<u>CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>

YAKIN HALKALARDA TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Akın ALKAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06.08.2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 28.08.2008

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Diğer Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Ali ÖZDEMİR

Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU

MANİSA - 2008

ÖZET

Bu tez çalışmasında, yakın halkalarda ve Γ-yakın halkalarındaki türevlerin bazı özellikleri ele alınmıştır.

Birinci bölümde, yakın halkalar ve bunların türevleriyle ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, Γ-yakın halkaları ve bunların türevleri ele alındı. Altı kısımdan oluşan bu bölümün birinci kısmında Γ-yakın halkalarında Γ-türevler incelendi. İkinci kısımda, asal ve yarı asal Γ-yakın halkalarında Γ-türevler ele alındı. Üçüncü kısımda Γ-yakın halkalarında $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevlerinin tanımları ve ilgili teoremler verildi. Dördüncü kısımda, ikinci kısımdaki asal ve yarı asal Γ-yakın halkalarında Γ-türevler için verilen bazı teoremlerin iki taraflı $\Gamma-\alpha$ türevler için de sağlandığı gösterildi. Beşinci ve altıncı kısımlar olan son iki kısımda ise, sırasıyla, birinci ve üçüncü kısımda verilen Γ-yakın halkalarında Γ-türevlerin ve $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevlerin genelleştirilmiş halleri ve ilgili teoremler verildi.

ABSTRACT

In this thesis study, some properties of near rings and Γ-near rings have been considered.

In the first chapter, general definitions and theorems related to near rings and their derivatives have been given.

In the second chapter, Γ-near rings and their derivatives have been considered. In this chapter which is consist of six sections; Γ-derivatives in Γ-near rings have been investigated in first section. In the second section, Γ-derivatives in prime and semiprime Γ-near r)ngs have been considered. In the third section, definit)ons and related theorems of $\Gamma-(\alpha,\tau)$-derivat)ves in ———————————— EMBED Equation.DSMT4 Γ-near rings have been given.)n the forth section, it was shown that some theorems related to Γ-derivatives in Γ-near rings which were given in section two, were also satisfied for two sided $\Gamma-\alpha$ derivatives. In the last two sections, section five and section six, general situations and related theorems of Γ-derivatives and $\Gamma-(\alpha,\tau)$-derivatives in Γ-near rings which were given in the first and third sections, respectively, have been given.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının oluşmasında, planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde, olumlu ve yapıcı eleştirileriyle bana yön veren, yakın ilgi ve yardımını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam boyunca, maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen değerli aileme ve Sayın Hocam Arş. Gör. Mehmet ÖNDER'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

N : Yakın Halka

M : Gamma-Yakın Halka

Γ : M Gamma-Yakın halkası Üzerindeki İkili İşlemlerin Kümesi

Z : N veya M nin Merkezi

GİRİŞ

Son yıllarda yakın halkalar ve $\Gamma-$yakın halkaları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu tez çalışmasında, yakın halkalarda ve Γ-yakın halkalarda türevlerin bazı özellikleri ele alınmıştır.

Yakın halkalar halkaların genelleştirilmiş yapılarından birisidir. Genel olarak, yakın halkalar ile ilgili tanımlar ve sonuçlar [1] nolu kaynakta bulunabilir. Yakın halkaların bir genellemesi olarak $\Gamma-$yakın halkalar Satyanarayana [12] tarafından tanımlanmıştır. $\Gamma-$yakın halkalarda $\Gamma-$ türev kavramı ise Jun, Cho and Kim [10,11] tarafından verilmiştir.

Bu çalışmadaki amacımız türevli yakın halkalarda sağlanan bazı özelliklerin türevli $\Gamma-$yakın halkalar içinde sağlandığını ve $\Gamma-$yakın halkalar için verilen bazı teoremlerin $\Gamma-$yakın halkaların genelleştirilmiş türevleri içinde sağlandığını göstermektir. [11] de Yong Uk Cho ve Young Bae Jun d, asal veya yarı asal bir M $\Gamma-$yakın halkası üzerinde bir Γ-türev ve A, M nin sıfırı içeren bir invaryant alt kümesi olmak üzere, d, A üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizması olarak etki ediyorsa $d(A)=\{0\}$ olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışmada, aynı teoremin $\Gamma-\alpha-$türevler içinde sağlandığı gösterilmiştir. Ayrıca [9] da M. Uçkun ve M.Ali Öztürk ve Young Be Jun, , d bir asal 2-torsion free M $\Gamma-$yakın halkası üzerinde bir $\Gamma-$türev olmak üzere $d^2=0$ ise $d=0$ olduğunu ve Γ-türevli $\Gamma-$yakın halkaların bazı komutatiflik ve abelyanlık şartlarını incelediler. Bu çalışmada, bu sonuçların genelleştirilmiş $\Gamma-$türevler içinde verilebileceği gösterilmiştir. Bunlara ek olarak, eğer bir f genelleştirilmiş Γ-türevi $\Gamma-$homomorfizması ve anti-$\Gamma-$homomorfizması olarak etki ettiğinde f nin birimsel dönüşüm olduğunu gösterilmiştir. [8] de d, bir 2-torsion free asal M $\Gamma-$yakın halkası üzerinde bir $\Gamma-(\alpha,\tau)-$türevi ve d, α ve τ ile değişmeli olmak üzere $d^2=0$ ise bu taktirde $d=0$ olduğu ve $d(x)\in Z$ olduğunda ise M nin abelyan ve komutatif olduğu gösterilmiştir (burada Z, M nin merkezidir) . Bizde bu sonuçların genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)-$türevler içinde verilebileceğini gösterdik.

I. BÖLÜM
TEMEL TANIM VE TEOREMLER
HALKALAR VE HALKALARDA TÜREVLER

Bu bölümdeki tanımları, lemmaları ve teoremleri [1], [2], [3], [4], [5], [6] ve [7] nolu kaynaklardan bulabilirsiniz.

Tanım 1.1.1: Elemanları arasında bir asosyatif ikili işlem tanımlanmış olan boştan farklı bir kümeye bir yarı grup denir.

Tanım 1.1.2: G bir yarı grup olsun. Bir $g \in G$ elemanını göz önüne alalım. $x_1, x_2 \in G$ için $gx_1 = gx_2$ den $x_1 = x_2$ ve $y_1, y_2 \in G$ için $y_1 g = y_2 g$ den $y_1 = y_2$ elde ediliyorsa $g \in G$ elemanına G nin regüler elemanı denir. Eğer G nin her elemanı regüler ise G ye regüler yarı grup denir. Eğer her $x, y \in G$ için $xy = yx$ oluyorsa G ye bir Abel yarı grup denir.

Tanım 1.1.3: Bir $G \neq \varnothing$ kümesinde bir ikili işlem verilmiş olsun. Aşağıdaki şartların gerçekleşmesi halinde, G ye bir grup denir:

(G.1) Her $a, b, c \in G$ için $(ab)c = a(bc)$ (asosyatif kuralı) verilir.

(G.2) Her $a \in G$ için $ea = a$ olacak şekilde bir $a \in G$ elamanı vardır. e elemanına, G nin birim elemanı denir.

(G.3) Her $a \in G$ elemanına karşılık $ba = e$ olacak şekilde bir $b \in G$ elemanı mevcuttur.

Tanım 1.1.4: (i) G bir grup ve $\varnothing \neq N \subseteq G$ olsun. Eğer N de G deki işleme göre bir grup ise N ye G nin bir alt grubu denir ve $N \leq G$ şeklinde gösterilir.
(ii) G bir grup ve $N \leq G$ olsun. $g \in G$ olmak üzere

$$Ng = \{ng : n \in N\} \text{ ve } gN = \{gn : n \in N\}$$

kümelerine N nin sırasıyla sağ ve sol yan sınıfları denir.
(iii) G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ için $g^{-1}Ng = N^g \leq N$ gerçeklenirse, N alt grubuna G nin bir normal böleni (normal alt grubu veya invaryant alt grubu) denir. N nin normal bölen olması $N \trianglelefteq G$ ile gösterilir ve $N \neq G$ ise, $N \triangleleft G$ yazılır.

Teorem 1.1.5: G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) $N \triangleleft G$,

(b) Her $g \in G$ için $N^g = N$,

(c) Her $g \in G$ için $gN = Ng$,

(d) N nin her sağ yan sınıfı aynı zaman da bir sol sınıfıdır.

Tanım 1.1.6: $R \neq \varnothing$ kümesinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemleri tanımlanmış olsun. Aşağıdaki şartların gerçekleşmesi halinde, bu R kümesine bir halka denir.

(H.1) $(R,+)$ bir Abel grubudur.

(H.2) $(R,\cdot)$ bir yarı grup'tur.

(H.3) R de dağılma (distribütif) kural gerçeklenir: Keyfi $a,b,c \in R$ için

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ba + ca$$

verilir.

$(R,\cdot)$ bir Abel yarı grubu ise, R e komütatif halka denir.

Tanım 1.1.7: Bir R halkasında bir $a \in R$ elemanı için en az bir $b \neq 0$ elemanı $ab = 0$ (veya $ba = 0$) olacak şekilde mevcutsa a elemanına R halkasının sol (veya sağ) sıfır böleni denir. Bir halkada sıfır elemanının dışında sol ve sağ sıfır bölen mevcut değil ise bu halkaya sıfır bölensiz halka denir.

Tanım 1.1.8: En az iki elemanlı, komütatif ve sıfır bölensiz bir halkaya tamlık bölgesi denir.

Tanım 1.1.9: R bir halka olsun. $(R/\{0\},\cdot)$ bir regüler yarı grup ise R halkasına bir regüler halka denir.

Teorem 1.1.10: Bir R bir halkasının sıfır bölensiz olması için gerek ve yeter şart halkanın regüler olmasıdır.

Tanım 1.1.11: R bir halka olsun. $a,b \in R$ için $ac = b$ veya $ca = b$ olacak şekilde bir $c \in R$ elemanı varsa a ya b nin bir böleni denir ve $a|b$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.12: R bir halka olsun. $(R,\cdot)$ yarı grubunun birim elemanı varsa bu birim elemana R halkasının birim elemanı denir ve e veya 1 veya 1_R ile gösterilir.

Tanım 1.1.13: R bir halka olsun ve $e \in R$ birim eleman olsun. Bir $a \in R$ elemanı için $aa^* = a^*a = e$ olacak şekilde bir $a^* \in R$ elemanı mevcutsa a elemanına R halkasının bir birimi denir. a^* elemanına a elemanının tersi veya inversi denir ve a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 1.1.14: R birim elemanlı bir halka olsun. R halkasının birimlerinin kümesini $B(R) = \{a \in R : aa^{-1} = a^{-1}a = e,\ a^{-1} \in R\}$ ile gösterelim. Eğer $B(R) = R - \{0\}$ ise R ye çarpık cisim denir. Komütatif bir çarpık cisme de bir cisim denir. Buna göre eğer R bir cisim ise R nin sıfırdan farklı her elemanının tersi vardır.

Tanım 1.1.15: R bir halka, $U \subseteq R$ bir alt küme olsun. Eğer U kümesi R deki işlemlere göre bir halka oluyorsa U ya R halkasının bir alt halkası denir. Bu durumda R halkasına U nun üst halkası denir.

Teorem 1.1.16: R bir halka, $\emptyset \neq U \subseteq R$ bir altküme olsun. U nun bir alt halka olabilmesi için gerek ve yeter şart her $a,b \in U$ için $a-b \in U$ ve $ab \in U$ olmasıdır.

Tanım 1.1.17: R bir halka ve $U \subseteq R$ bir alt halka olsun. Eğer $RU \subseteq U$ ve $UR \subseteq U$ oluyorsa U ya R nin bir ideali denir. Bu tanıma göre, bir R halkasının bir $\emptyset \neq U \subseteq R$ alt kümesinin R nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul

(i) Her $a,b \in U$ için $a-b \in U$,

(ii) Her $r \in R$ ve $a \in U$ için $ar \in U$ ve $ra \in U$

olmasıdır.

Tanım 1.1.18: R ve S iki halka ve $\varphi : R \to S$ bir dönüşüm olsun.

(a) Eğer her $a,b \in R$ için

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ ve } \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

oluyorsa φ ye R den S ye bir homomorfizm denir.

(b) $\varphi : R \to S$ bir homomorfizm ve $\varphi(R) = S$ ise φ ye bir epimorfizm (örten homomorfizm) denir.

(c) $\varphi : R \to S$ bir homomorfizm ve φ, $1-1$ ise φ ye bir monomorfizm (1-1 homomorfi) denir.

(d) $\varphi : R \to S$ bir homomorfizm olsun. φ, 1-1 ve örten ise φ ye bir izomorfizm denir.

(e) $\varphi : R \to R$ şeklindeki bir homomorfizmaya bir endomorfizm denir.

(f) $\varphi : R \to R$ bir endomorfizm olsun. φ, 1-1 ve örten ise φ ye bir otomorfizm denir.

Teorem 1.1.18: R ve S iki halka ve $\varphi : R \to S$ bir halka homomorfizmi olsun.

(i) $\varphi(0_R) = 0_s$,

(ii) Her $a \in R$ için $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ dır.

Tanım 1.1.19: R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ olacak şekildeki $d : R \to R$ toplamsal dönüşümüne R üzerinde bir türev denir. $d : R \to R$ dönüşümünün toplamsal olması her $x, y \in R$ için $d(x+y) = d(x) + d(y)$ olması demektir.

Tanım 1.1.20: S, R nin boştan farklı bir alt cümlesi ve d, R nin bir türevi olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için $d(xy) = d(x)d(y)$ veya $d(xy) = d(y)d(x)$ ise, bu taktirde d nin S üzerinde, sırasıyla, bir homomorfizm veya anti-homomorfizm gibi etki ettiği (veya buna denk olarak bir homomorfizm veya anti-homomorfzm gibi davrandığı) söylenir.

Tanım 1.1.21: R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $[x, y]$ sembolü $xy - yx$ komütatörü ile tanımlanır.

Tanım 1.1.22: R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $x \circ y$ sembolü $xy + yx$ anti-komütatörü ile tanımlanır.

Tanım 1.1.23: R bir halka olsun. $\alpha, \tau : R \to R$, R nin iki otomorfizması olsun. Her $x, y \in R$ için $[x, y]_{\alpha,\tau}$ sembolü $\alpha(x)y - y\tau(z)$ ile tanımlanır.

Tanım 1.1.24: R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $xRy = \{0\}$ olması $x = 0$ veya $y = 0$ olmasını gerektirirse R ye asal halka denir.

Tanım 1.1.25: R bir halka olsun. Her $x \in R$ için $xRx = \{0\}$ olması $x = 0$ olmasını gerektirirse R ye yarı asal halka denir.

Tanım 1.1.26: R bir halka ve $\alpha,\tau : R \to R$, R nin iki otomorfizması olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = \alpha(x)d(y) + d(x)\tau(y)$ olacak şekildeki $d : R \to R$ toplamsal dönüşümüne R üzerinde bir $(\alpha,\tau)-$türev denir.

Tanım 1.1.27: R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ olacak şekilde R nin bir d türevi varsa toplamsal $f : R \to R$ dönüşümüne R üzerinde d ile birleştirilmiş genelleştirilmiş türev denir.

Tanım 1.1.28: R bir halka ve $\alpha,\tau : R \to R$, R nin iki otomorfizması olsun. d, R nin $(\alpha,\tau)-$türevi olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\tau(y) + \alpha(x)d(y)$ olacak şekildeki toplamsal $f : R \to R$ dönüşümüne R üzerinde d ile birleştirilmiş genelleştirilmiş $(\alpha,\tau)-$türev denir.

1.2. YAKIN HALKA VE YAKIN HALKALARDA TÜREVLER

Tanım 1.1.29: $N \neq \varnothing$ kümesinde $+$ ve $\cdot$ işlemleri tanımlanmış olsun. Aşağıdaki şartların gerçeklenmesi halinde N ye bir (sağ) yakın halka denir.

(i) $(N,+)$ (abelyen olması gerekmeyen) bir gruptur.

(ii) $(N,\cdot)$ bir yarı gruptur.

(iii) $\cdot$ işlemi, $+$ işlemine sağdan dağılımlıdır. Yani $\forall a,b,c \in N$ için

$$(a+b)c = ac + bc$$

dır.

Tanım 1.1.30: $+$ ve $\cdot$ işlemleri ile birlikte bir $N \neq \varnothing$ cümlesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir sol yakın halka olarak adlandırılır.

(i) $(N,+)$ (abelyen olması gerekmeyen) bir gruptur.

(ii) $(N,\cdot)$ bir yarı gruptur.

(iii) $\cdot$ işlemi, $+$ işlemine soldan dağılımlıdır. Yani $\forall a,b,c \in N$ için

$$a(b+c) = ab + ac$$

dır.

Tanım 1.1.31: N bir yakın halka ve $x \in N$ olsun. Eğer $2x = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa N 2-torsion-serbest olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.32: N bir yakın halka olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için $xNy = \{0\}$ olması $x = 0$ veya $y = 0$ olmasını gerektiriyorsa N ye bir asal yakın halka adı verilir.

Tanım 1.1.33: N bir yakın halka olsun. $x \in N$ için $xNx = \{0\}$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa N bir yarı asal yakın halka olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.34: N bir yakın halka ve $d : N \to N$, N nin bir toplamsal dönüşümü olsun. Her $x, y \in N$ için $d(xy) = xd(y) + d(x)y$ ise d ye N üzerinde bir türev denir. Buna denk olarak $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ şartını sağlayan $d : N \to N$ toplamsal dönüşümüne N üzerinde bir türev denir

Tanım 1.1.35: N bir yakın halka, S, N nin boştan farklı bir alt cümlesi ve d, N nin bir türevi olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için $d\left(xy\right) = d\left(x\right)d\left(y\right)$ veya $d\left(xy\right) = d\left(y\right)d\left(x\right)$ ise, bu taktirde d nin S üzerinde, sırasıyla, bir homomorfizm veya anti-homomorfzm gibi etki ettiği (veya bir homomorfizm veya anti-homomorfzm gibi davrandığı) söylenir.

Tanım 1.1.36: N bir yakın halka ve x, N nin bir olsun. Eğer her $y, z \in N$ için $(y + z)x = yx + zx$ oluyorsa x elemanına dağılmalıdır denir.

Tanım 1.1.37: N bir yakın halka olsun. Her $x \in N$ için $0x = 0$ ise N ye sıfır simetrik bir yakın halka denir.

Tanım 1.1.38: N bir yakın halka ve $d: N \to N$, N nin bir toplamsal dönüşümü olsun. Her $x, y \in N$ için $d(xy) = \alpha(x)d(y) + d(x)y$ olacak şekilde N nin bir $\alpha: N \to N$ otomorfizması varsa d ye N üzerinde bir $\alpha-$türev denir.

Tanım 1.1.39: N bir yakın halka ve $d: N \to N$, N nin bir toplamsal dönüşümü olsun. Her $x, y \in N$ için $d(xy) = \alpha(x)d(y) + d(x)\tau(y)$ olacak şekilde N nin iki $\alpha, \tau: N \to N$ otomorfizması varsa d ye N üzerinde bir $(\alpha, \tau)-$türev denir. Eğer $\alpha = 1$ ise d ye $\tau-$türev denir. Benzer olarak $\tau = 1$ ise d ye $\alpha-$türev denir. $(1,1)-$türevin adi türev olduğu açıktır.

Tanım 1.1.40: N bir yakın halka olsun. $x, y \in N$ için $[x, y]$ sembolü $xy - yx$ komütatörü ile tanımlanır. (x, y) sembolü $x + y - x - y$ toplamsal komütatörü ile tanımlanır. $[x, y]_{\alpha,\tau}$ sembolü de $\alpha(x)y - y\tau(x)$ ile tanımlanır.

Tanım 1.1.41: N bir yakın halka ve d, N nin bir $(\alpha, \tau)-$türevi olsun. Her $x \in N$ için $[x, d(x)]_{\alpha,\tau} = 0$ ise d $(\alpha, \tau)-$türevi $(\alpha, \tau)-$değişmeli olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.42: N bir yakın halka ve I , N nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $IN \subseteq I$ ve $NI \subseteq I$ koşullarını sağlıyorsa, I ya bir yarı grup ideali adı verilir.

Tanım 1.1.43: S, N nin boştan farklı bir alt kümesi olsun ve d, N nin bir türevi olsun. $\forall\, x, y \in S$ için $d(xy) = d(x)d(y)$ veya $d(xy) = d(y)d(x)$ ise bu taktirde, sırasıyla, d nin S üzerinde bir homomorfizma veya bir anti-homomorfizma olarak etki ettiği (veya bir homomorfizm veya anti-homomorfzm gibi davrandığı) söylenir.

Tanım 1.1.44: N bir yakın halka olsun. Her $x, y \in N$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y) + \beta(x)f(y)$ olacak şekilde $\alpha, \beta: N \to N$ fonksiyonları varsa $f: N \to N$ toplamsal dönüşümü bir $(\alpha, \beta)-$türevi olarak adlandırılır. $d: N \to N$

toplamsal dönüşümü, d hem bir $(\alpha,1)$-türevi hemde $(1,\alpha)$-türevi ise bir iki taraflı α-türevi olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.45: N bir yakın halka ve d, N nin bir türevi olsun. Bir $x \in N$ için $d(x)=0$ ise x elemanı sabit olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.46: N bir yakın-halka ve d, N nin bir türevi olsun. $f : N \to N$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in N$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

ise bu taktirde f toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş türev denir. Eğer her $x, y \in N$ için

$$f(xy) = d(x)y + xf(y)$$

ise f toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş türev denir. Son olarak eğer f, d ile birleştirilmiş hem sağ hem de sol genelleştirilmiş türev ise bu taktirde $f : N \to N$ toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş bir genelleştirilmiş türev denir.

Lemma 1.1.47: **(i)** f, bir N yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sağ genelleştirilmiş türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in N$ için

$$f(xy) = xd(y) + f(x)y$$

dır.

(ii) f, bir N yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sol genelleştirilmiş türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in M$ için

$$f(xy) = xf(y) + d(x)y$$

dır.

Lemma 1.1.48: **(i)** f, bir N yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sağ genelleştirilmiş türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z \in N$ için

$$\big(f(x)y + xd(y)\big)z = f(x)yz + xd(y)z$$

dır.

(ii) f, bir N yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sol genelleştirilmiş türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z \in N$ için

$$\big(d(x)y + xf(y)\big)z = d(x)yz + xf(y)z$$

dır.

Tanım 1.1.49: Bir N yakın halkasında, d bir $(\alpha,\tau)-$türev olsun. Her $x, y \in N$ için

$$f(xy) = d(x)\tau(y) + \alpha(x)f(y)$$

olacak şekildeki bir $f : N \to N$ toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş (α,τ)-türev denir. Eğer her $x, y \in N$ için

$$f(xy) = f(x)\tau(y) + \alpha(x)d(y)$$

ise f ye d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş (α,τ)-türev denir. Eğer f, d ile birleştirilmiş hem sağ hem de sol türev ise f ye d ile birleştirilmiş genelleştirilmiş (α,τ)-türev denir.

Lemma 1.1.50: **(i)** f **,** bir N yakın halkasında d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş (α,τ)-türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in N$ için

$$f(xy) = \alpha(x)f(y) + d(x)\tau(y)$$

dir.

(ii) f **,** bir N yakın halkasında d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş (α,τ)-türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in N$ için

$$f(xy) = \alpha(x)d(y) + f(x)\tau(y)$$

dir.

Lemma 1.1.51: **(i)** f **,** bir N yakın halkasında d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş (α,τ)-türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z \in N$ için

$$[f(x)\tau(y)+\alpha(x)d(y)]\tau(z)=f(x)\tau(y)\tau(z)+\alpha(x)d(y)\tau(z)$$

dir.

(ii) f **,** bir N yakın halkasında d ile birleştirilmiş genelleştirilmiş (α,τ)-türev olsun. Bu taktirde her $x,y,z\in N$ için

$$[d(x)\tau(y)+\alpha(x)f(y)]\tau(z)=d(x)\tau(y)\tau(z)+\alpha(x)f(y)\tau(z)$$

dir.

(iii) f **,** bir N yakın halkasında d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş (α,τ)-türev olsun. Bu taktirde her $x,y,z\in N$ için

$$[d(x)\tau(y)+\alpha(x)f(y)]\tau(z)=d(x)\tau(y)\tau(z)+\alpha(x)f(y)\tau(z)$$

dir.

II. BÖLÜM

GAMMA YAKIN HALKALARINDA TÜREVLER

2.1 $\Gamma-$ YAKIN HALKALARINDA $\Gamma-$ TÜREVLER

Bu bölümün tamamında bütün yakın halkalar sol dağılımlı ve sıfır simetrik olarak alınmıştır.

Tanım 2.1.1: Bir $\Gamma-$yakın halkası

(i) $(M,+)$ (abelyen olması gerekmeyen) bir gruptur.

(ii) Γ**,** her $\gamma\in\Gamma$ için $(M,+,\gamma)$ bir yakın halka olacak şekilde ikili işlemlerin boştan farklı bir kümesidir.

(iii) Her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için $x\gamma(y\mu z)=(x\gamma y)\mu z$

olduğunda bir $(M,+,\Gamma)$ üçlüsüdür.

Tanım 2.1.2: Bir M Γ-yakın halkası için

$$M_0=\{x\in M:0\gamma x=0,\ \forall\gamma\in\Gamma\}$$

kümesi M nin sıfır simetrik kısmı olarak adlandırılır. Eğer $M=M_0$ ise M Γ-yakın halkası sıfır simetrik olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3: Bir M Γ-yakın halkasının bir U alt kümesi, her $a \in U$, $\gamma \in \Gamma$ ve $x \in M$ için $x\gamma a \in U$ ise sol invaryant olarak, $a\gamma x \in U$ ise sağ invaryant olarak adlandırılır. Eğer U hem sağ hemde sol invaryant ise invaryant olarak adlandırılır.

.

Tanım 2.1.4: M ve M' Γ-yakın halkalar olsunlar. Her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ve $f(x\gamma y) = f(x)\gamma f(y)$ olacak şekilde bir $f: M \to M'$ dönüşümüne bir Γ-yakın halka homomorfizması adı verilir.

Tanım 2.1.5: Bir M Γ-yakın halkasında, her $x, y \in M$ için $x\Gamma M \Gamma y = \{0\}$ olması $x = 0$ veya $y = 0$ olmasını gerektiriyorsa M asal olarak adlandırılır.

Aksi belirtilmedikçe M bir Γ-yakın halka olacaktır.

Tanım 2.1.6: M üzerinde bir Γ-türevi, her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $d(x\gamma y) = x\gamma d(y) + d(x)\gamma y$ çarpım kuralını sağlayan M nin bir d toplamsal endomorfizması olarak tanımlanır.

Lemma 2.1.7: Eğer d, M üzerinde bir Γ-türevi ise bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma d(y) \tag{2.1.1}$$

dır.

İspat: d nin M üzerinde bir Γ-türevi olduğunu kabul edelim. $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d(x\gamma(y+y)) &= x\gamma d(y+y) + d(x)\gamma(y+y) \\ &= x\gamma(d(y)+d(y)) + d(x)\gamma y + d(x)\gamma y \\ &= x\gamma d(y) + x\gamma d(y) + d(x)\gamma y + d(x)\gamma y \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d(x\gamma y + x\gamma y) &= d(x\gamma y) + d(x\gamma y) \\ &= x\gamma d(y) + d(x)\gamma y + x\gamma d(y) + d(x)\gamma y \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

dır. $d(x\gamma(y+y)=d(x\gamma y+x\gamma y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} x\gamma d(y)+x\gamma d(y)+d(x)\gamma y+d(x)\gamma y=x\gamma d(y)+d(x)\gamma y+x\gamma d(y)+d(x)\gamma y \\ d(x\gamma y)=x\gamma d(y)+d(x)\gamma y=d(x)\gamma y+x\gamma d(y) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar [10]. □

Lemma 2.1.8: M nin her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $d(x\gamma y)=d(x)\gamma y+x\gamma d(y)$ eşitliğini sağlayan her d toplamsal endomorfizması M üzerinde bir $\Gamma-$türevdir .

İspat: d , her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $d(x\gamma y)=d(x)\gamma y+x\gamma d(y)$ olacak şekilde bir toplamsal endomorfizma olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d(x\gamma(y+y)) &= d(x)\gamma(y+y)+x\gamma d(y+y) \\ &= d(x)\gamma y+d(x)\gamma y+x\gamma(d(y)+d(y)) \\ &= d(x)\gamma y+d(x)\gamma y+x\gamma d(y)+x\gamma d(y) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

ve

$$\begin{aligned} d(x\gamma y+x\gamma y) &= d(x\gamma y)+d(x\gamma y) \\ &= d(x)\gamma y+x\gamma d(y)+d(x)\gamma y+x\gamma d(y) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

dır. $x\gamma(y+y)=x\gamma y+x\gamma y$ olduğundan (2.1.5) ve (2.1.6) eşitliklerinin kıyasından

$$d(x\gamma y)=d(x)\gamma y+x\gamma d(y)=x\gamma d(y)+d(x)\gamma y \quad (2.1.7)$$

elde ederiz. Böylece d , M üzerinde bir $\Gamma-$türevdir [10]. □

Lemma 2.1.9: d **,** M üzerinde herhangi bir $\Gamma-$türevi olsun. Her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

(i) $[x\gamma d(y)+d(x)\gamma y]\mu z=x\gamma d(y)\mu z+d(x)\gamma y\mu z$

(ii) $[d(x)\gamma y+x\gamma d(y)]\mu z=d(x)\gamma y\mu z+x\gamma d(y)\mu z$

dir .

İspat:

(i) d **,** M üzerinde herhangi bir $\Gamma-$türevi olsun. Her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d((x\gamma y)\mu z) &= x\gamma y\mu d(z)+d(x\gamma y)\mu z \\ &= x\gamma y\mu d(z)+(x\gamma d(y)+d(x)\gamma y)\mu z \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

ve

$$
\begin{aligned}
d(x\gamma(y\mu z)) &= x\gamma d(y\mu z) + d(x)\gamma y\mu z \\
&= x\gamma(y\mu d(z) + d(y)\mu z) + d(x)\gamma y\mu z \\
&= x\gamma y\mu d(z) + x\gamma d(y)\mu z + d(x)\gamma y\mu z
\end{aligned}
$$

yani

$$d(x\gamma(y\mu z)) = x\gamma y\mu d(z) + x\gamma d(y)\mu z + d(x)\gamma y\mu z \tag{2.1.9}$$

dır. $d((x\gamma y)\mu z) = d(x\gamma(y\mu z))$ olduğundan

$$(x\gamma d(y) + d(x)\gamma y)\mu z = x\gamma d(y)\mu z + d(y)\gamma y\mu z \tag{2.1.10}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

(ii) Şimdi Lemma 2.1.8 yi kullanarak

$$
\begin{aligned}
d((x\gamma y)\mu z) &= d(x\gamma y)\mu z + x\gamma y\mu d(z) \\
&= [d(x)\gamma y + x\gamma d(y)]\mu z + x\gamma y\mu d(z)
\end{aligned}
$$

yani

$$d((x\gamma y)\mu z) = [d(x)\gamma y + x\gamma d(y)]\mu z + x\gamma y\mu d(z) \tag{2.1.11}$$

ve

$$
\begin{aligned}
d(x\gamma(y\mu z)) &= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y\mu z) \\
&= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma[d(y)\mu z + y\mu d(z)] \\
&= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu d(z)
\end{aligned}
$$

yani

$$d(x\gamma(y\mu z)) = d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu d(z) \tag{2.1.12}$$

elde edilir. $d((x\gamma y)\mu z) = d(x\gamma(y\mu z))$ olduğundan

$$[d(x)\gamma y + x\gamma d(y)]\mu z = d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z \tag{2.1.13}$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar [10]. □

Lemma 2.1.10: M bir asal Γ-yakın halka olsun ve $U(\neq\{0\})$, M nin bir sağ (sırasıyla sol) invaryant alt kümesi olsun. Eğer x, M nin $U\Gamma x = \{0\}$ (sırasıyla $x\Gamma U = \{0\}$) olacak şekilde bir elemanı ise bu taktirde $x = 0$ dır [10].

Lemma 2.1.11: M asal olsun ve $U(\neq\{0\})$, M nin bir invaryant alt kümesi olsun. Eğer d, M nin sıfırdan farklı Γ-türevi ise bu taktirde her $x, y \in M$ için

(i) $x\Gamma U\Gamma y=\{0\}$ olması $x=0$ veya $y=0$ olmasını gerektirir.

(ii) $d(U)\Gamma y=\{0\}$ olması $y=0$ olmasını gerektirir.

(iii) M nin sıfır simetrik ve $x\Gamma d(U)=\{0\}$ olması $x=0$ olmasını gerektirir[10].

Lemma 2.1.12: M sıfır simetrik ve asal olsun. $U(\neq\{0\})$, M nin bir invaryant alt kümesi olsun. Eğer d, M nin $d^2(U)=0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir Γ-türevi ise bu taktirde $d^2=0$ dır [10].

Lemma 2.1.13: M sıfır simetrik ve asal olsun ve $x(\neq 0)\in M$ olsun. Bu taktirde her $y\in M$, $\gamma\in\Gamma$ için $x\gamma d(y)=0$ ı sağlayan M nin her d Γ-türevi sıfırdır [10].

Tanım 2.1.14: Her $x\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $2\gamma x=0$ olması $x=0$ olmasını gerektiriyorsa M, 2-torsion serbest olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.15: M asal olsun ve 2-torsion serbest olsun. d_1 ve d_2, M üzerinde

(i) d_1d_2, M nin bir türevidir

(ii) $\forall x,y\in M,\gamma\in\Gamma$ için $d_1(x)\gamma d_2(y)=d_2(y)\gamma d_1(x)$,

olacak şekilde Γ-türevler olsunlar. Bu taktirde ya $d_1=0$ yada $d_2=0$ dır [10].

2.2 ASAL VE YARI ASAL $\Gamma-$ YAKIN-HALKALARINDA $\Gamma-$ TÜREVLER

Bu kısımda bütün yakın halkalar sol dağılımlı ve sıfır simetrik olacaktır.

Tanım 2.2.1: Eğer M ve M' Γ-yakın halkalar iseler bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ve $f(x\gamma y) = f(x)\gamma f(y)$ olacak şekilde $f: M \to M'$ dönüşümü bir Γ-yakın halka homomorfizması olarak adlandırılır. Eğer $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ve $f(x\gamma y) = f(y)\gamma f(x)$ ise $f: M \to M'$ dönüşümü M üstünde bir anti-Γ-yakın-halka homomorfizması olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2: Bir M Γ-yakın halkası, her $x \in M$ için $x\Gamma M\Gamma x = \{0\}$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa yarı asal olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3: M üstünde bir Γ-türevi, her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x\gamma y) = x\gamma d(y) + d(x)\gamma y \tag{2.2.1}$$

çarpım kuralını sağlayan M nin bir toplamsal d endomorfizması olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.4: S, M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun ve d, M üstünde bir Γ-türevi olsun. Eğer her $x, y \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $d(x\gamma y) = d(x)\gamma d(y)$ ise bu taktirde d, S üzerinde bir Γ-homomorfizması gibi davrandığı (veya etki ettiği) söylenir. Eğer $d(x\gamma y) = d(y)\gamma d(x)$ ise d, S üzerinde bir anti-Γ-homomorfizması gibi davrandığı (veya etki ettiği) söylenir.

Lemma 2.2.5:

(i) Eğer M üzerindeki bir d Γ-türevi M nin bir A alt kümesi üzerinde Γ-homomorfizması gibi davranırsa bu taktirde her $a \in A$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $0\gamma a = 0$ dır.

(ii) Eğer M üzerindeki bir d, Γ-türevi M nin bir A alt kümesi üzerinde anti-Γ-homomorfizması gibi davranırsa bu taktirde her $a \in A$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $0\gamma a = 0$ dır [11].

Lemma 2.2.6: d **,** sıfır simetrik bir asal bir M Γ-yakın-halkası üzerinde bir Γ-türevi olsun. Eğer her $y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $x\alpha d(y) = 0$ olacak şekilde M de sıfırdan farklı bir x elemanı varsa bu taktirde $d = 0$ dır [11].

Teorem 2.2.7: d, bir asal M Γ-yakın-halkası üzerinde bir Γ-türevi olsun ve A, M nin sıfırı içeren sıfırdan farklı bir sol invaryant alt kümesi olsun. Eğer d, A üzerinde bir Γ-homomorfizması gibi davranırsa bu taktirde $d = 0$ dır [11].

Sonuç 2.2.8: d, yarı asal bir M Γ-yakın-halkası üzerinde bir Γ-türevi olsun. Eğer d, M üzerinde bir Γ-homomorfizması gibi davranırsa bu taktirde $d = 0$ dır [11].

Lemma 2.2.9: M Γ-yakın-halkası asal ve 2-torsion serbest olsun. Eğer d, M nin $d^2 = 0$ olacak şekilde bir $\Gamma -$ türev ise bu taktirde $d = 0$ dır [9].

Lemma 2.2.10: d, M $\Gamma -$ yakın halkasının bir $\Gamma -$ türevi ve $u \in M$ sıfır bölen olmasın. Eğer her $\gamma \in \Gamma$ için $[u, d(u)]_\gamma = 0$ ise bu taktirde her $x \in M$ için (x, u) sabittir [9].

Teorem 2.2.11: d, M $\Gamma -$ yakın halkasının sıfırdan farklı bir $\Gamma -$ türevi olsun. M sıfırın sıfır bölenine sahip olmasın. Eğer her $x \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[x, d(x)]_\gamma = 0$ ise bu taktirde $(M, +)$ abelyendır [9].

Teorem 2.2.12: M Γ-yakın-halkası asal ve d, M nin bir $\Gamma -$ türevi olsun. Eğer her $x \in M$ için $d(x) \in Z$ ise bu taktirde $(M, +)$ abelyendır. Üstelik M 2-torsion serbest ise bu taktirde M komütatiftir [9].

Teorem 2.2.13: M Γ-yakın-halkası asal ve d, M nin bir $\Gamma -$ türevi olsun. Eğer her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[d(x), d(y)]_\gamma = 0$ ise bu taktirde $(M, +)$ abelyendır. Üstelik M 2-torsion serbest, d, M üzerinde bir $\Gamma -$ homomorfizma olarak davranırsa ve her $x \in M$ $d^2(x) \in Z$ ise bu taktirde M komütatiftir [9].

2.3 $\Gamma-$ YAKIN HALKALARINDA $\Gamma-(\alpha,\tau)-$ TÜREVLER

Bu kısımda bütün yakın halkalar sol dağılımlı ve sıfır simetrik olarak alınmıştır.

Tanım 2.3.1: M bir $\Gamma-$yakın halka olsun. $d(x\gamma y)=d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y)$ çarpım kuralını sağlayan $\alpha,\tau: M\to M$ fonksiyonları varsa $d: M\to M$ toplamsal endomorfizmasına M üzerinde bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$**-**türev denir.

Tanım 2.3.2: Bir M Γ-yakın halkasında, her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $[x,y]^{\gamma}{}_{\alpha,\tau}$ komütatörü $x\gamma\alpha(y)-\tau(y)\gamma x$ olarak tanımlanır.

Lemma 2.3.3: M bir $\Gamma-$yakın halka ve d, M nin bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun. bu taktirde her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$d(x\gamma y)=\tau(x)\gamma d(y)+d(x)\gamma\alpha(y)$$

dir.

İspat: d, M nin bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun. Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} d\left(x\gamma(y+y)\right) &= d(x)\gamma\alpha(y+y)+\tau(x)\gamma d(y+y) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)+d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y)+\tau(x)\gamma d(y) \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} d(x\gamma y+x\gamma y) &= d(x\gamma y)+d(x\gamma y) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y)+d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y) \end{aligned}$$

dır. $x\gamma(y+y)=x\gamma y+x\gamma y$ olduğundan bu iki ifadenin kıyasından

$$d(x\gamma y)=d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y)=\tau(x)\gamma d(y)+d(x)\gamma\alpha(y)$$

elde edilir [8]. □

Lemma 2.3.4: M bir $\Gamma-$yakın halka ve d, M nin bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun. bu taktirde her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için

$$\left(d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y)\right)\beta\alpha(z)=d(x)\gamma\alpha(y)\beta\alpha(z)+\tau(x)\gamma d(y)\beta\alpha(z)$$

dır.

İspat: d, M nin bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun. Her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} d\left((x\gamma y)\beta z\right) &= d(x\gamma y)\beta\alpha(z)+\tau(x\gamma y)\beta d(z) \\ &= \left(d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y)\right)\beta\alpha(z)+\tau(x)\gamma\tau(y)\beta d(z) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} d\left(x\gamma(y\beta z)\right) &= d(x)\gamma\alpha(y\beta z)+\tau(x)\gamma d(y\beta z) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)\beta\alpha(z)+\tau(x)\gamma\left(d(y)\beta\alpha(z)+\tau(y)\beta d(z)\right) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)\beta\alpha(z)+\tau(x)\gamma d(y)\beta\alpha(z)+\tau(x)\gamma\tau(y)\beta d(z) \end{aligned}$$

dır. $d(x\gamma y\beta z)$ nin bu iki eşitliğinden

$$\left(d(x)\gamma\alpha(y)+\tau(x)\gamma d(y)\right)\beta\alpha(z)=d(x)\gamma\alpha(y)\beta\alpha(z)+\tau(x)\gamma d(y)\beta\alpha(z)$$

elde edilir [8]. □

Lemma 2.3.5: M 2-torsion serbest ve asal olsun. d, M nin α ve τ ile değişmeli olacak şekilde bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun. Eğer $d^2=0$ ise bu taktirde $d=0$ dır [8].

Lemma 2.3.6: d, M $\Gamma-$yakın halkasının bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi ve $u\in M$ sıfır bölen olmasın. Eğer her $\gamma\in\Gamma$ için $[u,d(u)]^{\gamma}{}_{\alpha,\tau}=0$ ise bu taktirde her $x\in M$ için (x,u) sabittir [8].

Teorem 2.3.7: d, M $\Gamma-$yakın halkasının sıfırdan farklı bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun ve M sıfırın sıfır bölenine sahip olmasın. $x\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $[x,d(x)]^{\gamma}{}_{\alpha,\tau}=0$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır [8].

Teorem 2.3.8: M asal bir $\Gamma-$yakın halka olsun. d, M nin sıfırdan farklı farklı bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun. Eğer $d(x)\in Z$ ise $(M,+)$ abelyendır. Üstelik M 2-torsion serbest ise bu taktirde M komütatiftir [8].

Teorem 2.3.9: M asal bir $\Gamma-$yakın halka olsun. d, M nin sıfırdan farklı farklı bir $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi olsun. Eğer $[d(x),d(y)]^{\gamma}{}_{\alpha,\tau}=0$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır [8].

2.4 ASAL VE YARI ASAL $\Gamma-$YAKIN HALKALARDA İKİ TARAFLI $\Gamma-\alpha-$TÜREVLER

Bu bölüm boyunca M sıfır simetrik sağ $\Gamma-$yakın halka olacaktır.

Tanım 2.4.1: M bir $\Gamma-$yakın halka olsun. $d(x\gamma y)=d(x)\gamma\alpha(y)+\beta(x)\gamma d(y)$ çarpım kuralını sağlayan $\alpha,\beta: M\to M$ fonksiyonları varsa $d: M\to M$ toplamsal endomorfizmasına M üzerinde bir $\Gamma-(\alpha,\beta)$**-**türev denildiğini önceki bölümden biliyoruz.

$d: M\to M$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer d, hem $\Gamma-(\alpha,1)$-türev hem de $\Gamma-(1,\alpha)$-türev ise iki taraflı $\Gamma-\alpha$-türev olarak adlandırılır. Eğer $\alpha=1$ ise bu taktirde iki taraflı $\Gamma-\alpha$-türev bir $\Gamma-$türev olur.

Örnek: M_1 bir sıfır simetrik bir $\Gamma-$yakın halka ve M_2 bir $\Gamma-$halka olsun. d_1, M_1 üzerinde herhangi bir dönüşüm ve d_2, M_2 üzerinde türev olmayan bir sağ ve sol $\Gamma-M_2$-modül dönüşümü olduğunda $d\big((m_1, m_2)\big)=\big(0, d_2(m_2)\big)$ ile $d: M_1\oplus M_2\to M_1\oplus M_2$ yi ve $\alpha\big((m_1, m_2)\big)=\big(d_1(m_1), 0\big)$ ile de $\alpha: M_1\oplus M_2\to M_1\oplus M_2$ dönüşümünü tanımlayalım. Buradan d bir iki taraflı $\Gamma-\alpha$-türevdir. Fakat bir $\Gamma-$türev değildir.

Lemma 2.4.2: M bir asal $\Gamma-$yakın halka ve U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olsun. Eğer her $a,b\in U$ için $a+b-a-b=0$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır.

İspat: U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olsun. Bu taktirde her $a\in U$, $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $x\gamma a,\ y\gamma a\in U$ alabiliriz. Böylece hipotezden $x\gamma a+y\gamma a-x\gamma a-y\gamma a=0$ elde edilir. Böylece $(x+y-x-y)\gamma a=0$ dır. U invaryant olduğundan özellikle $(x+y-x-y)\Gamma U=(x+y-x-y)\Gamma M\Gamma U=0$ dır. M asal olduğundan ve U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olduğundan $x+y-x-y=0$ elde ederiz. Böylece $(M,+)$ abelyendır. □

Lemma 2.4.3: M bir asal $\Gamma-$yakın halka ve U, M nin sıfırdan farklı 0 ı içeren invaryant alt kümesi olsun. d, M üzerinde bir $\Gamma-(\alpha,1)$-türev olsun. Eğer d, U üzerinde bir anti-Γ-homomorfizması olarak etki ederse ve $\alpha(0)=0$ ise bu taktirde her $x\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $x\gamma 0=0$ dır.

İspat: Her $x\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $0\gamma x=0$ olduğundan ve d, U üzerinde bir anti-Γ-homomorfizması olarak etki ettiğinden her $x\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$0=d(0\gamma x)=d(x)\gamma d(0)=d(x)\gamma 0$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}0=d(x\gamma 0)&=d(x)\gamma\alpha(0)+x\gamma d(0)\\&=x\gamma 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x\gamma 0=0$ dır. □

Lemma 2.4.4: M bir $\Gamma-$yakın halka ve U, M nin bir invaryant alt kümesi olsun. Eğer d, her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $\alpha(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma\alpha(y)$ olacak şekilde M nin iki taraflı $\Gamma-\alpha$-türevi ise bu taktirde her $n,x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$n\mu\big(d(x)\gamma\alpha(y)+x\gamma d(y)\big)=n\mu d(x)\gamma\alpha(y)+n\mu x\gamma d(y)$$

dir. Üstelik $\alpha(U)=U$ ise bu taktirde her $n,x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$n\mu\big(d(x)\gamma y+\alpha(x)\gamma d(y)\big)=n\mu d(x)\gamma y+n\mu\alpha(x)\gamma d(y)$$

dır.

İspat: Her $n,x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}d\big(n\mu(x\gamma y)\big)&=d(n)\mu\alpha(x\gamma y)+n\mu d(x\gamma y)\\&=d(n)\mu\alpha(x)\gamma\alpha(y)+n\mu\big(d(x)\gamma\alpha(y)+x\gamma d(y)\big).\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $n,x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}d\big((n\mu x)\gamma y\big)&=d(n\mu x)\gamma\alpha(y)+n\mu x\gamma d(y)\\&=\big(d(n)\mu\alpha(x)+n\mu d(x)\big)\gamma\alpha(y)+n\mu x\gamma d(y)\\&=d(n)\mu\alpha(x)\gamma\alpha(y)+n\mu d(x)\gamma\alpha(y)+n\mu x\gamma d(y).\end{aligned}$$

bulunur. $d(n\mu x\gamma y)$ nin bu iki eşitiğinden

$$n\mu\big(d(x)\gamma\alpha(y)+x\gamma d(y)\big)=n\mu d(x)\gamma\alpha(y)+n\mu x\gamma d(y)$$

dır.

Benzer olarak her $n,x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} d\big(n\mu(x\gamma y)\big) &= d(n)\mu x\gamma y+\alpha(n)\mu d(x\gamma y) \\ &= d(n)\mu x\gamma y+\alpha(n)\mu[d(x)\gamma y+\alpha(x)\gamma d(y)] \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $n,x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} d\big((n\mu x)\gamma y\big) &= d(n\mu x)\gamma y+\alpha(n\mu x)\gamma d(y) \\ &= d(n)\mu x\gamma y+\alpha(n)\mu d(x)\gamma y+\alpha(n)\mu\alpha(x)\gamma d(y) \end{aligned}$$

$d(n\mu x\gamma y)$ nin bu iki eşitliğinden $\alpha(U)=U$ olduğunu kullanarak

$$n\mu\big(d(x)\gamma y+\alpha(x)\gamma d(y)\big)=n\mu d(x)\gamma y+n\mu\alpha(x)\gamma d(y)$$

elde edilir. □

Lemma 2.4.5: M bir asal $\Gamma-$yakın halka ve U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olsun. d, her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $\alpha(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma\alpha(y)$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı bir $\Gamma-(\alpha,1)$-türevi olsun. Eğer $x\in M$ ve $x\gamma d(U)=\{0\}$ ise bu taktirde $x=0$ dır.

İspat: $x\in M$ ve $x\gamma d(U)=\{0\}$ kabul edelim. Bu taktirde her $y\in M$, $u\in U$ ve $\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 &= x\gamma d(u\mu y) \\ &= x\gamma\big(d(u)\mu\alpha(y)+u\mu d(y)\big) \\ &= x\gamma d(u)\mu\alpha(y)+x\gamma u\mu d(y) \\ &= x\gamma u\mu d(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son bulunan ifadeyi her $x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için genellersek

$$x\Gamma U\Gamma d(y)=\{0\}$$

elde edilir. M asal , U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi ve d sıfırdan farklı olduğundan $x=0$ olduğu anlaşılır. □

Lemma 2.4.6: M bir asal $\Gamma-$yakın halka ve U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olsun. d, M nin sıfırdan farklı bir $\Gamma-(\alpha,1)$-türevi olsun. Eğer her $x,y,z\in U$ için $d(x+y-x-y)=0$ ise bu taktirde her $x,y,z\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $(x+y-x-y)\gamma d(z)=0$ dır.

İspat: Her $x,y,z\in U$ için $d(x+y-x-y)=0$ olduğunu kabul edelim. Her $z\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için sırasıyla x ve y yerine $x\gamma y$ ve $y\gamma z$ alırsak her $x,y,z\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(x\gamma z+y\gamma z-x\gamma z-y\gamma z\right) \\ &= d\left((x+y-x-y)\gamma z\right) \\ &= d(x+y-x-y)\gamma\alpha(z)+(x+y-x-y)\gamma d(z) \\ &= (x+y-x-y)\gamma d(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buda istenendir. □

Lemma 2.4.7: M bir asal $\Gamma-$yakın halka ve U, M nin invaryant alt kümesi olsun. d, her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $\alpha(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma\alpha(y)$ ve $\alpha(U)=U$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı bir $\Gamma-(\alpha,1)$-türevi olsun.

(i) Eğer d,U üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizması olarak davranırsa bu taktirde her $x,y\in U$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$d(y)\mu x\gamma d(y)=y\mu x\gamma d(y)=d(y)\mu x\gamma\alpha(y)$$

dır.

(ii) Eğer d,U üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizması olarak davranırsa bu taktirde her $x,y\in U$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$d(y)\gamma x\gamma d(y)=x\gamma y\gamma d(y)=d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x$$

dır.

İspat:

(i) d nin U üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizması olarak davrandığını kabul edelim. Bu taktirde her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x\gamma y) = d(x)\gamma\alpha(y) + x\gamma d(y) = d(x)\gamma d(y) \tag{2.4.1}$$

dır. (2.4.1) de x yerine $y\mu x$ alırsak her $x, y \in U$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} d(y\mu x)\gamma\alpha(y) + y\mu x\gamma d(y) &= d(y\mu x)\gamma d(y) \\ &= d(y)\mu d(x)\gamma d(y) \\ &= d(y)\mu d(x\gamma y) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

elde ederiz. Lemma 2.4.4 ten

$$\begin{aligned} d(y)\mu d(x\gamma y) &= d(y)\mu[d(x)\gamma\alpha(y) + x\gamma d(y)] \\ &= d(y)\mu d(x)\gamma\alpha(y) + d(y)\mu x\gamma d(y) \\ &= d(y\mu x)\gamma\alpha(y) + d(y)\mu x\gamma d(y). \end{aligned}$$

yazabiliriz. (2.4.2) de bu denklemi kullanırsak

$$d(y\mu x)\gamma\alpha(y) + y\mu x\gamma d(y) = d(y\mu x)\gamma\alpha(y) + d(y)\mu x\gamma d(y)$$

buradan da ilk ifadeler kısaltılırsa bu taktirde her $x, y \in U$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$y\mu x\gamma d(y) = d(y)\mu x\gamma d(y)$$

elde edilir.

Benzer olarak (2.4.1) de y yerine $y\mu x$ alırsak her $x, y \in U$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} d(x)\gamma\alpha(y\mu x) + x\gamma d(y\mu x) &= d(x)\gamma d(y\mu x) \\ &= d(x)\gamma d(y)\mu d(x) \\ &= d(x\gamma y)\gamma d(x) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Diğer taraftan her $x, y \in U$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} d(x\gamma y)\mu d(x) &= \left(d(x)\gamma\alpha(y) + x\gamma d(y)\right)\mu d(x) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)\mu d(x) + x\gamma d(y)\mu d(x) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)\mu d(x) + x\gamma d(y\mu x) \end{aligned}$$

(2..4.3) denkleminde bu ifadeyi yerine yazarsak

$$d(x)\gamma\alpha(y\mu x) + x\gamma d(y\mu x) = d(x)\gamma\alpha(y)\mu d(x) + x\gamma d(y\mu x)$$

elde edilir. Buradan da ilk ifadeler kısaltılırsa her $x, y \in U$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma\alpha(y\mu x) = d(x)\gamma\alpha(y)\mu d(x)$$

elde edilir. Hipotezden $\alpha(x\gamma y) = \alpha(x)\gamma\alpha(y)$ olduğundan

$$d(x)\gamma\alpha(y)\mu\alpha(x) = d(x)\gamma\alpha(y)\mu d(x)$$

dır. $\alpha(U) = U$ olduğundan her $x, w \in U$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma w\mu\alpha(x) = d(x)\gamma w\mu d(x)$$

elde ederiz. Yani her $x, y \in U$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$d(y)\gamma x\mu\alpha(y) = d(y)\gamma x\mu d(y)$$

bulunur.

(ii) d nin U üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizması olarak davrandığını kabul edelim. Bu taktirde her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x\gamma y) = d(x)\gamma\alpha(y) + x\gamma d(y) = d(y)\gamma d(x) \tag{2.4.4}$$

olduğunu biliyoruz. (2.4.4) denkleminde y yerine $x\gamma y$ alırsak

$$\begin{aligned} d(x)\gamma\alpha(x\gamma y) + x\gamma d(x\gamma y) &= d(x\gamma y)\gamma d(x) \\ &= \big(d(x)\gamma\alpha(y) + x\gamma d(y)\big)\gamma d(x) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)\gamma d(x) + x\gamma d(y)\gamma d(x) \\ &= d(x)\gamma\alpha(y)\gamma d(x) + x\gamma d(x\gamma y). \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde kısaltmaları yaparsak her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma\alpha(x\gamma y) = d(x)\gamma\alpha(y)\gamma d(x)$$

elde ederiz. $\alpha(U) = U$ olduğundan $d(x)\gamma\alpha(x)\gamma y = d(x)\gamma y\gamma d(x)$ bulunur.

Benzer olarak (2.4.4) te x yerine $x\gamma y$ alırsak her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} d(x\gamma y)\gamma\alpha(y) + x\gamma y\gamma d(y) &= d(y)\gamma d(x\gamma y) \\ &= d(y)\gamma\big(d(x)\gamma\alpha(y) + x\gamma d(y)\big) \\ &= d(y)\gamma d(x)\gamma\alpha(y) + d(y)\gamma x\gamma d(y) \\ &= d(x\gamma y)\gamma\alpha(y) + d(y)\gamma x\gamma d(y) \end{aligned}$$

bulunur. Kısaltmalar yapılırsa her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $d(y)\gamma x\gamma d(y) = x\gamma y\gamma d(y)$ elde edilir. □

Teorem 2.4.8: M yarı asal bir $\Gamma-$yakın halka ve U, M nin sıfırı içeren bir invaryant alt kümesi olsun. d, M nin her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\alpha(x\gamma y) = \alpha(x)\gamma\alpha(y)$ ve $\alpha(U) = U$ olacak şekilde iki taraflı $\Gamma-\alpha$-türevi olsun.

(i) Eğer d, U üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizması olarak davranırsa bu taktirde $d(U)=\{0\}$ dır.

(ii) Eğer d, U üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizması olarak davranırsa bu taktirde $d(U)=\{0\}$ dır.

İspat:

(i) d nin U üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizması olarak davrandığını kabul edelim. Bu taktirde Lemma 3.3.7 den her $x, y\in U$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$d(y)\mu x\gamma d(y)=d(y)\mu x\gamma\alpha(y) \tag{2.4.5}$$

olduğunu biliyoruz. (2.4.5) denklemini her $z\in U$ için sağdan $d(z)$ ile çarparsak ve d nin U üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizması olarak davrandığı ve $\alpha(U)=U$ hipotezlerini Lemma 2.4.4 ile birlikte kullanırsak her $x, y, z\in U$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} d(y)\mu x\gamma\alpha(y)\mu d(z) &= d(y)\mu x\gamma d(y)\mu d(z) \\ &= d(y)\mu x\gamma d(y\mu z) \\ &= d(y)\mu x\gamma\big(d(y)\mu\alpha(z)+y\mu d(z)\big) \\ &= d(y)\mu x\gamma d(y)\mu\alpha(z)+d(y)\mu x\gamma y\mu d(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Kısaltmalar yapılırsa $d(y)\mu x\gamma d(y)\mu\alpha(z)=0$ bulunur. $\alpha(U)=U$ olduğundan her $x, y, z\in U$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için $d(y)\mu x\gamma d(y)\mu z=0$ dır. $m\in M$, $z\in U$ ve $\eta\in\Gamma$ olduğunda x yerine $z\eta m$ alırsak her $m\in M$, $x, y, z\in U$ ve $\eta\in\Gamma$ için $d(y)\mu z\eta m\gamma d(y)\mu z=0$ elde edilir. Özellikle $d(y)\mu z\Gamma M\Gamma d(y)\mu z=\{0\}$ dır. M yarı asal olduğundan $d(y)\mu z=0$ elde edilir. $\alpha(U)=U$ olduğundan her $y, z\in U$ ve $\mu\in\Gamma$ için

$$d(y)\mu\alpha(z)=0 \tag{2.4.6}$$

olduğu açıktır. (2.4.6) denkleminde her $n\in M$ için y yerine $y\eta n$ alırsak

$$d(y\eta n)\mu\alpha(z)=0$$

bulunur. Bu son ifadeyi açarsak ve her $z\in U$ ve $\beta\in\Gamma$ için soldan $d(z)$ ile çarparsak $d(z)\beta d(y)\eta n\mu\alpha(z)+d(z)\beta y\eta d(n)\mu\alpha(z)=0$ elde edilir. İkinci toplam (2.4.6) dan sıfır olduğundan her $n\in M$, $x, y, z\in U$ ve $\gamma,\mu,\beta\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0=d(z)\beta d(y)\eta n\mu\alpha(z)=d(z\beta y)\eta n\mu\alpha(z) &= d(z)\beta\alpha(y)\eta n\mu\alpha(z)+z\beta d(y)\eta n\mu\alpha(z) \\ &= z\beta d(y)\eta n\mu\alpha(z) \end{aligned}$$

elde edilir.Yani $z\beta d(y)\eta n\mu\alpha(z)=0$ dır. $\alpha(U)=U$ olduğundan $w\in U$ olduğunda $z\beta d(y)\eta n\mu w=0$ sonucuna varılır. w yerine $z\beta d(y)$ alırsak $z\beta d(y)\eta n\mu z\beta d(y)=0$ bulunur. Bu son ifadeyi her $n\in M$, $y,z\in U$ ve $\mu,\eta,\beta\in\Gamma$ için genellersek

$$z\beta d(y)\Gamma M\Gamma z\beta d(y)=0$$

M yarı asal $\Gamma-$yakın halka olduğundan dolayı her $y,z\in U$ ve $\beta\in\Gamma$ için

$$z\beta d(y)=0 \tag{2.4.7}$$

elde ederiz. (2.4.6) denklemini ve (2.4.7) denklemini birleştirirsek her $y,z\in U$ ve $\beta\in\Gamma$ için $d(y)\beta\alpha(z)+y\beta d(z)=d(y\beta z)=0$ bulunur. Her $m\in M$, $z\in U$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için y yerine $z\gamma m$ alırsak $d(z\gamma m\beta z)=0$ elde ederiz. d,U üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizması olarak davrandığından

$$0=d(z\gamma m)\beta d(z)=d(z)\gamma\alpha(m)\beta d(z)+z\gamma d(m)\beta d(z)$$

dır. (2.4.7) den dolayı ikinci toplam sıfırdır. Yani her $m\in M$, $z\in U$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için $d(z)\gamma\alpha(m)\beta d(z)=0$ olduğu anlaşılır. Bu ifadeyi genellersek $d(z)\Gamma M\Gamma d(z)=0$ dır. M yarı asal olduğundan her $z\in U$ için $d(z)=0$ olduğu anlaşılır. Yani $d(U)=\{0\}$ dır.

(ii) d nin U üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizması olarak davrandığını kabul edelim. İlk olarak Lemma 2.4.3 den her $a\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $a\gamma 0=0$ olduğunu hatırlatalım. Lemma 2.4.7 (ii) den dolayı her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$x\gamma y\gamma d(y)=d(y)\gamma x\gamma d(y) \tag{2.4.8}$$

$$d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x=d(y)\gamma x\gamma d(y) \tag{2.4.9}$$

dır. (2.4.8) de x yerine $x\gamma d(y)$ alırsak

$$\begin{aligned} x\gamma d(y)\gamma y\gamma d(y) &= d(y)\gamma x\gamma d(y\gamma y) = d(y)\gamma x\gamma(d(y)\gamma\alpha(y)+y\gamma d(y)) \\ &= d(y)\gamma x\gamma d(y)\gamma\alpha(y) + d(y)\gamma x\gamma y\gamma d(y). \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

elde ederiz. (2.4.8) de her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için x yerine $x\gamma y$ alırsak

$$x\gamma y\gamma y\gamma d(y)=d(y)\gamma x\gamma y\gamma d(y) \tag{2.4.11}$$

elde ederiz. Bu denklemi sağdan $\alpha(y)$ ile çarparsak her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$x\gamma y\gamma d(y)\gamma\alpha(y)=d(y)\gamma x\gamma d(y)\gamma\alpha(y) \tag{2.4.12}$$

elde ederiz. (2.4.8) de y ile x in yerlerini değiştirirsek $y\gamma y\gamma d(y)=d(y)\gamma y\gamma d(y)$ bulunur. Bunu x ile soldan çarparsak her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$x\gamma y\gamma y\gamma d(y) = x\gamma d(y)\gamma y\gamma d(y) \tag{2.4.13}$$

(2.4.11), (2.4.12) ve (2.4.13) denklemlerini (2.4.10) denkleminde yerine yazarsak $x\gamma y\gamma d(y)\gamma\alpha(y) = 0$ olduğu anlaşılır. Burada $n \in M$ olduğunda x yerine $y\gamma n$ alırsak $y\gamma n\gamma y\gamma d(y)\gamma\alpha(y) = 0$ olur. Böylece

$$y\gamma d(y)\gamma\alpha(y)\Gamma M\Gamma y\gamma d(y)\gamma\alpha(y) = \{0\}$$

dır. M nin yarı asal oluşundan her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$y\gamma d(y)\gamma\alpha(y) = 0 \tag{2.4.14}$$

bulunur. (2.4.12) ye göre $x\gamma 0 = d(y)\gamma x\gamma y\gamma d(y)\gamma\alpha(y)$ yani $d(y)\gamma x\gamma y\gamma d(y)\gamma\alpha(y) = 0$ elde edilir. Şimdi (2.4.9) denklemini sağdan $\alpha(y)$ ile çarparsak

$$d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x\gamma\alpha(y) = d(y)\gamma x\gamma d(y)\gamma\alpha(y)$$

ve son bulunan ifadeyi burada yerine yazarsak her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x\gamma\alpha(y) = 0 \tag{2.4.15}$$

elde edilir. (2.4.15) te x yerine $x\gamma n\gamma d(y)$ alırsak her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x\gamma n\gamma d(y)\gamma\alpha(y) = 0$$

ve bu denklemi sağdan x ile çarparsak her $x, y \in U$, $n \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x\gamma n\gamma d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x = 0$$

elde ederiz. Bu ifadeyi her $x, y \in U$, $n \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için genellersek

$$d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x\Gamma M\Gamma d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x = 0$$

M yarı asal olduğundan her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(y)\gamma\alpha(y)\gamma x = 0 \tag{2.4.16}$$

bulunur. (2.4.9) da (2.4.16) yı kullanırsak $d(y)\gamma x\gamma d(y) = 0$ elde edilir. Son denklemde x yerine $x\gamma n$ alırsak $d(y)\gamma x\gamma n\gamma d(y) = 0$ olur. Bu ifadeyi sağdan x ile çarparsak

$$d(y)\gamma x\gamma n\gamma d(y)\gamma x = 0$$

sonucuna varılır. Bu ifadeyi her $x, y \in U$, $n \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için genellersek

$$d(y)\gamma x\Gamma M\Gamma d(y)\gamma x = 0$$

elde edilir. M yarı asal olduğundan her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(y)\gamma x = 0 \tag{2.4.17}$$

dır. (2.4.17) de her $x, y, z \in U$, $n \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için y yerine $y\gamma n$ alırsak $d(y\gamma n)\gamma x = 0$ olur. Bu denklemi her $x, y, z \in U$, $n \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için soldan $x\gamma d(z)$ ile çarparsak $x\gamma d(z)\gamma d(y\gamma n)\gamma x = 0$ elde edilir. Böylece

$$0 = x\gamma d(z)\gamma\big(d(y)\gamma n + \alpha(y)\gamma d(n)\big)\gamma x = x\gamma d(z)\gamma d(y)\gamma n\gamma x + x\gamma d(z)\gamma\alpha(y)\gamma d(n)\gamma x$$

dır. $\alpha(U) = U$ olduğundan (2.4.17) den dolayı ikinci toplam sıfırdır. Böylece $x\gamma d(z)\gamma d(y)\gamma n\gamma x = 0$ elde edilir. Bu denklemi her $x, y, z \in U$, $n \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için sağdan $d(z)\gamma d(y)$ ile çarparsak $x\gamma d(z)\gamma d(y)\gamma n\gamma x\gamma d(z)\gamma d(y) = 0$ elde edilir. Her $x, y, z \in U$, $n \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için bu son ifadeyi genellersek

$$x\gamma d(z)\gamma d(y)\Gamma M\Gamma x\gamma d(z)\gamma d(y) = \{0\}$$

bulunur. M nin yarı asallığından

$$0 = x\gamma d(z)\gamma d(y) = x\gamma d(z\gamma y)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$0 = x\gamma d(y)\gamma z + x\gamma\alpha(y)\gamma d(z) = x\gamma\alpha(y)\gamma d(z)$$

dır.Özellikle x yerine $\alpha(y)\gamma d(z)\gamma n$ alırsak

$$\alpha(y)\gamma d(z)\gamma n\gamma\alpha(y)\gamma d(z) = 0$$

bulunur. Bu ifadeyi genellersek $\alpha(y)\gamma d(z)\Gamma M\Gamma\alpha(y)\gamma d(z) = 0$ bulunur. M nin yarı asallığından $\alpha(y)\gamma d(z) = 0$ dır.Her $x, y, z \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için (2.4.17) ile bu ifadeyi birleştirirsek

$$d(x\gamma y) = 0$$

bulunur. Burada her $x \in U$, $n \in M$ için y yerine $x\gamma n$ alırsak $d(x\gamma x\gamma n) = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 = d(x\gamma n)\gamma d(x) = (d(x)\gamma n + \alpha(x)\gamma d(n))\gamma d(x) &= d(x)\gamma n\gamma d(x) + \alpha(x)\gamma d(n)\gamma d(x) \\ &= d(x)\gamma n\gamma d(x) + \alpha(x)\gamma d(x\gamma n). \end{aligned}$$

İkinci toplam sıfır olduğundan $d(x)\gamma n\gamma d(x) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi genellersek

$$d(x)\Gamma M\Gamma d(x) = \{0\}$$

elde edilir. M yarı asal olduğundan her $x \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $d(x) = 0$ dır. Böylece $d(U) = \{0\}$ olduğu anlaşılır. Bu ise istenendir. □

Sonuç 2.4.9: M bir yarı asal $\Gamma-$yakın-halka ve d ,M nin her $x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\alpha(x\gamma y) = \alpha(x)\gamma\alpha(y)$ olacak şekilde iki taraflı $\Gamma-\alpha$ -türevi olsun.

(i) d, M üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizma olarak davranırsa bu taktirde $d=0$

dır.

(ii) d, M üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizma olarak davranırsa ve $\alpha(0)=0$ ise bu taktirde $d=0$ dır.

Sonuç 2.4.10: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve U, M nin $0\in U$ olacak şekilde sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olsun. d, M nin her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $\alpha(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma\alpha(y)$ ve $\alpha(U)=U$ olacak şekilde iki taraflı $\Gamma-\alpha$ -türevi olsun.

(i) d, M üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizma olarak davranırsa bu taktirde $d=0$ dır.

(ii) d, M üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizma olarak davranırsa ve $\alpha(0)=0$ ise bu taktirde $d=0$ dır.

İspat: Teorem 2.4.8 den her $x\in U$ için $d(x)=0$ dır. Her $x\in U, a\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için x yerine $x\gamma a$ alırsak bu taktirde

$$0=d(x\gamma a)=d(x)\gamma\alpha(a)+x\gamma d(a)=x\gamma d(a)$$

elde ederiz. Son denklemde her $x\in U, b\in M$ ve $\mu\in\Gamma$ için x yerine $x\mu b$ alırsak $x\mu b\gamma d(a)=0$ bulunur. Bu ifadeyi genellersek

$$x\Gamma M\Gamma d(a)=0$$

elde edilir. M asal olduğundan ve U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olduğundan her $a\in M$ için $d(a)=0$ elde edilir. Dolayısıyla $d=0$ olduğu anlaşılır. □

Teorem 2.4.11:: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi olsun. d, M nin her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $\alpha(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma\alpha(y)$ olacak şekilde bir $\Gamma-(\alpha,1)$-türevi olsun. Eğer her $x,y\in U$ için $d(x+y-x-y)=0$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır.

İspat: Her $x,y\in U$ için $d(x+y-x-y)=0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde Lemma 2.4.6 dan dolayı her $x,y,z\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $(x+y-x-y)\gamma d(z)=0$ olur. Lemma 2.4.5 ten dolayı her $x,y\in U$ için $x+y-x-y=0$ olduğu anlaşılır. Böylece Lemma 2.4.2 den $(M,+)$ abelyendır. □

Sonuç 2.4.12: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve U, M nin sıfırdan farklı invaryant alt kümesi ve olsun. d, M nin her $x,y\in U$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $\alpha(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma\alpha(y)$ olacak şekilde bir $\Gamma-(\alpha,1)$-türevi olsun. Eğer $d+d$, U üzerinde toplamsal ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır.

İspat: $d+d$, U üzerinde toplamsal olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $x,y\in U$ için

$$\begin{aligned}(d+d)(x+y)&=d(x+y)+d(x+y)\\&=d(x)+d(y)+d(x)+d(y)\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan her $x,y\in U$ için

$$\begin{aligned}(d+d)(x+y)&=(d+d)(x)+(d+d)(y)\\&=d(x)+d(x)+d(y)+d(y)\end{aligned}$$

elde edilir. $(d+d)(x+y)$ nin iki eşitliğinden $d(x)+d(y)=d(y)+d(x)$ elde edilir. Yani her $x,y\in U$ için $d(x+y-x-y)=0$ elde edilir. Teorem 2.4.11 den dolayı $(M,+)$ abelyendır. □

2.5 $\Gamma-$ YAKIN HALKALARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ $\Gamma-$ TÜREVLER

Bu bölüm boyunca M, Z çarpımsal merkezli sıfır simetrik bir sol $\Gamma-$yakın-halka olacaktır.

Tanım 2.5.1: M bir $\Gamma-$yakın-halka ve d, M nin bir $\Gamma-$türevi olsun. $f: M \to M$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(x\gamma y) = f(x)\gamma y + x\gamma d(y)$$

ise bu taktirde f toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş $\Gamma-$türev denir. Eğer her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma f(y)$$

ise f toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş $\Gamma-$türev denir. Sonuç olarak eğer f, d ile birleştirilmiş hem sağ hem de sol genelleştirilmiş $\Gamma-$türev ise bu taktirde $f: M \to M$ toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş bir genelleştirilmiş $\Gamma-$türev denir.

Lemma 2.5.2: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka olsun.

(i) Eğer $z \in Z/\{0\}$ ise bu taktirde z, M de bir sıfır bölen değildir.

(ii) Eğer $Z/\{0\}$, $z+z \in Z$ olacak şekilde bir z elemanı içerirse bu taktirde $(M,+)$ abelyendır.

(iii) d, M nin sıfırdan farklı bir $\Gamma-$ türevi olsun. Bu taktirde $x \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $x\gamma d(M) = \{0\}$ olması $x = 0$ olmasını ve $d(M)\gamma x = \{0\}$ olması $x = 0$ olmasını gerektirir.

İspat: (i) ve (ii) nin ispatı için [9, Lemma 2.2] bakınız.

(iii) d, M nin sıfırdan farklı bir $\Gamma-$türevi olsun ve $x\gamma d(M) = \{0\}$ olsun. Her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 = x\gamma d(y\mu z) &= x\gamma\big(y\mu d(z) + d(y)\mu z\big) \\
&= x\gamma y\mu d(z) + x\gamma d(y)\mu z \\
&= x\gamma y\mu d(z)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifadeyi her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için genellersek

$$x\Gamma M\Gamma d(z) = \{0\}$$

elde edilir. M asal olduğundan ve d sıfırdan farklı olduğundan $x = 0$ olduğu anlaşılır.

Benzer şekilde, d, M nin sıfırdan farklı bir $\Gamma-$türevi o ve $d(M)\gamma x = \{0\}$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 = d(y\mu z)\gamma x &= \big(y\mu d(z) + d(y)\mu z\big)\gamma x \\
&= y\mu d(z)\gamma x + d(y)\mu z\gamma x \\
&= d(y)\mu z\gamma x
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifadeyi her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için genellersek

$$d(y)\Gamma M\Gamma x = \{0\}$$

bulunur. M asal olduğundan ve d sıfırdan farklı olduğundan $x = 0$ olduğu anlaşılır. □

Lemma 2.5.3: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka olsun. Eğer M 2-torsion serbest ise ve d, M nin $d^2 = 0$ olacak şekilde bir $\Gamma-$türevi ise bu taktirde $d = 0$ dır.

İspat: M asal ve 2-torsion serbest olsun. d, M nin $d^2 = 0$ olacak şekilde bir $\Gamma-$türevi olsun. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 = d^2(x\gamma y) = d\big(d(x\gamma y)\big) &= d\big(x\gamma d(y) + d(x)\gamma y\big) \\
&= d\big(x\gamma d(y)\big) + d\big(d(x)\gamma y\big) \\
&= x\gamma d^2(y) + d(x)\gamma d(y) + d(x)\gamma d(y) + d^2(x)\gamma y \\
&= 2d(x)\gamma d(y)
\end{aligned}
$$

bulunur. M 2-torsion serbest olduğundan $d(x)\gamma d(y) = 0$ elde edilir. Her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için y yerine $y\mu z$ alırsak

$$
\begin{aligned}
0 = d(x)\gamma d(y\mu z) &= d(x)\gamma\big(y\mu d(z) + d(y)\mu z\big) \\
&= d(x)\gamma y\mu d(z) + d(x)\gamma d(y)\mu z \\
&= d(x)\gamma y\mu d(z)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için bu ifadeyi genellersek $d(x)\Gamma M \Gamma d(z) = \{0\}$ bulunur. M asal olduğundan ya $d(x) = 0$ yada $d(z) = 0$ dır. Dolayısıyla $d = 0$ elde edilir. □

Lemma 2.5.4:

(i) f, bir M $\Gamma-$yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sağ genelleştirilmiş $\Gamma-$ türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(x\gamma y) = x\gamma d(y) + f(x)\gamma y$$

dır.

(ii) f, bir M $\Gamma-$yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sol genelleştirilmiş $\Gamma-$ türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(x\gamma y) = x\gamma f(y) + d(x)\gamma y$$

dır.

İspat: **(i)** f, d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} f\left(x\gamma(y+y)\right) &= f(x)\gamma(y+y) + x\gamma d(y+y) \\ &= f(x)\gamma y + f(x)\gamma y + x\gamma d(y) + x\gamma d(y) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} f(x\gamma y + x\gamma y) &= f(x\gamma y) + f(x\gamma y) \\ &= f(x)\gamma y + x\gamma d(y) + f(x)\gamma y + x\gamma d(y) \end{aligned}$$

dır. $x\gamma(y+y)$ nin bu iki eşitliğinden

$$f(x\gamma y) = f(x)\gamma y + x\gamma d(y) = x\gamma d(y) + f(x)\gamma y$$

elde edilir.

(ii) f, d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} f\left(x\gamma(y+y)\right) &= d(x)\gamma(y+y) + x\gamma f(y+y) \\ &= d(x)\gamma y + d(x)\gamma y + x\gamma f(y) + x\gamma f(y) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} f(x\gamma y + x\gamma y) &= f(x\gamma y) + f(x\gamma y) \\ &= d(x)\gamma y + x\gamma f(y) + d(x)\gamma y + x\gamma f(y) \end{aligned}$$

dır. $x\gamma(y+y)$ nin bu iki eşitliğinden

$$f(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma f(y) = x\gamma f(y) + d(x)\gamma y$$

elde edilir. □

Lemma 2.5.5:

(i) f, bir M $\Gamma-$yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sağ genelleştirilmiş $\Gamma-$ türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\left(f(x)\gamma y + x\gamma d(y)\right)\mu z = f(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z$$

dır.

(ii) f, bir M $\Gamma-$yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sol genelleştirilmiş $\Gamma-$ türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\left(d(x)\gamma y + x\gamma f(y)\right)\mu z = d(x)\gamma y\mu z + x\gamma f(y)\mu z$$

dır.

İspat: (i) f, M $\Gamma-$yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sağ genelleştirilmiş $\Gamma-$ türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} f\left((x\gamma y)\mu z\right) &= f(x\gamma y)\mu z + x\gamma y\mu d(z) \\ &= \left(f(x)\gamma y + x\gamma d(y)\right)\mu z + x\gamma y\mu d(z) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} f\left(x\gamma(y\mu z)\right) &= f(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y\mu z) \\ &= f(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu d(z) \end{aligned}$$

bulunur. $x\gamma y\mu z$ in iki eşitliğinden

$$\left(f(x)\gamma y + x\gamma d(y)\right)\mu z = f(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z$$

elde edilir.

(ii) f, M $\Gamma-$yakın-halkasında d ile birleştirilmiş bir sol genelleştirilmiş $\Gamma-$ türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
f\left((x\gamma y)\mu z\right) &= d(x\gamma y)\mu z + x\gamma y\mu f(z)\\
&= \left(d(x)\gamma y + x\gamma d(y)\right)\mu z + x\gamma y\mu f(z)\\
&= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu f(z)
\end{aligned}
$$

dır. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
f\left(x\gamma(y\mu z)\right) &= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma f(y\mu z)\\
&= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma\left(d(y)\mu z + y\mu f(z)\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. $x\gamma y\mu z$ in bu iki eşitliğinden her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$x\gamma\left(d(y)\mu z + y\mu f(z)\right) = x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu f(z)$$

elde edilir. □

Lemma 2.5.6: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka, f, sıfırdan farklı d $\Gamma-$türevi ile birleştirilmiş sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş $\Gamma-$türev ve $a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun.

(i) Eğer $a\gamma f(M) = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ dır.

(ii) Eğer $f(M)\gamma a = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ dır.

İspat: (i) M bir asal $\Gamma-$yakın-halka, f, sıfırdan farklı d $\Gamma-$türevi ile birleştirilmiş sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Ve $a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma f(M) = 0$ olsun. Bu taktirde her $x, y, a \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 = a\gamma f(x\mu y) &= a\gamma\left(f(x)\mu y + x\mu d(y)\right)\\
&= a\gamma f(x)\mu y + a\gamma x\mu d(y)\\
&= a\gamma x\mu d(y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Her $x, y, a \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için bu ifadeyi genellersek

$$a\Gamma M\Gamma d(y) = \{0\}$$

bulunur. M asal olduğundan ve d sıfırdan farklı olduğundan $a = 0$ elde edilir.

(ii) $a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f(M)\gamma a = 0$ olsun. Bu taktirde (i) ye benzer şekilde her $x, y, a \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 = f(x\gamma y)\mu a &= \left(d(x)\gamma y + x\gamma f(y)\right)\mu a\\
&= d(x)\gamma y\mu a + x\gamma f(y)\mu a\\
&= d(x)\gamma y\mu a
\end{aligned}
$$

bulunur. Her $x, y, a \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için bu ifadeyi genellersek

$$d(x)\Gamma M \Gamma a = \{0\}$$

elde edilir. M asal olduğundan ve d sıfırdan farklı olduğundan $a = 0$ elde edilir. □

Lemma 2.5.7: Eğer her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $z \in Z$ ise bu taktirde

$$[z\mu x, y]_\gamma = z\mu[x, y]_\gamma = z\gamma[x, y]_\mu$$

dir.

İspat: $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $z \in Z$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} [z\mu x, y]_\gamma &= z\mu x\gamma y - y\gamma z\mu x \\ &= z\mu x\gamma y - y\gamma x\mu z \\ &= z\mu x\gamma y - z\mu y\gamma x \\ &= z\mu\left(x\gamma y - y\gamma x\right) \\ &= z\mu[x, y]_\gamma \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $z \in Z$ için

$$\begin{aligned} z\mu[x, y]_\gamma &= z\mu x\gamma y - z\mu y\gamma x \\ &= x\mu z\gamma y - y\mu z\gamma x \\ &= x\mu y\gamma z - y\mu x\gamma z \\ &= z\gamma x\mu y - z\gamma y\mu x \\ &= z\gamma\left(x\mu y - y\mu x\right) \\ &= z\gamma[x, y]_\mu \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $z \in Z$ için $[z\mu x, y]_\gamma = z\mu[x, y]_\gamma = z\gamma[x, y]_\mu$ dır. □

Teorem 2.5.8: f, M nin sıfırdan farklı bir d $\Gamma-$türevi ile birleştirilmiş genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Eğer M 2-torsion serbest $\Gamma-$yakın-halka ve $f^2 = 0$ ise bu taktirde $f = 0$ dır.

İspat: M, 2-torsion serbest $\Gamma-$yakın-halka ve $f^2 = 0$ olsun. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}0=f^2(x\gamma y)&=f\left(f(x\gamma y)\right)\\&=f\left(f(x)\gamma y+x\gamma d(y)\right)\\&=f\left(f(x)\gamma y\right)+f\left(x\gamma d(y)\right)\\&=f^2(x)\gamma y+f(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma d(y)+x\gamma d^2(y)\\&=f(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma d(y)+x\gamma d^2(y)\end{aligned}$$

bulunur. Yani her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma d(y)+x\gamma d^2(y)=0$$

bulunur. Bu son denklemde her $x\in M$ için x yerine $f(x)$ alırsak her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f^2(x)\gamma d(y)+f^2(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma d^2(y)=0$$

elde edilir. $f^2=0$ olduğundan

$$f(x)\gamma d^2(y)=0$$

bulunur. Lemma 2.5.6 (ii) den her $y\in M$ için $d^2(y)=0$ olur. Yani $d^2=0$ dır. Buradan Lemma 2.5.3 den $d=0$ elde edilir. Şimdi $d=0$ olduğundan dolayı

$$f(x\gamma y)=d(x)\gamma y+x\gamma f(y)=x\gamma f(y)$$

olur. Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}0=f^2(x\gamma y)=f\left(f(x\gamma y)\right)&=f\left(x\gamma f(y)\right)\\&=f(x)\gamma f(y)+x\gamma d\left(f(y)\right)\end{aligned}$$

olur. $d=0$ olduğundan ikinci toplam sıfırdır. Yani her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x)\gamma f(y)=0$$

bulunur. Buradan Lemma 2.5.6 den $f=0$ dır. □

Teorem 2.5.9: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve f, d ile birleştirilmiş sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Eğer $f(M)\subset Z$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır. Üstelik, eğer M 2-torsion serbest ise bu taktirde M komütatif halkadır.

İspat: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve f, d ile birleştirilmiş sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş $\Gamma-$türev ve $f(M)\subset Z$ olsun. $f(a)\neq 0$ olacak şekilde bir $a\in M$

alalım. Böylece $f(a) \in Z-\{0\}$ dır. Dolayısıyla Lemma 2.5.3 (ii) den $f(a)+f(a) \in Z-\{0\}$ dır. Buradan her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$(x+y)\gamma(f(a)+f(a)) = (f(a)+f(a))\gamma(x+y)$$

elde edilir. Bu son eşitliğe dağılma özelliklerini kullanarak her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$x\gamma f(a)+x\gamma f(a)+y\gamma f(a)+y\gamma f(a) = f(a)\gamma x+f(a)\gamma y+f(a)\gamma x+f(a)\gamma y$$

bulunur. $f(a) \in Z/\{0\}$ olduğundan

$$x\gamma f(a)+x\gamma f(a)+y\gamma f(a)+y\gamma f(a) = x\gamma f(a)+y\gamma f(a)+x\gamma f(a)+y\gamma f(a)$$

dır. Eşitliğin iki tarafındaki ilk ve son toplamlar kısaltılırsa her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(a)\gamma x+f(a)\gamma y = f(a)\gamma y+f(a)\gamma x$$

dır. Yani her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(a)\gamma x+f(a)\gamma y-f(a)\gamma x-f(a)\gamma y = 0$$

bulunur. Buradan

$$f(a)\gamma(x+y-x-y) = 0$$

yani her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(a)\gamma(x, y) = 0$$

elde edilir. Fakat $f(a) \in Z/\{0\}$ olduğundan Lemma 2.5.6 (ii) den $(x, y) = 0$ bulunur. Yani $(M,+)$ abelyendır.

Şimdi M nin 2-torsion serbest olduğunu kabul edelim. Hipotezden her $x \in M$ için $f(x) \in Z$ olduğundan her $x, y, z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[f(x), z]_\gamma = 0$ dır. Burada $\mu \in \Gamma$ için x yerine $x\mu y$ alırsak bu taktirde

$$\begin{aligned} 0 = [f(x\mu y), z]_\gamma &= [d(x)\mu y + x\mu f(y), z]_\gamma \\ &= [d(x)\mu y, z]_\gamma + [x\mu f(y), z]_\gamma \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da her $x, y, z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} [d(x)\mu y, z]_\gamma &= -[x\mu f(y), z]_\gamma \\ &= -(x\mu f(y)\gamma z - z\gamma x\mu f(y)) \\ &= z\gamma x\mu f(y) - x\mu f(y)\gamma z \\ &= [z, x\mu f(y)]_\gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$[d(x)\mu y, z]_\gamma = [z, x\mu f(y)]_\gamma$$

dir. Lemma 2.5.7 den dolayı her $x, y, z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\mu[y, z]_\gamma = f(y)\mu[z, x]_\gamma$$

yazılır. Bu son denklemde her $y \in M$ için y yerine $f(y)$ alırsak ve her $x \in M$ için $f(x) \in Z$ olduğunu göz önünde tutarsak

$$\begin{aligned} f^2(y)\mu[z, x]_\gamma &= d(x)\mu[f(y), z]_\gamma \\ &= d(x)\mu f(y)\gamma z - d(x)\mu z\gamma f(y) \\ &= d(x)\mu f(y)\gamma z - d(x)\mu f(y)\gamma z \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x, y, z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f^2(y)\mu[z, x]_\gamma = 0$$

dır. Her $y \in M$ için $f^2(y) = 0$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.5.8 den dolayı $f = 0$ olur. Fakat bu $f \neq 0$ olması ile çelişir. Yani $f^2(y)$ sıfıra eşit olamaz. Dolayısıyla her $x, z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$[z, x]_\gamma = 0$$

olur. ($z\gamma x - x\gamma z = 0$). Yani M komütatif halkadır. □

Bir d $\Gamma-$türevi ile birleştirilmiş $f : M \to M$ genelleştirilmiş $\Gamma-$türevini (f, d) ile göstereceğiz. Aksi belirtilmedikçe d, M nin sıfırdan farklı $\Gamma-$türevi olacaktır.

Teorem 2.5.10: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve (f, d), M üzerinde genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Eğer her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f\left([x, y]_\gamma\right) = 0$ ve her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ ise bu takdirde M komütatif halkadır.

İspat: Her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f\left([x, y]_\gamma\right) = 0$ kabul edelim. y yerine $x\gamma y$ alırsak

$$[x, x\gamma y]_\gamma = x\gamma x\gamma y - x\gamma y\gamma x = x\gamma[x, y]_\gamma$$

olduğundan her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 = f\left([x, x\gamma y]_\gamma\right) &= f\left(x\gamma[x, y]_\gamma\right) \\
&= d(x)\gamma[x, y]_\gamma + x\gamma f\left([x, y]_\gamma\right) \\
&= d(x)\gamma[x, y]_\gamma \\
&= d(x)\gamma(x\gamma y - y\gamma x) \\
&= d(x)\gamma x\gamma y - d(x)\gamma y\gamma x
\end{aligned}
$$

dır. Yani her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma x\gamma y = d(x)\gamma y\gamma x \tag{2.5.1}$$

olduğu anlaşılır. (2.5.1) denkleminde her $y, z \in M$ ve $\mu \in \Gamma$ için y yerine $y\mu z$ alırsak $d(x)\gamma x\gamma y\mu z = d(x)\gamma y\mu z\gamma x$ olur. (2.5.1) denklemini burada yerine yazarsak $d(x)\gamma y\gamma x\mu z = d(x)\gamma y\mu z\gamma x$ bulunur. Her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olduğunu kullanarak

$$
\begin{aligned}
0 &= d(x)\gamma y\gamma x\mu z - d(x)\gamma y\mu z\gamma x \\
&= d(x)\gamma y\gamma x\mu z - d(x)\gamma y\gamma z\mu x \\
&= d(x)\gamma y\gamma(x\mu z - z\mu x)
\end{aligned}
$$

dır. Buradan her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $d(x)\gamma y\gamma[x, z]_\mu = 0$ bulunur. Bu son ifadeyi genellersek

$$d(x)\Gamma M\Gamma[x, z]_\mu = \{0\}$$

elde edilir. M asal olduğundan ve $d \neq 0$ olduğundan her $x, z \in M$ ve $\mu \in \Gamma$ için $[x, z]_\mu = 0$ elde edilir. Dolayısıyla M komütatif halkadır. □

Teorem 2.5.11: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve (f, d), M üzerinde genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Eğer her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f\left([x, y]_\gamma\right) = \pm[x, y]_\gamma$ ve her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ ise bu takdirde M komütatif halkadır.

İspat: Her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f\left([x, y]_\gamma\right) = \pm[x, y]_\gamma$ olsun. y yerine $x\gamma y$ alırsak

$$
\begin{aligned}
f\left([x, x\gamma y]_\gamma\right) &= f\left(x\gamma x\gamma y - x\gamma y\gamma x\right) \\
&= f\left(x\gamma(x\gamma y - y\gamma x)\right) \\
&= f\left(x\gamma[x, y]_\gamma\right) \\
&= \pm x\gamma[x, y]_\gamma
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} f\left([x, x\gamma y]_\gamma\right) &= f\left(x\gamma x\gamma y - x\gamma y\gamma x\right) \\ &= f\left(x\gamma(x\gamma y - y\gamma x)\right) \\ &= f\left(x\gamma[x, y]_\gamma\right) \\ &= d(x)\gamma[x, y]_\gamma + x\gamma f([x, y]_\gamma) \\ &= d(x)\gamma[x, y]_\gamma + x\gamma\left(\pm[x, y]\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $f\left([x, x\gamma y]_\gamma\right)$ nin bu iki eşitliğinden her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma[x, y]_\gamma + x\gamma\left(\pm[x, y]\right) = \pm x\gamma[x, y]_\gamma$$
$$d(x)\gamma[x, y]_\gamma = 0$$

bulunur. Yani her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma x\gamma y = d(x)\gamma y\gamma x$$

bulunur. Şimdi bu eşitlikte her $y, z \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için y yerine $y\beta z$ alırsak $d(x)\gamma x\gamma y\beta z = d(x)\gamma y\beta z\gamma x$ elde ederiz. Bu eşitlikte bir önceki denklemi kullanırsak $d(x)\gamma y\gamma x\beta z = d(x)\gamma y\beta z\gamma x$ buluruz ve $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olduğunu kullanarak $d(x)\gamma y\beta x\gamma z = d(x)\gamma y\beta z\gamma x$ elde ederiz. Her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)\gamma y\beta x\gamma z - d(x)\gamma y\beta z\gamma x \\ &= d(x)\gamma y\beta(x\gamma z - z\gamma x) \\ &= d(x)\gamma y\beta[x, z]_\gamma \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliği her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için genellersek

$$d(x)\Gamma M\Gamma[x, z]_\beta = \{0\}$$

elde edilir. M asal olduğundan ve $d \neq 0$ olduğundan her $x, z \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $[x, z]_\beta = 0$ elde edilir. Dolayısıyla M komütatif halkadır. □

Teorem 2.5.12: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve $(f, d), M$ üzerinde sıfırdan farklı genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Eğer f, M üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizma olarak davranırsa bu taktirde f birimsel dönüşümdür.

İspat: f, M üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizma olarak davrandığını kabul edelim. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(x\gamma y) = f(x)\gamma f(y) = d(x)\gamma y + x\gamma f(y) \qquad (2.5.2)$$

dır. (2.5.2) denkleminde her $y, z \in M$ ve $\mu \in \Gamma$ için y yerine $y\mu z$ alırsak

$$f(x)\gamma f(y\mu z) = d(x)\gamma y\mu z + x\gamma f(y\mu z)$$

olur. Burada f nin M üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizma olarak davrandığını kullanırsak

$$f(x)\gamma f(y\mu z) = f(x\gamma y)\mu f(z) = d(x)\gamma y\mu z + x\gamma f(y\mu z)$$

olur. Bu denklemi f nin genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olmasını kullanarak açarsak her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} f(x\gamma y)\mu f(z) &= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma f(y\mu z) \\ \left(d(x)\gamma y + x\gamma f(y)\right)\mu f(z) &= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma\left(d(y)\mu z + y\mu f(z)\right) \\ d(x)\gamma y\mu f(z) + x\gamma f(y)\mu f(z) &= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu f(z) \\ d(x)\gamma y\mu f(z) + x\gamma f(y\mu z) &= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu f(z) \\ d(x)\gamma y\mu f(z) + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu f(z) &= d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z + x\gamma y\mu f(z) \end{aligned}$$

bulunur. Burada eşitliğin iki tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler kısaltılırsa $d(x)\gamma y\mu f(z) = d(x)\gamma y\mu z$ elde edilir. Yani her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma y\mu\left(f(z) - z\right) = 0$$

dır. Bu ifadeyi her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için genellersek

$$d(x)\Gamma M\Gamma\left(f(z) - z\right) = \{0\}$$

elde edilir. M asal olduğundan ve $d \neq 0$ olduğundan $f(z) - z = 0$ dır. Yani her $z \in Z$ için $f(z) = z$ dir. Dolayısıyla f birimsel dönüşümdür. □

Teorem 2.5.13: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka ve $(f, d), M$ üzerinde sıfırdan farklı genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Eğer f, M üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizma olarak davranırsa ve her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ ise bu taktirde f birimsel dönüşümdür.

İspat: f, M üzerinde bir $\Gamma-$homomorfizma olarak davrandığını kabul edelim. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(x\gamma y) = f(y)\gamma f(x) = d(x)\gamma y + x\gamma f(y) \qquad (2.5.3)$$

dır. Bu denklemde her $x, y \in M$ ve $\mu \in \Gamma$ için x yerine $x\mu y$ alırsak

$$f(x\mu y)\gamma f(x) = d(x)\gamma x\mu y + x\gamma f(x\mu y)$$

bulunur. $(f,d), M$ üzerinde sıfırdan farklı genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olduğundan ve f, M üzerinde bir anti-$\Gamma-$homomorfizma olarak davrandığından

$$\left(d(x)\mu y + x\mu f(y)\right)\gamma f(x) = d(x)\gamma x\mu y + x\gamma f(y)\mu f(x)$$

elde edilir. Bu son denklemde dağılma özelliğini kullanırsak

$$d(x)\mu y\gamma f(x) + x\mu f(y)\gamma f(x) = d(x)\gamma x\mu y + x\gamma f(y)\mu f(x)$$

bulunur. Her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olduğunu kullanırsak

$$d(x)\mu y\gamma f(x) + x\gamma f(y)\mu f(x) = d(x)\gamma x\mu y + x\gamma f(y)\mu f(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$d(x)\mu y\gamma f(x) = d(x)\gamma x\mu y \qquad (2.5.4)$$

elde ederiz. (2.5.4) denkleminde her $x, y \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için y yerine $y\beta x$ alırsak ve (2.5.4) denklemini kullanırsak

$$d(x)\mu y\beta x\gamma f(x) = d(x)\gamma x\mu y\beta x$$
$$d(x)\gamma y\mu x\beta f(x) = d(x)\gamma x\mu y\beta x$$
$$d(x)\gamma y\mu x\beta f(x) = d(x)\gamma y\mu f(x)\beta x$$

elde ederiz. Dolayısıyla her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu, \beta \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma y\mu\left(x\beta f(x) - f(x)\beta x\right) = 0$$
$$d(x)\gamma y\mu[x, f(x)]_\beta = 0$$

bulunur. Bu son ifadeyi her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu, \beta \in \Gamma$ için genellersek

$$d(x)\Gamma M\Gamma[x, f(x)]_\beta = 0$$

elde edilir. M asal olduğundan ve $d \neq 0$ olduğundan her $x \in M$ için $f(x) \in Z$ dir. Teorem 2.5.9 dan dolayı M komütatiftir. Şimdi (2.5.4) denklemine geri dönerek M nin komütatif olduğunu ve $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olduğunu kullanırsak her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu, \beta \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma y\mu f(x) = d(x)\gamma y\mu x$$
$$d(x)\gamma y\mu\left(f(x) - x\right) = 0$$

bulunur. Bu ifadeyi her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için genellersek

$$d(x)\Gamma M\Gamma\left(f(x) - x\right) = 0$$

elde ederiz. M asal olduğundan ve $d \neq 0$ olduğundan her $x \in M$ için $f(x)-x=0$ olduğu anlaşılır. Yani her $x \in M$ için $f(x)=x$ dır. Dolayısıyla f birimsel dönüşümdür. □

Teorem 2.5.14: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka, $(f,d), M$ üzerinde $d(Z) \neq 0$ olacak şekilde genelleştirilmiş $\Gamma-$türev ve $a \in M$ olsun. Eğer her $x \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[f(x),a]_\gamma = 0$ ve her $x,y,z \in M$ ve $\gamma,\mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

İspat: $d(Z) \neq 0$ olduğundan $d(c) \neq 0$ olacak şekilde $c \in Z$ vardır. d bir türev olduğundan $d(c) \in Z$ dır. $[f(x),a]=0$ de x yerine her $\mu \in \Gamma$ için $c\mu x$ alırsak

$$f(c\mu x)\gamma a = a\gamma f(c\mu x)$$
$$\big(d(c)\mu x + c\mu f(x)\big)\gamma a = a\gamma\big(d(c)\mu x + c\mu f(x)\big)$$
$$d(c)\mu x\gamma a + c\mu f(x)\gamma a = a\gamma d(c)\mu x + a\gamma c\mu f(x)$$

elde edilir. $c \in Z$ ve $f(x)\gamma a = a\gamma f(x)$ olduğundan ve her $x,y,z \in M$ ve $\gamma,\mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olduğunu göz önünde tutarak

$$d(c)\gamma x\mu a = a\gamma d(c)\mu x \tag{2.5.5}$$

olduğu görülür. (2.5.5) de her $x,y \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için x yerine $x\beta y$ alırsak $d(c)\gamma x\beta y\mu a = a\gamma d(c)\mu x\beta y$ olur. Bu denklemde (2.5.5) denklemini kullanırsak

$$d(c)\gamma x\mu y\beta a = d(c)\gamma x\mu a\beta y$$
$$d(c)\gamma x\mu\big(y\beta a - a\beta y\big) = 0$$
$$d(c)\gamma x\mu[a,y]_\beta = 0$$

elde edilir. Bu son ifadeyi her $x,y \in M$ ve $\gamma,\mu,\beta \in \Gamma$ için genellersek

$$d(c)\Gamma M\Gamma[a,y]_\Gamma = \{0\}$$

olur. M asal olduğundan ve $d(Z) \neq 0$ olduğundan her $\beta \in \Gamma$ için $[a,y]_\beta = 0$ olur. Dolayısıyla $a \in Z$ dır. □

Teorem 2.5.15: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka, $(f,d), M$ üzerinde genelleştirilmiş $\Gamma-$türev ve $a \in M$ olsun. Eğer her $x \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[f(x),a]_\gamma = 0$ ve her $x,y,z \in M$ ve $\gamma,\mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ ise bu taktirde $d(a) \in Z$ dır.

İspat: $a=0$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. $a\neq 0$ kabul edelim. Hipotezden her $a,x\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ $f(x)\gamma a=a\gamma f(x)$ tir. Her $a,x\in M$ ve $\mu\in\Gamma$ için x yerine $a\mu x$ alırsak ve $f(x)\gamma a=a\gamma f(x)$ olduğunu kullanırsak

$$
\begin{gathered}
f(a\mu x)\gamma a=a\gamma f(a\mu x)\\
\big(d(a)\mu x+a\mu f(x)\big)\gamma a=a\gamma\big(d(a)\mu x+a\mu f(x)\big)\\
d(a)\mu x\gamma a+a\mu f(x)\gamma a=a\gamma d(a)\mu x+a\gamma a\mu f(x)\\
d(a)\mu x\gamma a+a\mu f(x)\gamma a=a\gamma d(a)\mu x+a\gamma f(x)\mu a
\end{gathered}
$$

elde ederiz. Kısaltmaları yaparsak ve $x\gamma y\mu z=x\mu y\gamma z$ olduğunu kullanırsak her $a,x\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$d(a)\gamma x\mu a=a\gamma d(a)\mu x \tag{2.5.6}$$

bulunur. (2.5.6) da her $x,y\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için x yerine $x\beta y$ alırsak ve (2.5.6) denklemini kullanırsak

$$
\begin{gathered}
d(a)\gamma x\beta y\mu a=a\gamma d(a)\mu x\beta y\\
d(a)\gamma x\mu y\beta a=d(a)\gamma x\mu a\beta y\\
d(a)\gamma x\mu\big(y\beta a-a\beta y\big)=0\\
d(a)\gamma x\mu[y,a]_\beta=0
\end{gathered}
$$

elde ederiz. Bu son ifadeyi her $x,y\in M$ ve $\gamma,\mu,\beta\in\Gamma$ için genellersek

$$d(a)\Gamma M\Gamma[y,a]_\Gamma=0$$

elde ederiz. M asal olduğundan ve $d\neq 0$ olduğundan $a\in Z$ dir. $0\neq a\in Z$ ise bu taktirde Lemma 2.5.2 (ii) den $(M,+)$ abelyendır. Üstelik $a\in Z$ ise her $x\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $a\gamma x=x\gamma a$ dır. Dolayısıyla

$$
\begin{gathered}
f(a\gamma x)=f(x\gamma a)\\
f(x)\gamma a+x\gamma d(a)=d(a)\gamma x+a\gamma f(x)
\end{gathered}
$$

elde edilir. $(M,+)$ abelyen ve $f(x)\gamma a=a\gamma f(x)$ olduğundan

$$
\begin{gathered}
x\gamma d(a)+a\gamma f(x)=d(a)\gamma x+a\gamma f(x)\\
x\gamma d(a)=d(a)\gamma x
\end{gathered}
$$

elde edilir ki buda her $a,x\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $[d(a),x]=0$ olduğunu gösterir. Yani $d(a)\in Z$ dir. □

Teorem 2.5.16: M bir asal $\Gamma-$yakın-halka, (f,d), M üzerinde sıfırdan farklı genelleştirilmiş $\Gamma-$türev olsun. Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $[f(x),f(y)]_\gamma=0$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır.

İspat: Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $[f(x),f(y)]_\gamma=0$ olduğundan w ve $w+w$ ikilisi her $x\in M$ için $d(x)$ ile elemansal olarak değişmeli olsun. Bu taktirde her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}
0&=[w,f(x+y)]_\gamma\\
&=w\gamma f(x+y)-f(x+y)\gamma w\\
&=w\gamma f(x)+w\gamma f(y)-f(x)\gamma w-f(y)\gamma w\\
&=w\gamma f(x)+w\gamma f(y)-w\gamma f(x)-w\gamma f(y)\\
&=w\gamma\big(f(x)+f(y)-f(x)-f(y)\big)\\
&=w\gamma f\big((x,y)\big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemde w yerine $f(z)$ alırsak her $x,y,z\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(z)\gamma f\big((x,y\big)=0 \tag{2.5.7}$$

elde ederiz. (2.5.7) denkleminde her $v,z\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için z yerine $z\beta v$ alırsak $f(z\beta v)\gamma f\big((x,y\big)=0$ olur. Bu ifadeyi dağılma özelliğini kullanarak açarsak

$$d(z)\beta v\gamma f\big((x,y)\big)+z\beta f(v)\gamma f\big((x,y)\big)=0$$

bulunur. Hipotezden ikinci toplam sıfırdır. Yani her $x,y,v,z\in M$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için

$$d(z)\beta v\gamma f\big((x,y)\big)=0$$

elde ederiz. Bu ifadeyi her $x,y,v,z\in M$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için genellersek

$$d(z)\Gamma M\Gamma f\big((x,y)\big)=\{0\}$$

olur. M asal olduğundan ve $d\neq 0$ olduğundan her $x,y\in M$ için $f\big((x,y)\big)=0$ olur. Her $z\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $z\gamma(x,y)$ de bir toplamsal komütatör olduğundan

$$\begin{aligned}
0&=f\big(z\gamma(x,y)\big)\\
&=d(x)\gamma(x,y)+z\gamma f(x,y)\\
&=d(x)\gamma(x,y)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son ifadede her $z\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için (x,y) yerine $z\beta(x,y)$ alırsak $d(x)\gamma z\beta(x,y)=0$ olur. Bu ifadeyi her $x,y,v,z\in M$ ve $\gamma,\beta\in\Gamma$ için genellersek

$$d(x)\Gamma M\Gamma(x,y)=\{0\}$$

olur. M asal olduğundan ve $d\neq 0$ olduğundan her $x,y\in M$ için $(x,y)=0$ olduğu anlaşılır. Yani $(M,+)$ abelyendır. □

2.6 $\Gamma-$ YAKIN HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ $\Gamma-(\alpha,\tau)-$TÜREVLER

Bu bölüm boyunca M, Z çarpımsal merkezli sıfır simetrik bir sol gamma-yakın halka olacaktır.

Tanım 2.6.1: Bir M Γ-yakın halkasında, her $x,y\in M$ için $x\Gamma M\Gamma y=\{0\}$ olması $x=0$ veya $y=0$ olmasını gerektiriyorsa M asal olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.2: Bir M Γ-yakın halkasında, her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

(i) $[x,y]_\gamma = x\gamma y-y\gamma x$

(ii) $(x,y)=x+y-x-y$

(iii) $[x,y]^\gamma{}_{\alpha,\tau}=x\gamma\alpha(y)-\tau(y)\gamma x$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.6.3: Bir M Γ-yakın halkasında, d bir $\Gamma-(\alpha,\tau)-$türev olsun. Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x\gamma y)=d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y) \tag{2.6.1}$$

olacak şekildeki bir $f:M\to M$ toplamsal dönüşümüne d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev denir. Eğer her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x\gamma y)=f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y) \tag{2.6.2}$$

ise f ye d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev denir. Eğer f, d ile birleştirilmiş hem sağ hem de sol türev ise f ye d ile birleştirilmiş genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev denir.

Lemma 2.6.4:

(i) f **,** bir M Γ-yakın halkasında d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olsun. Bu taktirde her $x, y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma\tau(y)$$

dir.

(ii) f **,** bir M Γ-yakın halkasında d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olsun. Bu taktirde her $x, y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma f(y)+d(x)\gamma\tau(y)$$

dir.

İspat: **(i)** Her $x, y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} f(x\gamma(y+y)) &= f(x)\gamma\tau(y+y)+\alpha(x)\gamma d(y+y) \\ &= f(x)\gamma\tau(y)+f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y)+\alpha(x)\gamma d(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(x\gamma y+x\gamma y) &= f(x\gamma y)+f(x\gamma y) \\ &= f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y) \end{aligned}$$

bu iki denklemin kıyasından

$$f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y)=\alpha(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma\tau(y)$$

ve böylece her $x, y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma d(y)+f(x)\gamma\tau(y)$$

elde edilir.

(ii) Her $x, y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} f(x\gamma(y+y)) &= d(x)\gamma\tau(y+y)+\alpha(x)\gamma f(y+y) \\ &= d(x)\gamma\tau(y)+d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)+\alpha(x)\gamma f(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(x\gamma y+x\gamma y) &= f(x\gamma y)+f(x\gamma y) \\ &= d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)+d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y) \end{aligned}$$

bu iki denklemin kıyasından

$$d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)=\alpha(x)\gamma f(y)+d(x)\gamma\tau(y)$$

yani her $x, y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$f(x\gamma y)=\alpha(x)\gamma f(y)+d(x)\gamma\tau(y)$$

elde edilir.

Lemma 2.6.5:

(i) f **,** bir M Γ-yakın halkasında d ile birleştirilmiş sağ genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$[f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y)]\mu\tau(z)=f(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)+\alpha(x)\gamma d(y)\mu\tau(z)$$

dir.

(ii) f **,** bir M Γ-yakın halkasında d ile birleştirilmiş genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$[d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)]\mu\tau(z)=d(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)+\alpha(x)\gamma f(y)\mu\tau(z)$$

dir.

(iii) f **,** bir M Γ-yakın halkasında d ile birleştirilmiş sol genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olsun. Bu taktirde her $x, y, z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$[d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)]\mu\tau(z)=d(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)+\alpha(x)\gamma f(y)\mu\tau(z)$$

dir.

İspat:

(i) Her $x, y, z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} f((x\gamma y)\mu z) &= f(x\gamma y)\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu d(z) \\ &= [f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y)]\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu d(z) \end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned} f(x\gamma(y\mu z)) &= f(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma d(y\mu z) \\ &= f(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma[d(y)\mu\tau(z)+\alpha(y)\mu d(z)] \\ &= f(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma d(y)\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu d(z) \end{aligned}$$

dır. $f(x\gamma y\mu z)$ nin bu iki eşitliğinden her $x, y, z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$[f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y)]\mu\tau(z)=f(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)+\alpha(x)\gamma d(y)\mu\tau(z)$$

elde edilir.

(ii) Her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}f((x\gamma y)\mu z)&=d(x\gamma y)\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu f(z)\\&=[d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)]\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu f(z)\end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}f(x\gamma(y\mu z))&=d(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma f(y\mu z)\\&=d(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma[f(y)\mu\tau(z)+\alpha(y)\mu f(z)]\\&=d(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma f(y)\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu f(z)\end{aligned}$$

dir. $f(x\gamma y\mu z)$ nin bu iki eşitliğinden her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$[d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)]\mu\tau(z)=d(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)+\alpha(x)\gamma f(y)\mu\tau(z)$$

elde edilir.

(iii) Her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}f((x\gamma y)\mu z)&=d(x\gamma y)\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu f(z)\\&=[d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)]\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu f(z)\end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}f(x\gamma(y\mu z))&=d(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma f(y\mu z)\\&=d(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma[f(y)\mu\tau(z)+\alpha(y)\mu f(z)]\\&=d(x)\gamma\tau(y\mu z)+\alpha(x)\gamma f(y)\mu\tau(z)+\alpha(x\gamma y)\mu f(z)\end{aligned}$$

dir. $f(x\gamma y\mu z)$ nin bu iki eşitliğinden her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$[d(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma f(y)]\mu\tau(z)=d(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)+\alpha(x)\gamma f(y)\mu\tau(z)$$

elde edilir.

Lemma 2.6.6: M, bir Γ-yakın halka ve f**,** sıfırdan farklı d ile birleştirilmiş sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olsun. $a\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ olsun.

(i) Eğer $a\gamma f(M)=0$ ise bu taktirde $a=0$ dır.

(ii) Eğer $f(M)\gamma\tau(a)=0$ ise bu taktirde $a=0$ dır.

İspat:

(i) Her $x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$0=a\gamma f(x\mu y)=a\gamma f(x)\mu\tau(y)+a\gamma\alpha(x)\mu d(y)$$

birinci kısım hipotezden sıfırdır. Ve böylece $a\gamma\alpha(x)\mu d(y)=0$. Her $x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$a\Gamma M\Gamma d(M)=0$$

M asal olduğundan ve $d\neq 0$ olduğundan $a=0$ elde edilir.

(ii) Her $x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$0=f(x\mu y)\gamma a=d(x)\mu\tau(y)\gamma a+\alpha(x)\mu f(y)\gamma a$$

ikinci kısım hipotezden sıfırdır. Ve böylece $d(x)\mu\tau(y)\gamma a=0$. Her $x,y\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$d(x)\Gamma M\Gamma a=\{0\}$$

M asal olduğundan ve $d\neq 0$ olduğundan $a=0$ elde edilir

Teorem 2.6.7: f, M nin $f\alpha=\alpha f$ olacak şekilde d ile birleşmiş bir genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$ -türev olsun. Eğer M 2-torsion serbest ve $f^2=0$ ise bu taktirde $f=0$ dır.

İspat: Keyfi $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}0&=f^2(x\gamma y)=f(f(x\gamma y))=f(f(x)\gamma\tau(y)+\alpha(x)\gamma d(y))\\&=f(f(x)\gamma\tau(y))+(\alpha(x)\gamma d(y))\\&=f^2(x)\gamma\tau^2(y)+\alpha(f(x))\gamma d(\tau(y))+f(\alpha(x))\gamma\tau(d(y))+\alpha^2(x)\gamma d^2(y)\end{aligned}$$

elde edilir. $f^2=0$ olduğundan her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\alpha(f(x))\gamma d(\tau(y))+f(\alpha(x))\gamma\tau(d(y))+\alpha^2(x)\gamma d^2(y)=0 \tag{2.6.3}$$

elde edilir.(2.6.3) denkleminde her $x\in M$ için x yerine $\alpha^{-1}(f(x))$ alırsak ve $f\alpha=\alpha f$ olduğunu kullanırsak

$$f(\alpha(\alpha^{-1}(f(x))))\gamma d(\tau(y))+f(\alpha(\alpha^{-1}(f(x))))\gamma\tau d(y)+\alpha^2(\alpha^{-1}(f(x)))\gamma d^2(y)=0$$

$$f^2(x)\gamma d(\tau(y))+f^2(x)\gamma\tau(d(y))+\alpha(f(x))\gamma d^2(y)=0$$

$f^2=0$ olduğundan ilk iki terim sıfırdır. $f\alpha=\alpha f$ olduğundan

$$f(\alpha(x))\gamma d^2(y)=0$$

Lemma 2.6.6 (ii) den $d^2(M)=0$ elde ederiz. Bu taktirde Lemma 2.3.5 ten $d=0$ dır.

Dolayısıyla her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f(x\gamma y) = f(x)\gamma\tau(y) = \alpha(x)\gamma f(y)$ elde ederiz. Böylece her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$0 = f^2(x\gamma y) = f(\alpha(x)\gamma f(y)) = f(\alpha(x))\gamma\tau(f(y)) + \alpha^2(x)\gamma d(f(y))$$

dır. Yani her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(\alpha(x))\gamma\tau(f(y)) = 0$$

elde edilir. Bu da Lemma 2.6.6(ii) den $f = 0$ olduğunu verir. □

Teorem 2.6.8: M, d ile birleştirilmiş sıfırdan farklı f genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevli asal $\Gamma-$yakın halka olsun. Eğer $f(M) \subset Z$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır. Üstelik M, 2-torsion serbest ve her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ ise M komütatif halkadır.

İspat: $f(a) \neq 0$ olacak şekilde $a \in M$ kabul edelim. Böylece $f(a) \in Z/\{0\}$ ve $f(a) + f(a) \in Z/\{0\}$. Her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$(x+y)\gamma(f(a)+f(a)) = (f(a)+f(a))\gamma(x+y)$$

yani $x\gamma f(a) + x\gamma f(a) + y\gamma f(a) + y\gamma f(a) = f(a)\gamma x + f(a)\gamma y + f(a)\gamma x + f(a)\gamma y$ dır. $f(a) \in Z$ olduğundan

$$f(a)\gamma x + f(a)\gamma x + f(a)\gamma y + f(a)\gamma y = f(a)\gamma x + f(a)\gamma y + f(a)\gamma x + f(a)\gamma y .$$

İlk ve son terimler kısaltılırsa

$$f(a)\gamma x + f(a)\gamma y = f(a)\gamma y + f(a)\gamma x$$

Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= f(a)\gamma x + f(a)\gamma y - f(a)\gamma x - f(a)\gamma y \\ &= f(a)\gamma[x + y - x - y] \end{aligned}$$

yani her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$f(a)\gamma(x, y) = 0$$

elde edilir. $f(a) \in Z/\{0\}$ ve M asal olduğundan her $x, y \in M$ için $(x, y) = 0$ olur. Böylece $(M,+)$ abelyendır.

Şimdi $f(M) \subset Z$ olduğunu kullanarak her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$\tau(z)\gamma f(x\mu y) = f(x\mu y)\gamma\tau(z)$$

Bu eşitliği açarsak ve Lemma 2.6.5 (ii) yi kullanırsak

$$\tau(z)\gamma[d(x)\mu\tau(y)+\alpha(x)\mu f(y)]=[d(x)\mu\tau(y)+\alpha(x)\mu f(y)]\gamma\tau(z)$$

$$\tau(z)\gamma d(x)\mu\tau(y)+\tau(z)\gamma\alpha(x)\mu f(y)=d(x)\mu\tau(y)\gamma\tau(z)+\alpha(x)\mu f(y)\gamma\tau(z)$$

dır. $f(M)\subset Z$ ve her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için $x\gamma y\mu z=x\mu y\gamma z$ olduğundan

$$\tau(z)\gamma d(x)\mu\tau(y)+\tau(z)\gamma\alpha(x)\mu f(y)=d(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)+\alpha(x)\gamma f(y)\mu\tau(z)$$

$$\tau(z)\gamma d(x)\mu\tau(y)-d(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)=\alpha(x)\gamma\tau(z)\mu f(y)-\tau(z)\gamma\alpha(x)\mu f(y)$$

buradan her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$\tau(z)\gamma d(x)\mu\tau(y)-d(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z)=[\alpha(x),\tau(z)]_\gamma\mu f(y) \qquad (2.6.4)$$

elde edilir. (2.6.4) denkleminde z yerine $\tau^{-1}(f(z))$ alırsak

$$f(z)\gamma d(x)\mu\tau(y)-d(x)\gamma\tau(y)\mu f(z)=\alpha(x)\gamma f(z)\mu f(y)-f(z)\gamma\alpha(x)\mu f(y)$$

ve $f(M)\subset Z$ olduğunu kullanırsak eşitliğin ikinci kısmı sıfır olur. Yani her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$f(z)\gamma d(x)\mu\tau(y)-f(z)\gamma d(x)\mu\tau(y)=0$$

elde edilir. Bu ise her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için

$$f(z)\gamma[d(x),\tau(y)]=0$$

elde edilir. f, d ile birleştirilmiş sıfırdan farklı genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olduğundan $d(M)\subset Z$ elde ederiz. Böylece Teorem 2.3.8 den dolayı M komütatif halkadır. □

Teorem 2.6.9: M, $\tau f=f\tau$ ve $\alpha f=f\alpha$ olacak şekilde sıfırdan farklı d ile birleştirilmiş sıfırdan farklı f genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevli asal bir $\Gamma-$ yakın halka olsun. Eğer her $\gamma\in\Gamma$ için $[f(M),f(M)]_\gamma=0$ ise $(M,+)$ abelyendır. Üstelik M, 2-torsion serbest ve her $x,y,z\in M$ ve $\gamma,\mu\in\Gamma$ için $x\gamma y\mu z=x\mu y\gamma z$ ise bu taktirde M komütatif halkadır.

İspat: $f(M)$ ile eleman tarzında değişmeli olacak şekilde z ve $z+z$ elemanlarını seçelim. Bu taktirde her $x,y,z\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$(z+z)\gamma(f(x)+f(y))=(f(x)+f(y))\gamma(z+z)$$

dır. Bu eşitliği açarsak

$$z\gamma f(x)+z\gamma f(y)+z\gamma f(x)+z\gamma f(y)=f(x)\gamma z+f(x)\gamma z+f(y)\gamma z+f(y)\gamma z$$

bulunur. Hipotezi kullanırsak her $x, y, z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$z\gamma f(x) + z\gamma f(y) = z\gamma f(y) + z\gamma f(x)$$
$$z\gamma(f(x) + f(y) - f(x) - f(y)) = 0$$

elde edilir. Buradan da her $x, y, z \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$z\gamma f(x, y) = 0 \qquad (2.6.5)$$

olduğu anlaşılır. (2.6.5) denkleminde $t \in M$ olmak üzere z yerine $f(t)$ alırsak $f(t)\gamma f(x, y) = 0$ elde ederiz. Lemma 2.6.6 (i) den dolayı her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f(x, y) = 0$ elde edilir. Bir $w \in M$ için

$$0 = f(w\gamma x, w\gamma y) = f(w\gamma(x, y)) = d(w)\gamma\tau(x, y) + \alpha(w)\gamma f(x, y)$$

elde edilir. Böylece her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(w)\gamma\tau(x, y) = 0$$

dır. Her $\mu \in \Gamma$ için w yerine $w\mu r$ alırsak ve Lemma 2.6.5 (iii) yi kullanırsak

$$0 = d(w\mu r)\gamma\tau(x, y) = d(w)\mu\tau(r)\gamma\tau(x, y) + \alpha(x)\mu d(r)\gamma\tau(x, y)$$

elde edilir. Buradan $d(w)\mu\tau(r)\gamma\tau(x, y) = 0$ bulunur. Bu son ifadeyi her $x, y, w \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için genellersek

$$d(w)\Gamma M\Gamma\tau(x, y) = 0$$

dır. M asal ve $d \neq 0$ olduğundan $(x, y) = 0$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $(M, +)$ abelyendır.

Şimdi M 2-torsion serbest ve her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olsun. $[f(M), f(M)] = 0$ olması kabulümüzden dolayı her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$f(\tau(z))\gamma f(f(x)\mu y) = f(f(x)\mu y)\gamma f(\tau(z))$$

yazabiliriz. $\tau f = f\tau$ ve $\alpha f = f\alpha$ ve $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olduğunu kullanırsak

$$f(\tau(z))\gamma d(f(x))\mu\tau(y) + f(\tau(z))\gamma\alpha(f(x))\mu f(y) = d(f(x))\mu\tau(y)\gamma f(\tau(z)) + \alpha(f(x))\gamma f(y)\mu f(\tau(z))$$
$$f(\tau(z))\gamma d(f(x))\mu\tau(y) + f(\alpha(x))\gamma f(\tau(z))\mu f(y) = d(f(x))\mu\tau(y)\gamma f(\tau(z)) + f(\alpha(x))\gamma f(\tau(x))\mu f(y)$$

ve böylece

$$f(\tau(z))\gamma d(f(x))\mu\tau(y) = d(f(x))\gamma\tau(y)\mu f(\tau(z)) \qquad (2.6.6)$$

bulunur. Bu son eşitlikte her $y, w \in \Gamma$ ve $\beta \in \Gamma$ için y yerine $y\beta w$ alırsak

$$f(\tau(z))\gamma d(f(x))\mu\tau(y)\beta\tau(w) = d(f(x))\gamma\tau(y)\beta\tau(w)\mu f(\tau(z))$$

(2.6.6) eşitliğini burada yerine yazarsak ve $x\gamma y\mu z = x\mu y\gamma z$ olduğunu kullanırsak her $x, y, z, w \in M$ ve $\gamma, \beta, \mu \in \Gamma$ için

$$d(f(x))\gamma\tau(y)\mu f(\tau(z))\beta\tau(w) = d(f(x))\gamma\tau(y)\mu\tau(w)\beta f(\tau(z))$$

bulunur. Buradan her $x, y, z, w \in M$ ve $\gamma, \beta, \mu \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
&d(f(x))\gamma\tau(y)\mu f(\tau(z))\beta\tau(w) = d(f(x))\gamma\tau(y)\mu\tau(w)\beta f(\tau(z)) \\
&d(f(x))\gamma\tau(y)\mu\{f(\tau(z))\beta\tau(w) - \tau(w)\beta f(\tau(z))\} = 0 \\
&d(f(x))\gamma\tau(y)\mu[f(\tau(z)), \tau(w)]_\beta = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadeyi her $x, y, z, w \in M$ ve $\gamma, \beta, \mu \in \Gamma$ için genellersek

$$d(f(x))\Gamma M\Gamma[f(\tau(z)), \tau(w)]_\beta = 0$$

M asal olduğundan $d(f(M)) = 0$ veya $f(M) \subset Z$ elde ederiz.

Şimdi $d(f(M)) = 0$ kabul edelim. Bu taktirde her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $0 = d(f(x\gamma y)) = d(d(x)\gamma\tau(y) + \alpha(x)\gamma f(y))$ ve böylece

$$d^2(x)\gamma\tau^2(y) + \alpha(d(x))\gamma d(\tau(y)) + d(\alpha(x))\gamma\tau(f(y)) + \alpha^2(x)\gamma d(f(y)) = 0$$

buradaki son ifade kabulümüzden dolayı sıfırdır. Bu denklemde her $y \in M$ için y yerine $\tau^{-1}(y)$ alırsak her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$d^2(x)\gamma\tau(y) + \alpha(d(x))\gamma d(y) + d(\alpha(x))\gamma f(y) = 0$$

elde edilir. Son denklemde y yerine $y\mu z$ alırsak ve bu denklemi kullanırsak

$$\begin{aligned}
0 &= d^2(x)\gamma\tau(y\mu z) + \alpha(d(x))\gamma d(y\mu z) + d(\alpha(x))\gamma f(y\mu z) \\
&= d^2(x)\gamma\tau(y)\mu\tau(z) + \alpha(d(x))\gamma d(y)\mu\tau(z) + \alpha(d(x))\gamma\alpha(y)\mu d(z) \\
&\quad + d(\alpha(x))\gamma f(y)\mu\tau(z) + d(\alpha(x))\gamma\alpha(y)\mu d(z) \\
&= \{d^2(x)\gamma\tau(y) + \alpha(d(x))\gamma d(y) + d(\alpha(x))\gamma f(y)\}\mu\tau(z) + \alpha(d(x))\gamma\alpha(y)\mu d(z) \\
&\quad + d(\alpha(x))\gamma\alpha(y)\mu d(z)
\end{aligned}$$

$\alpha f = f\alpha$ olduğundan her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için

$$2\alpha(d(x))\gamma\alpha(y)\mu d(z) = 0$$

elde edilir. Bu ifadeyi her $x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için genellersek ve M nin 2-torsion serbest olduğunu kullanırsak

$$d(M)\Gamma M\Gamma d(M) = 0$$

M asal olduğundan $d = 0$ elde edilir. Bu ise $d \neq 0$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla $f(M) \subset Z$ yani Teorem 2.6.8 den M komütatif halkadır. □

Teorem 2.6.10: M asal ve f, sıfırdan farklı d $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türevi ile birleştirilmiş sıfırdan farklı genelleştirilmiş $\Gamma-(\alpha,\tau)$-türev olsun. Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $[f(x),f(y)]^{\gamma}{}_{\alpha,\tau}=0$ ise bu taktirde $(M,+)$ abelyendır.

İspat: Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $[f(x),f(y)]^{\gamma}{}_{\alpha,\tau}=0$ olduğundan w ve $w+w$ ikilisi her $x\in M$ için $d(x)$ ile elemansal olarak değişmeli olsun. Bu taktirde her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}
0&=[w,f(x+y)]^{\gamma}{}_{\alpha,\tau}\\
&=w\gamma\alpha\big(f(x+y)\big)-\tau\big(f(x+y)\big)\gamma w\\
&=w\gamma\alpha(f(x))+w\gamma\alpha(f(y))-\tau(f(x))\gamma w-\tau(f(y))\gamma w\\
&=w\gamma\alpha(f(x))+w\gamma\alpha(f(x))-w\gamma\alpha(f(x))-w\gamma\alpha(f(x))\\
&=w\gamma\alpha\big(f(x)+f(y)-f(x)-f(y)\big)\\
&=w\gamma\alpha f\big((x,y)\big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemde w yerine her $x,y,z\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $f(z)$ alırsak

$$0=f(z)\gamma\alpha(f(x,y))$$

olur. Her $z,v\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için bu son denklemde z yerine $z\beta v$ alırsak

$$\begin{aligned}
0&=f(z\beta v)\gamma\alpha(f(x,y))\\
&=d(z)\beta z(v)\gamma\alpha(f(x,y))+\alpha(z)\beta f(v)\gamma\alpha(f(x,y))\\
&=d(z)\beta z(v)\gamma\alpha(f(x,y))
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeyi her $x,y,z\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için genellersek

$$d(z)\Gamma M\Gamma\alpha(f(x,y))=\{0\}$$

bulunur. M asal olduğundan ve $d \neq 0$ olduğundan $\alpha(f(x,y)) = 0$ olur. α otomorfizma olduğundan $f((x,y)) = 0$ dır. $f \neq 0$ olduğundan $(x,y) = 0$ olur. Dolayısıyla $(M,+)$ abelyendır. □

KAYNAKLAR

[1] PILZ, G, *Near-Rings* (2nd edition), North-Holland ***Amsterdam***-New York-Oxford

[2] Argaç, N.: *On prime and semiprime near-rings with derivations*. Inernat. J. Math. and Math**.** Sci. 20 (4) (1997), 737-740

[3] Argaç, N.:*On near-rings with two-sides* α*-derivations*. Turk. J. Math 28 (2004), 195-204.

[4] Ö.Gölbaşı and N. Aydın, *Result on prime near-rings with* $(\sigma,\tau)-$*derivation,* Math. J. Okayama Univ. 46 (2004). 1-7.

[5] M. Ashraf, A.Ali, Shakır Ali, $(\sigma,\tau)-$*derivations on prime near rings,* Archıvum Mathematicum (brno), Tomus 40 (2004), 281-286.

[6] Ö.Gölbaşı, *on generalized derivations of prime near-rings,* Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, Volume 35 (2) (2006), 173-180.

[7] Ö.Gölbaşı, *on prime near-rings with generalized* $(\sigma,\tau)-$ *derivations,* Kyungpook Math. J. 45(2005), 249-254.

[8] Aşçı M.: $\Gamma-(\sigma,\tau)-$*derivation on gamma near rings*. International Mathematical Forum, 2, 2007, no. 3, 97-102.

[9] M. Uçkun, M.A.Öztürk and Y.B.Jun, *On prime gamma-near-rings with derivation,* Comm. Korean Math. Soc. 19(3) 2004, 427-433.

[10] Young B. J., Kyung H. K. and Yong U. C. *On gamma-derivations in gamma-near- rings.* Soochow J. Math. vol. 29 No.3 pp. 275-282, July 2003.

[11] Young B. J. and Yong U. C. *Gamma-derivations in prime and semiprime gamma-near-rings.* Indian J. appl. Math. 33(10): 1489-1494 October 2002.

[12] Satayanarayana, B., Contributions to Near-ring Theory, Doctoral Thesis, Nagarjuna University, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	**:** Akın Alkan
Baba Adı	**:** Ahmet
Anne adı	**:** Havva
Doğum Tarihi	**:** 01.09.1984
Doğum Yeri	**:** Balıkesir

İlköğrenimini Soma Namık Kemal İlköğretim Okulu'nda, liseyi Soma Özel Birlik Lisesi'nde, üniversiteyi Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2006 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Programında Yüksek Lisansa başladı. Öğrenimine hala devam etmektedir.