $i_\bullet$ bir $\overline{r}$-cofibration olduğunda $A_{\infty_\bullet} = Colim(A_{n_\bullet})$ ve $q_\bullet = Colim(q_{n_\bullet})$'yı tanımlayarak bir $f_\bullet = q_\bullet i_\bullet$ faktorizasyonuna sahibiz.

Bir $\overline{r}$-fibration tarafından elde edilen bir aşikâr $\overline{r}$-cofibration gibi herhangi bir $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ morfizminin faktorizasyonu için $Simp(Alg)$ kapalı model kategorisini kullanarak $f_\bullet$'dan bir $p_\bullet$ fibrationı tarafından elde edilen bir aşikâr $j_\bullet$ cofibrationının içine olan faktorizasyonu göz önüne alalım. $p_\bullet$'nın bir $\overline{r}$-fibration olduğuna dikkat edelim. Şimdi, (gerçekten bir zayıf $\overline{r}$-denklik olan) $j_\bullet$'yı bir aşikâr $\overline{r}$-fibration ve $q_\bullet$ tarafından elde edilen bir $\overline{r}$-cofibration olan $i_\bullet$ gibi çarpan yapmak için yukarıdaki faktorizasyonu kullanırız. Bu takdirde istenen faktorizasyon $f_\bullet = (p_\bullet q_\bullet)i_\bullet$.

Sonuç olarak CM4'ü ispatlarız ve gerçekten ispatlanacak tek şey $g_\bullet$ bir aşikâr $\overline{r}$-cofibration ve $f_\bullet$ bir $\overline{r}$-fibration olduğunda herhangi bir

$$\begin{tikzcd}
X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g_\bullet"'] & A_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\
Y_\bullet \arrow[r] & B_\bullet
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramında bir liftingin var olduğunu göstermektir. Bunun için, $q_\bullet$ bir $\overline{r}$ -fibration ve $i_\bullet$ bütün $\overline{r}$ -fibrationlara göre LLP'ye sahip olduğunda $g_\bullet = q_\bullet i_\bullet$ çarpımı için küçük nesne argümanını kullanırız ve bu bir zayıf $\overline{r}$ -denkliktir. $g_\bullet$ ve $i_\bullet$ zayıf $\overline{r}$ -denklikler olduğundan $q_\bullet$ da zayıf denkliktir; böylece

$$\begin{tikzcd} N_\bullet \arrow[r, "i_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"'] & N_{\infty\bullet} \arrow[d, "q_\bullet"] \\ Y_\bullet \arrow[ur, "s_\bullet"] \arrow[r, equal] & Y_\bullet \end{tikzcd}$$

diyagramında $s_\bullet$ köşegeni vardır ve $i_\bullet$ 'nın bütün $\overline{r}$ -fibrationlara göre LLP'ye sahip olmasından dolayı var olan aşağıdaki

$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "u_\bullet"] \arrow[d, "i_\bullet"'] & A_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\ X_{\infty\bullet} \arrow[ur] \arrow[r, "v_\bullet q_\bullet"] & B_\bullet \end{tikzcd}$$

diyagramında lifting ile birlikte $s_\bullet$ 'yı oluşturarak istenen lifting verilir. ❑

Bu durumda aşağıdaki kapsamaların dizilerine sahip olduğumuza dikkat edelim:

$$(\text{cofib.}) \supseteq \ldots \supseteq (\overline{r} - \text{cofib.}) \supseteq (\overline{r+1} - \text{cofib.}) \supseteq \ldots$$

$$(\text{aşikâr cofib.}) \supseteq \ldots \supseteq (\overline{r} - \text{aşikâr cofib.}) \supseteq (\overline{r+1} - \text{aşikâr cofib.}) \supseteq \ldots$$

Aşağıda, $\overline{r}$ -cofibrationları karakterize edeceğiz.

Önerme 3.0.7. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun. Bu takdirde $f_\bullet$'nın bir $\overline{r}$ -cofibration olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:*

(i) $f_\bullet$ *bir cofibrationdır;*

(ii) $tr^{r-1}(f_\bullet)$ *bir izomorfizmdir;*

(iii) *Herhangi bir* $y \in B_r$ *için* $(f_r(x_0), \ldots, f_r(x_r), y) \in \Delta^{r+1}(B_\bullet)$ *olacak şekilde* $x_0, \ldots, x_r \in A_r$ *vardır.*

İspat. İlk olarak $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$'nın bir $\overline{r}$ -cofibration olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $f_\bullet$'nın bir cofibration olduğunu ve böylece onun bir serbest dönüşümün geri çekilimi olduğunu biliyoruz. $f_\bullet$'nın bir serbest dönüşüm olduğunu kabul edelim, yani bütün q'lar için $B_q \cong A_q \coprod FU_q$. **(ii)**'yi ispatlamak için; tümevarım ile, $U_0 = \cdots = U_{r-1} = \varnothing$ olduğunu ispatlayacağız. Bu durumda $n \le r-1$ için $U_0 = \cdots = U_{n-1} = \varnothing$ olduğunu kabul edelim ve

$0 \to V_\bullet = cosk^n(FU_n \;\substack{\to\;\to \\ \cdots \\ \to\;\to}\; 0 \;\cdots\cdots\; \substack{\to \\ \to}\; 0)$ morfizmini göz önüne alalım. $tr^n \vdash \cos k^n$ adjunctionı ile $g_\bullet$, $tr^n(A_\bullet \coprod FU_*) \to (FU_n \;\substack{\to\;\to \\ \cdots \\ \to\;\to}\; 0 \;\cdots\;\cdots\; \substack{\to \\ \to}\; 0)$ morfizmine karşılık geldiğinde aşağıdaki

$$\begin{array}{ccc} A_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_\bullet}\downarrow & & \downarrow \\ A_\bullet \coprod FU_\bullet & \xrightarrow[g_\bullet]{} & V_\bullet \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan bu morfizm açık olarak bir aşikâr $\overline{r}$ -fibrationdır (gerçekten o bir $\overline{n+1}$-fibrationdır). Yukarıdaki diyagramdaki liftingin varlığı $FU_n = 0$ ve böylece $U_n = \varnothing$ olmasını gerektirir.

(iii)'yi ispatlamak için $Cosk^r(A_\bullet) \to 0$ morfizminin açık olarak bir aşikâr $\overline{r}$ -fibration olduğuna ve böylece aşağıdaki

$$\begin{tikzcd} A_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f_\bullet"'] & Cosk^r(A_\bullet) \arrow[d] \\ B_\bullet \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h_\bullet"] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir $h_\bullet : B_\bullet \to Cosk^r(A_\bullet)$ morfizminin var olduğuna dikkat edelim. Şu halde, $y \in B_r$ verilsin, istenen elemanlar $0 \le i \le r$ için $x_i = d_i s_r h_r(y)$.

$f_\bullet$ bir serbest dönüşümün geri çekilimi olduğunda genel durum aşikârdır.

Tersine, $f_\bullet$ bir cofibration olduğundan bir serbest dönüşümün bir geri çekilimidir ve kısaltmak için $f_\bullet$'nın bir serbest dönüşüm olduğunu kabul edeceğiz, yani $tr^{r-1}(f_\bullet)$'nın bir izomorfizm olması nedeniyle $U_0 = \cdots = U_{r-1} = \emptyset$ olduğunda $f_\bullet : A_\bullet \to A_\bullet \coprod FU_*$ simplişıl morfizmi vardır. $g_\bullet$ bir aşikâr fibration olduğunda

$$\begin{tikzcd} A_\bullet \arrow[r, "\alpha_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & X_\bullet \arrow[d, "g_\bullet"] \\ A_\bullet \coprod FU_\bullet \arrow[r, "\beta_\bullet"] \arrow[ur, dashed, "h_\bullet"] & Y_\bullet \end{tikzcd}$$

oluşumunun herhangi bir diyagramında noktalı okun var olduğunu ispatlayacağız.

Eğer böyle bir $h_\bullet$ morfizmi varsa, onun $A_\bullet$'ya geri çekilimi $\alpha_\bullet$, ve böylece U_* üzerinde $h_\bullet$'yı tanımlamak yeterlidir. $n \geq r$ için $h_n : U_n \to X_n$'i aşağıdaki gibi yeniden tanımlarız: $y \in U_r$ verilsin, $(x_0,...,x_r,y) \in \Delta^{r+1}(A_\bullet \coprod FU_*)$ olacak şekilde $(x_0,...,x_r) \in A_r^{r+1}$ vardır. Bu takdirde $(\alpha_r(x_0),...,\alpha_r(x_r),-) \in \Lambda_{r+1}^{r+1}(X_\bullet)$, $(\beta_r(x_0),...,\beta_r(x_r),\beta_r(y)) \in \Delta^{r+1}(Y_\bullet)$ ve $0 \leq i \leq r$ için $g_r(\alpha_r(x_i)) = \beta_r(x_i)$'ye sahibiz. Şimdi, $g_\bullet$, $F\Delta[r+1,r+1] \to F\overset{\bullet}{\Delta}[r+1]$'e göre RLP'ye sahip olduğundan $g_r(x) = \beta_r(y)$ olacak şekilde $x \in X_r$ vardır ve $h_r(y) = x$'i tanımlayalım.

Şimdi, eğer h_n'in tanımlanmış olduğunu kabul edersek, h_{n+1}'i aşağıdaki gibi oluştururuz: $y \in U_{n+1}$, $(\beta_{n+1}(y),(h_n d_0 y,...,h_n d_{n+1} y)) \in Y_{n+1} \times_{\Delta^{n+1}(Y_\bullet)} \Delta^{n+1}(X_\bullet)$ elemanı verilsin ve bundan dolayı, $g_\bullet$ bir aşikâr $\overline{r}$-fibration olduğundan, $d_i x = h_n d_i y$ ve $g_{n+1}(x) = \beta_{n+1}(y)$ olacak şekilde $x \in X_{n+1}$ vardır; bu takdirde $h_{n+1}(y) = x$'i tanımlarız. ❑

Sonuç 3.0.8. *Simplişıl cebirlerin bir cofibrationı $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun. $tr^r(f_\bullet)$ bir izomorfizm ise, bu takdirde $f_\bullet$ bir $\overline{r}$-cofibrationdır.*

$\overline{r}$-cofibration olmayan bir $tr^{r-1}(f_\bullet)$ izomorfizmi ile birlikte $f_\bullet : F\overset{\bullet}{\Delta}[r] \to F\Delta[r]$'nin, simplişıl cebirlerin bir cofibrationı olduğuna dikkat edelim. Diğer taraftan, $\overline{r}$-cofibration olan bir

$tr^{r-1}(f_\bullet)$ izomorfizmi (fakat $tr^r(f_\bullet)$ değil) ile birlikte $f_\bullet : F\Delta[r+1,k] \to F\dot{\Delta}[r+1]$ morfizmi simplişıl cebirlerin bir cofibrationıdır.

$\overline{r}$ -cofibrationların karakterize edilmesinin uygulanması $0 \to A_\bullet$ morfizmini verir:

Sonuç 3.0.9. *Bir simplişıl cebirin $\overline{r}$ -cofibrant olması için gerek ve yeter şart onun serbest ve r -kısıtlanmış olmasıdır.*

Daha sonra $Simp(Alg)$'ye birleştirilmiş homotopi teorisi ile $\overline{r}$ -yapısı ve $Simp(Alg)_r$ kapalı model kategorisinin homotopi teorisini karşılaştırmak için $I \vdash E_r$ adjoint durumunu **[37]**'deki gibi kullanacağız.

Önerme 3.0.10. $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$, *$Simp(Alg)_r$'de bir morfizm olsun. Bu takdirde,*

(i) *$f_\bullet$'nın bir cofibration olması için gerek ve yeter şart $I(f_\bullet)$'nın bir $\overline{r}$ -cofibration olmasıdır;*

(ii) *$f_\bullet$'nın bir zayıf denklik olması için gerek ve yeter şart $I(f_\bullet)$'nın bir zayıf $\overline{r}$ -denklik olmasıdır;*

(iii) *$f_\bullet$'nın bir fibration olması için gerek ve yeter şart $I(f_\bullet)$'nın bir $\overline{r}$ -fibration olmasıdır;*

(iv) *$I(f_\bullet)$'nın bir fibration olması, $f_\bullet$'nın da bir fibration olmasını gerektirir.*

İspat. **(i)** $I(f_\bullet)$ bir $\overline{r}$ -cofibration ise, bu takdirde $I(f_\bullet)$ $Simp(Alg)$'de bir cofibrationdır bu sebeple $f_\bullet$ $Simp(Alg)_r$'de bir cofibrationdır. Tersi Önerme 3.0.7'ye göre açıktır.

(ii) kısmı aşikârdır ve **(iii)** ve **(iv)** de Önermeler 2.1.3 ve 3.0.2'nin neticesidir. ❑

Herhangi bir A abel grubu için $0 \to K(A,r)$ sıfır morfizminin, simplişıl cebirlerin bir morfizmi olmayan $Simp(Alg)_r$'de bir fibration olduğuna dikkat edelim. Bu, (iv)'ün tersinin yanlış olduğunu gösterir.

Önerme 3.0.11. *$Simp(Alg)$'de bir morfizm $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun. Bu takdirde,*

(i) *$f_\bullet$'nın bir $\overline{r}$ -fibration olması için gerek ve yeter şart $E_r f_\bullet$'nın bir fibration olmasıdır;*

(ii) *$f_\bullet$'nın bir zayıf $\overline{r}$ -denklik olması için gerek ve yeter şart $E_r f_\bullet$'nın bir zayıf denklik olmasıdır;*

(iii) *$f_\bullet$'nın bir fibration (zayıf denklik) olması, $E_r f_\bullet$'nın bir fibration (zayıf denklik) olmasını gerektirir.*

İspat. Eğer $q \geq r+1$ için $N_q(E_r A_\bullet) = N_q(A_\bullet)$, $q \geq r$ için $\pi_q(E_r A_\bullet) = \pi_q(A_\bullet)$ ve $\pi_r(\text{Çek } f_\bullet) = \pi_r(\text{Çek } E_r f_\bullet)$ olduğuna dikkat edilirse **(i)** ve **(ii)** açıktır.

(iii) Herhangi bir fibration (zayıf denklik) bir $\overline{r}$-fibration (zayıf $\overline{r}$-denklik) olduğundan açıktır. ❑

$I \vdash E_r$ adjunctiondaki eşbirim (counit) açıkça bir zayıf $\overline{r}$-denkliktir. Eğer $\overline{r}$-yapısı ile birlikte $Simp(Alg)$ cebirinin homotopi kategorisi $Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))$ ile gösterilirse, bu durumda **[35]**'teki 4.Bölüm Teorem 3'e göre aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 3.0.12. *$r \geq 0$ için, yukarıdaki adjunction kategorilerinin bir denkliğini*

$$Ho_r(Simp(Alg)) \cong Ho(Simp(Alg)_r),$$

ve $\overline{r}$-yapısına birleştirilen $Simp(Alg)$'deki homotopi teorisi ile $Simp(Alg)_r$'deki homotopi teorisi arasında bir denklik üretir.

Hatırlatmalar.

(1) $A_\bullet$ bir $\overline{r}$-cofibrant simplişıl cebir ise, $Simp(Alg)$'deki

$$A_\bullet \coprod A_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} A_\bullet \otimes \Delta[1] \xrightarrow{\sigma} A_\bullet$$

silindir yapısı, σ bir zayıf $\overline{r}$-denklik olduğundan $\overline{r}$-yapısı için bir silindir verir ve Önerme 3.0.7'yi kullanarak i_0+i_1'in bir $\overline{r}$-cofibration olduğu ispatlanabilir.

(2) $A_\bullet$ bir $\overline{r}$-cofibrant simplişıl cebir ve $B_\bullet$ herhangi bir simplişıl cebir ($\overline{r}$-fibrant olan) ise, bu takdirde $\overline{r}$-model yapısından elde edilen $\pi(A_\bullet, B_\bullet)$ homotopi bağıntısı $A_\bullet$'dan $B_\bullet$ modülüne morfizmlerin cümlesi olduğunda $Hom_{Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))}(A_\bullet, B_\bullet) \cong \pi(A_\bullet, B_\bullet)$. Diğer taraftan, Teorem 3.0.12'yi kullanarak

$$Hom_{Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))}(A_\bullet, B_\bullet) \cong Hom_{Ho_r(Simp(Alg)_r)}(A_\bullet, E_r B_\bullet)$$

olduğu görülür ve bu son cümle (Önerme 3.6 **[37]**'ye bakınız) $A_\bullet$'dan $E_r B_\bullet$'ya dönüşümlerin simplişıl homotopi sınıflarının $[A_\bullet, E_r B_\bullet]$ cümlesidir, ya da buna denk olarak, $\overline{r}$-yapısı için $A_\bullet \otimes \Delta[1]$ bir silindir olduğundan $[A_\bullet, B_\bullet]$ cümlesidir.

(3) $B_\bullet \in Simp(Alg)$ verilsin, ρ bir zayıf $\overline{r}$ -denklik ve (∂_0, ∂_1) bir $\overline{r}$ -fibration olduğunda

$$B_\bullet \xrightarrow{\rho} B_\bullet^I \xrightarrow{(\partial_0,\partial_1)} B_\bullet \times B_\bullet$$

diagonal morfizminin faktorizasyonuna sahip olduğundan $\overline{r}$ -yapısı için $Simp(Alg)$'deki $B_\bullet$ için $B_\bullet^I$ simplişıl cebiri bir yol uzayı nesnesidir.

(4) $\Omega E_{r+1}, E_r\Omega : Simp(Alg) \to Simp(Alg)$ dönüşümünü göz önüne aldığımızda, doğal bir $\Psi : \Omega E_{r+1} \Rightarrow E_r\Omega$ dönüşümünün var olduğu açıktır ve bu, homotopi kategorilerinin seviyesinde bir doğal denklik üretir, yani, $\Psi_{H_\bullet}$ bir zayıf denkliktir. Şimdi, $\overline{r}$ -yapısı için $B_\bullet^I$ bir yol uzayı olduğundan, Ω (ya da Ω')'nın $Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))$ homotopi kategorisindeki $\Omega^{\overline{r}}$ loop functorünü belirlendiğine sahibiz, ve burada E_r , homotopi kategorisindeki üretilmiş functorü gösterdiğinde $\Omega^r \cong \Omega E_{r+1} \cong E_r\Omega$ doğal denkliklerinin var olduğuna sahibiz. Diğer taraftan, $\overline{r}$ -yapısı için $A_\bullet \otimes I$ bir silindir nesnesi olduğundan $\sum$'ın, $Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg)), \sum^{\overline{r}}$ üzerindeki suspension functorünü belirlediğine sahip oluruz ve L_r , $I : Simp(Alg)_r \to Simp(Alg)$ kapsama functorüne sol adjoint olduğunda $\sum^{\overline{r}}$ ve $L_r \sum$ arasında bir doğal denkliğin var olduğu ispatlanabilir.

(5) $\Omega : Simp(Alg) \to Simp(Alg)$ functorü zayıf $\overline{r}$ -denklikleri zayıf $\overline{(r-1)}$ -denkliklerin içine taşır ve böylece bir $\Omega : Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg)) \to Ho_{\overline{r-1}}(Simp(Alg))$ functorünü üretir. Diğer taraftan, $\sum$ suspension functorü bir $\sum^{\overline{r-1}} : Ho_{\overline{r-1}}(Simp(Alg)) \to Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))$ functorünü üretir ve özdeşlik functorü başka bir $Ho_{\overline{r-1}}(Simp(Alg)) \to Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))$ functorünü üretir. Bileşkeyi $\sum : Ho_{\overline{r-1}}(Simp(Alg)) \to Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))$ ile göstereceğiz. Şimdi bu functorün $\Omega : Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg)) \to Ho_{\overline{r-1}}(Simp(Alg))$ functorüne sol adjoint olduğu görülür. $A_\bullet, B_\bullet \in Simp(Alg)$ verilsin ve böylece

$$\begin{aligned} &Hom_{Ho_{\overline{r}}(Simp(Alg))}(\textstyle\sum A_\bullet, B_\bullet) \cong Hom_{Ho(Simp(Alg))}(\textstyle\sum A_\bullet, E_r B_\bullet) \\ &\cong Hom_{Ho(Simp(Alg))}(A_\bullet, \Omega E_r B_\bullet) \cong Hom_{Ho(Simp(Alg))}(A_\bullet, E_{r-1}\Omega B_\bullet) \\ &\cong Hom_{Ho_{\overline{r-1}}(Simp(Alg))}(A_\bullet, \Omega B_\bullet) \end{aligned}$$

ifadesine sahip oluruz.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

SİMPLİŞIL CEBİRLERİN n-TİPİ İÇİN MODEL YAPISI

4.0 Giriş

$n \geq 0$ için zayıf n-denklikler olarak sunduğumuz zayıf denklikleri, $0 \leq q \leq n$ olmak üzere $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizm olacak şekilde $f_\bullet$ morfizmleri olarak ele alırız. n-fibration ve n-cofibration tanımlarıyla birlikte $Simp(Alg)$ kategorisinde Quillen'e göre bir kapalı model n-yapısını sunarız. n-eşbağlantılı yani, $q \geq n+1$ olmak üzere $\pi_q = 0$ ile birlikte uzayların kategorisindeki homotopi teorisi bu n-yapısına birleştirilen homotopi teorisi olarak ifade edilir ve boyutları n'den büyük olan aşikâr Moore kompleksi ile birlikte simplişıl cebirlerin kapalı model kategorisindeki teoriye denktir. Silindir ve yol nesneleri n-yapısında ifade edilir ve kesilmiş simplişıl homotopi bağıntısı tarafından sağlanan homotopi bağıntısı üretilir. Ayrıca bu n-yapısı için loop ve suspension functorler araştırılır.

Herhangi bir $n \geq 0$ için, $Simp(Alg)$'deki adjoint functorlerin $Sk^{n+1} \vdash Cosk^{n+1}$ çiftini göz önüne alalım. Bu takdirde, bu kategorideki aşağıdaki yapıyı öneririz:

Tanım 4.0.1. $Simp(Alg)$'deki bir morfizm $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ ve $n \geq 0$ olsun.

(i) $Cosk^{n+1}(f_\bullet), Simp(Alg)$'deki bir fibration ise, $f_\bullet$'ya bir *n-fibration* adı verilir;

(ii) $Cosk^{n+1}(f_\bullet), Simp(Alg)$'deki bir zayıf denklik ise, $f_\bullet$'ya bir *zayıf n-denklik* adı verilir;

(iii) $f_\bullet$ aşikâr n-fibrationlara göre LLP'ye sahip ise bir *n-cofibration* adı verilir.

Bu tanım ile herhangi bir simplişıl cebirin $n \geq 0$'ler için n-fibrant olduğu açıktır. Sonuç 3.0.8'e benzer bir ispat da aşağıdakini göstermemizi sağlar:

Önerme 4.0.2. *Eğer $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ bir n-fibration, $N_*(f_\bullet)$'nın görüntüsü I ve kompleks I'nın homolojisini $H_*(I)$ gösteriyorsa, bir uzun tam dizi*

$$\cdots \to \pi_{n+1}(A_\bullet) \to H_{n+1}(I) \to \pi_n(\text{Çek}\, f_\bullet) \to \pi_n(A_\bullet) \to \pi_n(B_\bullet) \to \cdots$$

ve ε ve γ örten olduğunda $\pi_{n+1}(f_\bullet)$ morfizminin bir

$$\pi_{n+1}(A_\bullet) \xrightarrow{\ \varepsilon\ } H_{n+1}(I) \xrightarrow{\ \gamma\ } \pi_{n+1}(B_\bullet)$$

faktorizasyonu vardır.

Daha sonra, (aşikâr) n-fibrationları karakterize ederiz.

Önerme 4.0.3. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun:*

(i) *$f_\bullet$'nın bir n-fibration olması için gerek ve yeter şart $1 \leq q \leq n+1$ için $N_q(f_\bullet)$'nın örten ve* Çek $(N_{n+1}(A_\bullet) \to N_n(A_\bullet)) \to$ Çek $(N_{n+1}(B_\bullet) \to N_n(B_\bullet))$ *'nın örten olmasıdır;*

(ii) *$f_\bullet$'nın bir zayıf n-denklik olması için gerek ve yeter şart $0 \leq q \leq n$ için $\pi_q(f_\bullet)$'nın bir izomorfizm olmasıdır;*

(iii) *$f_\bullet$'nın bir aşikâr n-fibration olması için gerek ve yeter şart $1 \leq q \leq n+1$ için $N_q(f_\bullet)$'nın örten olması ve $0 \leq q \leq n$ için π_q(Çek $(f_\bullet)) = 0$ olmasıdır.*

İspat. **(i)** ve **(ii)**, Moore kompleksinin terimlerindeki $Simp(Alg)$'deki fibrationlar ve aşikâr fibrationların karakterizasyonuna, ve Moore kompleksinin değerine ve Bölüm 2'de verilen $Cosk^{n+1}(A_\bullet)$'nın homotopi modüllerine göre açıktır.

(iii) için ayrıca Önerme 4.0.2'yi kullanırız. ❑

Önerme 4.0.4. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun:*

(i) *$f_\bullet$'nın bir n-fibration olması için gerek ve yeter şart $f_\bullet$'nın $1 \leq q \leq n+1,\ 0 \leq k \leq q$ olmak üzere $F\Delta[q,k] \to F\Delta[q]$'ya göre ve $0 \leq k \leq n+2$ olmak üzere $F\Delta[n+2,k] \to F\dot{\Delta}[n+2]$'ye göre RLP'ye sahip olmasıdır.*

(ii) *$f_\bullet$'nın bir aşikâr n-fibration olması için gerek ve yeter şart $f_\bullet$'nın $0 \le q \le n+1$ olmak üzere $F\overset{\bullet}{\Delta}[q] \to F\Delta[q]$'ya göre RLP'ye sahip olmasıdır.*

İspat. **(i)** $f_\bullet$'nın bir n-fibration olması için gerek ve yeter şart $q \ge 1,\ 0 \le k \le q$ olmak üzere $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$, $F\Delta[q,k] \to F\Delta[q]$'ya göre RLP'ye sahiptir ancak ve ancak $q \ge 1,\ 0 \le k \le q$ olmak üzere $f_\bullet$, $Sk^{n+1}F\Delta[q,k] \to Sk^{n+1}F\Delta[q]$'ya göre RLP'ye sahiptir. $q > n+2$ için $Sk^{n+1}F\Delta[q,k] = Sk^{n+1}F\Delta[q]$ olan $F\Delta[q,k]$ ve $F\Delta[q]$ aynı $(q-2)$-kesilmişlerine sahip olduğundan, böylece bu durumda istenen RLP aşikârdır. Eğer $q < n+2$ ise, $Sk^{n+1}F\Delta[q,k] = F\Delta[q,k]$ ve $Sk^{n+1}F\Delta[q] = F\Delta[q]$, ve eğer $q = n+2$ ise, $Sk^{n+1}F\Delta[n+2,k] = F\Delta[n+2,k]$ ve $Sk^{n+1}F\Delta[n+2] = F\overset{\bullet}{\Delta}[n+2]$. Şu halde, $f_\bullet$'nın bir n-fibration olması için gerek ve yeter şart istenen morfizmlere göre onun RLP'ye sahip olmasıdır.

(ii) $f_\bullet$'nın bir aşikâr n-fibration olması için gerek ve yeter şart $q \ge 0$ olmak üzere $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$, $F\overset{\bullet}{\Delta}[q] \to F\Delta[q]$'ya göre RLP'ye sahiptir ancak ve ancak $q \ge 0$ olmak üzere $f_\bullet$, $Sk^{n+1}F\overset{\bullet}{\Delta}[q] \to Sk^{n+1}F\Delta[q]$'ya göre RLP'ye sahiptir. Şimdi, eğer $q \ge n+2$ ise $Sk^{n+1}F\overset{\bullet}{\Delta}[q] = F\overset{\bullet}{\Delta}[q]$ ve $Sk^{n+1}F\Delta[q] = F\Delta[q]$. O halde $f_\bullet$'nın bir aşikâr n-fibration olması için gerek ve yeter şart onun istenen morfizmlere göre RLP'ye sahip olmasıdır. ❑

Morfizmlerin sınıflarının aşağıdaki kapsamalara sahip olduğuna dikkat edelim:

$$\{\text{aşikâr fibs.}\} \subseteq \cdots \subseteq \{(n+1)-\text{aşikâr fibs.}\} \subset \{n-\text{aşikâr fibs.}\} \subset \cdots$$
$$\cdots \subset \{n-\text{cofibs.}\} \subseteq \{(n+1)-\text{cofibs.}\} \subseteq \cdots \{\text{cofibs.}\}$$

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz:

Teorem 4.0.5. *Herhangi bir $n \ge 0$ için, $Simp(Alg)$ Tanım 4.0.1'de verilen yapı ile birlikte bir kapalı model kategorisidir (bu yapı 'n-yapısı' olarak adlandırılır).*

İspat. $Simp(Alg)$, CM1'i ve, tanımdan, CM4'ün yarısını sağlar. CM2 ve CM3 aksiyomları da $Sk^{n+1} \vdash Cosk^{n+1}$ adjoint durumundan $Simp(Alg)$'deki (klasik) model yapısı için yöndeş aksiyomlardan kolayca sonuç çıkarılır.

Bir n-cofibration olan $i_\bullet$ gibi herhangi bir $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ morfizminin faktorizasyonunu veren CM5'in bu kısmının ispatı Teorem 3.0.6'da yapılana benzer bir aşikâr n-fibration olan $q_\bullet$'dan yapılır.

Bir aşikâr n-cofibration olan $j_\bullet$ gibi herhangi bir $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ morfizminin faktorizasyonu bir n-fibration olan $p_\bullet$ ile yapılır, küçük nesne argümanını kullanacağız. Bunun için, $A_{m_\bullet}$ elde edilmiş olduğunda bir

$$\begin{tikzcd}
A_\bullet \arrow[r, "j_{0\bullet}"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & A_{0_\bullet} \arrow[r, "j_{1\bullet}"] \arrow[dl, "p_{0_\bullet}"'] & A_{1_\bullet} \arrow[r] \arrow[dll, "p_{1_\bullet}"'] & \cdots \arrow[r, "j_{n\bullet}"] & A_{m_\bullet} \arrow[r] \arrow[dllll, "p_{n_\bullet}"'] & \cdots \\
B_\bullet & & & & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı buluruz ve yapının bütün değişmeli diyagramlarını alarak

$$(\lambda) \qquad \begin{tikzcd}
F\Delta[n+2,k] \arrow[r] \arrow[d] & A_{m\bullet} \arrow[d] \\
F\dot{\Delta}[n+2] \arrow[r] & B_\bullet
\end{tikzcd} \qquad 0 \le k \le n+2$$

$$(\mu) \qquad \begin{tikzcd}
F\Delta[q,k] \arrow[r] \arrow[d] & A_{m\bullet} \arrow[d] \\
F\Delta[q] \arrow[r] & B_\bullet
\end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} 1 \le q \le n+1 \\ 0 \le k \le q \end{array}$$

pushout diyagramı olan

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_\lambda F\Delta[n+2,k]) \coprod (\coprod_\mu F\Delta[q,k]) \arrow[r] \arrow[d] & A_{m_\bullet} \arrow[d, "j_{m+1_\bullet}"] \\
(\coprod_\lambda F\dot{\Delta}[n+2]) \coprod (\coprod_\mu F\Delta[q]) \arrow[r] & A_{m+1_\bullet}
\end{tikzcd}$$

ile j_{m+1} morfizmi bulunur ve böylece açıkça bir n-cofibrationdır.

$A_{\infty_\bullet} = \underrightarrow{Colim}(A_{m_\bullet})$ ve $p_\bullet = \underrightarrow{Colim}(p_{m_\bullet})$ ifadelerini tanımlayarak $p_\bullet$, Önerme 4.0.4'e göre bir n-fibration olduğunda ve her $j_{m_\bullet}$ de n-cofibration olduğundan $j_\bullet$ bir n-cofibration olduğunda $f_\bullet = p_\bullet j_\bullet$ faktorizasyonuna sahibiz.

Burada $j_\bullet$'nın bir zayıf n-denklik olduğunun ispatı kalır ve bunu yapmak için her $j_{m_\bullet}$'in bir zayıf n-denklik olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunu elde etmek için, $\alpha_\bullet$ ve $\beta_\bullet$ aşağıdaki pushout diyagramlarından elde edildiğinde:

$$\begin{tikzcd} \coprod_\mu F\Delta[q,k] \arrow[r] \arrow[d] & A_{m_\bullet} \arrow[d] \\ F\Delta[q] \arrow[r] & B_\bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} 1 \le q \le n+1 \\ 0 \le k \le q \end{matrix} \qquad \begin{tikzcd} F\Delta[n+2,k] \arrow[r] \arrow[d] & A_{m_\bullet} \arrow[d] \\ F\dot{\Delta}[n+2] \arrow[r] & B_\bullet \end{tikzcd} \qquad 0 \le k \le n+2$$

her $j_{m_\bullet}$ morfizminin $\beta_\bullet\alpha_\bullet : A_{m-1_\bullet} \to T_\bullet \to A_{m_\bullet}$'nın bileşkesi olduğuna dikkat edelim.

$Simp(Alg)$'deki (klasik) model yapısını kullanarak, $\alpha_\bullet$'nın bir zayıf denklik olduğu ve bütün $n \ge 0$ için $\alpha_\bullet$'nın bir zayıf n-denklik olduğu açıktır.

Diğer taraftan, aşağıdaki pushout diyagramını göz önüne alarak,

$$\begin{tikzcd} \coprod_\lambda F\Delta[n+2,k] \arrow[r] \arrow[d] & T_\bullet \arrow[d, "\beta_\bullet"] \\ \coprod_\lambda F\dot{\Delta}[n+2] \arrow[r] \arrow[d] & A_{m_\bullet} \arrow[d, "\gamma_\bullet"] \\ \coprod_\lambda F\Delta[n+2] \arrow[r] & P_\bullet \end{tikzcd}$$

$F\dot{\Delta}[n+2]$ ve $F\Delta[n+2]$ aynı $(n+1)$-kesilmişlerine sahip olduğundan, $\gamma_\bullet$ bir zayıf n-denkliktir ve böylece $\beta_\bullet$ bir zayıf n-denkliktir çünkü $\gamma_\bullet\beta_\bullet$'nın bir zayıf denklik olduğu açıktır.

Sonuç olarak, CM4'ün kalan kısmının ispatı, bu ispatın Teorem 3.0.6'da ispatlandığı gibi aynı metodun uygulanmasıyla elde edilir. ❑

n-yapısına göre $Simp(Alg)$'deki cofibrant nesneleri ve cofibrationlar aşağıdaki gibi karakterize edildi.

Önerme 4.0.6. $A_\bullet$ *bir simplişıl cebir olsun. Bu takdirde* $n \geq 0$ *olmak üzere* $A_\bullet$*'nın bir* n*-cofibrant olması için gerek ve yeter şart* $A_\bullet$*'nın cofibrant (yani bir serbest simplişıl cebir) ve* $A_\bullet = Sk^{n+1}(A_\bullet)$ *olmasıdır.*

İspat. $A_\bullet$'nın bir n-cofibrant olduğunu kabul edelim, bu takdirde $A_\bullet$ cofibranttır. $i_\bullet : Sk^{n+1}A_\bullet \to A_\bullet$ kanonik morfizmi bir aşikâr n-fibration olduğundan (çünkü $Cosk^{n+1}(i_\bullet) = \mathrm{id}$), aşağıdaki diyagramda

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Sk^{n+1}A_\bullet \arrow[d, "i_\bullet"] \\ A_\bullet \arrow[ur, dashed, "j_\bullet"] \arrow[r, equal] & A_\bullet \end{tikzcd},$$

olmak üzere $i_\bullet$'nın bir inversi olan bir $j_\bullet$ liftingi vardır çünkü $i_\bullet j_\bullet = \mathrm{id}_{A_\bullet}$ ve $j_\bullet i_\bullet$, onun $(n+1)$-kesilmişi de özdeşlik olduğundan, ayrıca özdeşliktir.

Tersine, $f_\bullet$ bir aşikâr n-fibration olduğunda,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\ A_\bullet \arrow[r] & D_\bullet \end{tikzcd}$$

formunun herhangi bir diyagramında liftinginin var olduğunu ispatlamalıyız. Şimdi, $A_\bullet = Sk^{n+1}(A_\bullet)$ olduğundan, yukarıdaki diyagramdaki liftingin varlığı

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Cosk^{n+1}C_\bullet \arrow[d, "Cosk^{n+1}f_\bullet"] \\ A_\bullet \arrow[r] & Cosk^{n+1}D_\bullet \end{tikzcd}$$

diyagramındaki liftingin varlığına eşittir ve bu vardır çünkü $Cosk^{n+1}f_\bullet$ bir aşikâr fibrationdır ve $A_\bullet$ cofibranttır. ❑

Önerme 4.0.7. *Simplişıl cebirlerin bir cofibrationı* $f_\bullet : A_\bullet \to A_\bullet \coprod FU_*$ *olsun. Bu takdirde* $n \geq 0$ *olmak üzere* $f_\bullet$*'nın bir* n*-cofibration olması için gerek ve yeter şart* $q \geq n+2$ *için* U_q*'nun her elemanının bir bozulmuş (degenereted) simpleks olmasıdır.*

İspat. $f_\bullet$'nın bir n-cofibration olduğunu kabul edelim ve $FU_\bullet$ onun eşçekirdeği olsun. Bu takdirde $FU_\bullet$ bir n-cofibrant simplişıl cebirdir ve böylece $q \geq n+2$ olmak üzere U_q'nun sadece bozulmuş simplekslere sahip olduğu açıktır.

Tersine, U_* bozulmuşlar altında kapalı olduğundan ilk olarak hipotezin $Sk^{n+1}(A_\bullet \coprod FU_*) = Sk^{n+1}A_\bullet \coprod FU_*$ olmasını gerektirdiğine dikkat edelim. Şimdi, $f_\bullet$'nın bir n-cofibration olduğunu ispatlamak için, $g_\bullet$ bir aşikâr n-fibration olduğunda

$$\begin{tikzcd} A_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet \arrow[d, "g_\bullet"] \\ A_\bullet \coprod FU_\bullet \arrow[r] & D_\bullet \end{tikzcd}$$

formundaki herhangi bir diyagramda lifting bulmalıyız. Bunun için, $f_\bullet$ bir cofibration ve $Cosk^{n+1}g_\bullet$ bir aşikâr fibration olduğundan noktalı ok mevcut olduğunda

$$\begin{tikzcd} A_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g_\bullet"] & Cosk^{n+1}C_\bullet \arrow[d, "Cosk^{n+1}g_\bullet"] \\ A_\bullet \coprod FU_\bullet \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & D_\bullet \arrow[r] & Cosk^{n+1}D_\bullet \end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alalım.

$Sk^{n+1} \vdash Cosk^{n+1}$ adjunctionını kullanarak bir başka

$$\begin{tikzcd} Sk^{n+1}A_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet \arrow[d, "g_\bullet"] \\ Sk^{n+1}A_\bullet \coprod FU_\bullet \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & D_\bullet \end{tikzcd}$$

diyagramına sahibiz ve içindeki noktalı ok da ilk diyagramdaki istenen liftingi tanımlamamızı sağlar. ❑

Daha sonra $\mathscr{P} \vdash I$ adjoint durumunu, n-yapısı ile $Simp(Alg)$'ye birleştirilen homotopi teorisi ve Bölüm 2.2'de tanımlanan $n\text{-}Hypalg(Alg)$ kapalı model kategorisine birleştirilen homotopi teorisini karşılaştırmak için kullanacağız.

Önerme 4.0.8. *$n\text{-}Hypalg(Alg)$'deki bir morfizm $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun. Bu takdirde $f_\bullet$'nın bir fibration (sırasıyla, zayıf denklik) olması için gerek ve yeter şart $I(f_\bullet)$'nın bir n-fibration (sırasıyla, zayıf n-denklik) olmasıdır.*

İspat. $f_\bullet$, $n\text{-}Hypalg(Alg)$'de bir morfizm olduğundan bu açıktır, bu takdirde $I(f_\bullet)$'nın bir fibration (zayıf denklik) olması için gerek ve yeter şart $I(f_\bullet)$'nın bir n-fibration (zayıf n-denklik) olmasıdır. ❑

Önerme 4.0.9. *$Simp(Alg)$'deki bir morfizm $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun*:

(i) *$f_\bullet$ bir n-cofibration ise $\mathscr{P}(f_\bullet)$ de bir cofibrationdır*;

(ii) *$f_\bullet$'nın bir zayıf denklik olması için gerek ve yeter şart $\mathscr{P}(f_\bullet)$'nin bir zayıf denklik olmasıdır;*

(iii) *$f_\bullet$ bir n-fibration ise, bu takdirde $\mathscr{P}(f_\bullet)$ de bir fibrationdır.*

İspat.

(i) Bu, $\mathscr{P}$ simplişıl cebirlerin cofibrationlarını (ve böylece n-cofibrationlarını) $n\text{-}Hypalg(Alg)$'deki cofibrationlara dönüştürdüğünden açıktır.

(ii) $0 \le q \le n$ için $\pi_q(\mathscr{P}A_\bullet) = \pi_q(A_\bullet)$ olduğunu hatırlatalım.

(iii) $\mathscr{P}(A_\bullet)$'nın Moore kompleksini ve Önerme 4.0.3'te verilen n-fibrationların karakterizasyonunu hatırlatalım. ❑

Eğer $Ho_n(Simp(Alg))$, n-yapısı ile birlikte $Simp(Alg)$'nin homotopi kategorisini gösteriyorsa ve **[35]**'te Quillen tarafından verilen homotopi teorilerinin bir denkliği için kriteri kullanırsak, aşağıdaki teoreme sahip oluruz:

Teorem 4.0.10. *$n \geq 0$ için, $\mathscr{P} \vdash I$ adjunctionı*

$$Ho_n(Simp(Alg)) \cong Ho(\ n\text{-}\ Hypalg\,(Alg))$$

kategorilerinin bir denkliğini ve n-yapısına birleştirilen $Simp(Alg)$'deki homotopi teorisi ve n-$Hypalg\,(Alg)$'deki homotopi teorisi arasında bir denklik üretir.

Hatırlatmalar.

(1) $A_\bullet$ bir simplişıl cebir ve aşağıdaki pushout diyagramı ($I_0 = \overset{\bullet}{\Delta}[1]$ olduğunda) ile tanımlanan simplişıl cebir $A_\bullet \otimes_n I$ olsun.

$$\begin{array}{ccc}
Sk^{n+1}(A_\bullet \otimes I_0) & \xrightarrow{\alpha_\bullet} & A_\bullet \otimes I_0 \\
{\scriptstyle Sk^{n+1}(i_0+i_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\iota}_0+\bar{\iota}_1} \\
Sk^{n+1}(A_\bullet \otimes I) & \xrightarrow{\beta_\bullet} & A_\bullet \otimes_n I
\end{array}$$

$tr^{n+1}(\beta_\bullet) = \mathrm{id}$ (çünkü $tr^{n+1}(\alpha_\bullet) = \mathrm{id}$) olduğundan $\beta_\bullet$ morfizmi bir zayıf n-denkliktir. Diğer taraftan, $i_0 + i_1 : A_\bullet \otimes I_0 \to A_\bullet \otimes I$ morfizmini ve $\varepsilon_\bullet : Sk^{n+1}(A_\bullet \otimes I) \to A_\bullet \otimes I$ kanonik morfizmini göz önüne alalım, $\gamma_\bullet \beta_\bullet = \varepsilon_\bullet$ olacak şekilde bir tek $\gamma_\bullet : G_\bullet \otimes_n I \to G_\bullet \otimes I$ morfizmi vardır. $\varepsilon_\bullet$ morfizmi bir zayıf n-denkliktir (çünkü $tr^{n+1}(\varepsilon_\bullet) = \mathrm{id}$) ve böylece $\gamma_\bullet$ bir zayıf n-denkliktir; bu takdirde $\bar{\sigma}_\bullet = \sigma_\bullet \gamma_\bullet : A_\bullet \otimes_n I \to A_\bullet$ bileşkesi bir zayıf n-denkliktir.

Şimdi, $A_\bullet$ n-cofibrant ise cofibranttır ve böylece $i_0 + i_1$ simplişıl cebirlerin bir cofibrationıdır. Bu takdirde $Sk^{n+1}(i_0 + i_1)$ bir n-cofibrationdır ve bu $\bar{\iota}_0 + \bar{\iota}_1$ 'in ayrıca bir n-cofibration olmasını gerektirir. Bu takdirde

$$A_\bullet \coprod A_\bullet = A_\bullet \otimes I_0 \xrightarrow{\bar{\iota}_0+\bar{\iota}_1} A_\bullet \otimes_n I \xrightarrow{\bar{\sigma}} A_\bullet$$

eşdiagonal morfizminin bir faktorizasyonuna sahibiz ve böylece $A_{\bullet} \otimes_n I$, n-yapısı ile birlikte $Simp(Alg)$'deki $A_{\bullet}$ için bir silindir nesnesidir.

n-yapısı için $Simp(Alg)$'deki suspension functorünün

$$\text{Eşçek}\,(Sk^{n+1}(i_0 + i_1)) \cong \text{Eşçek}\,(\overline{i_0} + \overline{i_1}) = {}^n\Sigma(A_{\bullet})$$

olduğuna dikkat edelim. Diğer taraftan

$$\text{Eşçek}\,(Sk^{n+1}(i_0 + i_1)) \cong Sk^{n+1}(\text{Eşçek}\,(i_0 + i_1)) = Sk^{n+1}(\Sigma(A_{\bullet}))$$

olduğuna sahibiz ve bu sebeple

$${}^n\Sigma(A_{\bullet}) \cong Sk^{n+1}(\Sigma(A_{\bullet})) .$$

Aşağıdaki pushout diyagramının n-yapısına göre $A_{\bullet}$ için ayrıca bir silindir nesnesi verdiğini ispatlamak çok zor değildir:

$$\begin{tikzcd}
Sk^n A_{\bullet} \otimes I_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_{\bullet} \otimes I_0 \arrow[d] \\
Sk^n A_{\bullet} \otimes I_0 \arrow[r] & A_{\bullet} \otimes'_n I
\end{tikzcd}$$

ve bu takdirde ${}^n\Sigma A_{\bullet}$ ve $\Sigma(Sk^n A_{\bullet})$'nın zayıf n-denklik olduğu kolaylıkla elde edilebilir.

(2) $B_{\bullet} \in Simp(Alg)$ verilsin, ve aşağıdaki pullback diyagramı

$$\begin{tikzcd}
{}_nB_{\bullet}^I \arrow[r] \arrow[d, "(\overline{\partial}_0, \overline{\partial}_1)"'] & (Cosk^{n+1}B_{\bullet})^I \arrow[d, "(\partial_0, \partial_1)"] \\
B_{\bullet}^{I_0} \arrow[r] & (Cosk^{n+1}B_{\bullet})^{I_0}
\end{tikzcd}$$

ile verilen ${}_nB_{\bullet}^I$ simplişıl cebirini göz önüne alalım. Bu yapı, (1)'de tanımlanan birinci silindir functore açıkça sağ adjoint olan bir functor verir.

Yukarıdaki gibi, bir zayıf n-denklik olan bir $\gamma_{\bullet} : B_{\bullet}^I \to {}_nB_{\bullet}^I$ morfizminin var olduğuna sahibiz. Daha sonra, $(\overline{\partial}_0, \overline{\partial}_1)$'in ayrıca bir n-fibration olmasını gerektirecek olan (∂_0, ∂_1)'in bir n-fibration olduğunu göreceğiz. (∂_0, ∂_1) morfizmi bir fibrationdır ve böylece, ispatlanacak tek şey, Önerme 4.0.3'e göre,

$$\text{Çek}[N_{n+1}(Cosk^{n+1}B_{\bullet})^I) \to N_n(Cosk^{n+1}B_{\bullet})^I)] \to \text{Çek}[N_{n+1}(Cosk^{n+1}B_{\bullet})^{I_0}) \to N_n(Cosk^{n+1}B_{\bullet})^{I_0})]$$

morfizminin örten olmasıdır.

Şimdi yüz operatörleri

$$d_k(x_{ij}) = (x_{0k+1},...,x_{k-1k+1},x_{k+1k},...,x_{n+1k})$$

ile verildiğinde $((Cosk^{n+1}B_\bullet)^I)_{n+1}$ cümlesi

$$\left\{ (x_{ij}), x_{ij} \in B_{n+1} \quad \begin{matrix} 0 \le i \le n+1 \\ 0 \le j \le n+2 \end{matrix} \Big/ \begin{matrix} d_k x_{ij} = d_{j-1} x_{ik} \quad k < j \\ x_{ii+1} = x_{i+1i+1} \end{matrix} \right\}$$

ve $(Cosk^{n+1}B_\bullet)^{I_0}_{n+1} = B_{n+1} \times B_{n+1}$ ve $(\partial_0,\partial_1)(x_{ij}) = (x_{00}, x_{n+1n+2})$. Bu takdirde, eğer $(x_{ij}) \in$ Çek$[N_{n+1}(Cosk^{n+1}B_\bullet)^I) \to N_n(Cosk^{n+1}B_\bullet)^I)]$ ise $j \neq i, i+1$ olduğunda $x_{ij} = 0$ olmasına sahibiz.

Şu halde, $(x,y) \in$ Çek$[N_{n+1}(Cosk^{n+1}B_\bullet)^{I_0}) \to N_n(Cosk^{n+1}B_\bullet)^{I_0})]$ verilsin, $0 \le k \le n+1$ olmak üzere $d_k x = d_k y = 0$ olduğuna ve böylece $j \neq i, i+1$ ise $x_{ij} = 0$ ile birlikte x_{ij} elemanına sahibiz, $0 \le i \le n$ için $x_{ii+1} = x$ ve $x_{n+1n+2} = y$, $(\partial_0,\partial_1)(x_{ij}) = (x,y)$ olmasını sağlar.

Bu takdirde $s_\bullet$ bir zayıf denklik olduğundan $\overline{s}_\bullet$ bir zayıf n-denklik olmak üzere aşağıdaki diagonal morfizmin faktorizasyonuna sahibiz:

$$\begin{tikzcd}
B_\bullet \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "s_\bullet"'] \arrow[dr, "\overline{s}_\bullet"] & & B_\bullet \times B_\bullet = B_\bullet^{I_0} \\
B_\bullet^I \arrow[r, "\gamma_\bullet"'] & {}_nB_\bullet^I \arrow[ur, "(\overline{\partial}_0,\overline{\partial}_1)"'] &
\end{tikzcd}$$

O halde ${}_nB_\bullet^I$, n-yapısı için $Simp(Alg)$'deki $B_\bullet$ için bir yol nesnesi verir.

${}^n\Omega B_\bullet =$ Çek$(\overline{\partial}_0,\overline{\partial}_1) \cong$ Çek$(\partial_0,\partial_1) = \Omega(Cosk^{n+1}B_\bullet)$ olduğuna dikkat edelim. Bu ${}^n\Omega$ functorü, ${}^n\sum$ suspension functorüne sağ adjointtir.

(3) $f_\bullet, g_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ verilsin, iki farklı yolla $f_\bullet$'dan $g_\bullet$'ya bir homotopi kavramını indirgeyebiliriz.

Diğer taraftan, eğer

$d_0 k_1^p = f_{p-1} d_0$	$d_i k_j^p = k_{j-1}^{p-1} d_i \quad i < j$ için	$s_i k_j^p = k_j^{p+1} s_i \quad i \ge j$ için
$d_p k_p^p = g_{p-1} d_p$	$d_i k_j^p = k_j^{p-1} d_i \quad i \ge j$ için	$s_i k_j^p = k_{j+1}^{p+1} s_i \quad i < j$ için

özdeşliklerini sağlayan $\{k_i^p : A_p \to B_p, 1 \le p \le n+1, 1 \le i \le p\}$ morfizmlerinin bir sistemi varsa $f_\bullet$'nın $g_\bullet$'ya n *-homotopik* olduğunu söyleriz.

Böyle bir sistem $f_\bullet$'dan $g_\bullet$'ya bir n *-homotopi* olarak adlandırılır.

Diğer bir ifade ile, eğer yüz ve bozulmuş operatörlerine göre aşağıdaki

$d_0 h_0^q = f_q$	$d_{q+1} h_q^q = g_q$	$d_i h_j^q = h_{j-1}^{q-1} d_i$	$i < j$ için
$s_i h_j^{q-1} = h_{j+1}^q s_i$	$i \le j$ için	$d_{j+1} h_{j+1}^q = d_{j+1} h_j^q$	
$s_i h_j^{q-1} = h_j^q s_{i-1}$	$i > j$ için	$d_i h_j^q = h_j^{q-1} d_{i-1}$	$i > j+1$ için

homotopi özdeşliklerini sağlayan $(h_j^q : A_q \to B_{q+1}; 0 \le q \le n, 0 \le j \le q)$ morfizmlerinin bir sistemi varsa $f_\bullet$'nın $g_\bullet$'ya n-homotopik olduğunu söyleyebiliriz.

n-homotopinin birinci kavramı (1)'de tanımlanan birinci silindir nesnesinden (ya da denk olarak (2)'de tanımlanan yol nesnesinden) üretilen homotopinin kavramına denktir, yani $f_\bullet$'nın $g_\bullet$'ya n-homotopik olması için gerek ve yeter şart $\kappa_\bullet(\overline{\iota_0} + \overline{\iota_1}) = f_\bullet + g_\bullet$ olacak şekilde bir $\kappa_\bullet : A_\bullet \otimes_n I \to B_\bullet$ simplişıl morfizminin var olmasıdır.

n-homotopinin ikinci kavramı (1)'deki ikinci silindir nesnesinden üretilen homotopi kavramına denktir, yani eğer bir $\kappa'_\bullet : A_\bullet \otimes'_n I \to B_\bullet$ simplişıl morfizmi varsa $f_\bullet$ $g_\bullet$'ya n-homotopiktir.

$A_\bullet \otimes'_n I \to A_\bullet \otimes_n I$ morfizmi var olacak şekilde ikinci anlamda $\overline{\iota_0}, \overline{\iota_1} : A_\bullet \to A_\bullet \otimes_n I$ morfizmlerinin n-homotopik olduğunu görmek zor değildir. Bu, n-homotopinin birinci kavramının ikincisini gerektirdiğini verir. Şimdi, eğer $A_\bullet$ n-cofibrant ise ($B_\bullet$ daima n-fibrant olduğundan), n-homotopinin her iki kavramı çakışır, çünkü onlar n-yapısından üretilen sol homotopi bağıntısıdır.

Herhangi bir abel cebiri için $0, \mathrm{id} : K(A, n+1) \to K(A, n+1)$ morfizmlerinin n-homotopik olduğuna fakat açıkça simplişıl olarak homotopik olmadıklarına dikkat edelim.

BEŞİNCİ BÖLÜM

SİMPLİŞIL CEBİRLERİN (r,n)-TİPLERİ İÇİN QUILLEN MODEL YAPISI

5.0 Giriş

$0 \le r \le n$ olmak üzere r,n için üçüncü ve dördüncü bölümde göz önüne aldığımız durumları bu bölümde $r \le q \le n$ için $\pi_q(f_\bullet)$ bir izomorfizm olacak şekilde $f_\bullet$ bir morfizm olmak üzere zayıf (r,n)-denkliğinin genel durumu araştırılır. Bu takdirde model yapısı ve homotopi teorisi $r=0$ hali ve $n \to \infty$ durumu ve de $n=r-1$ için tümleyen hali birleştirilerek ifade edilir. Böylece bu iki işlem ile birlikte $Simp(Alg)$'deki klasik model yapısı ve homotopi teorisi sunulur. Bunların her biri için, örneğin silindir ve yol nesneleri ve loop ve suspension functorler gibi birleştirilmiş homotopi teorileri için bazı açık yapılar oluştururuz ve ayrıca simplişıl homotopi bağıntısından bu yapılardan bulunan homotopi bağıntısına kadar ilgili olacağız.

Tanım 5.0.1. Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ olsun:

(i) $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$ bir $\overline{r}$ -fibration ise, $f_\bullet$'ya bir (r,n) *-fibration* adı verilir;

(ii) $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$ bir zayıf $\overline{r}$ -denklik ise, $f_\bullet$'ya bir *zayıf* (r,n) *-denklik* adı verilir;

(iii) Aşikâr (r,n)-fibrationlara göre LLP'ye sahip ise, $f_\bullet$'ya bir (r,n) *-cofibration* adı verilir.

Herhangi bir simplişıl cebirin bir (r,n)-fibrant olduğuna dikkat edelim.

Bölüm 3 ve 4'te verilen (aşikâr) $\overline{r}$ ve n-fibrationların karakterizasyonları aşağıdakini göstermemizi sağlar:

Önerme 5.0.2. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $f_\bullet$ *bir* (r,n) *-fibrationdır.*

(ii) $f_\bullet$, $0 \le k \le q$, $r+1 \le q \le n+1$ *olmak üzere* $F\Delta[q,k] \to F\Delta[q]$ *'ya göre ve* $0 \le k \le n+2$ *olmak üzere* $F\Delta[n+2,k] \to F\dot{\Delta}[n+2]$ *'ye göre RLP'ye sahiptir.*

(iii) $r+1 \le q \le n+1$ *ve* Çek$[N_{n+1}A_\bullet \to N_n A_\bullet] \to$ Çek $[N_{n+1}B_\bullet \to N_n B_\bullet]$ *morfizmi örten ise* $N_q(f_\bullet)$ *örtendir.*

Önerme 5.0.3. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet$ olsun. Bu takdirde $f_\bullet$'nın bir zayıf (r,n)-denklik olması için gerek ve yeter şart $r \le q \le n$ için $\pi_q(f_\bullet)$ 'nın bir izomorfizm olmasıdır.*

Önerme 5.0.4. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $f_\bullet$ *bir aşikâr* (r,n) *-fibrationdır.*

(ii) $f_\bullet$, $0 \le k \le r+1$ *olmak üzere* $F\Delta[r+1,k] \to F\dot{\Delta}[r+1]$ *'e göre ve* $r+1 \le q \le n+1$ *olmak üzere* $F\dot{\Delta}[q] \to F\Delta[q]$ *'ya göre RLP'ye sahiptir.*

(iii) $r+1 \le q \le n+1$ *için* $N_q(f_\bullet)$ *örten,* $r \le q \le n$ *için* $\pi_q($Çek $f_\bullet) = 0$, *ve* $\pi_r(f_\bullet)$ *örtendir.*

Aşağıdaki sonuç, (r,n)-yapısı için cofibrationların sınıfının $\overline{r}$-yapısı ve n-yapısı için karşılık gelen sınıfların kesişimi olduğunu ifade eder.

Önerme 5.0.5. *Simplişıl cebirlerin bir morfizmi $f_\bullet$ olsun. Bu takdirde $f_\bullet$'nın bir (r,n)-cofibration olması için gerek ve yeter şart onun hem bir $\overline{r}$-cofibration hem de n-cofibration olmasıdır.*

İspat. Önermeler 3.0.4, 4.0.3 ve 5.0.4'e göre eğer $f_\bullet$ bir aşikâr n-fibration ya da aşikâr $\overline{r}$-fibration ise, bu takdirde $f_\bullet$'nın aşikâr (r,n)-fibration olduğu açıktır. Bu her (r,n)-cofibrationın hem bir n-cofibration hem de bir $\overline{r}$-cofibration olmasını gerektirir.

Tersine, $f_\bullet$'nın bir $\overline{r}$-cofibration ve bir n-cofibration olduğunu kabul edelim. $g_\bullet$ bir aşikâr (r,n)-fibration olduğunda verilen bir

$$\begin{array}{ccc} A_\bullet & \longrightarrow & X_\bullet \\ {\scriptstyle f_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_\bullet} \\ B_\bullet & \longrightarrow & Y_\bullet \end{array}$$

diyagramında, Önermeler 3.0.7 ve 4.0.7'deki gibi lifting bulunabilir. ❑

Sonuç 5.0.6. *Bir $A_\bullet$ simplişıl cebirinin (r,n)-cofibrant olması için gerek ve yeter şart onun bir serbest r-indirgenmiş ve $(n+1)$-skeletal simplişıl cebir olmasıdır.*

Teoremler 3.0.6 ve 4.0.5'e benzer bir ispat ile birlikte aşağıdaki teoreme sahibiz:

Teorem 5.0.7. *$0 \le r \le n$ olmak üzere herhangi bir r,n için $Simp(Alg)$ kategorisi Tanım 5.0.1'in yapısı ile birlikte bir kapalı model kategorisidir.*

Sonuç olarak, n-yapısı için Bölüm 4'te verilen silindir ve yol yapılarının (ve böylece loop ve ${}^{n}\Omega$ ve ${}^{n}\Sigma$ suspension functorleride) (r,n)-yapısı için yapıların bu çeşidini sağladığına ayrıca dikkat edelim. Bu takdirde, bu yapı ile birleşmeli olan sağ ve sol homotopi bağıntısı kesilmiş simplişıl homotopinin terimlerinde de ayrıca verilebilirdir.

KAYNAKLAR

[1] Andre M. 1970. Homologie des Algebres Comutatives, *Lecture Notes in Math.*, *Springer*, **206**, 1970.

[2] Artin, M. and Mazur, B. 1969. Etale Homotopy, *Lecture Notes in Math.*, **100**, Spinger, Berlin, 1969.

[3] Arvasi Z. 1994. Applications in Commutative Algebra of The Moore Complex of a Simplicial Alegebra, *Ph. D. Thesis, University of Wales*, BANGOR, 1994.

[4] Barrat. M. G. Gugenheim. V. K. A. M. and Moore. J. C.1950. On semisimplicial fibre-bundles. *Am. J. of Math.*, **81**, 639-657, 1950.

[5] Cabello J. G. and Garzon A. R. 1993. A closed model structure for n - types of simplical groups. *Preprint* 1993 .

[6] Cabello J.G. and Garzon A.R. 1995. Closed model structures for algebraic models of n-types, *J. of Pure and Appl. Algebra*, **103**, 287-302, 1995.

[7] Carrasco, P. and Cegarra, A. M. 1991. Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, *Jour. Pure Appl. Algebra*, **75**, 195-235, 1991.

[8] Conduché D. 1984. Modules Croisés Généralisés de Longueur 2, *Jour. Pure Appl. Algebra*, **34**, 155-178, 1984.

[9] Curtis, E. B. 1971. Simplicial homotopy theory, *Advences in Math.,* **6**, 107-209, 1971.

[10] Duskin, J. 1975. Simplicial methods and the interpretations of “triple” cohomology, *Memoirs Amer.. Math. Soc.*, **163**, 1975.

[11] Efil, F. N. 2005. Simplişıl Cebirlerin Kapalı Kategori Modelleri, *Yüksek Lisans Tezi*, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa Türkiye 2005.

[12] Ellis. G. J.1993. Homotopical Aspects of Lie Algebras. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **54** , 393-419, 1993.

[13] Elvira C. 1991. N *- tipos y cohomotopia Tesis, Universidad de Zaragoza*. 1991.

[14] Elvira C. and Hernandez L.J. 1995. Closed model categories for the n-type of spaces and simplicial sets, *Math.Proc.Camb.Phil.Soc.*, **118**, 93-103, 1995.

[15] Extremiana, J. I., Hernandez, L. J. and Rivas, M. T. 1996. A closed model category for $(n-1)$-connected spaces, *Proc. A. M. S.* **124** (11), 3545-3553, (1996).

[16] Gabriel P. and Zisman. M . 1967. *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer–Verlag, 1967.

[17] Glenn, P. 1977. Realization of cohomology clases by torsors under hypergroupoids, *Ph. D. Thesis,* State University of New York at Buffalo 1977.

[18] Gleen P. 1982. Realizations of cohomology classes in arbitrary exact categories, *J. of Pure and Appl. Algebra*, **25**, 33-107, 1982.

[19] Hernandez. L. J. and Porter. T. 1992. Categorical models of n - types for pro-crossed complexes and ℓ_n - prospaces. *Lecture Notes in Math*., **1509**, 146-186, 1992.

[20] Hernandez L. J. and Porter. T.1992. An embedding theorem for proper n - types. *Top. and its Appl.* **48,** 215–235, 1992.

[21] Kan D.M. 1958. A Combinatorial Definition of Homotopy Groups*, Annals of Maths*., **61**, 288-312, 1958.

[22] May J. P., 1967. Simplicial Objects in Algebraic Topology, *Math Studies* **11**, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[23] Morgenegg. C.1979. Sur les Invariants d'un Anneau Local A Corps Residuel de Caracteristique 2. *Ph. D. Thesis*, Lausanne EPFL. 1979.

[24] Mutlu, A., 1997. Peiffer Pairings in the Moore Complex of a Simplicial Group *Ph.D. Thesis*, University of Wales Bangor, 1997; *Bangor Preprint* **97.11.** Available via http://www.bangor.ac.uk/ma/research/preprints/97prep.html.

[25] Mutlu, A., and Porter, T., 1998. Applications of Peiffer pairings in the Moore complex of a simplicial group, *Theory and Applications of Categories*, **4**, No: 7, 148-173, 1998; previously as *Bangor Preprint* **97.17.** Available via http://www.bangor.ac.uk/ma/research/preprints/97prep.html

[26] Mutlu, A. and Porter, T., 1998. Freeness conditions for 2-crossed modules and complexes, *Theory and Applications of Categories*, **4**, No.8, 174-194, 1998; previously as *Bangor Preprint* **97.19.8** Available via http://www.bangor.ac.uk/ma/research/preprints/97prep.html.

[27] Mutlu, A., and Porter, T., 1999. Free crossed resolutions from simplicial resolutions with given CW-basis, *Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle Catégoriques*, **XL-4**, 261-283, 1999; previuosly as *Bangor Preprint* **97.18.** Available via http://www.bangor.ac.uk/ma/research/preprints/97prep.html.

[28] Mutlu, A. and Porter, T., 2001. Iterated Peiffer pairings in the Moore complex a of simplicial group, *Applied Categorical Structure*, **9**, No: 2, 111-130, 2001. Available via http://www.wkap.nl/journalhome.htm/0927-2852; previously as *Bangor Preprint* **97.12**. Avaiable via http://www.bangor.ac.uk/ma/research/preprints/97prep.html.

[29] Mutlu A. Applications of free square complexes and free 2-crossed complexes of free simplicial algebras, *preparation*.

[30] Mutlu A., Mutlu B., To Construction of Free Simplicial algebras with given CW-basis, *preparation*.

[31] Mutlu, B., Kros Modüllerin 3. Boyuta Genelleştirilmesi(Yarı 3-Kross Modül), *Yüksek Lisans Tezi* , Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Manisa Türkiye 2002.

[32] Porter. T. 1986. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles. *J. Algebra*, **99**, 458-465, 1986.

[33] Porter. T. 1987. Some Categorical Results in the Theory of Crossed Modules in Commutative Algebras. *J. Algebra* ,**109**, 415-429, 1987.

[34] Porter, T. 1993. n-Types of simplicial groups and crossed n-cubes, *Topology*, **32**, 5-24, 1993.

[35] Quillen, D. 1967. Homotopical algebra, *Lecture Notes in Maths*., **43**, Springer, 1967.

[36] Quillen, D. 1968. The geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**, 1499-1500, 1968.

[37] Quillen, D., 1969. Rational homotopy theory, *Ann. Math.,* **90**, 205-295, 1969.

[38] Strom. A. 1973. The homotopy category is a homotopy category. *Arch Math*., **23**, 435-441, 1973.

[39] Whitehead, J. H.C. 1949. Combinatorial homotopy I, *Bull. Amer. Soc.*, **55**, 213-245, 1949.

[40] Whitehead. J. H. C. 1949. Combinatorial Homotopy II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**, 453-496, 1949.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Emel ÜNVER
Baba Adı : Mehmet Ali
Ana Adı : Fevziye
Doğum Tarihi : 15.07.1980
Doğum Yeri : İzmir- Bornova

İlköğrenimini Mediha Mahmutbey İlkokulunda 1987–1991, Ortaokulu ve Liseyi Çimentaş Lisesinde 1991–1998 tamamladı. Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu 1998–2002. 2002–2003 öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başlayıp öğrenimine halen devam etmektedir.