<u>CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>

FUZZY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ HAKKINDA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEMET ÖZGÜR

Anabilim Dalı : Matematik

Programı :Uygulamalı Matematik

MANİSA 2008

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ HAKKINDA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEMET ÖZGÜR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06.12.2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 10.01.2008

Tez Danışmanı :Prof. Dr. Necdet BİLDİK (Celal Bayar Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ (Ege Ünv. Fen. Fak. Mat. Böl.)

:Yrd. Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ (Celal Bayar Üniversitesi)

MANİSA 2008

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında , planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde, olumlu ve yapıcı eleştirileriyle bana yön veren, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam; Sayın Prof. Dr. Necdet BİLDİK ‘e, destek ve yardımlarından dolayı Arş.Gör. Ali KONURALP’a ve daima beni destekleyen oda arkadaşlarıma ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Demet ÖZGÜR

ÖZET

Bu tez çalışmasında Fuzzy Denklemleri sunulmuştur. İlk olarak Fuzzy kavramı üzerinde durulmuş, Fuzzy Sayıları, Fuzzy Kümeleri, Aralık Aritmetiği ve Genişleme Prensibi gibi temel kavramlar verilmiştir. Fuzzy Lineer Denklemi ve Fuzzy Diferansiyel Denklemlerin özellikleri çeşitli örneklerle ele alınmıştır.Ayrıca Fuzzy denklemleri için (1) Klasik Çözüm (2) Genişleme Prensibi Çözümü (3) α -kesimi ve Aralık Aritmetiği Çözümü gibi üç yeni çözüm tekniği incelenmiştir.

ABSTRACT

In this thesis Fuzzy Equations are represented. Firstly fuzzy concept is studied and then Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets, Interval Arithmetic and Extension Principle concepts are given. Fuzzy Linear Equations and Fuzzy Differential Equations are especially taken in different Examples.Beside for Fuzzy Differential Equations three new solution techniques are considered such that (1) Classical Solution, (2) Extension Principle Solution and (3) α -cuts and İnterval Arithmetic .

.

ÖNSÖZ

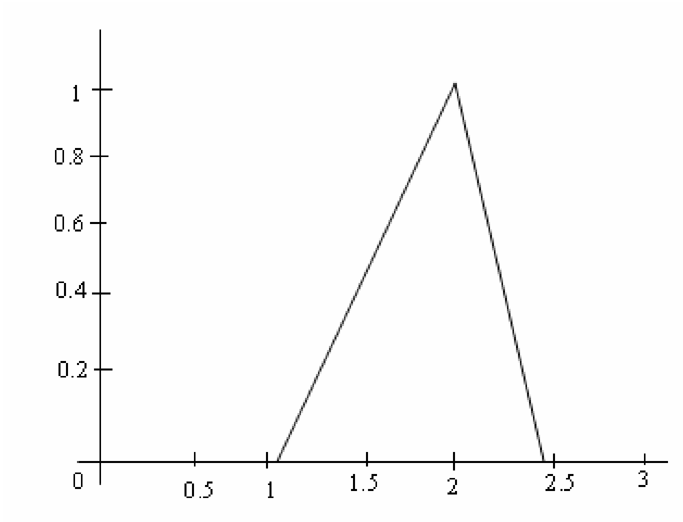
Bu tez konusunun adı olan Fuzzy kavramı hakkında ilk bilgiler Azerbeycan asıllı Lütfu Askerzade (Zadeh, 1965) tarafından literatüre mal edilmesine karşılık bu fikirler ancak 1970 yıllarından sonra Doğu dünyasında ve özellikle de Japonya'da teknolojik cihaz yapım ve işleyişinde kullanılarak bütün dünyada yaygın hale gelmiştir.1980' den sonra fuzzy (bulanık) sisteminin elektrikli süpürgeler, çamaşır makineleri, asansörler, metro ve şirket işletimi gibi konularda kullanılmasında patlama olmuştur. Son yıllarda birçok mühendislik dallarında, veri tabanlarının sözelleştirilmesinde tele sekreterlerin cevaplanmasında ve birçok konularda fuzzy (bulanık) mantık bütün dünyada kullanılır hale gelmiştir.

Bu çalışmanın kolay anlaşılması açısından birinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiş konuya bir giriş yapılmıştır.İkinci bölüm ise dört alt başlık altında incelenmiştir.İlk olarak Fuzzy Kümeleri, Fuzzy Sayıları, Genişleme Prensibi, α -kesimleri, Aralık Aritmetiği kavramları açıklanmıştır. İlerleyen kısımlarda ise sırasıyla birinci ve ikinci dereceden Fuzzy denklemlerine örnekler verilmiş olup Fuzzy Diferansiyel Denklemleri üzerinde çeşitli çözüm teknikleri oluşturulmuştur.

I. BÖLÜM

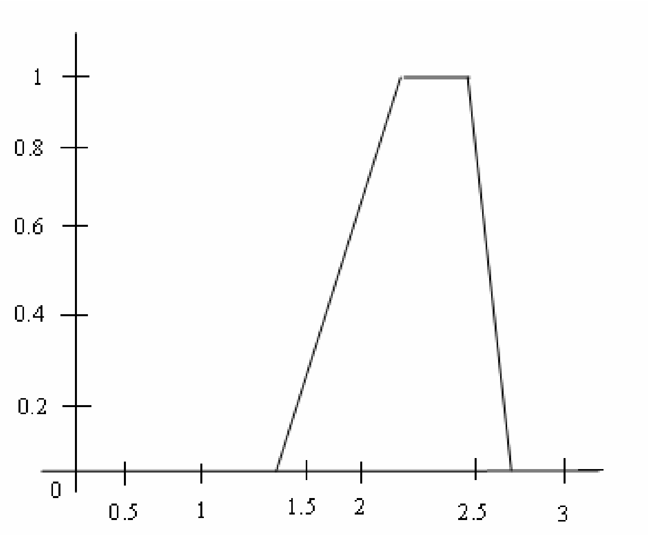
Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1 (Üçgensel Fuzzy Sayısı): Bir üçgensel $\overline{N}$ fuzzy sayısı üçgenin tabanı $[a,c]$ aralığı ve köşesi $x=b$ olmak üzere üç $a<b<c$ sayısı ile tanımlıdır. Üçgensel fuzzy sayıları $\overline{N}=(a/b/c)$ şeklinde yazılır.



Şekil 1.1 Üçgensel Fuzzy Sayısı

Tanım 1.2 (Yamuk Yapılı Fuzzy Sayısı): Bir yamuksal (yamuk yapılı) $\overline{M}$ fuzzy sayısı , yamuğun tabanı $[a,d]$ aralığı ve tepesi $[b,c]$ aralığı olmak üzere dört $a<b<c<d$ sayısı ile tanımlıdır. Yamuk yapılı fuzzy sayıları $\overline{M}=(a/b,c/d)$ biçiminde yazılır.



Şekil 1.2 Yamuk Yapılı Fuzzy Sayısı

Tanım 1.3 (Alfa-Kesimleri) : Regüler (fuzzy olmayan) kümeleri üreten bir fuzzy kümesi boyundaki (arasındaki) dilimlerdir.

Eğer $\overline{A}$, herhangi bir Ω kümesinin bir fuzzy alt kümesi ise bu durumda $\overline{A}$'nin bir $\alpha-$kesimi, bütün α'lar için $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere

$$\overline{A}[\alpha]=\{x\in\Omega \mid \overline{A}(x)\geq\alpha\}\ \ldots \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4 (Bir Fuzzy Sayısının Çekirdeği) : Bir fuzzy sayısının çekirdeği, üyelik değeri bire eşit olan değerlerin kümesidir. $\overline{N}=(a/b/c)$, veya $\overline{N}\approx(a/b/c)$ ise bu durumda $\overline{N}$'in çekirdeği tek bir b noktasıdır. Eğer $\overline{M}=(a/b,c/d)$ ya da $\overline{M}\approx(a/b,c/d)$ ise $\overline{M}$'in çekirdeği $\overline{M}=[b,c]$ dir.

Keyfi bir $\overline{Q}$ fuzzy sayısı için, $\overline{Q}[\alpha]$'nın $0\leq\alpha\leq 1$ için kapalı sınırlı bir aralık , $q_1(\alpha)(q_2(\alpha))$, $q_1(1)\leq q_2(1)$ ile α'nın bir artan fonksiyonu olmak üzere

$$\overline{Q}[\alpha]=[q_1(\alpha),q_2(\alpha)] \tag{1.2}$$

biçiminde yazılır..

Eğer $\overline{Q}$, bir üçgensel yapılı ya da yamuksal yapılı bir fuzzy sayısı ise bu durumda

(1) $q_1(\alpha)$, $[0,1]$ aralığı üzerinde α'nın sürekli monoton artan bir fonksiyonudır.

(2) $q_2(\alpha)$, $0\leq\alpha\leq 1$ aralığı üzerinde α'nın sürekli monoton azalan bir fonksiyonu dır.

(3) $q_1(1)=q_2(1)$, $(q_1(1)<q_2(1))$ (yamuk yapılı bir fuzzy sayısı için)

Tanım 1.5 (Aralık Aritmetiği): $[a_1,b_1]$ ve $[a_2,b_2]$ iki kapalı, sınırlı reel sayılar aralığı olsun. Eğer $*$, toplama, çıkarma, çarpma ya da bölme işlemini gösterir ise bu durumda

$$[\alpha,\beta]=\{a*b \mid a_1\leq a\leq b_1,a_2\leq b\leq b_2\} \tag{1.3}$$

olmak üzere

$$[a_1,b_1]*[a_2,b_2]=[\alpha,\beta] \tag{1.4}$$

dır. Eğer $*$ bölme işlemi ise, sıfırın $[a_2,b_2]$ aralığına ait olmadığı kabul etmek zorundadır. Dolayısıyla (1.4) denklemi aşağıdaki gibi basitleştirilir..

$$[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,b_1+b_2] \tag{1.5}$$

$$[a_1,b_1]-[a_2,b_2]=[a_1-b_2,b_1-a_2] \tag{1.6}$$

$$[a_1,b_1]/[a_2,b_2]=[a_1,b_1].[\frac{1}{b_2},\frac{1}{a_2}] \tag{1.7}$$

$$[a_1, b_1].[a_2, b_2] = [\alpha, \beta] \qquad (1.8)$$

$$\alpha = \min\{a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2\} \qquad (1.9)$$

$$\beta = \max\{a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2\} \qquad (1.10)$$

Çarpma ve bölme işlemi, $a_1 > 0$ ve $b_2 < 0$ ya da $b_1 > 0$ ve $b_2 < 0$ v.s. şeklinde biliniyorsa bu daha da basitleştiririz. Örneğin; eğer $a_1 \geq 0$ ve $a_2 \geq 0$ ise bu durumda

$$[a_1, b_1].[a_2, b_2] = [a_1 a_2, b_1 b_2] \qquad (1.11)$$

ve eğer $b_1 < 0$ fakat $a_2 \geq 0$ ise

$$[a_1, b_1].[a_2, b_2] = [a_1 b_2, a_2 b_1] \qquad (1.12)$$

olur.Ayrıca, $b_1 < 0$ ve $b_2 < 0$ olarak kabul edilirse

$$[a_1, b_1].[a_2, b_2] = [b_1 b_2, a_1 a_2] \qquad (1.13)$$

elde edilir. Fakat $a_1 \geq 0$, $b_2 < 0$ ise

$$[a_1, b_1].[a_2, b_2] = [a_2 b_1, b_2 a_1]$$

1.6 Fuzzy Aritmetiği

$\overline{A}$ ve $\overline{B}$ iki fuzzy sayısı olsun. $\overline{A}[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, $\overline{B}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ olmak üzere $\alpha -$kesimlerinin kapalı, sınırlı aralıklar ise bu durumda $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B}$ olduğunda

$$\overline{C}[\alpha] = \overline{A}[\alpha] + \overline{B}[\alpha]$$

dır. $[0,1]$ aralığındaki tüm α değerleri için

$$\overline{C}[\alpha] = \overline{A}[\alpha] - \overline{B}[\alpha]$$

dır.Ayrıca $\overline{C} = \overline{A}.\overline{B}$ için

$$\overline{C}[\alpha] = \overline{A}[\alpha].\overline{B}[\alpha]$$

ve $\overline{C} = \overline{A}/\overline{B}$ olduğu zaman

$$\overline{C}[\alpha] = \overline{A}[\alpha]/\overline{B}[\alpha]$$

elde edilir.

1.7 Fuzzy Denklemleri

$$\overline{A}\,\overline{X}+\overline{B}=\overline{C} \qquad (1.14)$$

denkleminde $\overline{A},\overline{B}$ ve $\overline{C}$ üçgensel fuzzy sayıları olmak üzere böylece $\overline{A}=(a_1/a_2/a_3)$, $\overline{B}=(b_1/b_2/b_3)$ ve $\overline{C}=(c_1/c_2/c_3)$ olur. Eğer $\overline{X}$ mevcut ise, bu çözüm üçgensel yapılı bir fuzzy sayısı olacaktır.Böylece $\overline{X}\approx(x_1/x_2/x_3)$ yazılır.

$$a\,x+b=c$$

crisp denkleminde $a\neq 0$ ise $x=(c-b)/a$ elde edilir. Fuzzy denklemlerin çözümünde kullanılan ilk metot $\overline{X}_c$ çözümünü elde eden klasik metoddur. $\overline{X}_c$ çözümünü elde etmek için ilk olarak $\alpha-$kesimlerine ve aralık aritmetiğine başvurulur.
$\overline{A}[\alpha]=[a_1(\alpha),a_2(\alpha)]$, $\overline{B}[\alpha]=[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]$, $\overline{C}[\alpha]=[c_1(\alpha),c_2(\alpha)]$ ve $\overline{X}_c[x_1(\alpha),x_2(\alpha)]$, $0\leq\alpha<1$ olsun.Bu değerler (*) denkleminde yerine yazıldığında

$$[a_1(\alpha),a_2(\alpha)][x_1(\alpha),x_2(\alpha)]+[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]=[c_1(\alpha),c_2(\alpha)] \qquad (1.15)$$

denklemi elde edilir. $x_1(\alpha),x_2(\alpha)$ değerlerine karşılık (1.15) denklemini çözmek için aralık aritmetiği kullanılır. $[x_1(\alpha),x_2(\alpha)]$ bir fuzzy sayısının $\alpha-$kesimlerini belirlediği zaman, bu metodun $\overline{X}_c$ çözümünü tanımladığı söylenir. $x_1(\alpha),x_2(\alpha)$'nın bir fuzzy sayısını belirlemesi için

1. $0\leq\alpha<1$, $x_1(\alpha)$ monoton artan;

2. $0\leq\alpha<1$, $x_2(\alpha)$ monoton azalan; ve

3. $x_1(1)\leq x_2(1)$

olması gerekir. Eğer $x_1(1)<x_2(1)$ ise bir yamuksal yapılı $\overline{X}_c$ fuzzy sayısı elde edilir.

Yeni Çözümler:

1.8 Genişleme Prensibi Çözümü

Eğer $\overline{X}_e$, genişleme prensibini kullanarak

$$(\overline{C}-\overline{B})/\overline{A}$$

denkleminin değeri ise bu durumda

$$\pi(a,b,c)=\min\{\overline{A}(a),\overline{B}(b),\overline{C}(c)\}$$

olmak üzere

$$\overline{X}_e(x)=\max\{\pi(a,b,c) \mid (c-b)/a=x\}$$

yazılır.Burada $(c-b)/a,\ a\neq 0$ ifadesi a,b,c de sürekli olduğundan ve $0\leq\alpha\leq 1$ için

$$\overline{X}_e(x)=[x_{e1}(\alpha),x_{e2}(\alpha)]$$

olmak üzere

$$x_{e1}(\alpha)=\min\{(c-b)/a \mid a\in\overline{A}[\alpha],b\in\overline{B}[\alpha],c\in\overline{C}[\alpha]\}$$

$$x_{e2}(\alpha)=\max\{(c-b)/a \mid a\in\overline{A}[\alpha],b\in\overline{B}[\alpha],c\in\overline{C}[\alpha]\}$$

yazılır.Böylece sonuç olarak $\overline{X}_e$ nin α kesimlerinin nasıl bulacağı hakkında bilgi verir.

Teorem 1.8.1: $\overline{X}_c$ mevcut ise $\overline{X}_c\leq\overline{X}_e$ dir.
İspat: $0\leq\alpha\leq 1,\ \overline{X}_c[\alpha]\subseteq\overline{X}_e\ [\alpha]$ olduğunu göstermek yeterdir.Bunun için önce $\alpha\in[0,1]$ ve $x\in\overline{X}_c[\alpha]$ olarak seçilir..

$[a_1(\alpha),a_2(\alpha)][x_1(\alpha),x_2(\alpha)]+[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]=[c_1(\alpha),c_2(\alpha)]$ denkleminden $a\,x+b=c$ olacak şekilde bir $a\in\overline{A}[\alpha],\ b\in\overline{B}[\alpha],\ c\in\overline{C}[\alpha]$ varolduğu bilinmektedir.Ya da $a\in\overline{A}[\alpha],\ b\in\overline{B}[\alpha],\ c\in\overline{C}[\alpha]$ için $x=(c-b)/a$ yazılır.

Bu denklemler $x_{e1}(\alpha)\leq x\leq x_{e2}(\alpha)$ ya da $x\in\overline{X}_e[\alpha]$ olduğunu gösterir.

$(\overline{C}-\overline{B})/\overline{A}$ denklemini hesaplamanın ikinci yolu ise α -kesimlerini ve aralık aritmetiğini kullanmaktır. Eğer sonuç $\overline{X}_I$ ise $0\leq\alpha\leq 1$ olmak üzere aralık aritmetiği ile basitleştirilmiş

$$\overline{X}_I[\alpha]=\frac{\overline{C}[\alpha]-\overline{B}[\alpha]}{\overline{A}[\alpha]}$$

denklemi elde edilir.

Diğer yandan $\overline{X}_I$ çözümü fuzzy denklemini sağlayabilir yada sağlamayabilir.Ayrıca burada $\overline{X}_I,\ \overline{A},\overline{B},\overline{C}$ nin hepsi üçgensel fuzzy sayıları olduğu zaman bir üçgensel yapılı fuzzy sayısı olacaktır. Bu sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenir.

1. $\overline{X}_c$ mevcut ise $\overline{X}_c\leq\overline{X}_e\leq\overline{X}_I$.

2. $\overline{X}_c$ daima fuzzy denklemini sağlar.

3. $\overline{X}_e \leq \overline{X}_I$

Fuzzy denklemlerini çözerken genel strateji;

1. $\overline{X}_c$ varolduğu zaman çözüm $\overline{X}_c$ dir.

2. $\overline{X}_c$ varolmadığı zaman çözüm $\overline{X}_e$ dir.

3. $\overline{X}_c$ varolmadığı ve $\overline{X}_e$ yi inşa etmek zor olduğu zaman yaklaşık çözüm olarak $\overline{X}_I$ kullanılır.

1.9 Fuzzy Lineer Denklem Sistemleri

$\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]$,üçgensel $\overline{a}_{ij}$ fuzzy sayılarından oluşmuş bir nxn'lik matris, $\overline{B}^t=(\overline{b}_1,...,\overline{b}_n)$ üçgensel $\overline{b}_{ij}$ fuzzy sayılarından oluşmuş bir $nx1$'lik vektör ve $\overline{X}^t=(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$,bilinmeyen üçgensel yapılı $\overline{x}_j$ fuzzy sayılarından oluşan bir $nx1$'lik vektör olsun.Bu takdirde $\overline{a}_{ij}=(a_{ij1}/a_{ij2}/a_{ij3}),\ \overline{b}_i=(b_{i1}/b_{i2}/b_{i3})$ ve $\overline{x}_j \approx (x_{j1}/x_{j2}/x_{j3})$ dir.Burada amaç $\overline{X}$ için

$$\overline{A}\,\overline{X}=\overline{B}$$

denklemini çözmektir.

1.10 Fuzzy Diferansiyel Denklemler

I aralığında x için ikinci mertebeden, lineer, sabit katsayılı adi

$$y''+a\,y'+b\,y=g(x) \tag{1.16}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım.Burada I , $T>0$ için $[0,T]$ ya da $I=[0,\infty]$ olabilir.Başlangıç şartları ise $y(0)=\gamma_0$, $y'(0)=\gamma_1$ dir. g'nin I aralığı üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim.

Burada üçgensel $\overline{\gamma_0}$ ve $\overline{\gamma_1}$ fuzzy sayıları ve $y(0)=\overline{\gamma_0}$, $y'(0)=\overline{\gamma_1}$ fuzzy başlangıç şartları için (1.18) denklemine ait çözümleri incelenir. Bu belirsizlik $\overline{\gamma_0}$ ve $\overline{\gamma_1}$ fuzzy sayıları kullanılarak modellenir.

.

Teorem 1.10.2: $a>0,\ b>0$ olduğunu kabul edelim.Eğer $\overline{Y}_c(x)$ var ise bu durumda $\overline{Y}_c(x)\leq\overline{Y}_e(x)$ dir. Ayrıca daima $\overline{Y}_e(x)\leq\overline{Y}_I(x)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: $a>0,\ b>0$ olarak kabul edildiğinden dolayı $\overline{Y}_c(x)$ çözümü kolayca bulunur.Burada $\overline{Y}_c(x)[\alpha]=[y_1(x,\alpha),y_2(x,\alpha)]$ olsun. Böylece $x\in I$, $\alpha\in[0,1]$, $i=1,2$ için

$$y_i''(x,\alpha)+a\,y_i'(x,\alpha)+b\,y_i(x,\alpha)=g(x) \tag{1.17}$$

yazılır. Burada ayrıca $y_i(x,\alpha)$ 'nin

$$y_1(0,\alpha)=\gamma_{01}(\alpha),\ y_2(0,\alpha)=\gamma_{02}(\alpha),\ y_1^{'}(0,\alpha)=\gamma_{11}(\alpha), y_2^{'}(0,\alpha)=\gamma_{12}(\alpha) \qquad (1.18)$$

başlangıç şartlarını sağladığı görülür. Böylece

$$y(x)=f_1(\gamma_{01}(\alpha),\gamma_{11}(\alpha))y_1(x)+f_2(\gamma_{01}(\alpha),\gamma_{11}(\alpha))y_2(x)+\phi(x) \qquad (1.19)$$

denklemi ile bu denklemin sağ tarafı tek çözüm olduğundan

$$y(x)=f_1(\gamma_0,\gamma_1)y_1(x)+f_2(\gamma_0,\gamma_1)y_2(x)+\phi(x)$$

$$y_{e1}(x,\alpha)=\min\{f_1(\gamma_0,\gamma_1)y_1(x)+f_2(\gamma_0,\gamma_1)y_2(x)+\phi(x)\ |\gamma_0\in\overline{Y_0}[\alpha],\gamma_1\in\overline{Y_1}[\alpha] \qquad (1.20)$$

elde edilir.
Bundan dolayı (1.20) denkleminden

$$y_{e1}(x,\alpha)\le y_1(x,\alpha) \qquad (1.24)$$

bulunur.
Benzer olarak

$$y_2(x,\alpha)\le y_{e2}(x,\alpha) \qquad (1.25)$$

elde edilir. Sonuç olarak $x\in I$ olmak üzere $\overline{Y}_c(x)\le\overline{Y}_e(x)$ dır.Buradan da

$$y_{e2}(x,\alpha)=\max\{f_1(\gamma_0,\gamma_1)y_1(x)+f_2(\gamma_0,\gamma_1)y_2(x)+\phi(x)\ |\gamma_0\in\overline{Y_0}[\alpha],\gamma_1\in\overline{Y_1}[\alpha \qquad (1.26)$$

çıkar.

1.11 Fuzzy Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bazı $M_1>0,\ M_2>0$ için $I_1=[0,M_1],\ I_2=[0,M_1]$ ve. $F(x,y,k),\ 1\le i\le n$ olmak üzere J_i aralığındaki k_i sabitlerinin bir $k=(k_1,...,k_n)$ vektörü ve aynı zamanda $(x,y)\in I_1\times I_2$ içinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bundan başka $\phi(D_x,D_y)$ operatörü D_x (D_y), $x(y)$ 'ye göre kısmi türevler olmak üzere sabit katsayılar ile birlikte D_x ve D_y de bir polinom olsun.Örneğin; a,b,c sabit operatörler olmak üzere

$$\phi(D_x,D_y)=aD_x^2-bD_xD_y-cD_y^2 \qquad (1.27)$$

biçiminde yazılır.Ayrıca $\phi(D_x,D_y)U(x,y)$, $I_1\times I_2$ üzerinde sürekli olduğundan $z=U(x,y)$, bir fonksiyon olsun.Diğer yandan Reel Sayılar cümlesinin $I_1\times I_2\times\prod(J_i)$ üzerindeki sürekli F için crisp (fuzzy olmayan)

$$\phi(D_x, D_y)U(x,y) = F(x,y,k) \tag{1.28}$$

denklemi kesin sınır şartlarına sahip olsun. Bu sınır şartları zaman zaman

$$U(0,y) = c_1,\; U(x,0) = c_2, U(M_1,y) = c_3, ...,$$

$$U(0,y) = g_1(y,c_4), U(x,0) = f_1(x,c_5), ...,$$

$$U_x(x,0) = f_2(x,c_6),\; U_y(0,y) = g_2(y,c_7), ...$$

olacak şekilde çeşitli formlarda ortaya çıkar. Bu noktada $1 \le i \le m$ olacak şekilde sınır şartlarının L_i aralığında , $c_1, c_2, ...c_m$ sabitlerine bağlı olduğunu söylemeksizin herhangi bir özel sınır şartlarının belirlenmesi gerekir.Diğer yandan $c = (c_1, c_2, ...c_m)$ bu sabit vektör olsun.

Böylece birleştirilmiş sınır şartları ile birlikte problemin ((9.2) denkleminin) $I_1 \times I_2$, $k \in J = \Pi J_i$, $c \in L = \Pi L_i$ üzerinde sürekli olan $\phi(D_x, D_y)G(x,y,k,c)$ ile bir tek $z = G(x,y,k,c)$ çözümü mevcuttur. Elementer kelimesi ile anlatılmak istenen $G(x,y,k,c)$'nin seriler (Fourier, Bessel,Legendre ,…) vasıtasıyla tanımlı olmadığıdır. Ayrıca burada $G(x,y,k,c)$ çözümü kapalı formda verilir. $G(x,y,k,c)$ yi bulanıklaştırmaya ihtiyacımız olduğundan fuzzy sayılarının bir sonsuz serisini fuzileştirmeyi istemeyiz. Fuzzy sayılarının sonsuz seriler teorisi tam olarak çözülemedi, böylece bu yapıdan kaçınmak gerekir.

k_i ve c_j sabitlerinin bazısı ya da hepsi tam olarak bilinemez ve bu belirsizlik üçgensel fuzzy sayılarını kullanılarak modellenir. Böylece , $1 \le i \le n,\; J_i$ ve $1 \le i \le m,\; L_i$ de $\overline{C_i}$ tanımlı olmak üzere c_i için üçgensel $\overline{C}_i$ fuzzy sayısı yazılır $\overline{F}(x,y,\overline{K})$, $\overline{K} = (\overline{K}_1, ..., \overline{K}_n)$'e sahip olmak üzere $\overline{F}$'yi elde etmek için genişleme prensibi kulanılır. Ayrıca $\overline{F}(x,y,\overline{K})[\alpha] = [F_1(x,y,\alpha), F_2(x,y,\alpha)]$ ise bütün $\alpha \in [0,1],\; (x,y) \in I_1 \times I_2$ için $\overline{K}[\alpha] = \prod \overline{K}_i[\alpha]$ olmak üzere

$$F_1(x,y,\alpha) = \min\{F(x,y,k) \mid k \in \overline{K}[\alpha]\},$$

$$F_2(x,y,\alpha) = \max\{F(x,y,k) \mid k \in \overline{K}[\alpha]\}$$

dır.

$U(x,y)$ fonksiyonu, $I_1 \times I_2$ den fuzzy sayılarına $\overline{U}(x,y)$ dönüşümüdür.Yani, $\overline{Z} = \overline{U}(x,y), (x,y) \in I_1 \times I_2$ olmak üzere $\overline{Z}$ bir fuzzy sayısıdır. L_j'deki bütün üçgensel $\overline{C}_j$ fuzzy sayıları , J_i'deki bütün üçgensel $\overline{K}_i$ fuzzy sayıları ve, $\overline{K} = (\overline{K}_1, ..., \overline{K}_n)$, $\overline{C} = (\overline{C}_1, ..., \overline{C}_n)$ için $z = G(x,y,k,c)$ çözümünü $\overline{Z} = G(x,y,\overline{K},\overline{C})$'ye fuzileştirir.Ayrıca $\overline{G}$ genişleme prensibi hesaplanır. $\overline{G}(x,y,\overline{K},\overline{C})[\alpha] = [g_1(x,y,\alpha), g_2(x,y,\alpha)]$ olsun. Bu durumda bütün x,y,α ve $\overline{C}[\alpha] = \prod \overline{C}_j[\alpha]$ için

$$g_1(x,y,\alpha)=\min\{G(x,y,k,c)\,\big|\,k\in \overline{K}[\alpha], c\in \overline{C}[\alpha]\}$$
$$g_2(x,y,\alpha)=\max\{G(x,y,k,c)\,\big|\,k\in \overline{K}[\alpha], c\in \overline{C}[\alpha]\} \qquad (1.29)$$

dir.Diğer sınır şartlarına ait fuzzy kısmi diferansiyel denklem

$$\phi(D_x,D_y)\overline{U}(x,y)=\overline{F}(x,y,\overline{K}) \qquad (1.30)$$

ve buna ilişkin fuzzy sınır şartları da

$$\overline{U}(0,y)=\overline{C}_1,\ \overline{U}(x,0)=\overline{C}_2,\ \overline{U}(M_1,y)=\overline{C}_3,...,$$

$$\overline{U}(0,y)=\overline{g}_1(y,\overline{C}_4),\overline{U}(x,0)=\overline{f}_1(x,\overline{C}_5),...,$$

$$\overline{U}_x(x,0)=\overline{f}_2(x,\overline{C}_6),\overline{U}_y(x,0)=\overline{g}_2(y,\overline{C}_7),...$$

dır.Burada $\overline{f}_i$ ve $\overline{g}_i$ 'lerde ,sırasıyla f_i ve g_i nin genişleme prensibi açılımlarıdır.

1.11.1 Klasik Çözüm

$\overline{Y}_c(x,y)$,klasik çözümü göstersin. $\overline{Y}_c(x,y)$ aynı zamanda $(x,y)\in I_1\times I_2$ için bir üçgensel yapılı fuzzy sayısı olsun. Bütün $(x,y)\in I_1\times I_2$ ve $\alpha\in[0,1]$ için $\overline{Y}_c(x,y)[\alpha]=[y_1(x,y,\alpha),y_2(x,y,\alpha)]$ olarak tanımlayalım. $y_i(x,y,\alpha)$ 'nın sürekli kısmilere sahip olduğunu kabul edelim.Böylece, $\phi(D_x,D_y)\,y_i(x,y,\alpha)$ $(x,y)\in I_1\times I_2$, $\alpha\in[0,1]$, $i=1,2$ için süreklidir. $\overline{Y}_c(x,y)$ 'nın $\alpha-$kesimleri (1.30) fuzzy kısmi diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(D_x,D_y)[y_1(x,y,\alpha),y_2(x,y,\alpha)]=[F_1(x,y,\alpha),F_2(x,y,\alpha)] \qquad (1.31)$$

elde edilir. $y_1(x,y,\alpha)$ ve $y_2(x,y,\alpha)$ çözümleri için aralık aritmetiği kullanılırsa iki denklem üreten (1.31) denklemi daha da basitleştirilebilir.Daha sonra (1.31) denklemine fuzzy sınır şartlarını ilave edilir.Şimdi $\overline{U}(0,y)=\overline{C}_1$, $\overline{U}(M_1,y)=\overline{C}_2$ olduğunu kabul edelim.Bu durumda $\overline{C}_1[\alpha]=[c_{11}(\alpha),\ c_{12}(\alpha)]$, $\overline{C}_2[\alpha]=[c_{21}(\alpha),\ c_{22}(\alpha)]$ olmak üzere

$$y_1(0,y,\alpha)=c_{11}(\alpha),$$

$$y_2(0,y,\alpha)=c_{12}(\alpha),$$

$$y_1(M_1,y,\alpha)=c_{21}(\alpha),$$

$$y_2(M_1,y,\alpha)=c_{22}(\alpha)$$

şartları (1.31) denklemi ile birlikte göz önüne alınırsa $i=1,2$ olmak üzere sınır şartları ile birlikte denklemin $y_i(x,y,\alpha)$ çözümü bulunur. Bütün $(x,y)\in I_1\times I_2$ için $0\le\alpha\le 1$ olmak üzere $[y_1(x,y,\alpha), y_2(x,y,\alpha)]$ bir üçgensel yapılı fuzzy sayısını göstermek üzere $\overline{Y}_c(x,y)$ bir çözümdür.

1.11.2 Genişleme Prensibi Çözümü

Genişleme prensibi çözümü $\overline{Y}_e(x,y)$ olarak yazılır ve onun $\alpha-$kesimleri (1.29) denklemlerindeki $G(x,y,k,c)$ 'nin fuzileştirilmesi ile doğrudan ilgilidir.Bu ise bütün x,y,α için

$$\overline{Y}_e(x,y)[\alpha]=[g_1(x,y,\alpha), g_2(x,y,\alpha)]$$

demektir. $\overline{Y}_e$ 'nin bir çözüm olması için onun sınır şartları ile birlikte kısmi diferansiyel denklemi sağlaması gerekir.Yani $\overline{Y}_e$ 'nin bir çözüm olabilmesi için

$$\phi(D_x,D_y)\,g_1(x,y,\alpha)=F_1(x,y,\alpha),$$

$$\phi(D_x,D_y)\,g_2(x,y,\alpha)=F_2(x,y,\alpha),$$

denklemleri fuzzy sınır şartları ile sağlanmalıdır.

Theorem 1.11.3 a) $\overline{Y}_e$ 'nin bir çözüm olabilmesi için $1\le i\le n$, $(x,y)\in I_1\times I_2$, $k\in\prod J_i$ olmak üzere

$$\frac{\partial G}{\partial k_i}\frac{\partial F}{\partial k_i}>0,$$

sağlanmalıdır.

b) i, $(x,y)\in I_1\times I_2$, $k\in\prod J_i$ için

$$\frac{\partial G}{\partial k_i}\frac{\partial F}{\partial k_i}<0,$$

ise, $\overline{Y}_e$ bir çözüm değildir.

II. BÖLÜM

Fuzzy Kavramı

Günlük hayatımızda değişik biçimlerde ortaya çıkan karmaşıklık ve belirsizlik gibi tam ve kesin olmayan bilgi kaynaklarına **bulanık (fuzzy)** kaynaklar adı verilir.

Bulanık ilkeler hakkında ilk bilgiler, Azerbeycan asıllı Lütfu Askerzade (Zadeh, 1965) tarafından literatüre mal edilmesine karşılık, bu fikirler Batı dünyasında şüphe ile karşılanmış ve oldukça yoğun tenkit almıştır. Ancak, 1970 yıllarından sonra Doğu dünyasında ve özellikle de Japonya'da bulanık mantık ve sistem kavramlarına önem verilmiştir.Bunların, teknolojik cihaz yapım ve işleyişinde kullanılması bugün bütün dünyada yaygın hale gelmiştir.Batı'da gecikmesinin ana sebebi Batı kültürünün temelinde ikili mantık,yani Aristo mantığının yatması ve olaylara evet-hayır,beyaz-siyah,kurak-sulak,artı-eksi,0-1 vb. gibi ikili esasta yaklaşılmalıdır. Bu iki değer arasında başka seçeneklere kesin değil düşüncesi ile yer verilmezdi. Batı'da bulanık kelimesi güvensizliği ifade eder.Doğu'da ise bu güvensizlikte bile güzelliklerin bulunabileceği düşüncesi vardır.

Bulanık kavram ve sistemlerin dünyanın değişik araştırma merkezlerinde dikkat kazanması 1975 yılında Mamdani ve Assilian tarafından yapılan gerçek bir kontrol uygulaması ile olmuştur.Bu araştırıcılar ilk defa bir buhar makinası kontrolünün bulanık sistem ile modellenmesini başarmıştır.Bu ön çalışmadan, bulanık sistemlerle çalışmanın ne kadar kolay ama sonuçlarının da ne kadar etkili olduğu anlaşılmıştır.

Daha sonraki yıllarda bulanık sistem uygulaması bir çimento fabrikasının işletilmesi ve kontrolü için yapılınca;artık bulanık kavramlar dünyanın birçok yerinde yavaş yavaş kullanılmaya başlanmıştır.Bu faaliyet, Batı'da çok yavaş olurken,Doğu'da ve özellikle de Japonya, Singapur, Kore ve Malezya'da kendisini daha fazla göstermiştir.Teknolojiye duyarlı olan Japon mühendisleri bulanık kontrol birimlerini kurmanın ne kadar kolay olduğunu görerek, bunları birçok cihazın yapımında kullanmaya başlamışlardır.

Fuzzy Denklemlerinin Çözümü

Bu bölümde ilk olarak $\overline{A}.\overline{X}+\overline{B}=\overline{C}$ basit fuzzy lineer denklemine ait farklı tipte çözümlere bakılacaktır.

$$\overline{A}.\overline{X}+\overline{B}=\overline{C}$$

denkleminde $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ üçgensel fuzzy sayıları olmak üzere $\overline{A}=(a_1/a_2/a_3)$, $\overline{B}=(b_1/b_2/b_3)$, $\overline{C}=(c_1/c_2/c_3)$ biçimindedir.Eğer $\overline{X}$ mevcut ise üçgensel yapılı bir fuzzy sayısı mevcut olacaktır ve böylece $\overline{X}\approx(x_1/x_2/x_3)$ dır.

Örnek 2.1 Üçgensel $\overline{A}=(1/2/3)$, $\overline{B}=(-3/-2/-1)$ ve $\overline{C}=(3/4/5)$ fuzzy sayılarını göz önüne alalım. Bunlar için bir çözümün mevcut olup olmadığına bakalım. İlk olarak bu fuzzy sayılarının α kesimlerini oluşturalım

$\overline{A}[\alpha]=[1+\alpha,3-\alpha]$, $\overline{B}[\alpha]=[-3+\alpha,-1-\alpha]$, $\overline{C}[\alpha]=[3+\alpha,5-\alpha]$

dır. $\overline{A}>0$ ve $\overline{C}>0$ olduğundan, $\overline{X}_c>0$ olmalıdır.

$$[a_1(\alpha),a_2(\alpha)][x_1(\alpha),x_2(\alpha)]+[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]=[c_1(\alpha),c_2(\alpha)]$$

denkleminden

$$[a_1(\alpha)x_1(\alpha)+b_1(\alpha),a_2(\alpha)x_2(\alpha)+b_2(\alpha)=[c_1(\alpha),c_2(\alpha)]$$

ya da

$$x_1(\alpha)=\frac{6}{1+\alpha},$$
$$x_2(\alpha)=\frac{6}{3-\alpha}$$

bulunur. Burada $x_1(\alpha)$ azalan $x_2(\alpha)$ artandır. Böylece $\overline{X}_c$ mevcut değildir.

Örnek 2.2 Üçgensel fuzzy sayıları $\overline{A}=(8/9/10)$, $\overline{B}=(-3/-2/-1)$ ve $\overline{C}=(3/5/7)$ olsun.Bu durumda $\overline{A}[\alpha]=[8+\alpha,10-\alpha]$, $\overline{B}[\alpha]=[-3+\alpha,-1-\alpha]$,$\overline{C}[\alpha]=[3+2\alpha,7-2\alpha]$ dır.Böylece

$$x_1(\alpha)=\frac{6+\alpha}{8+\alpha}$$
$$x_2(\alpha)=\frac{8-\alpha}{10-\alpha}$$

elde edilir. $x_1(\alpha)$ artan , $x_2(\alpha)$ azalan ve $x_1(1)=7/9=x_2(1)$ olduğundan α -kesimleri $[x_1(\alpha),x_2(\alpha)]$ olmak üzere $\overline{X}_c$ mevcuttur.

2.1. Fuzzy Lineer Denklem

Bir satıcı 1000 parçalık malın her bir parçasını 150\$' dan satın almıştır.Satıcı malların %40'ını $(\overline{A}=(0.30/0.40/0.50))$ yaklaşık olarak % 25 'lik $(\overline{B}=(0.15/0.25/0.35)$ bir kar ile satmak istemektedir. Satıcının bütün parçalardan ortalama olarak %40 $(\overline{C}=(0.35/0.40/0.45))$ civarında bir kazanç sağlaması için malların geri kalanı ne kadara (hangi $\overline{P}$ fiyatı ile) satmalıdır. Çözülmek istenen fuzzy denklemi

$$(1000\overline{A})(150\overline{B})+(1000-1000\overline{A})(\overline{P}-150)=(1000)(150)\overline{C}$$

olup, buradan üçgensel fuzzy sayılarının α kesimleri

$$\overline{A}[\alpha]=[0.30+0.10\alpha, 0.50-0.10\alpha]$$

$$\overline{B}[\alpha]=[0.15+0.10\alpha, 0.35-0.10\alpha]$$

$$\overline{C}[\alpha]=[0.35+0.05\alpha, 0.45-0.05\alpha]$$

biçiminde yazılır .Şimdi ise .

$\overline{P}[\alpha]=[p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ ve $\overline{P}>150$ olarak kabul edelim.İlk olarak ,klasik çözüme bakalım. $p_1(\alpha)$'nın çözümü için,

$$(1000\overline{A})(150\overline{B})+(1000\overline{P}-15.10^4-1000\overline{A}\ \overline{P}+15.10^4\ \overline{A}= 15.10^4\ \overline{C}$$

denkleminden

$$\overline{P}(1000-1000\overline{A})=15.10^4\ \overline{C}-15.10^4\ \overline{A}\overline{B}+15.10^4-15.10^4\ \overline{A}$$

$$\overline{P}\ 1000(1-\overline{A})=150000\overline{C}-150000\overline{A}\overline{B}+150000-150000\overline{A}$$

$$\overline{P}(1-\overline{A})=150(1-\overline{A}-\overline{A}\ \overline{B}+\overline{C})$$

$$\overline{P}=150(1+\frac{\overline{C}-\overline{A}\overline{B}}{1-\overline{A}})$$

bulunur. Buradan

$$\overline{P_1}(\alpha)=150\left(1+\frac{c_{11}(\alpha)-a_{11}(\alpha)b_{11}(\alpha)}{1-a_{12}(\alpha)}\right)$$

$$\overline{P_2}(\alpha)=150\left(1+\frac{c_{12}(\alpha)-a_{12}(\alpha)b_{12}(\alpha)}{1-a_{11}(\alpha)}\right)$$

olup,

$$a_{11}(\alpha)=0.30+0.10\alpha \qquad a_{12}(\alpha)=0.50-0.10\alpha$$

$$b_{11}(\alpha)=0.15+0.10\alpha \qquad b_{12}(\alpha)=0.35-0.10\alpha$$

$$c_{11}(\alpha)=0.35+0.05\alpha \qquad c_{12}(\alpha)=0.45-0.05\alpha$$

yazılır. Böylece

$$\overline{P_1}(\alpha)=150\left(1+\frac{(0.35+0.05\alpha)-(0.30+0.10\alpha)(0.15+0.10\alpha)}{1-(0.50-0.10\alpha)}\right)$$

$$\overline{P_1}(\alpha)=150\left(1+\frac{0.35+0.05\alpha\ -\ 0.045-0.03\alpha-0.015\alpha\ -0.01\alpha^2\ )}{0.50+0.10\alpha}\right)$$

$$\overline{P_1}(\alpha)=150\left(1+\frac{(-0.01\alpha^2-0.005\alpha+0.305)}{0.50+0.10\alpha}\right)$$

elde edilir.Buradan

$$\frac{\partial P_1}{\partial\alpha}=\frac{150(-0.02\alpha-0.005)(0.50+0.10\alpha)-(0.10)(-0.01\alpha^2-0.005\alpha+0.305)}{(0.50+0.10\alpha)^2}$$

$$=\frac{150[(-0.001\alpha-0.002\alpha^2-0.0025-0.0005\alpha)-(0.001\alpha^2+0.0005\alpha-0.0305)]}{(0.50+0.10\alpha)^2}$$

$$=\frac{150[(-0.001-0.0005+0.0005)\alpha+(-0.002+0.001)\alpha^2-(-0.0025-0.0305)]}{(0.50+0.10\alpha)^2}$$

$$=\frac{150[(-0.0015+0.0005)\alpha-(-0.001)\alpha^2-(0.0330)]}{(0.50+0.10\alpha)^2}$$

$$=\frac{150[\ -0.001\alpha+\ 0.001\ \alpha^2-0.0330\ ]}{(0.50+0.10\alpha)^2}<0$$

ifade edilir. Halbuki $\alpha\in\left[\,0,1\,\right]$ için p_1, α nın azalan bir fonksiyonudur.O halda klasik çözüm mevcut değildir.Diğer yandan denklemin Crisp çözümü $(a,b,c\in(0,1))$

$$p = 150\left(1 + \frac{c - ab}{1 - a}\right)$$

dir. Ayrıca $\overline{P}_e$ yi elde etmek için ise crisp çözümünün fuzileştirilmesi gerekir. $\overline{P}_e$ nin α-kesimleri ise

$$p_{e1}(\alpha) = \min\{\, p \mid a \in \overline{A}[\alpha], b \in \overline{B}[\alpha], c \in \overline{C}[\alpha]\}$$

$$p_{e2}(\alpha) = \max\{\, p \mid a \in \overline{A}[\alpha], b \in \overline{B}[\alpha], c \in \overline{C}[\alpha]\}$$

olup, buradan

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}[150(1 + \frac{c - ab}{1 - a})] = 150[\frac{-b(1-a) + (c - ab)}{(1-a)^2}]$$

$$= 150\left(\frac{-b + ab + c - ab}{(1-a)^2}\right)$$

$$= 150\left(\frac{c - b}{(1-a)^2}\right) > 0$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}[150(1 + \frac{c - ab}{1 - a})] = 150[\frac{-a(1-a)}{(1-a)^2}]$$

$$= 150\left(\frac{-a(1-a)}{(1-a)^2}\right)$$

$$= 150\left(\frac{-a}{(1-a)} < 0\right)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial P}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}[150(\frac{(1-a)}{(1-a)^2})] = 150\frac{1}{(1-a)} > 0$$

olduğundan böylece

$$\overline{P}_e[\alpha]=150+150\,I[\alpha]$$

$$I[\alpha]=[i_1(\alpha],i_2(\alpha)]$$

olup

$$i_1[\alpha]=\frac{c_1(\alpha)-a_1(\alpha).b_2(\alpha)}{1-a_1(\alpha)}=\frac{(0.35+0.05\alpha)-(0.30+0.10\alpha)(0.35-0.10\alpha)}{0.70-0.10\alpha}$$

$$=\frac{0.01\alpha^2+0.045\alpha+0.245}{0.70-0.10\alpha}$$

ve

$$i_2[\alpha]=\frac{c_2(\alpha)-a_2(\alpha).b_1(\alpha)}{1-a_2(\alpha)}=\frac{(0.45-0.05\alpha)-(0.50-0.10\alpha)(0.15+0.10\alpha)}{0.50+0.10\alpha}$$

$$=\frac{0.01\alpha^2-0.085\alpha+0.375}{0.50+0.10\alpha}$$

elde edilir.

2.2. Fuzzy Kuadratik Denklem

Bir yatırım firmasının yaklaşık 1 milyon doları $(\overline{A}=(0.8/1.0/1.2))$, $\overline{r}$ faiz oranı ile bankaya yatırdığını,bu fuzzy sayısının tabanı $[0,1]$ olmak üzere ve bir yıl sonra yaklaşık olarak $250.000\$$ $\overline{B}=(0.20/0.25/0.30)$ olarak çekeceğini kabul edelim.İki yıl sonra bu miktar $900.000\$$ $(\overline{C}=(0.6/0.9/1.2))$ civarında olacaktır.Bu denklemi $\overline{r}$ için çözünüz.

Bir yıl sonra miktar $\overline{A}+\overline{A}\overline{r}$ olacaktır. Şimdi $\overline{B}$ doları geri alırsak, ikinci yılın sonunda $(\overline{A}-\overline{B})+\overline{A}\,\overline{r}$ miktarına sahip ulaşılır. İkinci yılın sonunda ise;

$$[(\overline{A}-\overline{B})+\overline{A}\overline{r}]+[(\overline{A}-\overline{B})+\overline{A}\overline{r}]\overline{r} \qquad (2.2.1)$$

olur. Pozitif fuzzy sayıları için çarpımın ,toplama üzerinde dağılması ve (2.2.1) denklemi için bu durum göz önüne alınırsa

$$[\ \overline{A}-\overline{B}+\overline{A}\overline{r}+\overline{A}\overline{r}-\overline{B}\overline{r}+\overline{A}(\overline{r})^2\ ]$$

$$\overline{A}(\overline{r})^2+(2\overline{A}-\overline{B})\overline{r}+(\overline{A}-\overline{B})$$

yazılır. Burada ise $\overline{D}=2\overline{A}-\overline{B},\quad \overline{E}=\overline{A}-\overline{B}$ dir

Şimdi $\overline{r}$ için

$$\overline{A}(\overline{r})^2+\overline{D}\overline{r}+\overline{E}=\overline{C} \qquad (2.2.2)$$

biçimindeki fuzzy kuadratik denklemini çözelim. Bunun için .

$\overline{r}[\alpha]=[r_1(\alpha),r_2(\alpha)],$ $\qquad$ $\overline{A}[\alpha]=[0.8+0.2\alpha,1.2-0.2\alpha]$

$\overline{B}[\alpha]=[0.20+0.05\alpha,0.30-0.05\alpha]$ $\qquad$ $\overline{C}[\alpha]=[0.6+0.3\alpha,1.2-0.3\alpha]$

olarak ifade edilir.Ayrıca aralık aritmetiğine göre $[a_1,b_1]$ ve $[a_2,b_2]$ iki kapalı ,sınırlı,reel sayılar aralığı olsun.Eğer $*$, toplama, çıkarma, çarpma ya da bölme işlemini gösterir ise bu durumda

$$[\alpha,\beta]=\{a*b \mid a_1\le a\le b_1, a_2\le a\le b_2\} \qquad (2.2.3)$$

olmak üzere

$$[a_1,b_1]*[a_2,b_2]=[\alpha,\beta]$$

dır.Eğer $*$ bölme işlemi ve sıfırın $[a_2,b_2]$ aralığına ait olmadığını kabul edilirse,

$$\alpha=\min\{a_1a_2,a_1b_2,b_1a_2,b_1b_2\}$$

$$\beta=\max\{a_1a_2,a_1b_2,b_1a_2,b_1b_2\}$$

olmak üzere (2.8) denklemi

$$[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,b_1+b_2]$$

$$[a_1,b_1]-[a_2,b_2]=[a_1-b_2,b_1-a_2]$$

$$[a_1,b_1]/[a_2,b_2]=[a_1,b_1].[\frac{1}{b_2},\frac{1}{a_2}]$$

ve

$$[a_1,b_1].[a_2,b_2]=[\alpha,\beta]$$

şeklinde bulunur. Burada $a_1>0$ ve $b_2<0$ ya da $b_1>0$ ve $b_2<0$ olduğu biliniyorsa, çarpma ve bölme işlemi daha da kolaylaştırılabilir.

Örneğin $a_1\ge 0$ ve $a_2\ge 0$ ise bu durumda;

$$[a_1,b_1].[a_2,b_2]=[a_1a_2,b_1b_2]$$

ve eğer $b_1<0$ fakat $a_2\geq 0$ ise

$$[a_1,b_1].[a_2,b_2]=[a_1b_2,a_2b_1]$$

olur.

Ayrıca $b_1<0$ ve $b_2<0$ olarak kabul edilmesiyle;

$$[a_1,b_1].[a_2,b_2]=[b_1b_2,a_1a_2]$$

fakat $a_1\geq 0$, $b_2<0$

$$[a_1,b_1].[a_2,b_2]=[a_2b_1,b_2a_1]$$

üretir. Buradan ise

$$\overline{D}[\alpha]=2\overline{A}[\alpha]-\overline{B}[\alpha]=[2a_1,2a_2]-[b_1,b_2]$$

$$=\{2a_1-b_2,2a_2-b_1\}$$

$$\overline{A}[\alpha]=[a_1(\alpha),a_2(\alpha)]=[0.8+0.2\alpha,1.2-0.2\alpha]$$

$$\overline{B}[\alpha]=[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]=[0.20+0.05\alpha,0.30-0.05\alpha]$$

$$\overline{C}[\alpha]=[c_1(\alpha),c_2(\alpha)]=[0.6+0.3\alpha,1.2-0.3\alpha]$$

Ayrıca $b_1<0$ ve $b_2<0$ olarak kabul edilmesiyle;

$$[a_1,b_1].[a_2,b_2]=[b_1b_2,a_1a_2]$$

fakat $a_1\geq 0$, $b_2<0$

$$[a_1,b_1].[a_2,b_2]=[a_2b_1,b_2a_1]$$

üretir.Böylece

$$\overline{D}[\alpha]=2\overline{A}[\alpha]-\overline{B}[\alpha]=[2a_1,2a_2]-[b_1,b_2]$$

$$=\{2a_1-b_2,2a_2-b_1\}$$

$$\overline{A}[\alpha]=[a_1(\alpha),a_2(\alpha)]=[0.8+0.2\alpha,1.2-0.2\alpha]$$

$$\overline{B}[\alpha]=[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]=[0.20+0.05\alpha,0.30-0.05\alpha]$$

$$\overline{C}[\alpha]=[c_1(\alpha),c_2(\alpha)]=[0.6+0.3\alpha,1.2-0.3\alpha]$$

$$\overline{D}[\alpha]=\{2(0.8+0.2\alpha)-(0.30-0.05\alpha),2(1.2-0.2\alpha)-(0.20+0.05\alpha)\}$$

$$=\{1.6+0.4\alpha-0.30+0.05\alpha,2.4-0.4\alpha-0.20-0.05\alpha\}$$

$$=\{1.3+0.45\alpha,2.2-0.45\alpha\}$$

$$\overline{E}[\alpha]=\overline{A}[\alpha]-\overline{B}[\alpha]=[0.8+0.2\alpha,1.2-0.2\alpha]-[0.20+0.05\alpha,0.30-0.05\alpha]$$

$$=[0.8+0.2\alpha-0.30+0.05\alpha,1.2-0.2\alpha-0.20-0.05\alpha]$$

$$\overline{E}[\alpha]=[0.5+0.25\alpha,1-0.25\alpha]$$

bulunur.

Şimdide Aralık aritmetiğini kullanarak (2.2.2) denkleminin $r_1(\alpha)$ ve $r_2(\alpha)$ nın çözümü için $\alpha-$kesimlerini göz önüne alalım. $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ iki fuzzy sayısı olsun. $\alpha-$kesimlerinin kapalı sınırlı aralıklar olduğunu bilindiğinden ,böylece

$$\overline{A}[\alpha]=[a_1(\alpha),a_2(\alpha)], \qquad \overline{B}[\alpha]=[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]$$

dır.Bu durumda $\overline{C}=\overline{A}+\overline{B}$ ise

$$\overline{C}[\alpha]=\overline{A}[\alpha]+\overline{B}[\alpha]$$

yazılır.Eğer $\overline{C}=\overline{A}-\overline{B}$ ise bütün $\alpha\in[0,1]$ için

$$\overline{C}[\alpha]=\overline{A}[\alpha]-\overline{B}[\alpha]$$

elde edilir.Ayrıca, $\overline{C}=\overline{A}.\overline{B}$ için

$$\overline{C}[\alpha]=\overline{A}[\alpha].\overline{B}[\alpha]$$

ve buradan da $\overline{C}=\overline{A}/\overline{B}$ olduğu zaman,

$$\overline{C}[\alpha]=\overline{A}[\alpha]/\overline{B}[\alpha]$$

bulunur..

Eğer $[r_1(\alpha),r_2(\alpha)],\quad 0\le\alpha\le1$ bir fuzzy sayısını tanımlar ise bu bir klasik çözümdür.($[0,1]$ de bir tek çözüm). $r_1(\alpha)$ için denklem

$$(0.8+0.2\alpha)r_1^2(\alpha)+(1.3+0.45\alpha)r_1(\alpha)+(-0.1-0.05\alpha)=0$$

olup bu durumda

$$w(\alpha)=(1.3+0.45\alpha)^2+4(0.8+0.2\alpha)(0.1+0.05\alpha)$$

ve

$$r_{11}(\alpha)=\frac{-(1.3+0.45\alpha)+\sqrt{w(\alpha)}}{2(0.8+0.2\alpha)}$$

elde edilir. Benzer olarak $r_{12}(\alpha)$ için aynı işlemler yapılırsa

$$r_{12}(\alpha)=\frac{-(1.3+0.45\alpha)-\sqrt{w(\alpha)}}{2(0.8+0.2\alpha)}.$$

bulunur. Böylece

$$\sqrt{w(\alpha)}=\sqrt{(1.3+0.45\alpha)^2+4(0.8+0.2\alpha)(0.1+0.05\alpha)}$$

$$=\sqrt{0.2425\alpha^2+1.41\alpha+2.01}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial\sqrt{w(\alpha)}}{\partial\alpha}=\frac{0.485\alpha+1.41}{2\sqrt{0.2425\alpha^2+1.41\alpha+2.01}}$$

denkleminden

$$\frac{\partial(r_{11}(\alpha))}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{-(1.3+0.45\alpha)+\sqrt{w(\alpha)}}{2(0.8+0.2\alpha)}\right]$$

$$=\frac{(2.48)(\sqrt{0.2425\alpha^2+1.41\alpha+2.01})+0.0004\alpha^2+0.212\alpha+0.648}{2\sqrt{0.2425\alpha^2+1.41\alpha+2.01}}>0$$

sonucuna varılır. $r_2(\alpha)$ içinde aynı işlemler yapılırsa

$$\sqrt{w(\alpha)}=\sqrt{\left(2.2-0.45\alpha\right)^2-4\left(1.2-0.2\alpha\right)(-0.2+0.05\alpha)}$$

olmak üzere

$$r_{21}(\alpha)=\frac{-(2.2-0.45\alpha)+\sqrt{w(\alpha)}}{2(1.2-0.2\alpha)}$$

$$r_{22}(\alpha)=\frac{-(2.2-0.45\alpha)-\sqrt{w(\alpha)}}{2(1.2-0.2\alpha)}$$

kökleri elde edilir.

$$\frac{\partial(r_{21}(\alpha))}{\partial\alpha}<0$$

ve

$$r_1(1)=r_2(1)=0.08188296$$

olduğundan $\bar{r}$ mevcuttur ve çözümdür.

2.3. Populasyon Denklemi

Bir şehrin artan nüfus oranının P hızı, 200.000 (İkiyüzbin) ile populasyon arasındaki fark ve populasyona orantılıdır.

$$V=(P-200000).P.k$$

$$\frac{dP}{dt}=k.P(P-200.000)$$

$P_0>M=2.10^5$ olmak üzere denklem

$$\frac{dP}{dt}=k.P(P-200.000)$$

ya da

$$\frac{dP}{dt}=k.P(P-M)$$

şeklinde yazılır.Denklemin her iki yanının integrali alınırsa ,

$$\int\frac{dP}{P(P-200.000)}=\int k\,dt$$

$$\frac{1}{P(P-M)}=\frac{A}{P}+\frac{B}{P-M}=\frac{P(A+B)-MA}{P(P-M)}$$

$A=\frac{-1}{M},\ B=\frac{1}{M}$ olmak üzere

$$\int\left(-\frac{1}{MP}+\frac{1}{M(P-M}\right)dP=\int k\,dt$$

$$\int-\frac{1}{M}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{(P-M)}\right)dP=\int k\,dt$$

$$\int\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{P-M}\right)dP=-\int k\,M\,dt$$

$$\ln P-\ln(P-M)=-k\,M\,t+C$$

$$\ln\left(\frac{P}{P-M}\right)=-k\,M\,t+C$$

$$\frac{P}{P-M}=e^{-kMt+C}$$

$$\frac{P}{P-M}=e^{-kMt}.e^{C}$$

bulunur

$A=e^{C}$ olmak üzere denklem

$$\frac{P}{P-M}=A.e^{-kMt},\ P(0)=P_0$$

$$\frac{P_0}{P_0-M}=A.e^{0}\ \Rightarrow\ A=\frac{P_0}{P_0-M}$$

biçiminde ifade edilir. Eğer A'nın değeri çözümde yerine yazılırsa, ;

$$\frac{P}{P-M}=Ae^{-kMt}\ \Rightarrow\ P=Ae^{-kMt}(P-M)$$

$$Ae^{-kMt}M=P.(Ae^{-kMt}-1)\ \Rightarrow\ P=\frac{Ae^{-kMt}M}{Ae^{-kMt}-1}$$

$$P=\frac{(Ae^{-kMt}M)}{(Ae^{-kMt}-1)}\frac{e^{kMt}}{e^{kMt}}=\frac{MA}{A-e^{kMt}}$$

$M>P_0$ olduğunda

$$\frac{dP}{dt}=kP(M-P)\Rightarrow\int\frac{dP}{P(M-P)}=\int k\,dt$$

ve

$$\frac{1}{P(M-P)}=\frac{A}{P}+\frac{B}{(M-P)}=\frac{MA+P(B-A)}{P(M-P)}$$

$A=1/M$, $B=1/M$ olarak alındığında

$$\int\left(\frac{1}{MP}+\frac{1}{M(M-P)}\right)dP=\int kdt$$

$$\frac{1}{M}\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{(M-P)}\right)dP=\int k\,dt$$

$$\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{(M-P)}\right)dP=\int kM\,dt$$

$$\ln P-\ln(M-P)=kMt+C$$

$$\ln \frac{P}{M-P} = k M t + C$$

$$\Rightarrow \frac{P}{M-P} = e^{kMt+C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{M-P} = e^{kMt}.A$$

$$\Rightarrow P = (M-P)(e^{kMt}.A)$$

$$\Rightarrow P = M\,Ae^{kMt} - P\,Ae^{kMt}$$

$$\Rightarrow P + P\,Ae^{kMt} = M\,Ae^{kMt}$$

$$P = \frac{M\,Ae^{kMt}}{1+Ae^{kMt}}$$

bulunur. Denklemde $P(0)=P_0$ şartı yerine yazılırsa

$$\frac{P}{P-M} = Ae^{kMt}, \qquad P(0)=P_0$$

$$\Rightarrow \frac{P_0}{M-P_0} = Ae^{0}$$

$$\Rightarrow A = \frac{P_0}{M-P_0}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{M-P} = \frac{P_0}{M-P_0}\,e^{kMt}$$

$$\Rightarrow P(M-P_0) = P_0(M-P)e^{kMt}$$

$$\Rightarrow P M - P P_0 = P_0 M e^{kMt} - P_0 P e^{kMt}$$

$$\Rightarrow P M - P P_0 + P_0 P e^{kMt} = P_0 M e^{kMt}$$

$$\Rightarrow P(M - P_0 + P_0 e^{kMt}) = P_0 M e^{kMt}$$

$$\Rightarrow P=\frac{P_0\, M\, e^{kMt}}{M-P_0+P_0\, e^{kMt}}=\frac{P_0\, M\, e^{kMt}}{M+P_0\,(e^{kMt}-1)}$$

elde edilir. Burada $P_0>M$ olması durumunda

$$A=C=\frac{P_0}{P_0-M}=(C_1\,,C_2)>0$$

olup,

$$P_1(t,\alpha)=\frac{M\, c_1(\alpha)\, e^{-k_{11}(\alpha)Mt}}{c_1(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}-1}$$

ve

$$P_2(t,\alpha)=\frac{M\, c_2(\alpha)\, e^{-k_{12}(\alpha)Mt}}{c_2(\alpha)e^{-k_{12}(\alpha)Mt}-1}$$

yazılır. Buradan ise

$$P_1'(t,\alpha)=\frac{-Mc_1(\alpha)k_{11}(\alpha)M\, e^{-k_{11}(\alpha)Mt}\,(c_1(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}-1)}{\left(c_1(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}-1\right)^2}$$

$$-\frac{(M\, c_1(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt})(-c_1(\alpha)\; k_{11}(\alpha)M\, e^{-k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(c_1(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}-1\right)^2}$$

$$=\frac{-M^2\, c_1^2(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{-2k_{11}(\alpha)Mt}+M^2\, c_1(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(c_1(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}-1\right)^2}$$

$$-\frac{-M^2\, c_1^2(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{-2k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(c_1(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}-1\right)^2}$$

$$P_1'(t,\alpha)=\frac{M^2\, c_1(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{-k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(c_1(\alpha)\; e^{-k_{11}(\alpha)Mt}-1\right)^2}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde

$$P_2'(t,\alpha)=\frac{M^2 c_2(\alpha)k_{12}(\alpha)e^{-k_{12}(\alpha)Mt}}{\left(c_2(\alpha)\, e^{-k_{12}(\alpha)Mt}-1\right)^2}$$

biçiminde elde edilir. Bu denklemlerde

$P_1'(t,\alpha)>0$ olması için $(c_1 k_{11})>0$ olmalıdır, $c_1>0$ olduğundan $k_{11}>0$ olmalıdır. Benzer şekilde,

$P_2'(t,\alpha)<0$ olması için $(c_2 k_{12})<0$ olmalıdır, $c_1>0$ olduğundan $k_{12}<0$ olmalıdır.
Diğer yandan

$$g(t,k,c)=\frac{MCe^{-kMt}}{C e^{-kMt}-1}$$

olup, denklemin her iki yanının c'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial g}{\partial C}=\frac{M e^{-kMt}(Ce^{-kMt}-1)-e^{-kMt}(MCe^{-kMt})}{\left(Ce^{-kMt}-1\right)^2}$$

$$=\frac{+MC e^{-2kMt}-M e^{-kMt}-M Ce^{-2kMt}}{\left(Ce^{-kMt}-1\right)^2}$$

$$=\frac{-M e^{-kMt}}{\left(ce^{-kMt}-1\right)^2}$$

bulunur. Benzer şekilde denklemin k'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial g}{\partial k}=\frac{-M^2Ct e^{-kMt}(Ce^{-kMt}-1)-MCe^{-kMt}(-MCte^{-kMt})}{\left(Ce^{-kMt}-1\right)^2}$$

$$=\frac{M^2C t e^{-kMt}}{\left(Ce^{-kMt}-1\right)^2}>0$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{\partial f}{\partial k}=P^2-PM>0$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial k}\cdot\frac{\partial f}{\partial k}>0$$

olduğundan,

$$P=\frac{M\, Ae^{kMt}}{1+Ae^{kMt}}$$

ve

$$P_1(t,\alpha)=\frac{M\,C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}}{1+C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}}$$

$$P_2(t,\alpha)=\frac{M\,C_2(\alpha)e^{k_{12}(\alpha)Mt}}{1+C_2(\alpha)e^{k_{12}(\alpha)Mt}}$$

bulunur. İlk denklemin türevi alınırsa

$$P_1'(t,\alpha)=\frac{M\,C_1(\alpha)k_{11}(\alpha)M\,e^{k_{11}(\alpha)Mt}\,(1+C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)M}\ )}{\left(1+C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}\right)^2}$$

$$-\frac{C_1(\alpha)k_{11}(\alpha)M\,e^{k_{11}(\alpha)Mt}M\,C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(1+C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}\right)^2}.$$

$$=\frac{M^2C_1(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}+M^2C_1^2(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{2k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(1+C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}\right)^2}$$

$$-\frac{-M^2C_1^2(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{2k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(1+C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}\right)^2}$$

$$P_1'(t,\alpha)=\frac{M^2C_1^2(\alpha)k_{11}(\alpha)e^{2k_{11}(\alpha)Mt}}{\left(1+C_1(\alpha)e^{k_{11}(\alpha)Mt}\right)^2}$$

olur. Benzer düşünce ile

$$P_2'(t,\alpha)=\frac{M^2C_2^2(\alpha)k_{12}(\alpha)e^{2k_{12}(\alpha)Mt}}{\left(1+C_2(\alpha)e^{k_{12}(\alpha)Mt}\right)^2}$$

elde edilir. Aynı düşünce ile

$P_1'(t,\alpha)>0$ olması için $c_1^2.k_{11}>0$ olmalıdır. $c_1^2>0$ olduğundan $k_{11}>0$ olmalıdır.

$P_2'(t,\alpha)>0$ olması için $c_2^2.k_{12}<0$ olmalıdır. $c_2^2>0$ olduğundan $k_{12}<0$ olmalıdır.
Son olarak şimdi de Teorem 4.1 ‘in şartlarına bakalım

$$f(t,p,k)=kP(M-P)=kPM-kP^2$$

olduğundan, buradan gerekli türevler alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial P}=kM-2kP>0$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial c}=\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{MCe^{kMt}}{1+Ce^{kMt}}\right)=\frac{Me^{kMt}(1+Ce^{kMt})-e^{kMt}(MCe^{kMt})}{\left(1+Ce^{kMt}\right)^2}$$

$$\frac{Me^{kMt}+MCe^{2kMt}-MCe^{2kMt}}{\left(1+Ce^{kMt}\right)^2}=\frac{Me^{kMt}}{\left(1+Ce^{kMt}\right)^2}>0$$

ile birlikte

$$\frac{\partial g}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{MCe^{kMt}}{1+Ce^{kMt}}\right)=\frac{M^2Cte^{kMt}(1+Ce^{kMt})-MCe^{kMt}\left(CMte^{kMt}\right)}{\left(1+Ce^{kMt}\right)^2}$$

$$=\frac{M^2Cte^{kMt}+M^2C^2e^{kMt}-M^2C^2e^{2kMt}}{\left(1+Ce^{kMt}\right)^2}$$

$$=\frac{M^2Cte^{kMt}}{\left(1+Ce^{kMt}\right)^2}>0$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial k}=P(M-P)=PM-P^2>0$$

bulunur. Böylece Teorem 4.1 'in (ii) şıkkı sağlanır. O halde

$$\frac{\partial g}{\partial k}\cdot\frac{\partial f}{\partial k}>0$$

dir.

2.4. Fuzzy Diferansiyel Denklem

$\overline{Y}_c(x)$ klasik çözüm olsun ve $\overline{Y}_c(x)$, I aralığındaki tüm x değerleri için üçgensel yapılı bir sayısı olsun. Ayrıca $x\in I,\alpha\in[0,1]$ için $\overline{Y}_c(x)=[y_1(x,\alpha),y_2(x,\alpha)]$ olsun. $y_i(x,\alpha)$'nın x' e göre birinci ve ikinci türevlere sahip olduğunu kabul edelim ve bunları $i=1,2,$ için

$y_i'(x,\alpha), y_i''(x,\alpha)$ olarak gösterelim. I aralığındaki her x için ikinci mertebeden, lineer, sabit katsayılı, adi

$$y''+a\,y'+b\,y=g(x)$$

adi diferansiyel denkleminde $\overline{Y}_c(x)$ çözümünün α - kesimleri yerine yazılırsa $y_i(x,\alpha)$'nın çözümü için

$$\left[y_1''(x,\alpha), y_2''(x,\alpha)\right]+a\left[y_1'(x,\alpha), y_2'(x,\alpha)\right]+b\left[y_1(x,\alpha), y_2(x,\alpha)\right]=\left[g(x), g(x)\right] \quad (*)$$

denklemini bulunur. (*) denkleminde $y_1(x,\alpha),\ y_2(x,\alpha)$ çözümlerine karşılık iki diferansiyel denklemi elde etmek için aralık aritmetiği
kullanılır. $\overline{\gamma}_0[\alpha]=\left[\gamma_{01}(\alpha), \gamma_{02}(\alpha)\right], \overline{\gamma}_1[\alpha]=\left[\gamma_{11}(\alpha), \gamma_{12}(\alpha)\right]$ olmak üzere başlangıç şartları $y_1(0,\alpha)=\gamma_{01}(\alpha), y_2(0,\alpha)=\gamma_{02}(\alpha), y_1'(0,\alpha)=\gamma_{11}(\alpha), y_2'(0,\alpha)=\gamma_{12}(\alpha)$ dır.
I aralığındaki her x için bu çözümler bir $\overline{Y}_c(x)$ fuzzy sayısını tanımlayan $\left[y_1(x,\alpha), y_2(x,\alpha)\right]$ aralıklarını verir ise bu durumda klasik çözüm mevcut ve $\overline{Y}_c(x)$ dir.

Örnek: $y(0)=1,\ y'(0)=0$ için

$$y''+4y'+3y=0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım.Başlangıç şartları fuzileştirilirse
$\overline{\gamma}_0=(0/1/2),\ \overline{\gamma}_1=(-1/0/1)$ elde edilir. $i=1,2$ için (*) denklemi
$y_i''(x,\alpha)+4y_i'(x,\alpha)+3y_i(x,\alpha)=0$
biçimindedir.Bu denklemin çözümü ise

$$y_1(x,\alpha)=c_1\ e^{-x}+c_2\ e^{-3x}$$
$$y_2(x,\alpha)=c_3\ e^{-x}+c_4\ e^{-3x}$$

dır. c_i sabitleri için başlangıç şartları kullanılarak,
$\overline{\gamma}_0[\alpha]=\left[\gamma_{01}(\alpha), \gamma_{02}(\alpha)\right],\ \overline{\gamma}_1[\alpha]=\left[\gamma_{11}(\alpha), \gamma_{12}(\alpha)\right]$ için $\overline{\gamma}_0[\alpha]=\left[0+\alpha, 2-\alpha\right]$ ve
$\overline{\gamma}_1[\alpha]=\left[-1+\alpha, 1-\alpha\right]$ yazılır.Buradan da
$y(0)=1,\ y'(0)=0$ için
$y_1(0,\alpha)=\gamma_{01}(\alpha),\ y_2(0,\alpha)=\gamma_{02}(\alpha),\ y_1'(0,\alpha)=\gamma_{11}(\alpha),\ y_2'(0,\alpha)=\gamma_{12}(\alpha)$ olduğundan
$\gamma_{01}(\alpha)=0+\alpha,\ \gamma_{02}(\alpha)=2-\alpha,\ \gamma_{11}(\alpha)=-1+\alpha,\ \gamma_{12}(\alpha)=1-\alpha$ elde edilir.

Diğer yandan

$$y_1(x,\alpha)=c_1 e^{-x}+c_2\ e^{-3x}$$

ve

$$y_2(x,\alpha)=c_3 e^{-x}+c_4\ e^{-3x}$$

çözümleri için

$$y_1(0,\alpha)=c_1 e^0+c_2 e^0=\alpha \quad \Rightarrow \quad c_1+c_2=\alpha$$

$$y_2(0,\alpha)=c_3 e^0+c_4 e^0=2-\alpha \quad \Rightarrow \quad c_3+c_4=2-\alpha$$

yazılır.Buna ilaveten

$$y_1'(x,\alpha) = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$y_1'(0,\alpha) = \gamma_{11}(\alpha) = -1+\alpha \;\Rightarrow\; -c_1 - 3c_2 = -1+\alpha$$

$$y_2'(x,\alpha) = -c_3 e^{-x} - 3c_4 e^{-3x}$$

$$y_2'(0,\alpha) = -c_3 - 3c_4 = 1-\alpha$$

bulunur.Buradan

$$c_1 + c_2 = \alpha$$

$$-c_1 - 3c_2 = -1+\alpha$$

$$c_3 + c_4 = 2-\alpha$$

$$-c_3 - 3c_4 = 1-\alpha$$

denklemlerinden de

$$c_1 = 2\alpha - \frac{1}{2}, \qquad c_3 = -2\alpha + \frac{7}{2}$$

$$c_2 = -\alpha + \frac{1}{2}, \qquad c_4 = \alpha - \frac{3}{2}$$

elde edilir.O halde

$$y_1(x,\alpha) = (-\frac{1}{2} + 2\alpha)e^{-x} + (\frac{1}{2} - \alpha)e^{-3x}$$

ve

$$y_2(x,\alpha) = (\frac{7}{2} - 2\alpha)e^{-x} + (-\frac{3}{2} + \alpha)e^{-3x}$$

biçiminde olup, böylece

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[y_1(x,\alpha)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}[(-\frac{1}{2} + 2\alpha)e^{-x} + (\frac{1}{2} - \alpha)e^{-3x}]$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[y_1(x,\alpha)] = 2e^{-x} - e^{-3x}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[y_2(x,\alpha)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}[(\frac{7}{2} - 2\alpha)e^{-x} + (-\frac{3}{2} + \alpha)e^{-3x}]$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[y_2(x,\alpha)] = -2e^{-x} + e^{-3x}$$

yazılır.Dolayısı ile

$$y_1(x,1)=(-\frac{1}{2}+2)e^{-x}+(\frac{1}{2}-1)e^{-3x}$$
$$=\frac{3}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-3x}$$

$$y_2(x,1)=(\frac{7}{2}-2)e^{-x}+(-\frac{3}{2}+1)e^{-3x}$$
$$=\frac{3}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-3x}$$

$$\Rightarrow y_1(x,1)=y_2(x,1)$$

olur.Diğer yandan

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[y_1(x,\alpha)]>0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}[y_2(x,\alpha)]<0$$

$y_1(x,1)=y_2(x,1)$ olduğundan bütün $x\geq 0$ için $y_1(x,1)$, $y_2(x,1)$ bir fuzzy sayısı tanımlar. Böylece Klasik Çözümümüz olan

$$\overline{Y}_c[\alpha]=[y_1(x,\alpha),y_2(x,\alpha)]$$

elde edilir.

Örnek : $y(0)=1,\ y'(0)=0$ ile birlikte

$$y''+y=0$$

denklemini ele alalım. $i=1,2$ için denklem

$$y_i''(x,\alpha)+y_i(x,\alpha)=0$$

biçiminde yazılır.Denklemin analitik çözümü

$$y_1(x,\alpha)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$$

$$y_2(x,\alpha)=c_3\cos(x)+c_4\sin(x)$$

şeklinde olup başlangıç şartları uygulanırsa

$$y_1(0,\alpha)=\gamma_{01}(\alpha)=\alpha, \qquad y_2(0,\alpha)=\gamma_{02}(\alpha)=2-\alpha$$

$$y_1'(0,\alpha)=\gamma_{11}(\alpha)=-1+\alpha, \qquad y_2'(0,\alpha)=\gamma_{12}(\alpha)=1-\alpha$$

$$y_1(0,\alpha)=c_1=\alpha$$

$$y_2(0,\alpha)=c_3=2-\alpha$$
$$y_1'(x,\alpha)=-c_1\sin(x)+c_2\cos(x)$$

$$y_2'(x,\alpha)=-c_3\sin(x)+c_4\cos(x)$$

bulunur.Diğer yandan

$$y_1'(0,\alpha)=c_2=-1+\alpha$$

$$y_2'(0,\alpha)=c_4=1-\alpha$$

olmak üzere

$$c_1=\alpha$$

$$c_2=-1+\alpha$$

$$c_3=2-\alpha$$

$$c_4=1-\alpha$$

elde edilir.O halde

$$y_1(x,\alpha)=\alpha\cos(x)+(-1+\alpha)\sin(x)$$

$$y_2(x,\alpha)=(2-\alpha)\cos(x)+(1-\alpha)\sin(x)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}=\cos(x)+\sin(x)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial\alpha}=-\cos(x)-\sin(x)$$

biçiminde bulunur. Burada bazı x'ler için $\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}<0$ ve $\frac{\partial y_2}{\partial\alpha}>0$ dir. Böylece $\overline{Y}_c(x)$, $T>3\pi/4$ için I aralığı üzerinde mevcut değildir.

KAYNAKLAR

[1] Babolian E., Sadeghi H., Javadi Sh., Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations by Adomian Method .Applied Mathematics and Computation 149 (2004) 547-557

[2] Buckley J. J. ,Solving Linear and Quadratic Fuzzy Equations.Fuzzy Sets and Systems 38 1990) 43-59

[3] Buckley J. J. , Qu Y. Solving Systems of Linear Fuzzy Equations. Fuzzy Sets and Systems 43 (1991) 33-43

[4] Buckley J. J. , Feuring T.,Fuzzy Differential Equations . Fuzzy Sets and Systems 110 (2000) 43-54

[5] Buckley J. J. , The Fuzzy Mathematics of Finance. Fuzzy Sets and Systems 21 (1987) 257-273

[6] Buckley J. J., Eslami E.,Feuring T., Fuzzy Mathematics in Economics and Engineerin

[7] Klir J. G. and Folger T. A., Fuzzy Sets , Uncertainty and İnformation

[8] Nikravesh M., Zadeh A. L., Korotkikh V., Fuzzy Partial Differential Equations and Relational Equations

[9] Nguyen H. T., Walker A. E. , A First Course in Fuzzy Logic .Department of Mathematical Sciences New Mexico State University

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Demet ÖZGÜR

Baba Adı : Mustafa

Ana Adı : Bahriye

Doğum Tarihi : 05 / 02 / 1982

Doğum Yeri : Urla / İZMİR

05.02.1982 yılında İzmir'in Urla ilçesinde doğdum. İlkokulu 12 Eylül ilköğretim okulun'da , ortaokulu ve liseyi Urla Lisesi'nde okudum. Aynı yıl Celal Bayar Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. Dört yıllık eğitimim sonunda lisansımı bölüm beşincisi olarak tamamladım Yine 2004 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programı'nda yüksek lisansa başladım ve hala tez aşamasında devam etmekteyim.Aynı zamanda 20.10.2004 tarihinde aynı üniversitede tahsisli kadroda araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladım ve halen devam etmekteyim.