

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ - FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EKSENEL HAREKETLİ ESNEK KİRİŞLERİN SÜREKLİ ORTAM
TİTREŞİMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Saim KURAL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Temmuz 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 25 Ağustos 2008

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Erdoğan ÖZKAYA
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ
Yrd. Doç. Dr. Muhittin BAĞCI

MANİSA 2008

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

İÇİNDEKİLER	I
SEMBOL LİSTESİ	III
ŞEKİL LİSTESİ	V
TABLO LİSTESİ	X
KISALTMA LİSTESİ	XI
TEŞEKKÜR	XII
ÖZET	XIII
ABSTRACT	XIV
1. GİRİŞ	1
2. HAREKET DENKLEMLERİ	4
2.1. Hamilton Prensipleriyle Hareket Denklemlerinin Çıkarılması	5
2.2. Boyutsuzlaştırma	13
3. EKSENEL HAREKETLİ İKİ MESNETLİ ESNEK KİRİŞLER	17
3.1. Dış açılım çözümü:	18
3.2. İç Açılımlar:	24
3.2.1. $x \approx 0$ civarında iç açılım:	24
3.2.2. $x \approx l$ civarında iç açılım:	28
3.3. Özel Mesnet Durumları:	31
3.3.1. Basit-Basit Mesnet Durumu:	31
3.3.1.a. Sayısal Örnekler:	33
3.3.2. Ankastre-Ankastre Mesnet Durumu:	43
3.3.2.a. Sayısal Örnekler:	43
4. EKSENEL HAREKETLİ ÇOK MESNETLİ ESNEK KİRİŞLER:	52
4.1. Dış Açılım Çözümü:	52
4.2. İç açılımlar:	53
4.2.1. Sol Kısım İçin İç Açılım Çözümleri:	53
4.2.1.a. $x \approx 0$ civarında iç açılım,	53

4.2.1.b. $x \approx \eta$ civarında iç açılım,	53
4.2.2. Sağ Kısım İçin İç Açılım Çözümleri:	54
4.2.2.a. $x \approx \eta$ civarında iç açılım,	54
4.2.2.b. $x \approx I$ civarında iç açılım,	54
4.3. Özel Mesnet Durumları:	55
4.3.1. Basit-Basit-Basit Mesnet Durumu:	55
4.3.1.a. Sayısal Örnekler:	56
4.3.2. Ankastre-Basit-Ankastre Mesnet Durumu:	73
4.3.2.a. Sayısal Örnekler:	74
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER:	92
6. KAYNAKLAR	94
7.ÖZGEÇMİŞ	97

SEMBOL LİSTESİ

A	: Şeritin kesit alanı
E	: Elastisite modülü
I	: Kütle ataleti
ρ	: Esnek kirişin yoğunluğu
L	: Esnek kiriş uzunluğu
\mathcal{L}	: Lagrangian
P^*	: Boyutlu aksenal yük
dx^*	: Esnek kirişten alınan uzamamış parça
ds^*	: Esnek kirişten alınan uzamış parça
t^*	: Boyutlu zaman değişkeni
u^*	: Boyutlu boyuna yer değiştirme
v^*	: Boyutlu aksenal hız
w^*	: Boyutlu enine yer değiştirme
x^*, z^*	: Boyutlu kartezyen koordinatlar
T	: Kinetik enerji
V	: Elastik potansiyel enerji
v	: Elastik kirişin ortalama hızı
W	: Yer değiştirme fonksiyonunun seküler olmayan terimleri ile ilgili kısmı
A_n	: Kompleks genlik
T_0, T_1	: Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri
D_0, D_1	: Hızlı ve yavaş zaman ölçeklerine göre türevler
Y_n	: Yer değiştirmenin mekana ait kısmı
$\frac{d}{dt}$: Zamana göre türev
$\frac{d}{dx}$: Mekana göre türev
δ	: Varyasyon
e	: Şekil değiştirme
ε	: Perturbasyon parametresi ($\varepsilon \ll 1$)

n	: Mod sayısı
k_0	: Çözülebilirlik şartındaki düzeltme terimi
ω_n	: n. moda ait tabii frekans
ω_{nl}	: n. moda ait non-lineer tabii frekans
v_b	: Esnek kirişin boyuna esnekliği
w_0, w_1	: I ve ε mertebelerindeki yer değiştirmeler
$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$: Çözüm fonksiyonlarının katsayıları
r_1, r_2, r_3, r_4	: Çözüm fonksiyonunun kökleri
x_s	: Ara mesnetin $x=0$ noktasına boyutlu uzaklığı
η	: Ara mesnetin $x=0$ noktasına boyutsuz uzaklığı
ζ	: İç açılım koordinatı

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1: Eksenel Hareketli Çok Mesnetli Esnek Kiriş	4
Şekil 2.2: Hareketli kirişten alınan dx^* parçası üzerinde yer değiştirmelerin görünüşü ..	5
Şekil 3.1. Frekans denkleminin genel bir yapısı.	32
Şekil 3.2. Yaptığımız çözümün, L.G.Parker et al. (2003)'ın yapmış olduğu perturbasyon çözümünü ile karşılaştırılması. (- - -) L.Kong ve L.G.Parker çözümü; (—) bizim yaptığımız çözüm; (...) tam çözüm (I. Mod frekansa göre, basit-basit mesnet).....	37
Şekil 3.3. R.G. Parker et al. (2003)'ın yapmış olduğu perturbasyon çözümünün tam çözümle karşılaştırması - - -; perturbasyon çözümü, — tam çözüm.(I. Mod, basit-basit mesnet).	37
Şekil 3.4. $\varepsilon = 0.1, \nu = 0.6, n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	38
Şekil 3.5. $\varepsilon = 0.05, \nu = 0.3, n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	38
Şekil 3.6. $\varepsilon = 0.075, \nu = 0, n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	39
Şekil 3.7. $\varepsilon = 0.025, \nu = 0.9, n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	39
Şekil 3.8. $\varepsilon = 0.035, \nu = 0, n = 2$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	40
Şekil 3.9. $\varepsilon = 0.05, \nu = 0.3, n = 2$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	40
Şekil 3.10. $\varepsilon = 0.06, \nu = 0.6, n = 2$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	41
Şekil 3.11. $\varepsilon = 0.1, \nu = 0.3, n = 1$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	41
Şekil 3.12. $\varepsilon = 0.05, \nu = 0.9, n = 1$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	42

Şekil 3.13. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0$, $n = 2$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	42
Şekil 3.14. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.6$, $n = 2$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	43
Şekil 3.15. Yaptığımız çözümün, L.G.Parker et al. (2003)'ın yapmış olduğu perturbasyon çözümünü ile karşılaştırılması. (- - -) L.Kong ve L.G.Parker çözümü; (—) bizim yaptığımız çözüm; (...) tam çözüm (I. Mod frekansa göre, ankastre- ankastre mesnet).....	47
Şekil 3.16. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.3$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafii. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	47
Şekil 3.17. $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.9$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafii. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	48
Şekil 3.18. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0.3$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafii. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	48
Şekil 3.19. $\varepsilon = 0.065$, $\nu = 0.6$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafii. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	49
Şekil 3.20. $\varepsilon = 0.005$, $\nu = 0.9$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	49
Şekil 3.21. $\varepsilon = 0.095$, $\nu = 0.6$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafii. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	50
Şekil 3.22. $\varepsilon = 0.045$, $\nu = 0.3$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafii. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	50
Şekil 3.23. $\varepsilon = 0.08$, $\nu = 0.9$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	51
Şekil 4.1. Basit-basit-basit mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.3$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği.(—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.....	63
Şekil 4.2. Basit-basit-basit mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.5$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.....	63

Şekil 4.3. Basit-basit-basit mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.8$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.....	64
Şekil 4.4. $\varepsilon = 0.1, \nu = 0.3, \eta = 0.3, n = 1$ için basit-basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği.(- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	64
Şekil 4.5. $\varepsilon = 0.075, \nu = 0.9, \eta = 0.3, n = 1$ için basit-basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği.(- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	65
Şekil 4.6. $\varepsilon = 0.035, \nu = 0, \eta = 0.5, n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	65
Şekil 4.7. $\varepsilon = 0.085, \nu = 0.6, \eta = 0.5, n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	66
Şekil 4.8. $\varepsilon = 0.12, \nu = 0.6, \eta = 0.8, n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	66
Şekil 4.9. $\varepsilon = 0.025, \nu = 0, \eta = 0.8, n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	67
Şekil 4.10. $\varepsilon = 0.09, \nu = 0, \eta = 0.3, n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	67
Şekil 4.11. $\varepsilon = 0.045, \nu = 0.6, \eta = 0.3, n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	68
Şekil 4.12. $\varepsilon = 0.035, \nu = 0.3, \eta = 0.5, n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	68
Şekil 4.13. $\varepsilon = 0.045, \nu = 0.9, \eta = 0.5, n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	69
Şekil 4.14. $\varepsilon = 0.055, \nu = 0, \eta = 0.8, n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	69
Şekil 4.15. $\varepsilon = 0.11, \nu = 0.6, \eta = 0.8, n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	70
Şekil 4.16. $\varepsilon = 0.12, \nu = 0.6, \eta = 0.3, n = 1$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	70

Şekil 4.17. $\varepsilon = 0.075$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.5$, $n = 1$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	71
Şekil 4.18. $\varepsilon = 0.035$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	71
Şekil 4.19. $\varepsilon = 0.045$, $\nu = 0$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	72
Şekil 4.20. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	72
Şekil 4.21. $\varepsilon = 0.065$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	73
Şekil 4.22. Ankastre-ankastre-ankastre mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.3$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.	81
Şekil 4.23. Ankastre-ankastre-ankastre mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.5$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.	81
Şekil 4.24. Ankastre-ankastre-ankastre mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.8$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.	82
Şekil 4.25. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	83
Şekil 4.26. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	83
Şekil 4.27. $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.5$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	84
Şekil 4.28. $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0$, $\eta = 0.5$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	84
Şekil 4.29. $\varepsilon = 0.005$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	85

Şekil 4.30. $\varepsilon = 0.065$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	85
Şekil 4.31. $\varepsilon = 0.055$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	86
Şekil 4.32. $\varepsilon = 0.055$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	86
Şekil 4.33. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	87
Şekil 4.34. $\varepsilon = 0.035$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	87
Şekil 4.35. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	88
Şekil 4.36. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.....	88
Şekil 4.37. $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	89
Şekil 4.38. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.5$, $n = 1$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	89
Şekil 4.39. $\varepsilon = 0.005$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	90
Şekil 4.40. $\varepsilon = 0.015$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	90
Şekil 4.41. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	91
Şekil 4.42. $\varepsilon = 0.095$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.	91

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 3.1. Basit-Basit Mesnetli Sistem İçin 1. Mod Frekans Değerleri	35
Tablo 3.2. Basit-Basit Mesnetli Sistem İçin 2. Mod Frekans Değerleri	36
Tablo 3.3. Ankastre-Ankastre mesnet 1. mod frekans değerleri.....	45
Tablo 3.4. Ankastre-Ankastre mesnet 2. mod frekans değerleri.....	46
Tablo 4.1. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri ...	57
Tablo 4.2. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.5$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri ...	58
Tablo 4.3. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri ...	59
Tablo 4.4. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri ...	60
Tablo 4.5. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.5$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri ...	61
Tablo 4.6. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri ...	62
Tablo 4.7. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri.....	75
Tablo 4.8. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.5$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri.....	76
Tablo 4.9. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri.....	77
Tablo 4.10. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri....	78
Tablo 4.11. Ankastre-Basit-Ankastre Siste., $\eta = 0.5$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri.....	79
Tablo 4.12. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri....	80

KISALTMA LİSTESİ

K.E.	: Kompleks eşlenik
S.O.T.	: Seküler olmayan terimler
B-B-B	: Basit-Basit-Basit
A-B-A	: Ankastr-Basit-Ankastr

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, bilgisi ve tecrübesiyle bana her zaman yardımcı ve destek olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Erdoğan ÖZKAYA' ya; Her zaman notlarından yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ' ye; takıldığım yerlerde bana yardımını esirgemeyen arkadaşlarım Arő. Gör. Mehmet B. AKGÜL ve Arő. Gör. Ali YURDDAŐ' a; Arő. Gör. S. Murat BAĞDATLI Hocam' a; en önemlisi de hayatım boyunca bana en büyük desteği sağlayan anneme ve babama çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu alıőma 107M302 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.

ÖZET

Bu çalışmada, aksenal hareketli esnek kiriş problemi ele alınmıştır. Hamilton Prensipleri kullanılarak hareket denklemleri ve sınır şartları çıkarılmıştır. Bu denklemler ve sınır şartları boyutsuzlaştırılmıştır. Böylece denklemlerin geometrik yapıya ve malzeme özelliklerine olan bağımlılıkları ortadan kaldırılmıştır. Elde edilen kiriş denklemlerinde kirişin enine direngenliği küçük kabul edilerek esnek kiriş problemi için uygun hale getirilmiştir. Bir perturbasyon tekniği olan çok ölçekli metot ile dış açılım çözümü elde edilmiştir. Bu çözümün basit mesnet moment, ankastre mesnet eğim sınır şartlarını tam olarak sağlamadığı görülmüştür. Bu problemi ortadan kaldırmak için mesnete yakın kısımda farklı bir kabul ile iç açılım yapılmıştır. Elde edilen dış açılım ve iç açılım çözümleri birleştirilerek bütün sınır şartlarını tatmin edici bir şekilde sağlayan kompozit çözüm elde edilmiştir. Önce iki mesnetli sistemler ele alınmış, basit-basit ve ankastre-ankastre sınır şartları için çözümler elde edilmiştir. Daha sonra üç mesnetli durum incelenmiş, basit-basit-basit ve ankastre-basit-ankastre mesnet durumları için çözümler üretilmiştir. Her bir durum için kiriş katsayısının ve kiriş hızının kirişin ilk iki tabii frekansına etkileri incelenmiştir.

ABSTRACT

In this study, the axially moving flexible beam problem is considered. The equation of motion for axially moving beams is derived using Hamilton's Principle. Equation and boundary conditions are converted to nondimensional form. Thus equations become independent from geometry and material properties. Then the equation is obtained by assuming small flexural rigidity. At first, outer expansion solution obtained using the Method of Multiple Scales, a perturbation technique. It is observed that this outer expansion solution does not satisfy the boundary conditions for momentum at simple-simple support and incline at fixed-fixed support. In order to eliminate this problem, inner expansion solution are obtained by making a second expansion in the neighborhood of extreme points. Then outer and inner expansion solutions are combined to obtain composite solutions approximately satisfying all the boundary conditions. At first, systems with two supports are considered and derived solutions for simple-simple and fixed-fixed supports. Then, systems with three supports are considered and derived solutions for simple-simple-simple and fixed-simple-fixed supports. And then, considered effects of axial speed and flexural rigidity for first and second natural frequency of system for every conditions.

1. GİRİŞ

Eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri teknolojik önemlerinden dolayı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. İplikler, yüksek hızlı manyetik ve kağıt şeritler, kayışlar, motorlu testere bıçakları, cam elyaflar, zincirler, kirişler ve akışkan taşıyan borular, teknolojik kıymeti olan bazı örneklerdir. Eksenel hareketli sürekli ortamlarla ilgili Ulsoy et al. (1978) ve Wickert et al. (1988)'a ait tarama makalelerinde yüzlerce makaleye atıf yapılmıştır. Wickert et al. (1990) hareketli şerit ve kirişlerin enine titreşimlerini incelemişlerdir. Çalışmalarında hareketsiz şerit özfonksiyonları yerine sabit hızla hareket eden şeride ait özfonksiyonları kullanarak ortogonal bir baz sistemi tanımlamış ve bu baz sistemi için çözüm üretmişlerdir. Ancak bu baz sisteminde denklemlerin uygun bir forma getirilmesi gerekmekte idi. Aynı yazarlar tarafından ayrıca alternatif kompleks özfonksiyon formları önerilmiştir. (Wickert et al. , 1991). Chakraborty et al. (1999) eksenel hareketli kiriş ile ilgili çalışmalar yaptılar. Pellicano et al. (1998) eksenel hareketli kirişler için non-lineer titreşimleri ve sınır tabakalarını incelediler. Öz et al. (1998) eksenel hareketli sistemler için şeritten kirişe geçiş davranışını incelediler. Öz et al. (2000-2001) eksenel hareketli kirişlerin, Öz (2001) akışkan taşıyan boruların non-lineer titreşimlerini ve kararlılıklarını incelediler. Özkaya et al. (2000) eksenel hareketli şerit için analitik çözümler üzerine çalışmalar yaptılar. İki ayrı uzantılı eksenel hareketli malzemelerde uzantılar arası etkileşimler Ulsoy (1986) ve Al-Jawi et al. (1995a), (1995b), (1995c) tarafından birçok makalede incelenmiştir. Bu makalelerde titreşim lokalizasyonu meselesi ilk defa ele alınmıştır. Birkaç istisna hariç yukarıdaki bahsedilen ve tarama makalelerinde atıf yapılan çalışmaların hepsinde eksenel hız sabit alınmıştır. Fakat gerçekte sürekli ortamlar hız değişimlerine maruz kalmaktadırlar. Hareketli sürekli ortamlarda değişken hıza ait ilk denklemleri Miranker (1960) elde etmişti. Sonra Mote (1975) bir uçtan harmonik zorlanan eksenel ivmeli şerit problemini inceledi. Mote bu çalışmasında, değişken katsayıları zaman üzerinden ortalama değerleri ile değiştirdi ve Laplace Transform teknikleri ile kararlılığı araştırdı. Pakdemirli et al. (1994) eksenel olarak ivmelenen şeritin hareket denklemlerini Hamilton prensibini kullanarak tekrar elde ettiler ve Floquet teorisini kullanarak titreşimlerin kararlılığını sayısal olarak araştırdılar. Bu

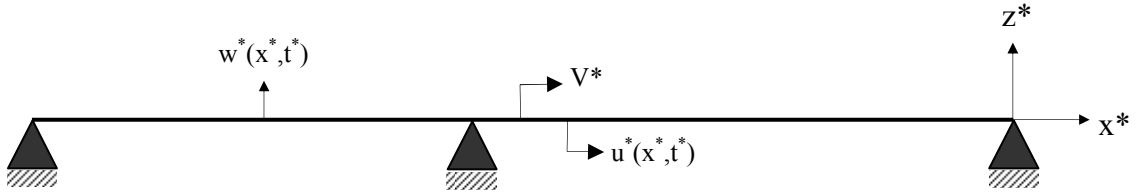
analizde sıfır ortalama hızı etrafında sinüzoidal olarak değişen bir hız fonksiyonunu ele aldılar. Pakdemirli et al. (1993) sabit ivme ile periyodik olarak hızlanıp yavaşlayan durum için bu analizi tekrar ettiler. Mockenstrum et al. (1994) sabit hızlı sistemler için gerilme kuvvetinin zamanla değişimini ele alan bir çalışma yapmıştır. Pakdemirli et al. (1997) çok zaman ölçekli metod (perturbasyon tekniği) ile eksenel olarak ivmelenen şerit için yaklaşık analitik çözüm elde ettiler. Çalışmalarında iki farklı yaklaşım kullandılar. Birinci yaklaşımda diskritizasyon-perturbasyon metodunu ikinci yaklaşımda ise direkt-perturbasyon metodunu kullandılar. İkinci yaklaşım eksenel hareketli sürekli ortam problemlerinde ilk defa bahsedilen çalışmada ele alınmış olup bazı avantajlar getirmektedir. Bu yaklaşımda denklemleri yeni bir formda yazıp ortogonal baz sistemi tanımlamaya gerek kalmamaktadır. Son zamanlarda bu iki metodun karşılaştırmaları özel ve genel problemler için literatürde yer almıştır. Nayfeh et al. (1992) kuadratik ve kübik nonlineariteler için direkt-perturbasyon metodunun daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir. Pakdemirli et al. (1995) nonlinear kablo titreşimi için iki metodun sonucunu karşılaştırdılar ve her iki metod için dallanma ve kararlılık analizinin farklılaştığını ve gerçek sistemin davranışının direkt-perturbasyon metodu ile daha iyi temsil edildiğini gösterdiler. Pakdemirli (1994), Pakdemirli et al. (1995) keyfi kuadratik ve kübik nonlineariteli genel bir modeli kullanarak direkt perturbasyon metodunun daha hassas sonuç verdiğini gösterdiler. İki metod arasındaki farklılıkların nonlinear denklemlere has bir durum olmadığını lineer denklemlerde de görülebileceğini Pakdemirli et al. (1997) gösterdiler. Öz et al. (2002) eksenel hareketli kirişlerin doğal frekanslarını ve kararlı bölgelerini incelediler. Özkaya et al. (2001) zamanla değişen hız için eksenel hareketli kiriş titreşimlerini incelediler. Parker et al. (2004)'ün yapmış olduğu çalışma; bizim çalışmamıza yakın bir çalışmalardır.

Bu çalışmada, eksenel hareketli esnek kiriş sistemleri incelenmiştir. Kirişin eğilme direngenliği küçük kabul edilmiştir. Bölüm 2'te hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Denklemlerin, kullanılan malzemenin cinsine ve boyutlarına olan bağımlılığı ortadan kaldırmak için hareket denklemleri boyutsuzlaştırılmıştır.

Bölüm 3'te iki mesnetli sistemler ele alınmış ve boyutsuz haldeki hareket denklemleri çözülmüştür. İlk önce perturbasyon metotlarından, çok zaman ölçekli metot ile dış açılım çözümü elde edilmiştir. Fakat bu çözümün uçlarda sınır şartlarını sağlamakta yetersiz olduğu görülmüş ve uç noktalarda farklı bir iç açılım yapılmıştır. Dış açılım ve iç açılım birleştirilerek tüm sınır şartlarını yeterli ölçüde sağlayan kompozit çözümler elde edilmiştir. Sonra elde edilen çözümler grafik ve tablolar halinde gösterilmiştir. Bölüm 4'te çok mesnetli sistemler için benzer çözümler elde edilmiştir. Her bir sistem için giriş katsayısının ve eksenel hızın tabii frekansa olan etkileri araştırılmıştır.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

Bu bölümde Şekil 2.1’ de gösterilen aksel hareketli sürekli ortam için hareket denklemi bulunacaktır. Önce aksel hareketli kiriş için denklemler çıkarılacak, daha sonra kirişlik katsayısı küçük kabulü yaparak esnek kiriş denklemleri elde edilecektir. Hareket denklemlerini bulmak için Hamilton Prensipli kullanılacaktır. Hareket denklemleri önce $x = 0, x = 1$ ve $x = \eta$ noktasında mesnetli durum için çıkartılacak daha sonra denklemler genelleştirilecektir. Hareket denklemlerini çıkarırken bazı kabul yapılmıştır. Dönme ataleti ve kayma gerilmeleri ihmal edildiği Euler-Bernoulli kirişi ele alınmıştır. Kirişin başlangıç ve bitiş noktalarında “korunumlu sistem” kabulünü bozmayacak hareket edemeyen basit mesnet mevcuttur. Boyuna uzamanın ihmal edilebilmesi için, ön gerilmeden kaynaklanan boyuna direngenlik çok büyük kabul edilmiştir. Ön gerilme kuvvetindeki değişme miktarının uzamanın değişimi ile ihmal edilebilir olduğu kabul edilmiştir. Kesit boyutları hareket esnasında değişmediği kabul edilmiştir. Yer değiştirmeler dinamik denge konumundan alınmıştır. Boyuna koordinat (x^*) yönünde, hareket esnasında kalınlık değişimi ihmal edilmiştir. Yerçekimi etkisi gerilme kuvvetine göre yeteri kadar küçüktür, böylece kiriş denge konumunda düz durmaktadır.

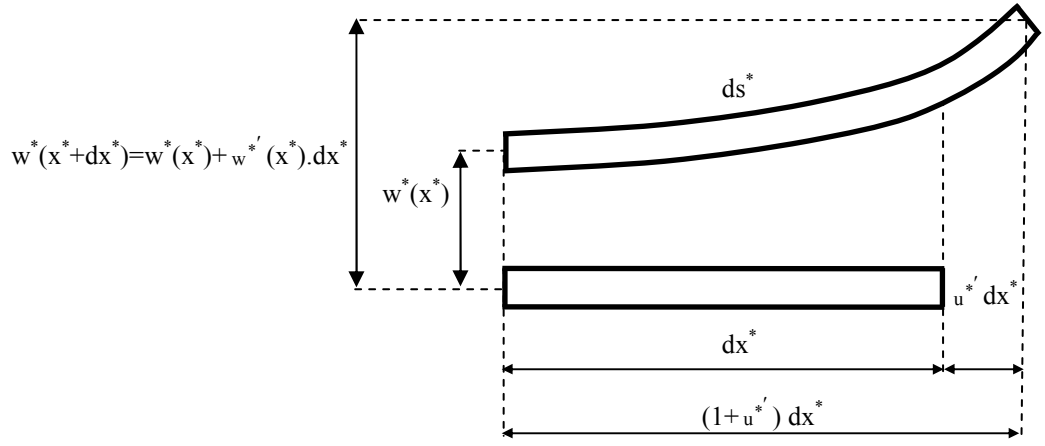


Şekil 2.1: Aksel Hareketli Çok Mesnetli Esnek Kiriş

Şekil 2.1’de görülen aksel hareketli kirişte; $u^*(x^*, t^*)$ ifadesi x^* yönündeki yer değiştirmeyi, v^* x^* yönündeki aksel hızı, $w^*(x^*, t^*)$ ifadesi z^* yönündeki yer değiştirmeyi göstermektedir. x^* ve z^* kartezyen koordinatlardır. t^* ise zaman değişkenidir. Kirişin aksel iç gerilmesi $P^*(t^*)$, alanı A , yoğunluğu ρ , elastisite modülü E ve atalet momenti I ’dir.

2.1. Hamilton Prensipleriyle Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Sistemin Langrangian' ını hesaplamaya geçmeden önce uzama etkilerini ve sistemin toplam hızlarını hesaplayacağız. Uzama etkilerini hesaplamak için Şekil 2.2'de dx^* uzunluğunda bir parça göz önüne alınmıştır. Titreşim esnasında uzunluk ds^* ile eksenel uzama miktarı u^*dx^* ile gösterilmiştir. Bu durumda sol uçtaki yer değiştirme $w^*(x^*)$, sağ uçtaki yer değiştirme ise $w^*(x^*+dx^*)$ olarak alınmıştır.



Şekil 2.2: Hareketli kirişten alınan dx^* parçası üzerinde yer değiştirmelerin görünüşü

Her iki uçtaki yer değiştirmeler arasındaki fark ise;

$$w^*(x^* + dx^*) - w^*(x^*) = w'^* dx^* \quad (2.1)$$

olur.

dx^* uzunluğu, yer değiştirme sonrası ds^* uzunluğu olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$ds = \sqrt{(1 + u'^*)^2 dx^{*2} + w'^{*2} dx^{*2}} = \sqrt{(1 + u'^*)^2 + w'^{*2}} dx^* \quad (2.2)$$

Şekil değiştirme;

$$\varepsilon = \frac{ds^* - dx^*}{dx^*} \quad (2.3)$$

olduğundan denklem (2.3)'e denklem (2.2)'yi yerleştirir, Taylor açılımı yapıp küçük terimleri ihmal edersek şekil değiştirme

$$\varepsilon = u^{*'} + \frac{1}{2}u^{*'}^2 + \frac{1}{2}w^{*'}^2 \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. Boyuna yer değiştirmeyi enine yer değiştirmeye göre küçük kabul edelim.

$u^* = O(w^{*2})$ alınırsa bazı terimler diğer terimlere göre küçük olacaktır.

$$\varepsilon = u^{*'} + \frac{1}{2}w^{*'}^2 \quad (2.5)$$

x^* ve z^* yönündeki hızlar ise sırasıyla şöyle bulunur.

$$\frac{du^*}{dt^*} = \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{u}^* + u^{*'} v^* \quad (2.6)$$

$$\frac{dw^*}{dt^*} = \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{w}^* + w^{*'} v^* \quad (2.7)$$

Toplam yatay hız ise x^* yönündeki hız ile kiriş uzamalarından kaynaklanan (2.6)'da verilen hızın toplamıdır:

$$(v_T)_{x^*} = v^* + \dot{u}^* + u^{*'} v^* \quad (2.8)$$

Denklemlerde kullanılan türev gösterimleri şöyledir; $(\dot{\quad}) \rightarrow$ zamana göre türev, $(\quad)' \rightarrow$ mekana göre türev.

Kinetik enerji ve elastik potansiyel enerji sırasıyla şöyle yazılabilir;

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{x_s} \left\{ \left(\dot{w}_1^* + w_1^{*'} v^* \right)^2 + \left(v^* + \dot{u}_1^* + u_1^{*'} v^* \right)^2 \right\} dx^* + \frac{1}{2} \rho A \int_{x_s}^L \left\{ \left(\dot{w}_2^* + w_2^{*'} v^* \right)^2 + \left(v^* + \dot{u}_2^* + u_2^{*'} v^* \right)^2 \right\} dx^* \quad (2.9)$$

$$V = \frac{1}{2} EA \int_0^{x_s} \left(u_1^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right)^2 dx^* + \frac{1}{2} EA \int_{x_s}^L \left(u_2^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right)^2 dx^* + \frac{1}{2} EI \int_0^{x_s} w_1^{*''2} dx^* + \frac{1}{2} EI \int_{x_s}^L w_2^{*''2} dx^* + \int_0^{x_s} P \left(u_1^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) dx^* + \int_{x_s}^L P \left(u_2^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) dx^* \quad (2.10)$$

Denklem (2.10)'da birinci satır integraller şekil değiştirme, ikinci satır integraller eğilme, üçüncü integraller de aksel gerilme ile ilgilidir. Lagrangian kinetik ve elastik potansiyel enerji farkıdır.

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.11)$$

Hamilton prensibi ise Lagrangian'ın zaman üzerinden integralinin varyasyonunun sıfır olduğunu belirtmektedir.

$$\delta \int_{t_1^*}^{t_2^*} \mathcal{L} dt^* = 0 \quad (2.12)$$

Denklem (2.9) (2.10) denklem (2.11)'a yerleştirilir ve Lagrangian yazıldıktan sonra bütün ifade (2.12)'e yerleştirilirse

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_1^*}^{t_2^*} \left[\frac{1}{2} \rho A \int_0^{x_s} \left\{ \left(\dot{w}_1^* + w_1^{*'} v^* \right)^2 + \left(v^* + \dot{u}^* + u^{*'} v^* \right)^2 \right\} dx^* \right. \\
& + \frac{1}{2} \rho A \int_{x_s}^L \left\{ \left(\dot{w}_2^* + w_2^{*'} v^* \right)^2 + \left(v^* + \dot{u}^* + u^{*'} v^* \right)^2 \right\} dx^* \\
& - \frac{1}{2} EA \int_0^{x_s} \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) dx^* - \frac{1}{2} EA \int_{x_s}^L \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) dx^* \\
& - \frac{1}{2} EI \int_0^{x_s} w_1^{*''2} dx^* - \frac{1}{2} EI \int_{x_s}^L w_2^{*''2} dx^* \\
& \left. - \int_0^{x_s} P \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) dx^* - \int_{x_s}^L P \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) dx^* \right] dt = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

elde edilir. Denklem (2.13)'e şekil değiştirme denklemi (2.5) yerleştirilip varyasyonu alınırsa;

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_0^{x_s} \left\{ \rho A \left(\left(\dot{w}_1^* + w_1^{*'} v^* \right) \left(\delta \dot{w}_1^* + v^* \delta w_1^{*'} + w_1^{*'} \delta v^* \right) \right. \right. \\
& + \left. \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) \left(\delta \dot{u}^* + v^* \delta u^{*'} + u^{*'} \delta v^* + \delta v^* \right) \right) \\
& - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) \left(\delta u^{*'} + w_1^{*'} \delta w_1^{*'} \right) \\
& \left. - EI \left(w_1^{*''} \delta w_1^{*''} \right) - P \left(\delta u^{*'} + w_1^{*'} \delta w_1^{*'} \right) \right\} dx^* dt^* \\
& + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_{x_s}^L \left\{ \rho A \left(\left(\dot{w}_2^* + w_2^{*'} v^* \right) \left(\delta \dot{w}_2^* + v^* \delta w_2^{*'} + w_2^{*'} \delta v^* \right) \right. \right. \\
& + \left. \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) \left(\delta \dot{u}^* + v^* \delta u^{*'} + u^{*'} \delta v^* + \delta v^* \right) \right) \\
& - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) \left(\delta u^{*'} + w_2^{*'} \delta w_2^{*'} \right) \\
& \left. - EI \left(w_2^{*''} \delta w_2^{*''} \right) - P \left(\delta u^{*'} + w_2^{*'} \delta w_2^{*'} \right) \right\} dx^* dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

elde edilir. Eksenel hızı belirli bir fonksiyon seçeceğimiz için $\delta v=0$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_0^{x_s} \left\{ \rho A \left(\left(\dot{w}_1^* + w_1^{*'} v^* \right) \left(\delta \dot{w}_1^* + v^* \delta w_1^{*'} \right) \right. \right. \\
& + \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) \left(\delta \dot{u}^* + v^* \delta u^{*'} \right) \\
& - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) \left(\delta u^{*'} + w_1^{*'} \delta w_1^{*'} \right) - EI \left(w_1^{*''} \delta w_1^{*''} \right) \\
& \left. - P \left(\delta u^{*'} + w_1^{*'} \delta w_1^{*'} \right) \right\} dx^* dt^* + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_{x_s}^L \left\{ \rho A \left(\left(\dot{w}_2^* + w_2^{*'} v^* \right) \left(\delta \dot{w}_2^* + v^* \delta w_2^{*'} \right) \right. \right. \\
& + \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) \left(\delta \dot{u}^* + v^* \delta u^{*'} \right) \\
& - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) \left(\delta u^{*'} + w_2^{*'} \delta w_2^{*'} \right) - EI \left(w_2^{*''} \delta w_2^{*''} \right) \\
& \left. - P \left(\delta u^{*'} + w_2^{*'} \delta w_2^{*'} \right) \right\} dx^* dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Parantezler tek tek açılırsa;

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_0^{x_s} \left\{ \rho A \left(\left(\dot{w}_1^* + w_1^{*'} v^* \right) \delta \dot{w}_1^* + \left(\dot{w}_1^* + w_1^{*'} v^* \right) v^* \delta w_1^{*'} \right. \right. \\
& + \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) \delta \dot{u}^* + \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) v^* \delta u^{*'} \\
& - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) \delta u^{*'} - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) w_1^{*'} \delta w_1^{*'} \\
& \left. - EI \left(w_1^{*''} \delta w_1^{*''} \right) - P \delta u^{*'} - P w_1^{*'} \delta w_1^{*'} \right\} dx^* dt^* \\
& + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_{x_s}^L \left\{ \rho A \left(\left(\dot{w}_2^* + w_2^{*'} v^* \right) \delta \dot{w}_2^* + \left(\dot{w}_2^* + w_2^{*'} v^* \right) v^* \delta w_2^{*'} \right. \right. \\
& + \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) \delta \dot{u}^* + \left(\dot{u}^* + u^{*'} v^* + v^* \right) v^* \delta u^{*'} \\
& - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) \delta u^{*'} - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) w_2^{*'} \delta w_2^{*'} \\
& \left. - EI \left(w_2^{*''} \delta w_2^{*''} \right) - P \delta u^{*'} - P w_2^{*'} \delta w_2^{*'} \right\} dx^* dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

İlk integrallerden başlayarak integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa, kısmi integrasyon işlemleri sonunda denklem (2.17) elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_0^{x_s} \left\{ -\rho A \left(\ddot{w}_1^* + 2\dot{w}_1^{*'} v^* + w_1^{*'} \dot{v}^* + w_1^{*''} v^{*2} \right) - EI w_1^{*iv} + P w_1^{*''} \right. \\
& \left. + EA \left(u^{*''} w_1^{*'} + u^{*'} w_1^{*''} + \frac{3}{2} w_1^{*'}{}^2 w_1^{*''} \right) \right\} \delta w_1^* dx^* dt^* \\
& + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_0^{x_s} \left\{ -\rho A \left(\ddot{u}^* + 2\dot{u}^{*'} v^* + u^{*'} \dot{v}^* + \dot{v}^* + u^{*''} v^{*2} \right) \right. \\
& \left. + EA \left(u^{*''} + w_1^{*'} w_1^{*''} \right) \right\} \delta u^* dx^* dt^* \\
& + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{w}_1^* v^* + w_1^{*'} v^{*2} \right) - EA \left(u^{*'} w_1^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^3 \right) - EI w_1^{*''' } - P w_1^{*'} \right\} \delta w_1^* \Big|_0^{x_s} dt^* \\
& + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{u}^* v^* + u^{*'} v^{*2} + v^{*2} \right) - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) - P \right\} \delta u^* \Big|_0^{x_s} dt^* \\
& - \int_{t_1^*}^{t_2^*} EI w_1^{*''' } \delta w_1^{*'} \Big|_0^{x_s} dt^* + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_{x_s}^L \left\{ -\rho A \left(\ddot{w}_2^* + 2\dot{w}_2^{*'} v^* + w_2^{*'} \dot{v}^* + w_2^{*''} v^{*2} \right) \right. \\
& \left. - EI w_2^{*iv} + P w_2^{*''} + EA \left(u^{*''} w_2^{*'} + u^{*'} w_2^{*''} + \frac{3}{2} w_2^{*'}{}^2 w_2^{*''} \right) \right\} \delta w_2^* dx^* dt^* \\
& + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \int_{x_s}^L \left\{ -\rho A \left(\ddot{u}^* + 2\dot{u}^{*'} v^* + u^{*'} \dot{v}^* + \dot{v}^* + u^{*''} v^{*2} \right) \right. \\
& \left. + EA \left(u^{*''} + w_2^{*'} w_2^{*''} \right) \right\} \delta u^* dx^* dt^* + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{w}_2^* v^* + w_2^{*'} v^{*2} \right) \right. \\
& \left. - EA \left(u^{*'} w_2^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^3 \right) - EI w_2^{*''' } - P w_2^{*'} \right\} \delta w_2^* \Big|_{x_s}^L dt^* \\
& + \int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{u}^* v^* + u^{*'} v^{*2} + v^{*2} \right) - EA \left(u^{*'} + \frac{1}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) - P \right\} \delta u^* \Big|_{x_s}^L dt^* \\
& - \int_{t_1^*}^{t_2^*} EI w_2^{*''' } \delta w_2^{*'} \Big|_{x_s}^L dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Denklem (2.17)'deki iki katlı integralin sıfır olabilmesi ancak ve ancak δw^* ve δu^* katsayılarının sıfıra eşit olması ile mümkündür. Buradan iki tane eşitlik elde ederiz. Bunlar sırasıyla;

$\delta w^* dx^* dt^*$ 'in katsayısı

$$\begin{aligned} & -\rho A \left(\ddot{w}_{1,2}^* + 2\dot{w}_{1,2}^* \dot{v}^* + w_{1,2}^* \dot{v}^* + w_{1,2}^{*2} v^{*2} \right) - EI w_{1,2}^{*iv} + P w_{1,2}^{*''} \\ & + EA \left(u^{*''} w_{1,2}^* + u^{*'} w_{1,2}^{*''} + \frac{3}{2} w_{1,2}^{*2} w_{1,2}^{*''} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\delta u^* dx^* dt^*$ 'in katsayısı

$$-\rho A \left(\ddot{u}^* + 2\dot{u}^* \dot{v}^* + u^{*'} \dot{v}^* + \dot{v}^* + u^{*''} v^{*2} \right) + EA \left(u^{*''} + w_{1,2}^* w_{1,2}^{*''} \right) = 0 \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. Bu iki denklem hareket denklemleri olmaktadır. Sınır şartları ise geriye kalan terimlerin sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

İlk olarak,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{w}_1^* \dot{v}^* + w_1^* \dot{v}^{*2} \right) - EA \left(u^{*'} w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*3} \right) \right. \\ & \left. + EI w_1^{*''''} - P w_1^{*'} \right\} \delta w_1^* \Big|_0^{x_s} dt^* - EI \int_{t_1^*}^{t_2^*} w_1^{*''} \delta w_1^{*'} \Big|_0^{x_s} dt^* = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{w}_2^* v^* + w_2^{*'} v^{*2} \right) - EA \left(u^{*'} w_2^{*'} + \frac{I}{2} w_2^{*'}{}^3 \right) + EI w_2^{*''''} - P w_2^{*'} \right\} \delta w_2^* \Big|_{x_s}^L dt^* - EI \int_{t_1^*}^{t_2^*} w_2^{*''} \delta w_2^{*''} \Big|_{x_s}^L dt^* = 0 \quad (2.21)$$

Ele alınan sınır şartlarının denklem (2.20) ve (2.21)'i sağlaması gerekir. Bu durumda basit-basit-basit mesnet için sınır şartları;

$$\delta w_1^*(0) = 0, \delta w_1^{*''}(0) = 0, \delta w_2^*(L) = 0, \delta w_2^{*''}(L) = 0, \delta w_1^*(x_s) = 0 \quad (2.22)$$

$$\delta w_2^*(x_s) = 0, \delta w_1^{*'}(x_s) = \delta w_2^{*'}(x_s), \delta w_1^{*''}(x_s) = \delta w_2^{*''}(x_s) \quad (2.23)$$

ve ankastre-basit-ankastre için sınır şartları;

$$\delta w_1^*(0) = 0, \delta w_1^{*'}(0) = 0, \delta w_2^*(L) = 0, \delta w_2^{*'}(L) = 0, \delta w_1^*(x_s) = 0$$

$$\delta w_2^*(x_s) = 0, \delta w_1^{*'}(x_s) = \delta w_2^{*'}(x_s), \delta w_1^{*''}(x_s) = \delta w_2^{*''}(x_s)$$

Şeklinde yazılabilir.

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{u}^* v^* + u^{*'} v^{*2} + v^{*2} \right) - EA \left(u^{*'} + \frac{I}{2} w_1^{*'}{}^2 \right) - P \right\} \delta u^* \Big|_0^{x_s} dt^* = 0 \quad (2.24)$$

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left(\dot{u}^* v^* + u^{*'} v^{*2} + v^{*2} \right) - EA \left(u^{*'} + \frac{I}{2} w_2^{*'}{}^2 \right) - P \right\} \delta u^* \Big|_{x_s}^L dt^* = 0 \quad (2.25)$$

Denklem (2.24–2.25)'in sıfır olabilmesi için enine hareket için yazılan sınır şartlarına ilave olarak boyuna hareket için şu sınır şartlarının sağlanması gerekir;

$$\delta u_1^*(x_s) = \delta u_2^*(x_s), \quad \delta u_1^{*'}(x_s) = \delta u_2^{*'}(x_s) \quad (2.26)$$

$$\delta u_1^*(0) = 0, \quad \delta u_2^*(L) = 0 \quad (2.27)$$

2.2. Boyutsuzlaştırma

Elde ettiğimiz denklem (2.18) ve (2.19) sistemin boyutlu hareket denklemdir. Denklemleri daha sade hale gelmesi, çözümlerimizin malzeme yapısından ve şeklinden bağımsız olabilmesi ve sonuçların genel olabilmesi için denklemlerimizi boyutsuzlaştıralım. Bunun için aşağıdaki değişken parametreleri tanımlayalım,

$$\begin{aligned} w_{1,2}^* &= \frac{w_{1,2}}{L}, \quad u_{1,2}^* = \frac{u}{L}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = t \sqrt{\frac{P}{\rho AL^2}}, \\ v^* &= \frac{v}{\sqrt{P/\rho A}}, \quad v_b^2 = \frac{EA}{P}, \quad \bar{v}_f^2 = \frac{EI}{PL^2}, \quad \eta = \frac{x_s}{L} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Burada v_b boyuna direngenliği, \bar{v}_f enine direngenliği göstermektedir. v^* aksenal hızı durgun kirişteki dalga hızı ile boyutsuzlaştırılmıştır. Denklem (2.28) ilgili işlemlerden sonra denklem (2.18) ve (2.19)'a yerleştirilirse boyutsuz hareket denklemleri şu şekilde elde edilir;

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{w}_{1,2} + 2\dot{w}'_{1,2}v + w'_{1,2}\dot{v} + w''_{1,2}v^2 \right) + \bar{v}_f^2 w_{1,2}^{iv} \\ & - \left(w'_{1,2} \left(I + v_b^2 \left(u'_{1,2} + \frac{I}{2} w'_{1,2}{}^2 \right) \right) \right)' = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\left(\ddot{u}_{1,2} + 2\dot{u}'_{1,2}v + u'_{1,2}\dot{v} + u''_{1,2}v^2 \right) - v_b^2 \left(u'_{1,2} + \frac{I}{2} w'_{1,2}{}^2 \right)' = 0 \quad (2.30)$$

Uçlarda basit mesnet olma durumu için;

$$\begin{aligned}
 w_1(0,t) = 0, \quad w_2(l,t) = 0, \quad w_1''(0,t) = 0, \quad w_2''(l,t) = 0, \\
 u_1(0,t) = 0, \quad u_2(l,t) = 0, \quad w_1(\eta,t) = 0, \quad w_2(\eta,t) = 0, \\
 w_1'(\eta,t) = w_2'(\eta,t), \quad w_1''(\eta,t) = w_2''(\eta,t) \\
 u_1(\eta,t) = u_2(\eta,t), \quad u_1'(\eta,t) = u_2'(\eta,t)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Uçlarda ankastre mesnet olma durumu için;

$$\begin{aligned}
 w_1(0,t) = 0, \quad w_2(l,t) = 0, \quad w_1'(0,t) = 0, \quad w_2'(l,t) = 0, \\
 u_1(0,t) = 0, \quad u_2(l,t) = 0, \quad w_1(\eta,t) = 0, \quad w_2(\eta,t) = 0, \\
 w_1'(\eta,t) = w_2'(\eta,t), \quad w_1''(\eta,t) = w_2''(\eta,t) \\
 u_1(\eta,t) = u_2(\eta,t), \quad u_1'(\eta,t) = u_2'(\eta,t)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Teknolojik kullanımı olan parametreler için hesap yapmak gerekirse, boyuna titreşimler enine titreşimlerden önemli ölçüde daha hızlı yayıldığı için $v_b^2 \gg I$ alınabilir. Bu durumda denklem (2.30)' un birinci kısmı ikinci kısımdan çok küçüktür. Bu durumda denklem (2.30)'u aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left(u'_{1,2} + \frac{I}{2} w'^2_{1,2} \right)' = 0 \tag{2.33}$$

Denklemin x'e göre integralini alalım.

$$u'_1 + \frac{I}{2} w'^2_1 = c(t) = \varepsilon_1 \tag{2.34}$$

$$u'_2 + \frac{I}{2} w'^2_2 = d(t) = \varepsilon_2 \tag{2.35}$$

olur. Bu integral sadece t 'ye bağılı bir sabite dönüşmüş oldu. Bu değer ise u^* ile ilgili yüksek mertebeden terimin ihmal edildiği şekil değiştirme değeridir. Bu değer in giriş boyunca integralini alırsak.

$$\int_0^{\eta} u_1' dx + \frac{I}{2} \int_0^{\eta} w_1'^2 dx = c(t) \int_0^{\eta} dx \quad (2.36)$$

$$\int_{\eta}^l u_2' dx + \frac{I}{2} \int_{\eta}^l w_2'^2 dx = d(t) \int_{\eta}^l dx \quad (2.37)$$

elde edilir. İntegralin alınmış hali şu şekildedir;

$$u_1(\eta) - u_1(0) + \frac{I}{2} \int_0^{\eta} w_1'^2 dx = c(t)(\eta - 0) \quad (2.38)$$

$$u_2(l) - u_2(\eta) + \frac{I}{2} \int_{\eta}^l w_2'^2 dx = d(t)(l - \eta) \quad (2.39)$$

Her iki uçta da uzama olmadığı için denklem (2.38) ve (2.39)'in ilk iki terimleri sıfırdır. Bu durumda da denklem (2.38) ve (2.39) alt alta toplanırsa denklem (2.40) elde edilir. Buradan sadece t 'ye bağılı c ve d değeri;

$$d(t) = c(t) = \frac{I}{2} \int_0^{\eta} w_1'^2 dx + \frac{I}{2} \int_{\eta}^l w_2'^2 dx \quad (2.40)$$

olarak bulunur. Bu değer şekil değiştirmeye eşit olduğundan denklem (2.34) ve (2.35)'e yerleştirilirse,

$$u' = c(t) - \frac{I}{2} w_1'^2 = \frac{I}{2} \left(\int_0^{\eta} w_1'^2 dx + \int_{\eta}^l w_2'^2 dx \right) - \frac{I}{2} w_1'^2 \quad (2.41)$$

$$u' = d(t) - \frac{I}{2} w_2'^2 = \frac{I}{2} \left(\int_0^{\eta} w_1'^2 dx + \int_{\eta}^l w_2'^2 dx \right) - \frac{I}{2} w_2'^2 \quad (2.42)$$

elde edilir. Bu değerin x 'e göre integraline bakalım. Buradan sonlu enine titreşimden boyuna yerdeğiştirme alanını buluruz.

$$u(x,t) = \frac{I}{2} \int_0^x \left(\int_0^\eta w_1'^2 dx + \int_\eta^l w_2'^2 dx \right) dx - \frac{I}{2} \int_0^x w_1'^2 dx \quad (2.43)$$

$$u(x,t) = \frac{I}{2} \int_0^x \left(\int_0^\eta w_1'^2 dx + \int_\eta^l w_2'^2 dx \right) dx - \frac{I}{2} \int_0^x w_2'^2 dx \quad (2.44)$$

Denklem (2.43) ve (2.44)' ü denklem (2.29)'a yerleştirip gerekli düzenlemeleri yaparsak nonlineer integro-diferansiyel hareket denklemi;

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{w}_{1,2} + 2\dot{w}'_{1,2}v + w'_{1,2}\dot{v} \right) + \left(v^2 - I \right) w''_{1,2} + \bar{v}_f^2 w_{1,2}^{iv} \\ & = \frac{I}{2} v_b^2 w''_{1,2} \left(\int_0^\eta w_1'^2 dx + \int_\eta^l w_2'^2 dx \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

olarak elde edilir. Bu denklemde \bar{v}_f^2 kiriş katsayısını (enine direngenlik) göstermekte ve eşitliğin sağındaki terimler ise titreşim esnasında asal eksenin sonlu uzamasından gelmektedir. Eksenel hareketli sürekli ortamlarda mesnet sayısına göre en genel hareket denklemi şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{w}_{m+1} + 2\dot{w}'_{m+1}v + w'_{m+1}\dot{v} \right) + \left(v^2 - 1 \right) w''_{m+1} + \bar{v}_f^2 w_{m+1}^{iv} \\ & = \frac{1}{2} v_l^2 \left(\sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w_{r+1}'^2 dx \right) w''_{m+1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$m=0, \dots, n, \quad \eta_0=0, \quad \eta_{n+1}=1 \quad (2.47)$$

Burada n sürekli ortamın uçları dışında kalan, iki mesnet arasındaki toplam mesnet sayısıdır.

3. EKSENEL HAREKETLİ İKİ MESNETLİ ESNEK KİRİŞLER

Bu bölümde aksenal hareketli esnek kiriş problemi ele alınacaktır. Kirişin eğilme direngenliğinin küçük olduğu kabul edilecektir. Bu bölümde lineer hareketi inceleyeceğimiz için elde edilen hareket denkleminin sağ tarafı ele alınmayacaktır. Kirişin eğilme direngenliği küçük kabulü yapıldığı için \bar{v}_f katsayısı ε mertebesinde alınacaktır ($\varepsilon \ll 1$). Bu kabulü yaptığımızda denklemimizin en yüksek mertebe türeve sahip terimin önündeki katsayı ε mertebesinde olacağı için sınır tabakası problemi ortaya çıkmaktadır. Yapılacak direkt pertürbasyon açılımıyla elde edilecek çözüm mesnetlerden uzak noktalarda geçerli olurken mesnetlere yakın noktalarda tüm şartları tam olarak sağlamayacaktır. Çünkü iki mesnetli bir kiriş sistemi için sınır şartı dört tane iken, elde ettiğimiz çözüm sadece iki şart kabul etmektedir. Bu problemi ortadan kaldırmak için, dış açılıma ek olarak mesnetlerde ayrı bir iç açılım yapılacak ve bu iki açılım birleştirilerek tüm bölgelerde geçerli kompozit bir çözüm elde edilecektir. Önce basit-basit ve ankastre-ankastre mesnetli durumlar incelenecek, daha sonra basit-basit-basit ve ankastre-basit-ankastre çok mesnetli durumları ele alınacaktır.

Lineer durum için aksenal hareketli esnek kirişin hareket denklemini şu şekilde yazabiliriz;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{v}_f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

Bu ifade esnek kiriş için küçük olduğundan dolayı $\bar{v}_f^2 = \varepsilon^2$ olarak alınacaktır.

3.1. Dış açılım çözümü:

Dış açılım çözümünü inceleyebilmek için ilk önce yer değiştirme fonksiyonu için şu açılımı yapmalıyız;

$$w^o = w_0^o + \varepsilon w_1^o + \varepsilon^2 w_2^o + \dots \quad (3.2)$$

Türevleri belirleyecek olursak;

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \quad (3.4)$$

Zaman değişkenlerini de şu şekilde belirleyelim;

$$t = T_0 \quad (3.5)$$

$$\varepsilon t = T_1 \quad (3.6)$$

$$\varepsilon^2 t = T_2 \quad (3.7)$$

Tüm bu ifadeleri denklem (3.1) de yerine yazacak olursak;

$$\begin{aligned} & [D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1][w_0^o + \varepsilon w_1^o + \varepsilon^2 w_2^o] \\ & + 2\nu [D_0 + \varepsilon D_1][w_0^{o'} + \varepsilon w_1^{o'} + \varepsilon^2 w_2^{o'}] \\ & + (\nu^2 - 1)[w_0^{o''} + \varepsilon w_1^{o''} + \varepsilon^2 w_2^{o''}] + \varepsilon^2 [w_0^{oiv} + \varepsilon w_1^{oiv} + \varepsilon^2 w_2^{oiv}] = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

İfadeyi mertebelere ayıracak olursak;

O(1) Mertebesi;

$$D_0^2 w_0^o + 2vD_0 w_1^o' + (v^2 - 1)w_2^o'' = 0 \quad (3.9)$$

O(ε) Mertebesi;

$$D_0^2 w_1^o + 2vD_0 w_1^o' + (v^2 - 1)w_1^o'' = -2D_0 D_1 w_0^o - 2vD_1 w_0^o' \quad (3.10)$$

O(ε^2) Mertebesi;

$$D_0^2 w_2^o + 2vD_0 w_2^o' + (v^2 - 1)w_2^o'' = -2D_0 D_1 w_1^o - 2vD_1 w_1^o' - w_0^{oiv} \quad (3.11)$$

Her bir mertebeyi teker teker çözelim.

O(1) mertebesi çözümü;

Denklem (3.9)'e şu şekilde bir çözüm önerelim;

$$w_0^o(x, T_0, T_1, T_2) = A_n(T_1, T_2) e^{i\omega_n T_0} Y_n(x) + K.E. \quad (3.12)$$

Denklem (3.12) denklem (3.9)'e yerleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir;

$$(v^2 - 1)Y_n'' + 2iv\omega_n Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'deki, diferansiyel denklem çözülmüşse;

$$Y_n = c_1 e^{-\frac{i\omega_n x}{l+v}} + c_2 e^{\frac{i\omega_n x}{l-v}} \quad (3.14)$$

bulunur. Bu ifadeyi de denklem (3.12) da yerine yazarsak ilk mertebe dış açılım çözümü şu şekilde elde edilir;

$$w_0^o = A_n e^{i\omega_n T_0} (c_1 e^{\frac{i\omega_n x}{l+v}} + c_2 e^{\frac{i\omega_n x}{l-v}}) + K.E. \quad (3.15)$$

Denklem (3.15)'deki dış açılım çözümü sadece iki sınır şartını sağlayabilmektedir. Fakat kiriş problemi için dört sınır şartının sağlanması gerekmektedir. Bu problemi çözmek için esnek kirişin uç noktalarına yakın bölgelerde iç açılım çözümleri elde edilecek, dış açılım ve iç açılım çözümleri birleştirilerek bütün sınır şartlarını sağlayabilecek kompozit çözüm elde edilecektir. Elde edilen kompozit çözüm sınır şartları dikkate alınarak çözümlenerek sistemin ilk iki tabii frekans değerleri hesaplanacaktır. Dış açılım geçerli olduğu bölgede şerit şartlarını sağladığından dolayı çözülebilirlik şartını bulurken dış açılıma şerit şartlarını sağlatabiliriz. Şerit için sınır şartları;

$$w(0,t) = 0 \quad , \quad w(l,t) = 0 \quad (3.16)$$

Bu şartları ilk mertebe çözümde, denklem (3.15)'de yerine yazarsak, çözüm şu hale gelir;

$$Y_{n_0} = C e^{\frac{i\omega_n^* v}{l-v^2} x} \sin \frac{\omega_n^*}{l-v^2} x \quad (3.17)$$

$$w_0^o = A_n e^{i\omega_n^* T_0} e^{\frac{i\omega_n^* v}{l-v^2} x} \sin \frac{\omega_n^*}{l-v^2} x + K.E. \quad (3.18)$$

Burada ω_n^* ifadesi dış açılımı şerit kabulüyle çözdüğümüzde oluşan değerdir. Sistemin tabii frekansıyla karıştırılmamalıdır.

$O(\varepsilon)$ mertebesi çözümü;

İlk mertebe çözümünü denklem (3.10)'de yerine yazarsak;

$$D_0^2 w_l^o + 2vD_0 w_l^{o'} + (v^2 - 1)w_l^{o''} = -2[D_0 D_1 A_n Y_{n_0} + vD_1 A_n Y_{n_0}'] e^{i\omega_n^* T_0} + K.E. \quad (3.19)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki terimler seküler terimlerdir ve patlamaya neden olurlar. Bu nedenle bu terimler sıfıra eşitlenir.

$$D_0 D_1 A_n Y_{n_0} + vD_1 A_n Y_{n_0}' = 0 \quad (3.20)$$

Türevleri açalım,

$$D_1 A_n i\omega_n^* Y_{n_0} + D_1 A_n v \left(\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} Y_{n_0} + \frac{\omega_n^*}{1-v^2} e^{\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} x} \cos \frac{\omega_n^*}{1-v^2} x \right) = 0 \quad (3.21)$$

Denklemleri daha sade hale getirelim,

$$D_1 A_n \left[i\omega_n^* Y_{n_0} + v \left(\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} Y_{n_0} + \frac{\omega_n^*}{1-v^2} e^{\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} x} \cos \frac{\omega_n^*}{1-v^2} x \right) \right] = 0 \quad (3.22)$$

Parantezin içi sıfır olamayacağından,

$$D_1 A_n = 0 \quad (3.23)$$

Buradan,

$$A_n = A_n(T_2) \quad (3.24)$$

elde edilir. Denklem (3.19)'in sağ tarafını sıfıra eşitledik, bu durumda şu hale geldi;

$$D_0^2 w_l^o + 2vD_0 w_l^{o'} + (v^2 - 1)w_l^{o''} = 0 \quad (3.25)$$

Çözüm önerilip, şartlar sağlatılırsa $O(\varepsilon)$ mertebesi çözümü $O(1)$ mertebesiyle aynı çıkacaktır;

$$Y_{n_1} = Y_{n_0} = C e^{\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} x} \sin \frac{\omega_n^*}{1-v^2} x \quad (3.26)$$

$$w_1^o = A_n e^{i\omega_n^* T_0} e^{\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} x} \sin \frac{\omega_n^*}{1-v^2} x + K.E. \quad (3.27)$$

$O(\varepsilon^2)$ Mertebesi;

$$D_0^2 w_2^o + 2vD_0 w_2^o' + (v^2 - 1)w_2^o'' = -[2D_0 D_1 A_n Y_{n_1} + 2vD_1 A_n Y_{n_1}' + A_n Y_{n_0}^{iv}] e^{i\omega_n^* T_0} \quad (3.28)$$

Bulduğumuz önceki mertebeye çözümlerini de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} D_0^2 w_2^o + 2vD_0 w_2^o' + (v^2 - 1)w_2^o'' = & \{ -2D_0 D_1 A_n Y_{n_1} \\ & -2vD_1 A_n \left(\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} Y_{n_1} + \frac{\omega_n^*}{1-v^2} e^{\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} x} \cos \frac{\omega_n^*}{1-v^2} x \right) \\ & -A_n \left(\frac{i^4 \omega_n^*{}^4 v^4}{(1-v^2)^4} Y_{n_1} + 4 \frac{i^3 \omega_n^*{}^4 v^3}{(1-v^2)^4} e^{\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} x} \cos \frac{\omega_n^*}{1-v^2} x \right. \\ & \left. -6 \frac{i^2 \omega_n^*{}^4 v^2}{(1-v^2)^4} Y_{n_1} - 4 \frac{i\omega_n^*{}^4 v}{(1-v^2)^4} e^{\frac{i\omega_n^* v}{1-v^2} x} \cos \frac{\omega_n^*}{1-v^2} x \right. \\ & \left. + \frac{\omega_n^*{}^4}{(1-v^2)^4} Y_{n_0} \right\} e^{i\omega_n^* T_0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. Seküler olan terimleri ayıklayıp, sıfıra eşitleyelim. Homojen kısmın çözümünün yapısındaki terimler seküler terimlerdir, buradan;

$$\begin{aligned}
& -2D_0D_1A_nY_{n_1} - 2vD_1A_n\frac{i\omega_n^*v}{1-v^2}Y_{n_1} \\
& -A_n\left[\frac{\omega_n^{*4}v^4}{(1-v^2)^4}Y_{n_1} + 6\frac{\omega_n^{*4}v^2}{(1-v^2)^4}Y_{n_1} + \frac{\omega_n^{*4}}{(1-v^2)^4}Y_{n_0}\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Buradan,

$$D_1A_n4\omega_n^*Y_{n_1} + D_1A_n4\frac{i\omega_n^*v^2}{1-v^2}Y_{n_1} - \frac{\omega_n^{*4}}{(1-v^2)^4}A_n[v^4Y_{n_1} + 6v^2Y_{n_1} + Y_{n_0}] = 0 \tag{3.31}$$

$$D_1A_n4\omega_n^* + D_1A_n4\frac{i\omega_n^*v^2}{1-v^2} - \frac{\omega_n^{*4}}{(1-v^2)^4}(v^4 + 6v^2 + 1)A_n = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. Buradan da sade şekilde,

$$D_1A_n - i\frac{\omega_n^{*3}}{2(1-v^2)^3}(v^4 + 6v^2 + 1)A_n = 0 \tag{3.33}$$

Bu denklemin çözümü,

$$A_n = A_n e^{ik_0T_2} \tag{3.34}$$

Burada k_0 ifadesi şu şekilde tanımlanmıştır,

$$k_0 = \frac{\omega_n^3}{2(1-v^2)^3}(v^4 + 6v^2 + 1) \tag{3.35}$$

Burada kullanacağımız ω_n terimi kabul ettiğimiz şartlar için olan tabii frekanstır. Bu nedenle ilk mertebe çözümüne şartları sağlattığımızda elde edilecek eşitlikleri açık formda yazarsak;

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{ve} \quad c_1 e^{\frac{i\omega_n^*}{1+v}} + c_2 e^{\frac{i\omega_n^*}{1-v}} = 0 \tag{3.36}$$

elde ederiz. Buradan eşitlikleri ortak çözersek ω_n değerini buluruz;

$$\omega_n^* = n\pi(1 - v^2) \quad (3.37)$$

$$\omega_{nl} = \omega_n + \varepsilon^2 k_0 \quad (3.38)$$

Denklem (3.38)'deki ω_n ortak çözümden elde edilecek olan frekans değeridir. Bu değere ε^2 mertebesinde düzeltme terimleri getirilerek non-lineer frekans belirlenmiştir.

Şimdi mesnet civarlarında açılımlar yapılacak ve dış açılımla birleştirilerek tüm bölgelerde geçerli kompozit bir çözüm elde edilecektir.

3.2. İç Açılımlar:

3.2.1. $x \approx 0$ civarında iç açılım:

w 'ya şu şekilde bir çözüm önerelim,

$$w^I(x, t) = y_1(\zeta)y_2(x)e^{i\omega_n t} + K.E. \quad (3.39)$$

Bu açılımı denklem (3.1)'de yerine koyarsak,

$$-\omega_n^2 w^I + 2iv\omega_n (w^I)' + (v^2 - 1)(w^I)'' + \varepsilon^2 (w^I)^{iv} = 0 \quad (3.40)$$

Burada;

$$\zeta = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.41)$$

Türevleri belirleyecek olursak,

$$(w^I)' = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) y_2 + y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{I}{\varepsilon} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} y_2 + y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x} \quad (3.42)$$

İkinci türev,

$$(w^I)'' = \frac{\partial^2 y_1}{\partial \zeta^2} y_2 \frac{I}{\varepsilon^2} + 2 \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} \frac{\partial y_2}{\partial x} \frac{I}{\varepsilon} + y_1 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \quad (3.43)$$

Dördüncü türev ise,

$$(w^I)^{iv} = \frac{\partial^4 y_1}{\partial \zeta^4} y_2 \frac{I}{\varepsilon^4} + 4 \frac{\partial^3 y_1}{\partial \zeta^3} \frac{\partial y_2}{\partial x} \frac{I}{\varepsilon^3} + \dots \quad (3.44)$$

İfadeleri denklem (3.40)'de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} & -\omega_n^2 y_1 y_2 + 2iv\omega_n \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} y_2 + y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x} \right) \\ & + (v^2 - 1) \left(\varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \zeta^2} y_2 + 2\varepsilon^{-1} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} \frac{\partial y_2}{\partial x} + \dots \right) \\ & + \varepsilon^2 \left(\varepsilon^{-4} \frac{\partial^4 y_1}{\partial \zeta^4} y_2 + 4\varepsilon^{-3} \frac{\partial^3 y_1}{\partial \zeta^3} \frac{\partial y_2}{\partial x} + \dots \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Denklem (3.45)'yi ε^2 ile çarpıp mertebelerine ayıralım,

$$O(1): \frac{\partial^4 y_1}{\partial \zeta^4} y_2 + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 y_1}{\partial \zeta^2} y_2 = 0 \quad (3.46)$$

$$O(\varepsilon) : 4 \frac{\partial^3 y_1}{\partial \zeta^3} \frac{\partial y_2}{\partial x} + 2(v^2 - 1) \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} \frac{\partial y_2}{\partial x} + 2iv\omega_n \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} y_2 = 0 \quad (3.47)$$

Eşitliğin sağlanabilmesi için her bir mertebenin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekmektedir.

İlk mertebe;

$$\frac{\partial^4 y_1}{\partial \zeta^4} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 y_1}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (3.48)$$

Bu tip bir diferansiyel denklemin çözümü şu şekildedir;

$$y_1 = a_1(t) + a_2(t)\zeta + a_3(t)e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} + a_4(t)e^{\sqrt{1-v^2}\zeta} \quad (3.49)$$

Burada $x \approx 0$ civarında ikinci ve dördüncü terimler sonsuza gitmektedir. Bu durumu ortadan kaldırmak için;

$$a_2(t) = 0 \quad , \quad a_4(t) = 0 \quad (3.50)$$

almamız gerekir. Bu durumda denkleminiz şu hale gelecektir;

$$y_1 = a_1(t) + a_3(t)e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} \quad (3.51)$$

$a_1(t)$ terimi de mekan bağımlılığı içermemektedir. Biz kompozit çözüme mesnet şartlarını sağlarken sadece mekana bağlı şartları sağlatacağımız için bu terimi ihmal edip, çözümü şu şekilde kabul edebiliriz;

$$y_1 = a_3(t)e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} = a_3(t)e^{-\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon}x} \quad (3.52)$$

$O(\varepsilon)$ mertebesi çözümünü inceleyelim, elde ettiğimiz y_1 çözümünü de yerine koyup denklemi tekrar yazalım,

$$4(-\sqrt{1-v^2})^3 c_3(t) e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} y_2' + 2(v^2 - 1)(-\sqrt{1-v^2}) c_3(t) e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} y_2' + 2iv\omega_n(-\sqrt{1-v^2}) c_3(t) e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} y_2 = 0 \quad (3.53)$$

Denklem (3.53)'i sadeleştirirsek,

$$(1-v^2)y_2' + iv\omega_n y_2 = 0 \quad (3.54)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü için;

$$[(1-v^2)r + iv\omega_n]y_2 = 0 \quad (3.55)$$

Buradan r değeri;

$$r = -\frac{iv\omega_n}{1-v^2} \quad (3.56)$$

bulunur. Sonuç olarak y_2 ifadesi, r değerini yerine koyduğumuzda şu şekilde elde edilir;

$$y_2 = e^{-\frac{iv\omega_n x}{1-v^2}} \quad (3.57)$$

Katsayı $a_3(t)$ yerine de dış açılımla uyumlu olması açısından $c_3(t)$ diyebiliriz.

Buradan da $x \approx 0$ civarında iç açılım çözümü;

$$Y^I(x) = a_3(t) e^{-\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} x} e^{-\frac{iv\omega_n x}{1-v^2}} = c_3(t) e^{(-\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2})x} \quad (3.58)$$

3.2.2. $x \approx l$ civarında iç açılım:

Yine iç açılım için w 'ya şu şekilde bir açılım önerelim,

$$w^{II}(x,t) = y_3(\zeta)y_4(x)e^{i\omega_n t} \quad (3.59)$$

Bu durumda denklem (3.1);

$$-\omega_n^2 w^{II} + 2iv\omega_n (w^{II})' + (v^2 - 1)(w^{II})'' + \varepsilon^2 (w^{II})^{iv} = 0 \quad (3.60)$$

şekline gelir. Burada;

$$\zeta = \frac{l-x}{\varepsilon} \quad (3.61)$$

dir. Türevleri belirleyelim,

$$(w^{II})' = \left(\frac{\partial y_3}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) y_4 + y_3 \frac{\partial y_4}{\partial x} = -\frac{l}{\varepsilon} \frac{\partial y_3}{\partial \zeta} y_4 + y_3 \frac{\partial y_4}{\partial x} \quad (3.62)$$

İkinci türev,

$$(w^{II})'' = \frac{\partial^2 y_3}{\partial \zeta^2} y_4 \frac{l}{\varepsilon^2} - 2 \frac{\partial y_3}{\partial \zeta} \frac{\partial y_4}{\partial x} \frac{l}{\varepsilon} + y_3 \frac{\partial^2 y_4}{\partial x^2} \quad (3.63)$$

ve dördüncü türev de,

$$(w^{II})^{iv} = \frac{\partial^4 y_3}{\partial \zeta^4} y_4 \frac{l}{\varepsilon^4} - 4 \frac{\partial^3 y_3}{\partial \zeta^3} \frac{\partial y_4}{\partial x} \frac{l}{\varepsilon^3} + \dots \quad (3.64)$$

bulunur. İfadeleri yerine yazacak olursak;

$$\begin{aligned}
& -\omega_n^2 y_3 y_4 + 2iv\omega_n \left(-\varepsilon^{-1} \frac{\partial y_3}{\partial \zeta} y_4 + y_3 \frac{\partial y_4}{\partial x} \right) \\
& + (v^2 - 1) \left(\varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 y_3}{\partial \zeta^2} y_4 - \varepsilon^{-1} 2 \frac{\partial y_3}{\partial \zeta} \frac{\partial y_4}{\partial x} + \dots \right) \\
& + \varepsilon^2 \left(\varepsilon^{-4} \frac{\partial^4 y_3}{\partial \zeta^4} y_4 - 4\varepsilon^{-3} \frac{\partial^3 y_3}{\partial \zeta^3} \frac{\partial y_4}{\partial x} + \dots \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Denklem (3.65)'yi ε^2 ile çarpıp, mertebelerine ayıralım, eşitliğin sağlanabilmesi için her bir mertebenin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekmektedir;

$$O(1): \frac{\partial^4 y_3}{\partial \zeta^4} y_4 + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 y_3}{\partial \zeta^2} y_4 = 0 \tag{3.66}$$

$$O(\varepsilon): -4 \frac{\partial^3 y_3}{\partial \zeta^3} \frac{\partial y_4}{\partial x} - 2(v^2 - 1) \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} \frac{\partial y_2}{\partial x} - 2iv\omega_n \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} y_2 = 0 \tag{3.67}$$

Denklemler diğer iç açılım ile aynı çıktı. İlk mertebenin çözümünde;

$$y_3 = a_5(t) + a_6(t)\zeta + a_7(t)e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} + a_8(t)e^{\sqrt{1-v^2}\zeta} \tag{3.68}$$

yine $x \approx 1$ civarında patlamaya neden olacak terimlerim katsayıları sıfır kabul edilir ve ilk sabit ihmal edilirse;

$$y_3 = a_7(t)e^{-\sqrt{1-v^2}\zeta} = a_7(t)e^{-\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon}(1-x)} \approx a_7(t)e^{\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon}x} \tag{3.69}$$

bulunur. Diğer mertebe de aynı şekilde çözülürse;

$$y_4 = e^{\frac{iv\omega_n x}{1-v^2}} \tag{3.70}$$

elde edilir. $a_7(t)$ katsayısı yerine yine dış açılımla uyumlu olması için $c_4(t)$ diyebiliriz. Bu şekilde $x \approx 1$ deki iç açılım çözümü şu şekilde elde edilir;

$$Y^H(x) = a_7(t) e^{\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} x} e^{-\frac{iv\omega_n}{1-v^2} x} = c_4(t) e^{(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2})x} \quad (3.71)$$

Buradan da iki mesnetli sistem için kompozit çözümü;

$$Y^c = c_1 e^{\frac{i\omega_n}{1+v} x} + c_2 e^{\frac{i\omega_n}{1-v} x} + c_3 e^{(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2})x} + c_4 e^{(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2})x} \quad (3.72)$$

şeklinde elde ederiz.

Elde ettiğimiz bu denklemi daha basit şekilde ifade etmek için bazı tanımlamalar yapalım,

$$r_1 = -\frac{i\omega_n}{1+v} \quad , \quad r_2 = \frac{i\omega_n}{1-v} \quad (3.73)$$

$$r_3 = \left(-\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}\right) \quad , \quad r_4 = \left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}\right) \quad (3.74)$$

Bu durumda mod yapısı denklemimiz;

$$Y^c = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} + c_4 e^{r_4 x} \quad (3.75)$$

halini alır.

3.3. Özel Mesnet Durumları:

3.3.1. Basit-Basit Mesnet Durumu:

Basit-basit mesnet için sınır şartları şu şekildedir;

$$\begin{aligned} Y(0) = 0 \quad , \quad Y(1) = 0 \\ Y''(0) = 0 \quad , \quad Y''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Bu şartları denklem (3.75)'da yerine koyarsak karşımıza aşağıdaki dört eşitlik çıkar;

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \quad (3.77)$$

$$c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 + c_4 r_4^2 = 0 \quad (3.78)$$

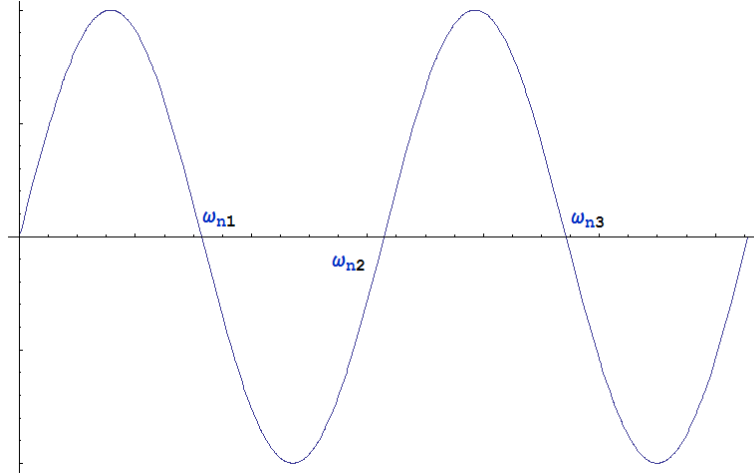
$$c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} + c_3 e^{r_3} + c_4 e^{r_4} = 0 \quad (3.79)$$

$$c_1 r_1^2 e^{r_1} + c_2 r_2^2 e^{r_2} + c_3 r_3^2 e^{r_3} + c_4 r_4^2 e^{r_4} = 0 \quad (3.80)$$

Bu eşitliklerin çözümünü bulmak için ilk önce matris formunda yazalım,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ e^{r_1} & e^{r_2} & e^{r_3} & e^{r_4} \\ r_1^2 e^{r_1} & r_2^2 e^{r_2} & r_3^2 e^{r_3} & r_4^2 e^{r_4} \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}}_{\{C\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{F\}} \quad (3.81)$$

Burada $[K]$ matrisinin determinanı sifira eşit olmalıdır. $Det[K] = 0$ bu ifade bize frekans denklemini verecektir. Elde edilecek frekans denklemi şu şekilde bir yapı gösterecektir;



Şekil 3.1. Frekans denkleminin genel bir yapısı.

Burada mod yapısı eğrisinin eksenini kestiği noktalar denklemin kökleridir. Eğri yatay eksenini sonsuz sayıda kestiği için sonsuz sayıda mod vardır. Daha önce de bahsettiğimiz gibi buradan elde edilecek olan ω_n değerine denklem (3.35)'de bulduğumuz düzeltme terimini ekleyerek sistemin gerçek frekansını bulacağız. Sistemin frekansını bulduktan sonra c katsayılarını bulup, deplasman denklemini elde edeceğiz. Bunun için;

$c_1 = I$ olsun. Bu durumda dört adet sınır şartı denklemi şu hale gelir;

$$c_2 + c_3 + c_4 = -I \quad (3.82)$$

$$c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 + c_4 r_4^2 = -r_1^2 \quad (3.83)$$

$$c_2 e^{r_2} + c_3 e^{r_3} + c_4 e^{r_4} = -e^{r_1} \quad (3.84)$$

$$c_2 r_2^2 e^{r_2} + c_3 r_3^2 e^{r_3} + c_4 r_4^2 e^{r_4} = -r_1^2 e^{r_1} \quad (3.85)$$

Elde edilen bu denklemleri tekrar matris şeklinde yazarken bir noktaya dikkat etmeliyiz; $c_1 = I$ kabulü yaptığımız için denklemlerden dördünü de kullanamayız. Bu nedenle en karmaşık olan son denklemi kullandık kabul edelim, ilk sütunumuz da $c_1 = I$ olduğu için yok oldu. Bu durumda;

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{r_1^2} & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ \cancel{e^{r_1}} & e^{r_2} & e^{r_3} & e^{r_4} \\ \cancel{r_1^2 e^{r_1}} & \cancel{r_2^2 e^{r_2}} & \cancel{r_3^2 e^{r_3}} & \cancel{r_4^2 e^{r_4}} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ e^{r_2} & e^{r_3} & e^{r_4} \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}}_{\{C\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -1 \\ -r_1^2 \\ -e^{r_1} \end{Bmatrix}}_{\{F\}} \quad (3.87)$$

Bu şekildeki bir matris sisteminde $\{C\}$ matrisini bulmak için; $\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{F\}$ kuralı uygulanır.

3.3.1.a. Sayısal Örnekler:

Bu kısımda basit-basit mesnet durumu için denklemlerden elde edilen tablolar ve grafikler verilecektir. Tablo 3.1 ve 3.2 de değişik ortalama hız değerlerinde ve enine direngenliğe bağlı olarak I. ve II. mod frekans değerleri verilmiştir. Görüldüğü gibi ortalama hızın artmasıyla düşen tabii frekans değerleri enine direngenliğin artmasıyla yükselmektedir. Bu da ön görülebilen bir olaydır; çünkü enine direngenlik arttıkça esnek giriş, giriş davranışına yaklaşmaktadır. Şekil 3.2 de elde edilen bu tablolardaki değerler grafik halinde verilmiş ve bu grafik L.Kong ve R.G. Parker'ın 2003 yılında yayınlanan konu ile ilgili makalesindeki çözümle karşılaştırılmıştır. Şekil 3.3'te ise L.Kong ve R.G. Parker'ın yapmış olduğu perturbasyon çözümüyle tam çözümü karşılaştırdığı grafik verilmiştir. Bu grafikte bizim yaptığımız çözümün diğer çözüme oranla tam çözüme daha çok yaklaştığı görülmektedir. Şekil 3.4-3.10'da kompozit çözüm ve dış açılım çözümünün, basit-basit mesnet için deplasman değişimleri karşılaştırılmıştır. Her iki çözümde deplasman şartlarını sağlamaktadır. Dış açılım çözümünün kompozit çözümle mesnetler arasında kalan bölgede tam çakışmadığı görülmüştür. Bu durum enine direngenliğin artmasıyla daha da belirginleşmektedir.

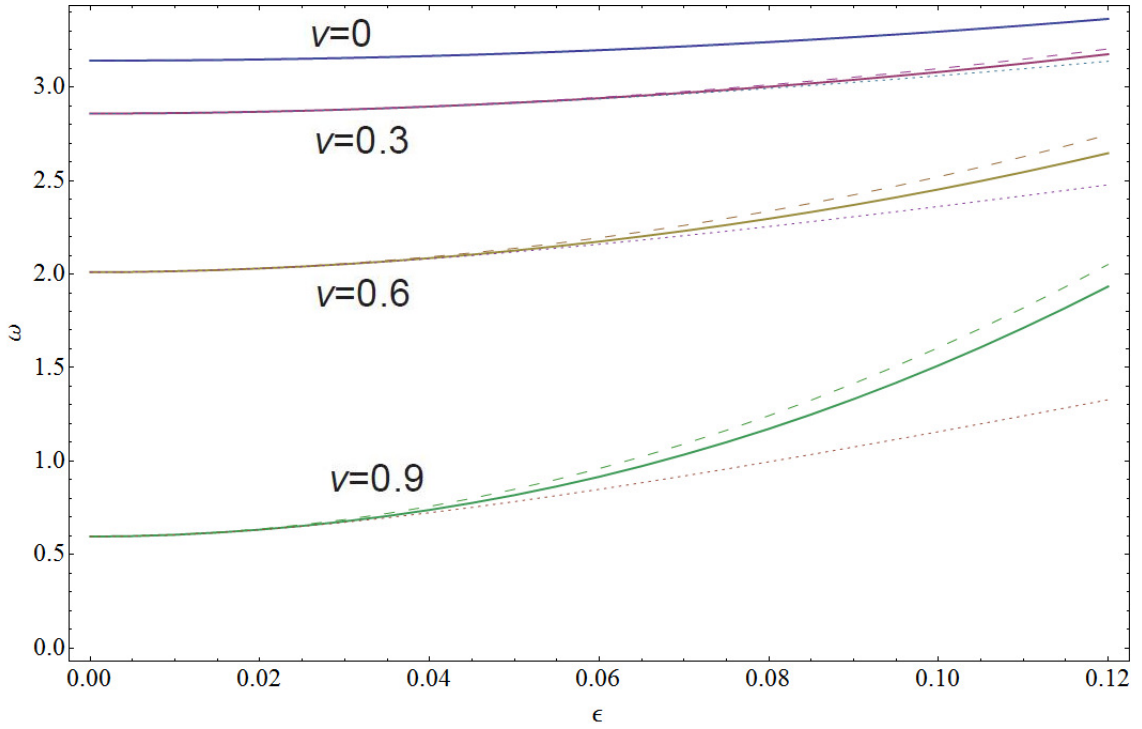
Bunun nedeni, dış açılım çözümünde sadece ilk mertebe çözümünü almamız, $O(\varepsilon)$ terimlerini çözüme katmamamızdır. Bu nedenle kompozit çözüm özellikle ε değeri arttıkça dış açılıma oranla bize daha hassas sonuçlar vermektedir. Bununla birlikte şekil 3.11-3.14'de karşılaştırmış olduğumuz moment değişimlerinin karşılaştırmasında dış açılım çözümünün sınırlardaki şartları sağlamadığı görülmüştür. Kompozit çözümü elde etme amacımız zaten bu problemi ortadan kaldırmaktı ve görüldüğü gibi kompozit çözümümüz sınırlardaki şartları sağlamaktadır. Bunun dışında elde ettiğimiz deplasman değişimi grafiklerini incelersek ortalama hızın artmasıyla maksimum genliklerin de arttığını görürüz.

Tablo 3.1. Basit-Basit Mesnetli Sistem İçin 1. Mod Frekans Değerleri

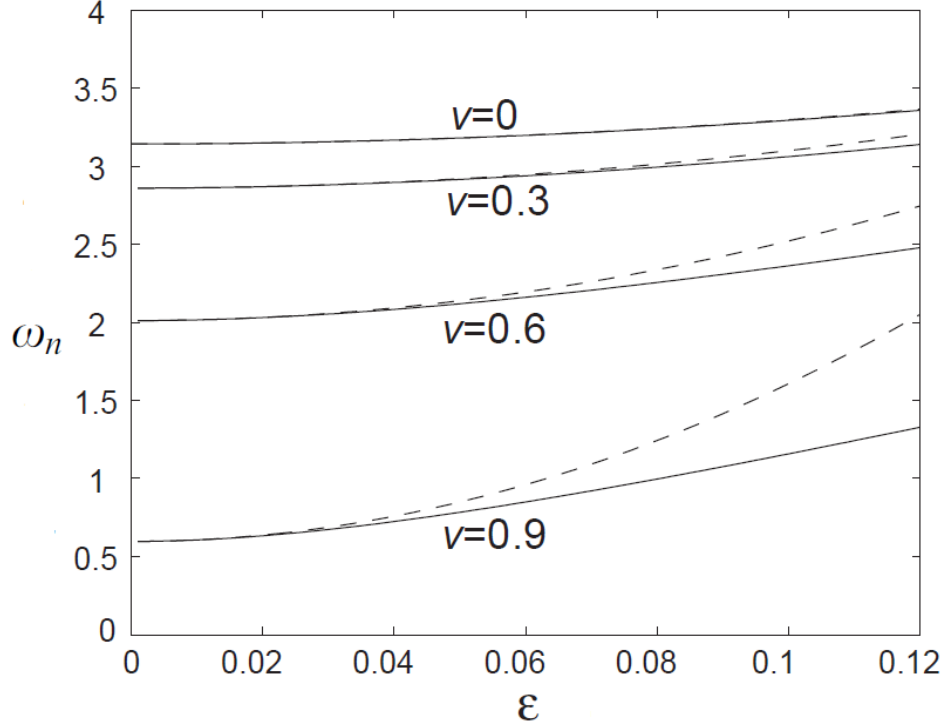
ε	$\nu=0$	$\nu=0.3$	$\nu=0.6$	$\nu=0.9$
0.000	3.14159	2.85885	2.01062	0.59690
0.005	3.14198	2.85945	2.01188	0.59937
0.010	3.14314	2.86123	2.01561	0.60656
0.015	3.14508	2.86417	2.02172	0.61818
0.020	3.14779	2.86826	2.03015	0.63403
0.025	3.15128	2.87349	2.04081	0.65404
0.030	3.15555	2.87983	2.05365	0.67821
0.035	3.16058	2.88728	2.06863	0.70663
0.040	3.16640	2.89581	2.08569	0.73941
0.045	3.17299	2.90543	2.10482	0.77671
0.050	3.18035	2.91611	2.12600	0.81864
0.055	3.18849	2.92785	2.14922	0.86534
0.060	3.19740	2.94065	2.17448	0.91690
0.065	3.20709	2.95449	2.20181	0.97339
0.070	3.21756	2.96938	2.23123	1.03490
0.075	3.22880	2.98531	2.26275	1.10148
0.080	3.24081	3.00228	2.29641	1.17316
0.085	3.25360	3.02030	2.33224	1.24999
0.090	3.26717	3.03936	2.37028	1.33199
0.095	3.28151	3.05947	2.41056	1.41919
0.100	3.29662	3.08064	2.45312	1.51161
0.105	3.31251	3.10286	2.49799	1.60926
0.110	3.32918	3.12615	2.54521	1.71217
0.115	3.34662	3.15051	2.59481	1.82033
0.120	3.36484	3.17596	2.64682	1.93376

Tablo 3.2. Basit-Basit Mesnetli Sistem İçin 2. Mod Frekans Değerleri

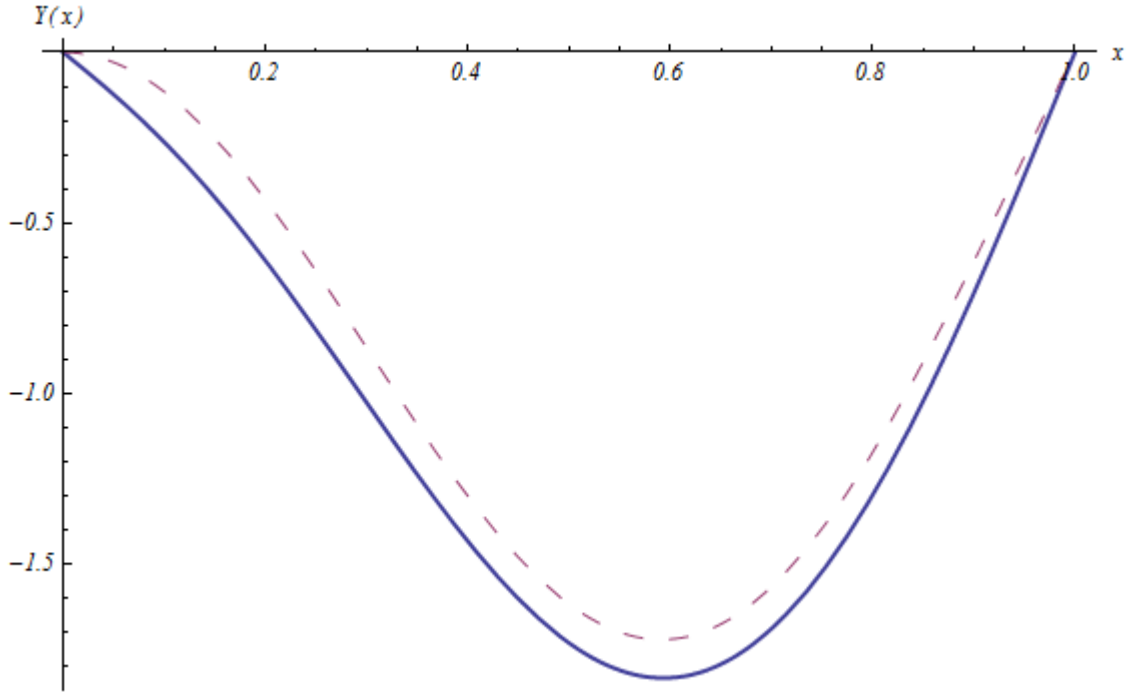
ε	$\nu=0$	$\nu=0.3$	$\nu=0.6$	$\nu=0.9$
0.000	6.28319	5.71770	4.02124	1.19381
0.005	6.28629	5.72248	4.03133	1.21356
0.010	6.29559	5.73671	4.06116	1.27132
0.015	6.31109	5.76028	4.11017	1.36583
0.020	6.33280	5.79306	4.17788	1.49720
0.025	6.36070	5.83496	4.26401	1.66630
0.030	6.39481	5.88589	4.36844	1.87411
0.035	6.43512	5.94581	4.49119	2.12146
0.040	6.48163	6.01469	4.63239	2.40893
0.045	6.53434	6.09252	4.79225	2.73693
0.050	6.59325	6.17934	4.97103	3.10567
0.055	6.65836	6.27517	5.16898	3.51531
0.060	6.72968	6.38006	5.38636	3.96589
0.065	6.80719	6.49407	5.62339	4.45744
0.070	6.89091	6.61727	5.88028	4.98996
0.075	6.98083	6.74972	6.15721	5.56340
0.080	7.07695	6.89149	6.45433	6.17775
0.085	7.17927	7.04265	6.77178	6.83297
0.090	7.28779	7.20325	7.10964	7.52906
0.095	7.40251	7.37335	7.46802	8.26599
0.100	7.52344	7.55301	7.84698	9.04375
0.105	7.65056	7.74227	8.24659	9.86234
0.110	7.78389	7.94117	8.66688	10.72180
0.115	7.92342	8.14974	9.10790	11.62200
0.120	8.06915	8.36803	9.56968	12.56310



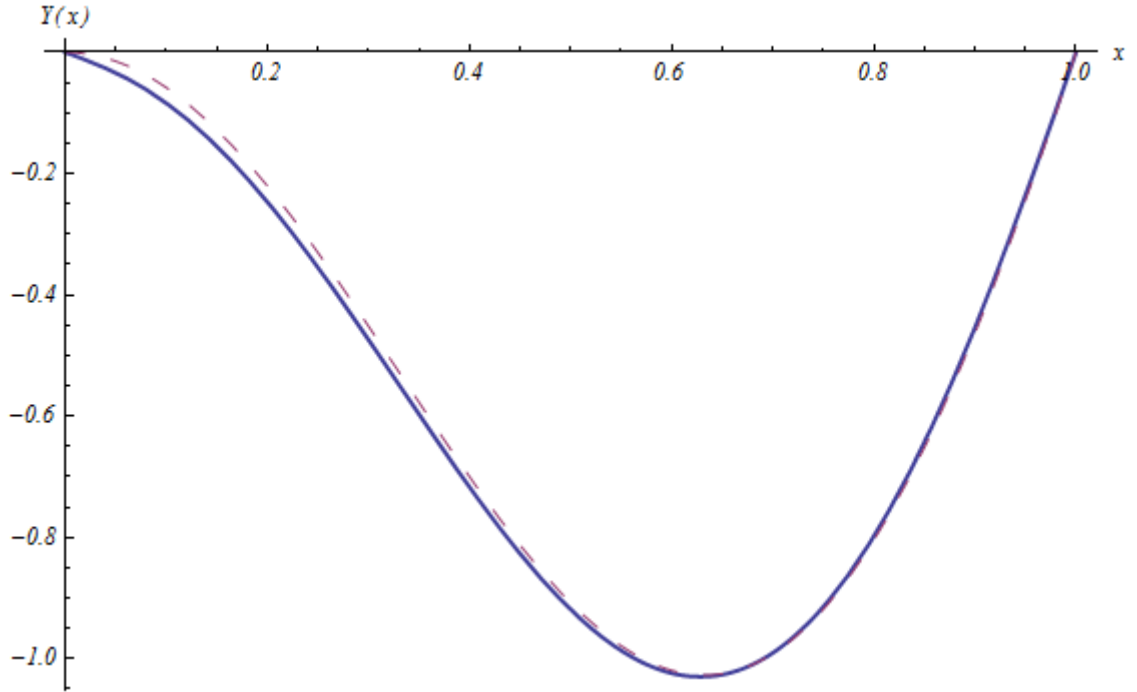
Şekil 3.2. Yaptığımız çözümün, L.G.Parker et al. (2003)'in yapmış olduğu pertürbasyon çözümünü ile karşılaştırılması. (- - -) L.Kong ve L.G.Parker çözümü; (—) bizim yaptığımız çözüm; (...) tam çözüm (I. Mod frekansa göre, basit-basit mesnet).



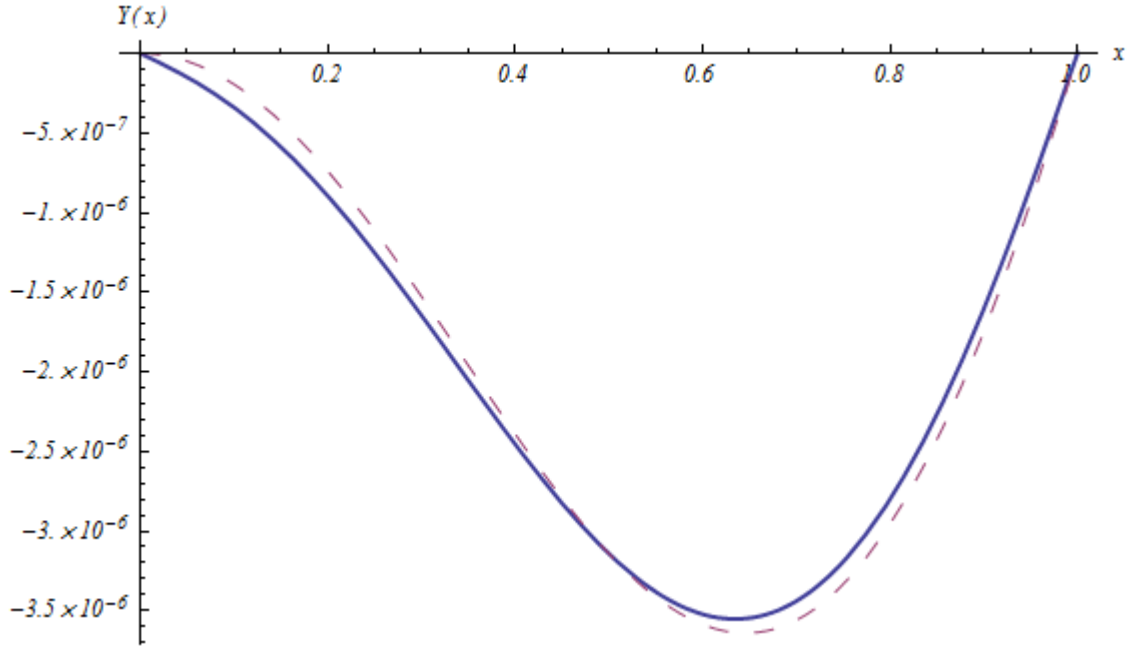
Şekil 3.3. R.G. Parker et al. (2003)'in yapmış olduğu pertürbasyon çözümünün tam çözümle karşılaştırılması - - -; pertürbasyon çözümü, — tam çözüm.(I. Mod, basit-basit mesnet).



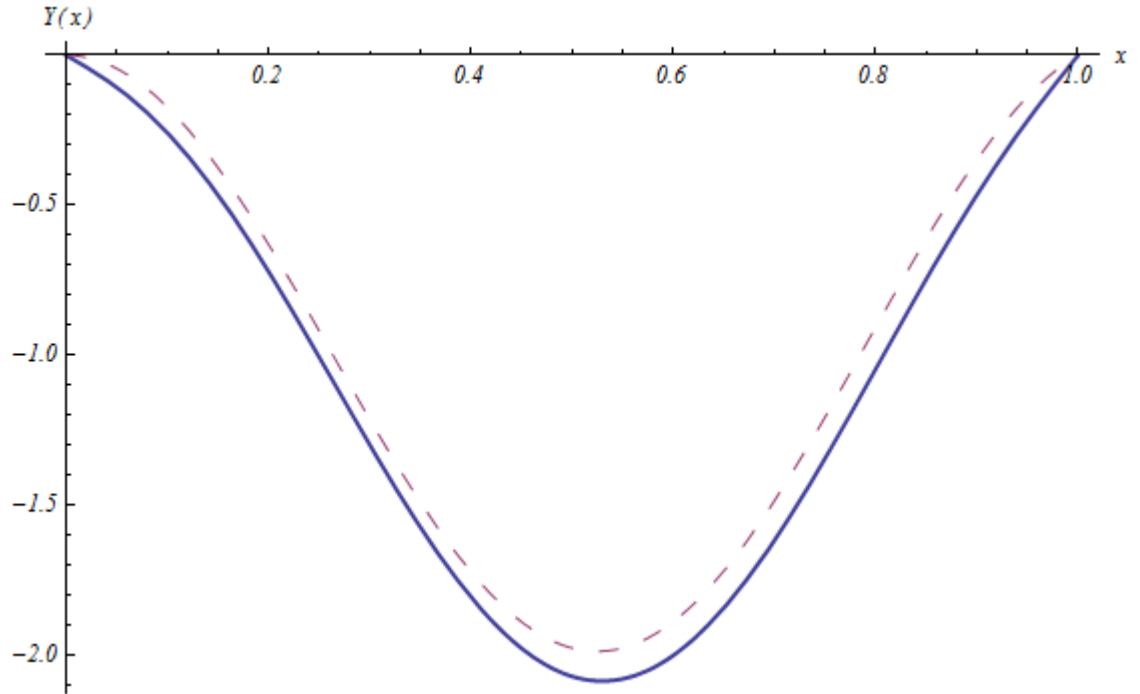
Şekil 3.4. $\varepsilon = 0.1, \nu = 0.6, n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



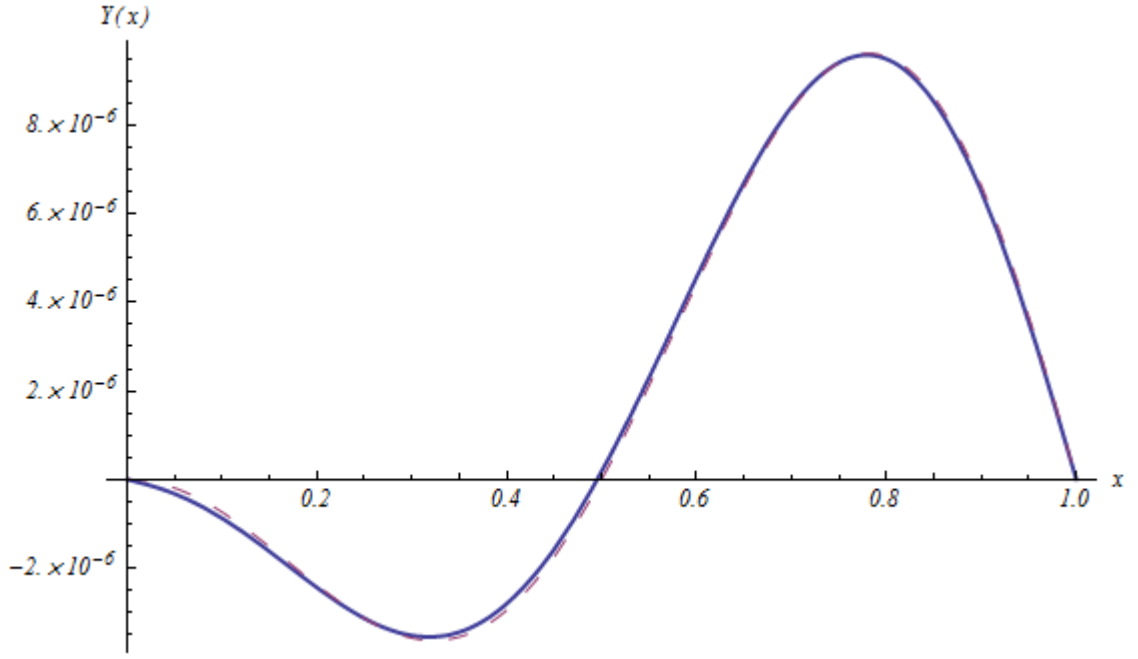
Şekil 3.5. $\varepsilon = 0.05, \nu = 0.3, n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



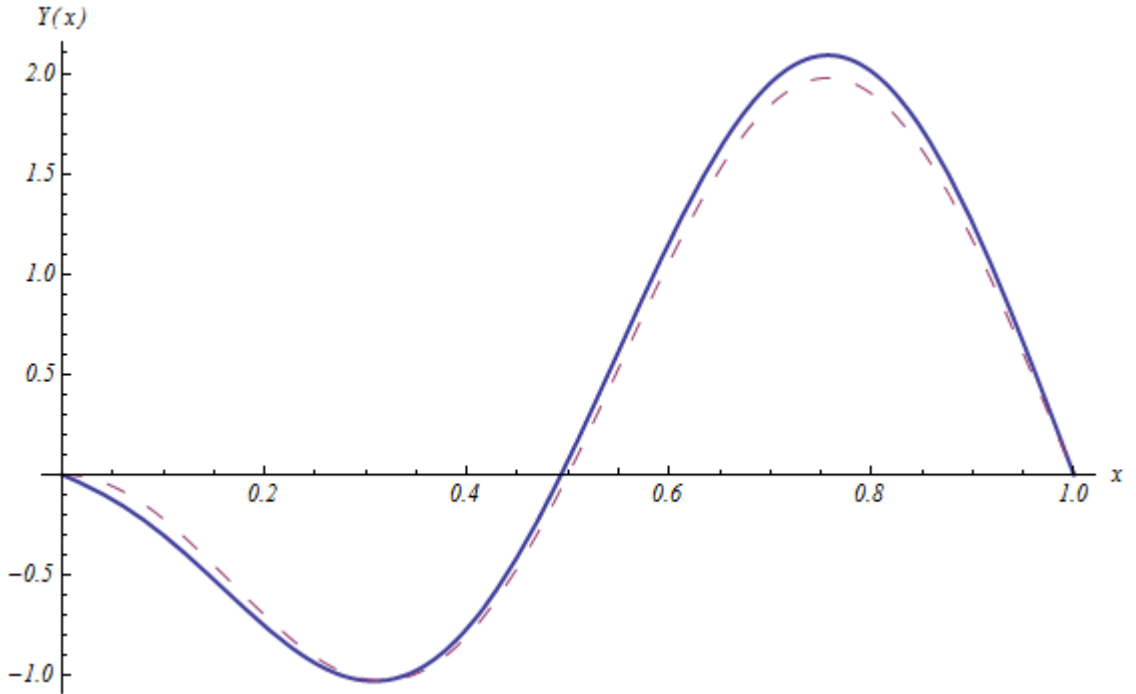
Şekil 3.6. $\varepsilon = 0.075$, $\nu = 0$, $n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



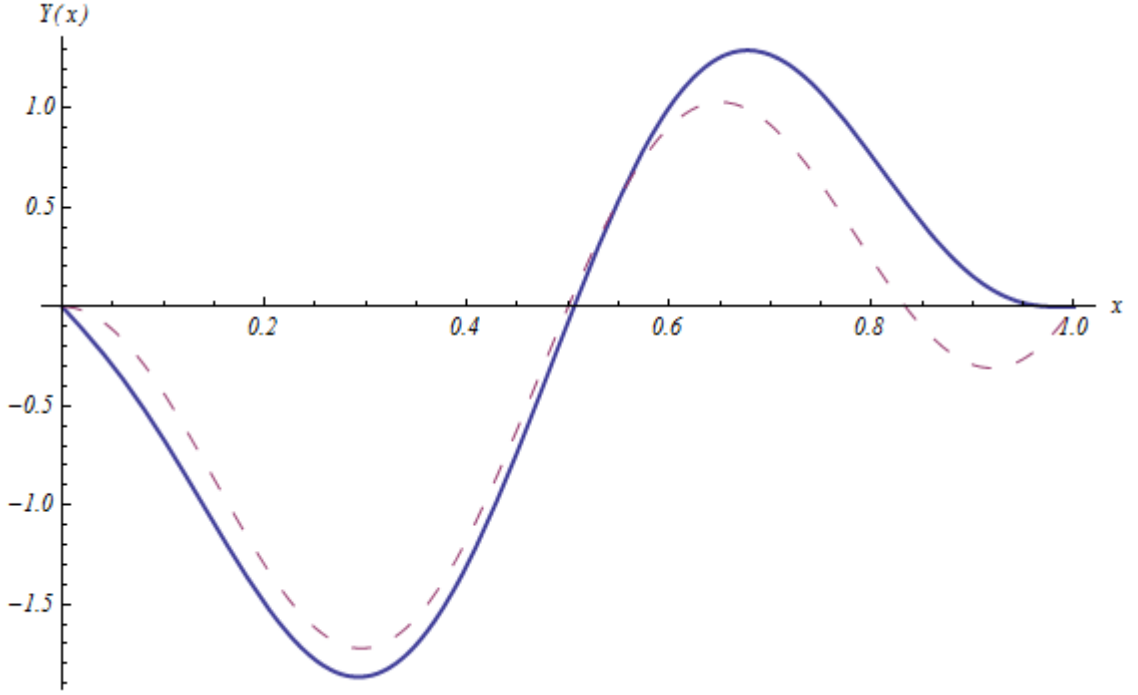
Şekil 3.7. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0.9$, $n = 1$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



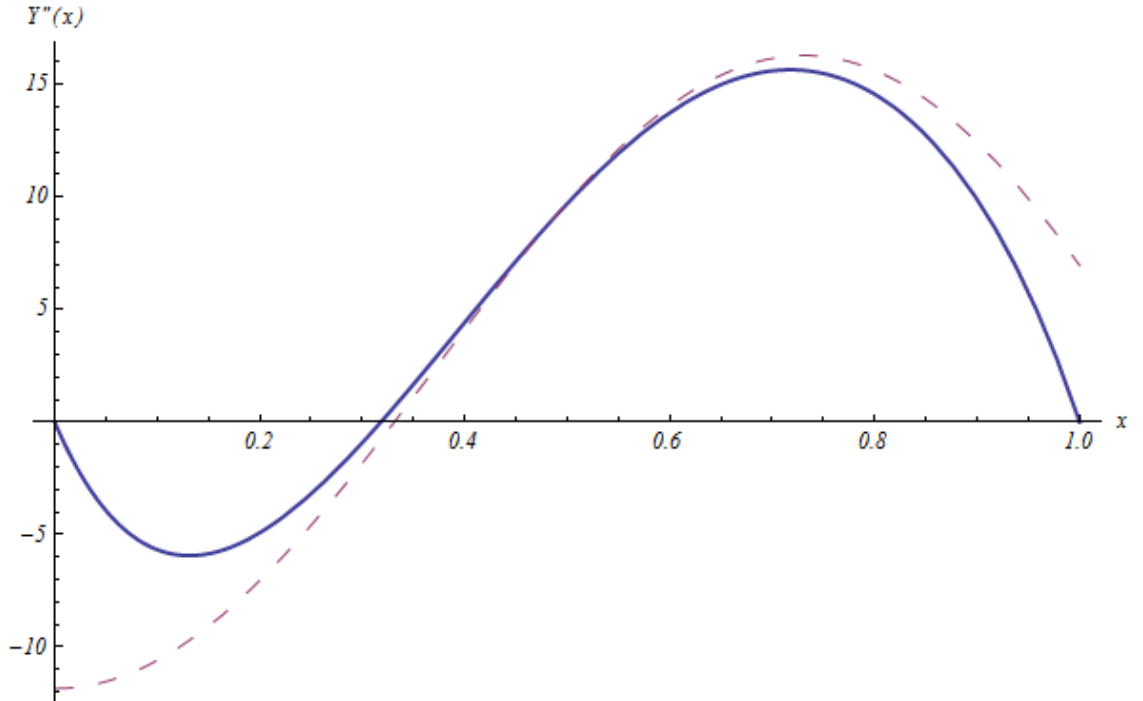
Şekil 3.8. $\varepsilon = 0.035$, $\nu = 0$, $n = 2$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



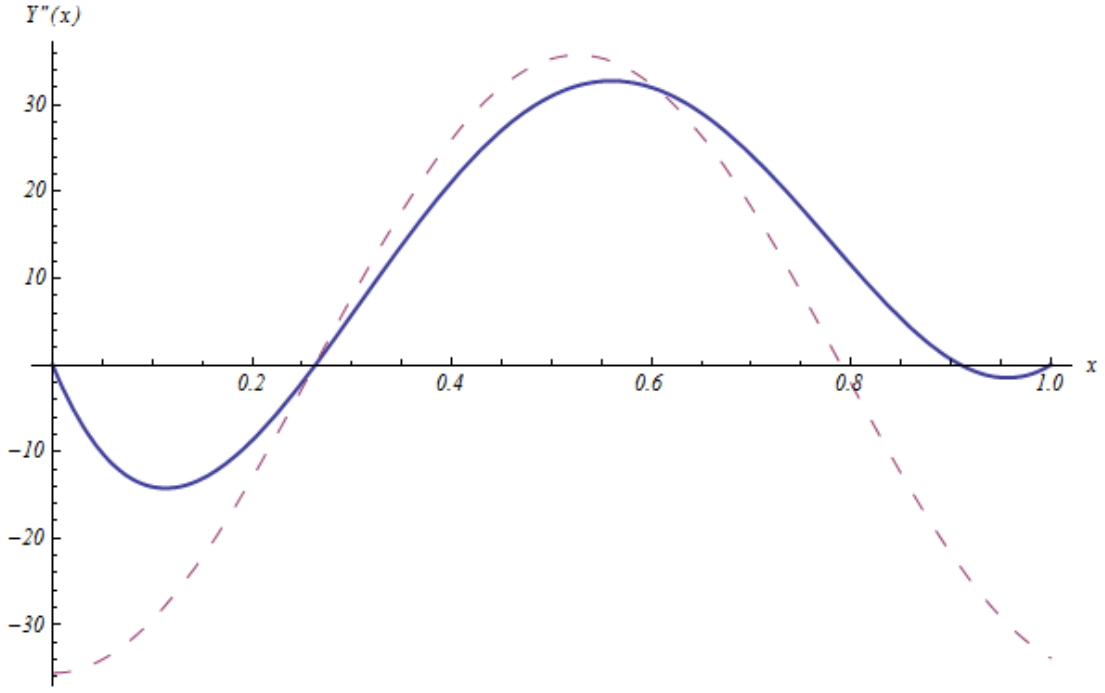
Şekil 3.9. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.3$, $n = 2$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



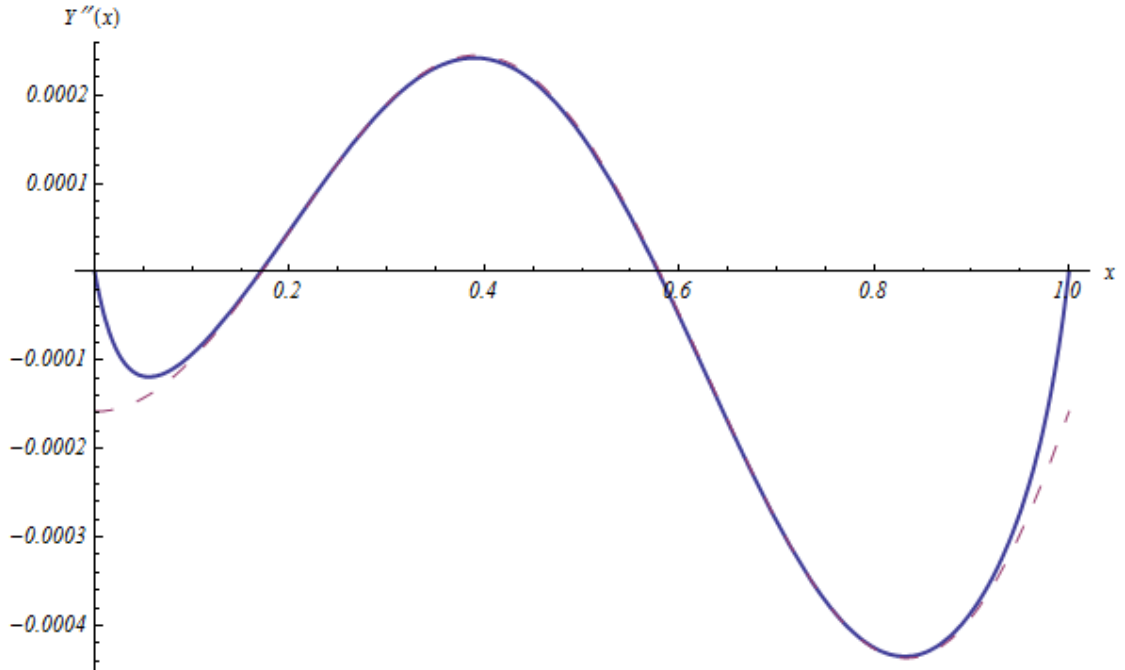
Şekil 3.10. $\varepsilon = 0.06$, $\nu = 0.6$, $n = 2$ için basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



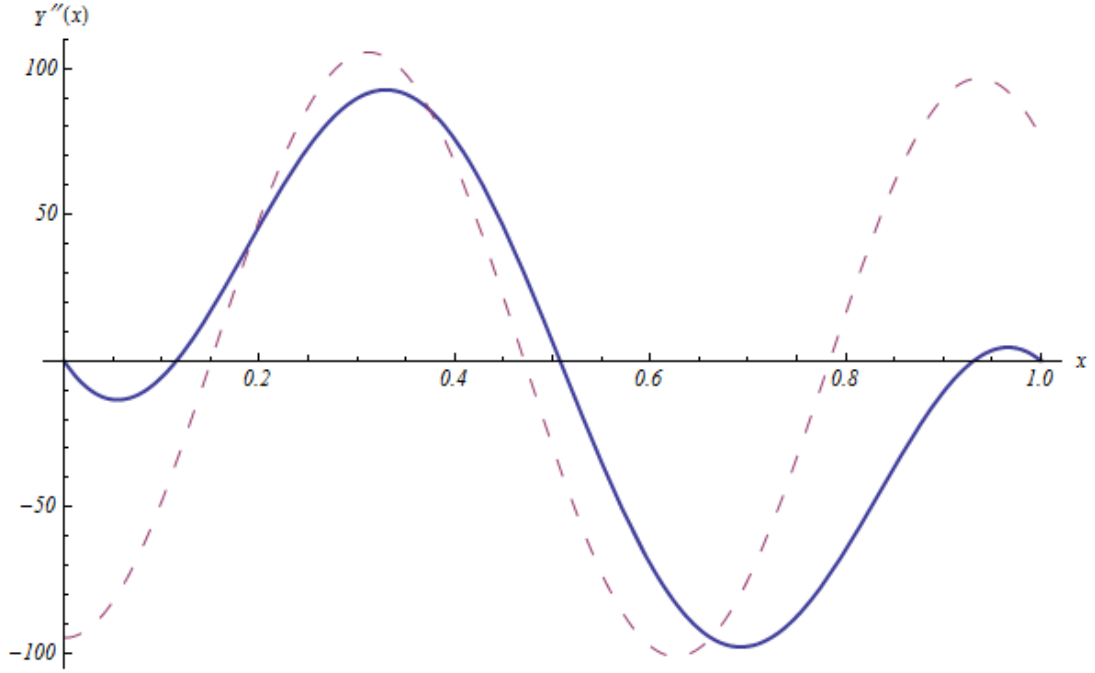
Şekil 3.11. $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.3$, $n = 1$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 3.12. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.9$, $n = 1$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 3.13. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0$, $n = 2$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 3.14. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.6$, $n = 2$ için basit-basit mesnet moment değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.

3.3.2. Ankastre-Ankastre Mesnet Durumu:

Ankastre-Ankastre mesnet için sınır şartları şu şekildedir;

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y'(1) = 0 \quad (3.88)$$

Bu şartları denklem (3.75)'da yerine koyarsak karşımıza şu dört eşitlik çıkar;

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \quad (3.89)$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 + c_4 r_4 = 0 \quad (3.90)$$

$$c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} + c_3 e^{r_3} + c_4 e^{r_4} = 0 \quad (3.91)$$

$$c_1 r_1 e^{r_1} + c_2 r_2 e^{r_2} + c_3 r_3 e^{r_3} + c_4 r_4 e^{r_4} = 0 \quad (3.92)$$

3.3.2.a. Sayısal Örnekler:

Basit-basit mesnetli sistemde olduğu gibi ankastre-ankastre mesnetli sistemde de ilk önce tablo 3.3 ve 3.4'te I. ve II. mod frekans değerleri verilmiş, sonra şekil 3.15'te grafik üzerinde gösterilmiş ve yine L.Kong ve L.G.Parker (2003)'ün yapmış olduğu perturbasyon çözümünü ile karşılaştırılmıştır. Yine buradaki grafikte de bizim yapmış

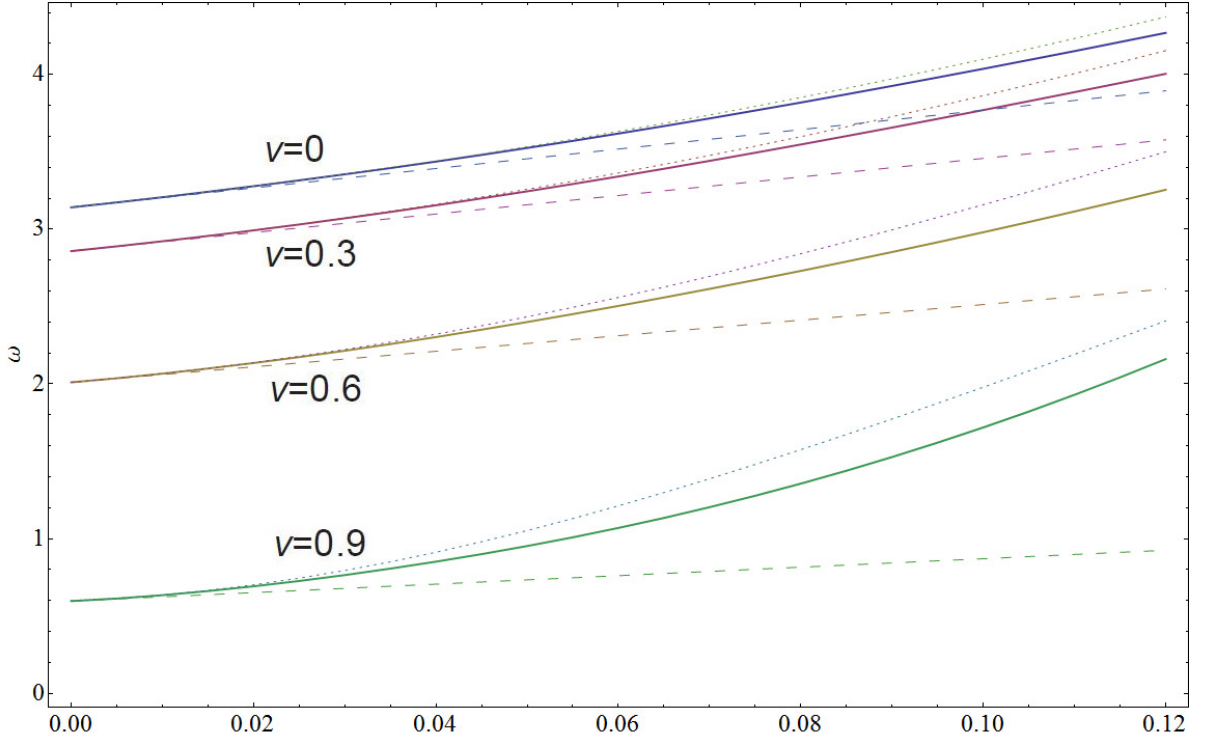
olduğumuz perturbasyon çözümü tam çözüme daha yakın bir çözüm olduğu görölmektedir. Ankastre mesnetleme durumunda enine direngenliğin artmasıyla meydana gelen tabii frekans değerlerindeki artış miktarı daha fazladır. Daha sonra da deplasman değişimleri Şekil 3.16-3.19’da ve eğim değişimlerinde Şekil 3.20-3.23’te verilmiş ve dış açılım çözümü ile kompozit çözüm karşılaştırılmış. Her iki çözüm deplasman grafiğinde sınır şartlarını sağlarken, eğim şartlarını dış açılım çözümü sağlamamaktadır. Ankastre mesnetleme durumunda basit mesnetlemeye oranla deplasman değişim grafiklerinde genlikler biraz daha büyüktür.

Tablo 3.3. Ankastre-Ankastre mesnet 1. mod frekans değerleri

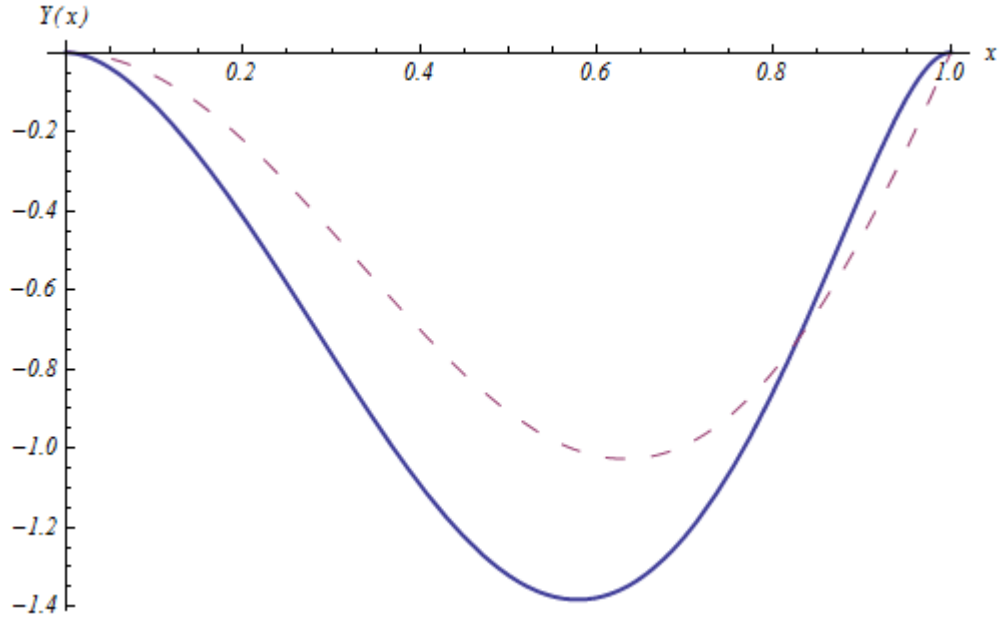
ε	$\nu=0$	$\nu=0.3$	$\nu=0.6$	$\nu=0.9$
0.000	3.14160	2.85886	2.01062	0.59691
0.005	3.17371	2.88973	2.03733	0.61337
0.010	3.20723	2.92242	2.06712	0.63511
0.015	3.24216	2.95690	2.09990	0.66163
0.020	3.27850	2.99315	2.13552	0.69240
0.025	3.31623	3.03112	2.17385	0.72699
0.030	3.35536	3.07078	2.21473	0.76512
0.035	3.39587	3.11209	2.25799	0.80668
0.040	3.43776	3.15499	2.30348	0.85169
0.045	3.48099	3.19943	2.35101	0.90030
0.050	3.52556	3.24535	2.40046	0.95269
0.055	3.57144	3.29267	2.45167	1.00904
0.060	3.61860	3.34134	2.50454	1.06954
0.065	3.66701	3.39128	2.55897	1.13437
0.070	3.71663	3.44243	2.61490	1.20367
0.075	3.76742	3.49469	2.67228	1.27756
0.080	3.81934	3.54802	2.73109	1.35614
0.085	3.87234	3.60232	2.79133	1.43950
0.090	3.92638	3.65755	2.85301	1.52769
0.095	3.98139	3.71363	2.91615	1.62078
0.100	4.03732	3.77051	2.98080	1.71881
0.105	4.09413	3.82813	3.04700	1.82180
0.110	4.15174	3.88643	3.11479	1.92980
0.115	4.21012	3.94539	3.18424	2.04280
0.120	4.26920	4.00495	3.25538	2.16084

Tablo 3.4. Ankastre-Ankastre mesnet 2. mod frekans değerleri

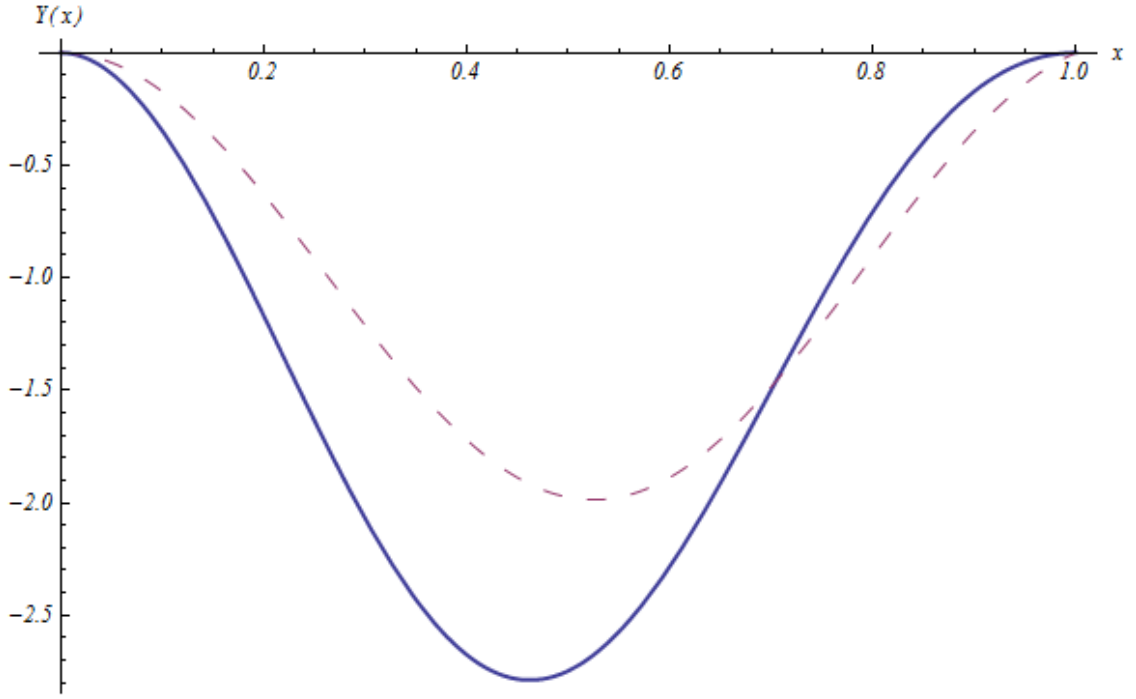
ε	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0,000	6,28320	5,71771	4,02125	1,19381
0,005	6,34973	5,78302	4,08220	1,24150
0,010	6,42364	5,85895	4,16395	1,32764
0,015	6,50479	5,94519	4,26558	1,44969
0,020	6,59305	6,04142	4,38613	1,60669
0,025	6,68828	6,14730	4,52479	1,79908
0,030	6,79029	6,26249	4,68090	2,02787
0,035	6,89891	6,38666	4,85403	2,29410
0,040	7,01393	6,51948	5,04396	2,59863
0,045	7,13515	6,66069	5,25067	2,94208
0,050	7,26234	6,81006	5,47427	3,32491
0,055	7,39531	6,96738	5,71497	3,74745
0,060	7,53382	7,13254	5,97302	4,20993
0,065	7,67769	7,30543	6,24870	4,71251
0,070	7,82671	7,48600	6,54230	5,25529
0,075	7,98071	7,67425	6,85408	5,83837
0,080	8,13954	7,87020	7,18429	6,46179
0,085	8,30304	8,07387	7,53315	7,12560
0,090	8,47111	8,28533	7,90087	7,82984
0,095	8,64366	8,50464	8,28764	8,57452
0,100	8,82060	8,73189	8,69361	9,35966
0,105	9,00188	8,96715	9,11892	10,18530
0,110	9,18747	9,21050	9,56371	11,05140
0,115	9,37735	9,46202	10,02810	11,95800
0,120	9,57152	9,72179	10,51210	12,90510



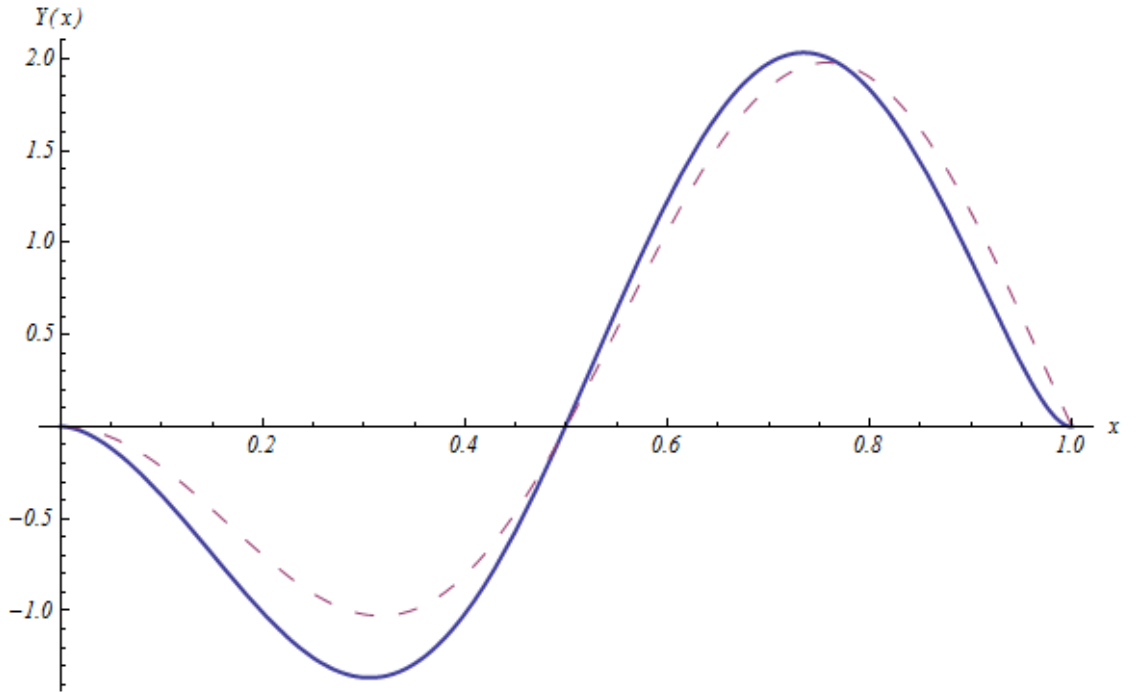
Şekil 3.15. Yaptığımız çözümün, L.G.Parker et al. (2003)'ün yapmış olduğu perturbasyon çözümünü ile karşılaştırılması. (- - -) L.Kong ve L.G.Parker çözümü; (—) bizim yaptığımız çözüm; (...) tam çözüm (I. Mod frekansa göre, ankastre-ankastre mesnet).



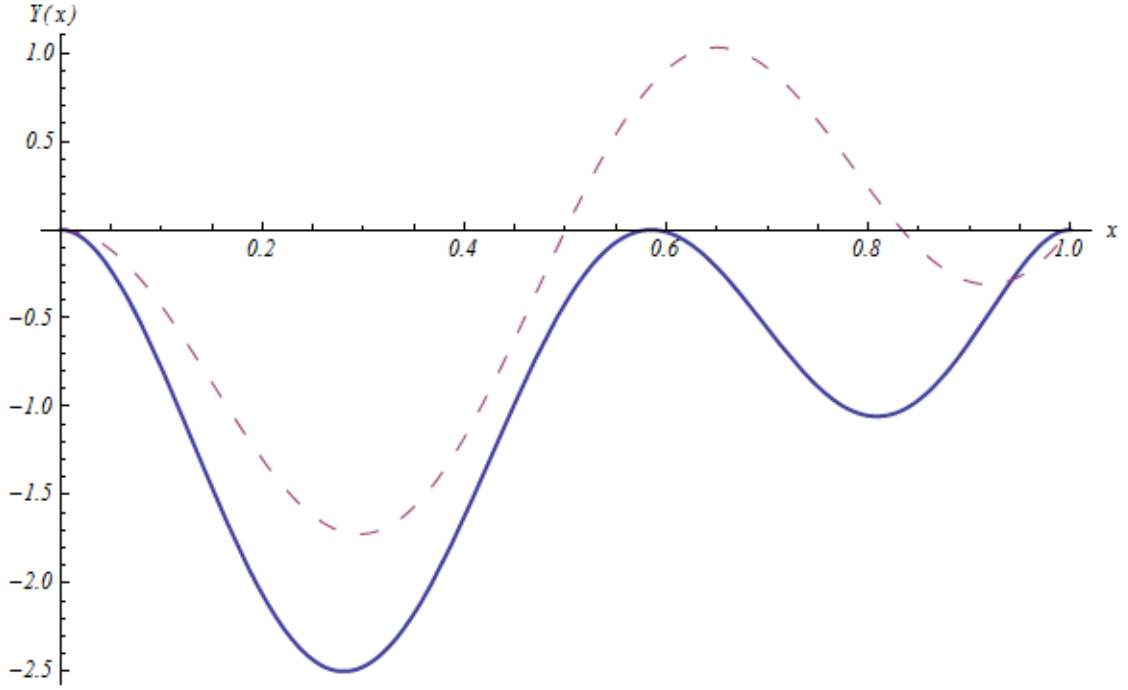
Şekil 3.16. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.3$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



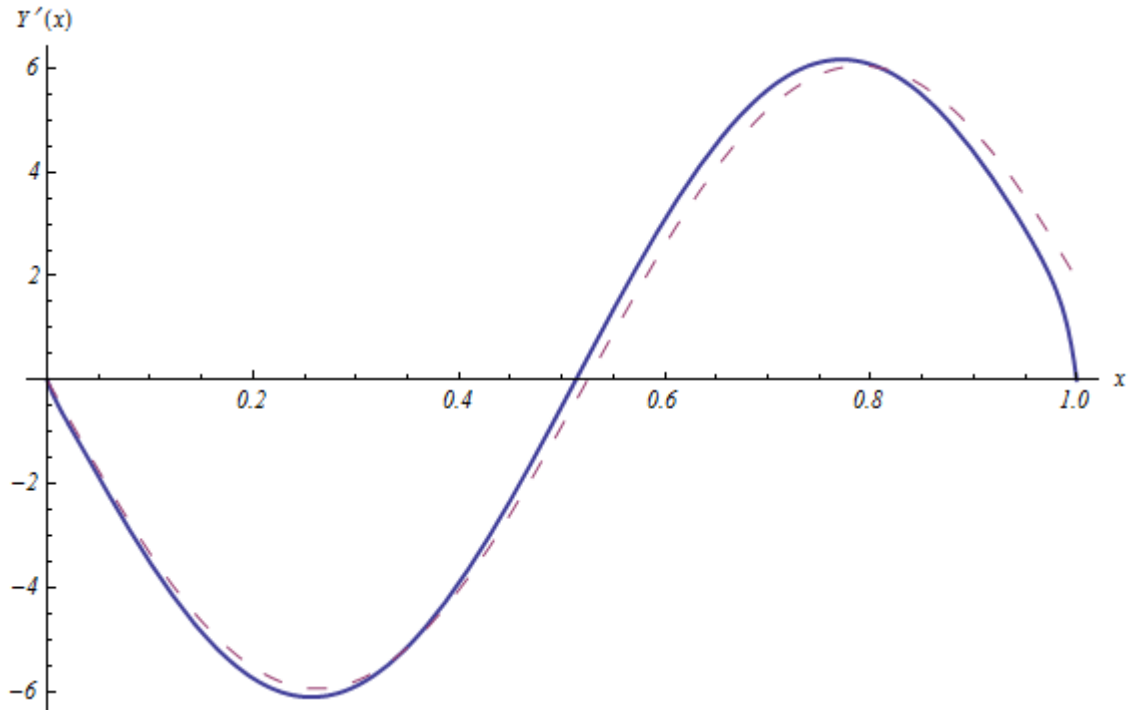
Şekil 3.17. $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.9$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



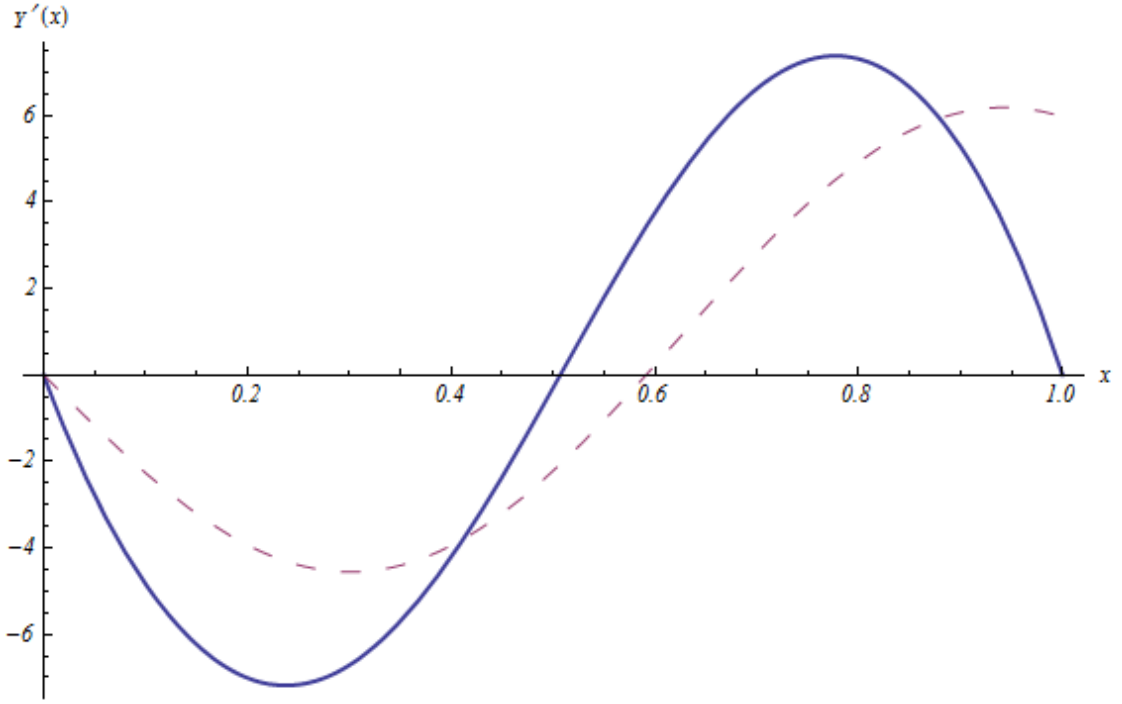
Şekil 3.18. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0.3$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



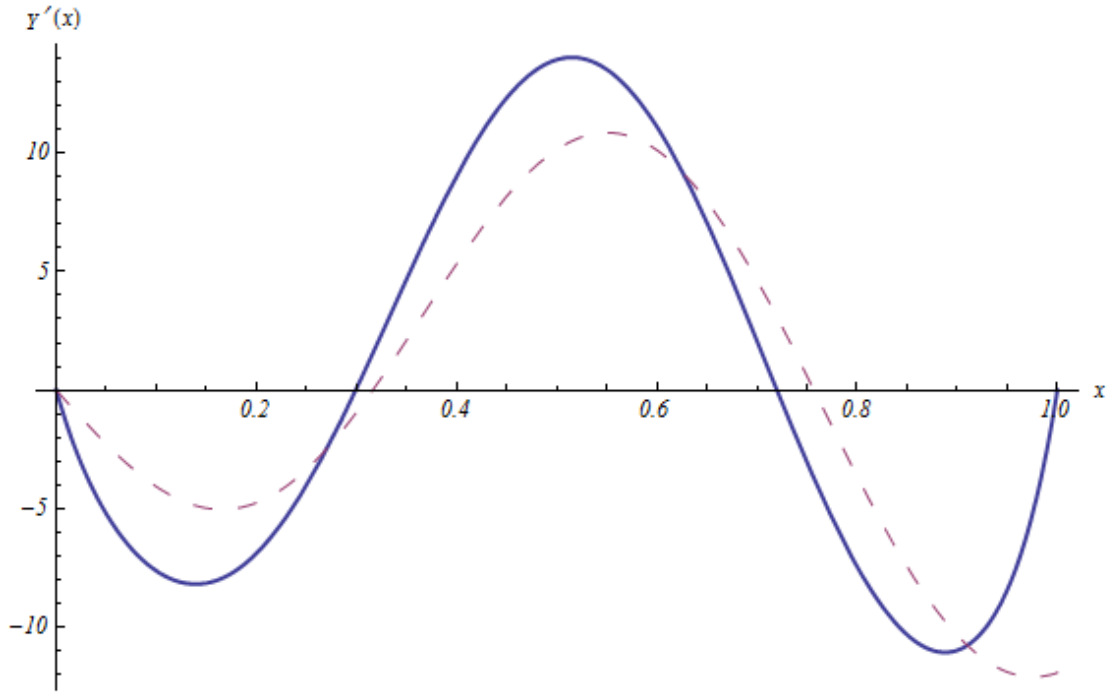
Şekil 3.19. $\varepsilon = 0.065$, $\nu = 0.6$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



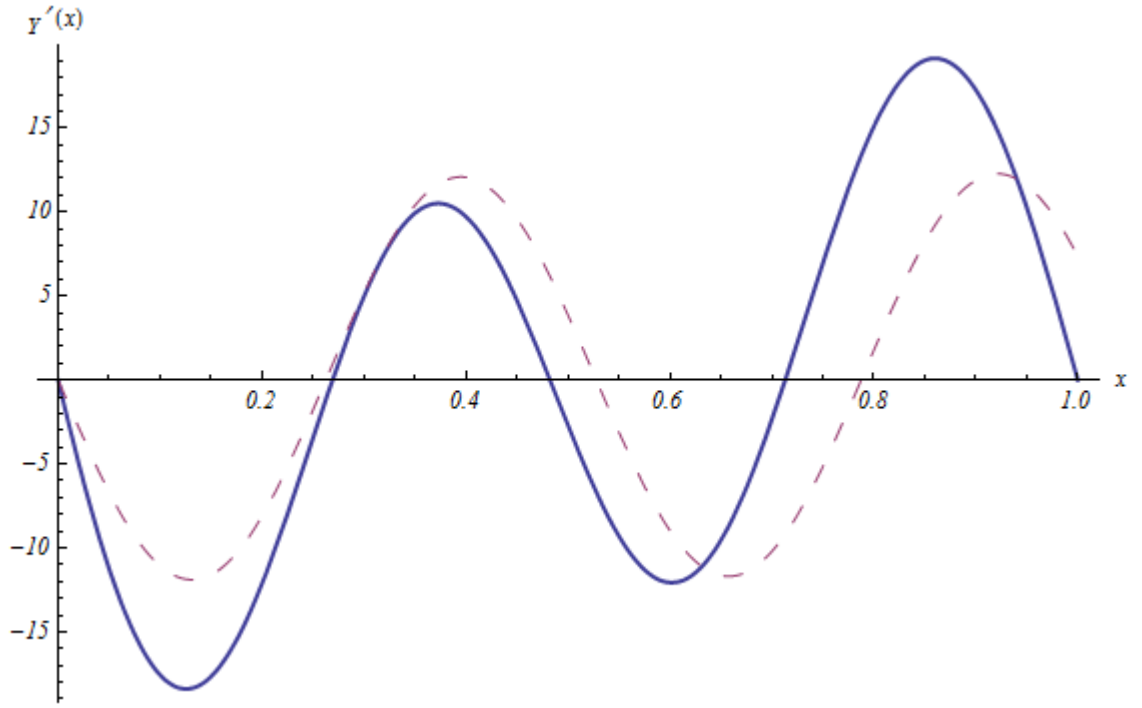
Şekil 3.20. $\varepsilon = 0.005$, $\nu = 0.9$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 3.21. $\varepsilon = 0.095$, $\nu = 0.6$, $n = 1$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 3.22. $\varepsilon = 0.045$, $\nu = 0.3$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 3.23. $\varepsilon = 0.08$, $\nu = 0.9$, $n = 2$ için ankastre-ankastre mesnet eğim değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.

4. EKSENEL HAREKETLİ ÇOK MESNETLİ ESNEK KİRİŞLER:

Bu kısımda üç mesnetli sistemleri ele alacağız. Orta mesnetin solu ve saği için hareket denklemini ayrı ayrı inceleyeceğiz.

4.1. Dış Açılım Çözümü:

Denklem (3.18)'deki iki mesnetli sistem için elde edilen dış açılım çözümü çok mesnetli sistem içinde aynı şekilde elde edilecektir. Ara mesnetin solu ve saği için iki farklı denkleminiz olacaktır. Önceki bölümdeki gibi, dış açılım geçerli olduğu bölgede şerit şartlarını sağladığından dolayı çözülebilirlik şartını bulurken dış açılıma şerit şartlarını sağlatabiliriz. Şerit için sınır şartları;

$$w_1(0,t) = 0, \quad w_1(\eta,t) = 0, \quad w_2(L,t) = 0, \quad w_2(\eta,t) = 0, \quad (4.1)$$

Şeklinde. Ara mesnetin sol ve sağ tarafları için bu şartları ilk mertebe çözümde, denklem (3.18)'de yerine yazılıp, diğer mertebe çözümlerinde seküler terimler yok edilmek istenirse düzeltme terimleri benzer şekilde aşağıdaki gibi elde edilir. Sol kısım için düzeltme terimi;

$$k_{0_1} = \frac{n^3 \pi^3}{2\eta^3} (v^4 + 6v^2 + 1) \quad (4.2)$$

bulunur. Sağ kısım için ise;

$$k_{0_n} = \frac{n^3 \pi^3}{2(1-\eta)^3} (v^4 + 6v^2 + 1) \quad (4.3)$$

bulunur. Bu ifadeler aradaki mesnet $x = 0.5$ noktasında iken birbirine eşittir.

Elimizde iki adet düzeltme terimi bulunmaktadır. Esnek kirişte aradaki mesnet tam ortada ise her iki düzeltme terimi de kullanılabilir. Birinci tabii frekans değerini hesaplarken, ara mesnet sağa daha yakın ise sol kısım için elde edilen düzeltme terimini, ara mesnet sola yakın ise sağ kısım için elde edilen düzeltme terimi kullanılacaktır.

Bunun nedeni uzun olan kısmın kısa olan kısma oranla daha düşük frekansa sahip olmasıdır. İkinci ve daha yüksek modlar için tabii frekansları hesaplarken, önce modun olduğu bölge tespit edilmeli ve o bölgede oluşan k_0 değeri dikkate alınmalıdır.

Şimdi üç mesnetli sistemler için, mesnet civarlarında açılımlar yapılacak ve dış açılımla birleştirilerek tüm bölgelerde geçerli kompozit bir çözüm elde edilecektir.

4.2. İç açılımlar:

4.2.1. Sol Kısım İçin İç Açılım Çözümleri:

Elimizde iki adet hareket denklemi bulunmaktadır. Bunların mesnet civarlarındaki çözümleri, yine bölümdeki iç açılım çözümlerindeki gibi çözülecek olursa,

4.2.1.a. $x \approx 0$ civarında iç açılım,

Denklem (3.41)'de önerilen çözüm burada da geçerlidir. Burada koordinatımız;

$$\zeta = \frac{x}{\varepsilon} \quad (4.4)$$

şeklindedir. Çözüm benzer şekilde yapılacak olursa $x \approx 0$ civarındaki iç açılım şu şekilde elde edilir,

$$Y_1^i = c_3 e^{\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}\right)x} \quad (4.5)$$

4.2.1.b. $x \approx \eta$ civarında iç açılım,

Denklem (3.41)'de önerilen çözümde bu sefer koordinatı şu şekilde seçelim,

$$\zeta = \frac{\eta - x}{\varepsilon} \quad (4.6)$$

İki mesnetli sistemde $x \approx l$ civarındaki iç açılım çözümüne benzer olarak çözümümüz şu şekilde elde edilir,

$$Y_1^i = c_4(t) e^{\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon}(\eta-x) - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}x} \approx c_4(t) e^{\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}\right)x} \quad (4.7)$$

4.2.2. Sağ Kısım İçin İç Açılım Çözümleri:

4.2.2.a. $x \approx \eta$ civarında iç açılım,

Koordinatımızı belirleyelim;

$$\zeta = \frac{x - \eta}{\varepsilon} \quad (4.8)$$

şeklindedir. Çözüm benzer şekilde yapılacak olursa $x \approx \eta$ civarındaki iç açılım şu şekilde elde edilir,

$$Y_2^i = c_3 e^{\left(-\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}\right)x} \quad (4.9)$$

4.2.2.b. $x \approx l$ civarında iç açılım,

bu civardaki çözüm için koordinatı şu şekilde seçelim,

$$\zeta = \frac{l - x}{\varepsilon} \quad (4.10)$$

İki mesnetli sistemde $x \approx l$ civarındaki iç açılım çözümüne benzer olarak çözümümüz şu şekilde elde edilir,

$$Y_1^i = c_4(t) e^{\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon}(l-x) - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}x} \approx c_4(t) e^{\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{1-v^2}\right)x} \quad (4.11)$$

Yaptığımız bazı kabullerden dolayı iki mesnetli sistemle aynı denklemi elde ettik fakat sınır şartlarından dolayı katsayıları farklı olacağı için oluşturacağımız matrisler farklıdır. Denklemlerimiz;

$$Y_1^c = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} + c_4 e^{r_4 x} \quad (4.12)$$

$$Y_2^c = c_5 e^{r_1 x} + c_6 e^{r_2 x} + c_7 e^{r_3 x} + c_8 e^{r_4 x} \quad (4.13)$$

halini alır. Burada r değerleri;

$$r_1 = -\frac{i\omega_n}{I+v} \quad , \quad r_2 = \frac{i\omega_n}{I-v} \quad (4.14)$$

$$r_3 = \left(-\frac{\sqrt{I-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{I-v^2} \right) \quad , \quad r_4 = \left(\frac{\sqrt{I-v^2}}{\varepsilon} - \frac{iv\omega_n}{I-v^2} \right) \quad (4.15)$$

4.3. Özel Mesnet Durumları:

4.3.1. Basit-Basit-Basit Mesnet Durumu:

Bu mesnet durumu için sınır şartları şu şekildedir;

$$Y_1(0) = 0, \quad Y_1''(0) = 0, \quad Y_1(\eta) = Y_2(\eta) = 0, \quad Y_1'(\eta) = Y_2'(\eta) \quad (4.16)$$

$$Y_1''(\eta) = Y_2''(\eta), \quad Y_2(1) = 0, \quad Y_2''(1) = 0 \quad (4.17)$$

Bu şartları denklem (4.12) ve (4.13)'de yerine koyarsak karşımıza şu sekiz eşitlik çıkar;

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \quad (4.18)$$

$$c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 + c_4 r_4^2 = 0 \quad (4.19)$$

$$c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} + c_3 e^{r_3} + c_4 e^{r_4} = 0 \quad (4.20)$$

$$c_1 r_1^2 e^{r_1} + c_2 r_2^2 e^{r_2} + c_3 r_3^2 e^{r_3} + c_4 r_4^2 e^{r_4} = 0 \quad (4.21)$$

$$c_1 e^{r_1 \eta} + c_2 e^{r_2 \eta} + c_3 e^{r_3 \eta} + c_4 e^{r_4 \eta} = 0 \quad (4.22)$$

$$c_5 e^{r_1 \eta} + c_6 e^{r_2 \eta} + c_7 e^{r_3 \eta} + c_8 e^{r_4 \eta} = 0 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} r_1 c_1 e^{r_1 \eta} + r_2 c_2 e^{r_2 \eta} + r_3 c_3 e^{r_3 \eta} + r_4 c_4 e^{r_4 \eta} \\ = r_1 c_5 e^{r_1 \eta} + r_2 c_6 e^{r_2 \eta} + r_3 c_7 e^{r_3 \eta} + r_4 c_8 e^{r_4 \eta} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
& r_1^2 c_1 e^{r_1 \eta} + r_2^2 c_2 e^{r_2 \eta} + r_3^2 c_3 e^{r_3 \eta} + r_4^2 c_4 e^{r_4 \eta} \\
& = r_1^2 c_5 e^{r_1 \eta} + r_2^2 c_6 e^{r_2 \eta} + r_3^2 c_7 e^{r_3 \eta} + r_4^2 c_8 e^{r_4 \eta}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Yine iki mesnetli sistemlerde olduğu gibi matris formunda yazılıp, frekans, deplasman ve moment değişimleri elde edilir.

4.3.1.a. Sayısal Örnekler:

Bu kısımda basit-basit-basit mesnet durumu için denklemlerden elde edilen tablolar ve grafikler verilecektir. Sistemin doğal frekansı hesaplanırken; ara mesnet tam ortada olma durumunda, esnek kirişin her iki bölgesi eşdeğer olduğundan I. mod ve II. mod frekansları birbirine eşit olacaktır. Bu frekanslar aynı zamanda sistemin tabii frekanslarıdır. Diğer ara mesnet durumlarında sistemin I. mod frekansı uzun bölgenin I. mod frekansına eşittir. Fakat sistemin II. mod frekans değeri hesaplanırken dikkatli olmak zorundayız. Sistemin II. mod frekans değeri kısa bölgenin I. modu olabileceği gibi uzun bölgenin II. modu da olabilir. İncelediğimiz sistemler için sistemin II. mod frekans değerleri uzun bölgenin II. modu olarak bulunmuştur. Tablo 4.1-4.6 da değişik ortalama hız değerlerinde, enine direngenliğe bağlı olarak, farklı orta mesnet durumları için I. ve II. mod frekans değerleri verilmiştir. Şekil 4.1-4.3 de ise bu değerlerin değişimi grafik halinde verilmiştir. Şekil 4.4-4.15'de farklı ortalama hız, enine direngelik değerleri ve orta mesnet durumu için basit-basit-basit mesnet deplasman değişimleri, şekil 4.16-4.21 de ise moment değişimleri verilmiştir. Yine deplasman şartları her iki çözüm içinde sağlanırken, moment şartlarının dış açılımın çözümü tarafından sağlamadığı, fakat kompozit çözüm tarafından sağladığı görülmüştür. Enine direngeliğin ve ortalama hızın etkileri iki mesnetli sistemlere benzer olurken, ara mesnetin olması tabii frekans değerlerini arttırmıştır. Bu etkiyi anlayabilmek için ortalama hızın ve enine direngeliğin sıfır olduğu durumu incelersek; en yüksek tabii frekans değeri ara mesnetin tam ortada olma durumunda olduğu mesnet sola veya sağa ne kadar yaklaşırsa, tabii frekans değeri iki mesnetli sisteme o kadar yaklaşmaktadır.

Tablo 4.1. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri

ε	$\eta = 0.3$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0.000	4.48799	4.08407	2.87232	0.85272
0.005	4.50525	4.09945	2.88889	0.866919
0.010	4.52495	4.12193	2.91273	0.894587
0.015	4.54710	4.14620	2.94347	0.934525
0.020	4.57170	4.17392	2.98075	0.986125
0.025	4.59872	4.20499	3.02425	1.04942
0.030	4.62816	4.23934	3.07371	1.12486
0.035	4.66002	4.27690	3.12894	1.21311
0.040	4.69428	4.31758	3.18982	1.31476
0.045	4.73094	4.36134	3.25632	1.43035
0.050	4.76998	4.40811	3.32848	1.56028
0.055	4.81139	4.45787	3.40638	1.70484
0.060	4.85516	4.51059	3.49015	1.86425
0.065	4.90127	4.56624	3.57996	2.03865
0.070	4.94970	4.62483	3.67596	2.22815
0.075	5.00043	4.68635	3.77834	2.43281
0.080	5.05345	4.75082	3.88725	2.65269
0.085	5.10872	4.81823	4.00287	2.88780
0.090	5.16622	4.88862	4.12533	3.13814
0.095	5.22593	4.96199	4.25478	3.40371
0.100	5.28782	5.03837	4.39132	3.68448
0.105	5.35186	5.11779	4.53507	3.98045
0.110	5.41804	5.20026	4.68612	4.29157
0.115	5.48632	5.28581	4.84454	4.61784
0.120	5.55667	5.37446	5.01040	4.95921

Tablo 4.2. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.5$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri

ε	$\eta = 0.5$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0.000	6.28319	5.71770	4.02124	1.19381
0.005	6.28629	5.72245	4.03122	1.21311
0.010	6.29559	5.73653	4.06029	1.26807
0.015	6.31109	5.75966	4.10731	1.35642
0.020	6.33280	5.79163	4.17138	1.47882
0.025	6.36070	5.83222	4.25199	1.63728
0.030	6.39481	5.88130	4.34897	1.83379
0.035	6.43512	5.93876	4.46245	2.06981
0.040	6.48163	6.00457	4.59281	2.34632
0.045	6.53434	6.07872	4.74055	2.66397
0.050	6.59325	6.16127	4.90623	3.02321
0.055	6.65836	6.25230	5.09042	3.42433
0.060	6.72968	6.35191	5.29365	3.86751
0.065	6.80719	6.46023	5.51641	4.35283
0.070	6.89091	6.57739	5.75915	4.88029
0.075	6.98083	6.70353	6.02222	5.44983
0.080	7.07695	6.83879	6.30595	6.06137
0.085	7.17927	6.98329	6.61059	6.71477
0.090	7.28779	7.13715	6.93635	7.40991
0.095	7.40251	7.30048	7.28339	8.14667
0.100	7.52344	7.47339	7.65183	8.92491
0.105	7.65056	7.65595	8.04175	9.74453
0.110	7.78389	7.84825	8.45320	10.60540
0.115	7.92342	8.05034	8.88623	11.50750
0.120	8.06915	8.26227	9.34083	12.45060

Tablo 4.3. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri

ε	$\eta = 0.8$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0.000	3.92699	3.57356	2.51328	0.74613
0.005	3.94018	3.58659	2.52571	0.75643
0.010	3.95521	3.60225	2.54324	0.77607
0.015	3.97209	3.62050	2.56567	0.80432
0.020	3.99082	3.64130	2.59279	0.84068
0.025	4.01143	3.66462	2.62441	0.88503
0.030	4.03390	3.69041	2.66037	0.93748
0.035	4.05826	3.71864	2.70053	0.99833
0.040	4.08451	3.74927	2.74479	1.06788
0.045	4.11264	3.78228	2.79307	1.14644
0.050	4.14266	3.81761	2.84533	1.23428
0.055	4.17455	3.85523	2.90156	1.33160
0.060	4.20830	3.89511	2.96178	1.43859
0.065	4.24389	3.93720	3.02600	1.55538
0.070	4.28129	3.98146	3.09429	1.68206
0.075	4.32046	4.02786	3.16669	1.81873
0.080	4.36137	4.07637	3.24329	1.96545
0.085	4.40399	4.12696	3.32415	2.12225
0.090	4.44828	4.17961	3.40934	2.28918
0.095	4.49420	4.23429	3.49896	2.46625
0.100	4.54171	4.29100	3.59306	2.65347
0.105	4.59079	4.34972	3.69173	2.85084
0.110	4.64139	4.41044	3.79503	3.05836
0.115	4.69348	4.47317	3.90302	3.27603
0.120	4.74703	4.53790	4.01576	3.50384

Tablo 4.4. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri

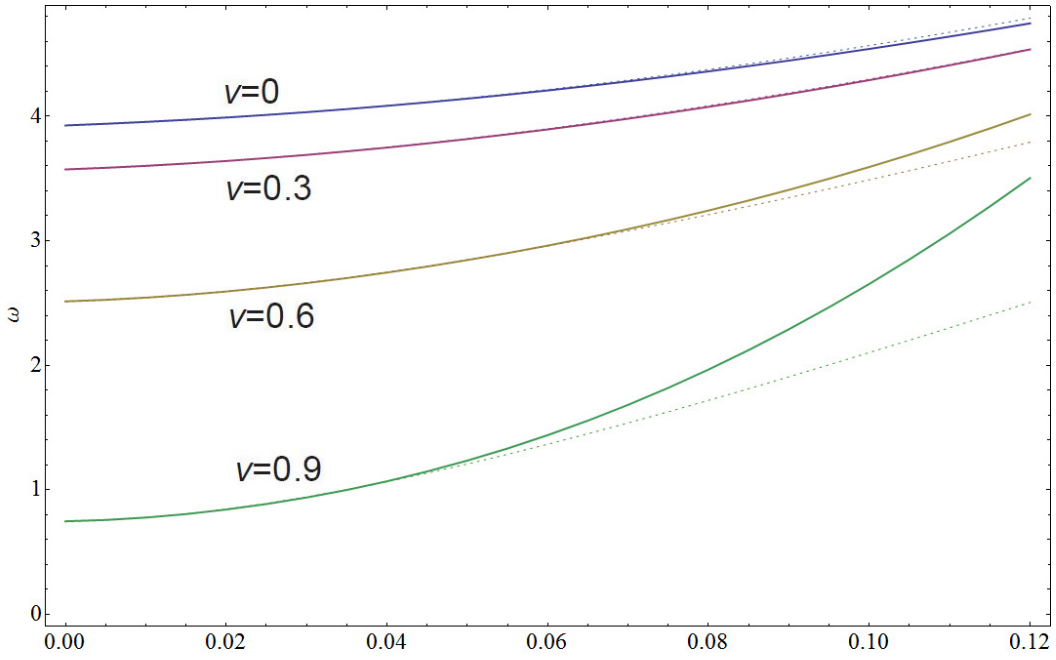
ε	$\eta = 0.3$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0,000	8,97599	8,16815	5,74463	1,70544
0,005	9,01571	8,21125	5,79818	1,77510
0,010	9,07087	8,27912	5,90583	1,95062
0,015	9,14160	8,37132	6,06540	2,22974
0,020	9,22807	8,48755	6,27558	2,61576
0,025	9,33049	8,62767	6,53606	3,11288
0,030	9,44903	8,79166	6,84738	3,72450
0,035	9,58390	8,97967	7,21060	4,45319
0,040	9,73526	9,19199	7,62707	5,30082
0,045	9,90329	9,42902	8,09818	6,26852
0,050	10,08810	9,69119	8,62526	7,35682
0,055	10,28990	9,97900	9,20950	8,56578
0,060	10,50880	10,29290	9,85193	9,89527
0,065	10,74480	10,63340	10,55340	11,34500
0,070	10,99810	11,00080	11,31460	12,91480
0,075	11,26880	11,39550	12,13590	14,60440
0,080	11,55690	11,81770	13,01790	16,41360
0,085	11,86240	12,26780	13,96080	18,34210
0,090	12,18550	12,74590	14,96460	20,38990
0,095	12,52620	13,25220	16,02960	22,55680
0,100	12,88460	13,78670	17,15580	24,84270
0,105	13,26060	14,34960	18,34320	27,24750
0,110	13,65430	14,94090	19,59170	29,77100
0,115	14,06580	15,56070	20,90140	32,41330
0,120	14,49500	16,20890	22,27220	35,17410

Tablo 4.5. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.5$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri

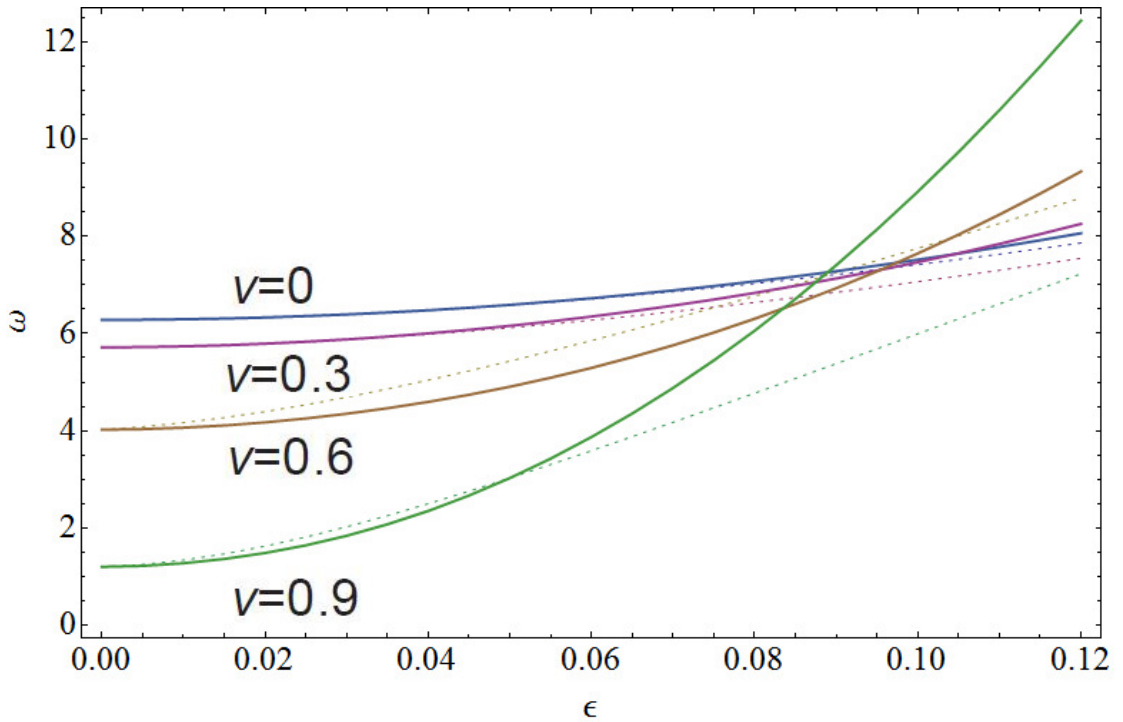
$\eta = 0.5$				
ε	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0,000	12,56640	11,43540	8,04248	2,38762
0,005	12,59120	11,47340	8,12233	2,54264
0,010	12,66560	11,58610	8,35576	2,99440
0,015	12,78960	11,77180	8,73688	3,74821
0,020	12,96330	12,02940	9,26477	4,81787
0,025	13,18650	12,35870	9,94206	6,21134
0,030	13,45940	12,76010	10,77270	7,93178
0,035	13,78180	13,23450	11,76060	9,97991
0,040	14,15390	13,78300	12,90870	12,35550
0,045	14,57560	14,40650	14,21930	15,05810
0,050	15,04690	15,10600	15,69400	18,08750
0,055	15,56780	15,88230	17,33380	21,44350
0,060	16,13830	16,73610	19,13940	25,12620
0,065	16,75840	17,66760	21,11120	29,13560
0,070	17,42820	18,67730	23,24960	33,47150
0,075	18,14750	19,76540	25,55470	38,13380
0,080	18,91650	20,93180	28,02650	43,12230
0,085	19,73500	22,17680	30,66500	48,43670
0,090	20,60320	23,50010	33,47030	54,07670
0,095	21,52100	24,90180	36,44210	60,04210
0,100	22,48840	26,38180	39,58040	66,33250
0,105	23,50540	27,94000	42,88490	72,94780
0,110	24,57200	29,57640	46,35560	79,88770
0,115	25,68820	31,29070	49,99220	87,15200
0,120	26,85410	33,08290	53,79450	94,74050

Tablo 4.6. Basit-Basit-Basit Mesnetli Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri

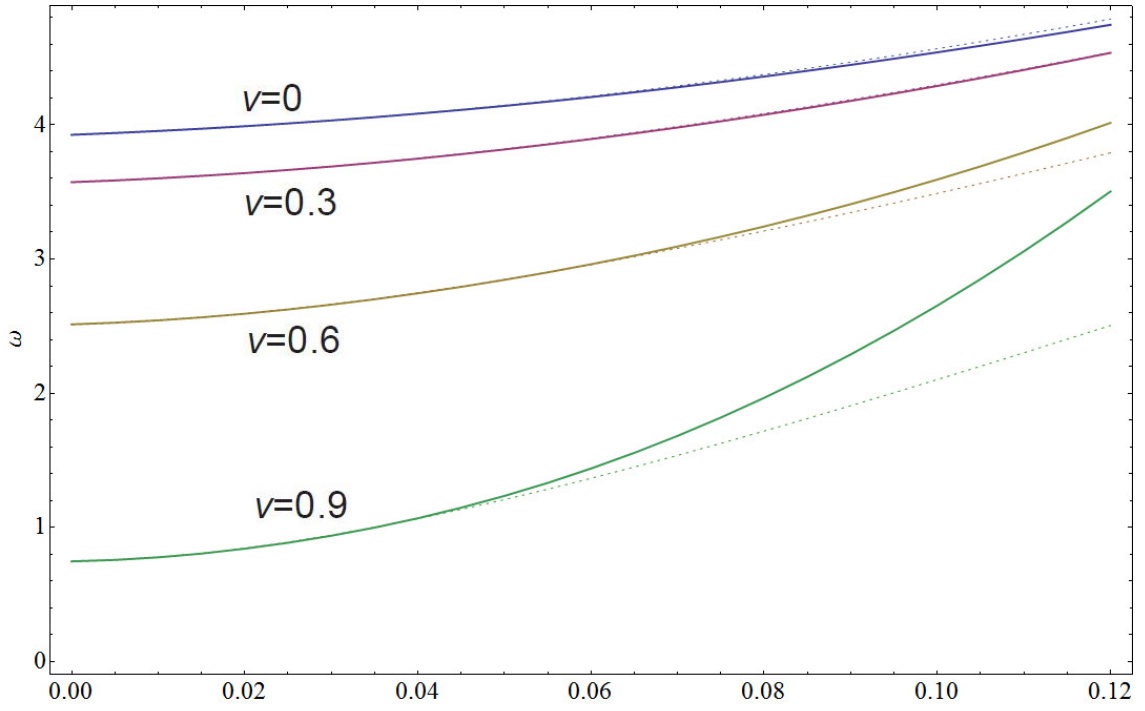
$\eta = 0.8$				
ε	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0,000	7,85399	7,14713	5,02655	1,49226
0,005	7,88465	7,17993	5,06590	1,54137
0,010	7,92756	7,23125	5,14358	1,66364
0,015	7,98266	7,30072	5,25809	1,85663
0,020	8,04992	7,38801	5,40830	2,12152
0,025	8,12932	7,49282	5,59363	2,46080
0,030	8,22081	7,61494	5,81398	2,87673
0,035	8,32435	7,75427	6,06966	3,37085
0,040	8,43990	7,91074	6,36124	3,94408
0,045	8,56742	8,08441	6,68941	4,59692
0,050	8,70686	8,27535	7,05486	5,32959
0,055	8,85817	8,48369	7,45820	6,14214
0,060	9,02128	8,70958	7,89997	7,03457
0,065	9,19614	8,95316	8,38064	8,00683
0,070	9,38268	9,21460	8,90054	9,05884
0,075	9,58086	9,49403	9,45998	10,19060
0,080	9,79063	9,79157	10,05920	11,40190
0,085	10,01190	10,10740	10,69830	12,69290
0,090	10,24480	10,44150	11,37750	14,06350
0,095	10,48910	10,79400	12,09690	15,51360
0,100	10,74490	11,16510	12,85650	17,04330
0,105	11,01210	11,55470	13,65640	18,65250
0,110	11,29080	11,96290	14,49660	20,34110
0,115	11,58090	12,38970	15,37720	22,10930
0,120	11,88250	12,83520	16,29820	23,95680



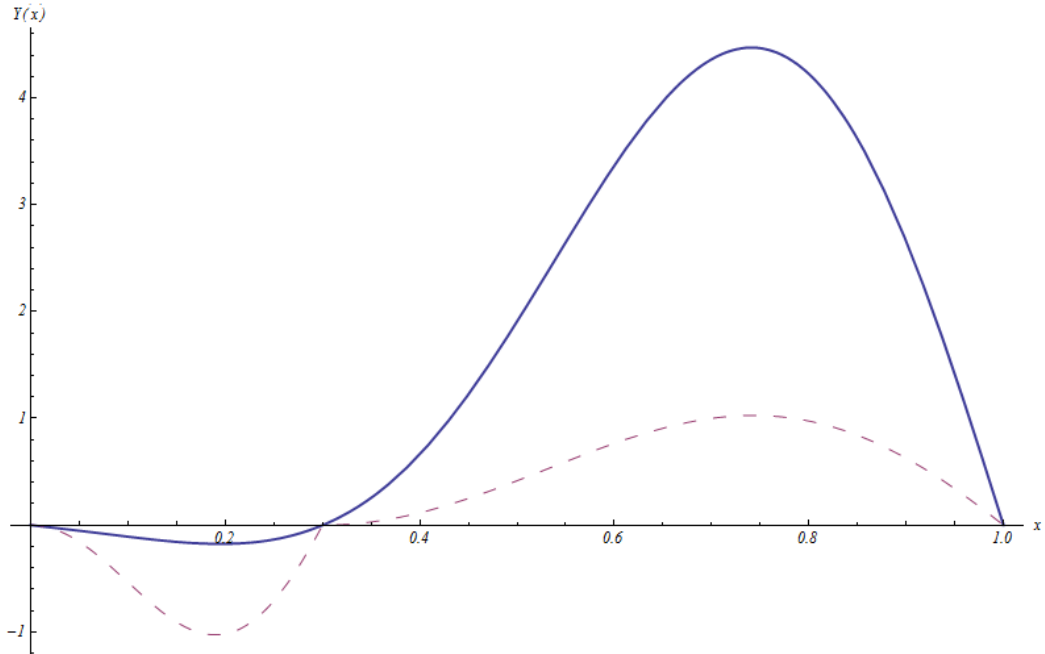
Şekil 4.1. Basit-basit-basit mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.3$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.



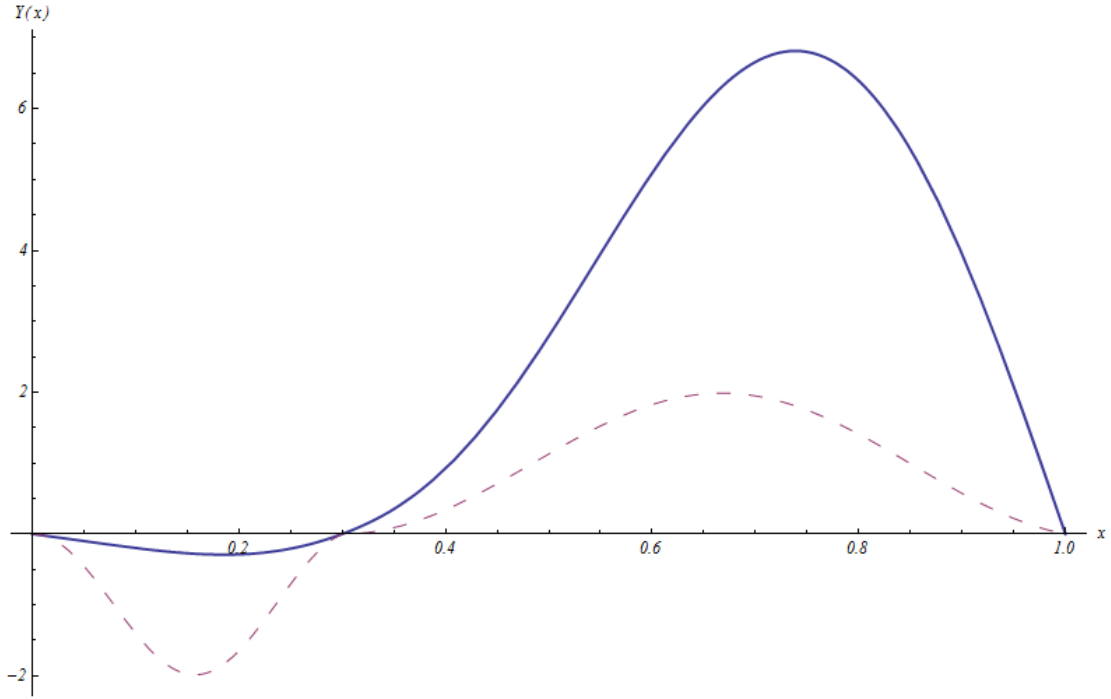
Şekil 4.2. Basit-basit-basit mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.5$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.



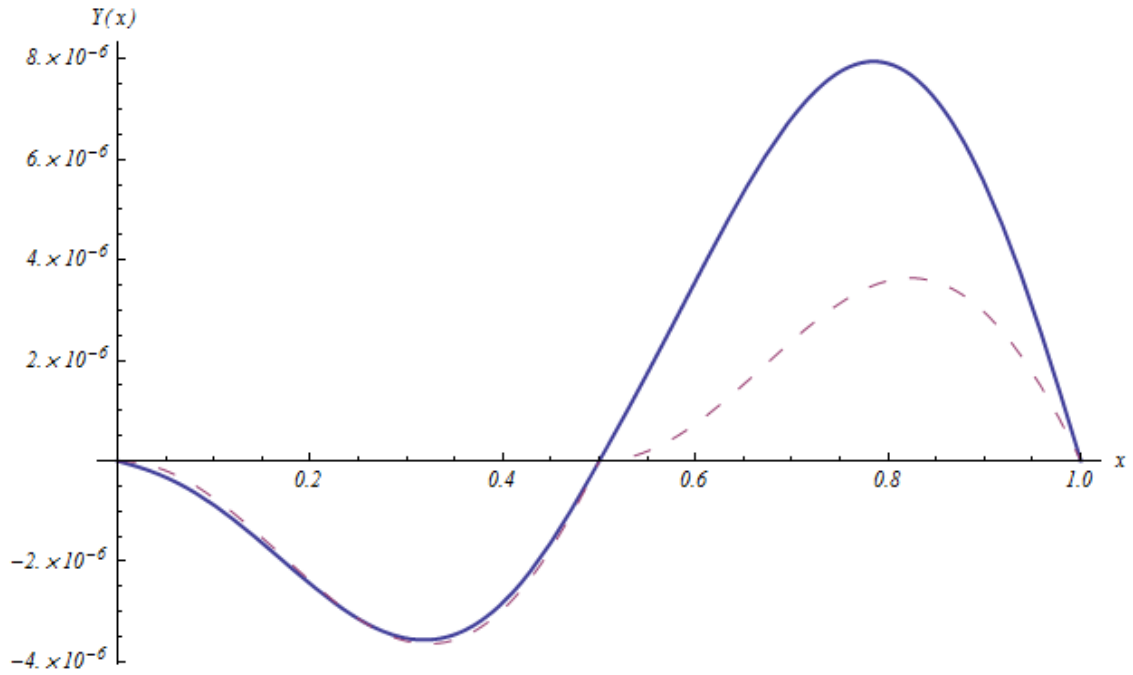
Şekil 4.3. Basit-basit-basit mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.8$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği (—) perturbasyon çözümü; (...) tam çözüm.



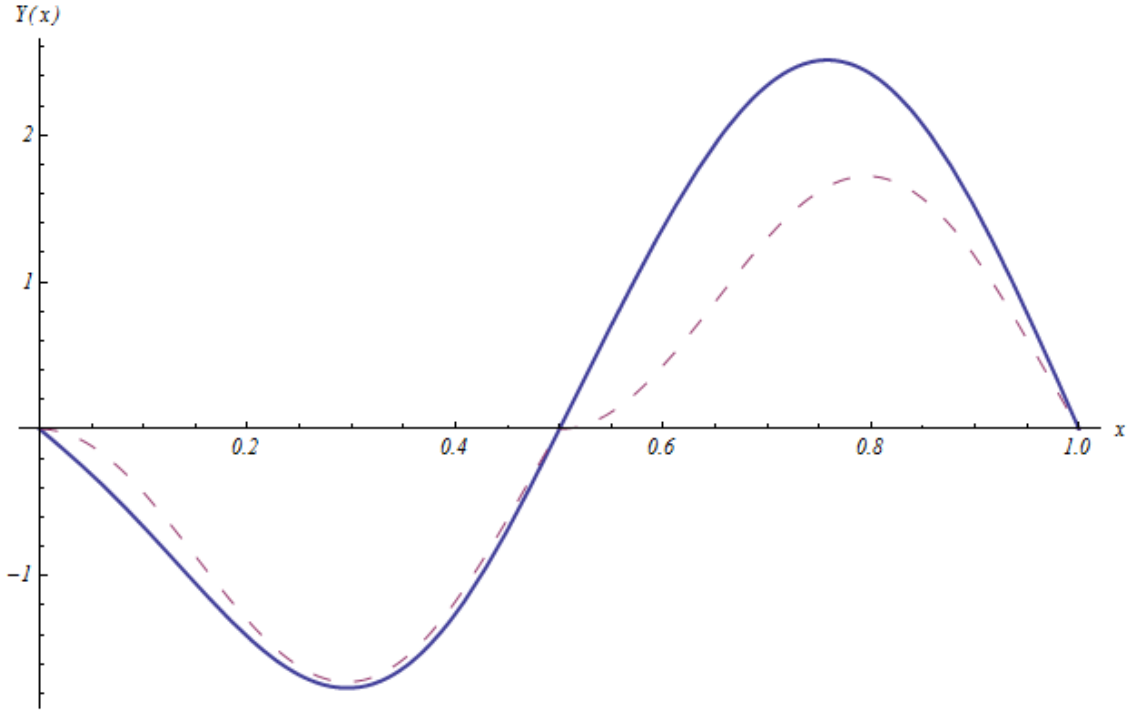
Şekil 4.4. $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için basit-basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği.(- -) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.



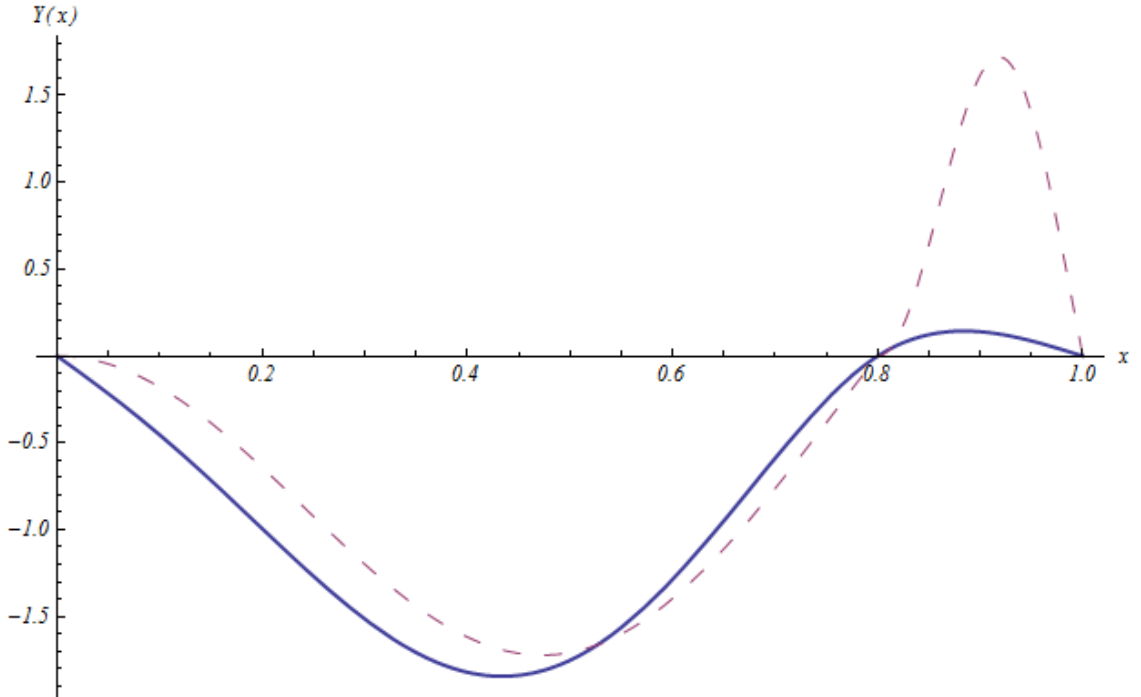
Şekil 4.5. $\varepsilon = 0.075$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için basit-basit-basit mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



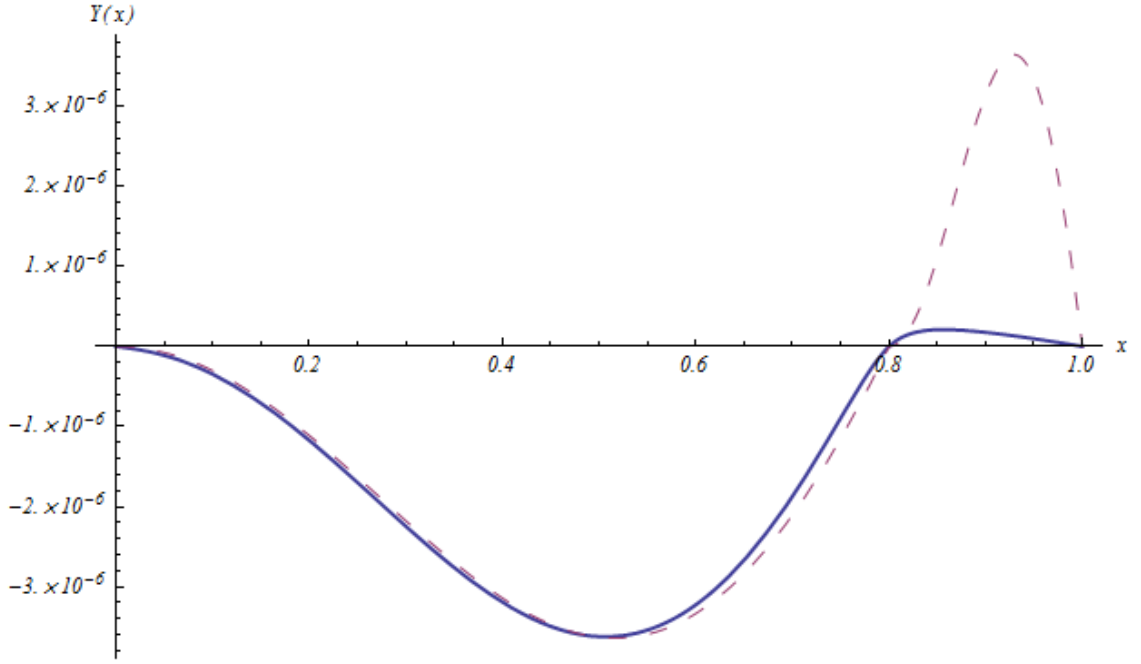
Şekil 4.6. $\varepsilon = 0.035$, $\nu = 0$, $\eta = 0.5$, $n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



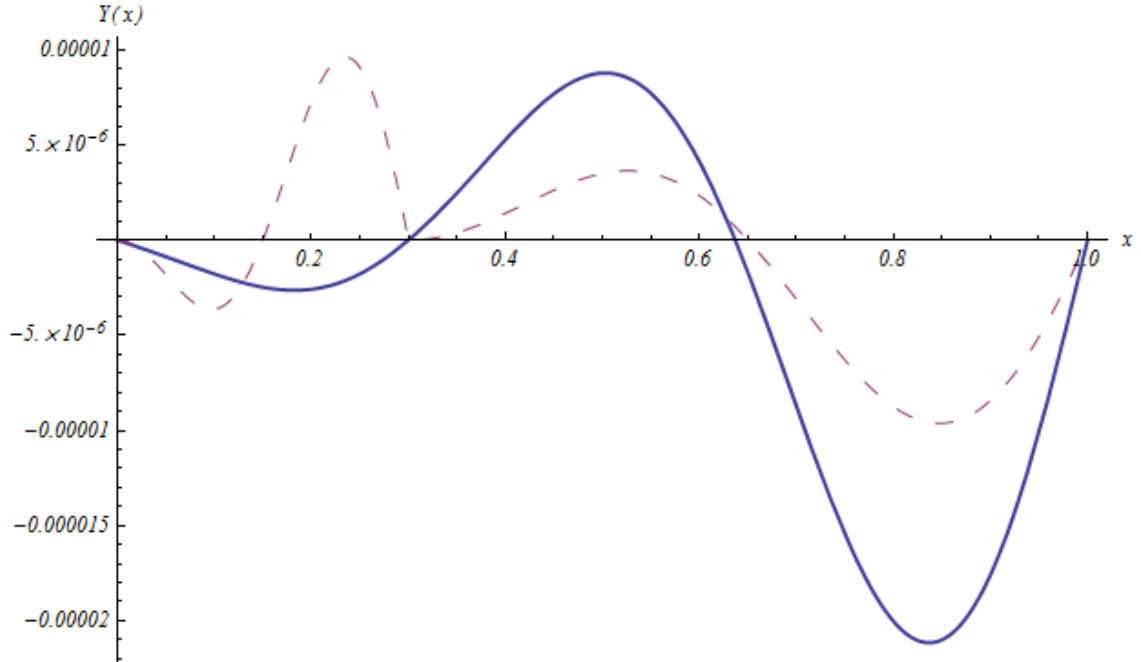
Şekil 4.7. $\varepsilon = 0.085$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.5$, $n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



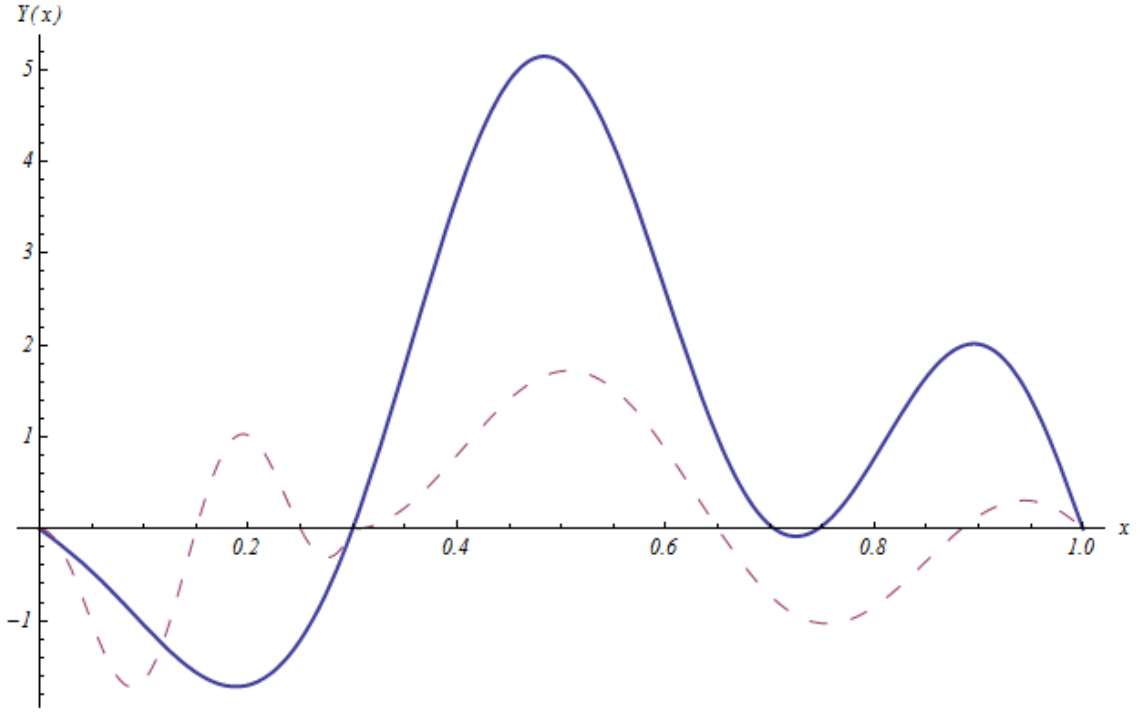
Şekil 4.8. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



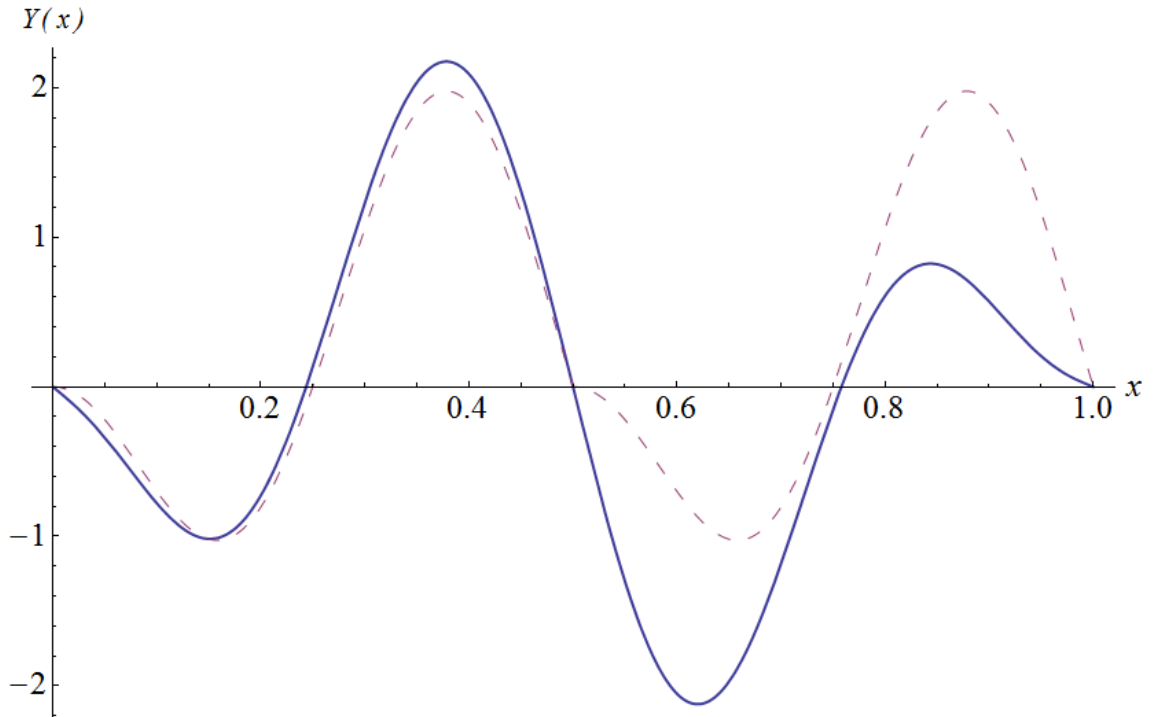
Şekil 4.9. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



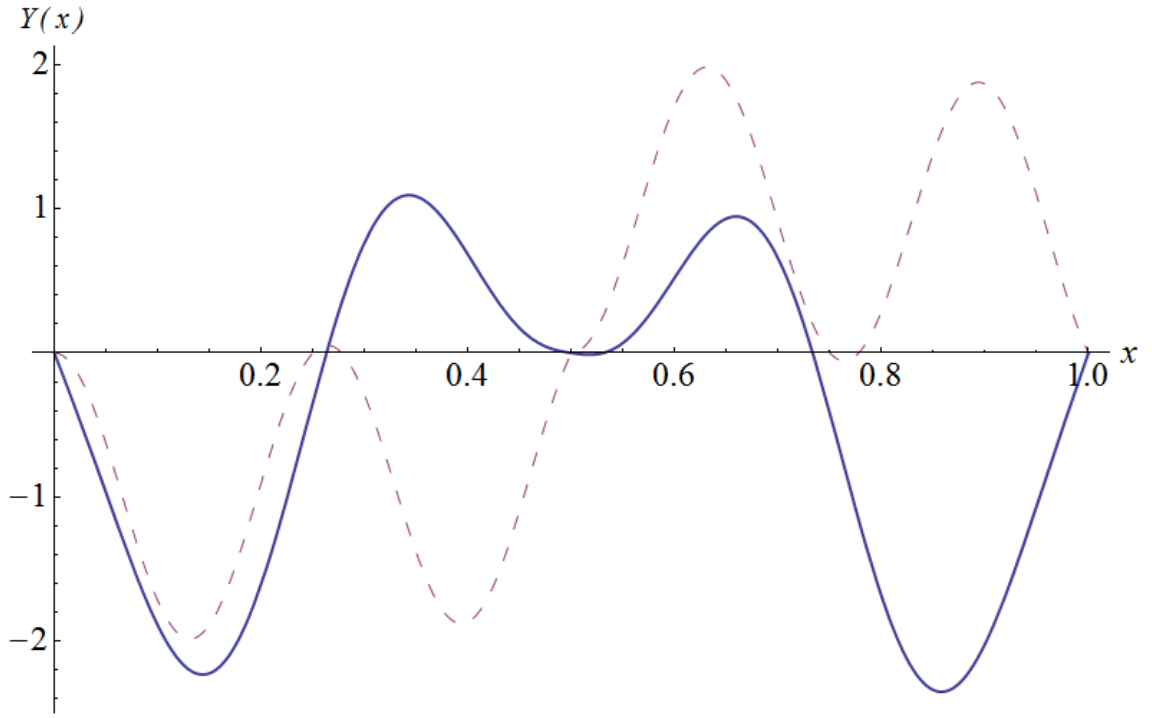
Şekil 4.10. $\varepsilon = 0.09$, $\nu = 0$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



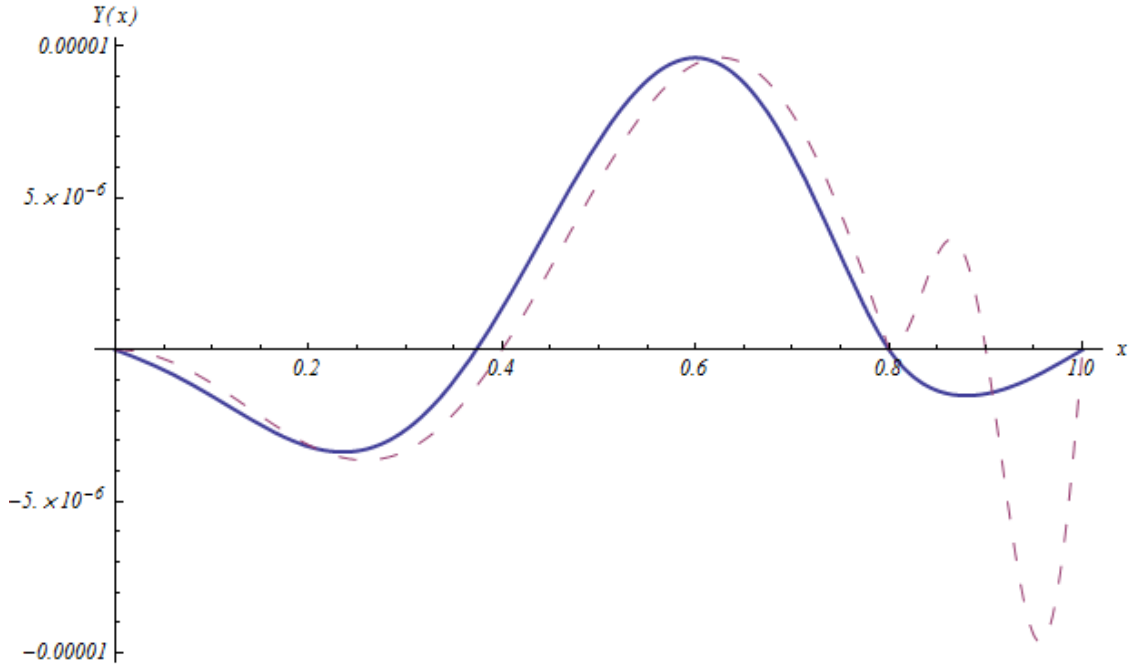
Şekil 4.11. $\varepsilon = 0.045$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



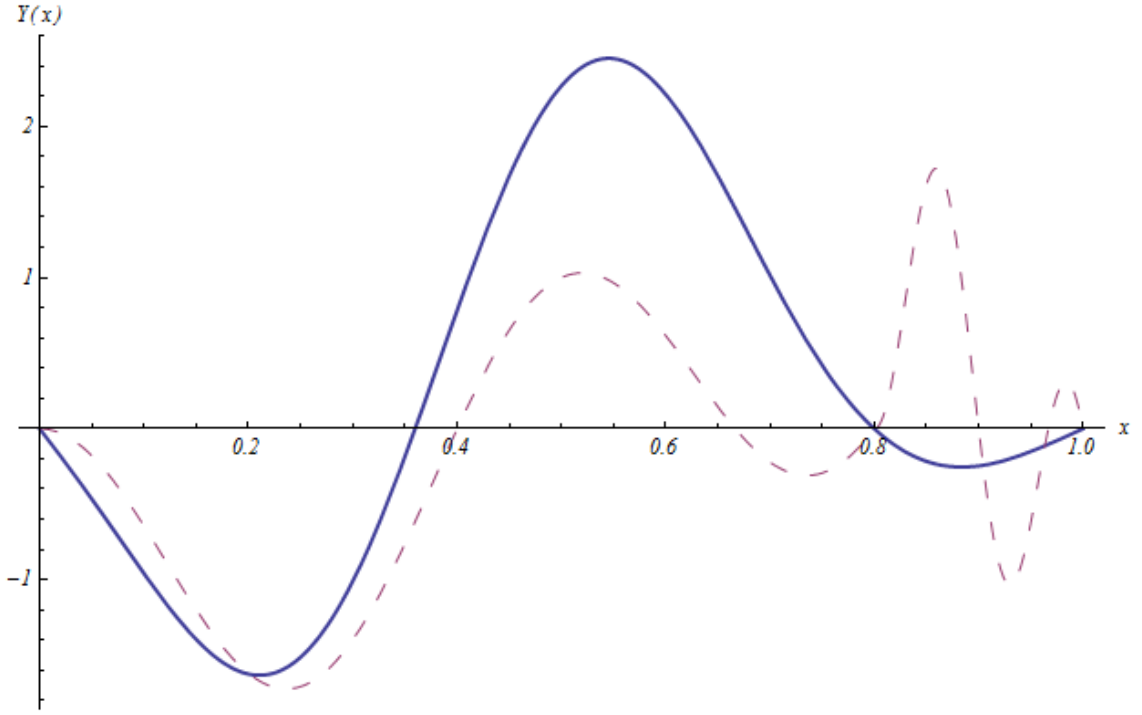
Şekil 4.12. $\varepsilon = 0.035$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



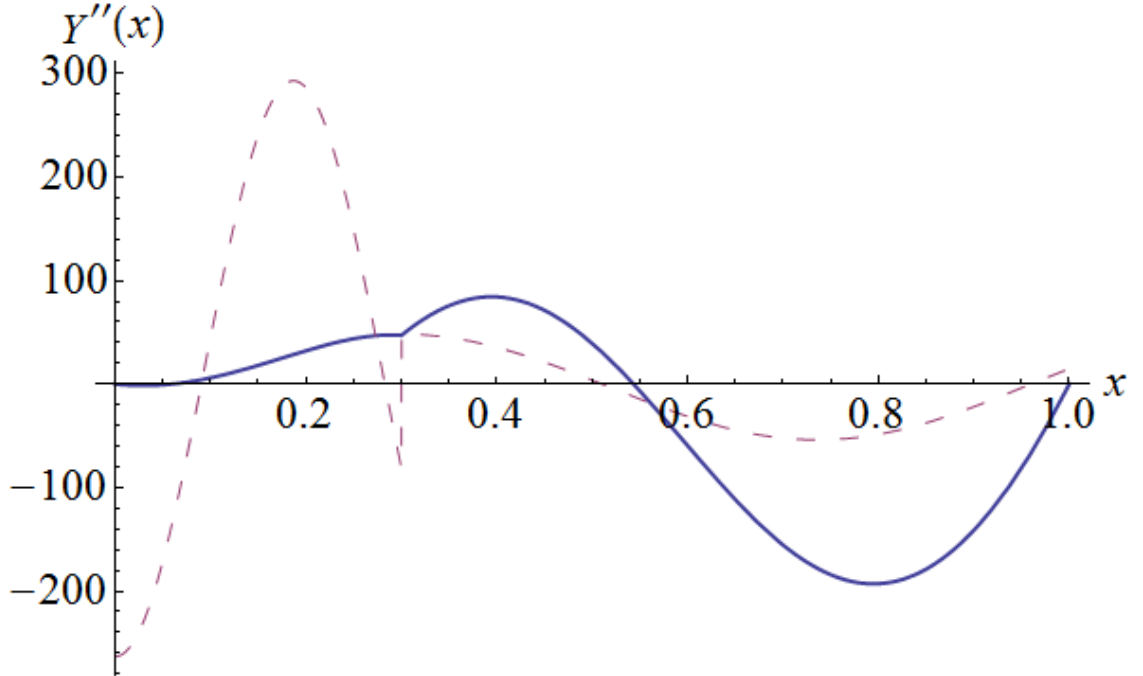
Şekil 4.13. $\varepsilon = 0.045$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.



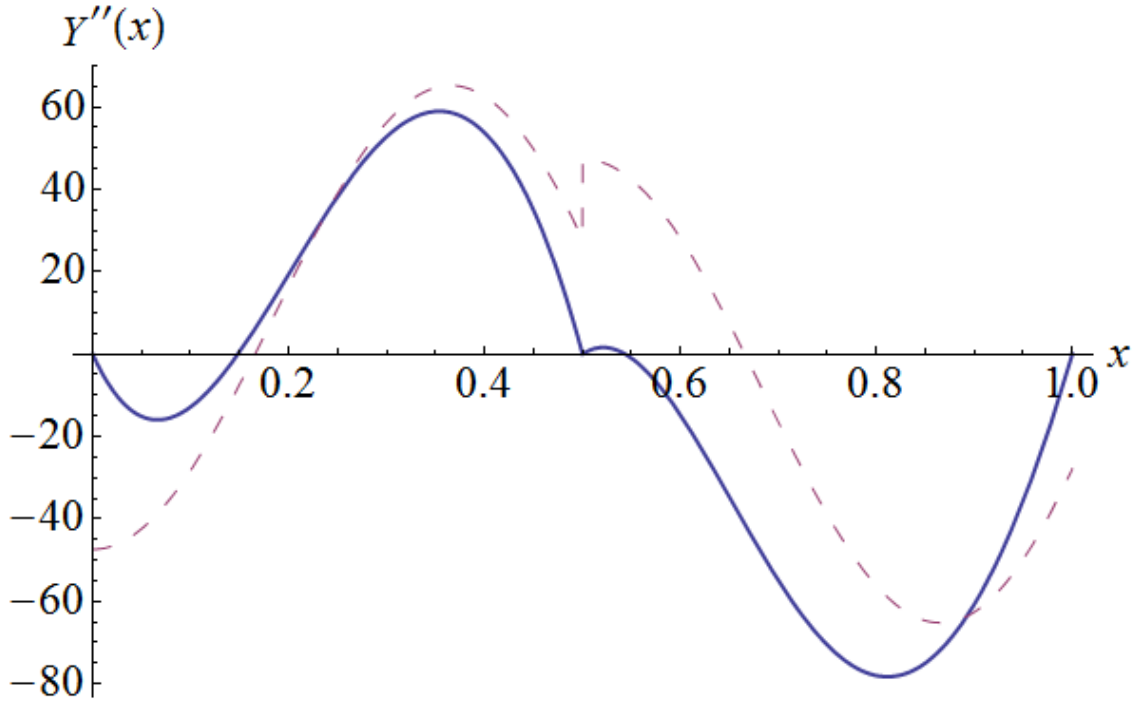
Şekil 4.14. $\varepsilon = 0.055$, $\nu = 0$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü;(—) kompozit çözüm.



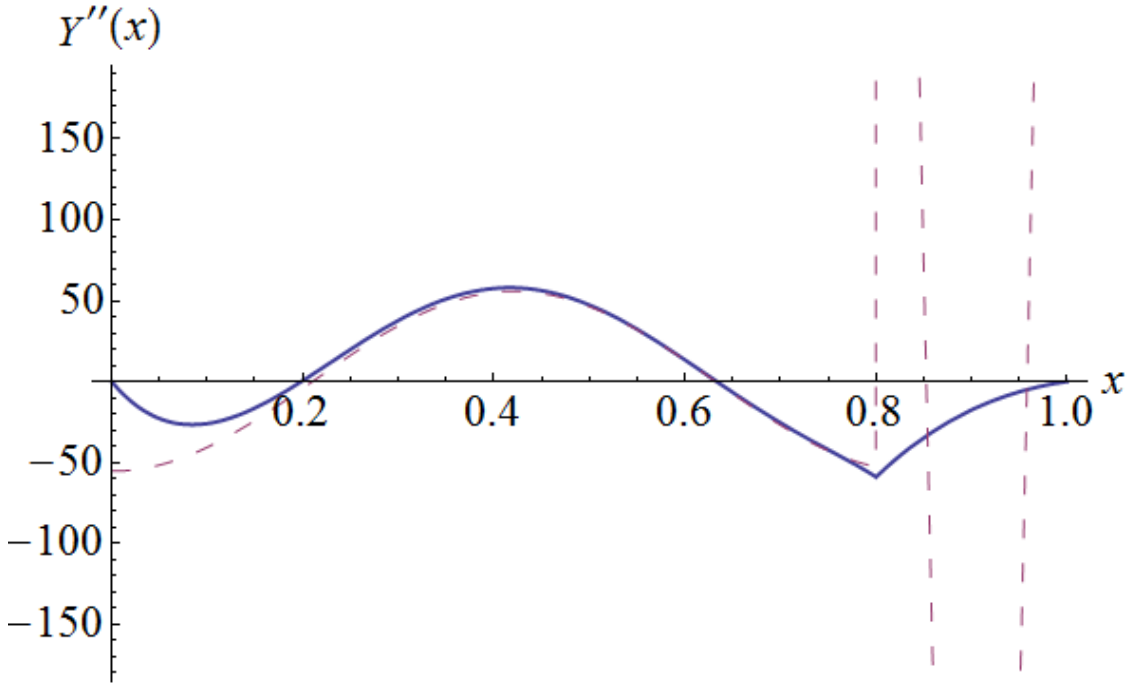
Şekil 4.15. $\varepsilon = 0.11$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için B-B-B mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



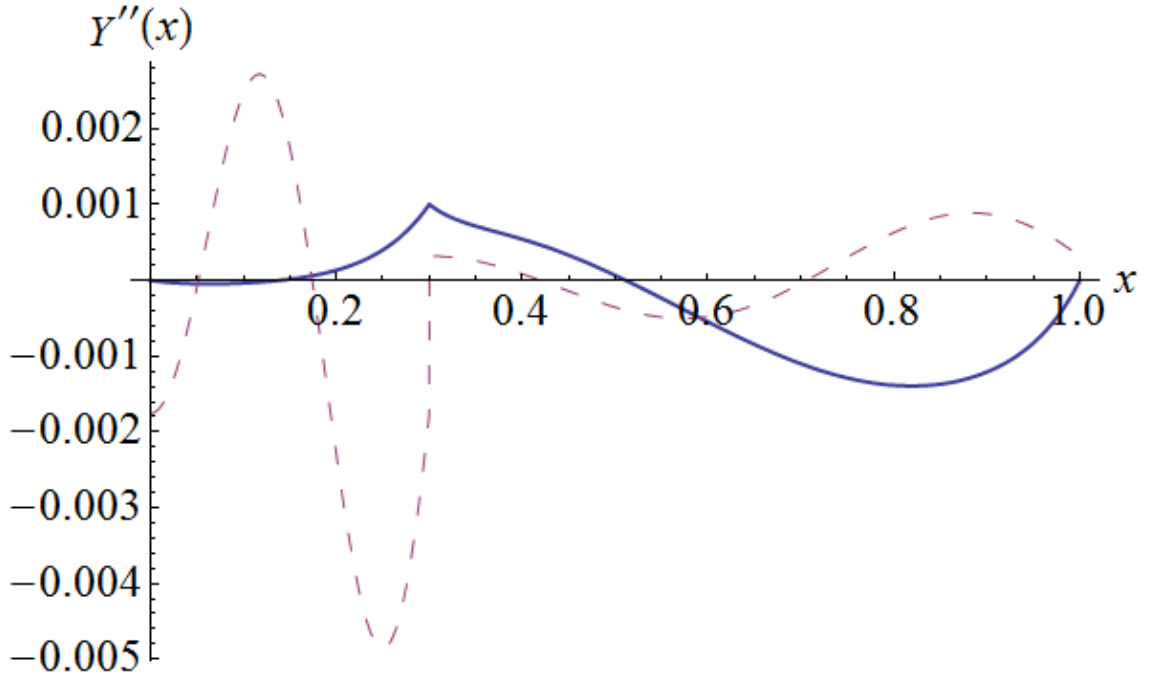
Şekil 4.16. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



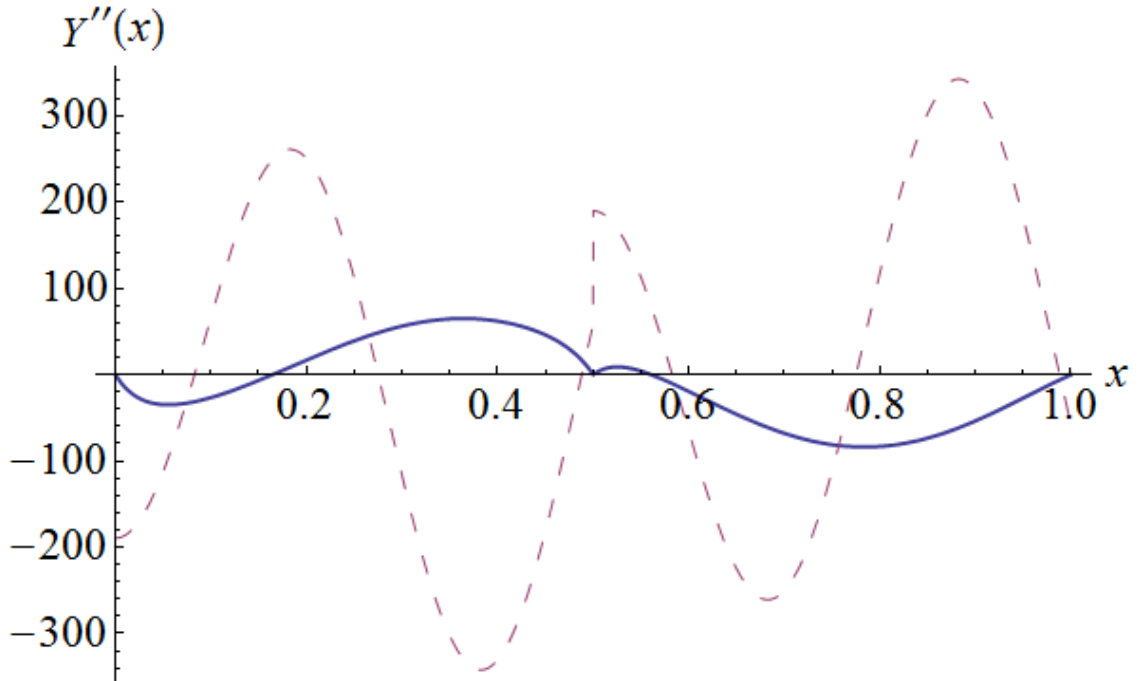
Şekil 4.17. $\varepsilon = 0.075$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.5$, $n = 1$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



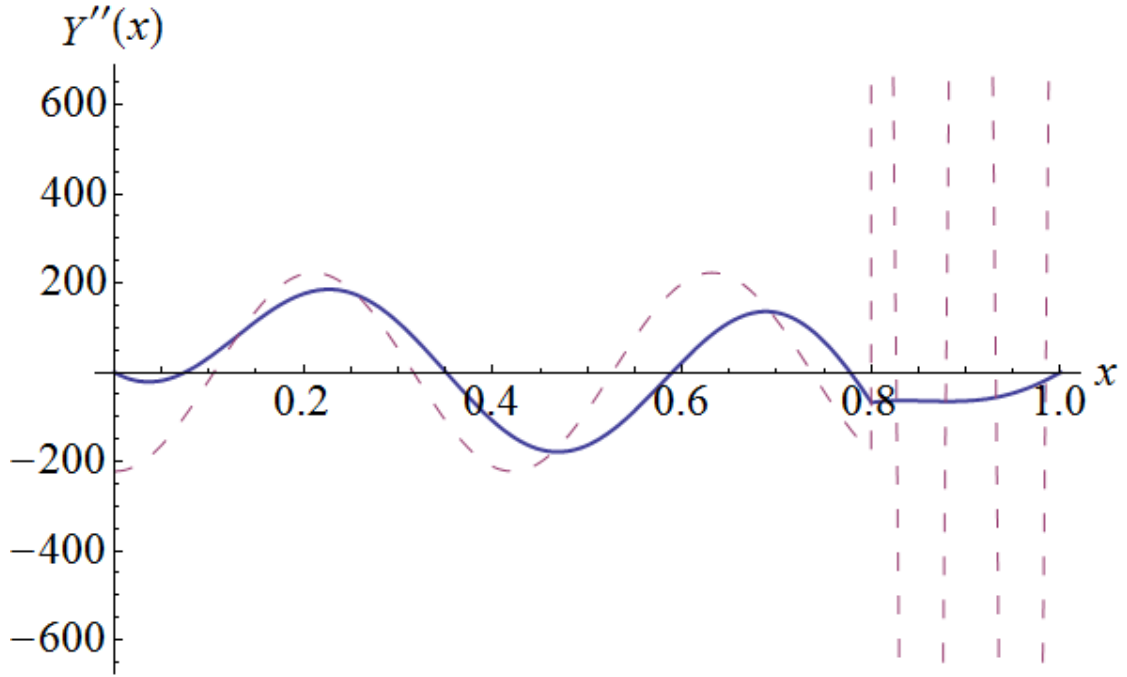
Şekil 4.18. $\varepsilon = 0.035$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 4.19. $\varepsilon = 0.045$, $\nu = 0$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 4.20. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 4.21. $\varepsilon = 0.065$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için B-B-B mesnet moment değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.

4.3.2. Ankastr-Basit-Ankastr Mesnet Durumu:

Bu mesnet durumu için sınır şartları şu şekildedir;

$$Y_1(0) = 0, \quad Y_1'(0) = 0, \quad Y_1(\eta) = Y_2(\eta) = 0, \quad Y_1'(\eta) = Y_2'(\eta) \quad (4.26)$$

$$Y_1''(\eta) = Y_2''(\eta), \quad Y_2(1) = 0, \quad Y_2'(1) = 0 \quad (4.27)$$

Bu şartları denklem (4.12) ve (4.13)'de yerine koyarsak karşımıza şu sekiz eşitlik çıkar;

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \quad (4.28)$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 + c_4 r_4 = 0 \quad (4.29)$$

$$c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} + c_3 e^{r_3} + c_4 e^{r_4} = 0 \quad (4.30)$$

$$c_1 r_1 e^{r_1} + c_2 r_2 e^{r_2} + c_3 r_3 e^{r_3} + c_4 r_4 e^{r_4} = 0 \quad (4.31)$$

$$c_1 e^{r_1 \eta} + c_2 e^{r_2 \eta} + c_3 e^{r_3 \eta} + c_4 e^{r_4 \eta} = 0 \quad (4.32)$$

$$c_5 e^{r_1 \eta} + c_6 e^{r_2 \eta} + c_7 e^{r_3 \eta} + c_8 e^{r_4 \eta} = 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} r_1 c_1 e^{r_1 \eta} + r_2 c_2 e^{r_2 \eta} + r_3 c_3 e^{r_3 \eta} + r_4 c_4 e^{r_4 \eta} \\ = r_1 c_5 e^{r_1 \eta} + r_2 c_6 e^{r_2 \eta} + r_3 c_7 e^{r_3 \eta} + r_4 c_8 e^{r_4 \eta} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} r_1^2 c_1 e^{r_1 \eta} + r_2^2 c_2 e^{r_2 \eta} + r_3^2 c_3 e^{r_3 \eta} + r_4^2 c_4 e^{r_4 \eta} \\ = r_1^2 c_5 e^{r_1 \eta} + r_2^2 c_6 e^{r_2 \eta} + r_3^2 c_7 e^{r_3 \eta} + r_4^2 c_8 e^{r_4 \eta} \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.3.2.a. Sayısal Örnekler:

Daha önceki sayısal örneklerde olduğu gibi yine, farklı ara mesnet durumlarındaki I. ve II. mod frekans değerleri tablolar halinde verilip, grafik üzerinde gösterilmiştir. Daha sonra da farklı değerlere ait deplasman ve eğim grafikleri dış açılım ve kompozit çözüm için karşılaştırılmış ve dış açılımın çözümü eğim şartını sağlamadığı görülmüştür. Mesnetlerin ankastre olması, ara mesnetin konumu, ortalama hızın ve enine direngenliğin etkisi önceki verilerle benzer olmaktadır.

Tablo 4.7. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri

ε	$\eta = 0.3$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0.000	4.48800	4.08408	2.87232	0.85272
0.005	4.53776	4.13224	2.91500	0.881341
0.010	4.59092	4.18495	2.96585	0.924147
0.015	4.64748	4.24212	3.02445	0.979417
0.020	4.70744	4.30366	3.09029	1.04590
0.025	4.77080	4.36945	3.16290	1.12315
0.030	4.83758	4.43937	3.24177	1.21144
0.035	4.90775	4.51328	3.32648	1.31137
0.040	4.98130	4.59104	3.41667	1.42368
0.045	5.05818	4.67248	3.51207	1.54898
0.050	5.13835	4.75744	3.61253	1.68781
0.055	5.22171	4.84573	3.71796	1.84056
0.060	5.30816	4.93718	3.82838	2.00752
0.065	5.39758	5.03161	3.94385	2.18892
0.070	5.48982	5.12886	4.06450	2.38491
0.075	5.58473	5.22878	4.19047	2.59559
0.080	5.68216	5.33122	4.32193	2.82104
0.085	5.78194	5.43608	4.45905	3.06131
0.090	5.88390	5.54323	4.60200	3.31642
0.095	5.98790	5.65260	4.75095	3.58640
0.100	6.09378	5.76413	4.90605	3.87125
0.105	6.20140	5.87775	5.06744	4.17098
0.110	6.31063	5.99344	5.23526	4.48558
0.115	6.42135	6.11117	5.40962	4.81504
0.120	6.53346	6.23094	5.59063	5.15936

Tablo 4.8. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.5$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri

ε	$\eta = 0.5$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0.000	6.28320	5.71772	4.02126	1.19381
0.005	6.34973	5.78300	4.08208	1.24101
0.010	6.42364	5.85875	4.16299	1.32378
0.015	6.50479	5.94449	4.26226	1.43775
0.020	6.59305	6.03973	4.37826	1.58224
0.025	6.68828	6.14394	4.50962	1.75917
0.030	6.79029	6.25665	4.65544	1.97112
0.035	6.89891	6.37738	4.81528	2.22030
0.040	7.01393	6.50574	4.98918	2.50836
0.045	7.13515	6.64141	5.17754	2.83641
0.050	7.26234	6.78416	5.38096	3.20520
0.055	7.39531	6.93384	5.60019	3.61518
0.060	7.53382	7.09037	5.83599	4.06660
0.065	7.67769	7.25376	6.08910	4.55957
0.070	7.82671	7.42402	6.36019	5.09409
0.075	7.98071	7.60125	6.64984	5.67012
0.080	8.13954	7.78555	6.95854	6.28759
0.085	8.30304	7.97703	7.28672	6.94640
0.090	8.47111	8.17584	7.63470	7.64647
0.095	8.64366	8.38210	8.00274	8.38769
0.100	8.82060	8.59596	8.39105	9.16998
0.105	9.00188	8.81755	8.79979	9.99327
0.110	9.18747	9.04701	9.22906	10.85750
0.115	9.37735	9.28445	9.67896	11.76260
0.120	9.57152	9.53000	10.14950	12.70850

Tablo 4.9. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 1. Mod Frekans Değerleri

ε	$\eta = 0.8$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0.000	3.92700	3.57357	2.51328	0.74613
0.005	3.96504	3.61032	2.54566	0.76744
0.010	4.00557	3.65035	2.58378	0.798684
0.015	4.04866	3.69367	2.62746	0.838928
0.020	4.09434	3.74027	2.67649	0.887347
0.025	4.14269	3.79014	2.73063	0.943405
0.030	4.19377	3.84329	2.78963	1.00692
0.035	4.24761	3.89966	2.85321	1.07800
0.040	4.30423	3.95919	2.92108	1.15693
0.045	4.36359	4.02175	2.99297	1.24407
0.050	4.42566	4.08723	3.06866	1.33976
0.055	4.49037	4.15547	3.14796	1.44429
0.060	4.55762	4.22631	3.23073	1.55793
0.065	4.62731	4.29960	3.31688	1.68088
0.070	4.69933	4.37517	3.40640	1.81330
0.075	4.77355	4.45286	3.49927	1.95531
0.080	4.84986	4.53255	3.59555	2.10702
0.085	4.92812	4.61409	3.69529	2.26847
0.090	5.00819	4.69736	3.79856	2.43975
0.095	5.08996	4.78226	3.90546	2.62087
0.100	5.17330	4.86869	4.01609	2.81187
0.105	5.25809	4.95657	4.13053	3.01276
0.110	5.34422	5.04584	4.24888	3.22357
0.115	5.43157	5.13644	4.37124	3.44429
0.120	5.52005	5.22833	4.49768	3.67494

Tablo 4.10. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.3$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri

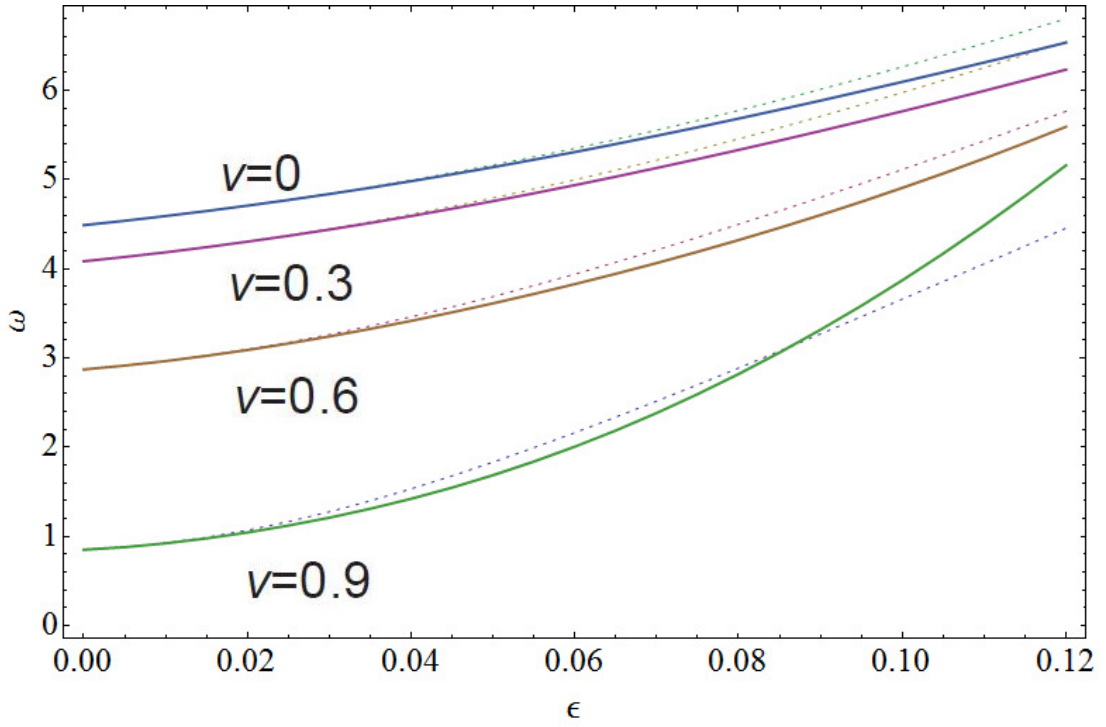
ε	$\eta = 0.3$			
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0,000	8,97600	8,16816	6,70211	1,70544
0,005	9,08077	8,27335	6,94676	1,80387
0,010	9,20290	8,40520	7,25100	2,00858
0,015	9,34248	8,56309	7,59717	2,31525
0,020	9,49947	8,74634	7,97124	2,72651
0,025	9,67377	8,95429	8,36720	3,24698
0,030	9,86519	9,18640	8,78668	3,88051
0,035	10,07350	9,44228	9,23561	4,62973
0,040	10,29840	9,72172	9,72103	5,49625
0,045	10,53960	10,02470	10,24930	6,48099
0,050	10,79680	10,35130	10,82550	7,58438
0,055	11,06960	10,70180	11,45340	8,80661
0,060	11,35770	11,07640	12,13550	10,14770
0,065	11,66100	11,47550	12,87370	11,60770
0,070	11,97920	11,89940	13,66940	13,18640
0,075	12,31220	12,34830	14,52320	14,88390
0,080	12,66000	12,82250	15,43580	16,70010
0,085	13,02240	13,32240	16,40760	18,63480
0,090	13,39960	13,84810	17,43890	20,68810
0,095	13,79150	14,39980	18,52970	22,85980
0,100	14,19830	14,97780	19,68030	25,15000
0,105	14,62010	15,58210	20,89070	27,55860
0,110	15,05700	16,21280	22,16090	30,08550
0,115	15,50910	16,87020	23,49090	32,73060
0,120	15,97660	17,55430	24,88090	35,49410

Tablo 4.11. Ankastre-Basit-Ankastre Siste., $\eta = 0.5$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri

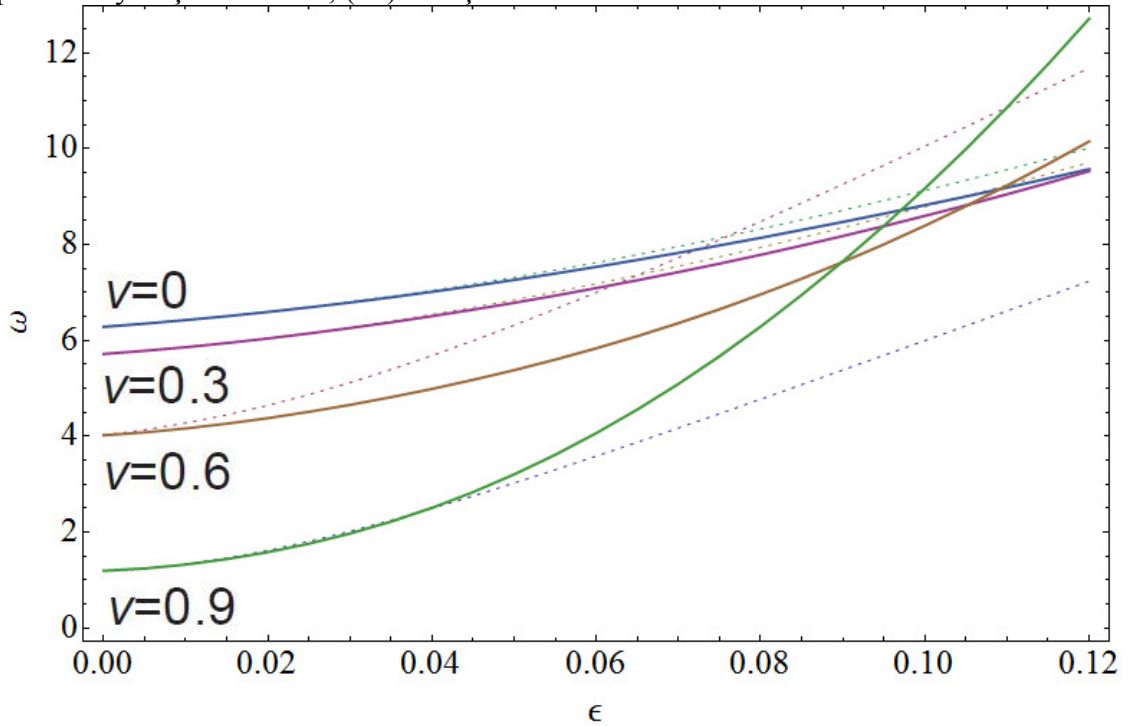
$\eta = 0.5$				
ε	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0,000	12,56640	11,43540	8,04252	2,38763
0,005	12,71790	11,59440	8,22383	2,59769
0,010	12,92060	11,82930	8,55886	3,09940
0,015	12,95010	12,13670	9,03819	3,89369
0,020	13,47490	12,51390	9,65784	4,99562
0,025	13,82420	12,95910	10,41890	6,41541
0,030	14,22000	13,47130	11,32520	8,15786
0,035	14,66150	14,05090	12,38100	10,22490
0,040	15,14790	14,69840	13,59020	12,61730
0,045	15,67850	15,41510	14,95610	15,33520
0,050	16,25300	16,20200	16,48100	18,37860
0,055	16,87110	17,06030	18,16650	21,74760
0,060	17,53290	17,99090	20,01410	25,44210
0,065	18,23830	18,99460	22,02460	29,46210
0,070	18,98770	20,07200	24,19860	33,80760
0,075	19,78120	21,22360	26,53660	38,47820
0,080	20,61920	22,44980	29,03900	43,47390
0,085	21,50200	23,75080	31,70580	48,79450
0,090	22,42990	25,12680	34,53730	54,43990
0,095	23,40330	26,57800	37,53340	60,40980
0,100	24,42240	28,10440	40,69420	66,70410
0,105	25,48760	29,70630	44,01970	73,32270
0,110	26,59920	31,38350	47,50960	80,26550
0,115	27,75730	33,13620	51,16410	87,53230
0,120	28,96230	34,96460	54,98300	95,12300

Tablo 4.12. Ankastre-Basit-Ankastre Sistem, $\eta = 0.8$ İçin 2. Mod Frekans Değerleri

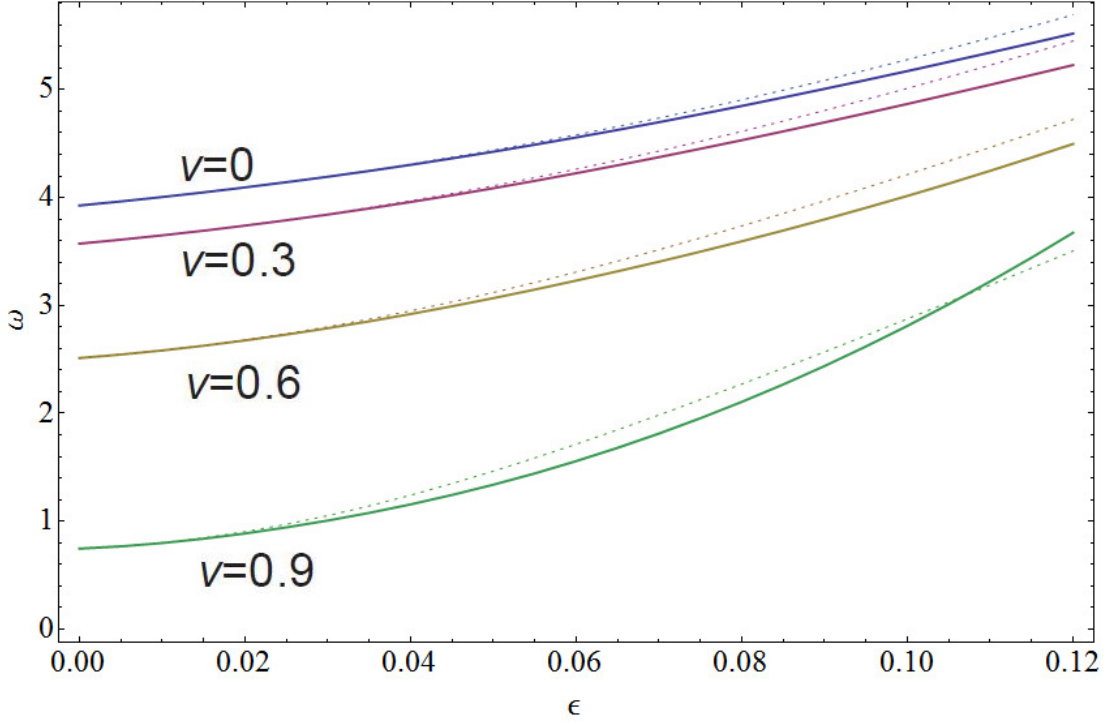
$\eta = 0.8$				
ε	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.6$	$\nu = 0.9$
0,000	7,85400	7,14714	5,02656	1,49226
0,005	7,93435	7,22736	5,10577	1,56330
0,010	8,02814	7,32728	5,22437	1,70785
0,015	8,13527	7,44642	5,38051	1,92214
0,020	8,25566	7,58428	5,57256	2,20668
0,025	8,38919	7,74038	5,79940	2,56384
0,030	8,53571	7,91428	6,06048	2,99595
0,035	8,69498	8,10553	6,35571	3,50464
0,040	8,86672	8,31380	6,68539	4,09098
0,045	9,05057	8,53875	7,05000	4,75559
0,050	9,24614	8,78017	7,45010	5,49886
0,055	9,45303	9,03789	7,88628	6,32101
0,060	9,67085	9,31185	8,35907	7,22217
0,065	9,89925	9,60203	8,86895	8,20241
0,070	10,13790	9,90847	9,41636	9,26178
0,075	10,38660	10,23120	10,00160	10,40030
0,080	10,64500	10,57050	10,62510	11,61800
0,085	10,91300	10,92620	11,28710	12,91490
0,090	11,19060	11,29870	11,98770	14,29090
0,095	11,47750	11,68790	12,72720	15,74610
0,100	11,77380	12,09410	13,50570	17,28050
0,105	12,07950	12,51730	14,32340	18,89410
0,110	12,39460	12,95760	15,18040	20,58680
0,115	12,71910	13,41520	16,07680	22,35860
0,120	13,05310	13,89010	17,01270	24,20970



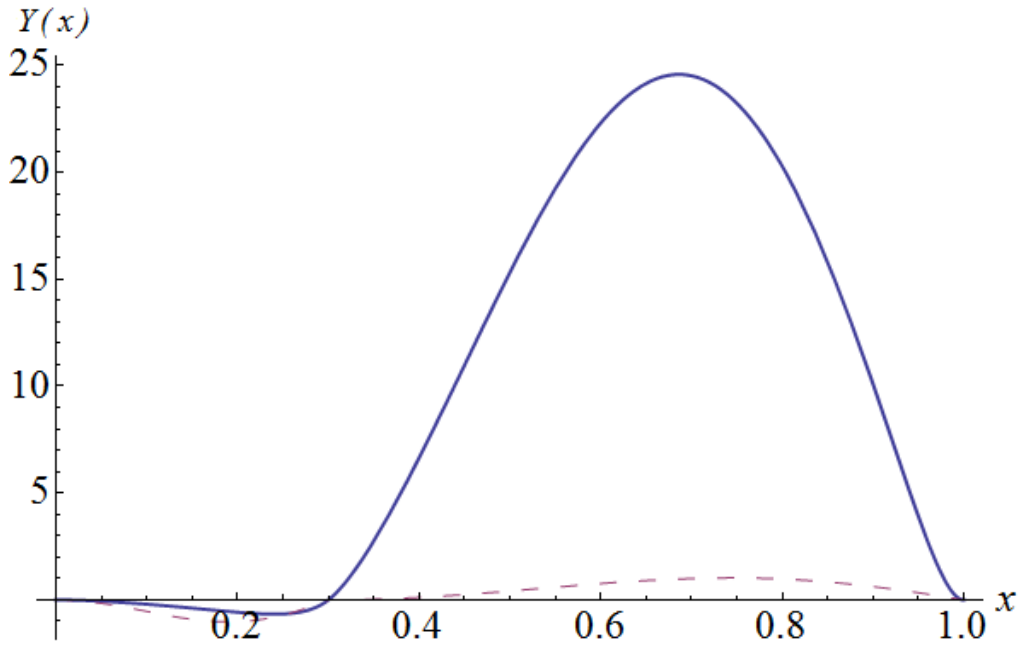
Şekil 4.22. Ankastre-ankastre-ankastre mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.3$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.



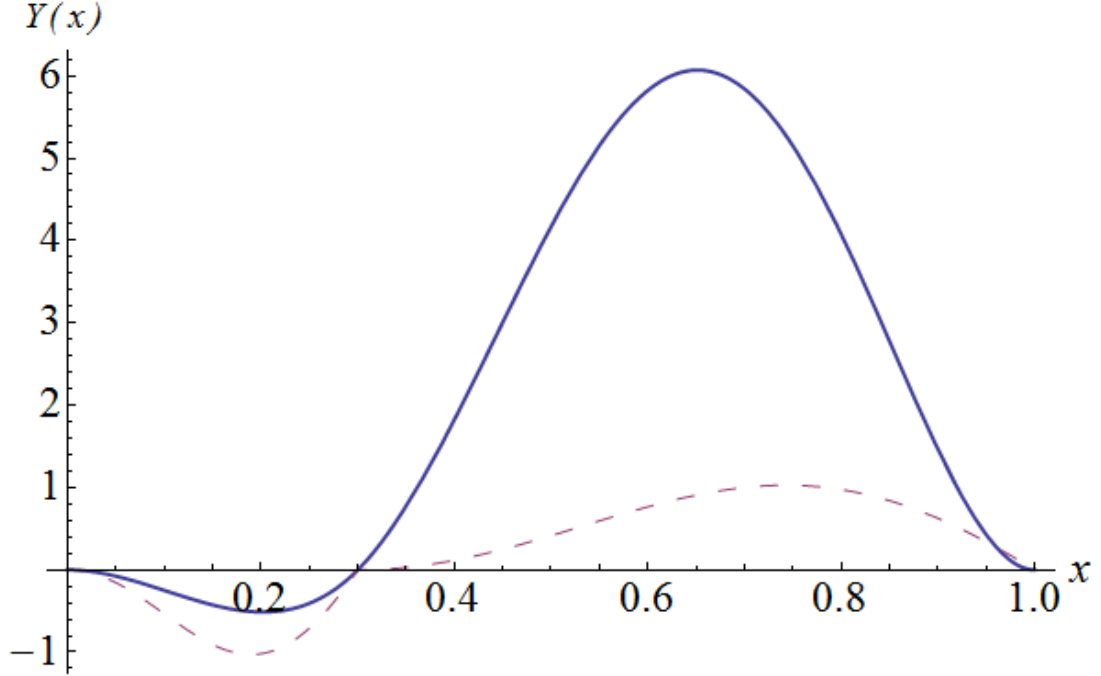
Şekil 4.23. Ankastre-ankastre-ankastre mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.5$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.



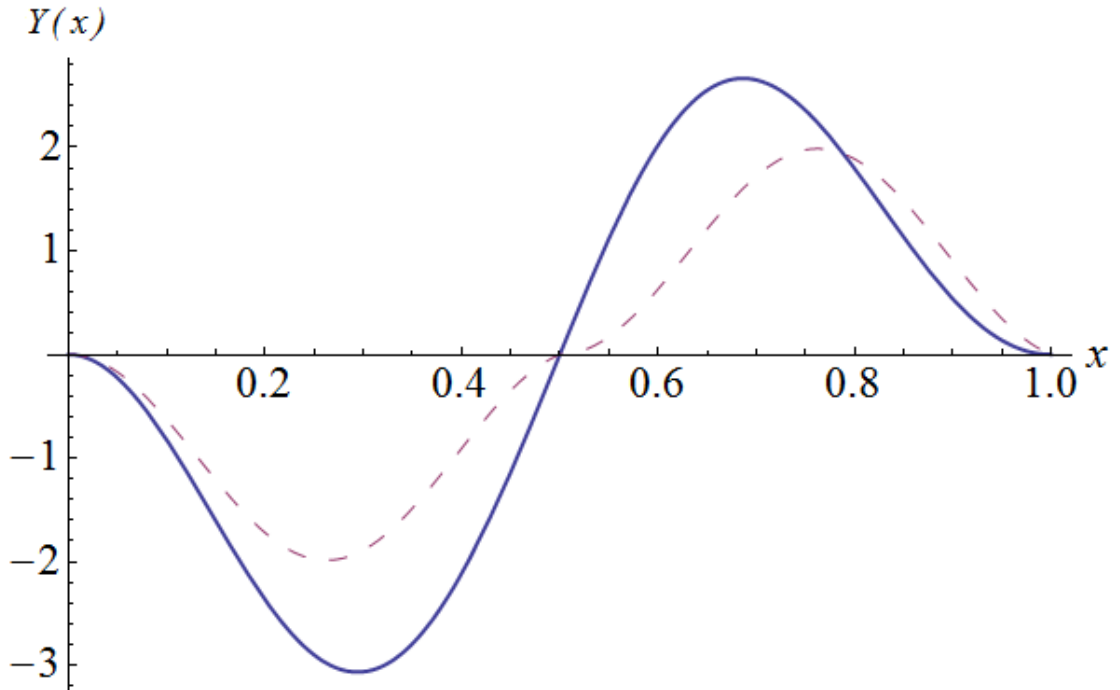
Şekil 4.24. Ankastre-ankastre-ankastre mesnet durumu için I. mod frekansın, $\eta = 0.8$ noktasında ara mesnet durumunda enine direngenliğe bağlı değişim grafiği. (—) perturbasyon çözümümüz; (...) tam çözüm.



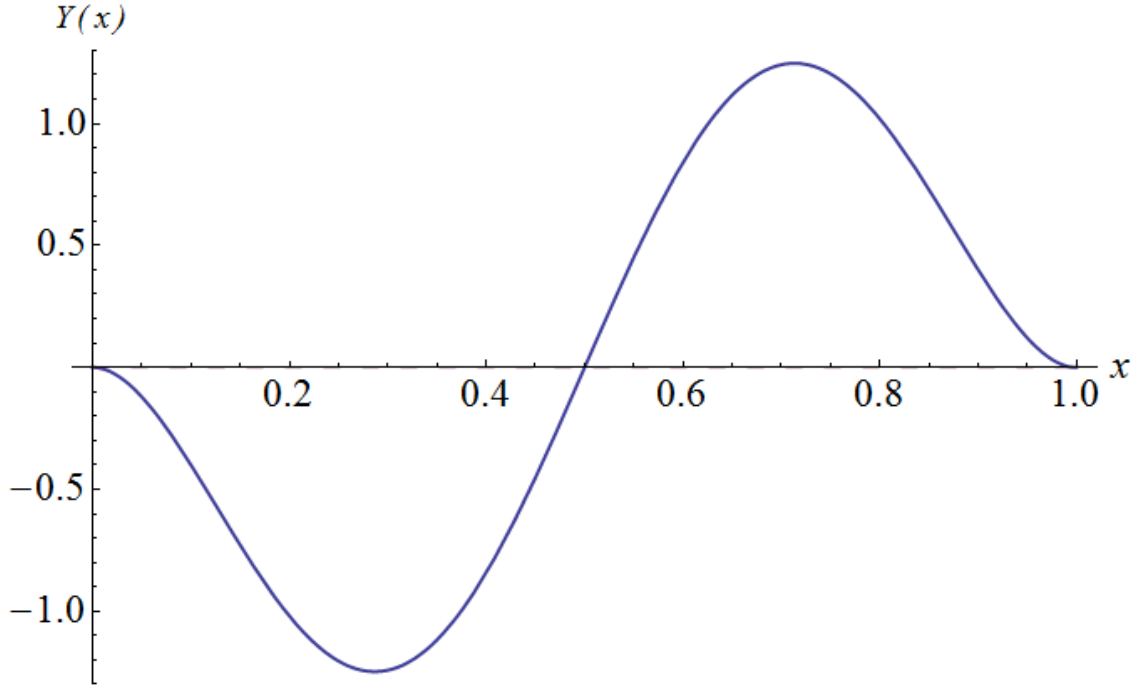
Şekil 4.25. $\varepsilon = 0.025$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



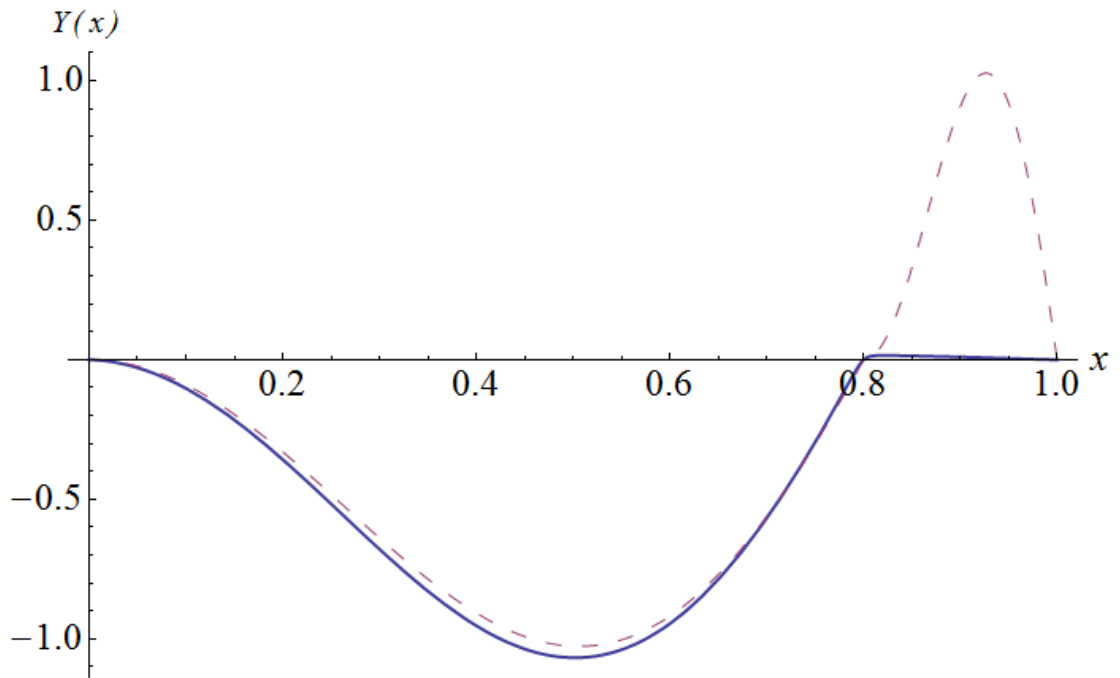
Şekil 4.26. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (---) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



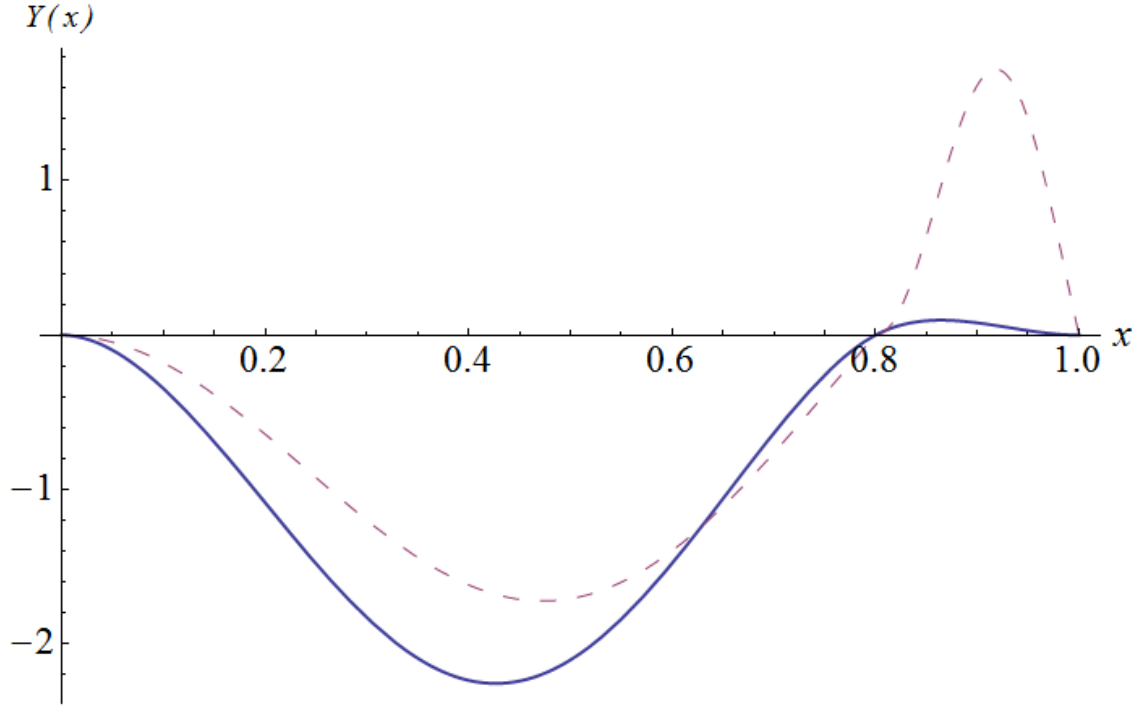
Şekil 4.27. $\varepsilon = 0.1, \nu = 0.9, \eta = 0.5, n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



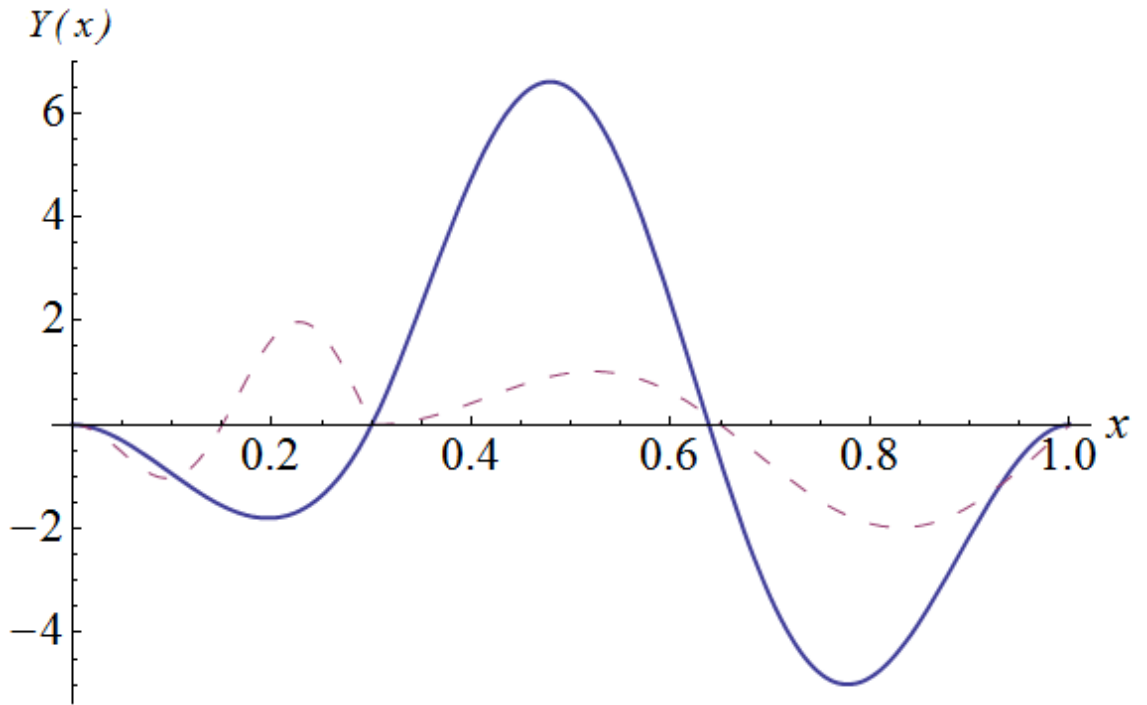
Şekil 4.28. $\varepsilon = 0.1, \nu = 0, \eta = 0.5, n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



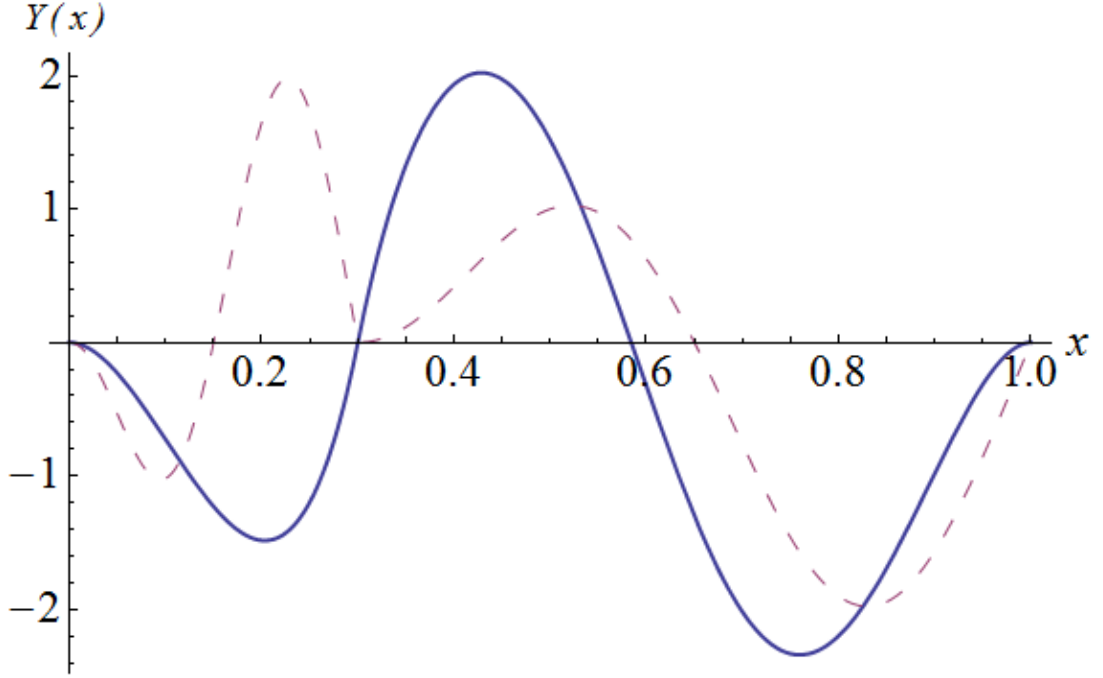
Şekil 4.29. $\varepsilon = 0.005$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



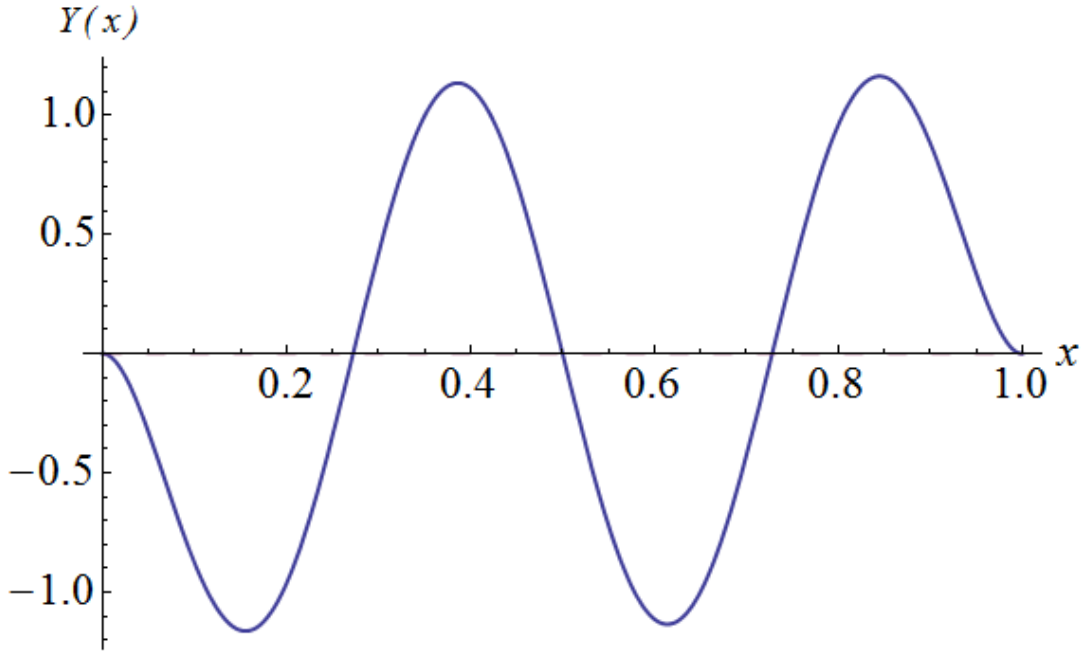
Şekil 4.30. $\varepsilon = 0.065$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



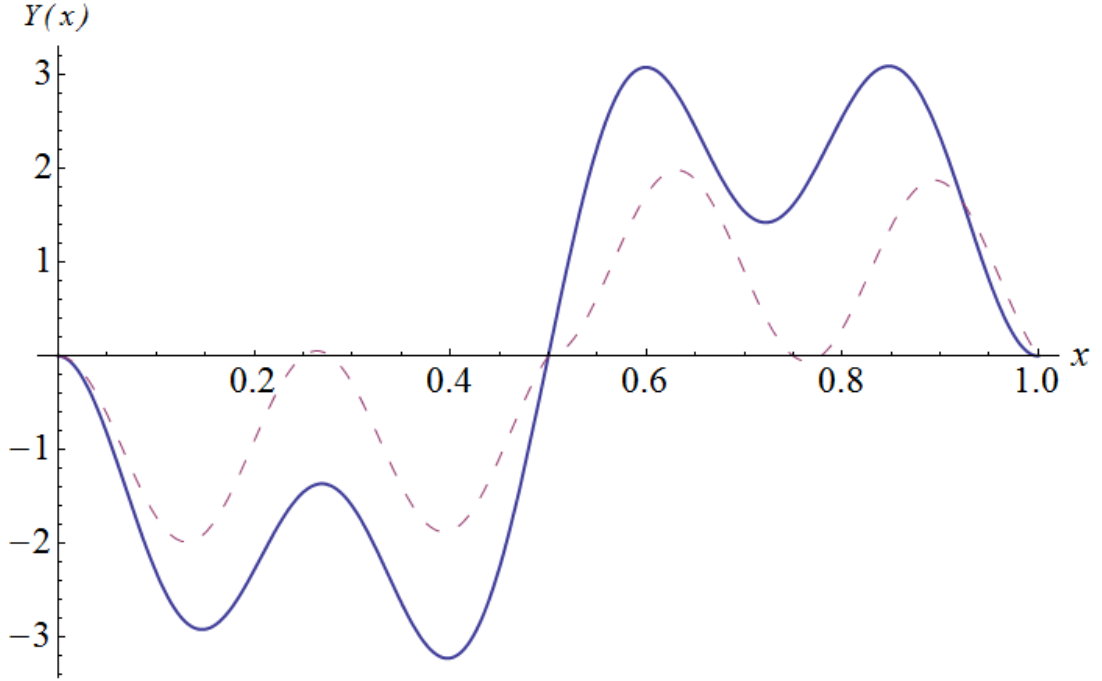
Şekil 4.31. $\varepsilon = 0.055$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



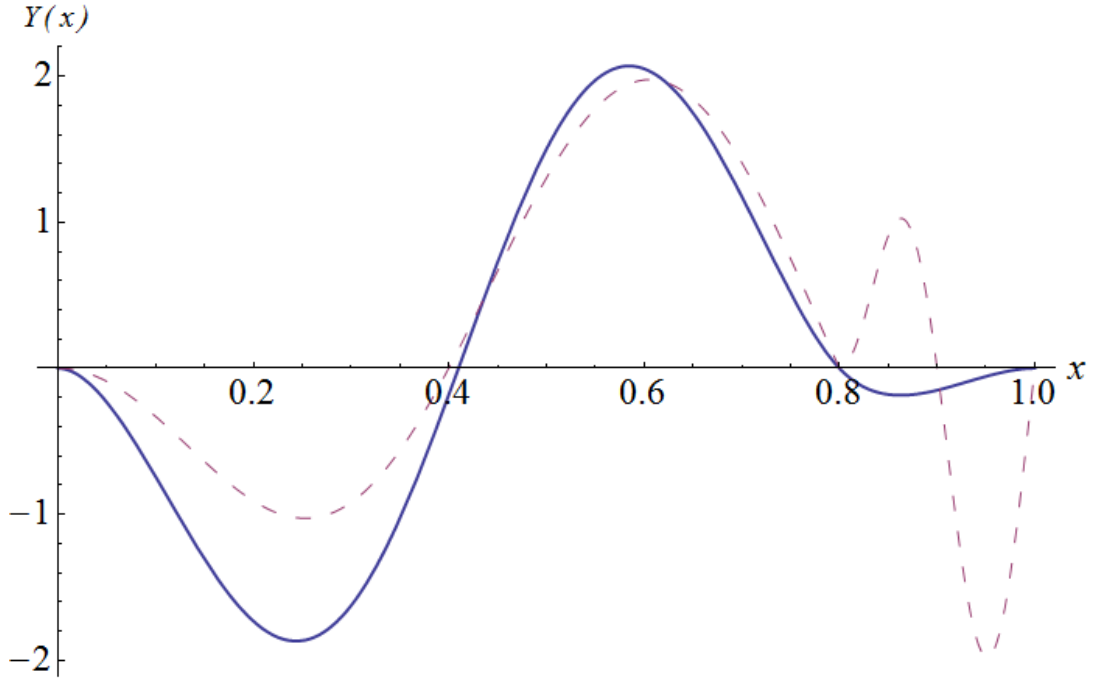
Şekil 4.32. $\varepsilon = 0.055$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



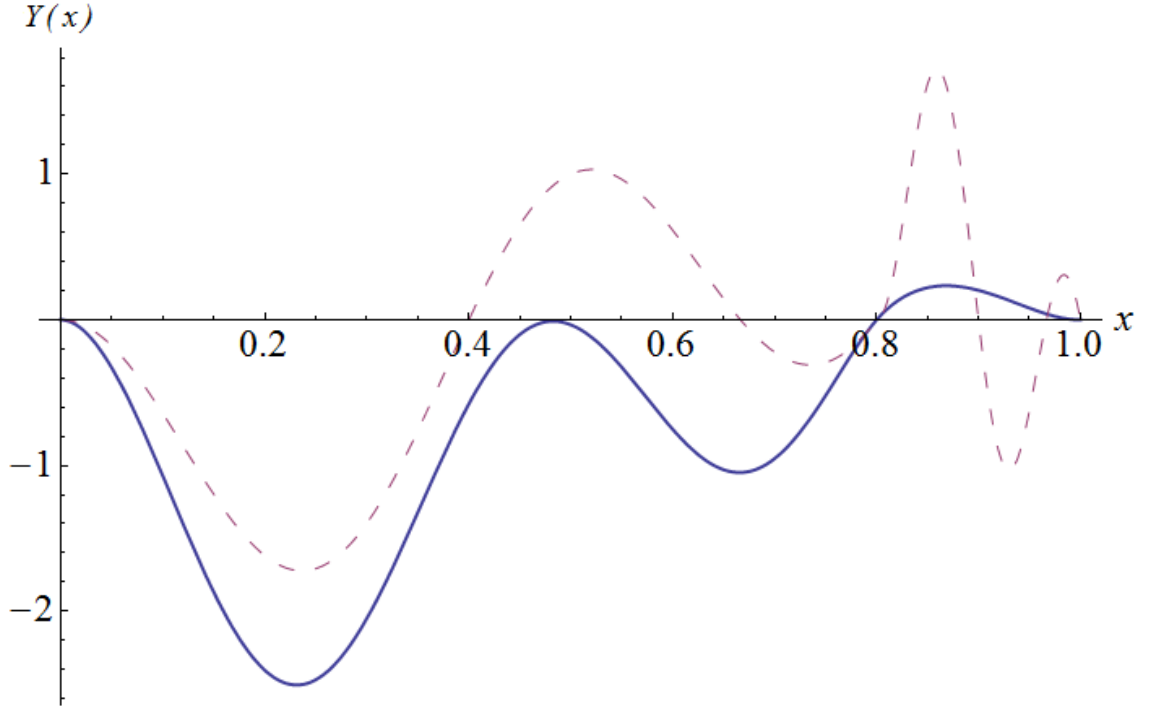
Şekil 4.33. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



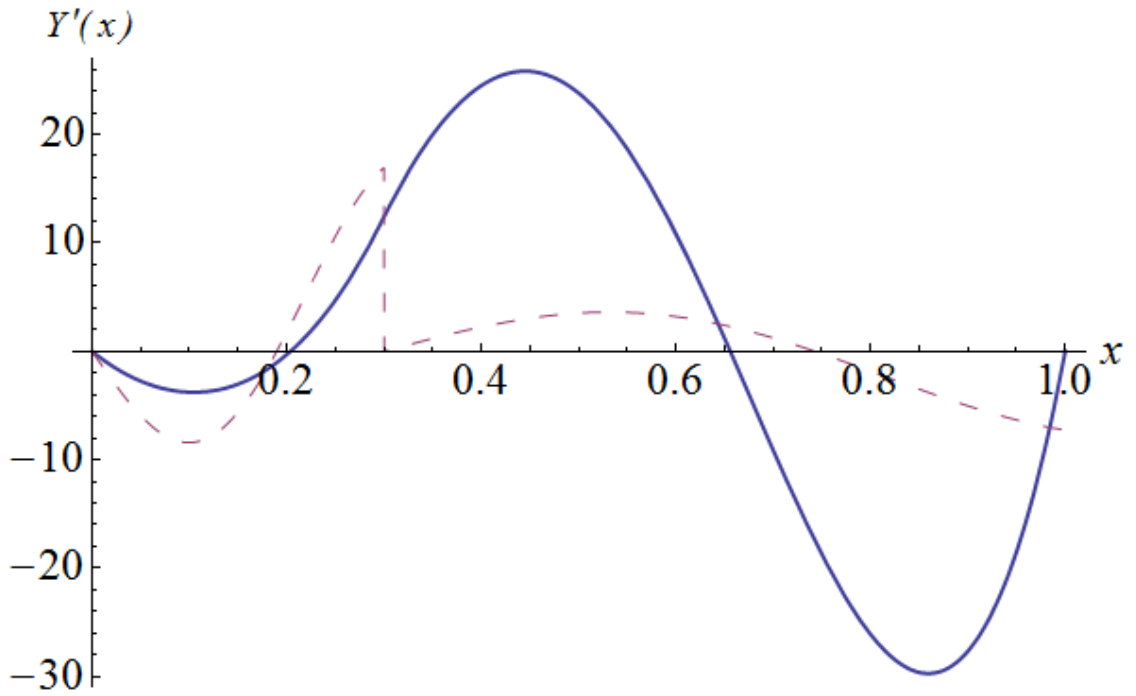
Şekil 4.34. $\varepsilon = 0.035$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



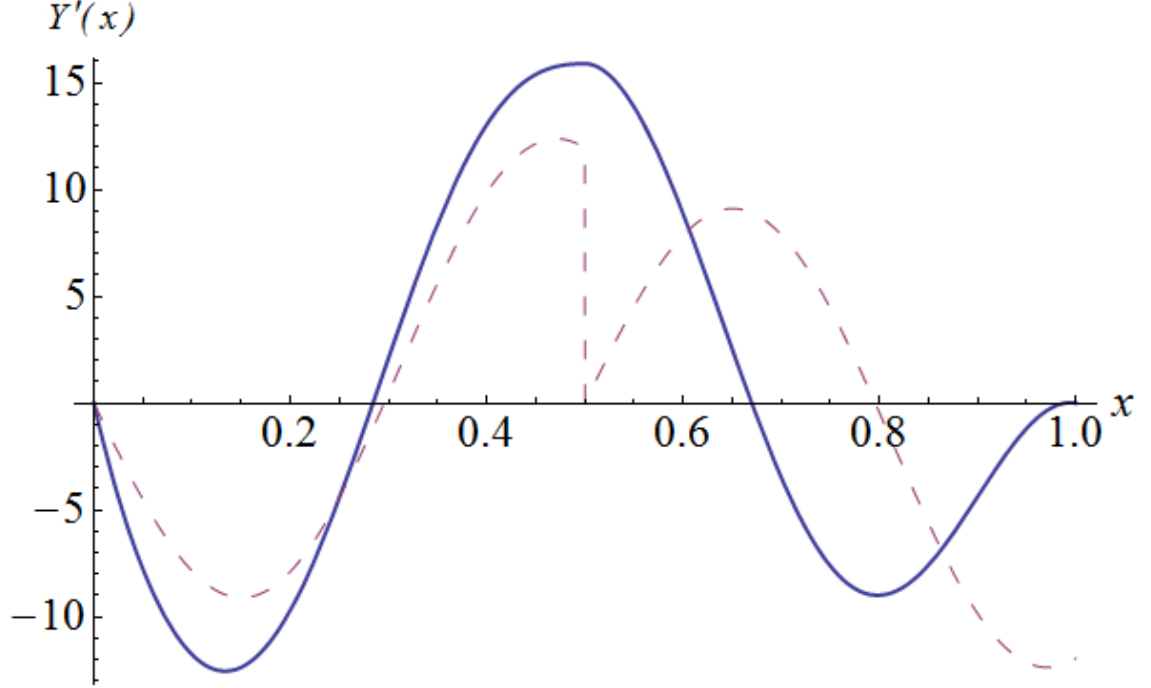
Şekil 4.35. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



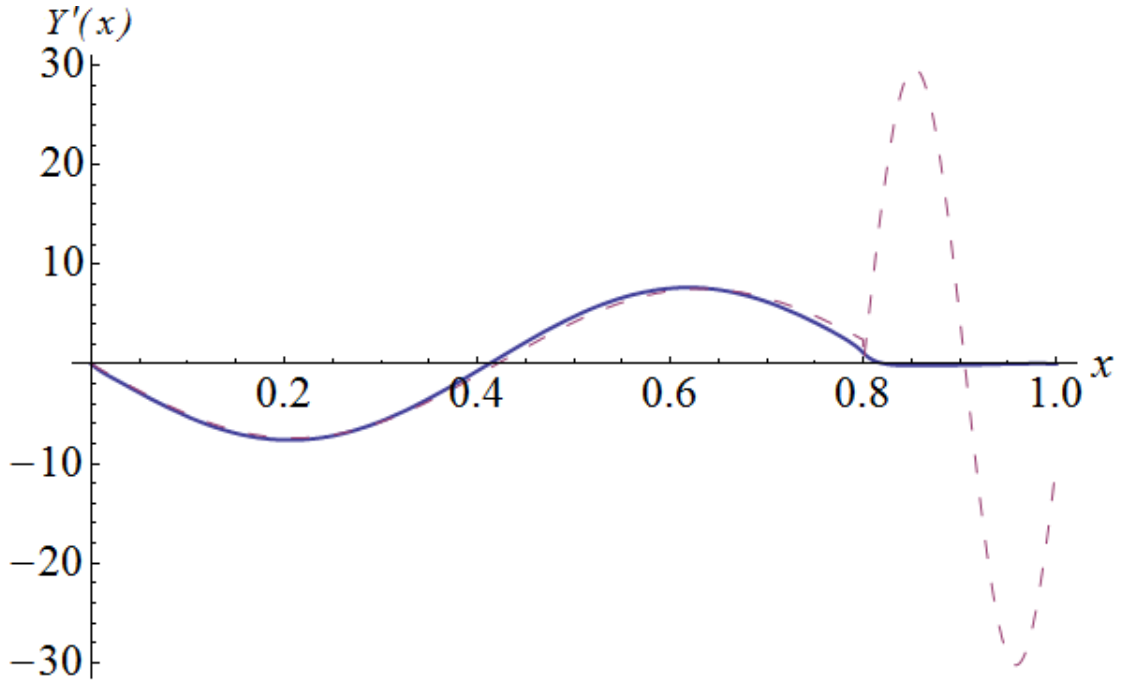
Şekil 4.36. $\varepsilon = 0.05$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için A-B-A mesnet deplasman değişim grafiği. (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



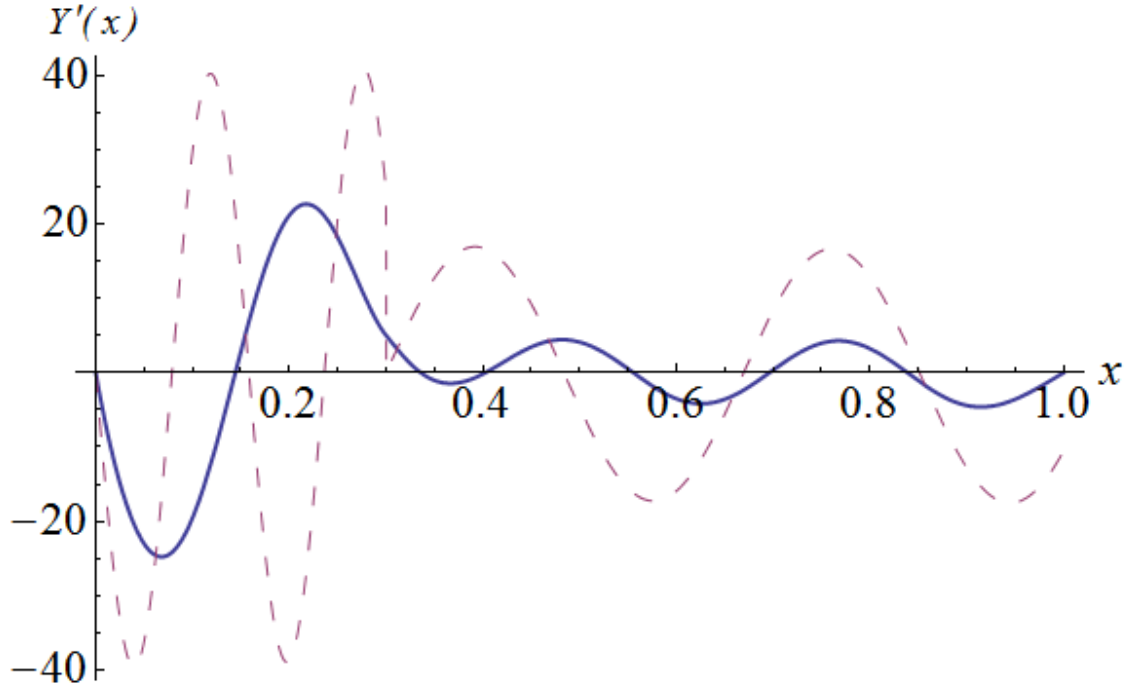
Şekil 4.37. $\varepsilon = 0.1, \nu = 0.3, \eta = 0.3, n = 1$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



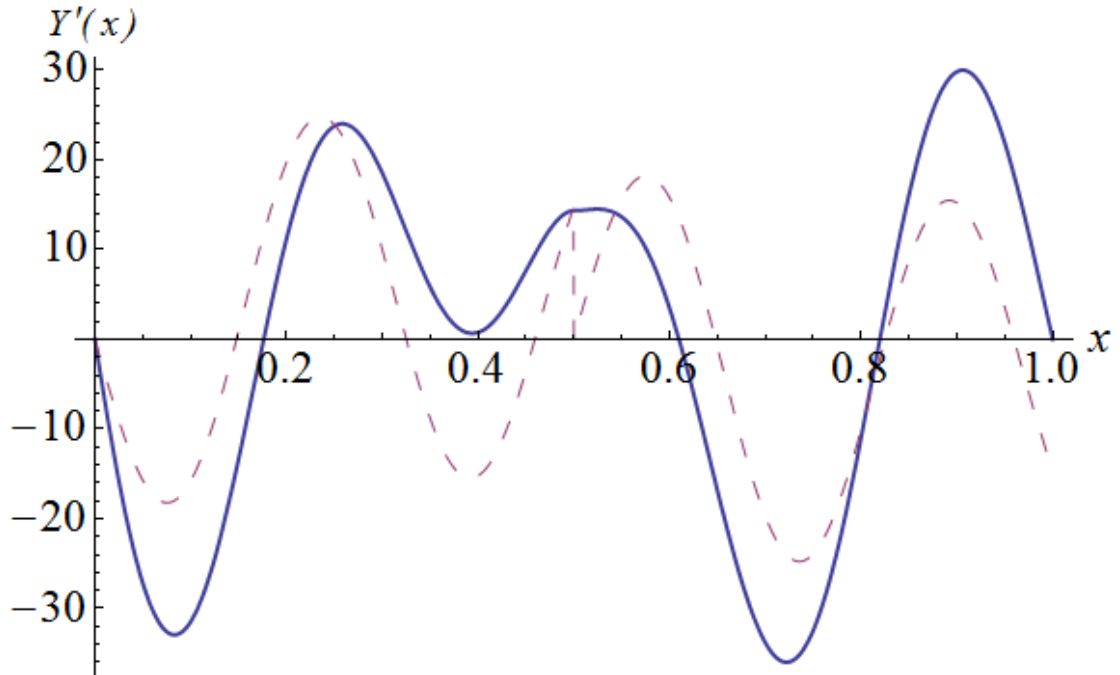
Şekil 4.38. $\varepsilon = 0.05, \nu = 0.6, \eta = 0.5, n = 1$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



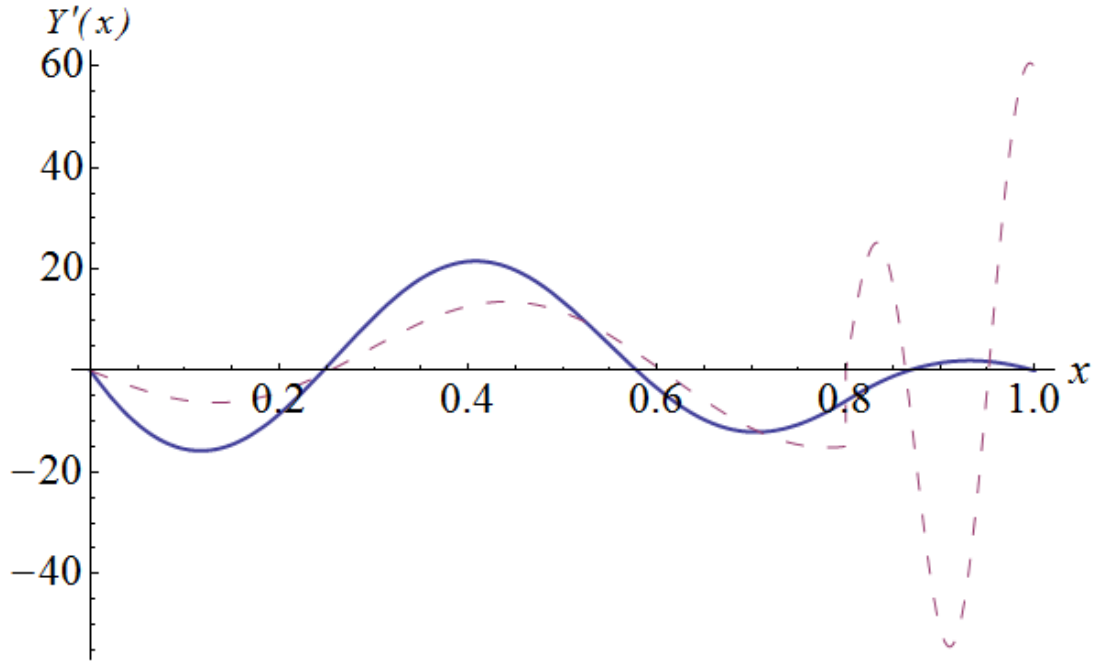
Şekil 4.39. $\varepsilon = 0.005$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.8$, $n = 1$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 4.40. $\varepsilon = 0.015$, $\nu = 0.9$, $\eta = 0.3$, $n = 2$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 4.41. $\varepsilon = 0.12$, $\nu = 0.6$, $\eta = 0.5$, $n = 2$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.



Şekil 4.42. $\varepsilon = 0.095$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.8$, $n = 2$ için A-B-A mesnet eğim değişim grafiği.
 (- - -) dış açılım çözümü; (—) kompozit çözüm.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER:

Bu çalışmada eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri incelenmiştir. Ele alınan model; farklı ortalama hız değerleri için eksenel hareketli esnek kiriştir. Kirişin enine direngenliği küçük kabulü yapılmıştır. Daha sonra sürekli ortam için hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Esnek kirişi malzeme özelliklerinden ve geometrisinden bağımsız hale getirmek için boyutsuzlaştırma yapılmıştır. Genel haliyle hareket denklemleri ve sınır şartları çıkarılmıştır. Denklemde en büyük mertebeli terimin başındaki katsayının küçük olmasından dolayı tüm şartlar elde edilen denklemlere sağlatılamamaktadır. Bu problem bir sınır tabakası problemi ve en büyük mertebeli ile sonraki mertebeli arasındaki fark 2 olduğu için birden fazla yerde sınır tabakası olduğu görülmektedir. Bu nedenle bölüm 3'te elde edilen hareket denklemleri için ilk önce çok ölçekli metot ile dış açılım yapılmış daha sonra mesnetlere yakın bölgelerde farklı birer iç açılım yapılarak dış ve iç açılım çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu çözümler birleştirilerek tüm bölgede geçerli kompozit çözümler elde edilmiştir. Sınır şartı olarak basit-basit, ankastre-ankastre, basit-basit-basit ve ankastre-basit-ankastre mesnetli durumlar ele alınmıştır. Elde edilen çözümler kullanılarak değişik durumlar için tablolar verilmiş ve grafikler çizdirilmiştir. Deplasmanla ilgili sınır şartları incelenen tüm sistemlerde dış açılım ve kompozit açılım tarafından yaklaşık olarak sağlanmakta, fakat eğim ve moment şartlarını sadece kompozit çözüm sağlamaktadır. Ortalama hız arttıkça deplasman değişimindeki genlikler artmakta, tabii frekans değerleri azalmaktadır. Tabii frekans değeri enine direngenliğin artmasıyla ise artmaktadır. Uçlardaki mesnetlerin ankastre olması yine genlikleri bir miktar arttırmakta ve tabii frekansın enine direngenliğe bağlı artış miktarının daha radikal bir şekilde olmasına neden olmaktadır. Çok mesnetli sistemlerde ara mesnetin konumu tam ortada ise maksimum tabii frekans değerleri elde edilmekte, ara mesnet sola veya sağa yaklaştıkça bu değerler iki mesnetli sistemlere yaklaşmaktadır. Dış açılım çözümünde sadece ilk mertebeyi aldığımız için enine direngenlik arttıkça; bu çözüm ile kompozit çözümümüz arasındaki fark açılmaktadır.

Bu çalışmanın devamı olarak şunlar yapılabilir;

1. Lineer analize ilave olarak non-lineer analiz yapılabilir.
2. Hız değişimi, harmonik veya sabit hıza eksponansiyel olarak yaklaşan hız fonksiyonları şeklinde ele alınabilir.
3. Daha değişik mesnetleme durumları ele alınabilir.
4. Denklemlere sönüm ve zorlama terimleri ilave edilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Miranker, W.L., The wave equation in a medium in motion, IBM Journal of Research and Development 4, 36-42. 1960.
2. Mote, C.D. Jr., Stability of systems transporting accelerating axially moving materials, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control 97, 96-98. 1975.
3. Ulsoy, A.G., Mote, C.D. Jr., and Syzmani, R., Principal developments in band saw vibration and stability research, Holz als Roh- und Werkstoff 36, 273-280. 1978.
4. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques, New York:John Wiley. 1981.
5. Ulsoy, A.G., Coupling between spans in the vibration of axially moving materials, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design 108, 207-212. 1986.
6. Wickert, J.A., Mote, C.D. Jr., Current research on the vibration and stability of axially moving materials, Shock and Vibration Digest 20(5), 3-13. 1988.
7. Wickert, J.A., Mote, C.D. Jr., Classical vibration analysis of axially moving continua, ASME Journal of Applied Mechanics 57, 738-744. 1990.
8. Wickert, J.A., Mote, C.D. Jr., Response and discretization methods for axially moving materials, Applied Mechanics Reviews 44, 279-284. 1991.
9. Nayfeh, A.H., Nayfeh, J.F. and Mook, D.T. On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities, Nonlinear Dynamics 3, 145-162. 1992.
10. Wickert, J.A. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam, International Journal of Non-Linear Mechanics, 27, 503-517. 1992.
11. Pakdemirli, M. and Batan, H. Dynamic stability of a constantly accelerating strip, Journal of sound and Vibration 168, 371-378. 1993.
12. Pakdemirli, M., Ulsoy, A.G. and Ceranoğlu A. Transverse vibration of an axially accelerating string, Journal of Sound and Vibration 169, 179-196. 1994.
13. Pakdemirli, M. A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities, Mechanics Research Communications 21, 203-208. 1994.

14. Mockenstrum, E.M., Perkins, N.C. and Ulsoy, A.G. Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving strings, *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 118, 346-350. 1994.
15. Pakdemirli, M., Boyacı, H. Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for nonlinear vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 186, 837-845. 1995.
16. Pakdemirli, M., Nayfeh, S.A. and Nayfeh, A.H. Analysis of one-to-one autoparametric resonances in cables-discretization vs direct treatment, *Nonlinear Dynamics* 8, 65-83. 1995.
17. Al-Jawi, A.A.N., Pierre, C. and Ulsoy, A.G. Vibration localization in dual-span, axially moving beams, part 1: formulation and results, *Journal of Sound and Vibration* 179, 243-266. 1995a
18. Al-Jawi, A.A.N., Pierre, C. and Ulsoy, A.G. Vibration localization in dual-span, axially moving beams, part 2: perturbation analysis, *Journal of Sound and Vibration* 179, 267-287. 1995b.
19. Al-Jawi, A.A.N., Pierre, C. and Ulsoy, A.G. Vibration localization in band-wheel systems: theory and experiment, *Journal of Sound and Vibration* 179, 289-312. 1995c.
20. Pakdemirli, M., Boyacı, H. The direct-perturbation method versus the discretization-perturbation method: Linear systems, *Journal of Sound and Vibration* 199(5), 825-832. 1997.
21. Pakdemirli, M. and Ulsoy, A.G. Stability analysis of an axially accelerating beam, *Journal of Sound and Vibration* 203, 815-832. 1997.
22. Pellicano, F. and Zirilli, F. Boundary Layers and non-linear vibrations in an axially moving beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 33, 691-711. 1998.
23. H.R. Öz, M. Pakdemirli, E.Özkaya, Transition behaviour from string to beam an axially accelerating material. 215(3) 571-576. 1998.
24. Chakraborty, G. , Mallik A. K. and Hatwal, H., Non-linear vibration of travelling beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34: 693-698,1999
25. E.Özkaya and M.Pakdemirli, Lie group theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem. 230(4), 729-742. 2000.

26. H.R. Öz, M. Pakdemirli, H. Boyacı, Nonlinear vibrations and stability of an axially moving beam with time dependent velocity, *J. Sound Vib.* 230(4) 729-742. 2000.
27. E.Özkaya, M.Pakdemirli. Vibrations of an axially accelerating beam with small flexural stiffness *Journal of Sound and vibration* 234(3), 521-535. 2000
28. H.R. Öz, M. Pakdemirli, H. Boyacı, Nonlinear vibrations and stability of an axially moving beam with time dependent velocity, *Int. J. Non-Linear Mech.* 36 (1) 107-115. 2001.
29. H.R. Öz, Nonlinear vibrations and stability analysis of tensioned pipes conveying fluid with variable velocity, *Int. J. Non-Linear Mech.* 36 (1) 1031-1039. 2001.
30. E.Özkaya, H.R. Öz. Determination of natural frequencies and stability regions of axially moving beams using artificial neural networks method *Journal of Sound and vibration* 252(4), 782-789. 2002
31. L.Kong, R.G. Parker, Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness : *Journal of Sound and Vibration* 276 459–469. 2004.

7.ÖZGEÇMİŞ

- Adı Soyadı : Saim KURAL
- Doğum Tarihi : 23.06.1984
- Doğum Yeri : Bayındır/İZMİR
- Eylül 1998 - Haziran 2002 : İzmir 60. Yıl Anadolu Lisesi
- Eylül 2002 - Temmuz 2006 : Celal Bayar Üniversitesi - Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü Lisans Programı
- Eylül 2007 - : Celal Bayar Üniversitesi - Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü
Proje Araştırma Görevliliği
- Eylül 2006 - : Celal Bayar Üniversitesi - Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Makine Teorisi ve Dinamiği Programı'nda Yüksek
Lisans Eğitimi