

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KÜBİK NONLİNEER BİR SÜREKLİ ORTAM SİSTEMİNİN
DIŞ ZORLAMALI VE PARAMETRİK TİTREŞİMLERİNE
GENEL BİR YAKLAŞIM**

DOKTORA TEZİ

Bozkurt Burak ÖZHAN

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Mekanik

MANİSA 2009

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KÜBİK NONLİNEER BİR SÜREKLİ ORTAM SİSTEMİNİN
DIŞ ZORLAMALI VE PARAMETRİK TİTREŞİMLERİNE
GENEL BİR YAKLAŞIM**

DOKTORA TEZİ

Bozkurt Burak ÖZHAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09.04.2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 22.04.2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Bekir SOLMAZ

Prof. Dr. Halil Rıdvan ÖZ

Doç.Dr.Erdoğan ÖZKAYA

Doç.Dr.Hakan BOYACI

MANİSA 2009

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
SEMBOL LİSTESİ.....	III
ŞEKİL LİSTESİ.....	VII
KISALTMALAR LİSTESİ.....	XVII
TEŞEKKÜR YAZISI.....	XVIII
TÜRKÇE ÖZET.....	XIX
YABANCI DİLDE ÖZET (ABSTRACT).....	XX
1.GİRİŞ.....	1
1.1.Genel Bilgiler Ve Yapılmış Çalışmalar.....	1
1.2.Bu Çalışmadaki Yaklaşım.....	3
2.TİTREŞİMLER.....	5
2.1.Titreşim Hareketinin Tanımı Ve Sınıflandırılması.....	5
2.2.Titreşim Konusunun Tarihsel Gelişimi.....	7
2.3.Titreşim Hareketinin Matematiksel Modellenmesi.....	10
2.4.Eksenel Hareketli Sürekli Ortam Titreşimlerinin Modellenmesi.....	12
2.4.1.Eksenel Hareketli Euler-Bernoulli Kiriş.....	12
2.4.2.Eksenel Hareketli Viskoelastik Kiriş.....	20
2.4.3.Akışkan Taşıyan Borular.....	23
2.4.3.1.Akışkan Taşıyan Elastik Borular.....	24
2.4.3.2.Akışkan Taşıyan Viskoelastik Borular.....	25
3.GENEL MODEL VE MÜHENDİSLİKTE PERTURBASYON YÖNTEMLERİ.....	27
3.1.Genel Model.....	27
3.2.Mühendislikte Perturbasyon Yöntemleri.....	28
4.DIŞ ZORLAMALI TİTREŞİMLER.....	30
4.1.Perturbasyon Yöntemi Çözümleri.....	30
4.2.Baskın Rezonans Durumu.....	32
4.2.1.Uygulama Problemi 1.....	38
4.2.1.1.Sayısal Sonuçlar.....	42
4.2.2.Uygulama Problemi 2.....	58

4.2.2.1.Sayısal Sonuçlar	61
4.3.İç Rezonans Durumu	67
4.3.1.Uygulama Problemi 1	78
4.3.1.1.Sayısal Sonuçlar	82
4.3.2.Uygulama Problemi 2	90
4.3.2.1.Sayısal Sonuçlar	93
5.PARAMETRİK TİTREŞİMLER	98
5.1.Perturbasyon Yöntemi Çözümleri	98
5.2.Temel Parametrik Rezonans : İç Rezonansın Olmadığı Durum.....	100
5.2.1.Uygulama Problemi	107
5.2.1.1.Sayısal Sonuçlar	110
5.3.Temel Parametrik Rezonans : 3:1 İç Rezonans Durumu	124
5.3.1.Uygulama Problemi	135
6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER	138
EK1.EKSENEL HAREKETLİ VİSKOELASTİK KİRİŞLERİN VE AKIŞKAN TAŞIYAN VİSKOELASTİK BORULARIN TABİİ FREKANSLARI	139
KAYNAKLAR	155
ÖZGEÇMİŞ	159

SEMBOL LİSTESİ

A	:	Kiriş kesit alanı
A_n, \bar{A}_n	:	n . moda ait kompleks genlikler ve eşlenikleri
A_m, \bar{A}_m	:	m . moda ait kompleks genlikler ve eşlenikleri
a_n, a_m	:	n . ve m . moda ait genlikler
$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$:	Sınır şartlarını belirleyen lineer operatörler
$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$:	Kübik nonlineer operatörler
c	:	Sönüm katsayısı
C_i, c_i	:	Katsayılar
$c(t)$:	İntegral sabiti (x değişkenine göre)
D_k	:	Türev operatörü
ds, dx	:	Diferansiyel boyuttaki elemana ait uzunluklar
dt	:	Diferansiyel boyutta zaman
E	:	Elastisite modülü
E^*	:	Viskoelastisite modülü
e_{xx}	:	Birim şekil değiştirme (x eksenine boyunca)
$F(t)$:	Zorlama kuvveti
$F(x)$:	Genel modeldeki harmonik zorlama kuvvetinin genliği
F_{in}	:	Jakobiyen matrise ait terimler
f_n	:	Çözülebilirlik şartında tanımlanan, n . moda ait, kuvvet ile alakalı katsayı
f_{nR}	:	Çözülebilirlik şartında tanımlanan, n . moda ait, kuvvet ile alakalı katsayının gerçel kısmı
f_{nI}	:	Çözülebilirlik şartında tanımlanan, n . moda ait, kuvvet ile alakalı katsayının sanal kısmı
g	:	Yerçekimi ivmesi
I	:	Atalet momenti
J_n	:	Jakobiyen

k	:	Viskoelastik kiriş modelinde kullanılan, viskozite ile alakalı boyutsuz katsayı
k_1, k_2	:	Akışkan taşıyan boru modelinde kullanılan, boru geometrisi ve viskozite ile alakalı katsayılar
k_{jn}	:	Çözülebilirlik şartlarında tanımlanan, n . moda ait katsayı
k_{jnR}	:	Çözülebilirlik şartlarında tanımlanan, n . moda ait katsayının gerçel kısmı
k_{jnI}	:	Çözülebilirlik şartlarında tanımlanan, n . moda ait katsayının sanal kısmı
k_y	:	Yay sabiti
L	:	Kiriş boyu
L_1, L_2, L_3, L_4	:	Lineer diferansiyel / integral operatörler (self adjoint operatörler)
$M(x, t)$:	Eğilme momenti
m	:	Kütle
m_A	:	Akışkan kütlesi
m_B	:	Boru kütlesi
P	:	Kiriş aksenal iç gerilme kuvveti
P_0, P_1	:	Boru aksenal çekme gerilme kuvveti (boyutsuz)
\bar{P}_0, \bar{P}_1	:	Boru aksenal çekme gerilme kuvveti (boyutlu)
p_n	:	Temel parametrik rezonans analizinde kompleks genlik için kullanılan farklı bir kartezyen gösterimin genlik teriminin gerçel kısmı
q_n	:	Temel parametrik rezonans analizinde kompleks genlik için kullanılan farklı bir kartezyen gösterimin genlik teriminin sanal kısmının katsayısı
T	:	Kinetik enerji
T_0	:	Hızlı zaman ölçeği
T_1	:	Yavaş zaman ölçeği
T_s	:	Basit sarkaç periyodu
t	:	Bağımsız değişken olarak zaman (boyutsuz)

\bar{t}	:	Bağımsız değişken olarak zaman (boyutlu)
U	:	Potansiyel enerji
$u(x,t)$:	Bağımlı değişken olarak sürekli ortam boyuna deplasmanı (boyutsuz)
$\bar{u}(x,t)$:	Bağımlı değişken olarak sürekli ortam boyuna deplasmanı (boyutlu)
$u_n(x)$:	Çözülebilirlik şartında kullanılan fonksiyon
v_0	:	Eksenel hareketli kirişler için kiriş eksenel hızı / Akışkan taşıyan borular için akış hızı (boyutsuz)
\bar{v}_0	:	Eksenel hareketli kirişler için kiriş eksenel hızı / Akışkan taşıyan borular için akış hızı (boyutlu)
v_c	:	Kiriş kritik hızı
v_f	:	Kiriş enine direngenliği (kirişlik katsayısı)
v_ℓ	:	Kiriş boyuna direngenliği (uzunlamasına esneklik)
v_{yatay}	:	Eksenel hareketli kiriş için yataydaki toplam hız
$W(x, T_0, T_1)$:	Seküler olmayan terimleri ihtiva eden terim
$w(x,t)$:	Bağımlı değişken olarak sürekli ortam enine deplasmanı (boyutsuz)
$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})$:	Bağımlı değişken olarak sürekli ortam enine deplasmanı (boyutlu)
x	:	Bağımsız değişken olarak mekan (boyutsuz)
\bar{x}	:	Bağımsız değişken olarak mekan (boyutlu)
$Y_n(x), \bar{Y}_n(x)$:	n . moda ait şekil fonksiyonu ve eşleniği
Y_{nR}	:	n . moda ait şekil fonksiyonunun gerçel kısmı
Y_{nI}	:	n . moda ait şekil fonksiyonunun sanal kısmı
α	:	Viskozite ile alakalı boyutsuz katsayı
β	:	Akışkan kütesinin akışkan ve boru toplam kütesine oranı
β_{jn}	:	n . mod şekil fonksiyonuna ait özdeğerler
γ_n, γ_m	:	n . ve m . moda ait fazlar
δ	:	Varyasyon
ε	:	Küçük boyutsuz parametre (Perturbasyon parametresi)
$\varphi_n(x, T_1)$:	Yerdeğiştirme fonksiyonunun seküler terimlerle alakalı kısmı (n . mod)

$\varphi_m(x, T_1)$:	Yerdeğiştirme fonksiyonunun seküler terimlerle alakalı kısmı (m . mod)
\mathcal{L}	:	Lagrangian
λ_i	:	Jakobiyen matrise ait özdeğerler
μ	:	Boyutsuz sönüm katsayısı
$\bar{\mu}$:	Boyutlu sönüm katsayısı
Ω	:	Zorlama kuvvetinin frekansı
ω_n, ω_m	:	n . ve m . moda ait tabii (doğal) frekanslar
ρ	:	Yoğunluk
ρ_n	:	Ayar parametresi
$\sigma(x, t)$:	Gerilme
σ_n	:	Ayar parametresi
$\theta(t)$:	Basit sarkaçın düşeyle yaptığı açının zamanla değişimini veren fonksiyon
η	:	Viskozite katsayısı (Dinamik viskozite)
$\frac{d}{dx}$:	Mekana göre türev
$\frac{d}{dt}$:	Zamana göre türev / Malzeme türev operatörü

ŞEKİL LİSTESİ

SAYFA NO

Şekil 2.1. Zorlama kuvveti etkisinde kütle-sönüm- yay sistemi.....	10
Şekil 2.2. Eksenel hareketli kiriş.....	12
Şekil 2.3. Diferansiyel boyuttaki parçanın uzaması.....	13
Şekil 2.4. Uzamalar için elde edilen dik üçgen.....	13
Şekil 2.5. Viskoelastik model elemanları.....	21
Şekil 2.6. Kelvin modeli.....	21
Şekil 4.1. Değişik kirişlik katsayıları için eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekanslar.....	45
Şekil 4.2. Eksenel hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans ($v_f = 0.2$).....	45
Şekil 4.3. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları($v_f = 0.2$).....	46
Şekil 4.4. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2$).....	46
Şekil 4.5. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları($v_f = 0.2$).....	47
Şekil 4.6. Eksenel hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans ($v_f = 0.6$).....	47
Şekil 4.7. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.6$).....	48

Şekil 4.8. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.6$).....	48
Şekil 4.9. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.6$).....	49
Şekil 4.10. Eksenel hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans ($v_f = 1.0$).....	49
Şekil 4.11. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 1.0$).....	50
Şekil 4.12. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 1.0$).....	50
Şekil 4.13. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 1.0$).....	51
Şekil 4.14. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$).....	51
Şekil 4.15. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.5$, $F = 15$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$).....	52
Şekil 4.16. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.5$, $F = 25$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$).....	52
Şekil 4.17. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.5$, $F = 5 - 15 - 25$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$).....	53

Şekil 4.18. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$).....	53
Şekil 4.19. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 1.0$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$).....	54
Şekil 4.20. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2-0.6-1.0$ $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$).....	54
Şekil 4.21. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 6.47457$).....	55
Şekil 4.22. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 1.0, v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 10.21303$).....	55
Şekil 4.23. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2-0.6-1.0, v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211-6.47457-10.21303$).....	56
Şekil 4.24. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.3$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 6.47457$).....	56
Şekil 4.25. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.8$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 6.47457$).....	57
Şekil 4.26. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.8$, $\mu = 0.3-0.5-0.8$, $F = 5$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 6.47457$).....	57

Şekil 4.27. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3,$ $F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 10$).....	62
Şekil 4.28. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3,$ $F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 20$).....	62
Şekil 4.29. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3,$ $F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 30$).....	63
Şekil 4.30. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3,$ $F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 10 - 20 - 30$).....	63
Şekil 4.31. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5,$ $F = 5, v_0 = 1.2, \omega_1 = 5.33248, \alpha = 0, k = 10$).....	64
Şekil 4.32. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5,$ $F = 5, v_0 = 1.2, \omega_1 = 5.33248, \alpha = 0.001, k = 10$).....	64
Şekil 4.33. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5,$ $F = 5, v_0 = 1.2, \omega_1 = 5.33248, \alpha = 0.005, k = 10$).....	65
Şekil 4.34. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5,$ $F = 5, v_0 = 1.2, \omega_1 = 5.33248, \alpha = 0.01, k = 10$).....	65

Şekil 4.35. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5$, $F = 5, v_0 = 1.2, \omega_1 = 5.33248, \alpha = 0 - 0.001 - 0.005 - 0.01, k = 10$).....	66
Şekil 4.36. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$, $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	83
Şekil 4.37. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$, $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	84
Şekil 4.38. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$, $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	85
Şekil 4.39. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$, $\sigma_1 = 2.5, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	86
Şekil 4.40. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$, $\sigma_1 = 2.5, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	86
Şekil 4.41. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$, $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	87
Şekil 4.42. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$, $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	87
Şekil 4.43. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$, $\sigma_1 = 2, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	88
Şekil 4.44. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$, $\sigma_1 = 2, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513$).....	89

- Şekil 4.45. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$,
 $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 94
- Şekil 4.46. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$,
 $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 94
- Şekil 4.47. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$,
 $\sigma_1 = 2.5, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 95
- Şekil 4.48. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.1$,
 $\sigma_1 = 2.5, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 95
- Şekil 4.49. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$,
 $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 96
- Şekil 4.50. Frekans Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$,
 $F = 10, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 96
- Şekil 4.51. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$,
 $\sigma_1 = 2, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 97
- Şekil 4.52. Kuvvet Tepki Grafiği ($v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.8$,
 $\sigma_1 = 2, v_0 = 0.4, \omega_1 = 3.39841, \omega_2 = 9.78513, \alpha = 0.001, k = 1$)..... 97
- Şekil 5.1. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4$).....113
- Şekil 5.2. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($P_0 = 10, \beta = 0.4$).....113

Şekil 5.3. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 20, \beta = 0.4$).....	114
Şekil 5.4. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 30, \beta = 0.4$).....	114
Şekil 5.5. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4$).....	115
Şekil 5.6. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 10, \beta = 0.4$).....	115
Şekil 5.7. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 20, \beta = 0.4$).....	116
Şekil 5.8. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 30, \beta = 0.4$).....	116
Şekil 5.9. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4$).....	117
Şekil 5.10. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 10, \beta = 0.4$).....	117
Şekil 5.11. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 20, \beta = 0.4$).....	118
Şekil 5.12. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 30, \beta = 0.4$).....	118
Şekil 5.13. Akışkan hızına karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4, P_0 = 10$).....	119
Şekil 5.14. Akışkan hızına karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4, P_0 = 20$).....	119

Şekil 5.15. Akışkan hızına karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4, P_0 = 30$).....	120
Şekil 5.16. Frekans Tepki Grafiği ($v_0 = 1.4, \beta = 0.4, \mu = 0.2,$ $\alpha = 0.005, P_0 = 10, P_1 = 10, k_1 = 5, k_2 = 0.5 - 1 - 1.5, \omega_1 = 13.2078$).....	120
Şekil 5.17. Frekans Tepki Grafiği ($v_0 = 0.8, \beta = 0.4, \alpha = 0.001 - 0.005 - 0.01,$ $\mu = 0.2, P_0 = 20, P_1 = 10, k_1 = 15, k_2 = 1, \omega_1 = 16.95413$).....	121
Şekil 5.18. Frekans Tepki Grafiği ($v_0 = 0.8, \beta = 0.4, \mu = 0.2,$ $\alpha = 0.01, P_0 = 20, P_1 = 10 - 20 - 30, k_1 = 15, k_2 = 1, \omega_1 = 16.95413$).....	122
Şekil 5.19. Frekans Tepki Grafiği ($v_0 = 4, \beta = 0.4, \mu = 0.3,$ $\alpha = 0.005, P_0 = 20, P_1 = 10, k_1 = 1 - 5 - 10, k_2 = 1, \omega_1 = 11.07468$).....	123
Şekil E.1.1. Eksenel hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri ($v_f = 0.2 \alpha = 0.001$).....	142
Şekil E.1.2. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2 \alpha = 0.001$).....	142
Şekil E.1.3. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2 \alpha = 0.001$).....	143
Şekil E.1.4. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2 \alpha = 0.001$).....	143
Şekil E.1.5. Eksenel hıza karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri ($v_f = 0.2 \alpha = 0.005$).....	144
Şekil E.1.6. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2 \alpha = 0.005$).....	144

Şekil E.1.7. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.005$).....	145
Şekil E.1.8. Eksenel hıza karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri ($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.01$).....	145
Şekil E.1.9. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.01$).....	146
Şekil E.1.10. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.01$).....	146
Şekil E.1.11. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekanslar ($v_f = 0.2$).....	147
Şekil E.1.12. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$).....	148
Şekil E.1.13. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$).....	148
Şekil E.1.14. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$).....	149
Şekil E.1.15. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$).....	149

Şekil E.1.16. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$).....	150
Şekil E.1.17. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$).....	150
Şekil E.1.18. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri ($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)	151
Şekil E.1.19. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$).....	151
Şekil E.1.20. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$).....	152
Şekil E.1.21. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri ($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$).....	152
Şekil E.1.22. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$).....	153
Şekil E.1.23. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$).....	153
Şekil E.1.24. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekanslar ($\beta = 0.3$, $P_0 = 25$).....	154

KISALTMALAR LİSTESİ

- k.e.* : Kompleks (karmaşık) eşlenik(ler)
S.O.T. : Seküler olmayan terim(ler)

TEŞEKKÜR YAZISI

Bu teşekkür yazıma öncelikle benim ben olmamı sağlayan ve bugünlere gelmemde maddi manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan anneme ve babama en içten minnetlerim, şükran duygularım ve sonsuz teşekkürlerimle başlamak isterim...

Ailemin diğer fertleri değerli ağabeyim ve sevgili kardeşime her zaman yanımda olup bana sevgi ve desteklerini verdikleri için sonsuz teşekkür ederim...

Hayatıma girdiği günden itibaren acı, tatlı her anımda yanımda olan, büyük desteğim, sevgili eşime, sevgisi, desteği, paylaşımı ve fedakarlığı için sonsuz teşekkür ederim...

Bu tez çalışması, gerek insani, gerek bilim adamı vasıflarıyla her zaman örnek olan saygıdeğer hocam Prof.Dr.Mehmet PAKDEMİRLİ'nin yönlendirmeleri, çabaları ve destekleri ile meydana gelmiştir. Saygıdeğer Hocam'ın üzerimdeki emekleri büyüktür. Kendilerinin öğrencisi olmak, benim için her zaman bir gurur vesilesi olacaktır. Sonsuz teşekkürlerimi sunarım...

Saygıdeğer hocalarım, Mühendislik Fakültesi Dekanı Prof.Dr.Ümit GÖKKUŞ'a ve İnşaat Mühendisliği Bölüm Başkanı Prof.Dr.Bekir SOLMAZ'a verdikleri destek ve paylaşımlarından dolayı içten teşekkürlerimi sunarım...

Doğtora eğitimime başladığım günden itibaren tecrübelerinden faydalandığım, bölüm hocalarım, Doç.Dr.Erdoğan ÖZKAYA ve Doç.Dr.Hakan BOYACI'ya vermiş oldukları doktora derslerinden, ilgilerinden ve desteklerinden dolayı içten teşekkürlerimi sunarım...

Saygıdeğer hocam Prof.Dr.Halil Rıdvan ÖZ, uzakta olmalarına karşın, tez çalışmam süresince ne zaman bir problemle karşılaşırsam, danışmak istesem, her zaman desteklerini vermişlerdir. Bu vesileyle kendilerine içten teşekkürlerimi sunarım...

İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden hocam Öğr.Gör.Dr.B.Gültekin SINIR'a yüksek lisans eğitimimden beri süregelen ilgi ve desteklerinden dolayı içten teşekkürlerimi sunarım...

Özellikle sayısal hesaplamalar konusunda bana destek olan, gece gündüz demeden okulda kalıp benimle çalışan değerli arkadaşım Araştırma Görevlisi Murat SARIĞÜL'e, aynı odayı paylaştığım, her zaman dostluklarını ve sevgilerini gördüğüm Araştırma Görevlisi arkadaşlarım M.M.Fatih KARAHAN ve Uğur ÇAVDAR'a içten teşekkürlerimi sunarım...

Adlarını yazamadığım diğer bütün hocalarıma, araştırma görevlisi arkadaşlarıma, Fen Bilimleri Enstitüsü ve Mühendislik Fakültesi personeline de teşekkürlerimi sunarım...

Bugüne kadar üzerimde emeği olan ve adlarını burada yazamadığım bütün öğretmenlerime, dostlarıma, yakınlarıma içten teşekkürlerimi sunarım...

Sağ olsunlar...

Bozkurt Burak ÖZHAN

ÖZET

Sürekli ortam titreşimlerini temsil eden ve birçok uygulamayı modelleyen genel kübik bir nonlineer model (üçüncü derece doğrusal olmayan genel model) ortaya atılmıştır. Denklemdaki lineer ve kübik nonlineer kısımlar, keyfi operatörler yardımıyla gösterilmiştir. Analitik çözümler, Çok Zaman Ölçekli Metod (bir Perturbasyon Metodu) kullanılarak yapılmıştır.

İlk olarak dış zorlamaya ait baskın rezonans durumu için genel çözümler yapılmıştır. Genlik ve faz modülasyon denklemleri ve bunlara ait katsayılar genel yapıda yazılmış ve genel bir yaklaşık çözüm üretilmiştir. Düzgün rejim çözümleri yapılmış ve sistem kararlılığı genel yapı içerisinde tartışılmıştır. Bulunan çözüm algoritması iki ayrı nonlineer titreşim problemine uygulanmıştır. Bu uygulamalar eksenel hareketli sürekli ortamlardan seçilmiştir ve bu modeller jiroskopik sistemlere örneklerdir. İlk model eksenel hareketli düz Euler-Bernoulli kirişi, ikincisi ise yine eksenel hareketli viskoelastik kiriş problemleridir. Sistem tabii frekansları değişik kiriş parametreleri için ve kiriş hızları için bulunmuştur. Frekans tepki grafikleri değişik kiriş parametreleri ve zorlama değerleri için bulunmuştur. Kararlı ve kararsız bölgeler gösterilmiştir.

İkinci olarak tabii frekanslar arasında 3:1 iç rezonans olma durumu ele alınmıştır. Genlik ve faz modülasyon denklemleri bulunmuştur. Bunlara ait katsayılar genel yapıda yazılmış ve genel bir yaklaşık çözüm üretilmiştir. Düzgün rejim çözümleri yapılmış ve sistem kararlılığı tartışılmıştır. Bulunan çözüm algoritması eksenel hareketli Euler-Bernoulli kirişinin ve eksenel hareketli viskoelastik kirişlerin nonlineer titreşimleri problemlerine uygulanmıştır. Eksenel kiriş hızının sabit olduğu durum ele alınmıştır. Düzgün rejim çözümleri sayısal olarak bulunmuştur. Frekans tepki ilişkisi gösterilmiştir. Bir moddan diğer moda enerji transferi olduğu gösterilmiştir. Değişik kiriş ve titreşim parametre değerleri için sıçrama hadisesi gösterilmiştir.

Son olarak, temel parametrik rezonans durumu içrezonansın olmadığı ve olduğu durumlara göre ele alınmıştır. İçrezonansın olduğu durum için 3:1 iç rezonans incelenmiştir. Genlik ve faz modülasyon denklemleri gösterilmiştir. Genel bir yaklaşık analitik çözüm üretilmiştir. Düzgün rejim çözümleri ve sistem stabilitesi tartışılmıştır. Bu bölümde, bulunan çözüm algoritması akışkan taşıyan elastik ve viskoelastik boruların nonlineer titreşimleri problemine uygulanmıştır. Akışkan hızının sabit olduğu durum analiz edilmiştir. Akışkan taşıyan boruya ait tabii frekans değerleri bulunmuştur. Akışkan hızına karşılık gelen tabii frekans değerleri değişik boru parametreleri için grafiklerle gösterilmiştir. Frekans tepki ilişkisi değişik boru ve zorlama parametreleri için gösterilmiştir. Kararlı ve kararsız bölgeler grafiksel olarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Lineer Olmayan Titreşimler, Sürekli Ortam, Baskın Rezonans, İç Rezonans, Temel Parametrik Rezonans, Perturbasyon Metodu, Eksenel Hareketli Kiriş, Viskoelastik Kiriş, Akışkan Taşıyan Boru

ABSTRACT

A general model of continuous system with an arbitrary cubic nonlinearity covering many practical vibration problems has been proposed. Linear parts of the equation are also represented by arbitrary operators. Analytical solution is considered by using the method of multiple scales (a perturbation method).

Firstly, the amplitude and phase modulation equations are found for the case of primary resonances of the external excitation of the model. The coefficients of the amplitude and phase modulation equations are calculated in their most general form and an approximate analytical solution is considered. Steady state solutions and their stability are discussed in the general sense. Finally the algorithm of the general model is applied to two special problems. These problems are chosen from axially moving continua and they are examples of gyroscopic systems. First model is axially moving Euler Bernoulli beam problem and the second model is axially moving viscoelastic beam problem. Natural frequencies of the systems are found for different beam parameters and different velocity values. Frequency-amplitude graphs are drawn for different beam and excitation parameters. Stable and unstable regions are shown.

Secondly, three-to-one internal resonances between natural frequencies are obtained. The amplitude and phase modulation equations are presented. Approximate analytical general solution is derived by using the coefficients of amplitude and phase modulation equations. Steady state solutions and their stability are discussed. Solution algorithm is applied to nonlinear vibration model of an axially moving Euler Bernoulli beam and axially moving viscoelastic beam. Constant axial velocity case of beams is analyzed. Steady state solutions and their stability are determined numerically. Frequency response relations are obtained. Energy transfer of one mode to another via a three-to-one internal resonance is observed. Jump phenomena of the system are shown graphically by choosing different vibration and beam parameter values.

Finally principal parametric resonances are obtained with/without internal resonances. For the case of internal resonances, three to one internal resonances are obtained. The amplitude and phase modulation equations are presented. Approximate analytical solution is derived. Steady state solutions and their stability are discussed. Solution algorithm is applied to nonlinear vibration model of an elastic and viscoelastic pipes conveying fluid. Constant velocity case of fluid is analyzed. Natural frequencies of the pipe conveying fluid are obtained. The graphs of natural frequencies versus fluid velocity are drawn for different pipe parameters. Frequency-response relations are also obtained for different pipe and excitation parameters. Stable and unstable regions are also plotted.

Keywords : Nonlinear Vibrations, Continuous Media, Primary Resonances, Internal Resonances, Principal Parametric Resonances, Perturbation Methods, Axially Moving Beam, Viscoelastic Beam, Pipe Conveying Fluid

1.GİRİŞ

1.1.Genel Bilgiler Ve Yapılmış Çalışmalar

Mühendislik kavramının (kelimesinin) sözlük karşılığı “*Yol, köprü, yapı, makine, gemi ve uçak yapımı vb. ile maden, su ve elektrik gibi bayındırlık ve zanaatla ilgili teknik çalışmalardan birini konu edinen meslek.*” olarak ifade edilmiştir (Türkçe Sözlük, 2005). Mühendis kelimesi ise “*Mühendislik mesleğinden olan kimse.*” olarak tanımlanmıştır. Bu anlamları itibariyle mühendislik, insanlık tarihine paralel olarak gelişmiş bir kavramdır, meslektir. Bu mesleğin gelişim sürecinde; gözlemler ve araştırmalar, önermeler, teoriler, deneyler, deneme-yanılma süreçleri vardır. Bütün bu süreçlerin içinde mühendis, tanımlamak ve etüd etmek istediği konuyu ve/veya problemi -ister deneysel, ister teorik olsun- bir matematik model kurarak ele alır. Ele aldığı sistemin davranışını yapısını bir matematiksel kurala/modele bağlamak ister.

Ele alınan bir sistem için yapılan bir modelleme o sistemin davranışı hakkında bir sonucu (çözümü) beraberinde getirir ve böylelikle bir mühendislik problemi incelenmiş, anlaşılabilir olur. Sonrasında ise sonuçları değerlendirme süreci başlar. Bu sonuçlar yukarıda da bahsedildiği gibi, herhangi bir mühendislik dalına ait var olan bir problemin çözümü veya yeni bir sistem/buluş olabilir.

Akademik mühendislik açısından ele alırsak, mühendis -yine- çalıştığı alanda (konuda) bir mühendislik problemini ele alır, bu problemi matematik ve fizik bilimleri ışığında modeller ve bir çözüm üretmeye çalışır. Ardından ortaya bir sonuç koyar ve bu sonuçların tartışılması süreci başlar. Burada ele alınan sistem için ortaya konulan modelin, sistemi tanımlama ve analiz etmede uygun olduğu görülürse, ortaya atılan çözüm algoritması o model yapısı için geçerli olur.

Çalışılan konuya ait olabildiğince çok problemi (modeli) kapsayabilecek genel bir modelin ve o modele ait bir çözüm algoritmasının varlığı ilgi çekici olabilir. Çünkü bir konuda farklı durumlar için ayrı matematik model kurup her biri için ayrı bir çözüm üretmek yerine, o konuya ait birçok problemi kapsayan genel bir model önermek ve bu modele ait bir genel çözüm algoritması üretmek uygulayıcıya büyük kolaylıklar sağlar. Genel bir çözüm algoritması oluşturulması üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Mühendislik problemleri içinde önemli bir yer tutan sürekli ortam titreşimleri konusunda bir genel model ve genel çözüm algoritması ilk olarak Pakdemirli (1994) tarafından ortaya atılmıştır.

Genel çözüm algoritması üzerine, bahsedilen yayından sonra da birçok çalışma yapılmıştır. Bölüm 2’de de ele alınacağı üzere doğrusal olmayan (bundan sonra “nonlinear” olarak ifade edilecektir) titreşim modellemelerinde gerek ikinci derece gerekse üçüncü derece nonlinear terimlerle (“kuadratik nonlinear” ve “kübik nonlinear” olarak ifade edilecektir) oldukça sık karşılaşılmaktadır. Bahsedildiği üzere, kısmi türevli (kısmi diferansiyel) denklemlerde nonlineariteleri genel yapıda (formda) ele alan bir operatör yazımı (“operatör notasyonu” olarak ifade edilecektir) ilk defa Pakdemirli (1994) tarafından ortaya konulmuştur. Bu operatör notasyonunun geliştirilmesindeki amaç kuadratik ve kübik nonlinearliğe sahip genel bir sistem için direkt perturbasyon yöntemi ile diskritizasyon perturbasyon yöntemlerinin karşılaştırılmasıdır. Bahsedilen iki yöntem arasındaki bir karşılaştırma, ilk olarak, özel bir problem alınarak yapılmıştır. Özel problem olarak nonlinear valf problemi incelenmiştir. Burada sonlu mod analizi yapılmış ve genel çözüm algoritması zorlamasız sönümlü bir sisteme uygulanmıştır (Nayfeh ve diğ. 1992). Pakdemirli ve Boyacı, perturbasyon yöntemlerinin karşılaştırmasını, genel denkleme zorlama terimini de ekleyip, sonsuz mod için yapmışlardır (Pakdemirli ve Boyacı, 1995). Ardından , kuadratik ve kübik nonlineariteye sahip, lineer sönümlü ve zorlanmış genel bir model üzerinde baskın rezonansları, alt ve üst harmonik rezonansları ve birleşik (kombinasyon) tip rezonansları incelemiştir (Pakdemirli ve Boyacı,1996). Bir başka çalışmada ise lineer bir genel model için diskritizasyon ve direkt perturbasyon yöntemlerini karşılaştırmışlardır (Pakdemirli ve Boyacı,1997). Daha sonra, iki ayrı genel modeli ele alarak çok zaman ölçekli perturbasyon metodunun iki versiyonunu karşılaştırmışlardır. Burada ilk olarak kübik, ikinci olarak ta kuadratik ve kübik nonlinearite içeren genel modeller ele alınmıştır. Ardından kübik nonlinear genel model için, basit mesnetli, nonlinear elastik bir zemine oturmuş kiriş titreşimi uygulaması, kuadratik ve kübik genel model için ise nonlinear sicim titreşim uygulaması ele alınmış ve genel çözüm algoritmaları bahsedilen sistemlere uygulanmıştır (Boyacı ve Pakdemirli, 1997). Pakdemirli (2001) tarafından, etkileşimli denklemler için bir genel model ortaya atılmıştır. Uygulama olarak da nonlinear kablo titreşim problemi ele alınmıştır. Bu çalışmanın ardından Pakdemirli (2001), aynı genel hareket denklemini bu sefer keyfi iç rezonansları ele alarak incelenmiş ve bir çözüm algoritmasını ortaya koymuştur. Pakdemirli (2003), yüksek mertebelerde tekil nonlineariteye sahip genel bir model için çok zaman ölçekli metodların bir karşılaştırmasını yapmıştır. Pakdemirli ve Özkaya (2003), genel kübik nonlinearliğe sahip bir sistem için önce 3:1 iç rezonansları incelemişler ve uygulama problemi olarak nonlinear elastik temele oturmuş Euler-Bernoulli kirişinin titreşimlerini ele almışlardır. Daha sonra ise keyfi kuadratik nonlinear sistemler için 2:1 iç rezonansları incelemiştir (Pakdemirli ve Özkaya, 2004). Pakdemirli tarafından ortaya atılan genel operatör notasyonu başka araştırmacılar tarafından da kullanılmıştır. Bu çalışmalara örnek olan iki çalışma Nayfeh (1998) ve Lacabonara (1999) tarafından yapılmıştır.

1.2.Bu Çalışmadaki Yaklaşım

Bu çalışmada, sürekli ortamların nonlinear titreşimlerine ait birçok uygulamayı içeren genel bir model ortaya atılmıştır. Daha önce yapılmış çalışmalardan farklı olarak, kübik nonlinear sistemlerde uygulamak üzere, mekâna bağlı türevleri içeren keyfi lineer ve kübik operatörlerin yanında hem zamana hem mekâna bağlı türevleri içeren keyfi lineer ve kübik operatörler ilk defa eklenmiştir. Özellikle hem zaman hem mekâna bağlı operatörlerin olması, diğer nonlinear titreşim problemlerinin yanında çok geniş bir uygulama alanı olan aksenal hareketli sürekli ortamlara ait nonlinear titreşimleri de incelemeyi sağlar. Ortaya konulan bu genel modelin sürekli ortamlar ile ilgili birçok uygulaması mevcuttur. Bu uygulamalar hakkında bazı atıflar Bölüm 2.4'te verilmiştir. Bu çalışmada, bulunan genel çözüm algoritmasının, değişik nonlinear titreşim problemlerine uygulanması amaçlandığından, her biri teknolojik öneme haiz dört ayrı uygulama modeli ele alınmıştır. Bunlar,

- Aksenal hareketli Euler-Bernoulli kirişinin nonlinear titreşimleri,
- Aksenal hareketli viskoelastik kirişin nonlinear titreşimleri,
- Akışkan taşıyan elastik boruların nonlinear titreşimleri
- Akışkan taşıyan viskoelastik boruların nonlinear titreşimleri

modelleridir.

Genel operatör notasyonu ile ifade edilen genel modelde ilk olarak ilgili operatöre dış zorlama terimi yazılmış ve bir Perturbasyon Yöntemi olan Çok Zaman Ölçekli Metod uygulanmıştır (Nayfeh,1981). Bundan sonra analiz edilecek rezonans tipine göre denklemin genel çözümleri yapılmıştır. Modelin bu halinde göz önüne alınan rezonans durumları, dış zorlamaya ait baskın rezonans ve 3:1 iç rezonans olma durumlarıdır. Her iki durum için genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilmiş, denklemlerin içerdiği katsayılar genel yapıda ifade edilmiştir. Yine genel yapıda elde edilen ifadelerle sistem kararlılığı (stabilitesi) tartışılmıştır. Her iki rezonans durumu için birer yaklaşık çözüm üretilmiştir.

Baskın rezonansa ait genel çözüm algoritması hem aksenal hareketli Euler-Bernoulli kirişi, hem de aksenal hareketli viskoelastik kiriş problemlerine uygulanmıştır. Bu problemlere ait tabii (doğal) frekanslar ve her bir problemdeki parametrelerin çeşitli değerleri için frekans tepki grafikleri, sayısal hesaplama yöntemleri kullanılarak bilgisayar programları yardımıyla elde

edilmiştir. Sistem kararlılığı analitik ve sayısal olarak ele alınmıştır. Yine Euler-Bernoulli kirişi ve viskoelastik kiriş için 3:1 iç rezonans analizleri yapılmıştır. Burada da sistemlerin kararlılıkları hem analitik hem de sayısal anlamda ortaya konulmuştur.

Genel model de ikinci olarak temel parametrik rezonans ile bu rezonansa ait iç rezonansın olmadığı durum ve 3:1 iç rezonans olduğu durumlar ele alınmıştır. Her bir rezonans koşulu için, Çok Zaman Ölçekli Metod kullanılarak birer yaklaşık çözüm üretilmiştir. Genlik ve faz modülasyon denklemleri ve bu denklemlere ait katsayılar yine genel yapıda bulunmuştur. Bu bölümde uygulama problemleri olarak akışkan taşıyan elastik ve viskoelastik borulara ait nonlineer titreşim modelleri ele alınmıştır. Çözülebilirlik şartları bulunmuş ve sistem kararlılıkları incelenmiştir. Temel parametrik rezonansa ait sayısal sonuçlar bilgisayar programları yardımıyla ortaya konulmuştur.

Son olarak ele alınan konularla ilgili değerlendirmeler yapılmış ve sonuçlar tartışılmıştır.

2.TİTREŞİMLER

Bu bölümde titreşimler ile ilgili olarak temel bilgiler verilecek, tarihsel gelişimi bilim tarihi açısından ele alınacak ve titreşim yapan sistemlerin modellenmesi konusuna giriş yapılacaktır. Ardından bu tez çalışmasında ele alınan uygulama problemleri incelenecektir.

2.1.Titreşim Hareketinin Tanımı Ve Sınıflandırılması

Bir sistemi tanımlayan özellikler zaman bağılı olarak değişiyorsa bu tip sistemlere dinamik sistemler denir (Ercan, 1992). Bir titreşim sistemi de dinamik sistemler ana başlığı altında incelenir. Titreşim, bir başka ifadeyle salınım, belirli bir zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket olarak tanımlanır (periyodik hareket). Diğer bir tanıma göre ise titreşimler, durum büyüklüklerinin zamanla dalgalanmalarıdır. Bu bağlamda, günlerin 24 saatlik, haftaların 7 günlük, yılların 12 aylık ritimle dalgalanması örnek olarak verilebilir. Bir basit sarkaçın düşeyle yaptığı açı daima kendini tekrar edecek şekilde değişir. Durum büyüklüğü olarak θ açısı gözönüne alınırsa salınım hareketi bu açının zamanla değişiminini ifade eden fonksiyon $\theta(t)$ ile gösterilir. Tabiattan örnek vermek gerekirse bir kuşun kanat çırpmaları veya deprem sarsıntısı titreşim hadisesine örneklerdir. Deprem bir yapı üzerine etki kuvvetleri de o yapıda titreşimlere sebep olur. Daha çarpıcı bir örnek insanoğlu üzerinden verilirse; kalbin bir ritimle çarpması bir titreşim hareketidir ve yaşamın devamı sağlanır, kulak zarının titreşmesi ile duyma olayı gerçekleşir, gırtlaktaki ses tellerinin titreşmesi ile konuşma hadisesi meydana gelir, görmeyi sağlayan ışık dalgaları da titreşim hareketi yaparlar. Bu örnekler daha da çoğaltılabilir.

Titreşim hareketi, içerdiği birçok özelliğin ele alınmasına göre çeşitli sınıflama gruplarına ayrılabilir. Aşağıda temel bazı sınıflamalar sıralanmıştır (Rao, 2004) :

Serbest titreşimler ve zorlanmış titreşimler: Sistem, verilen bir ilk deplasman ile titreşirse, başka bir deyişle bir dış kuvvetin etkisi olmazsa buna serbest titreşimli sistem denir. Ancak sistem eğer bir dış zorlama kuvvetiyle titreşiyorsa bu sistemlere zorlanmış titreşimli sistem adı verilir.

Sönümlü titreşimler ve sönümsüz titreşimler: Titreşim süresince sistemde herhangi bir enerji kaybı meydana gelmiyorsa bu tarz titreşime sahip sistemlere sönümsüz titreşimli sistemler denir. Eğer titreşim esnasında sürtünme vb. etkilerle bir enerji kaybı oluyorsa böyle sistemlere sönümlü titreşimli sistemler denir. Sönüm, titreşim frekansını etkileyen bir parametredir. Ancak sönüm küçükse tabii frekansa etkisi çok azdır ve tabii frekans sönümsüz sistemdeki gibi değerlendirilebilir. Burada rezonans kavramından bahsetmekte fayda vardır. Rezonans, en

genel tanımıyla, sistemin tabii frekansının sisteme etkiyen zorlama kuvvetinin frekansına çok yakın olmasıdır. Böylelikle sistemin salınım genlikleri teorik olarak sonsuza gider, yani fiziksel anlamıyla titreşen sistem çok büyük genliklerde salınımlar yaparak kararlılığını (stabilitesini) kaybeder. Bahsedilen rezonans genliklerini sınırlamada sönümün büyük önemi vardır.

Lineer titreşimler ve nonlinear titreşimler: Kütle, yay ve sönüm gibi titreşen sistemin temel bileşenleri lineer özelliğe sahipse sistem lineer titreşim sistemi adını alır. Bu bileşenlerden herhangi biri bile nonlinear özelliklere sahipse sistem nonlinear titreşim sistemi adını alır. Direngenlik veya sönüm, konumun veya hızın nonlinear fonksiyonları olabilirler. Burada, diferansiyel denklemler ile gösterilen hareket denklemlerinin yapısına göre lineer veya nonlinear titreşim sınıflaması yapılır. Nonlinearlık yapısal, geometrik, ataletten, kuvvetten veya sürtünmeden kaynaklı olabilir. Bunlara örnek vermek gerekirse, yapısal nonlinearlık, gerilmelerin, şekil değiştirmelerin nonlinear fonksiyonu olması ile meydana gelebilir. Geometrik nonlinearlık, birim şekil değiştirme ile deplasman arasındaki nonlinear ilişkiden kaynaklanabilir. Ataletten kaynaklı nonlinearlık ise sistemde, örneğin, konsantre veya yayılı kütle bulunmasıyla meydana gelir. Nonlinear kuvvetler, manyetik ve elektriksel kuvvetlerle meydana gelir. Sürtünme kuvvetinin deplasmanın nonlinear bir fonksiyonu olmasıyla da sürtünme kaynaklı nonlinearlık oluşur (Nayfeh,2000), (Nayfeh ve Pai,2004), (Burton,1994).

Deterministik (belirlenimci) titreşimler ve rastgele (gelişigüzel) titreşimler: Titreşim sistemine ait tahrik(ler)in herhangi andaki değer(ler)ini biliniyorsa bu tip titreşimlere deterministik titreşimler denir. Eğer bu değer(ler) bilinmiyorsa bu tip titreşimlere rastgele titreşimler denir. Rastgele titreşimler deterministik olmayan (nondeterministik) titreşimlerdir. Bu tip titreşimlere örnek, rüzgar etkileriyle veya deprem dalgalarıyla oluşan titreşimler verilebilir. Bu titreşim tipinde stokastik analiz yöntemleri devreye girer.

Magnus (1969), titreşimleri meydana geliş tarzına göre sınıflamayı uygun bulmuştur buna göre titreşimler,

- serbest titreşimler,
- kendini besleyen titreşimler,
- parametre tahrikli titreşimler,
- zorlanmış titreşimler
- bağlı titreşimler

olarak sınıflandırılabilir. Burada serbest titreşimler ve kendini besleyen titreşimler, otonom sistemler; parametre tahrikli ve zorlanmış titreşimler ise heteronom sistemler adı altında yer alır.

Bahsedilen titreşim tiplerinin mutlaka birbirinden bağımsız oluşması düşünülemez. Örneğin, bir sistem, hem zorlanmış hem de kendini besleyen bir titreşim özelliği gösterebilir. Serbest titreşimlerde, titreşimin devamı için sisteme bir enerji vermek gerekmez, ancak kendini besleyen titreşimlerde, titreşimin devamı için sistemin bir kaynaktan enerji alması gerekir. Titreşimin devamı için sistemin bir enerji kaynağı mevcuttur. Kendini besleyen titreşimlere ait diferansiyel denklem (hareket denklemi) nonlineerdir. Serbest titreşimlere ait diferansiyel denklem homojendir. Zorlanmış titreşimlere ait diferansiyel denklemlerde homojenliği bozan ve bağımsız değişken olan zamana bağlı bir terim tek başına bulunmaktadır. Parametre tahrikli titreşimlere ait diferansiyel denklemlerde ise yine bağımsız değişken olan zamana bağlı periyodik katsayı terimleri mevcuttur.

2.2. Titreşim Konusunun Tarihsel Gelişimi

Bir düşünceye göre insanların titreşimler konusu ile ilgilenmesi ve anlamaya çalışması ilk olarak müzik aletlerinin keşfiyle başlar (Rao, 2004). Titreşim ve ses prensipleriyle çalışan müzik aletlerinin yapımı M.Ö. 4000'li yıllara, Eski Mısır'a dayanır. Titreşim konusu genel olarak ses ve titreşim başlığı altında ele alınır (Sound and Vibration). Özellikle titreşim ve gürültü problemleri modern çağda, teknolojinin gelişimine paralel olarak ortaya çıkan ve insanların çözmeye çalıştığı problemlerdir. Günümüzde -biliyoruz ki- müzik çalgı aletlerinin çalışma prensipleri titreşim teorileri ile açıklanabilir. Titreşim problemlerinde önemli bir yere sahip olan sicim titreşimleri (vibrations of string) konusunun kaynağı, araştırmacılara göre M.Ö. 3000'li yıllarda ortaya çıktığı düşünülen telli çalgılardır (örn. arp). Elbette bunlar titreşim konusuyla ilgili bilimsel çalışma vasfı taşımaz ancak konunun kökeni hakkında ilginç bilgiler verir. Ünlü filozof ve matematikçi Pisagor (M.Ö. 582–507) müzikteki ses konusunu bilimsel temele oturtmak için çalışmalar yapmış ilk bilim adamıdır. *Monochord* adını verdiği ve titreşen sicim prensibiyle çalışan basit bir deney düzeneği (müzik aleti) oluşturmuştur. Aynı türde ancak boyları farklı sicimleri ayrı ayrı olarak uçlarından bağlamış ve bunları titreştirerek ses ve oktav farklılıklarını ortaya koymuştur. Çinli Zhang Heng M.S. 132 yılında deprem ölçümü için ilk sismografi yapmıştır. Bu sismograf sarkaç vb. mekanizmaları içeren, yine titreşim prensipleri ışığında ölçüm sonuçları veren bir alettir. Modern deneysel bilimin öncüsü kabul edilen Galileo Galilei (1564-1642) basit sarkaç deneyleri yapmıştır. 1638 basımlı "*Discourses Concerning Two New Sciences*" isimli yayınında titreşimler konusunu ele almıştır. Sarkaç ve sicim titreşimlerindeki parametrelerin etkilerini tartışmıştır. Sarkaç salınım periyodunun, sarkaç uzunluğunun karekökü ile orantılı olduğunu ortaya koymuştur. Saatçiliğin temelleri sarkaçlı saatler ile başlamıştır. Bunun altında ise Huygens'in çalışmaları yatmaktadır. Christian Huygens (1629-1695) sarkaç salınım periyodunun sarkaç uzunluğuna bağlı olduğunu ve kütlede bağımsız olduğunu

$T_s = 2\pi(\ell/g)^{1/2}$ ifadesini ortaya atarak göstermiştir. Akustiğin babası olarak adlandırılan Fransız matematikçi Marin Mersenne (1588–1648) Galileo'dan iki yıl önce titreşen sicimlerle ilgili kuralları ortaya koymuştur. Mersenne, 1636 basımlı "*Harmonicorum Liber*" isimli yayınında sicim titreşimlerini ele almıştır. Görünen o ki Mersenne, çalışmalarının sonuçlarını Galileo'dan iki yıl önce yayınlamıştır. Ancak gerçek şudur ki Galileo, çalışmalarını çok daha önceden yapmasına karşın 1638'e kadar yayınlama imkanı bulamamıştır. Mersenne ve Pierre Gassendi (1592-1655) tarafından sesin hava içindeki hızı belirlenmiştir. Albrecht Dürer (1471-1528), sesin fiziği üzerine çalışmalar yapmıştır. Athanasius Kircher (1602-1680), kuramsal ve deneysel anlamda müzik ve ses üzerine çalışmalar yapmıştır. Sesin, engellerin değişik konumları karşısında oluşturduğu yankı veya yaygarayı incelemiştir. Unutmamak gerekir ki bu çalışmalar yapılırken, sesin girişimi, sönümlenmesi vb. konular henüz bilinmiyordu (Tez, 2008). Robert Hooke (1635–1703) titreşen sicimlerle ilgili deneysel çalışmalar yapmıştır. "Akustik" kelimesini literatürde ilk defa kullanan kişi ise yine titreşen sicimlere ait çalışmalar yapan Joseph Sauveur'dur (1653–1716). Sauveur ve John Vallis (1616–1703) aynı zamanlarda birbirlerinden bağımsız olarak mod yapıları kavramını ele almışlardır. Titreşen cisimlere ait hareket denklemleri çıkarılırken ele alınan en önemli kanun bilindiği üzere Newton'un 2. kanunudur. Bu noktada Isaac Newton'un (1642-1727), evrensel çekim kanununu ve harekete ait 3 önemli kanunu ortaya koyduğu "*Naturalis Principia Mathematica*" adlı, 1686 tarihli, çok önemli çalışmasını anmak gerekir. Titreşen sicimlere ait teorik çalışmalar ilk olarak Brook Taylor (1685–1731) tarafından yapılmıştır. Taylor'un teorik olarak bulduğu, titreşime ait tabii frekans değerleri Galileo ve Mersenne'in deneysel sonuçlarıyla uyumludur. Daniel Bernoulli (1700–1782), Jean D'Alembert (1717–1783) ve Leonard Euler (1707–1783), Taylor'un çalışmasını, hareket denkleminde kısmi türev terimleri koyarak geliştirmişlerdir. D'Alembert, günümüzde "Dalga Denklemi" olarak adlandırılan, sicime ait diferansiyel hareket denklemini modelleyen ilk kişidir. Joseph L. Lagrange (1736–1813) titreşen sicime ait analitik çözümleri ortaya koymuştur. Değişik şekillerde mesnetlenmiş ince kırıslara ait titreşimlerin modellenmesi ilk olarak Euler (1744) ve Bernoulli (1751) tarafından yapılmıştır. Bu sebeple bu teoriye Euler – Bernoulli kiriş teorisi (veya ince kiriş teorisi) denilmektedir (Bu tez çalışmasında ele alınan uygulama problemlerinden biri de eksenel hareketli Euler–Bernoulli kirişindeki nonlinear titreşimlerdir). Charles Coulomb 1784'te burulma titreşimlerini hem deneysel hem de teorik olarak incelemiştir. E.F.F. Chladni (1756–1824), 1802'de, titreşen plaklara ait mod yapılarını deneysel olarak elde etmiştir. Fransız akademisi 1809'da Chladni'yi deneysel çalışmalarını sergilemek üzere davet etmiştir. Buraya katılan Napoleon Bonaparte, akademiye, plakların titreşimlerine ait tatmin edici ilk matematik teorisini ortaya atacak kişiye verilmek üzere başta bulunmuştur. 1811'de yapılan yarışmaya katılan Sophie Germain'in ortaya koyduğu hareket denklemi (diferansiyel denklem) jüride bulunan Lagrange tarafından hatalı bulunmuştur. Ardından 1813'te tekrarlanan yarışmaya bir kere daha katılan Germain diferansiyel denklemdeki hataları düzeltmiş ama jüriyi yine ikna

edememiştir. Sebebi ise jürinin denklemi fiziksel olarak anlamlı bulmamasıdır. Nihayet 1815'te Germain yeni yarışmaya katılarak ödülü kazanmıştır ancak jüri yine tam olarak ikna olamamıştır. Bunun sebebi, daha sonra anlaşıldığına göre, diferansiyel denklemin doğru ancak sınır şartlarının hatalı olmasıdır. Titreşen plaklara ait doğru (fiziksel olarak anlamlı) sınır şartlarını 1850 yılında G.R. Kirchoff (1824–1887) bulmuştur. Dikdörtgen membrana ait titreşim problemini ilk olarak Simeon Poisson (1781–1840) çözmüştür. Dairesel membrana ait titreşim konusu ile de ilk olarak R.F.A. Clebsch (1833–1872) çalışmıştır. Rayleigh, 1877 yılında ses ve titreşim üzerine teorilerini içeren bir kitap yayınlamıştır (*Theory of Sound*). İsmiyle anılan yöntemle, Rayleigh, korunumlu sistemlere ait titreşim yaklaşık tabii frekans değerlerini enerjinin korunumu ilkesini kullanarak bulmuştur. Günümüze yaklaştıkça, Frahm, Stodola, De Laval, Timoschenko ve Mindlin gibi bilim adamları titreşimlere ait önemli çalışmalara imza atmışlardır. Frahm burulma titreşimi ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Titreşen ana gövdeye ikinci bir kütle yay sistemi ekleyerek oluşturulan dinamik titreşim yutucusu, ilk defa 1909 yılında Frahm tarafından ortaya konulmuştur. Aurel Stodola (1859–1943) kiriş plak ve membranlara ait titreşim çalışmaları yapmıştır. C.G.P. De Laval (1845–1913) özellikle dönen disklerle ilgili titreşim problemine pratik çözümler üretmiştir. Stephen P. Timoschenko (1878–1972), kalın kiriş veya daha sık kullanılan adıyla Timoschenko kirişi teorisini ortaya koymuş ve titreşimleri bu kiriş modeli üzerinden ele almıştır.

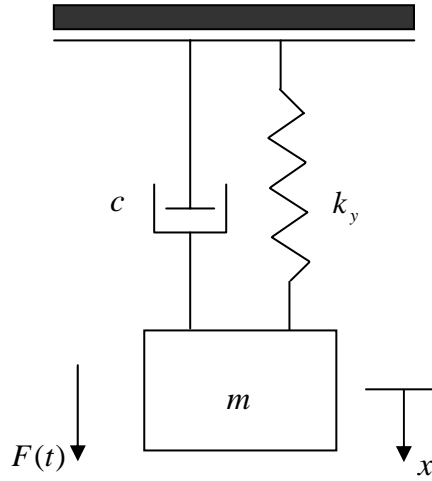
Titreşim konusunda lineer modellemeler genel anlamda titreşen sistem hakkında bilgi verse de tabiata en yakın modelleme biçimi nonlinear modellemelerdir. Herhangi bir titreşim sistemi, hakkında fikir sahibi olmak için, çeşitli kabuller altında lineerleştirilebilir. Hâlbuki bir sistemdeki bütün etkenleri göz önüne almak istersek modeli nonlinear hale getirmemiz gerekir. Lineerleştirme bir bakıma idealleştirmez. Hâlbuki sistemlerin doğadaki davranışları büyük çoğunlukla nonlineardir. Nonlinear titreşimlere ait matematiksel teoriyi ilk defa J.H.Poincare ve Lyapunov 19.Y.Y. sonlarında ortaya atmışlardır. Poincare 1892 yılında yaklaşık çözümler için Perturbasyon Metodunu geliştirmiştir. Lyapunov ise dinamik sistemlerin stabilitesi ile ilgili temelleri atmıştır. Duffing, van der Pol, Minorsky ve Stoker gibi bilim adamları nonlinear titreşimler üzerine önemli çalışmalar yapmışlar ve mühendislik problemlerini ele almışlardır. Nayfeh ise perturbasyon teorisine ait modern metodları geliştirmiştir.

Deprem rüzgâr vb. etkilerle gelişigüzel karakteristik gösteren titreşim problemleri (random vibrations) üzerine de birçok çalışma yapılmaktadır. Bu çalışmaları yapan bazı bilim adamları olarak Einstein, Taylor, Wiener, Khinchin, Lin, Rice, Crandall, Mark ve Robson sayılabilir.

Tarihsel gelişiminden de anlaşılacağı üzere titreşimler öteden beri insanoğlunun ilgisini çekmiştir. Hayatın her noktasında karşımıza çıkan bu fiziksel olayları algılayabilmek gerekliliği ve merakı, bilim adamlarını bu konu üzerinde birçok çalışma yapmaya teşvik etmiştir.

2.3. Titreşim Hareketinin Matematiksel Modellenmesi

Modelleme bir sisteme ait fiziksel özelliklerin matematik diliyle ifade edilmesidir. Titreşimler konusunu sınıflandırırken ele alınan önemli başlıklardan biri sistemin lineer veya nonlineer olması idi. Lineer sistemlerin anlaşılması, modellenmesi ve analizi nonlineer sistemlere göre daha basittir. Çünkü bu tarz titreşimler süperpozisyon prensibine uygun, matematiksel olarak çözümü (analitik ve sayısal) mümkün sistemlerdir. Hâlbuki nonlineer bir titreşim modelinde süperpozisyon ilkesi uygulanamaz. Matematiksel olarak tam çözüm üretilmesi de çok zordur. Nonlineerlik yapısına göre sistem ya sayısal olarak çözülür ya da yaklaşık yöntemlerle ele alınır.



Şekil 2.1. Zorlama kuvveti etkisinde kütle-sönüm- yay sistemi

Titreşim hareketi en temel olarak kütle, yay ve sönüm elemanlarıyla modellenir (Şekil 2.1). Sistemde enerji, sürekli olarak, potansiyel enerjiden kinetik enerjiye, kinetik enerjiden potansiyel enerjiye dönüşüm halindedir. Sönüm elemanı ise sistemdeki enerjinin kaybolmasıyla (sönümlenmesiyle) alâkalıdır. Bu kayıp, zamanla, titreşim hareketini sonlandıracağından, titreşim hareketinin devamı ancak dışarıdan gelecek bir kuvvetle mümkün olacaktır.

Kütlenin bir denge noktasına göre salınım hareketi periyodik bir harekettir ve kendini tekrar eder. (Matematikçi J.B.J.Fourier (1768–1830), titreşim teorisinde önemli bir yeri olan periyodik

hareketin sinüs ve kosinüs serileriyle ifade edilebileceğini göstermiştir.) Sistemdeki yay, denge noktasından uzaklaşan kütle için geri çağırıcı kuvvet olarak; sönüm ise kütlenin her seferinde denge noktasına mesafesini daha da azaltıcı kuvvet olarak belirir. Kütle, ağırlık kuvvetini; yay, geri çağırıcı kuvveti; sönüm elemanı ise sönümleme kuvvetini temsil eder. Kuvvetlerin dengesi yazıldığında titreşime ait temel hareket denklemi ortaya çıkar,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_y x = 0 \quad (2.1)$$

m , kütle (kg), c , sönüm katsayısı (N.sn/m), k_y , yay sabitidir (N/m). Bu modele genel gösterimiyle zamana bağlı bir fonksiyon olan $F(t)$ gibi dışarıdan bir kuvvet etki ettirilirse, bir serbestlik dereceli titreşimi modelleyen hareket denklemi en genel halini alır,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_y x = F(t) \quad (2.2)$$

Denklem (2.2) titreşim hareketinin en temel matematik modelidir.

Serbestlik derecesi kavramı, bir sistemin, bütün parçalarının herhangi bir andaki konumunu tanımlayabilecek en az (minimum) sayıdaki bağımsız koordinat sayısı olarak tanımlanır. Örnek vermek gerekirse, bir kütle ile bir yaydan oluşan sistem veya basit sarkaç bir serbestlik dereceli sistemlerdir. İki kütle ve iki yayın seri bağlandığı sistem veya sarkaç-kütle-yay sistemi iki serbestlik dereceli sistemler olarak adlandırılır. Üçlü sarkaç ve burulma sistemi üç serbestlik dereceli sistemlere örnek verilebilir.

Yukarıda bahsi geçen sonlu sayıda serbestlik derecesine sahip sistemler ayrık sistemler (discrete systems) olarak adlandırılır. Buna karşın sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahip sistemlere sürekli sistemler (continuous systems) denir. Sürekli ortamların serbestlik derecesi sonsuzdur. Çünkü parçalara bölündüğünde her parçanın kendine ait bir bağımsız koordinatı vardır ve sürekli sistemler sonsuz sayıda parçaya ayrılabilir. Örneğin kirişler ele alınacak olursa, bir kiriş yapısına giden modelleme, kütle, yay ve/veya sönüm elemanlarının seri bağlanmasıyla olur. Burada her bir kütle-yay-sönüm sisteminin hareketi bir x_i koordinatıyla belirlenebilir. Kirişin sonsuz sayıda elemandan oluştuğu düşünülürse ($i = 1, 2, \dots, n; n = \infty$), kirişler sonsuz serbestlik dereceli olarak tanımlanır. Kiriş titreşimlerinde sonsuz tane mod (tabii frekans) vardır.

Denklem 2.1'de görüldüğü üzere ayrık sistemdeki titreşimlere ait hareket denklemi adi diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilir. Ancak sürekli sistem titreşimlerinde kısmi

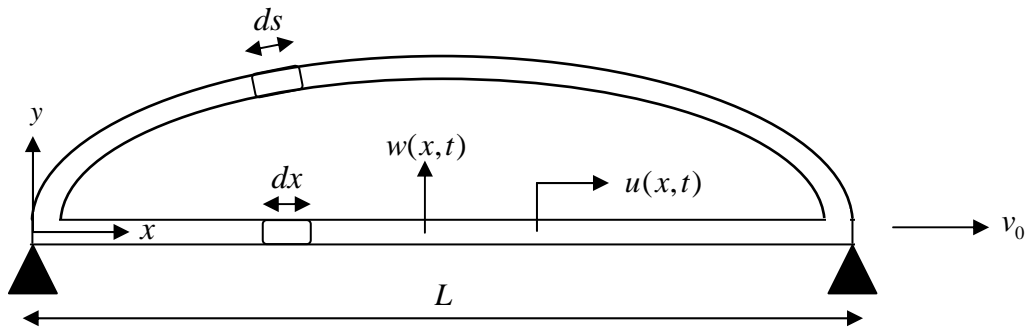
diferansiyel denklemler kullanılır. Bu tez çalışmasında ele alınan uygulama modelleri aksel hareketli sürekli ortam titreşimlerine ait modellerden seçilmiştir. Bölüm 2.4'te aksel hareketli sürekli ortam sistemlerinin kısmi diferansiyel denklem yapısındaki hareket denklemleri ele alınacaktır.

2.4.Eksenel Hareketli Sürekli Ortam Titreşimlerinin Modellenmesi

Bu bölümde, uygulama problemi olarak kullanılacak modeller incelenecektir. Hareket denklemleri çıkarılacak ve boyut analizi yapıp uygulama modelleri, genel modelde kullanılabilecek hale getirilecektir. Aksel hareketli sürekli ortamlarla ilgili olarak Wickert (1992), Wickert ve Mote (1988), Wickert ve Mote (1990), Mockenstrum ve diğ. (1994) yayınları incelenebilir.

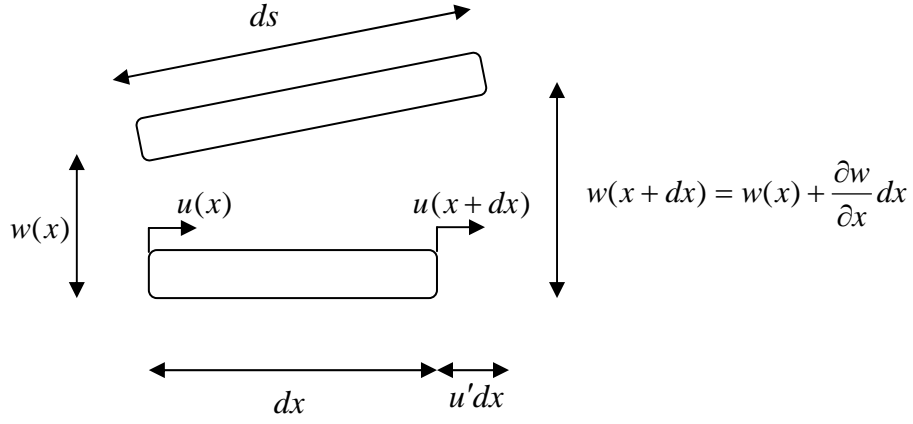
2.4.1.Eksenel Hareketli Euler-Bernoulli Kirişi

Şekil 2.2'de gösterilen aksel hareketli Euler-Bernoulli kirişi L uzunluğundadır ve basit-basit olarak mesnetlenmiştir. Kirişe ait parametreler sıralanacak olursa; Elastisite modülü E , atalet momenti I , aksel iç gerilme kuvveti $P(t)$, yoğunluğu ρ ve kesit alanı A olarak verilmiştir. Enine yer değiştirme $w(x,t)$, boyuna yer değiştirme ise $u(x,t)$ olarak tanımlanmıştır. Kiriş v_0 sabit hızıyla hareket etmektedir.



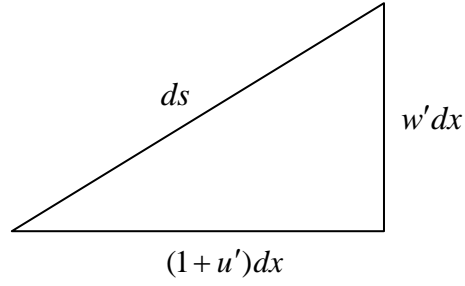
Şekil 2.2. Aksel hareketli kiriş

Denge konumundaki (hareketsiz) kiriş üzerinden bir dx diferansiyel parçacığı alınırsa, titreşim hareketi esnasında uzama etkisiyle ds elemanı elde edilir. Diferansiyel boyuttaki bu parçacık Şekil 2.3 'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Diferansiyel boyuttaki parçanın uzaması

Şekil 2.3'ten, Şekil 2.4'te gösterildiği gibi, hipotenüs uzunluğu ds , dik kenar uzunlukları $(1+u')dx$ ve $w'dx$ olan bir dik üçgen elde edilir ($(\prime) = \partial/\partial x$).



Şekil 2.4. Uzamalar için elde edilen dik üçgen

Pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$$ds^2 = (1+u')^2 dx^2 + w'^2 dx^2 \quad (2.3)$$

$$ds = dx \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} \quad (2.4)$$

elde edilir. Birim şekil değiştirme,

$$e_{xx} = \frac{ds - dx}{dx} \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir. ds eşitliği yerine yazılırsa,

$$e_{xx} = \frac{dx\sqrt{(1+u')^2 + w'^2} - dx}{dx} \quad (2.6)$$

elde edilir. Düzenlenirse,

$$e_{xx} + 1 = \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} \quad (2.7)$$

ifadesi bulunur. Kök ifadesi Taylor serisine açılırsa,

$$e_{xx} + 1 = 1 + u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \dots \quad (2.8)$$

bulunur. Boyuna yerdeğiştirme, enine yer değiştirmenin yanında ihmal edilebilir. Dolayısıyla

$\frac{u'^2}{2}$ terimi diğer terimlerin yanında çok küçük kalacağından ihmal edilir. Sonuç olarak,

$$e_{xx} = u' + \frac{w'^2}{2} \quad (2.9)$$

ifadesi elde edilir. Kirişi tarif eden eksen üzerinde alınan malzeme noktasının x yönünde du/dt , y yönünde ise dw/dt hızları mevcuttur. Bu hızları elde etmek için eksenel hareketli sürekli ortama ait malzeme türev operatörü (material derivative operator) kullanılır (Fung,1968, Mase,1970). Sürekli ortamın ele alınan herhangi bir özelliğine ait malzeme türevi, o özelliğin zamanla değişimi anlamına gelir. Malzeme türev operatörü,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.10)$$

şeklinde gösterilir.

Eksenel hareketli sürekli ortamın bir parçasığına ait hız ifadeleri, Denklem (2.10) ile verilen malzeme türev operatörü kullanılarak,

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} + v_0 u' \quad (2.11)$$

$$\frac{dw}{dt} = \dot{w} + v_0 w' \quad (2.12)$$

şeklinde elde edilir. Eksenel hareket analiz edildiğinden, yataydaki toplam hız aşağıdaki gibidir,

$$v_{yatay} = v_0 + \dot{u} + u'v_0 \quad (2.13)$$

Hamilton prensibini uygulamak için sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri yazılmalıdır. Sırasıyla,

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \{ [\dot{u} + v_0(1 + u')]^2 + (\dot{w} + v_0 w')^2 \} dx \quad (2.14)$$

$$U = \int_0^L (Pe_{xx} + \frac{1}{2} EAe_{xx}^2 + \frac{1}{2} EIw''^2) dx \quad (2.15)$$

kinetik ve potansiyel enerjileri yazılır.

1843 yılında Hamilton tarafından ortaya atılan prensibe göre -en genel anlamda- bir sistemin, herhangi $t_1 - t_2$ zaman aralığında kinetik enerjisinin varyasyonu ile etkiyen aktif kuvvetlerin yaptıkları sanal işlerin toplamının integrasyonu sıfırdır. Aktif kuvvetlerin korunumlu olmasıyla sanal işler, potansiyel fonksiyonun varyasyonu şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla yazılan kinetik ve potansiyel enerjilerin farkının belirli zaman dilimindeki integralinin varyasyonu sıfır olmalıdır. Burada kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı "Lagrangian (\mathcal{L})" olarak tanımlanmıştır (Gürgöze,1984).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (2.16)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (2.17)$$

Enerji eşitlikleri, Denklem (2.17)'de yerine yazılırsa,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{\rho A}{2} \{ [\dot{u} + v_0(1 + u')]^2 + (\dot{w} + v_0 w')^2 \} - (P e_{xx} + \frac{1}{2} E A e_{xx}^2 + \frac{1}{2} E I w''^2) \right\} dx dt = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. Varyasyon işlemi integral içine uygulanır,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A \{ [\dot{u} + v_0 + v_0 u'] [\delta \dot{u} + \delta v_0 + v_0 \delta u' + u' \delta v_0] + (\dot{w} + v_0 w') (\delta \dot{w} + v_0 \delta w' + w' \delta v_0) \} - (P(\delta u' + w' \delta w') + EA(u' + \frac{w'^2}{2})(\delta u' + w' \delta w') + EI w'' \delta w'') \right\} dx dt = 0 \quad (2.19)$$

Eksenel hareketli kiriş hızı sabit olduğundan, türevlerinin ve varyasyonununun sıfır olduğu gözönüne alınmalıdır. Bu aşamada kısmi integrasyon işlemleri uygulanır ve eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A (-\ddot{u} - 2v_0 \dot{u}' - v_0^2 u'') - EA(-u'' - w' w'') \right\} \delta u \, dx \, dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho A (-\ddot{w} - 2v_0 \dot{w}' - v_0^2 w'') - P(-w'') - EA(-u'' w' - u' w'' - \frac{3}{2} w'^2 w'') - EI(w^{IV}) \right\} \delta w \, dx \, dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A (v_0 u + v_0^2 + v_0^2 u') - P - EA(u' + (1/2)w'^2) \right\} \delta u \Big|_0^L dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A (v_0 \dot{w} + v_0^2 w') - P w' - EA(u' w' + (1/2)w'^3) - EI w''' \right\} \delta w \Big|_0^L dt \\ & + \int_0^l \left\{ \rho A (\dot{u} + v_0 + v_0 u') \right\} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_0^l \left\{ \rho A (\dot{w} + v_0 w') \right\} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} EI w'' \delta w' \Big|_0^L dt = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

ifadesi elde edilir. Görüldüğü üzere iki adet çift ve beş adet tek katlı integral ortaya çıkmaktadır. Eşitliğin sıfır olması çift katlı integrallerde $\delta u \, dx \, dt$ ve $\delta w \, dx \, dt$ ile çarpım halindeki ifadelerin sıfır olmasıyla mümkündür. Tek katlı integraller de ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır. Çift katlı

integraller sisteme ait hareket denklemlerini, tek katlı integraller ise olası sınır şartlarını verir (Pasin,1994).

Çift katlı ilk integralden birinci hareket denklemi yazılır,

$$\rho A(\ddot{u} + 2v_0\dot{u}' + v_0^2 u'') - EA(u'' + w'w'') = 0 \quad (2.21)$$

Denklem (2.21) x yönündeki hareket denklemdir (boyuna titreşim). Enine titreşim hareketini veren denklem ise ikinci çift katlı integralden elde edilir,

$$\rho A(\ddot{w} + 2v_0\dot{w}' + v_0^2 w'') - P(w'') - EA(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2}w'^2 w'') + EI(w'''') = 0 \quad (2.22)$$

sınır şartlarını elde etmek için tek katlı integrallere bakılır,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A(v_0 u + v_0^2 + v_0^2 u') - P - EA(u' + (1/2)w'^2) \right\} \delta u \Big|_0^L dt = 0 \quad (2.23)$$

Denklem (2.23)'te,

$$\delta u(0) = \delta u(L) = 0 \quad (2.24)$$

koşulu sağlanırsa integral sifıra eşit olur (parantez içindeki ifadenin sıfır olma durumu seçilmemiştir). Dolayısıyla boyuna titreşim hareketine ait sınır şartları elde edilmiş olur. Diğer tek katlı integral ele alınırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A(v_0 \dot{w} + v_0^2 w') - Pw' - EA(u'w' + (1/2)w'^3) + EIw''' \right\} \delta w \Big|_0^L dt = 0 \quad (2.25)$$

eşitliğinde,

$$\delta w(0) = \delta w(L) = 0 \quad (2.26)$$

durumu integralin sıfır olma koşullarından biridir. Diğer bir tek katlı integral ise,

$$\int_{t_1}^{t_2} EI w'' \delta w' \Big|_0^L dt = 0 \quad (2.27)$$

şeklindedir. Burada $x = 0$ ve $x = L$ şartları $w''(x)$ fonksiyonuna uygulanabilir çünkü bu, analiz etmek istenilen basit-basit mesnetli kirişe ait sınır şartlarından ikisidir. Dolayısıyla,

$$w''(0) = w''(L) = 0 \quad (2.28)$$

şartları elde edilmiş olur. Elde edilen hareket denklemleri ve sınır şartları toplu halde aşağıda verilmiştir. Boyut analizi yapmadan önce denklem yapısına dokunmadan bütün değişkenler üst çizgi (̄) notasyonu ile gösterilecek, ardından boyutsuz durumda terimler yalın gösterimleriyle ele alınacaktır. Boyutlu denklemler ve sınır şartları,

$$\rho A (\ddot{u} + 2\bar{v}_0 \dot{u}' + \bar{v}_0^2 u'') - EA \left(\bar{u}' + \frac{1}{2} \bar{w}'^2 \right)' = 0 \quad (2.29)$$

$$\rho A (\ddot{\bar{w}} + 2\bar{v}_0 \dot{\bar{w}}' + \bar{v}_0^2 \bar{w}'') - P(\bar{w}'') - EA(\bar{u}'' \bar{w}' + \bar{u}' \bar{w}'' + \frac{3}{2} \bar{w}'^2 \bar{w}'') + EI(\bar{w}^{IV}) = 0 \quad (2.30)$$

$$\bar{u}(0, \bar{t}) = \bar{u}(L, \bar{t}) = 0 \quad (2.31)$$

$$\bar{w}(0, \bar{t}) = \bar{w}(L, \bar{t}) = \bar{w}''(0, \bar{t}) = \bar{w}''(L, \bar{t}) = 0 \quad (2.32)$$

şeklindedir. Aşağıdaki tanımlamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad u = \frac{\bar{u}}{L}, \quad w = \frac{\bar{w}}{L}, \quad t = \bar{t} \sqrt{\frac{P}{\rho A L^2}}, \quad v_0 = \frac{\bar{v}_0}{v_c}, \quad v_c = \sqrt{\frac{P}{\rho A}}, \\ v_\ell = \sqrt{\frac{EA}{P}}, \quad v_f = \sqrt{\frac{EI}{PL^2}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

boyutsuz denklem ve sınır şartları,

$$\ddot{u} + 2v_0 \dot{u}' + v_0^2 u'' - v_\ell^2 \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' = 0 \quad (2.34)$$

$$\ddot{w} + 2v_0 \dot{w}' + v_0^2 w'' - \left\{ \left[1 + v_\ell^2 \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right] w' \right\}' + v_f^2 w^{IV} = 0 \quad (2.35)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (2.36)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (2.34)'te terimler arasında,

$$\ddot{u} + 2v_0 \dot{u}' + v_0^2 u'' \ll v_\ell^2 \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' \quad (2.37)$$

durumu sözkonusudur. Bunun sebebi boyuna titreşimlerin enine titreşimlerden çok daha hızlı yayılmasıdır (Öz,1999, Wickert,1992). Böylelikle Denklem (2.34),

$$\left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' = 0 \quad (2.38)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafına x 'e göre belirsiz integral işlemi uygulanırsa sonuç bir sabite eşit olmalıdır,

$$u' + \frac{1}{2} w'^2 = c \quad (2.39)$$

bulunur. Burada $c = c(t)$ fonksiyonu şeklinde düşünülebilir. Elde edilen ifadenin kiriş boyunca belirli integrali alınır,

$$\int_0^1 \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = \int_0^1 c(t) dx \quad (2.40)$$

elde edilir. $u(0) = u(1) = 0$ olduğundan belirli integral sonucunda,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 w'^2 dx = c(t) \quad (2.41)$$

olduğu görülür. Denklem (2.39)'da $c(t) = e_{xx}$ eşitliği yazılabilir. Bu durumda,

$$u' = e_{xx} - \frac{1}{2} w'^2 \quad (2.42)$$

bulunur. Denklem (2.41)'de bulunan eşitlik, Denklem (2.42)'ye yerleştirilir, gerekli düzenlemeler yapılır ve x değişkenine göre integrali alınır,

$$u(x,t) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \int_0^1 w'^2 dx \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^x w'^2 dx \quad (2.43)$$

elde edilir. Denklem (2.43), Denklem (2.35)'te yerine yazılır, ardından enine deplasmanı veren $w(x,t)$ bağımlı değişkenine $\sqrt{\varepsilon} w$ dönüşümü yapılır, ardından sönüm ve zorlama kuvvetine ait terimler eklenirse, aksel hareketli Euler-Bernoulli kirişinin nonlineer titreşimlerini modelleyen kübik nonlineer kısmi diferansiyel denklem yapısındaki hareket denklemi ve basit-basit mesnetli sınır şartları elde edilir (Öz ve diğ. 2001),

$$\ddot{w} + (v_0^2 - 1) w'' + 2v_0 \dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \varepsilon \mu \dot{w} = \varepsilon F \cos \Omega t + \frac{1}{2} \varepsilon v_\ell^2 w'' \int_0^1 w'^2 dx \quad (2.44)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (2.45)$$

Denklem (2.44)'te \ddot{w} , $v_0^2 w''$ ve $2v_0 \dot{w}'$ terimleri sırasıyla yerel ivme, merkezci ivme ve Coriolis ivmesi terimleridir.

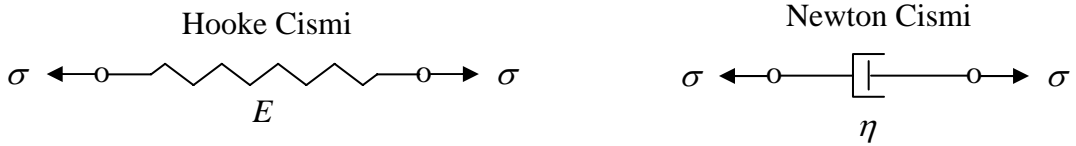
2.4.2. Aksel Hareketli Viskoelastik Kiriş

Bu bölümde viskoelastik kiriş modeli ele alınacak ve hareket denklemini bulmak için Newton yöntemi kullanılacaktır.

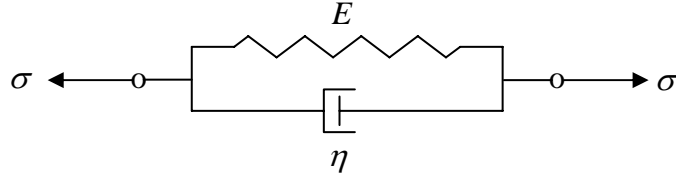
Viskoelastisite

Şekil değiştirebilen cisimler mekaniği içerisinde analizler, malzeme açısından, bir takım ideal cisim kabulleri ile yapılır. Bunun sebebi cisimlerin mekanik özelliklerinin karmaşık yapıda

olmasıdır. Cismin baskın (etkin) özelliği göz önüne alınarak bir idealleştirme sözkonusu olur. İdeal cisimler elastisite ve plastisite özellikleri açısından -zamandan bağımsız olarak-, elastik cisim, elastoplastik cisim, pekleşen elastoplastik cisim, rijit plastik cisim ve pekleşen rijit plastik cisim olarak sınıflandırılabilir (İnan, 1996). Bu sınıflandırma yapılırken gerilme-şekil değiştirme ilişkisindeki farklılıklar dikkate alınır. Viskoelastik cisimde ise zamana bağlı gerilme ve zamana bağlı şekil değiştirme mevcuttur. Doğrusal viskoelastisite (linear viscoelasticity) teorilerine göre bir viskoelastik modelin temel elemanları doğrusal yay ve viskoz sönüm elemanıdır (yağ kutusu, amortisör). Doğrusal yay Hooke cismi, viskoz sönüm elemanı ise Newton cismi olarak adlandırılır (Şekil 2.5).



Şekil 2.5. Viskoelastik model elemanları



Şekil 2.6. Kelvin modeli

Hooke cismi için gerilme şekil değiştirme ilişkisi,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.46)$$

ile tanımlanır. Denklem (2.46)'da, ε birim şekil değiştirme, σ aksenal gerilme, E ise elastisite modülü olarak tanımlanır. Newton cisimi için,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.47)$$

tanımlaması yapılır. Burada η , viskozite katsayısı olarak alınır. Bu tanımlamalardan sonra Şekil 2.6'da gösterilen Kelvin modeli için gerilme eşitliği aşağıdaki gibidir,

$$\sigma = \varepsilon E + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.48)$$

Oluşturulacak viskoelastik kiriş modelinde parametrelerin gösterimi aksenal hareketli Euler-Bernoulli kirişindeki gösterim ile aynıdır. Newton hareket kanununa (2. kanun) göre,

$$\rho A (\ddot{w} + 2v_0 \dot{w}' + v_0^2 w'') = [(P + A\sigma)w']' - M'' \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\sigma(x,t)$ aksenal gerilme, $M(x,t)$ eğilme momentidir. Viskoelastik model olarak Kelvin modeli kabulü yapılmıştır. $\varepsilon = e_{xx}$ ile gösterilirse, gerilme ve şekil değiştirme eşitlikleri sırasıyla aşağıdaki gibidir,

$$\sigma = E e_{xx} + \eta \dot{e}_{xx} \quad (2.50)$$

$$e_{xx} = \frac{1}{2} w'^2 \quad (2.51)$$

Eğilme momenti için,

$$M = EI w'' + \eta I \dot{w}'' \quad (2.52)$$

yazılır. Denklemler (2.50)-(2.52), Denklem (2.49)'da yazılıp, boyutsuz halden ayırmak için üst çizgi notasyonu kullanılırsa,

$$\rho A (\ddot{\bar{w}} + 2\bar{v}_0 \dot{\bar{w}}' + \bar{v}_0^2 \bar{w}'') - P \bar{w}'' + EI \bar{w}'''' + \eta I \dot{\bar{w}}'' = \frac{3}{2} E \bar{w}'^2 \bar{w}'' + 2\eta \bar{w}' \dot{\bar{w}}' \bar{w}'' + \eta \bar{w}'^2 \dot{\bar{w}}'' \quad (2.53)$$

hareket denklemi elde edilir. Boyutsuz parametreler

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\bar{x}}{L}, & w &= \frac{\bar{w}}{L}, & t &= \bar{t} \sqrt{\frac{P}{\rho AL^2}}, & v_0 &= \frac{\bar{v}_0}{v_c}, & v_c &= \sqrt{\frac{P}{\rho A}}, \\
v_\ell &= \sqrt{\frac{EA}{P}}, & v_f &= \sqrt{\frac{EI}{PL^2}}, & \varepsilon\alpha &= \frac{I\eta}{L^3 \sqrt{\rho AP}}, & k &= \frac{A\eta}{L \sqrt{\rho AP}}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

şeklinde ifade edilir. Eksenel hareketli elastik Euler-Bernoulli kiriş modelinden farklı olarak, Denklem (2.54)'te tanımlanan α ve k parametreleri viskozite ile alakalı terimlerdir. Verilen eşitlikler ile tanımlanan parametreler ışığında Denklem (2.53) boyutsuz hale getirilir. Denkleme zorlama ve sönüm terimleri de eklenirse hareket denklemi elde edilir (Chen ve Yang, 2006),

$$\begin{aligned}
\ddot{w} + (v_0^2 - 1)w'' + 2v_0\dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \varepsilon\alpha\dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu\dot{w} = \varepsilon F \cos\Omega t \\
+ \varepsilon \left\{ \frac{3}{2}v_\ell^2 w'' w'^2 + 2ak\dot{w}'w'w'' + ak\dot{w}''w'^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Viskoelastisite ile alakalı terimlerin dışında, sönüm, zorlama ve boyuna direngenlik (v_ℓ^2) ile alakalı terimlerin de ε mertebesinde olduğu düşünülmüştür. Sınır şartları ise yine basit-basit mesnet sınır şartlarıdır,

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \tag{2.56}$$

Diğer uygulamada olduğu gibi, A kiriş kesit alanı, L kiriş boyu, P eksenel çekme kuvveti, EI kiriş eğilme rijitliği olarak tanımlanmıştır. v_f ile v_ℓ kiriş enine ve boyuna direngenlik ifadeleridir. v_0 ise boyutsuz kiriş hızıdır.

2.4.3. Akışkan Taşıyan Borular

Akışkan taşıyan boruların hareket denklemleri enerji veya Newtonyen yöntemlerle elde edilebilir. Çıkarılışı eksenel hareketli kirişten farklı değildir. Eksenel hareketli kiriş ile aynı yapıda bir diferansiyel denklem elde edilir. Fiziksel anlamda farklı problemler gibi görünse de akışkan taşıyan sürekli ortamlarla eksenel hareketli sürekli ortamlar birbirlerine çok benzerler. Farkları her problemin parametrelerinin farklı oluşudur. Boru probleminde akışkan ile ilgili parametreler

de gözönüne alınır. Akışkan taşıyan borular iki farklı modelle ele alınacaktır. Birincisi elastik boruya ikincisi ise viskoelastik boruya ait modeldir.

2.4.3.1. Akışkan Taşıyan Elastik Borular

Bu modelde A kesit alanına, L boyuna, EI eğilme rijitliğine sahip, içinde v_0 hızında akış olan basit-basit mesnetli boru ele alınmıştır. Borudaki aksel çekme kuvveti $\bar{P}_0 + \varepsilon \bar{P}_1 \cos \bar{\Omega} \bar{t}$ ifadesiyle tanımlanacak şekilde harmonik olarak değişmektedir. Boruya etkileyen dış sönüm $\bar{\mu}$ ile tanımlanmıştır. Elastik model için ortaya konulan boyutlu model ve sınır şartları,

$$EI \bar{w}^{IV} + 2m_A v_0 \dot{\bar{w}}' + (m_A + m_B) \ddot{\bar{w}} + m_A \bar{v}_0^2 \bar{w}'' + \bar{\mu} \dot{\bar{w}} = (\bar{P}_0 + \varepsilon \bar{P}_1 \cos \bar{\Omega} \bar{t}) \bar{w}'' + \frac{EA}{2L} \int_0^L \bar{w}'^2 d\bar{x} \bar{w}'' \quad (2.57)$$

$$\bar{w}(0, \bar{t}) = \bar{w}(1, \bar{t}) = \bar{w}''(0, \bar{t}) = \bar{w}''(1, \bar{t}) = 0 \quad (2.58)$$

şeklinde ifade edilir. Boyutsuz katsayılar aşağıda sıralanmıştır,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{L}, \quad w = \frac{\bar{w}}{L}, \quad t = \omega_0 \bar{t}, \quad \omega_0 = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_A + m_B}}, \quad \beta = \frac{m_A}{m_A + m_B}, \\ v_0 &= \bar{v}_0 L \sqrt{\frac{m_A}{EI}}, \quad \varepsilon \mu = \bar{\mu} L^2 \frac{1}{\sqrt{(m_A + m_B)EI}}, \quad P_0 = \bar{P}_0 \frac{L^2}{EI}, \quad P_1 = \bar{P}_1 \frac{L^2}{EI}, \\ \varepsilon k_1 &= \frac{AL^2}{2I}, \quad \Omega = \frac{\bar{\Omega}}{\omega_0} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Elde edilen katsayılar (2.57) ile verilen hareket denkleminde yerine yazılır, gerekli işlemler yapılırsa,

$$\ddot{w} + w^{IV} + (v_0^2 - P_0)w'' + 2\sqrt{\beta} v_0 \dot{w}' + \varepsilon \mu \dot{w} = \varepsilon P_1 w'' \cos \Omega t + \varepsilon k_1 \int_0^1 w'^2 dx w'' \quad (2.60)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = w''(0, t) = w''(1, t) = 0 \quad (2.61)$$

hareket denklemi ve sınır şartları boyutsuz halde elde edilir.

2.4.3.2. Akışkan Taşıyan Viskoelastik Borular

Akışkan taşıyan borunun A kesit alanına, L boyuna, EI eğilme rijitliğine sahip olduğu düşünülmüştür. m_A ve m_B sırasıyla akışkan ve boru kütesidir. Boru içinde sabit v_0 hızında akış olmaktadır. $\bar{P}_0 + \varepsilon \bar{P}_1 \cos \bar{\Omega} \bar{t}$ şeklinde harmonik olarak değişen çekme gerilme kuvveti olduğu düşünülmüştür. Viskoelastik model için ortaya konulan boyutlu model ve sınır şartları (Panda ve Kar, 2008),

$$E^* I \bar{w}^{IV} + EI \bar{w}^{IV} + 2m_A \bar{v}_0 \bar{w}' + (m_A + m_B) \ddot{\bar{w}} + m_A \bar{v}_0^2 \bar{w}'' + \bar{\mu} \dot{\bar{w}} = (\bar{P}_0 + \varepsilon \bar{P}_1 \cos \bar{\Omega} \bar{t}) \bar{w}'' + \frac{EA}{2L} \int_0^1 \bar{w}'^2 d\bar{x} \bar{w}'' + \frac{E^* A}{L} \int_0^1 \dot{\bar{w}}' \bar{w}' d\bar{x} \bar{w}'' \quad (2.62)$$

$$\bar{w}(0, \bar{t}) = \bar{w}(1, \bar{t}) = \bar{w}''(0, \bar{t}) = \bar{w}''(1, \bar{t}) = 0 \quad (2.63)$$

şeklinde ifade edilir. Boyutsuz katsayılar,

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad w = \frac{\bar{w}}{L}, \quad t = \omega_0 \bar{t}, \quad \omega_0 = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_A + m_B}}, \quad v_0 = \bar{v}_0 L \sqrt{\frac{m_A}{EI}},$$

$$\varepsilon \alpha = \frac{E^*}{L^2} \sqrt{\frac{I}{(m_A + m_B)E}}, \quad \varepsilon \mu = \bar{\mu} L^2 \frac{1}{\sqrt{(m_A + m_B)EI}}, \quad P_0 = \bar{P}_0 \frac{L^2}{EI}, \quad (2.64)$$

$$P_1 = \bar{P}_1 \frac{L^2}{EI}, \quad \varepsilon k_1 = \frac{AL^2}{2I}, \quad \beta = \frac{m_A}{m_A + m_B}, \quad \varepsilon k_2 = \frac{E^* A}{\sqrt{(m_A + m_B)EI}}, \quad \Omega = \frac{\bar{\Omega}}{\omega_0}$$

şeklinde elde edilir. Burada k_1 parametresi boru geometrisi ile, α ve k_2 parametreleri ise viskoelastisite ile alakalı katsayılar olarak tanımlanır. β katsayısı, akışkan kütesinin, boru ile akışkan toplam kütesine oranıdır. Boyutsuz hareket denklemi ve sınır şartları aşağıdaki gibidir,

$$\ddot{w} + w^{IV} + (v_0^2 - P_0)w'' + 2\sqrt{\beta} v_0 \dot{w}' + \varepsilon \alpha \dot{w}^{IV} + \varepsilon \mu \dot{w} = \varepsilon P_1 w'' \cos \Omega t + \varepsilon k_1 \int_0^1 w'^2 dx w'' + \varepsilon k_2 \int_0^1 \dot{w}' w' dx w'' \quad (2.65)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = w''(0, t) = w''(1, t) = 0 \quad (2.66)$$

Bu bölümde elde edilen kısmi türevli nonlineer diferansiyel denklemler, genel notasyon kullanılarak elde edilecek çözüm yapılarının uygulama problemleri olarak ele alınacaktır.

3.GENEL MODEL VE MÜHENDİSLİKTE PERTURBASYON YÖNTEMLERİ

3.1.Genel Model

Operatör notasyonu kullanarak oluşturulan genel model ve genel sınır şartları aşağıda gösterilmiştir,

$$\ddot{w} + \mathbf{L}_1(w) + \mathbf{L}_2(\dot{w}) + \varepsilon \mathbf{L}_3(\dot{w}) = \varepsilon \mathbf{L}_4(w) \cos \Omega t + \varepsilon \{ \mathbf{C}_1(w, w, w) + \mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) \} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B}_1(w) = 0 \quad x = 0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}_2(w) = 0 \quad x = 1 \quad (3.3)$$

Genel modelde $w(x,t)$, sürekli ortam deplasmanıdır. $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ ve \mathbf{L}_4 lineer diferansiyel/integral operatörler (self adjoint operatör), \mathbf{C}_1 ve \mathbf{C}_2 keyfi kübik nonlineer operatörler, \mathbf{B}_1 ve \mathbf{B}_2 ise sınır şartlarını belirleyen lineer operatörlerdir. Ω , zorlama frekansını temsil eder. Denklemden kullanılan ε , küçük boyutsuz bir parametredir. $(\dot{\quad})$ gösterimi, bağımsız değişken olan zamana göre türevi, ileride kullanılacağı üzere $(\quad)'$ gösterimi ise yine bağımsız değişken olan mekâna bağlı türevi ifade eder. Jiroskopik etkileri de göz önüne almak için, genel notasyon gösteriminde, ilk olarak bu çalışmada, lineer ve kübik operatörlerde zamana bağlı türev içeren terimler kullanılmıştır.

Kübik operatörler genelde simetrik değildirler ve operatör içindeki değişkenler multilineer özelliktedirler. Bu özellik aşağıda gösterilmiştir,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(c_1 w_1 + c_2 w_2, c_3 w_3 + c_4 w_4, c_5 w_5 + c_6 w_6) = & c_1 c_3 c_5 \mathbf{C}(w_1, w_3, w_5) + c_1 c_3 c_6 \mathbf{C}(w_1, w_3, w_6) \\ & + c_1 c_4 c_5 \mathbf{C}(w_1, w_4, w_5) + c_1 c_4 c_6 \mathbf{C}(w_1, w_4, w_6) \\ & + c_2 c_3 c_5 \mathbf{C}(w_2, w_3, w_5) + c_2 c_3 c_6 \mathbf{C}(w_2, w_3, w_6) \\ & + c_2 c_4 c_5 \mathbf{C}(w_2, w_4, w_5) + c_2 c_4 c_6 \mathbf{C}(w_2, w_4, w_6) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kübik operatörler, diferansiyel veya integral yapıda olabilir. Sürekli ortamlarda sıkça karşılaşılan kübik operatörlere birkaç örnek aşağıdaki gibi verilebilir,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(w, w, w) = w^3, \quad \mathbf{C}(w, w, w) = w'' \int_D w'^2 dx, \quad \mathbf{C}(w, w, w) = w'' w'^2 \\ \mathbf{C}(\dot{w}, w, w) = \dot{w}' w' w'', \quad \mathbf{C}(\dot{w}, w, w) = \dot{w}'' w'^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Genel olarak,

$$C(w_1, w_2, w_3) \neq C(w_1, w_3, w_2) \neq C(w_2, w_1, w_3) \neq C(w_2, w_3, w_1) \neq C(w_3, w_1, w_2) \neq C(w_3, w_2, w_1) \quad (3.6)$$

olduğu varsayılır.

Ortaya atılan genel modelin analitik çözümü bir Perturbasyon Metodu olan Çok Zaman Ölçekli Metod (Nayfeh,1981) ile yapılacaktır. Çözüme başlamadan önce, Bölüm 3.2'de Perturbasyon Metodları hakkında genel bilgi verilmiştir.

3.2.Mühendislikte Perturbasyon Yöntemleri

Fiziksel sistemlerin modellemelerinde karşımıza birbirinden farklı yapılara haiz problemler (denklemler) çıkmaktadır. Analiz edilmek üzere ele alınan sistemlerde nonlinear terimler, değişken katsayılar, nonlinear sınır şartları vb. özellikler olabilir. Fiziksel problemi çözmek için değişik yöntemler denenebilir. Bu yöntemler, sayısal çözümler ve analitik çözümler şeklinde olabilir. Bazı durumlarda her iki yöntem birlikte kullanılabilir. Perturbasyon metodları birçok farklı yapıdaki denkleme (modele) çözümler üretilebilen analitik yöntemlerden biridir. Bu yöntemlerle bazı tip problemlerde tam çözüm bulunabilse de nonlinear problemlere genelde yaklaşık analitik çözümler üretilir. Bir avantajı da özellikle fiziksel bir modelin sonuçlarını yorumlayabilmek için, çözüm yapıları hakkında fikir verebilmesidir. Sayısal çözümlerde, denklemlerin çözüm yapılarına hâkim olunamadığından, yanıltıcı yorumlar yapılabilir. Ancak perturbasyon metodlarında çözümün analitik yapısı göz önündedir ve fiziksel terimlerin çözüme etkileri kolaylıkla yorumlanabilir.

Perturbasyon metodları asimptotik metodlar olarak da anılır. Çözümler asimptotik açılımlarla ifade edilir. Bu açılımlar genelde 2 veya 3 terimli açılımlardır. Bu yöntemde denklemden var olan ya da yapay olarak eklenen parametrelere göre (parametre perturbasyonları) veya koordinatlara göre (koordinat perturbasyonları) asimptotik açılımlar önerilerek çözüme ulaşılmaya çalışılır.

Daha önce de bahsedildiği üzere fiziksel sistemlere ait denklemlerde (diferansiyel denklemler) lineer ve nonlinear terimler olabilir. Denklemin lineer ve nonlinear terimleri ayrı ayrı gruplanınca nonlinear terimler lineer terimlere göre küçük ise böyle sistemlere zayıf nonlinear sistemler denir. Bunlar bir başka tanımla quasi-lineer sistemlerdir. Küçük parametre ε kullanılarak ele

alınan perturbasyon yöntemleri, bu tarz sistemlerin çözümünde uygun yöntemlerdir. Bu çalışmada küçük parametre; sönüm ve viskoelastisiteyi içeren lineer terim, zorlama / parametrik terim ve kübik nonlinear terimler ile alakalandırılmıştır.

Bu bölümde genel modelin çözümünde kullanılacak perturbasyon yöntemleri genel özellikleriyle tanıtılmıştır. Bu metodla ilgili ayrıntılı bilgi için Nayfeh (1981) ve Nayfeh (1973) kaynakları incelenebilir. Bundan sonraki bölümlerde genel modelin dış zorlamalı ve parametrik titreşimlerine ait çeşitli rezonans durumlarına göre Perturbasyon Metodu çözümleri yapılacak ve uygulama problemlerinde kullanılmak üzere bir genel çözüm algoritması ortaya konulacaktır.

4. DIŞ ZORLAMALI TİTREŞİMLER

Bu bölümde dış zorlamalı durum için analitik çözümler yapılacaktır. Genel modelde gösterilen $\mathbf{L}_4(w)$ operatörünün bağımlı değişken $w(x,t)$ 'den bağımsız olduğu ve $F = F(x)$ gibi bir terim olduğu varsayılmıştır. Bu durumda genel model şu hâli alır,

$$\ddot{w} + \mathbf{L}_1(w) + \mathbf{L}_2(\dot{w}) + \varepsilon \mathbf{L}_3(\dot{w}) = \varepsilon F \cos \Omega t + \varepsilon \{ \mathbf{C}_1(w, w, w) + \mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) \} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B}_1(w) = 0 \quad x = 0 \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B}_2(w) = 0 \quad x = 1 \quad (4.3)$$

4.1. Perturbasyon Yöntemi Çözümleri

Bir Perturbasyon Metodu olan Çok Zaman Ölçekli Metod, Denklem (4.1)'de ifade edilen genel modele direkt olarak uygulanacaktır (Direkt Perturbasyon Metodu). Çözüm fonksiyonu $w(x,t)$, aşağıdaki yapıda kabul edilmiştir,

$$w(x, T_0, T_1; \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \dots \quad (4.4)$$

Burada $T_0 = t$ hızlı zaman ölçeği, $T_1 = \varepsilon t$ ise yavaş zaman ölçeğidir. Denklemde kullanılan türev ifadeleri, açık olarak aşağıdaki yapıdadır,

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (4.6)$$

Genel formda türev operatörü $D_k = \partial / \partial T_k$ şeklinde gösterilebilir. Türev ifadelerini göz önüne alarak, önerilen (4.4) çözüm fonksiyonu, (4.1)-(4.3) denklemleri ile belirtilen genel model ve sınır şartlarında yerine yazılır,

$$(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) + \mathbf{L}_1(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) + \mathbf{L}_2([D_0 + \varepsilon D_1 + \dots][w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) + \varepsilon \mathbf{L}_3([D_0 + \varepsilon D_1 + \dots][w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) = \varepsilon F \cos \Omega T_0 + \varepsilon \{ \mathbf{C}_1([w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) + \mathbf{C}_2([D_0 + \varepsilon D_1 + \dots][w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) \}$$
(4.7)

$$\mathbf{B}_1(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) = 0 \quad x = 0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B}_2(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) = 0 \quad x = 1 \quad (4.9)$$

Her bir ε mertebesine göre açılım yapılırsa aşağıdaki mertebeye denklemleri elde edilir,

$O(\varepsilon^0)$ ^(*)

$$D_0^2 w_0 + \mathbf{L}_1(w_0) + \mathbf{L}_2(D_0 w_0) = 0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B}_1(w_0) = 0 \quad x = 0 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B}_2(w_0) = 0 \quad x = 1 \quad (4.12)$$

$O(\varepsilon^1)$

$$D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = -2D_0 D_1 w_0 - \mathbf{L}_2(D_1 w_0) - \mathbf{L}_3(D_0 w_0) + F \cos \Omega T_0 + \mathbf{C}_1(w_0, w_0, w_0) + \mathbf{C}_2(D_0 w_0, w_0, w_0) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (4.15)$$

Buradan itibaren çözülebilirlik şartları ve çözüm fonksiyonları, incelenecek rezonans tipine göre ayrı ayrı bulunacaktır.

(*) Mertebeye ayrıştırılmalarında gösterilen “O” sembolü, İngilizce’de mertebeye anlamına gelen “order” kelimesinin ilk harfidir.

4.2. Baskın Rezonans Durumu

Baskın rezonans durumu, dış zorlama kuvvetine ait frekansın, sistemin tabii frekanslarından birine eşit (veya çok yakın) olmasıyla meydana gelir. Bu durumda sisteme ait genlik değerlerinde teorik olarak sonsuza giden bir artış olur.

İlk mertebedeki (4.10) diferansiyel denkleminin çözümü olarak aşağıdaki ifade önerilebilir,

$$w_0(x, T_0, T_1) = A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} Y_n(x) + \bar{A}_n(T_1)e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

A_n ve \bar{A}_n kompleks genlik ve eşleniğidir. Eğer (4.16) eşitliği ilk mertebedeki (4.10) denkleminin çözümü ise bu denkleme sağlamalıdır. Dolayısıyla Denklem (4.16), Denklemler (4.10)-(4.12)'ye yerleştirilir, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa mekâna bağlı fonksiyon olan $Y_n(x)$ fonksiyonu,

$$\mathbf{L}_1(Y_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(Y_n) - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_n) = 0 \quad x = 0 \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B}_2(Y_n) = 0 \quad x = 1 \quad (4.19)$$

cebirsel denklemini ve sınır şartlarını sağlar. Görüldüğü üzere (4.17)-(4.19) ifadeleri bir özdeğer-özfonksiyon problemini meydana getirir. Burada ω_n değerleri özdeğerler, $Y_n(x)$ fonksiyonları ise özfonksiyonlardır. Bilindiği gibi, sürekli ortamlarda, sonsuz özdeğere karşılık gelen sonsuz sayıda özfonksiyon mevcuttur.

Denklem (4.16)'da önerilen çözüm fonksiyonu ε mertebesindeki Denklem (4.13)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) &= -2 D_1 (i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \\ - \mathbf{L}_2(D_1 (A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n)) - \mathbf{L}_3 (i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \\ + \frac{1}{2} F (e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) & \quad (4.20) \\ + \mathbf{C}_1 (A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \\ + \mathbf{C}_2 (i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (4.16) çözümü, sınır şartları (4.14) ve (4.15)'te de aynı şekilde yazılır. Eşitlikler düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & -2i\omega_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + 2i\omega_n D_1 \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n \\
& - D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(Y_n) - D_1 \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(\bar{Y}_n) \\
& - i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(Y_n) + i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(\bar{Y}_n) \\
& + \frac{1}{2} F (e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) \\
& + A_n^3 e^{3i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \} \\
& + A_n \bar{A}_n^2 e^{-i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + A_n \bar{A}_n^2 e^{-i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, \bar{Y}_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n \bar{A}_n^2 e^{-i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_n) \} \\
& + \bar{A}_n^3 e^{-3i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \tag{4.22}$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \tag{4.23}$$

denklem ve sınır şartları elde edilir. Baskın rezonans koşulu,

$$\Omega = \omega_n + \varepsilon \sigma_n \tag{4.24}$$

ile ifade edilir. σ_n terimi ayar parametresi olup bir mertebesinde bir terimdir. $\varepsilon \sigma_n$ ifadesi zorlama frekansı ile sistem tabii frekansının yakınlığını ifade eder. Denklem (4.24) ile verilen baskın rezonans koşulu (4.21)'e yerleştirilir ve elde edilen ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & - 2i\omega_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(Y_n) - i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(Y_n) \\
& + \frac{1}{2} F e^{i\sigma_n T_1} e^{i\omega_n T_0} + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} \\
& + k.e. + S.O.T.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad (4.26)$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (4.27)$$

denklem ve sınır şartları elde edilir. *k.e.* gösterimi kompleks eşlenik terimler, *S.O.T.* gösterimi ise seküler olmayan terimler anlamındadır. w_1 çözüm fonksiyonu aşağıdaki yapıdadır,

$$w_1(x, T_0, T_1) = \varphi_n(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + \bar{\varphi}_n(x, T_1) e^{-i\omega_n T_0} + W(x, T_0, T_1) \quad (4.28)$$

$W(x, T_0, T_1)$ ifadesi seküler olmayan terimleri içerir. Denklem (4.28)'de verilen çözüm fonksiyonu, (4.25) denklemi ile (4.26) ve (4.27)'deki sınır şartlarına yerleştirilip düzenlenirse,

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 \varphi_n + \mathbf{L}_1(\varphi_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(\varphi_n) = & -2i\omega_n D_1 A_n Y_n - D_1 A_n \mathbf{L}_2(Y_n) - i\omega_n A_n \mathbf{L}_3(Y_n) + \frac{1}{2} F e^{i\sigma_n T_1} \\ & + A_n^2 \bar{A}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \\ & + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{B}_1(\varphi_n) = 0 \quad x = 0 \quad (4.30)$$

$$\mathbf{B}_2(\varphi_n) = 0 \quad x = 1 \quad (4.31)$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer Denklem (4.29)'un homojen halinin basit olmayan bir çözümü mevcutsa bu denklemin bir çözümünün olması, ancak çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır (Nayfeh, 1981). Çözülebilirlik şartı gereği, Denklem (4.29), homojen olmayan kısmını sıfır yapacak bir $u_n(x)$ fonksiyonu ile çarpılıp tanım kümesi üzerinden integre edilmelidir.

$$\omega_n^2 \int_0^1 u_n(x) \varphi_n(x, T_1) dx - \int_0^1 u_n(x) \mathbf{L}_1(\varphi_n(x, T_1)) dx - i\omega_n \int_0^1 u_n(x) \mathbf{L}_2(\varphi_n(x, T_1)) dx = 0 \quad (4.32)$$

Genel model için $u_n(x) = \bar{Y}_n(x)$ olur. Dolayısıyla (4.29) denkleminde homojenliği bozan kısım, ancak $\bar{Y}_n(x)$ ifadesi ile çarpılır ve tanım kümesi üzerinden integre edilirse sıfır olur,

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + D_1 A_n \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx + i\omega_n A_n \int_0^1 \bar{Y}_n L_3(Y_n) dx - \frac{1}{2} e^{i\sigma_n T_1} \int_0^1 F \bar{Y}_n dx \\
& - A_n^2 \bar{A}_n \int_0^1 \bar{Y}_n \{C_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& + C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)]\} dx = 0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Denklem düzenlenirse çözülebilirlik şartı elde edilir,

$$D_1 A_n + k_{1n} A_n - \frac{1}{2} f_n e^{i\sigma_n T_1} - k_{2n} A_n^2 \bar{A}_n = 0 \tag{4.34}$$

Çözülebilirlik şartında tanımlanan katsayılar aşağıda sıralanmıştır,

$$k_{1n} = \frac{i\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_n L_3(Y_n) dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx} \tag{4.35}$$

$$f_n = \frac{\int_0^1 F \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
k_{2n} = & \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{C_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)]\} dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Tanımlanan katsayılar hem gerçel (reel) hem de sanal (imajiner) kısımlara sahiptirler,

$$k_{jn} = k_{jn_R} + i k_{jn_I} \quad j = 1, 2 \tag{4.38}$$

$$f_n = f_{n_R} + i f_{n_I} \tag{4.39}$$

Karmaşık (kompleks) genlikler ve eşlenikleri polar formda ifade edilebilir,

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \quad (4.40)$$

$$\bar{A}_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{-i\beta_n(T_1)} \quad (4.41)$$

Kompleks genlik ve eşleniği, Denklem (4.34) ile verilen çözülebilirlik şartında yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$a'_n + i\beta'_n a_n + (k_{1nR} + ik_{1nI}) a_n - (f_{nR} + if_{nI}) e^{i(\sigma_n T_1 - \beta_n)} - \frac{1}{4} (k_{2nR} + ik_{2nI}) a_n^3 = 0 \quad (4.42)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte,

$$\gamma_n = \sigma_n T_1 - \beta_n \quad (4.43)$$

tanımlaması yapılır ve oluşan üstel fonksiyon Euler açılımına tabi tutularak trigonometrik hale getirilir. Ardından (4.42) eşitliğinde gerçel ve sanal kısımlar ayrıştırılıp gerekli matematiksel düzenlemeler yapılırsa baskın rezonans durumuna ait genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir,

$$a'_n = -a_n k_{1nR} + f_{nR} \cos \gamma_n - f_{nI} \sin \gamma_n + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} \quad (4.44)$$

$$a_n \gamma'_n = a_n \sigma_n + a_n k_{1nI} - f_{nR} \sin \gamma_n - f_{nI} \cos \gamma_n - \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nI} \quad (4.45)$$

Titreşim hareketinde düzgün rejim bölgesi, geçiş bölgesinden sonra gelen ve titreşim hareketine ait genlik ve faz parametrelerinin yeterli bir süre geçtikten sonra sabitlendiği bölgedir. Düzgün rejime ait çözümleri elde etmek için genliğin ve fazın sabit olduğu, dolayısıyla türevlerinin sıfır olduğu durum göz önüne alınmalıdır. Denklemler $a'_n = \gamma'_n = 0$ koşuluna göre düzenlenmelidir. Bu koşul, genlik ve faz modülasyon denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir,

$$a_n k_{1nR} - f_{nR} \cos \gamma_n + f_{nI} \sin \gamma_n - \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} = 0 \quad (4.46)$$

$$a_n \sigma_n + a_n k_{1nI} - f_{nR} \sin \gamma_n - f_{nI} \cos \gamma_n - \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nI} = 0 \quad (4.47)$$

Denklemler (4.46) ve (4.47)'den γ_n terimi yok edilirse, σ_n ayar parametresine ait iki eşitlik elde edilir,

$$\sigma_n = -k_{1nI} + \frac{1}{4}a_n^2 k_{2nI} + \sqrt{\frac{f_{nR}^2 + f_{nI}^2}{a_n^2} - \left(k_{1nR} - \frac{1}{4}a_n^2 k_{2nR}\right)^2} \quad (4.48)$$

$$\sigma_n = -k_{1nI} + \frac{1}{4}a_n^2 k_{2nI} - \sqrt{\frac{f_{nR}^2 + f_{nI}^2}{a_n^2} - \left(k_{1nR} - \frac{1}{4}a_n^2 k_{2nR}\right)^2} \quad (4.49)$$

(4.48) ve (4.49) eşitlikleri kullanılarak baskın rezonansa ait frekans-tepki grafikleri elde edilecektir.

Baskın rezonans durumu için sistem kararlılığı (stabilitesi) genel notasyon üzerinden ele alınacak olursa, kararlılık hakkında bilgi veren Jakobiyen Matris'in oluşturulması gerekir. Bunun için denklemler (4.44) ve (4.45) yeniden yazılıp gerekli sadeleştirmelerden sonra Jakobiyen matrise temel teşkil eden $F_{in}(a_n, \gamma_n)$ tanımlamaları yapılmalıdır ($i = 1, 2$),

$$a'_n = -a_n k_{1nR} + f_{nR} \cos \gamma_n - f_{nI} \sin \gamma_n + \frac{1}{4}a_n^3 k_{2nR} = F_{1n}(a_n, \gamma_n) \quad (4.50)$$

$$\gamma'_n = \sigma_n + k_{1nI} - \frac{f_{nR}}{a_n} \sin \gamma_n - \frac{f_{nI}}{a_n} \cos \gamma_n - \frac{1}{4}a_n^2 k_{2nI} = F_{2n}(a_n, \gamma_n) \quad (4.51)$$

Tekil noktaların kararlılığını araştırmak için Jakobiyen Matris aşağıdaki gibi yazılır,

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_n} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_n} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma_n} \end{bmatrix}_{\substack{a_n=a_{n0} \\ \gamma_n=\gamma_{n0}}} \quad (4.52)$$

Sistemin kararlı olması için Jakobiyen Matris'in özdeğerlerinin gerçel kısımlarının sıfırdan küçük olması gerekir.

Denklem (4.1) ile ifade edilen genel modele çözüm olarak Denklem (4.4) önerilmiştir. Denklem (4.4)'teki açılıma, Denklem (4.16)'da gösterilen $w_0(x, t)$ çözümü yazılır ve gerekli matematiksel

işlemler yapılırsa, kübik nonlineer bir sürekli ortam sisteminin, dış zorlamalı titreşimlerine ait baskın rezonans durumu için yaklaşık çözümü elde edilir,

$$w(x, t; \varepsilon) = a_n \{ \cos(\Omega t - \gamma_n) Y_{nR} - \sin(\Omega t - \gamma_n) Y_{nI} \} + O(\varepsilon) \quad (4.53)$$

Denklem (4.53)'te $Y_n(x)$ fonksiyonu gerçel ve sanal kısımlarıyla ifade edilmiştir. Bu durum açık halde aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$Y_n = Y_{nR} + i Y_{nI} \quad (4.54)$$

Genel çözümdeki a_n genliğinin sayısal değerleri, (4.46) ve (4.47) denklemleri kullanılarak bulunur. Bulunan genel çözüm algoritması iki farklı uygulama problemiyle ele alınacaktır. Uygulama problemleri Bölüm 2'de ele alındığı üzere eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri problemlerinden seçilmiştir.

4.2.1.Uygulama Problemi 1

Bölüm 2.4.1'de elde edilen, eksenel hareketli Euler-Bernoulli düz kirişine ait nonlineer titreşimleri modelleyen hareket denklemi aşağıdaki gibi integro-diferansiyel denklem yapısındadır,

$$\ddot{w} + (v_0^2 - 1) w'' + 2v_0 \dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \varepsilon \mu \dot{w} = \varepsilon F \cos \Omega t + \frac{1}{2} \varepsilon v_l^2 w'' \int_0^1 w'^2 dx \quad (4.55)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = w''(0, t) = w''(1, t) = 0 \quad (4.56)$$

Genel modelde ortaya konulan lineer integral/diferansiyel operatörlerin bu uygulama modelindeki karşılıkları,

$$\mathbf{L}_1(w) = (v_0^2 - 1) w'' + v_f^2 w^{IV} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{L}_2(\dot{w}) = 2v_0 \dot{w}' \quad (4.58)$$

$$\mathbf{L}_3(\dot{w}) = \mu \dot{w} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{L}_4(w) = F \quad (4.60)$$

$$C_1(w, w, w) = \frac{1}{2} v_\ell^2 w'' \int_0^1 w'^2 dx \quad (4.61)$$

$$C_2(\dot{w}, w, w) = 0 \quad (4.62)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklemler (4.17)-(4.19)'da tanımlanan özdeğer-özfonksiyon probleminin bu uygulama için karşılığı,

$$v_f^2 Y_n^{IV} + (v_0^2 - 1)Y_n'' + 2iv_0\omega_n Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (4.63)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \quad (4.64)$$

şeklinindedir. Denklem (4.63) ile gösterilen dördüncü mertebe, homojen, lineer diferansiyel denkleme,

$$Y_n(x) = C_{1n} e^{i\beta_{1n}x} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}x} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}x} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}x} \quad (4.65)$$

çözümü önerilebilir. Bu çözüm (4.63) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa, saçılma denklemi elde edilir (Öz, 1999),

$$v_f^2 \beta_{in}^4 + (1 - v_0^2)\beta_{in}^2 - 2v_0\omega_n\beta_{in} - \omega_n^2 = 0 \quad i = 1,2,3,4, \quad n = 1,2,\dots \quad (4.66)$$

(4.65) çözümü, (4.64)'te verilen mesnet sınır şartlarında yerine yazılırsa,

$$C_{1n} + C_{2n} + C_{3n} + C_{4n} = 0 \quad (4.67)$$

$$C_{1n} \beta_{1n}^2 + C_{2n} \beta_{2n}^2 + C_{3n} \beta_{3n}^2 + C_{4n} \beta_{4n}^2 = 0 \quad (4.68)$$

$$C_{1n} e^{i\beta_{1n}} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (4.69)$$

$$C_{1n} \beta_{1n}^2 e^{i\beta_{1n}} + C_{2n} \beta_{2n}^2 e^{i\beta_{2n}} + C_{3n} \beta_{3n}^2 e^{i\beta_{3n}} + C_{4n} \beta_{4n}^2 e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (4.70)$$

denklem takımı elde edilir. Denklem takımı matris yapısında gösterilebilir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\beta_{1n}} & e^{i\beta_{2n}} & e^{i\beta_{3n}} & e^{i\beta_{4n}} \\ \beta_{1n}^2 & \beta_{2n}^2 & \beta_{3n}^2 & \beta_{4n}^2 \\ e^{i\beta_{1n}}\beta_{1n}^2 & e^{i\beta_{2n}}\beta_{2n}^2 & e^{i\beta_{3n}}\beta_{3n}^2 & e^{i\beta_{4n}}\beta_{4n}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

Lineer cebirden bilindiği üzere (4.71) eşitliğinde basit ve basit olmayan çözümler mevcuttur. Basit çözüm sıfır çözümdür ($C_{1n} = C_{2n} = C_{3n} = C_{4n} = 0$). Basit olmayan çözüm ise katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması ile elde edilir. Basit olmayan çözümden hareketle sisteme ait tabii frekansların hesaplamasını sağlayacak destek şartı elde edilir (Öz, 1999),

$$\begin{aligned} & (e^{i(\beta_{1n}+\beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n}+\beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{4n}^2) + (e^{i(\beta_{1n}+\beta_{3n})} + e^{i(\beta_{2n}+\beta_{4n})})(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) \\ & + (e^{i(\beta_{2n}+\beta_{3n})} + e^{i(\beta_{1n}+\beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{3n}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

ω_n ve β_{in} sayısal değerleri, saçılma denklemi ve destek şartının ortak çözümünüyle bulunur. Bahsedilen değerler bulunurken ve diğer bütün sayısal hesaplamalar için Matlab® ve Maple® bilgisayar programları kullanılmıştır. Denklemler (4.67)-(4.70)'te katsayıların elenmesiyle sisteme ait mod yapısı (şekil fonksiyonu) eşitliği elde edilir,

$$\begin{aligned} Y_n(x) = c_1 \left\{ e^{i\beta_{1n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} e^{i\beta_{2n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} e^{i\beta_{3n}x} \right. \\ \left. + \left[-1 + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} \right] e^{i\beta_{4n}(x)} \right\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Denklemler (4.35)-(4.37)'de genel operatörler ile tanımlanan katsayıların bu özel problemdeki karşılıkları,

$$k_{1n} = \frac{i \omega_n \mu \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.74)$$

$$f_n = \frac{\int_0^1 F \bar{Y}_n dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.75)$$

$$k_{2n} = \frac{\frac{1}{2} \nu_\ell^2 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_n'^2 dx \right\}}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.76)$$

ile ifade edilir. $n = 1$ için frekans tepki grafikleri,

$$\sigma_1 = -k_{11I} + \frac{1}{4} a_1^2 k_{21I} \mp \sqrt{\frac{f_{1R}^2 + f_{1I}^2}{a_1^2} - \left(k_{11R} - \frac{1}{4} a_1^2 k_{21R} \right)^2} \quad (4.77)$$

eşitliği kullanılarak çizilir. Kararlılık analizinde kullanılacak eşitlikler,

$$a_1' = -a_1 k_{11R} + f_{1R} \cos \gamma_1 - f_{1I} \sin \gamma_1 + \frac{1}{4} a_1^3 k_{21R} = F_{11}(a_1, \gamma_1) \quad (4.78)$$

$$\gamma_1' = \sigma_1 + k_{11I} - \frac{f_{1R}}{a_1} \sin \gamma_1 - \frac{f_{1I}}{a_1} \cos \gamma_1 - \frac{1}{4} a_1^2 k_{21I} = F_{21}(a_1, \gamma_1) \quad (4.79)$$

şeklindedir. Genel çözüm ise şöyledir,

$$w(x, t; \varepsilon) = a_1 \{ \cos(\Omega t - \gamma_1) Y_{1R} - \sin(\Omega t - \gamma_1) Y_{1I} \} + O(\varepsilon) \quad (4.80)$$

4.2.1.1.Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde uygulama probleminin sonuçları grafikler üzerinden tartışılacaktır.

Şekil 4.1'de değişik kirişlik katsayıları için birinci mod tabii frekans değerlerinin kiriş eksenel hızıyla değişimi görülmektedir. Kiriş hızı arttıkça birinci mod tabii frekans değerleri azalmaktadır. Kararsızlık durumu yoktur. Kirişlik katsayısı arttıkça sistemin birinci mod tabii frekans değerleri artmaktadır.

Şekil 4.2 'de $v_f = 0.2$ kirişlik katsayısı değeri için ilk üç mod tabii frekans değerlerinin kiriş eksenel hızıyla değişimi görülmektedir. Kiriş hızı arttıkça tabii frekans değerleri azalmaktadır. Mod değeri arttıkça tabii frekans değerleri sıfırlanamamaktadır. Eksenel hareketli sürekli ortamlarla ilgili önemli bir özellik olan bu durumda eksenel hızın artışı kararsızlıklara sebep olmaktadır.

Şekil 4.3 'de $v_f = 0.2$ kirişlik katsayısı için birinci mod tabii frekans değerlerinin kiriş eksenel hızıyla değişimi görülmektedir. Burada gerçel kısım ve sanal kısımdan kasıt saçılma denklemi ile destek şartının ortak çözümünden elde edilen değerlerin gerçel ve sanal kısımlarıdır. Daha önce bahsedildiği üzere tabii frekans değerleri bulunurken saçılma denklemi ve destek şartının ortak çözümü söz konusudur. Burada her bir hız değerine karşılık gelen kökler karmaşık sayı yapısındadır. Eksenel hareketli kiriş probleminde çözümlerin sanal kısımları çok küçüktür ve sıfır kabul edilebilir. Tabii frekans olarak çözümlerin gerçel kısımları alınır. Birinci mod grafiklerinde ancak tabii frekans değerleri (gerçel kısımlar) sıfırlandıktan sonra sanal kısımlar anlamlı değerler almaya başlar. Diğer modlarda durum farklılaşır.

Şekil 4.4 'te $v_f = 0.2$ kirişlik katsayısı için ikinci mod tabii frekans değerlerinin kiriş eksenel hızıyla değişimi görülmektedir. İkinci mod grafiklerinde tabii frekans değerleri (gerçel kısımlar) sayısal çözümde sıfırlanmıştır. Ancak sanal kısmın anlamlı değerler almaya başladığı kısımdan itibaren sistem kritik hız değerine gelmiştir ve kararsızlık başlar. Şekil 4.2' de görüldüğü üzere tabii frekans grafikleri çizilirken bu mod değeri sanal kısmın anlamlı olduğu noktadan itibaren kesilmiştir.

Şekil 4.5 'te $v_f = 0.2$ kirişlik katsayısı için üçüncü mod tabii frekans değerlerinin kiriş eksenel hızıyla değişimi görülmektedir. Burada da sanal kısmın anlamlı değerler almaya başladığı nokta kritik hız değeridir.

Şekil 4.6 'da $v_f = 0.6$ kirişlik katsayısı değeri için ilk üç mod tabii frekans değerlerinin kiriş aksenal hızıyla değişimi görülmektedir. Kiriş hızı arttıkça tabii frekans değerleri azalmaktadır. Mod değeri arttıkça tabii frekans değerleri artmaktadır ancak sıfırlanamamaktadır.

Şekiller 4.7-4.8-4.9'da $v_f = 0.6$ kirişlik katsayısı değeri için sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü mod aksenal hız tabii frekans grafikleri görülmektedir. Bu grafiklerde de sanal kısımların sıfırdan farklı değerler almaya başladığı noktalar görülmektedir. Şekil 4.6'da tam bu noktalardan itibaren tabii frekans gerçel değerleri kesilmiş ve grafikte gösterilmemiştir. Dolayısıyla ikinci ve üçüncü mod değerleri sıfırlanamamaktadır.

Şekil 4.10 'da $v_f = 1.0$ kirişlik katsayısı değeri için ilk üç mod tabii frekans değerlerinin kiriş aksenal hızıyla değişimi görülmektedir. Kiriş hızı arttıkça tabii frekans değerleri azalmaktadır. Mod değeri arttıkça tabii frekans değerleri yine artmaktadır ancak sıfırlanamamaktadır.

Şekiller 4.11-4.13'te $v_f = 1.0$ kirişlik katsayısı değeri için sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü moda ait aksenal hız- tabii frekans grafikleri görülmektedir.

Şekil 4.14'ten itibaren frekans tepki grafikleri gösterilmiştir. Frekans tepki grafikleri değişik parametreler için çizilmiştir. Bütün şekillerde kesikli çizgili bölümler kararsız bölgeleri göstermektedir. Nonlineer dinamiğin önemli bir kavramı olan sıçrama olayı (jump phenomena) grafiklerde görülmektedir.

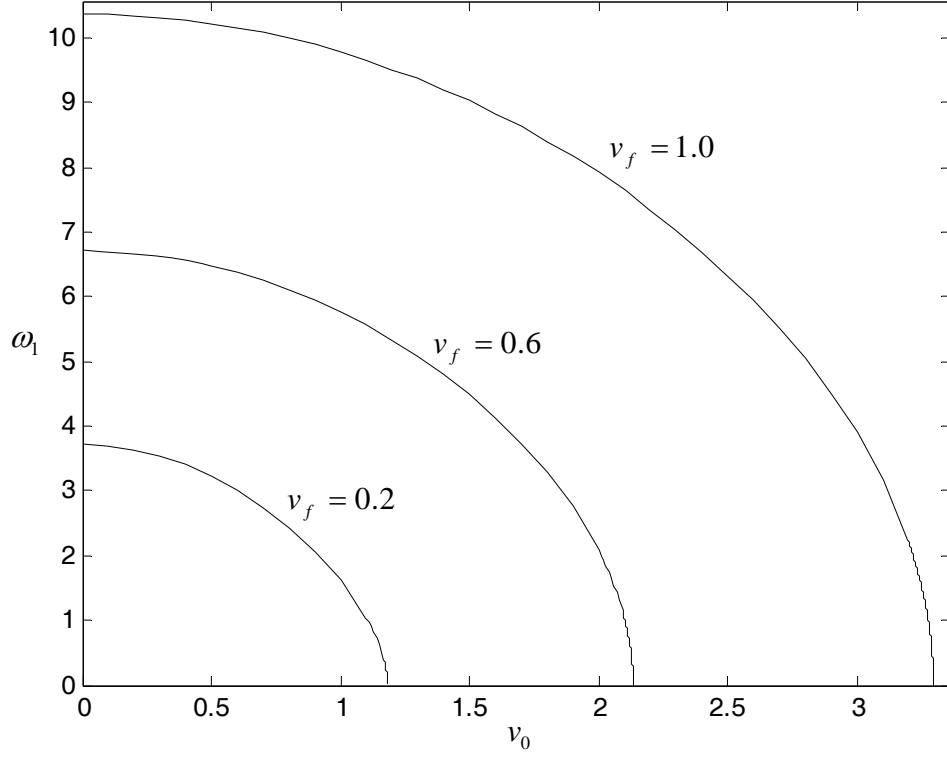
Şekiller 4.14-4.16'da zorlama kuvvetinin değişik değerleri için çizilen grafikler karşılaştırma açısından Şekil 4.17'de toplu halde verilmiştir. Şekil 4.17 göstermektedir ki kuvvetin artışı nonlineerliği ve genliği artırmaktadır. Grafiklerde sertleştirici etki (hardening effect) görülmektedir.

Şekil 4.18 ve 4.19'da v_ℓ boyuna direngenliğin değişik değerleri için çizilen grafikler görülmektedir. Karşılaştırma açısından Şekil 4.20'de üç farklı boyuna direngenlik değeri için frekans tepki grafikleri çizilmiştir. Boyuna direngenliğin artışıyla nonlineerlik artmaktadır.

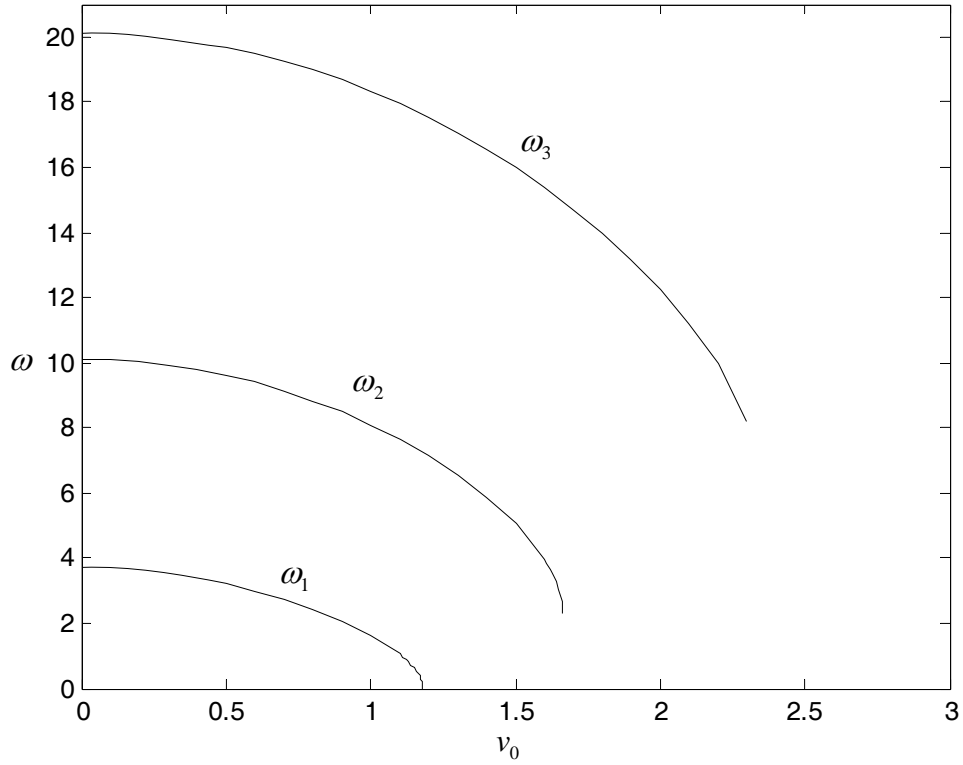
Şekil 4.21 ve 4.22 'de yine değişik parametreler için frekans tepki grafikleri elde edilmiştir. Burada amaç diğer parametreleri belli değerde tutarken v_f kirişlik katsayısının değişiminin etkisine bakmaktır. Şekil 4.23'te frekans tepki grafikleri v_f kirişlik katsayısının (enine

direngenlik) değişimine bağlı olarak birarada çizilmiştir. Görülmektedir ki enine direngenlik azaldıkça nonlineerlik ve genlik değerleri artmaktadır.

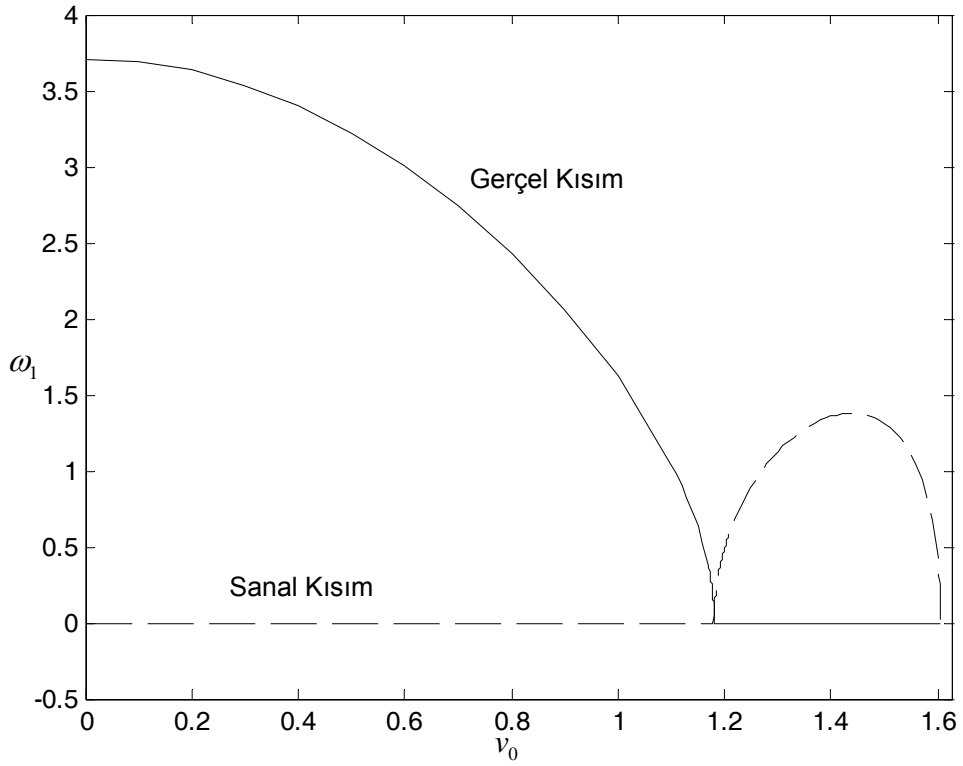
Şekil 4.24 ve 4.25'te aynı parametre değerleri kullanılarak sadece sönüm katsayısının değişimine bakılmıştır. Elde edilen grafikler Şekil 4.26'da birarada gösterilmiştir. Görülmektedir ki sönümün artışı genlikleri düşürmektedir.



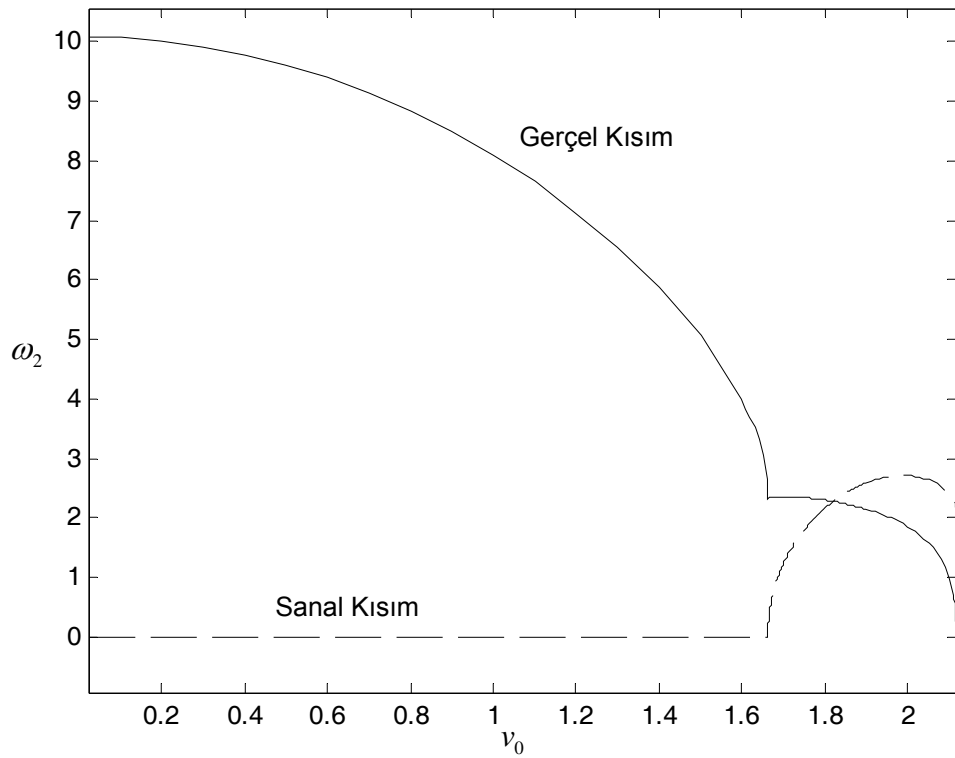
Şekil 4.1. Değişik kirışık katsayıları için aksenal hıza karşılık gelen birinci tabii frekanslar



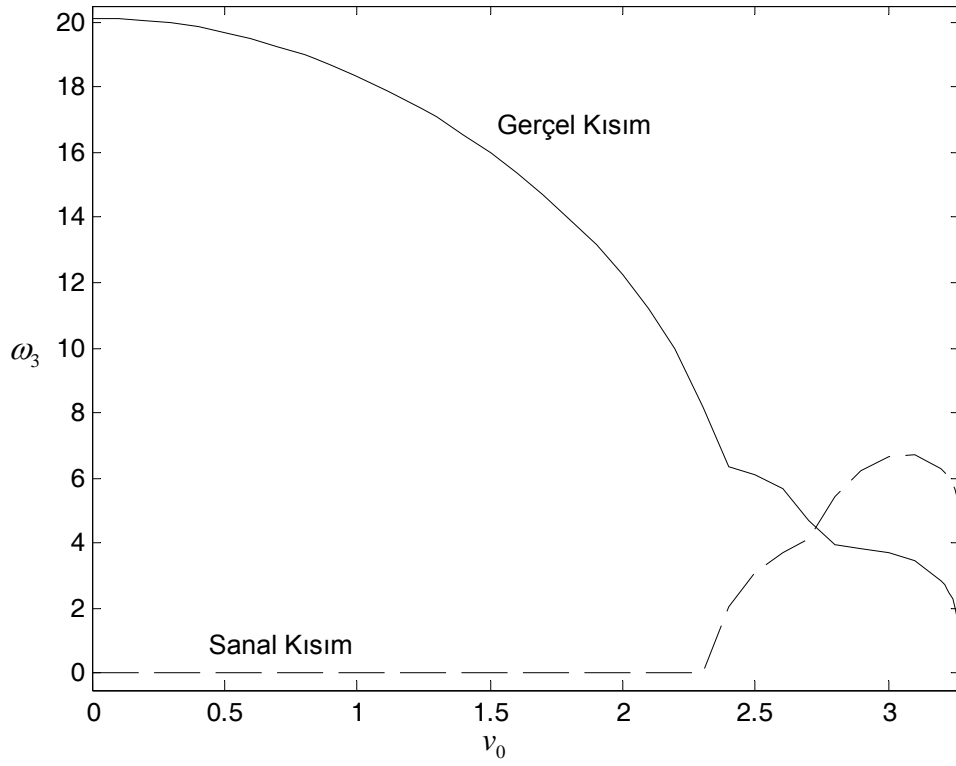
Şekil 4.2. Aksenal hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans
($v_f = 0.2$)



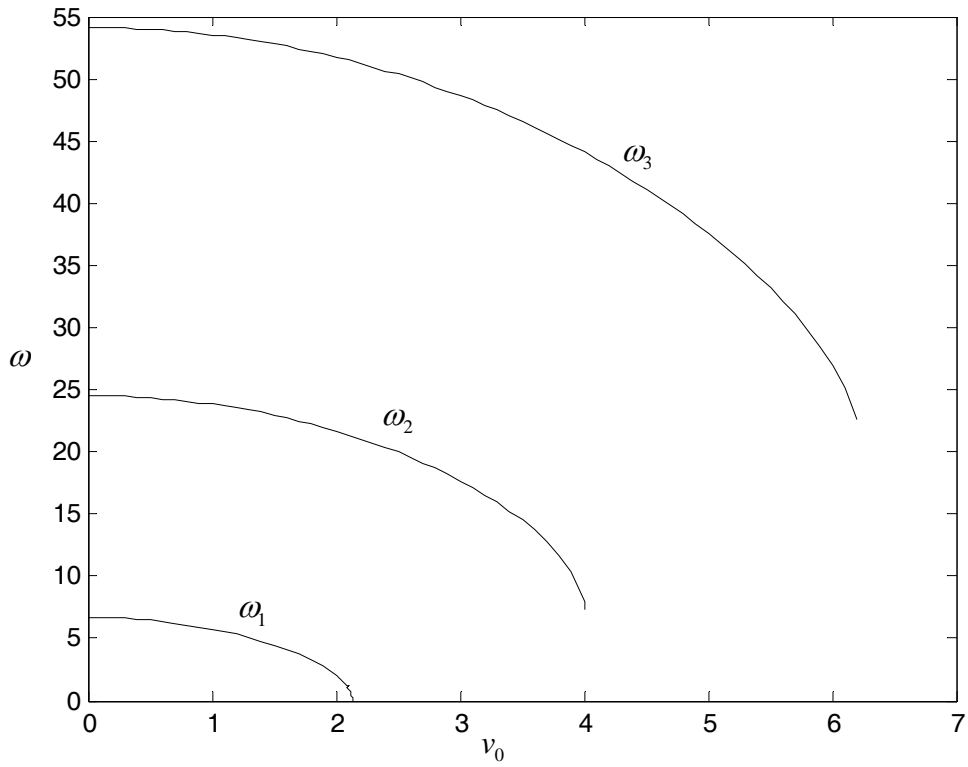
Şekil 4.3. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($v_f = 0.2$)



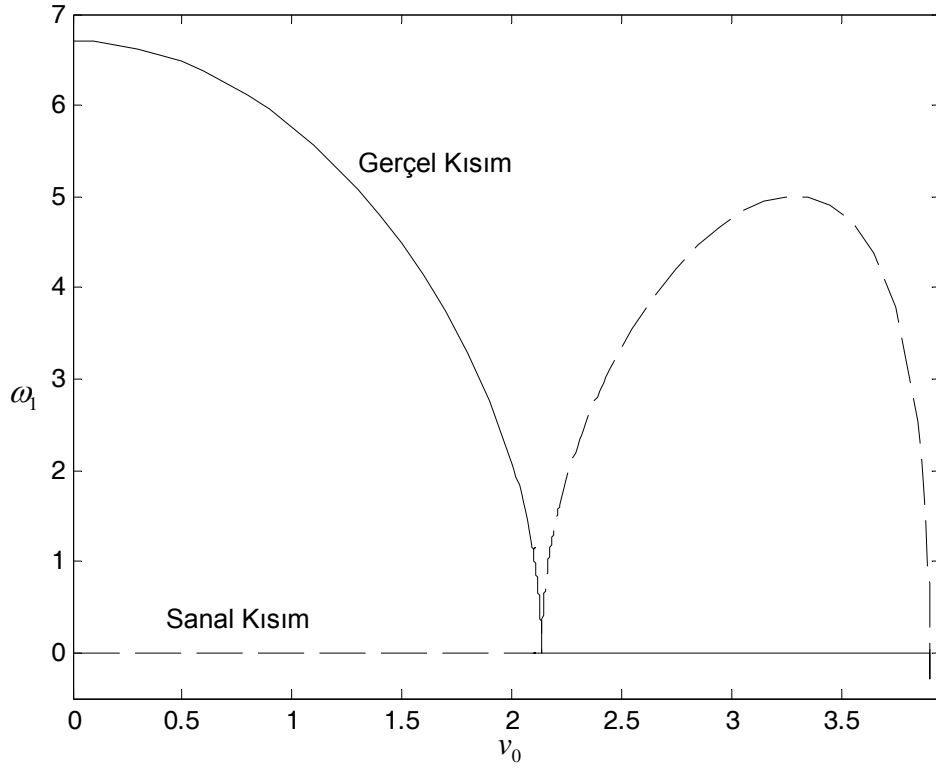
Şekil 4.4. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($v_f = 0.2$)



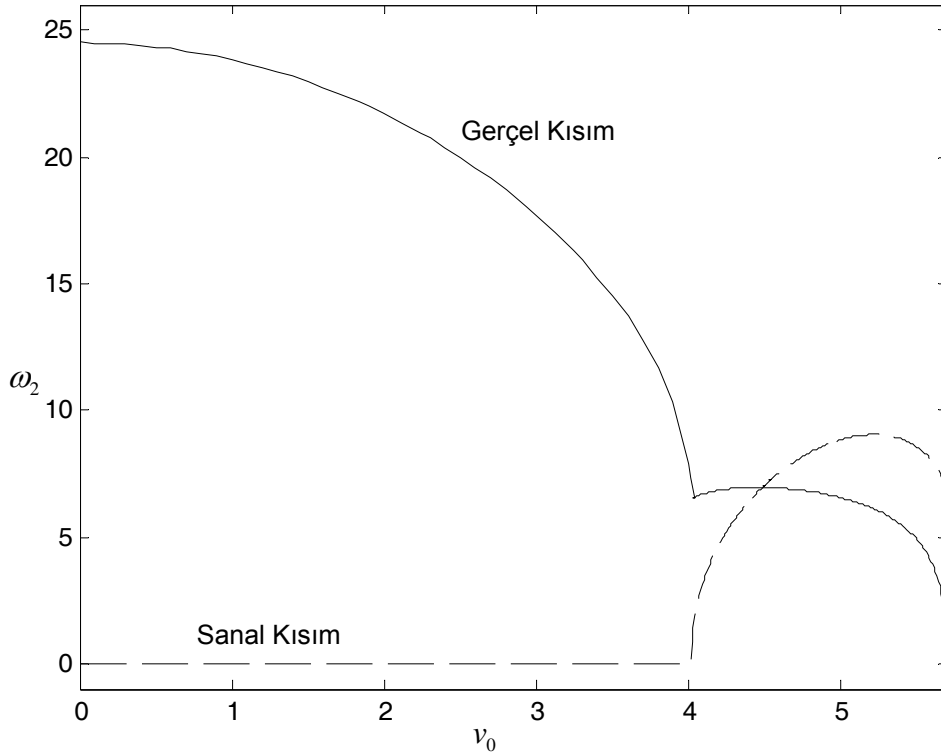
Şekil 4.5. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2$)



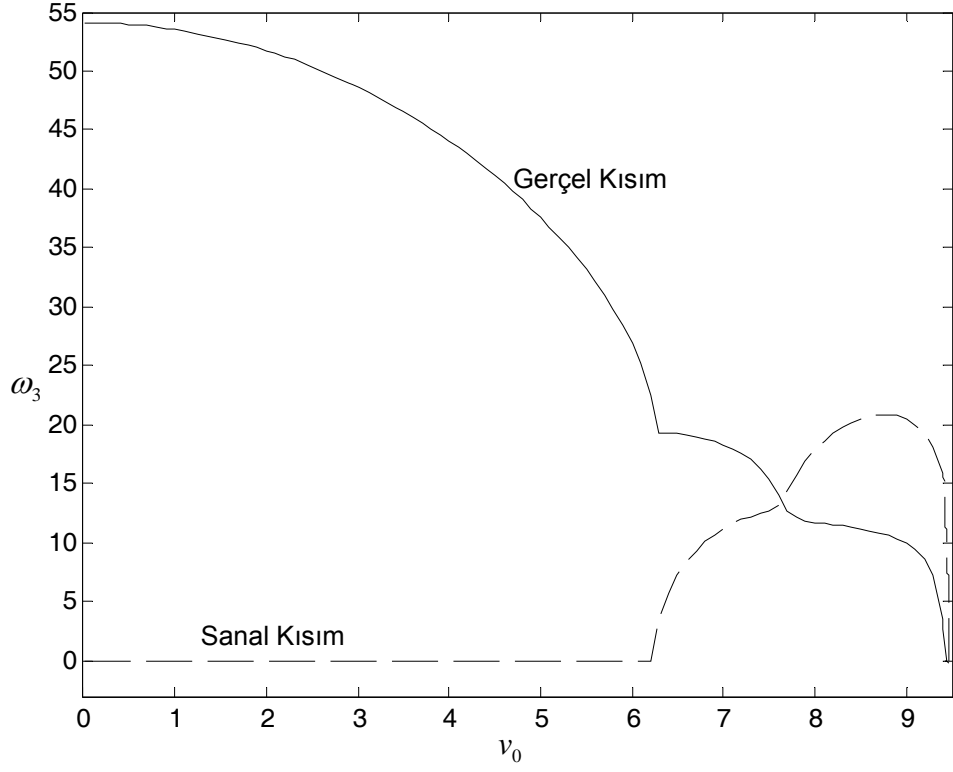
Şekil 4.6. Eksenel hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans ($v_f = 0.6$)



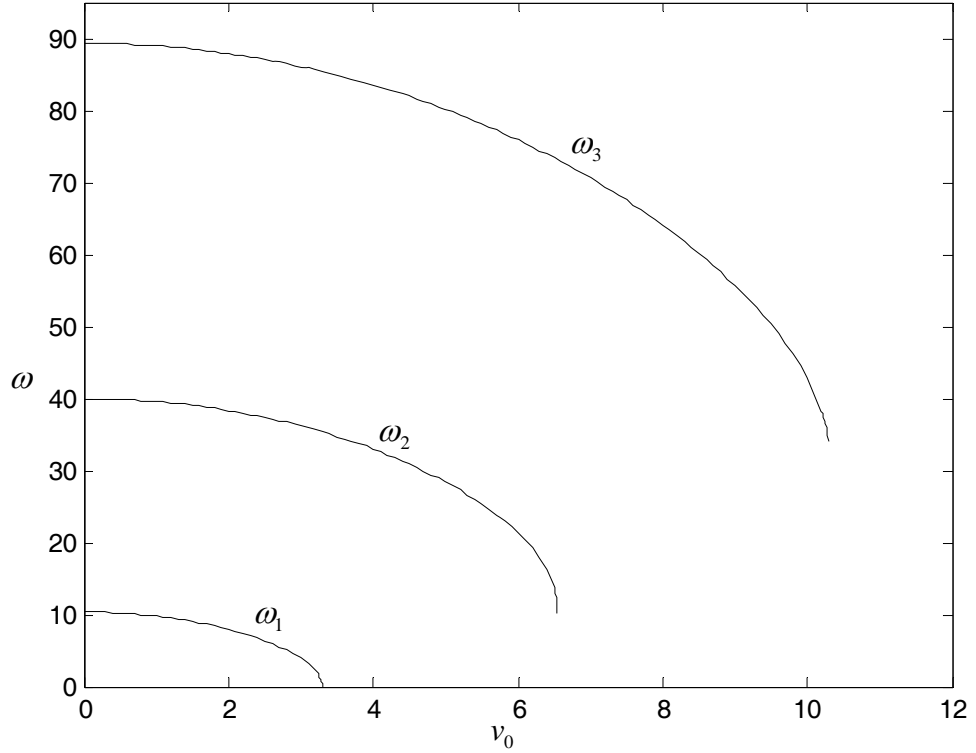
Şekil 4.7. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.6$)



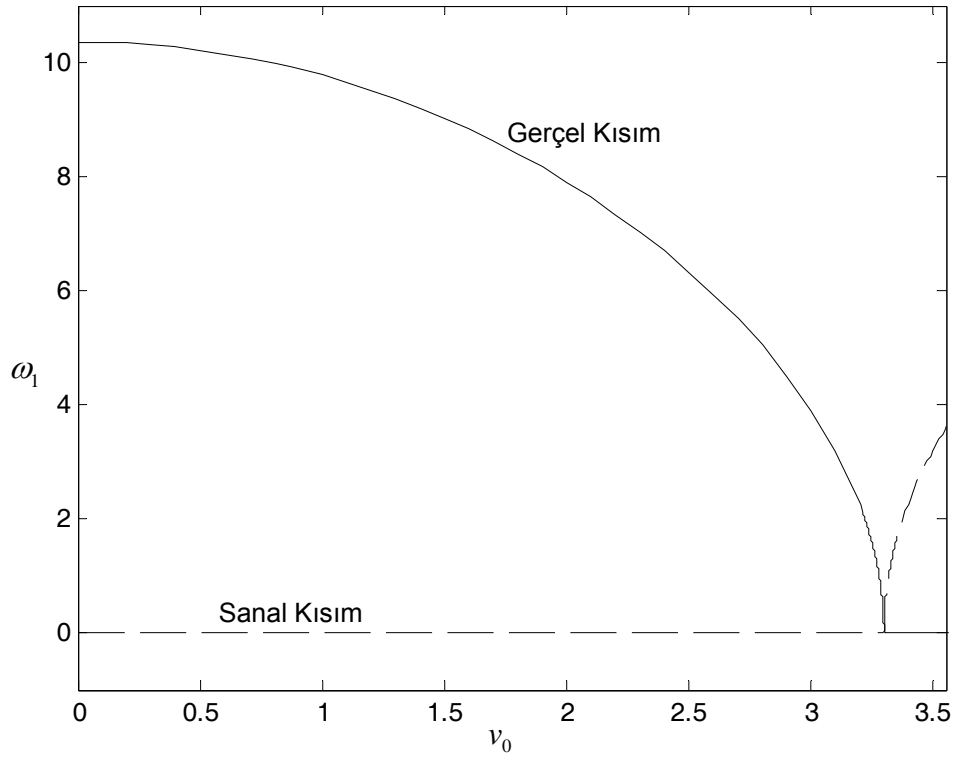
Şekil 4.8. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.6$)



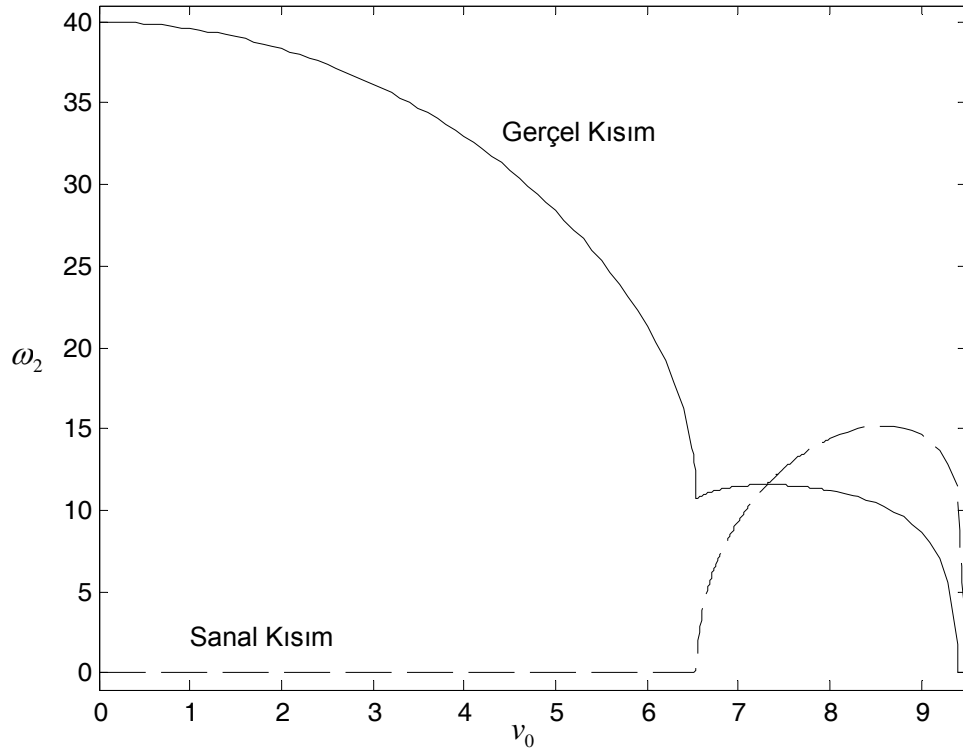
Şekil 4.9. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($v_f = 0.6$)



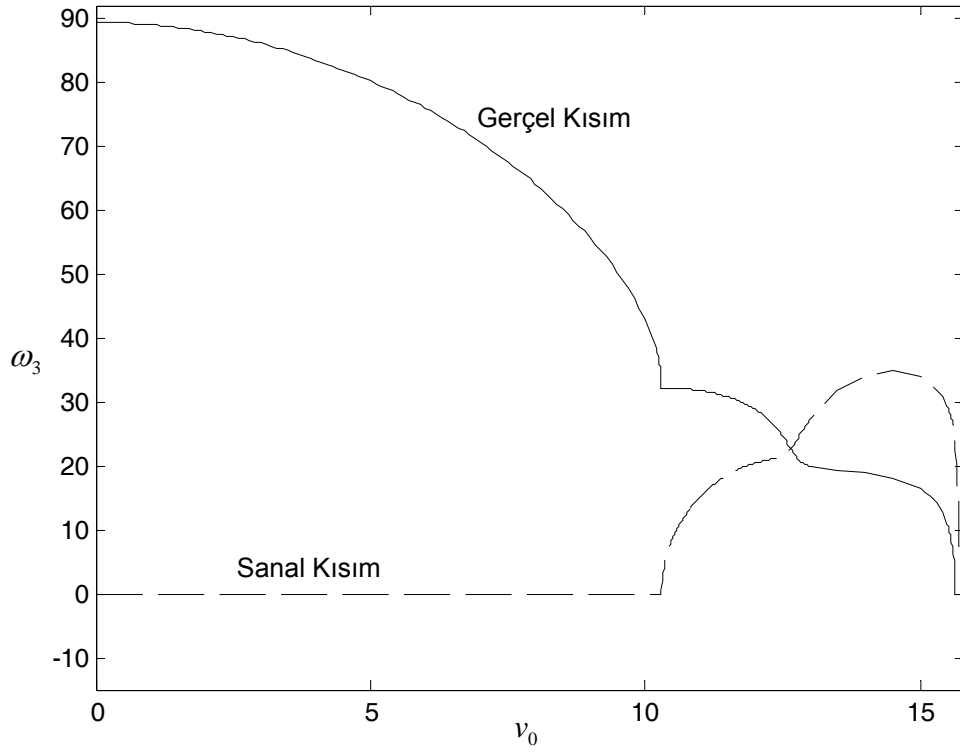
Şekil 4.10. Eksenel hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans
($v_f = 1.0$)



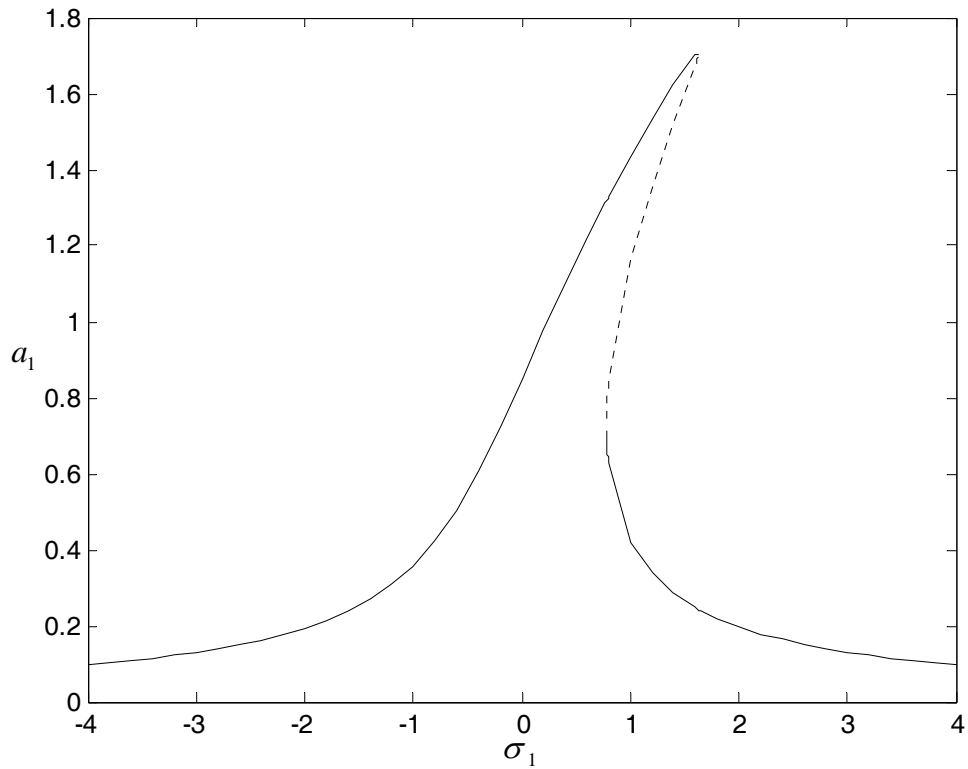
Şekil 4.11. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 1.0$)



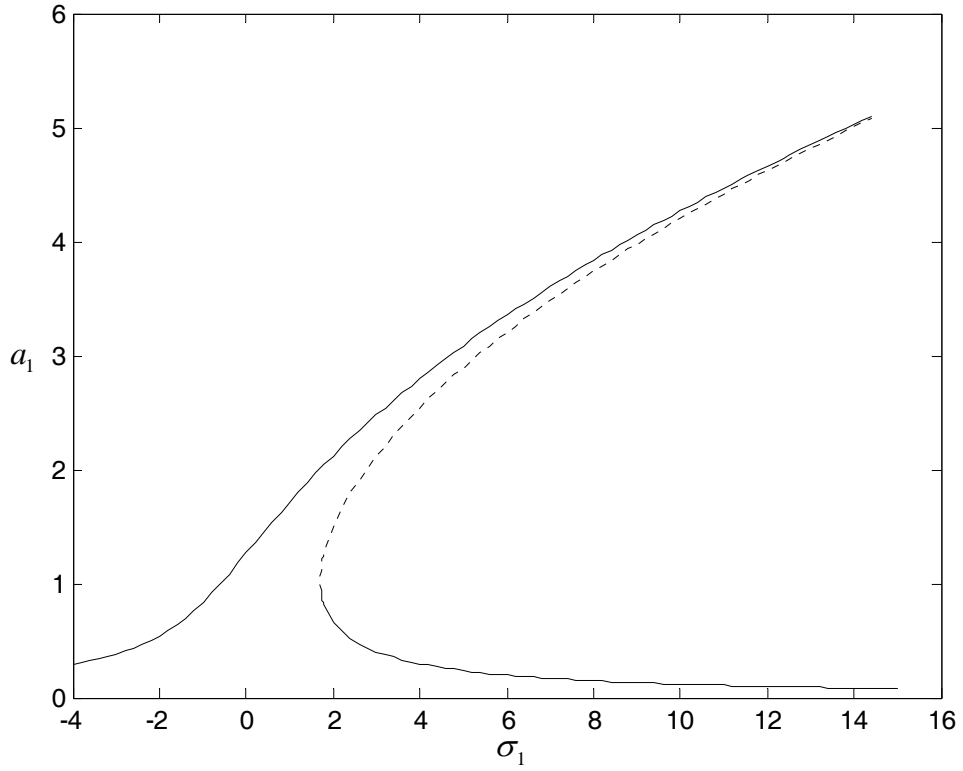
Şekil 4.12. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların reel ve sanal kısımları ($v_f = 1.0$)



Şekil 4.13. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların reel ve sanal kısımları ($v_f = 1.0$)

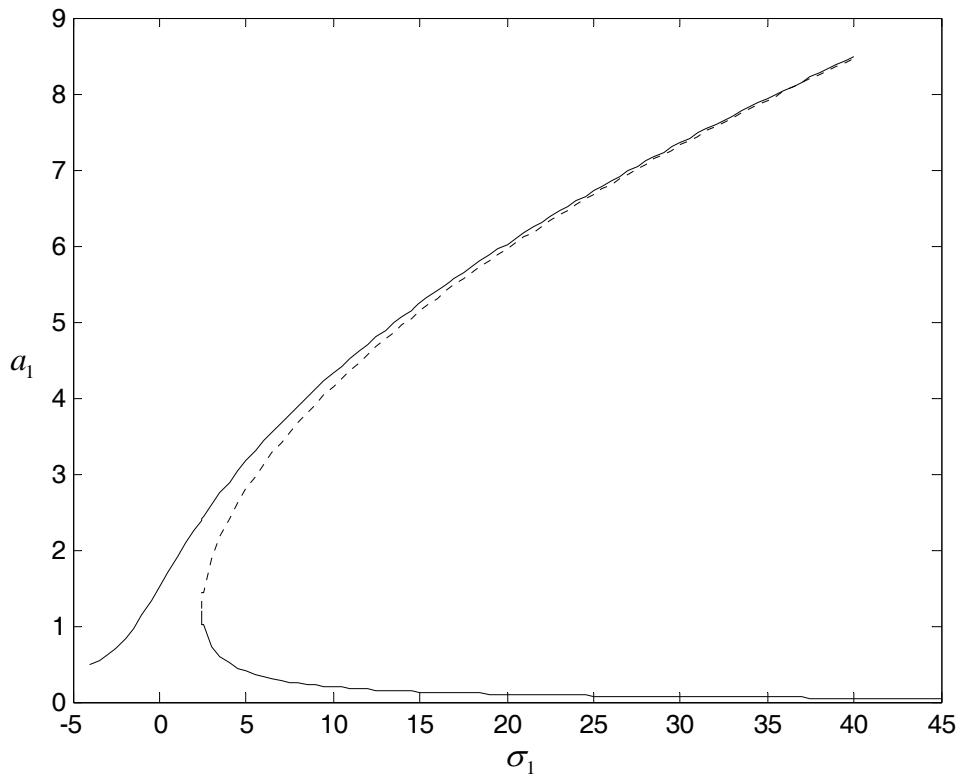


Şekil 4.14. Frekans Tepki Grafiği
($v_f = 0.2, v_l = 0.2, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 3.2211$)



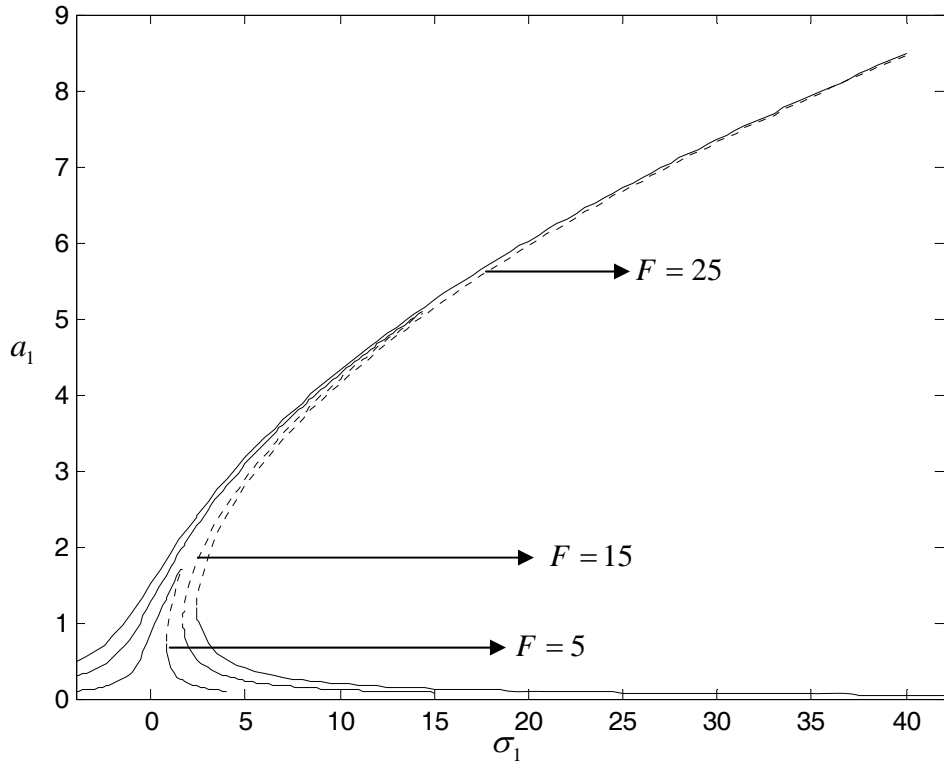
Şekil 4.15. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.5$, $F = 15$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$)

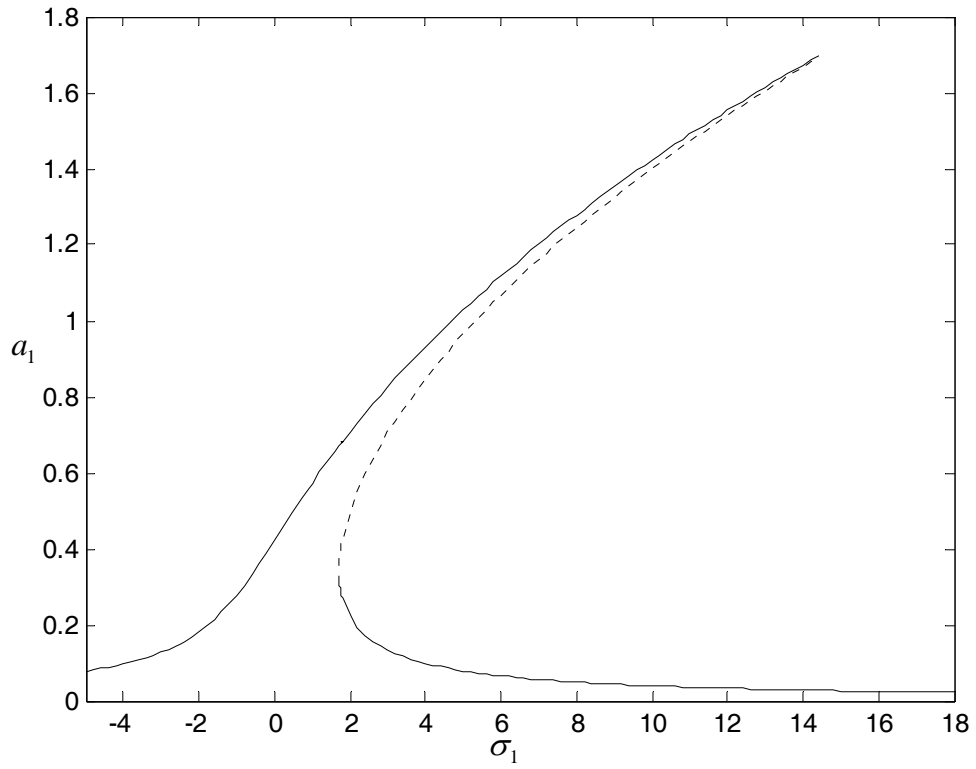


Şekil 4.16. Frekans Tepki Grafiği

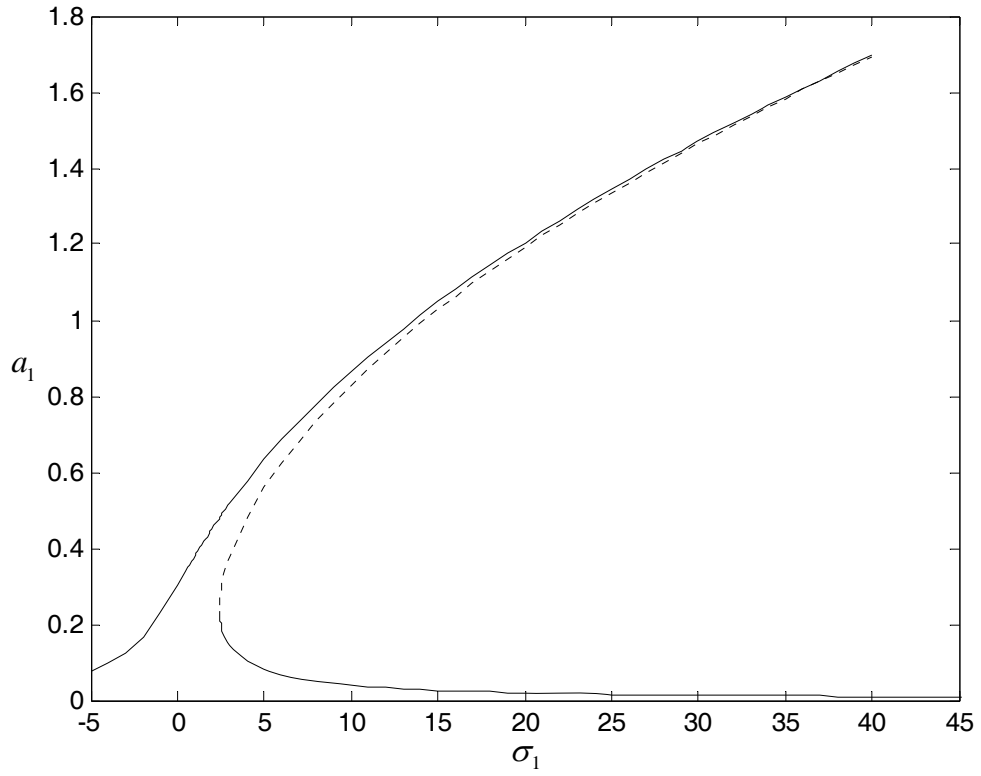
($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.5$, $F = 25$, $v_0 = 0.5$, $\omega_1 = 3.2211$)



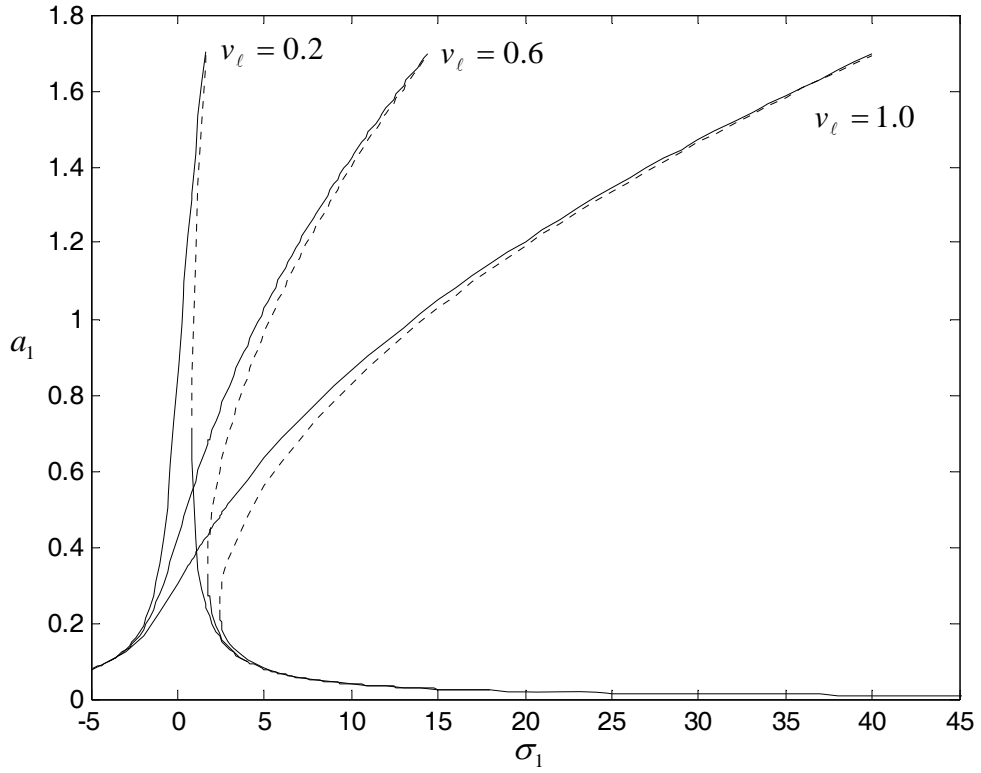
Şekil 4.17. Frekans Tepki Grafiği
 $(v_f = 0.2, v_\ell = 0.2, \mu = 0.5, F = 5-15-25, v_0 = 0.5, \omega_1 = 3.2211)$



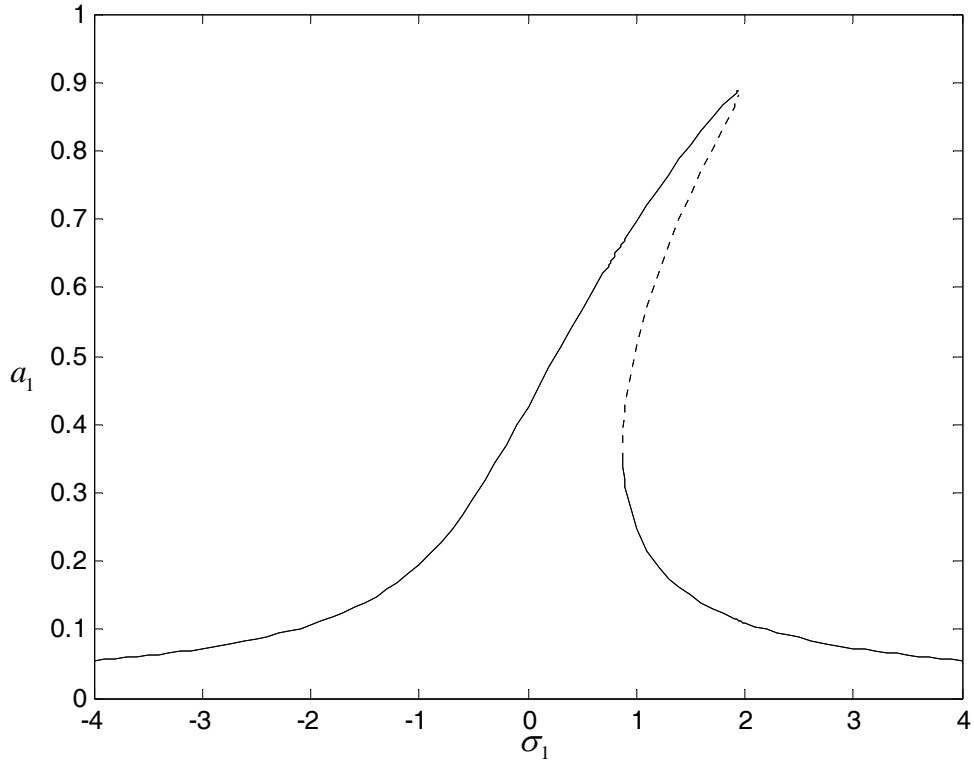
Şekil 4.18. Frekans Tepki Grafiği
 $(v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 3.2211)$



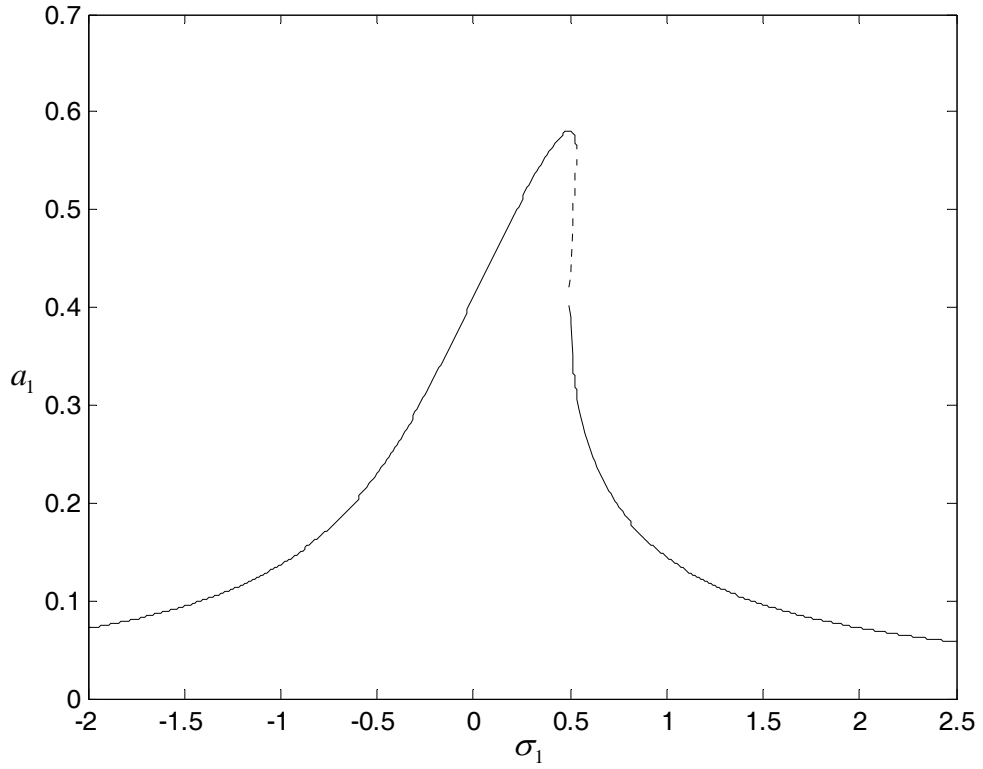
Şekil 4.19. Frekans Tepki Grafiği
 $(v_f = 0.2, v_\ell = 1.0, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 3.2211)$



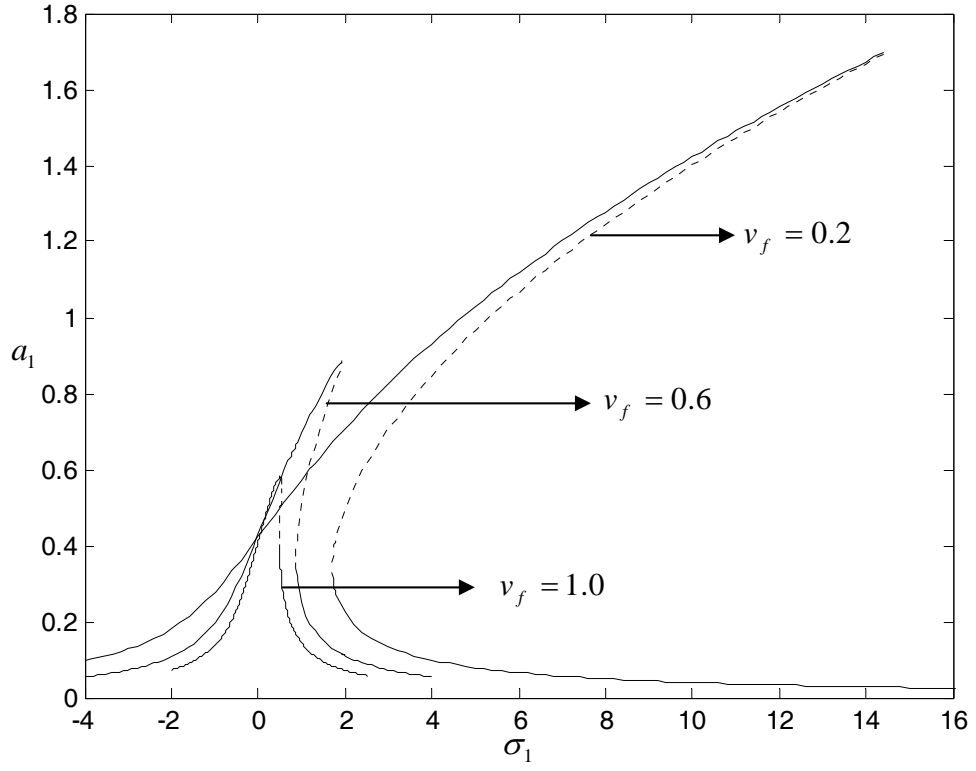
Şekil 4.20. Frekans Tepki Grafiği
 $(v_f = 0.2, v_\ell = 0.2 - 0.6 - 1.0, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 3.2211)$



Şekil 4.21. Frekans Tepki Grafiği
 ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 6.47457$)

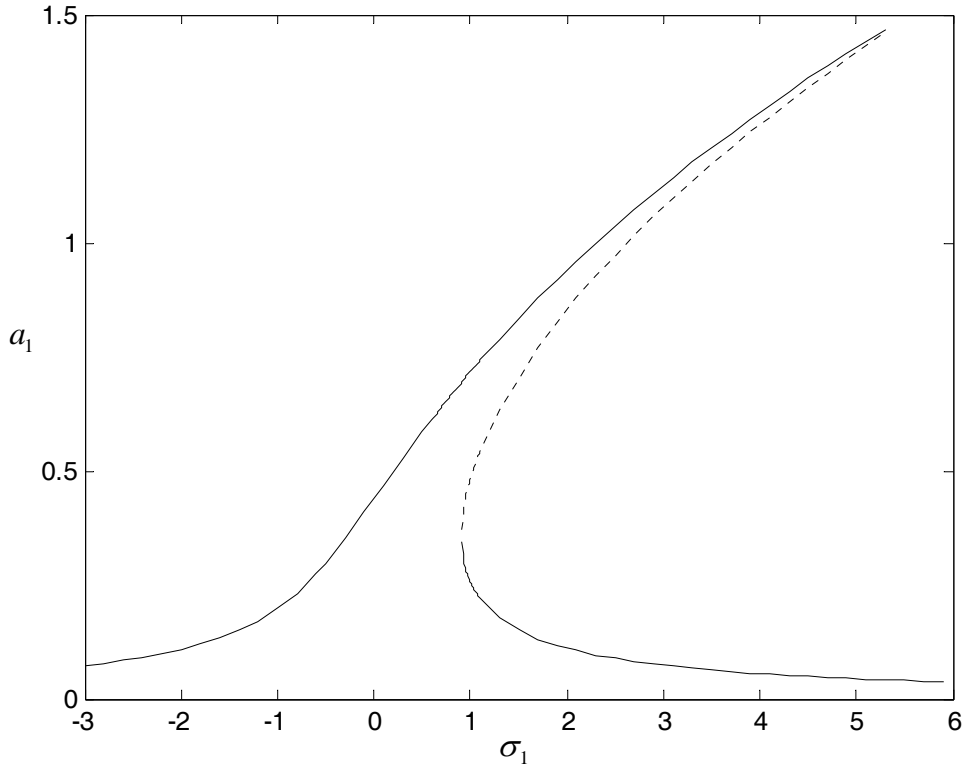


Şekil 4.22. Frekans Tepki Grafiği
 ($v_f = 1.0, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 10.21303$)



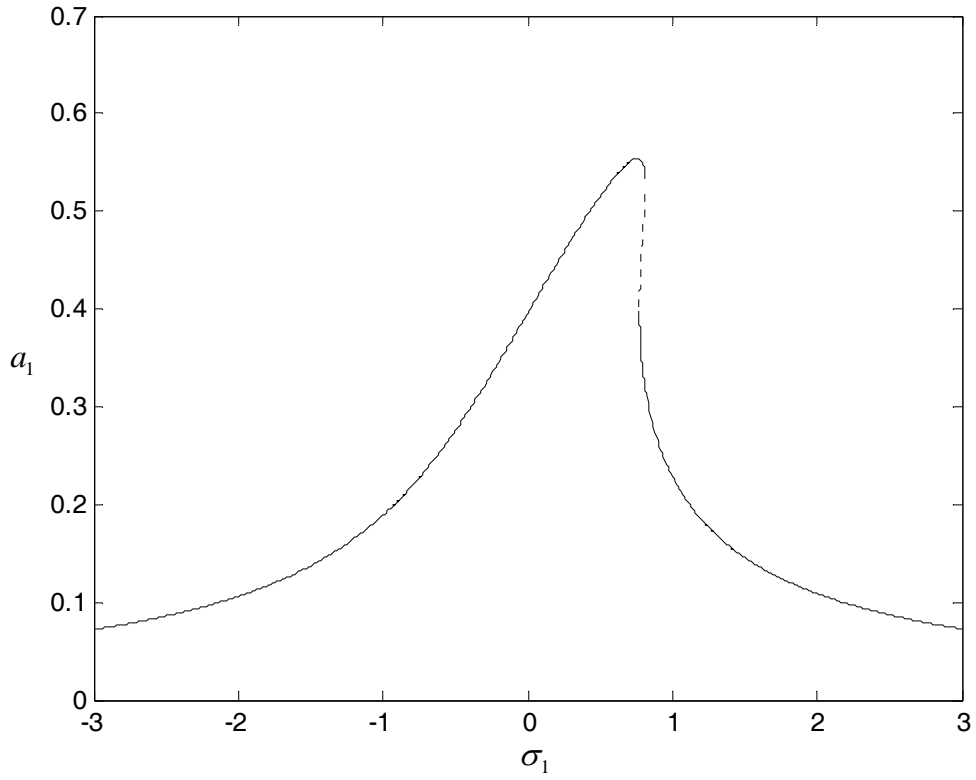
Şekil 4.23. Frekans Tepki Grafiği

($\nu_f = 0.2 - 0.6 - 1.0, \nu_\ell = 0.6, \mu = 0.5, F = 5, \nu_0 = 0.5, \omega_1 = 3.2211 - 6.47457 - 10.21303$)

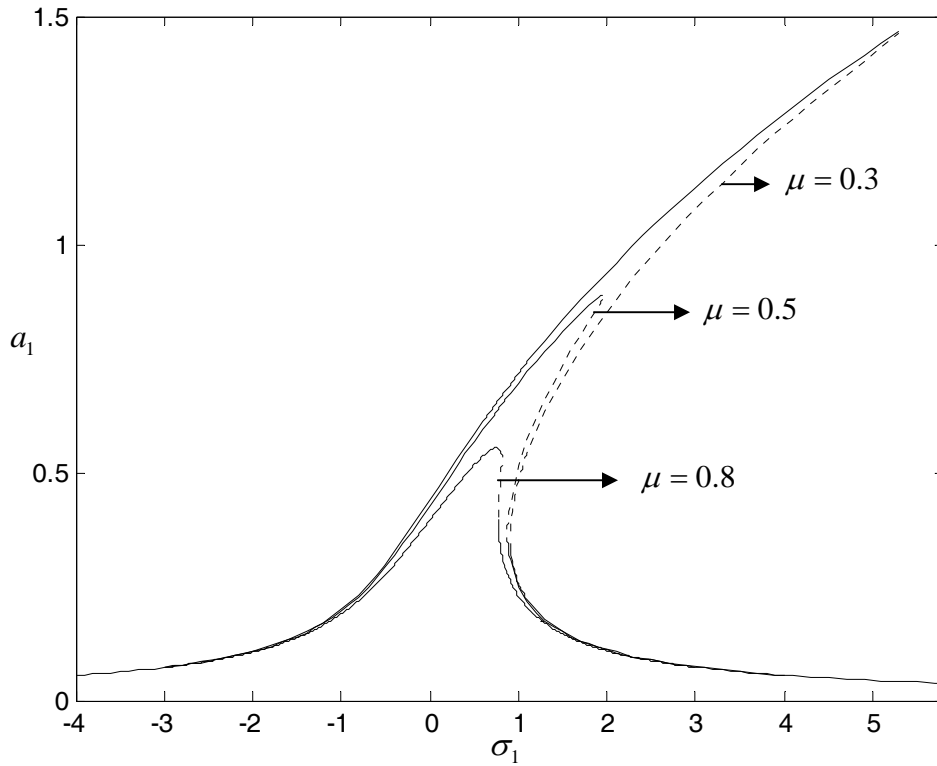


Şekil 4.24. Frekans Tepki Grafiği

($\nu_f = 0.6, \nu_\ell = 0.6, \mu = 0.3, F = 5, \nu_0 = 0.5, \omega_1 = 6.47457$)



Şekil 4.25. Frekans Tepki Grafiği
 ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.8, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 6.47457$)



Şekil 4.26. Frekans Tepki Grafiği
 ($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3-0.5-0.8, F = 5, v_0 = 0.5, \omega_1 = 6.47457$)

4.2.2.Uygulama Problemi 2

Baskın rezonans analizinde ele alınacak ikinci uygulama problemi, aksenal hareketli viskoelastik kirişlerdeki nonlineer titreşim problemidir. Boyutsuz hareket denklemi ve sınır şartları Bölüm 2.4.2'de ele alınmıştır,

$$\ddot{w} + (v_0^2 - 1)w'' + 2v_0\dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \varepsilon\alpha\dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu\dot{w} = \varepsilon F \cos \Omega t + \varepsilon \left\{ \frac{3}{2}v_\ell^2 w'' w'^2 + 2\alpha k \dot{w}' w' w'' + \alpha k \dot{w}'' w'^2 \right\} \quad (4.81)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (4.82)$$

Genel çözüme ait operatörlerin bu problemdeki karşılıkları aşağıda sıralanmıştır.

$$\mathbf{L}_1(w) = (v_0^2 - 1)w'' + v_f^2 w^{IV} \quad (4.83)$$

$$\mathbf{L}_2(\dot{w}) = 2v_0\dot{w}' \quad (4.84)$$

$$\mathbf{L}_3(\dot{w}) = \alpha\dot{w}^{IV} + \mu\dot{w} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{L}_4(w) = F \quad (4.86)$$

$$\mathbf{C}_1(w, w, w) = \frac{3}{2}v_\ell^2 w'' w'^2 \quad (4.87)$$

$$\mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) = 2\alpha k \dot{w}' w' w'' + \alpha k \dot{w}'' w'^2 \quad (4.88)$$

Denklemler (4.17)-(4.19)'da tanımlanan özdeğer-özfonksiyon probleminin bu uygulama için karşılığı,

$$v_f^2 Y_n^{IV} + (v_0^2 - 1)Y_n'' + 2iv_0\omega_n Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (4.89)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \quad (4.90)$$

eşitlikleriyle ifade edilir. (4.89) diferansiyel denklemine,

$$Y_n(x) = C_{1n} e^{i\beta_{1n}x} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}x} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}x} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}x} \quad (4.91)$$

çözümü önerilir. Diğer uygulamada olduğu gibi burada da önerilen çözüm, (4.89) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa saçılma denklemi elde edilir,

$$v_f^2 \beta_{in}^4 + (1 - v_0^2) \beta_{in}^2 - 2v_0 \omega_n \beta_{in} - \omega_n^2 = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.92)$$

(4.91) çözümü, Denklem (4.90) ile verilen sınır şartlarında yazılırsa aşağıdaki denklem takımı elde edilir,

$$C_{1n} + C_{2n} + C_{3n} + C_{4n} = 0 \quad (4.93)$$

$$C_{1n} \beta_{1n}^2 + C_{2n} \beta_{2n}^2 + C_{3n} \beta_{3n}^2 + C_{4n} \beta_{4n}^2 = 0 \quad (4.94)$$

$$C_{1n} e^{i\beta_{1n}} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (4.95)$$

$$C_{1n} \beta_{1n}^2 e^{i\beta_{1n}} + C_{2n} \beta_{2n}^2 e^{i\beta_{2n}} + C_{3n} \beta_{3n}^2 e^{i\beta_{3n}} + C_{4n} \beta_{4n}^2 e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (4.96)$$

(4.93)-(4.96) eşitlikleri yine matris gösterimi ile ifade edilebilir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\beta_{1n}} & e^{i\beta_{2n}} & e^{i\beta_{3n}} & e^{i\beta_{4n}} \\ \beta_{1n}^2 & \beta_{2n}^2 & \beta_{3n}^2 & \beta_{4n}^2 \\ e^{i\beta_{1n}} \beta_{1n}^2 & e^{i\beta_{2n}} \beta_{2n}^2 & e^{i\beta_{3n}} \beta_{3n}^2 & e^{i\beta_{4n}} \beta_{4n}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

Bu denklem sistemine ait basit olmayan çözüm katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. Katsayılar determinanı sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} & (e^{i(\beta_{1n} + \beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{4n}^2) + (e^{i(\beta_{1n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{2n} + \beta_{4n})})(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) \\ & + (e^{i(\beta_{2n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{1n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{3n}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

elde edilir. (4.98) eşitliği, sayısal hesaplamalarda destek şartı olarak kullanılır. Viskoelastik kirişe ait tabii frekanslar destek şartı ve saçılma denkleminin sayısal çözümüyle elde edilir. (4.93)-(4.96) denklemlerinde katsayılar tek bir katsayı cinsinden yazılarak şekil fonksiyonu bulunur,

$$Y_n(x) = c_1 \left\{ e^{i\beta_{1n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} e^{i\beta_{2n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} e^{i\beta_{3n}x} \right. \\ \left. + \left[-1 + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} \right] e^{i\beta_{4n}(x)} \right\} \quad (4.99)$$

(4.35)-(4.37) eşitlikleriyle tanımlanan katsayıların viskoelastik giriş problemindeki karşılıkları,

$$k_{1n} = \frac{i\omega_n \int_0^1 (\alpha Y_n^{IV} + \mu Y_n) \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.100)$$

$$f_n = \frac{\int_0^1 F \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.101)$$

$$k_{2n} = \frac{\frac{3}{2} \nu_\ell^2 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' Y_n'^2 dx \right\} + i\omega_n \alpha k \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'^2 \bar{Y}_n'' dx + 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' Y_n' \bar{Y}_n' dx \right\}}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.102)$$

şeklindedir. $n = 1$ için frekans tepki grafiklerinin çizilmesini sağlayan eşitlikler,

$$\sigma_1 = -k_{11I} + \frac{1}{4} a_1^2 k_{21I} \mp \sqrt{\frac{f_{1R}^2 + f_{1I}^2}{a_1^2} - \left(k_{11R} - \frac{1}{4} a_1^2 k_{21R} \right)^2} \quad (4.103)$$

kararlılık analizinde kullanılacak eşitlikler,

$$a_1' = -a_1 k_{11R} + f_{1R} \cos \gamma_1 - f_{1I} \sin \gamma_1 + \frac{1}{4} a_1^3 k_{21R} = F_{11}(a_1, \gamma_1) \quad (4.104)$$

$$\gamma_1' = \sigma_1 + k_{11I} - \frac{f_{1R}}{a_1} \sin \gamma_1 - \frac{f_{1I}}{a_1} \cos \gamma_1 - \frac{1}{4} a_1^2 k_{21I} = F_{21}(a_1, \gamma_1) \quad (4.105)$$

şeklinde yazılır. Genel çözüm,

$$w(x, t; \varepsilon) = a_1 \{ \cos(\Omega t - \gamma_1) Y_{1R} - \sin(\Omega t - \gamma_1) Y_{1I} \} + O(\varepsilon) \quad (4.106)$$

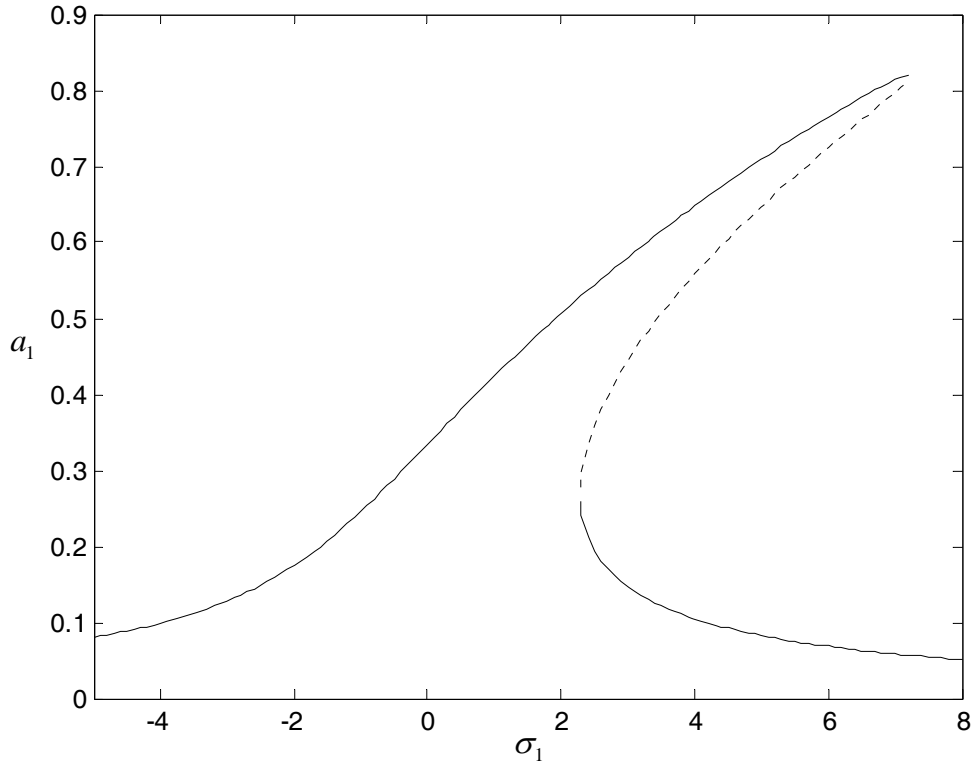
ile ifade edilir.

4.2.2.1.Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde aksenal hareketli viskoelastik kirişe ait frekans tepki grafikleri elde edilmiştir.

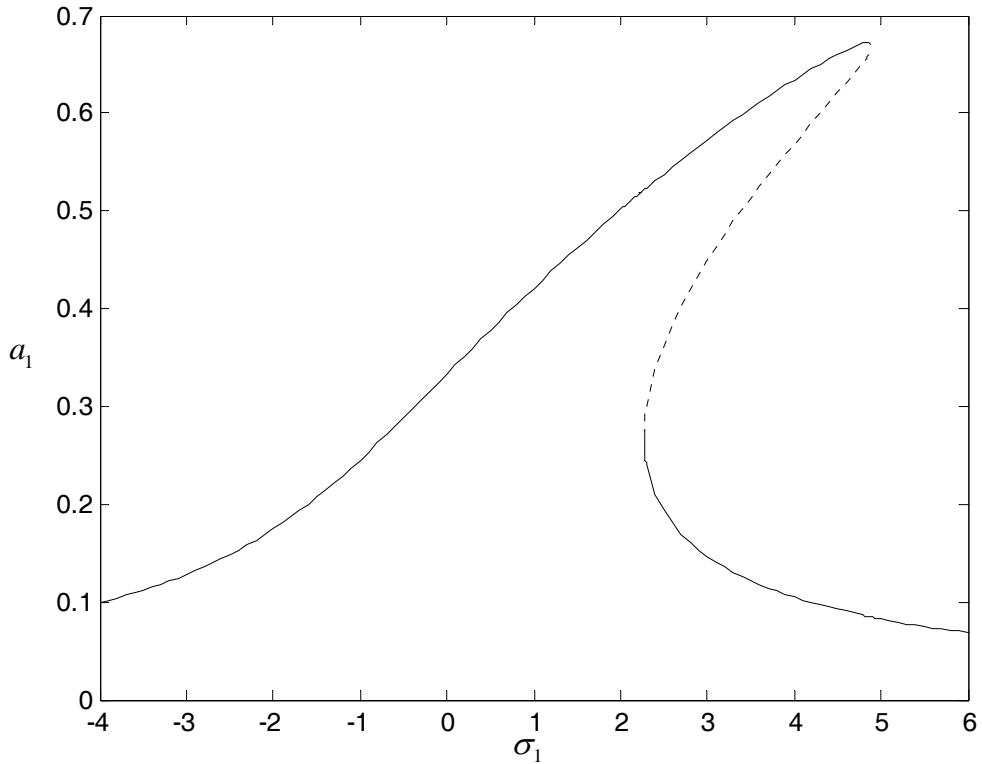
Şekiller 4.27-4.29'da değişik parametreler için çizilen frekans-tepki grafikleri görülmektedir. Burada değişen sadece k viskoelastisite parametresinin değeridir. Şekil 4.30'da grafikler birarada gösterilmiştir. Görülmektedir ki k parametresinin artışı nonlineariteyi azaltıp genlikleri düşürmektedir.

Şekiller 4.31-4.34'te yine parametrelerin değişik değerleri için frekans tepki grafikleri gösterilmiştir. Bu grafiklerde ise yine bütün parametre değerleri aynı tutulurken viskoelastisite katsayısı α 'nın değiştiği görülmektedir. Şekil 4.35'te grafikler karşılaştırma açısından birarada gösterilmiştir. α parametresinin artışı genlikleri azaltmaktadır. Nonlinearliğin de azaldığı görülmektedir.



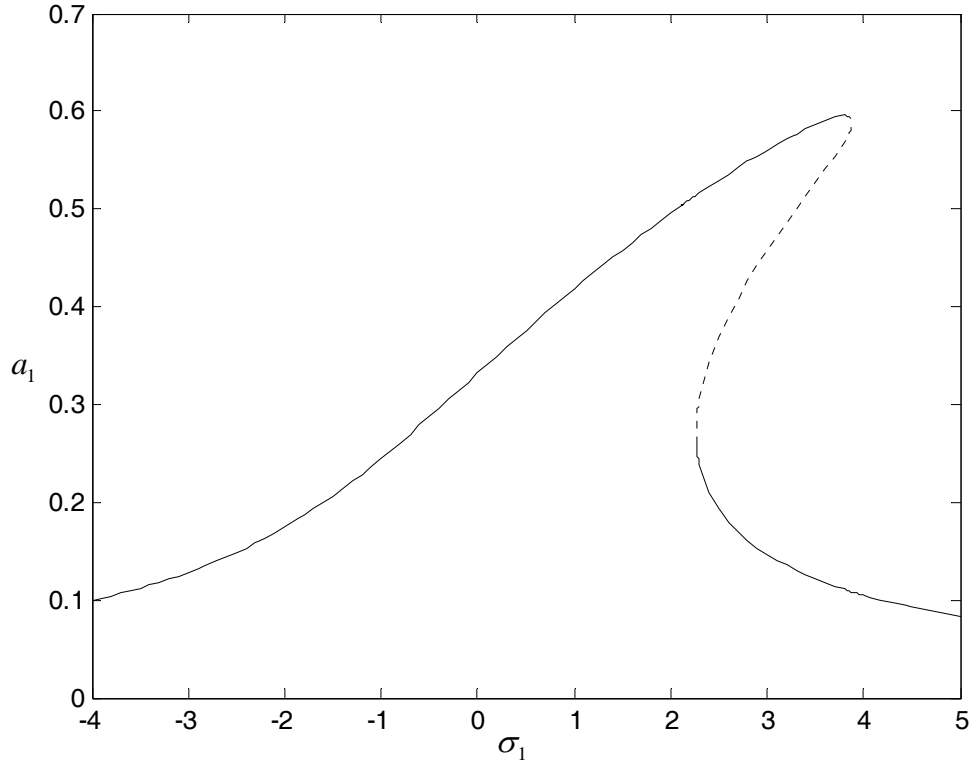
Şekil 4.27. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3, F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 10$)



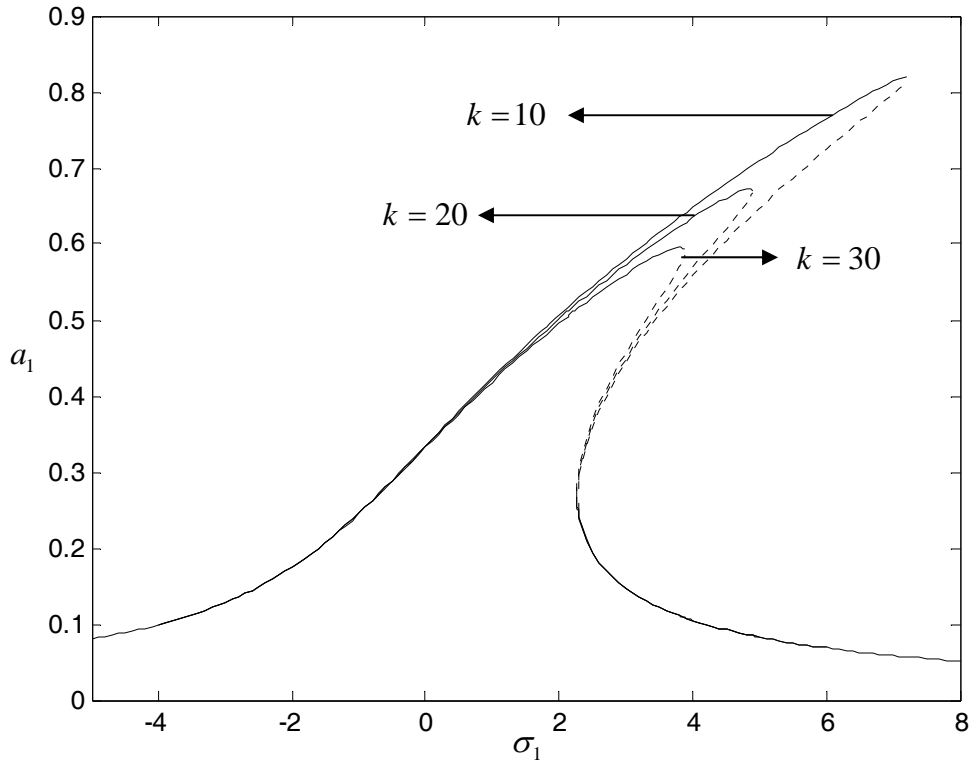
Şekil 4.28. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3, F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 20$)



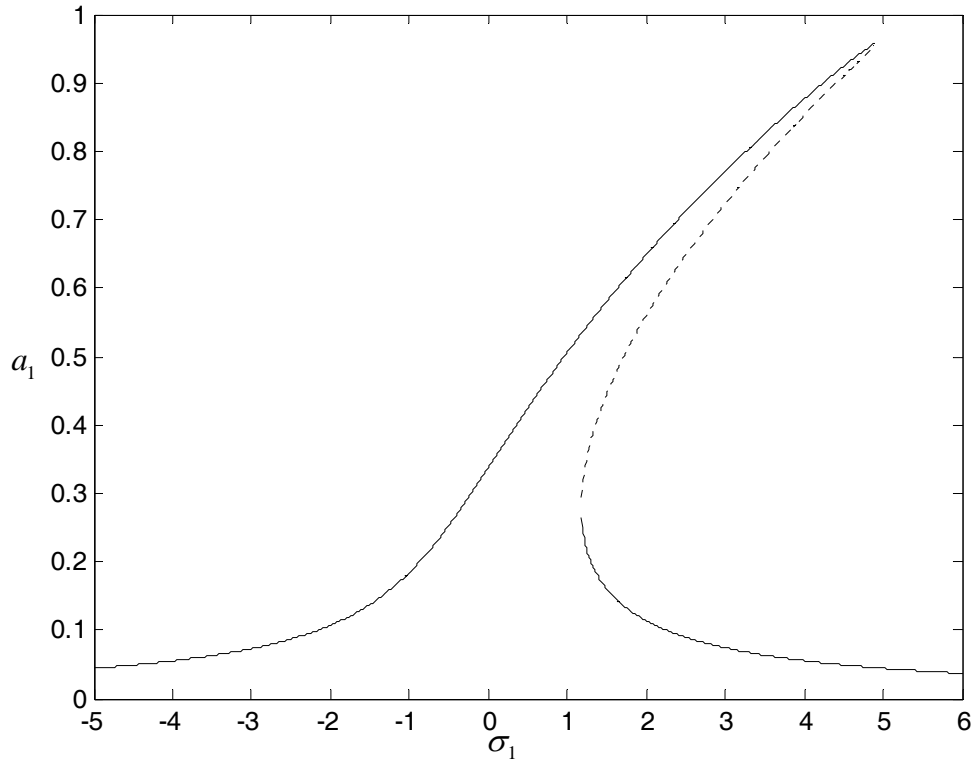
Şekil 4.29. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3, F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 30$)



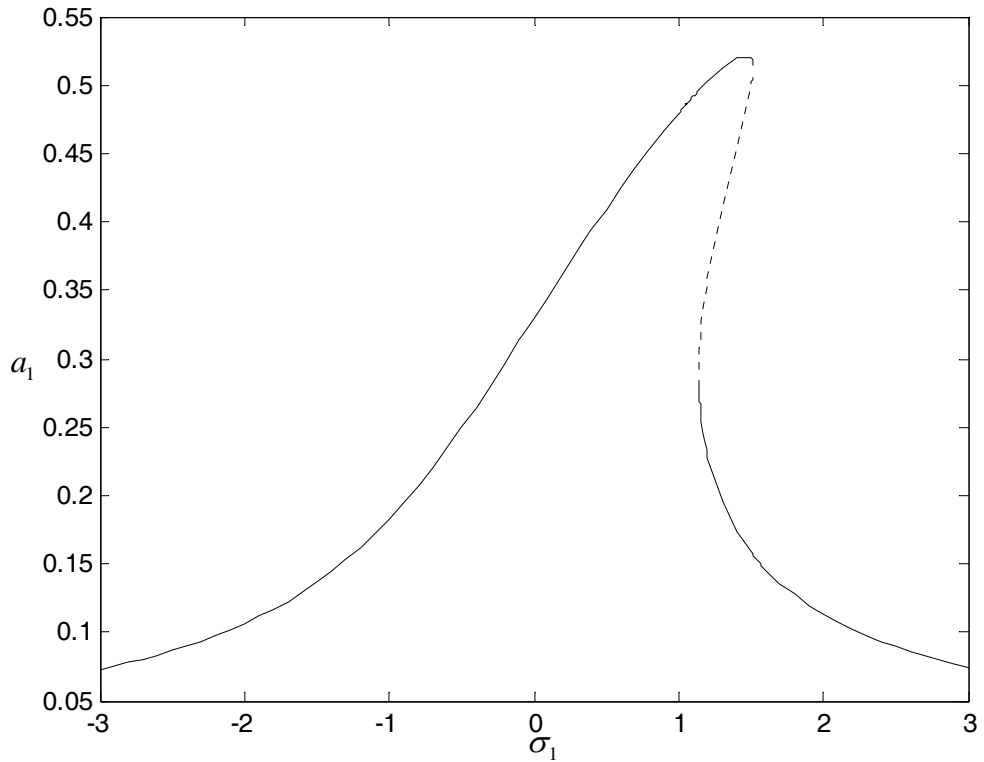
Şekil 4.30. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2, v_\ell = 0.6, \mu = 0.3, F = 5, v_0 = 0.8, \omega_1 = 2.42739, \alpha = 0.001, k = 10 - 20 - 30$)



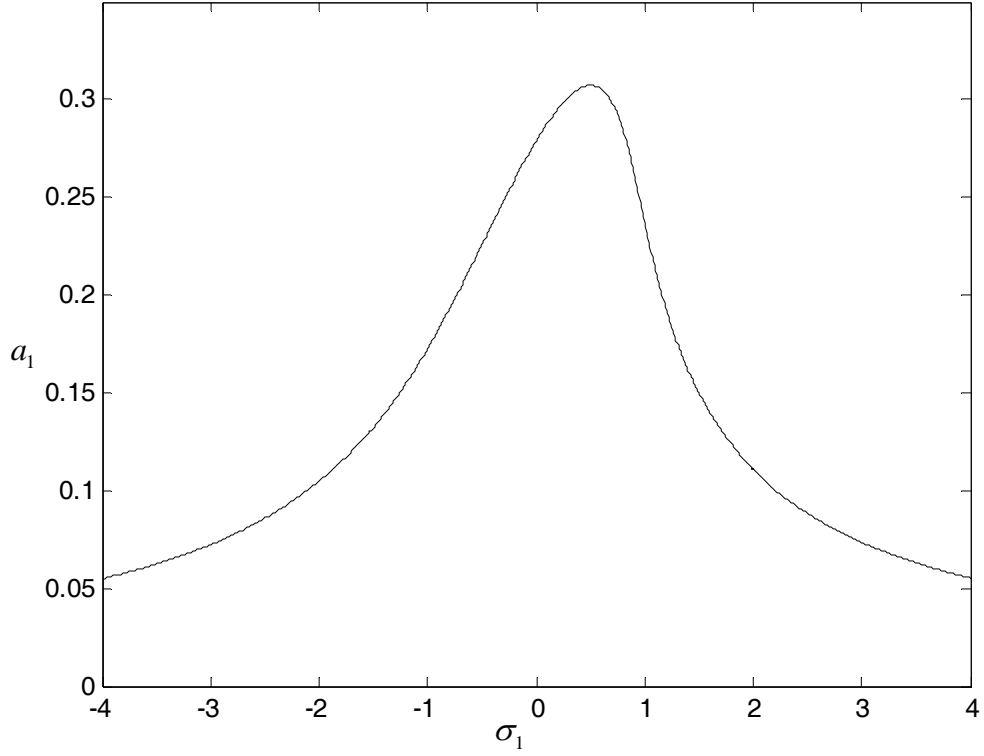
Şekil 4.31. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 1.2, \omega_1 = 5.33248, \alpha = 0, k = 10$)



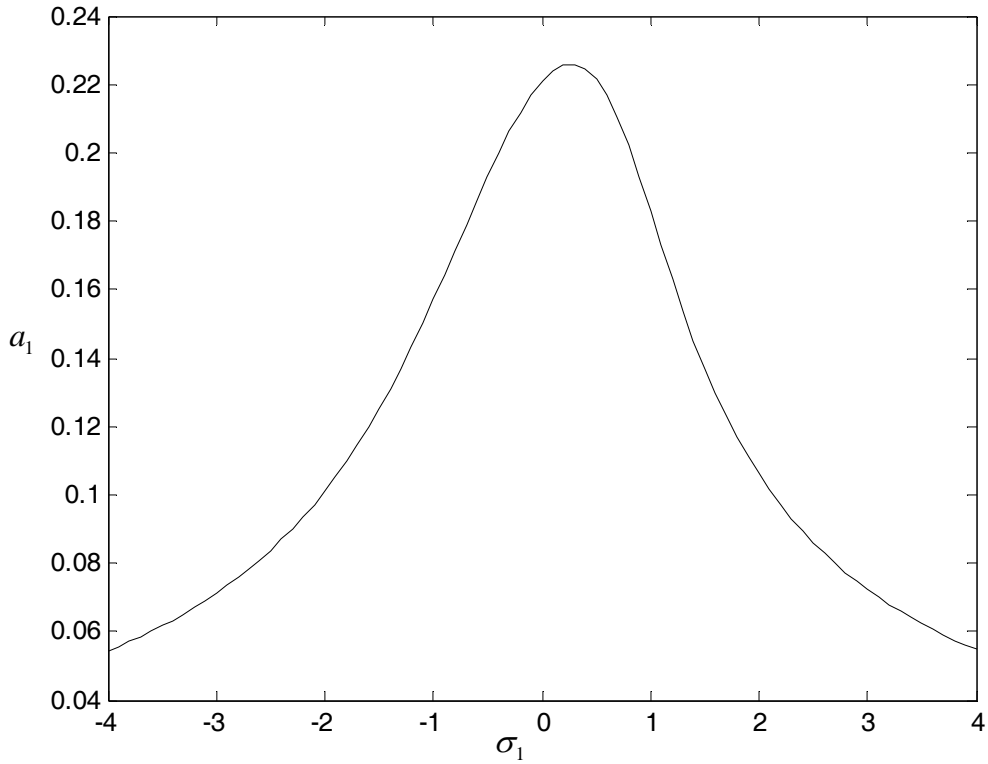
Şekil 4.32. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.6, v_\ell = 0.6, \mu = 0.5, F = 5, v_0 = 1.2, \omega_1 = 5.33248, \alpha = 0.001, k = 10$)



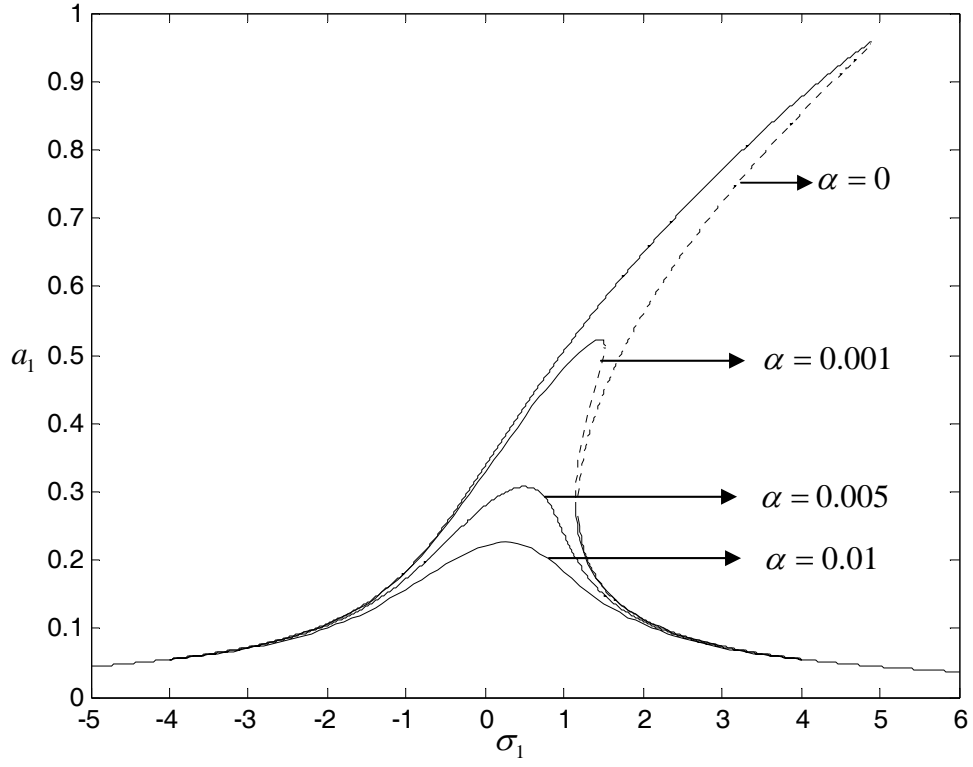
Şekil 4.33. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.6$, $v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 1.2$, $\omega_1 = 5.33248$, $\alpha = 0.005$, $k = 10$)



Şekil 4.34. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.6$, $v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 1.2$, $\omega_1 = 5.33248$, $\alpha = 0.01$, $k = 10$)



Şekil 4.35. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.6$, $v_\ell = 0.6$, $\mu = 0.5$, $F = 5$, $v_0 = 1.2$, $\omega_1 = 5.33248$, $\alpha = 0 - 0.005 - 0.001 - 0.01$, $k = 10$)

4.3.İç Rezonans Durumu

Bu bölümde sürekli ortam titreşimlerine ait 3:1 iç rezonans durumu analiz edilecektir. Denklem (4.10)'da verilen ilk mertebedeki diferansiyel denklemin çözümü olarak,

$$w_0(x, T_0, T_1) = A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} Y_n(x) + \bar{A}_n(T_1)e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n(x) + A_m(T_1)e^{i\omega_m T_0} Y_m(x) + \bar{A}_m(T_1)e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m(x) \quad (4.107)$$

önerilir. Bu çözüm ifadesi, (4.10) denkleminin bir çözümü ise bu denklemi sağlamalıdır. Dolayısıyla (4.107) eşitliği denklemler (4.10)-(4.12)'de yerine yazılıp gerekli matematiksel düzenlemeler yapılırsa,

$$\mathbf{L}_1(Y_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(Y_n) - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.108)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_n) = 0 \quad x = 0 \quad (4.109)$$

$$\mathbf{B}_2(Y_n) = 0 \quad x = 1 \quad (4.110)$$

ve

$$\mathbf{L}_1(Y_m) + i\omega_m \mathbf{L}_2(Y_m) - \omega_m^2 Y_m = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.111)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_m) = 0 \quad x = 0 \quad (4.112)$$

$$\mathbf{B}_2(Y_m) = 0 \quad x = 1 \quad (4.113)$$

denklemleri ve sınır şartları elde edilir. Denklemler (4.108)-(4.110) ile (4.111)-(4.113) birer özdeğer-özfonksiyon problemleridir. Denklem (4.107) ile verilen çözüm ifadesi ε mertebesindeki (4.13)-(4.15) denklem ve sınır şartlarında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & -2D_1(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m - i\omega_m \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m) \\
& - \mathbf{L}_2(D_1(A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m)) \\
& - \mathbf{L}_3(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m - i\omega_m \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m) \\
& + \frac{1}{2} F(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) \\
& + \mathbf{C}_1(A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \\
& A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \\
& A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m) \\
& + \mathbf{C}_2(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m - i\omega_m \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \\
& A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \\
& A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m)
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \tag{4.115}$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \tag{4.116}$$

eşitliği ve sınır şartları elde edilir. Dış zorlama kuvvetine ait frekansın, n'inci modun frekansına yakın olduğu ve n'inci mod frekansıyla m'inci mod frekansı arasında 3:1 oranın olduğu kabulü yapılırsa,

$$\Omega = \omega_n + \varepsilon \sigma_n \tag{4.117}$$

$$\omega_m = 3\omega_n + \varepsilon \rho_n \tag{4.118}$$

elde edilir. σ_n ve ρ_n , bir mertebesinde, frekansların yakınlığını ifade eden ayar parametreleridir. Denklem (4.114)'te lineer ve kübik nonlinear operatörlerin açılımları yazılıp ifadeler düzenlenir ardından (4.117) ve (4.118) eşitlikleriyle tanımlanan rezonans koşulları eklenirse,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & -2i\omega_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - 2i\omega_m D_1 A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m \\
& -D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(Y_n) - D_1 A_m e^{i\omega_m T_0} \mathbf{L}_2(Y_m) \\
& -i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(Y_n) - i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} \mathbf{L}_3(Y_m) \\
& + \frac{1}{2} F e^{i\omega_n T_0} e^{i\sigma_n T_1} \\
& + A_n^3 e^{i\omega_n T_0} e^{-i\rho_n T_1} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + \bar{A}_n^2 A_m e^{i\omega_n T_0} e^{i\rho_n T_1} \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) \\
& \quad + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) - i\omega_n [\mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) \\
& \quad + \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& \quad + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& \quad + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} \\
& + A_m^2 \bar{A}_m e^{i\omega_m T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) \\
& \quad + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)] \} \\
& + A_n \bar{A}_n A_m e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& \quad + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& \quad + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) \\
& \quad - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n)] + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n)] \} \\
& + A_n A_m \bar{A}_m e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) \\
& \quad + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) \\
& \quad + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m)] \\
& \quad + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) \\
& \quad - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m)] \} \\
& + k.e. + S.O.T.
\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \tag{4.120}$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \tag{4.121}$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem (4.119)'a,

$$w_1(x, T_0, T_1) = \varphi_n(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + \varphi_m(x, T_1) e^{i\omega_m T_0} + k.e. + W(x, T_0, T_1) \tag{4.122}$$

çözümü önerilir. Burada $W(x, T_0, T_1)$, seküler olmayan terimleri içermektedir. Önerilen çözüm, (4.119)-(4.121) denklem ve sınır şartlarında yazılıp $e^{i\omega_n T_0}$ ve $e^{i\omega_m T_0}$ seküler terimlerinin katsayıları eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned}
-\omega_n^2 \varphi_n + \mathbf{L}_1(\varphi_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(\varphi_n) = & -2i\omega_n D_1 A_n Y_n - D_1 A_n \mathbf{L}_2(Y_n) - i\omega_n A_n \mathbf{L}_3(Y_n) + \frac{1}{2} F e^{i\sigma_n T_1} \\
& + \bar{A}_n^2 A_n e^{i\rho_n T_1} \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) \\
& - i\omega_n [\mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \\
& + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} \\
& + A_n A_m \bar{A}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) \\
& + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m)] \\
& + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) \\
& - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m)] \}
\end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\mathbf{B}_1(\varphi_n) = 0 \quad x = 0 \tag{4.124}$$

$$\mathbf{B}_2(\varphi_n) = 0 \quad x = 1 \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_m^2 \varphi_m + \mathbf{L}_1(\varphi_m) + i\omega_m \mathbf{L}_2(\varphi_m) = & -2i\omega_m D_1 A_m Y_m - D_1 A_m \mathbf{L}_2(Y_m) - i\omega_m A_m \mathbf{L}_3(Y_m) \\
& + A_n^3 e^{-i\rho_n T_1} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + A_m^2 \bar{A}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) \\
& + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)] \} \\
& + A_n \bar{A}_n A_m \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) \\
& - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n)] + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n)] \}
\end{aligned} \tag{4.126}$$

$$\mathbf{B}_1(\varphi_m) = 0 \quad x = 0 \tag{4.127}$$

$$\mathbf{B}_2(\varphi_m) = 0 \quad x = 1 \tag{4.128}$$

ifadeleri bulunur.

Elde edilen (4.123) ve (4.126) denklemlerinin homojen hallerinin basit olmayan çözümleri mevcuttur. Homojen olmayan denklemlerin çözümlerinin olması çözülebilirlik şartlarına bağlıdır. Denklemler, homojen olmayan kısmını sıfır yapacak bir $u_n(x)$ ve $u_m(x)$ fonksiyonları ile çarpılıp tanım kümesi üzerinden integre edilmelidir.

$$\omega_n^2 \int_0^1 u_n(x) \varphi_n(x, T_1) dx - \int_0^1 u_n(x) \mathbf{L}_1(\varphi_n(x, T_1)) dx - i \omega_n \int_0^1 u_n(x) \mathbf{L}_2(\varphi_n(x, T_1)) dx = 0 \quad (4.129)$$

$$\omega_m^2 \int_0^1 u_m(x) \varphi_m(x, T_1) dx - \int_0^1 u_m(x) \mathbf{L}_1(\varphi_m(x, T_1)) dx - i \omega_m \int_0^1 u_m(x) \mathbf{L}_2(\varphi_m(x, T_1)) dx = 0 \quad (4.130)$$

Genel çözüm için $u_n(x) = \bar{Y}_n(x)$ ve $u_m(x) = \bar{Y}_m(x)$ olur. (4.123) ve (4.126) denklemlerinin

sağ tarafları $\int_0^1 \bar{Y}_n(x) dx$ ve $\int_0^1 \bar{Y}_m(x) dx$ ile çarpılıp sonuçlar sıfıra eşitlenmelidir,

$$\begin{aligned} & 2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + D_1 A_n \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx + i\omega_n A_n \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_3(Y_n) dx \\ & - \frac{1}{2} e^{i\sigma_n T_1} \int_0^1 F \bar{Y}_n dx - \bar{A}_n^2 A_m e^{i\rho_n T_1} \int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) \\ & - i\omega_n [\mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} dx \\ & - A_n^2 \bar{A}_n \int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \\ & + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} dx \\ & - A_n A_m \bar{A}_m \int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) \\ & + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m)] \\ & + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m)] \} dx = 0 \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_m D_1 A_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + D_1 A_m \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx + i\omega_m A_m \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_3(Y_m) dx \\
& - A_n^3 e^{-i\rho_n T_1} \int_0^1 \bar{Y}_m \{C_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n C_2(Y_n, Y_n, Y_n)\} dx \\
& - A_m^2 \bar{A}_m \int_0^1 \bar{Y}_m \{C_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + C_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + C_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) \\
& + i\omega_m [C_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + C_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - C_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)]\} dx \\
& - A_n \bar{A}_n A_m \int_0^1 \bar{Y}_m \{C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + C_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + C_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + C_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + C_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& + i\omega_n [C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + C_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) - C_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n)] \\
& + i\omega_m [C_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + C_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n)]\} dx = 0
\end{aligned} \tag{4.132}$$

Denklemler (4.131) ve (4.132) daha sade şekilde ifade edilebilir,

$$D_1 A_n + k_{1n} A_n - f_n e^{i\sigma_n T_1} - k_{2n} A_n^2 \bar{A}_n - k_{3nm} \bar{A}_n^2 A_m e^{i\rho_n T_1} - k_{4nm} A_n A_m \bar{A}_m = 0 \tag{4.133}$$

$$D_1 A_m + k_{1m} A_m - k_{2m} A_m^2 \bar{A}_m - k_{4mn} A_n \bar{A}_n A_m - k_{5mn} A_n^3 e^{-i\rho_n T_1} = 0 \tag{4.134}$$

Denklemlerdeki katsayılar,

$$k_{1n} = \frac{i\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_3(Y_n) dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \tag{4.135}$$

$$k_{1m} = \frac{i\omega_m \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_3(Y_m) dx}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \tag{4.136}$$

$$f_n = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 F \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \tag{4.137}$$

$$k_{2n} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (4.138)$$

$$k_{2m} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)] \} dx}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \quad (4.139)$$

$$k_{3nm} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) - i\omega_n [\mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (4.140)$$

$$k_{4nm} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m)] \} dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (4.141)$$

$$k_{4mn} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n)] + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n)] \} dx}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \quad (4.142)$$

$$k_{5mn} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_m \{C_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n C_2(Y_n, Y_n, Y_n)\}}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m L_2(Y_m) dx} \quad (4.143)$$

şeklinde tanımlanırlar. Bulunan bütün katsayılar gerçel ve sanal kısımlara sahiptirler,

$$k_j = k_{jR} + ik_{jI} \quad j = 1,2,3,4,5 \quad (4.144)$$

$$f = f_R + if_I \quad (4.145)$$

Kompleks genlikler polar formda aşağıdaki gibi tanımlanırlar,

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \quad (4.146)$$

$$A_m = \frac{1}{2} a_m(T_1) e^{i\beta_m(T_1)} \quad (4.147)$$

Kompleks genlikler ve eşlenikleri çözülebilirlik şartları (4.133) ile (4.134)'te yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ilk çözülebilirlik şartına ait Denklem (4.133) ,

$$\begin{aligned} a'_n + i\beta'_n a_n + (k_{1nR} + ik_{1nI})a_n - 2(f_{nR} + if_{nI}) e^{i(\sigma_n T_1 - \beta_n)} - \frac{1}{4} a_n^3 (k_{2nR} + ik_{2nI}) \\ - \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{3nmR} + ik_{3nmI}) e^{i(\rho_n T_1 - 3\beta_n + \beta_m)} - \frac{1}{4} a_n a_m^2 (k_{4nmR} + ik_{4nmI}) = 0 \end{aligned} \quad (4.148)$$

halini alır. Denklem (4.148)'de,

$$\lambda_{nm} = \rho_n T_1 - 3\beta_n + \beta_m \quad (4.149)$$

$$\gamma_n = \sigma_n T_1 - \beta_n \quad (4.150)$$

tanımlamaları yapılır. Bu tanımlamalar denklemde yerine yazılıp üstel fonksiyonlar Euler açılımına tabi tutulur ve nihayet gerçel ve sanal terimler ayrıştırılırsa birinci genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir,

$$\begin{aligned}
a'_n &= -a_n k_{1nR} + 2(f_{nR} \cos \gamma_n - f_{nI} \sin \gamma_n) + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} + \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{3nmR} \cos \lambda_{nm} - k_{3nmI} \sin \lambda_{nm}) \\
&\quad + \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{4nmR}
\end{aligned} \tag{4.151}$$

$$\begin{aligned}
a_n \beta'_n &= -a_n k_{1nI} + 2(f_{nR} \sin \gamma_n + f_{nI} \cos \gamma_n) + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nI} + \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{3nmR} \sin \lambda_{nm} + k_{3nmI} \cos \lambda_{nm}) \\
&\quad + \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{4nmI}
\end{aligned} \tag{4.152}$$

İkinci çözülebilirlik şartına ait Denklem (4.134) ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
a'_m + i \beta'_m a_m + a_m (k_{1mR} + i k_{1mI}) - \frac{1}{4} a_m^3 (k_{2mR} + i k_{2mI}) - \frac{1}{4} a_n^3 (k_{5mnR} + i k_{5mnI}) e^{-i(\rho_n T_1 - 3\beta_n + \beta_m)} \\
- \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{4mnR} + i k_{4mnI}) = 0
\end{aligned} \tag{4.153}$$

Denklem (4.149)'da yapılan tanımlama Denklem (4.153)'te yerine yazılır ve üstel ifade (eksponansiyel terim) trigonometrik fonksiyon halinde yazılıp (Euler açılımı) gerçel ve sanal kısımlar ayrıştırılırsa ikinci çözülebilirlik şartına ait genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir,

$$a'_m = -a_m k_{1mR} + \frac{1}{4} a_m^3 k_{2mR} + \frac{1}{4} a_n^3 (k_{5mnR} \cos \lambda_{nm} + k_{5mnI} \sin \lambda_{nm}) + \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{4mnR} \tag{4.154}$$

$$a_m \beta'_m = -a_m k_{1mI} + \frac{1}{4} a_m^3 k_{2mI} - \frac{1}{4} a_n^3 (k_{5mnR} \sin \lambda_{nm} - k_{5mnI} \cos \lambda_{nm}) + \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{4mnI} \tag{4.155}$$

Düzensiz rejim çözümleri için $a'_n = a'_m = \lambda'_{nm} = \gamma'_n = 0$ koşulu sağlanmalıdır. Bu kabuller altında genlik ve faz modülasyon denklemleri,

$$\begin{aligned}
a_n k_{1nR} - 2(f_{nR} \cos \gamma_n - f_{nI} \sin \gamma_n) - \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} - \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{3nmR} \cos \lambda_{nm} - k_{3nmI} \sin \lambda_{nm}) \\
- \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{4nmR} = 0
\end{aligned} \tag{4.156}$$

$$a_n \sigma_n + a_n k_{1nI} - 2(f_{nR} \sin \gamma_n + f_{nI} \cos \gamma_n) - \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nI} - \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{3nmR} \sin \lambda_{nm} + k_{3nmI} \cos \lambda_{nm}) - \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{4nmI} = 0 \quad (4.157)$$

$$a_m k_{1mR} - \frac{1}{4} a_m^3 k_{2mR} - \frac{1}{4} a_n^3 (k_{5mmR} \cos \lambda_{nm} + k_{5mmI} \sin \lambda_{nm}) - \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{4mmR} = 0 \quad (4.158)$$

$$a_m (3\sigma_n - \rho_n) + a_m k_{1mI} - \frac{1}{4} a_m^3 k_{2mI} + \frac{1}{4} a_n^3 (k_{5mmR} \sin \lambda_{nm} - k_{5mmI} \cos \lambda_{nm}) - \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{4mmI} = 0 \quad (4.159)$$

şeklinde bulunur. Sistem kararlılığını incelemek için öncelikle Jakobiyen matris oluşturmalıdır. Jakobiyen matrisin elemanlarını oluşturmak için denklemler (4.151)-(4.152) ve (4.154)-(4.155) yeniden ele alınır. Gerekli sadeleştirmelerden sonra Jakobiyen matrise temel teşkil eden $F_{in}(a_n, \gamma_n)$ tanımlamaları yapılır ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$a'_n = -a_n k_{1nR} + 2(f_{nR} \cos \gamma_n - f_{nI} \sin \gamma_n) + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} + \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{3nmR} \cos \lambda_{nm} - k_{3nmI} \sin \lambda_{nm}) + \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{4nmR} = F_1(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n) \quad (4.160)$$

$$a'_m = -a_m k_{1mR} + \frac{1}{4} a_m^3 k_{2mR} + \frac{1}{4} a_n^3 (k_{5mmR} \cos \lambda_{nm} + k_{5mmI} \sin \lambda_{nm}) + \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{4mmR} = F_2(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n) \quad (4.161)$$

$$\gamma'_n = \sigma_n + k_{1nI} - \frac{2}{a_n} (f_{nR} \sin \gamma_n + f_{nI} \cos \gamma_n) - \frac{1}{4} a_n^2 k_{2nI} - \frac{1}{4} a_n a_m (k_{3nmR} \sin \lambda_{nm} + k_{3nmI} \cos \lambda_{nm}) - \frac{1}{4} a_m^2 k_{4nmI} = F_3(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n) \quad (4.162)$$

$$\begin{aligned}
\lambda'_{nm} &= \rho_n - k_{1mI} + \frac{1}{4} a_n^2 k_{2mI} - \frac{1}{4} \frac{a_n^3}{a_m} (k_{5nmR} \sin \lambda_{nm} - k_{5nmI} \cos \lambda_{nm}) + \frac{1}{4} a_n^2 k_{4nmI} + 3k_{1nI} \\
&- \frac{6}{a_n} (f_{nR} \sin \gamma_n + f_{nI} \cos \gamma_n) - \frac{3}{4} a_n^2 k_{2nI} - \frac{3}{4} a_n a_m (k_{3nmR} \sin \lambda_{nm} + k_{3nmI} \cos \lambda_{nm}) \\
&- \frac{3}{4} a_m^2 k_{4nmI} = F_4(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n)
\end{aligned} \tag{4.163}$$

Jakobiyen matris ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_n} & \frac{\partial F_1}{\partial a_m} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_n} & \frac{\partial F_2}{\partial a_m} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a_n} & \frac{\partial F_3}{\partial a_m} & \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a_n} & \frac{\partial F_4}{\partial a_m} & \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_4}{\partial \gamma_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_n = a_{n0} \\ a_m = a_{m0} \\ \lambda_{nm} = \lambda_{nm0} \\ \gamma_n = \gamma_{n0} \end{matrix} \tag{4.164}
\end{aligned}$$

Sistemin kararlı olması için Jakobiyen Matris'in özdeğerlerinin gerçel kısımlarının negatif olması gerekir. Denklem (4.107)'de verilen $w_0(x, t)$ çözümü, Denklem (4.4) genel çözüm ifadesine yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa, kübik nonlineer bir sürekli ortam sisteminin, dış zorlamalı titreşimlerine ait 3:1 iç rezonans durumu için, yaklaşık çözümü elde edilir,

$$\begin{aligned}
w(x, t; \varepsilon) &= a_n \{ \cos([\Omega t - \gamma_n]) Y_{nR} - \sin([\Omega t - \gamma_n]) Y_{nI} \} \\
&+ a_m \{ \cos(3\Omega t - 3\gamma_n + \lambda_{nm}) Y_{mR} - \sin(3\Omega t - 3\gamma_n + \lambda_{nm}) Y_{mI} \} + O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.165}$$

Denklem (4.165)'te görüldüğü üzere $Y_n(x)$ ve $Y_m(x)$ fonksiyonları reel ve sanal kısımlardan oluşur,

$$Y_n = Y_{nR} + i Y_{nI} \tag{4.166}$$

$$Y_m = Y_{mR} + i Y_{mI} \tag{4.167}$$

a_n ve a_m genliklerinin değerleri (4.156)-(4.159) denklemlerinin sayısal olarak çözülmesiyle bulunur.

4.3.1.Uygulama Problemi 1

Eksenel hareketli, Euler-Bernoulli düz kirişine ait nonlineer titreşimleri gösteren hareket denklemleri ve sınır şartları boyutsuz halde aşağıdaki gibidir,

$$\ddot{w} + (v_0^2 - 1) w'' + 2v_0 \dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \varepsilon \mu \dot{w} = \varepsilon F \cos \Omega t + \frac{1}{2} \varepsilon v_\ell^2 w'' \int_0^1 w'^2 dx \quad (4.168)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (4.169)$$

Genel modelde verilen operatörlerin bu uygulamadaki karşılıkları,

$$\mathbf{L}_1(w) = (v_0^2 - 1) w'' + v_f^2 w^{IV} \quad (4.170)$$

$$\mathbf{L}_2(\dot{w}) = 2v_0 \dot{w}' \quad (4.171)$$

$$\mathbf{L}_3(\dot{w}) = \mu \dot{w} \quad (4.172)$$

$$\mathbf{L}_4(w) = F \quad (4.173)$$

$$\mathbf{C}_1(w, w, w) = \frac{1}{2} v_\ell^2 w'' \int_0^1 w'^2 dx \quad (4.174)$$

$$\mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) = 0 \quad (4.175)$$

şeklinde. Denklem (4.108)-(4.110) ve (4.111)-(4.113)'te tanımlanan özdeğer-özfonksiyon problemlerinin bu uygulama için karşılıkları ise,

$$v_f^2 Y_n^{IV} + (v_0^2 - 1) Y_n'' + 2iv_0 \omega_n Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (4.176)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \quad (4.177)$$

ve

$$v_f^2 Y_m^{IV} + (v_0^2 - 1) Y_m'' + 2iv_0 \omega_m Y_m' - \omega_m^2 Y_m = 0 \quad (4.178)$$

$$Y_m(0) = Y_m(1) = Y_m''(0) = Y_m''(1) = 0 \quad (4.179)$$

eşitlikleriyle ifade edilir. İşlemlere n indisi üzerinden devam edilirse, Denklem (4.176)'ya,

$$Y_n(x) = C_{1n} e^{i\beta_{1n}x} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}x} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}x} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}x} \quad (4.180)$$

çözümü önerilebilir. Bu çözüm, diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, saçılma denklemi elde edilir,

$$v_f^2 \beta_{in}^4 + (1 - v_0^2) \beta_{in}^2 - 2v_0 \omega_n \beta_{in} - \omega_n^2 = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.181)$$

Diferansiyel denklem çözümü mesnet sınır şartlarında yerine yazılırsa dörtlü denklem takımı elde edilir,

$$C_{1n} + C_{2n} + C_{3n} + C_{4n} = 0 \quad (4.182)$$

$$C_{1n} \beta_{1n}^2 + C_{2n} \beta_{2n}^2 + C_{3n} \beta_{3n}^2 + C_{4n} \beta_{4n}^2 = 0 \quad (4.183)$$

$$C_{1n} e^{i\beta_{1n}} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (4.184)$$

$$C_{1n} \beta_{1n}^2 e^{i\beta_{1n}} + C_{2n} \beta_{2n}^2 e^{i\beta_{2n}} + C_{3n} \beta_{3n}^2 e^{i\beta_{3n}} + C_{4n} \beta_{4n}^2 e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (4.185)$$

Matris yapısında gösterilebilir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\beta_{1n}} & e^{i\beta_{2n}} & e^{i\beta_{3n}} & e^{i\beta_{4n}} \\ \beta_{1n}^2 & \beta_{2n}^2 & \beta_{3n}^2 & \beta_{4n}^2 \\ e^{i\beta_{1n}} \beta_{1n}^2 & e^{i\beta_{2n}} \beta_{2n}^2 & e^{i\beta_{3n}} \beta_{3n}^2 & e^{i\beta_{4n}} \beta_{4n}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.186)$$

Basit çözüm $C_{1n} = C_{2n} = C_{3n} = C_{4n} = 0$ durumudur. Katsayılar determinantının sıfıra eşitlenmesiyle bulunacak çözüm basit olmayan çözümdür. Katsayılar determinantının sıfıra eşitlendiği ifade, tabii frekansın sayısal olarak hesaplanması sırasında destek şartı olarak alınır,

$$\begin{aligned}
& (e^{i(\beta_{1n}+\beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n}+\beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{4n}^2) + (e^{i(\beta_{1n}+\beta_{3n})} + e^{i(\beta_{2n}+\beta_{4n})})(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) \\
& + (e^{i(\beta_{2n}+\beta_{3n})} + e^{i(\beta_{1n}+\beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{3n}^2) = 0
\end{aligned} \tag{4.187}$$

Saçılma denklemi ve destek şartının ortak çözümüyle ω_n ve β_{in} değerleri bulunur. (4.182)-(4.185) dörtlü denklem takımı kullanılarak sisteme ait şekil fonksiyonu elde edilir,

$$\begin{aligned}
Y_n(x) = c_1 \left\{ e^{i\beta_{1n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} e^{i\beta_{2n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} e^{i\beta_{3n}x} \right. \\
\left. + \left[-1 + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} \right] e^{i\beta_{4n}(x)} \right\}
\end{aligned} \tag{4.188}$$

Denklemler (4.135)-(4.143)'te verilen katsayıların karşılıkları,

$$k_{1n} = \frac{i\omega_n \mu \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \tag{4.189}$$

$$k_{1m} = \frac{i\omega_m \mu \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \tag{4.190}$$

$$f_n = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 F \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \tag{4.191}$$

$$k_{2n} = \frac{\frac{1}{2} v_\ell^2 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' dx \int_0^1 Y_n'^2 dx \right\}}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2v_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.192)$$

$$k_{2m} = \frac{\frac{1}{2} v_\ell^2 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' dx \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}_m'' dx \int_0^1 Y_m'^2 dx \right\}}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2v_0 \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (4.193)$$

$$k_{3nm} = \frac{\frac{1}{2} v_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_m'' dx \int_0^1 \bar{Y}_n'^2 dx + 2 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' dx \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_n' dx \right\}}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2v_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.194)$$

$$k_{4nm} = \frac{v_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_m'' dx \int_0^1 \bar{Y}_m' Y_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_m'' dx \int_0^1 Y_m' Y_n' dx \right\}}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2v_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.195)$$

$$k_{4mn} = \frac{v_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_n'' dx \int_0^1 \bar{Y}_n' Y_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' dx \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}_n'' dx \int_0^1 Y_n' Y_m' dx \right\}}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2v_0 \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (4.196)$$

$$k_{5mn} = \frac{\frac{1}{2} v_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_n'' dx \int_0^1 Y_n'^2 dx \right\}}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2v_0 \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (4.197)$$

şeklinde sıralanır. Herhangi bir n . mod ile m . mod etkileşimi yukarıdaki denklemler kullanılarak incelenebilir. Katsayılar bu özel durum için yazıldığına göre denklemler (4.156)-(4.167) kullanılarak sayısal analizler yürütülebilir.

4.3.1.1.Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde parametrelerin değişik değerleri için aksenal hareketli Euler-Bernoulli kirişine ait frekans-tepki grafikleri elde edilmiştir. Kararlı ve kararsız bölgeler gösterilmiştir.

Şekil 4.36'da 3:1 i rezonans durumu için frekans-tepki grafiği verilmiştir. Birinci ve ikinci mod arasında bir enerji transferinin olduğu görülmektedir. Zorlama kuvvetinin frekansı birinci tabii frekansa yakın alınmıştır. Ayrıntılı grafikte büyütülerek verilen bölgede ikinci moda ait titreşim genliği artarken birinci mod titreşim genliğinin azaldığı görülmektedir. Ayrıca buradaki etkileşim neticesinde oluşan kararlı ve kararsız bölgeler de ayrıntılı grafikte gösterilmiştir.

Şekil 4.37'de yalnız birinci moda ait frekans-tepki grafiği gösterilmiştir. Ayrıntı grafiğinde ise modlar arası etkileşimin sebep olduğu değişim gösterilmiştir.

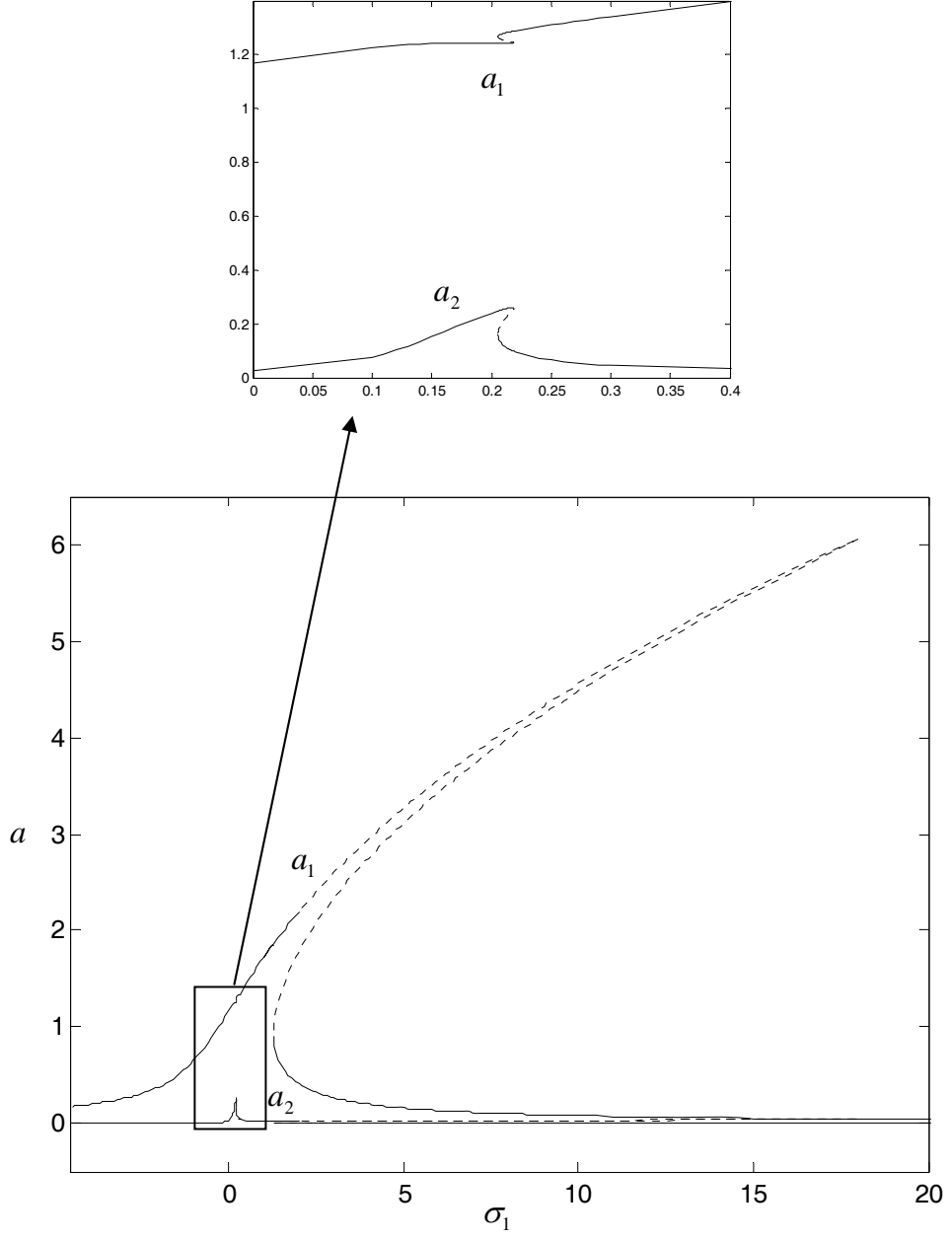
Şekil 4.38'de ise yalnız ikinci moda ait frekans-tepki grafiği gösterilmiştir. Ayrıntı grafiklerinde en büyük genlik bölgesi ile kararlı ve kararsız bölgeler gösterilmiştir.

Şekil 4.39'da birinci ve ikinci moda ait kuvvet-tepki grafikleri gösterilmiştir. Şekil 4.40 'ta ise sadece ikinci moda ait grafik görülmektedir. Grafiklerde kararsız bölgeler kesik çizgilerle gösterilmiştir.

Şekil 4.41'de diğer grafiklerden farklı olarak sönüm katsayısı artırılmıştır. Bu haliyle ilk iki moda ait frekans-tepki grafikleri elde edilmiştir. Beklendiği üzere genlik değerleri azalmıştır. Şekil 4.36 ile kıyaslanırsa sönümün artışı sistemdeki kararsız bölgeleri azaltmıştır. Şekil 4.42 'de ikinci moda ait grafik daha açık gösterilmiştir.

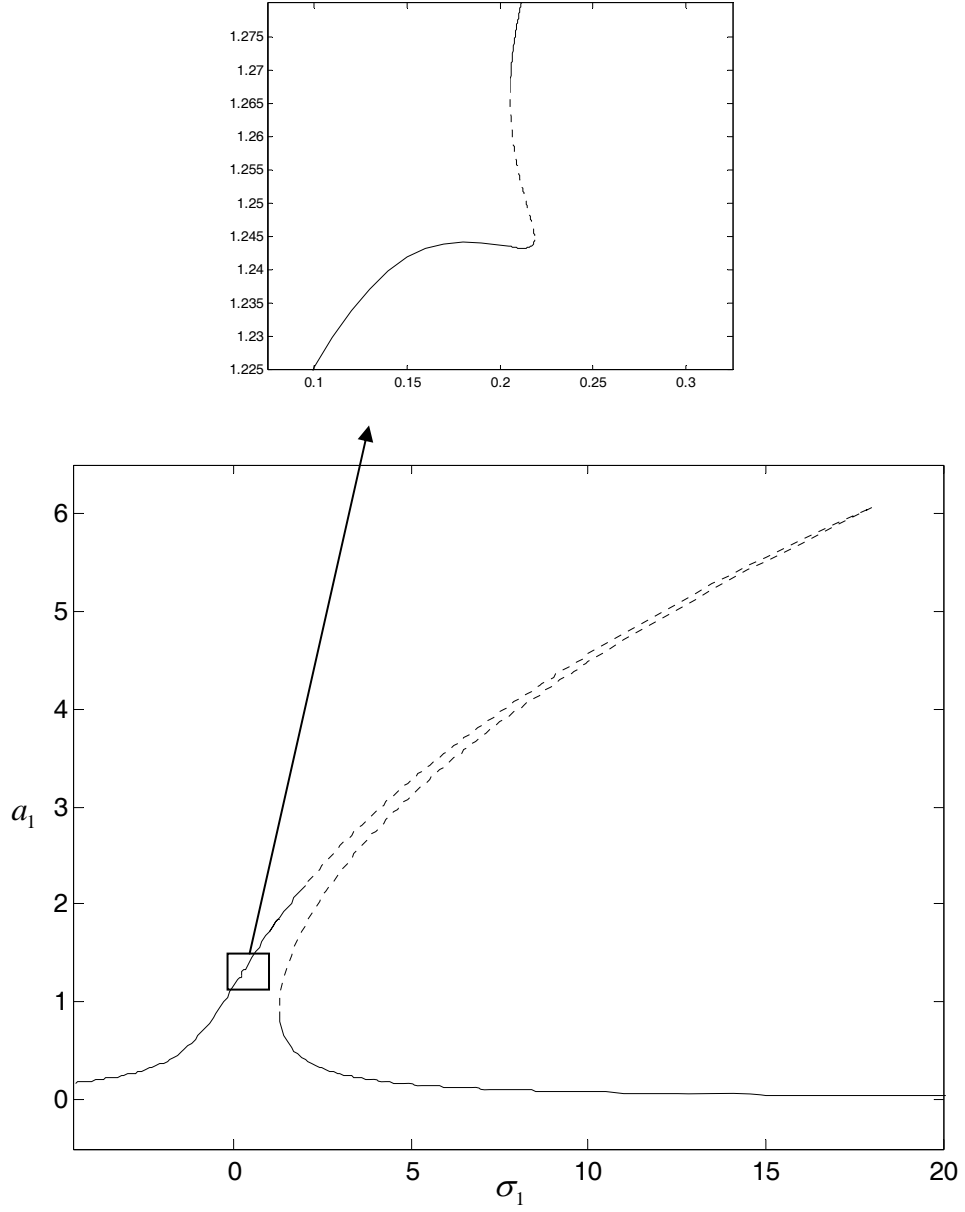
Şekil 4.43'te bu sefer kuvvet-genlik ilişkisi ele alınmıştır. Birinci ve ikinci modların kuvvet-tepki grafikleri birarada gösterilmiştir. İkinci moda ait tepkide ani artış olduğunda enerji bir miktar birinci moddan ikinci moda transfer edilmektedir. Burada da görülmektedir ki kararsız bölgeler sönümün daha küçük değerde olduğu Şekil 4.39'a göre azalmıştır.

Şekil 4.44 'te ikinci moda ait kuvvet-tepki grafiği gösterilmiştir. Ayrıntı grafiğinde ise ikinci modun kuvvet-tepki grafiğindeki kararlı kararsız bölgeler ayrıntılı olarak gösterilmiştir.



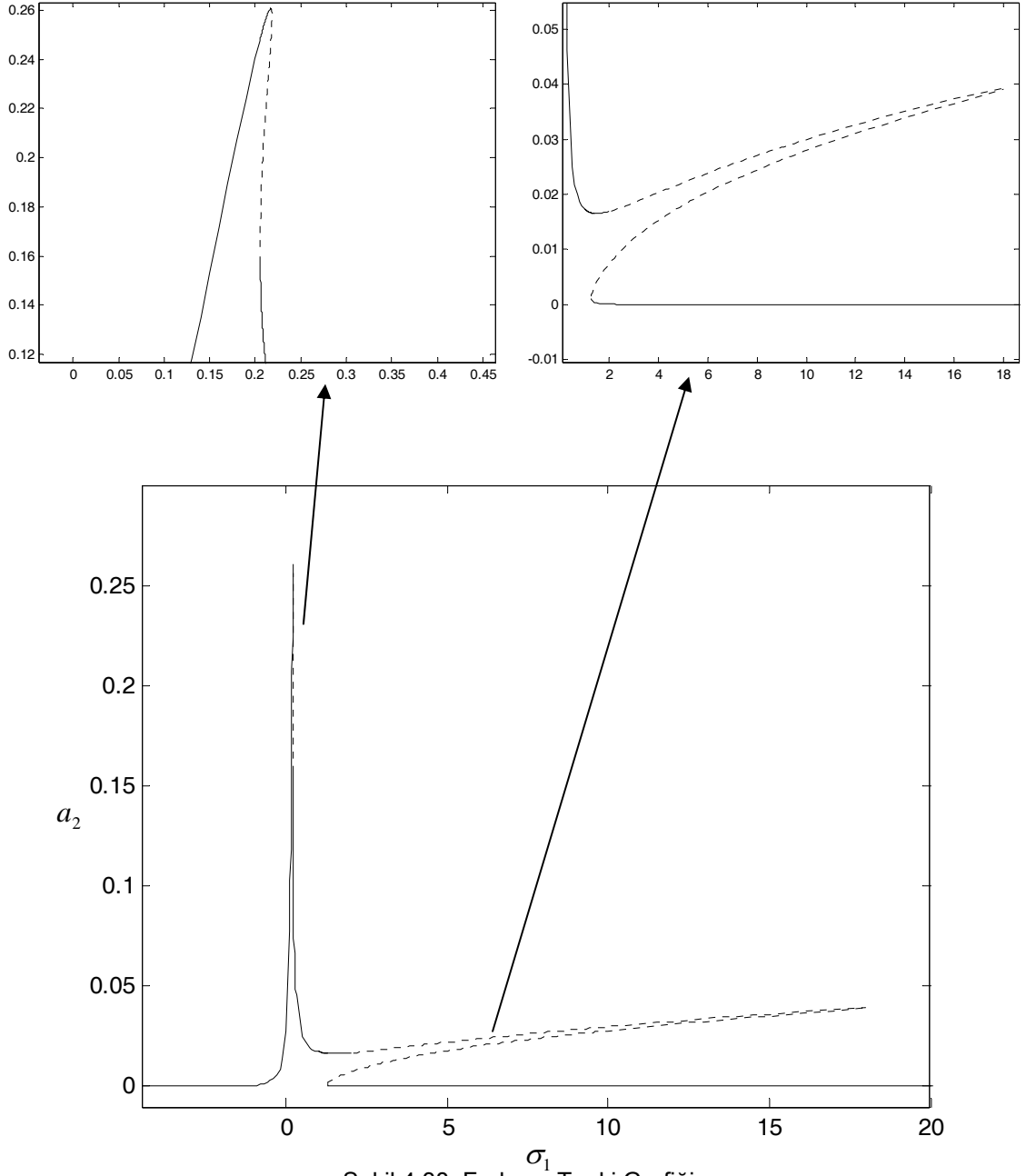
Şekil 4.36. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



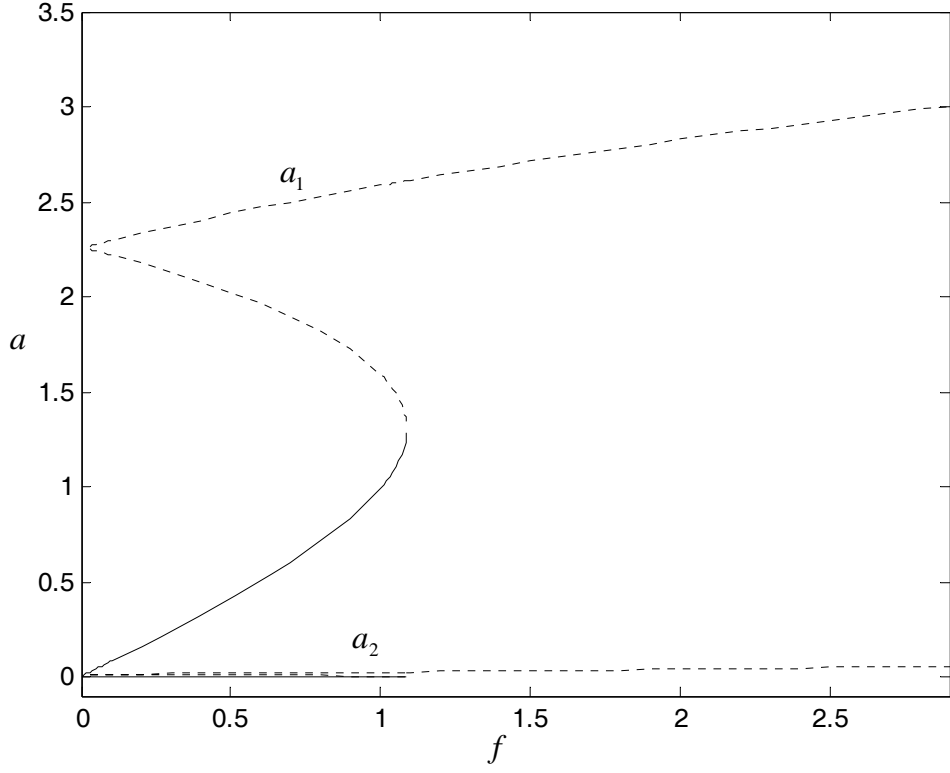
Şekil 4.37. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



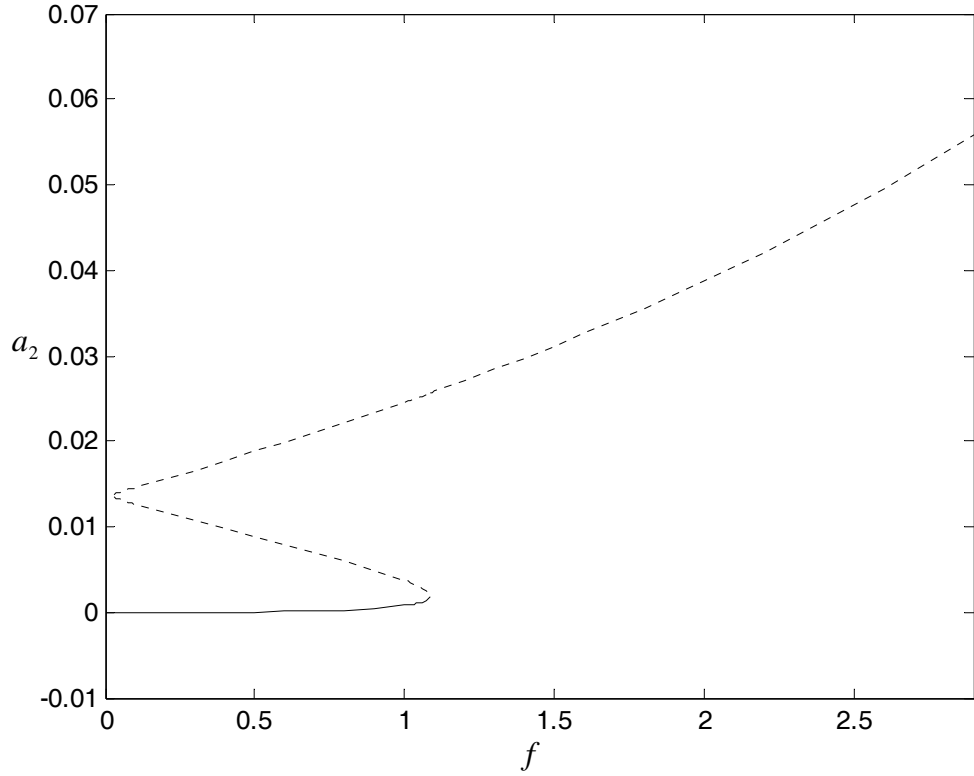
Şekil 4.38. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



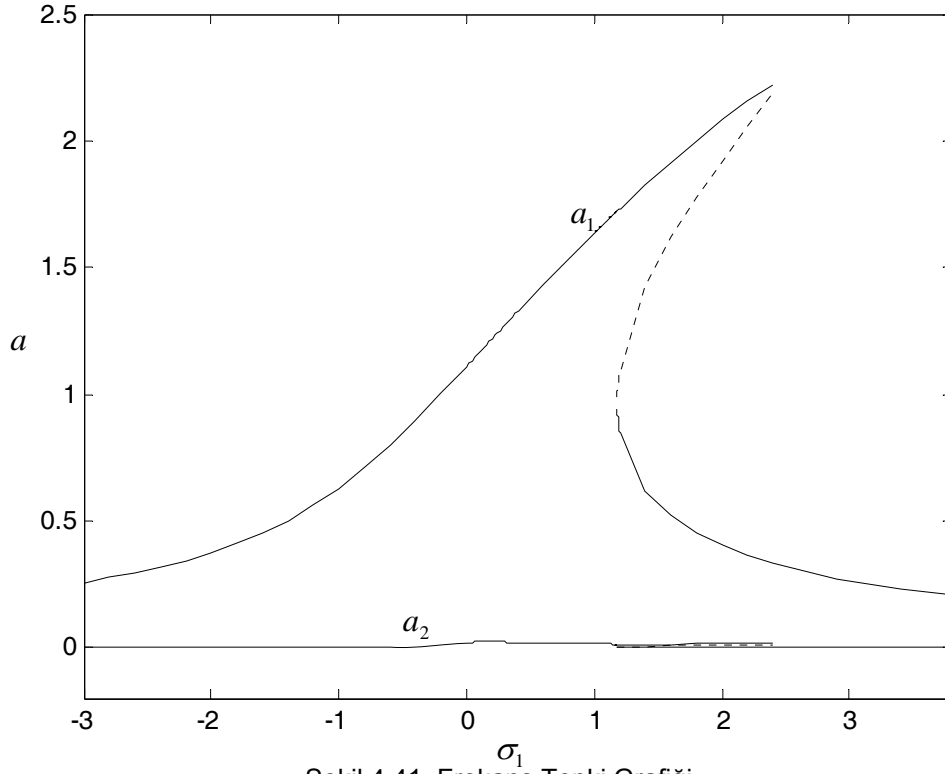
Şekil 4.39. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\sigma_1 = 2.5$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



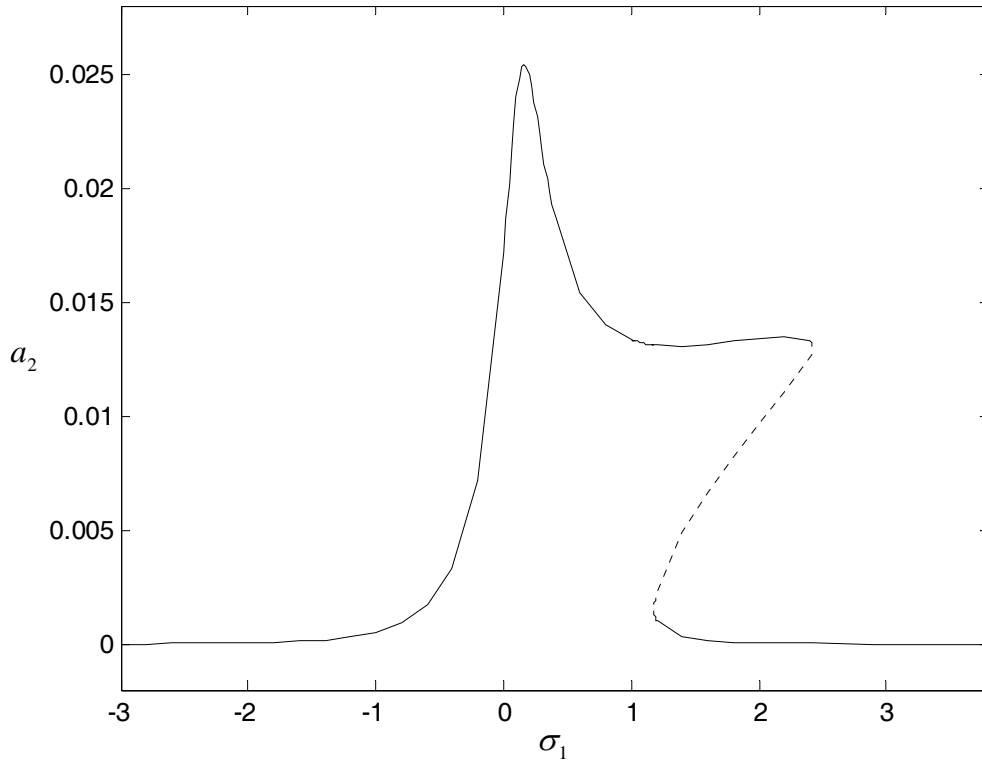
Şekil 4.40. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\sigma_1 = 2.5$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



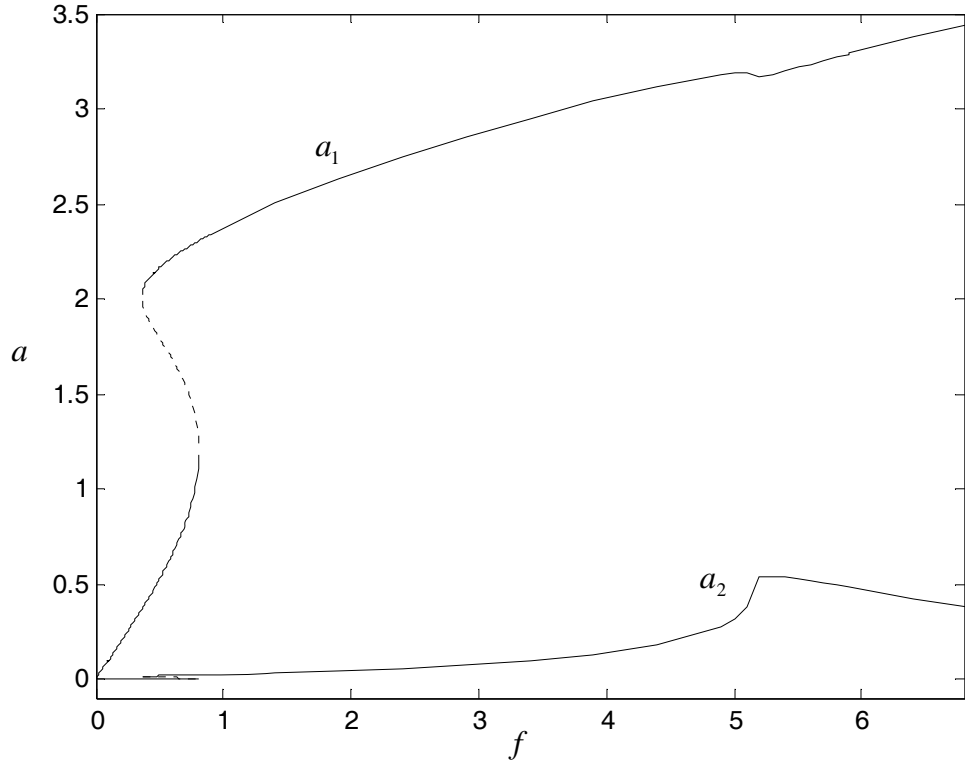
Şekil 4.41. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.8$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



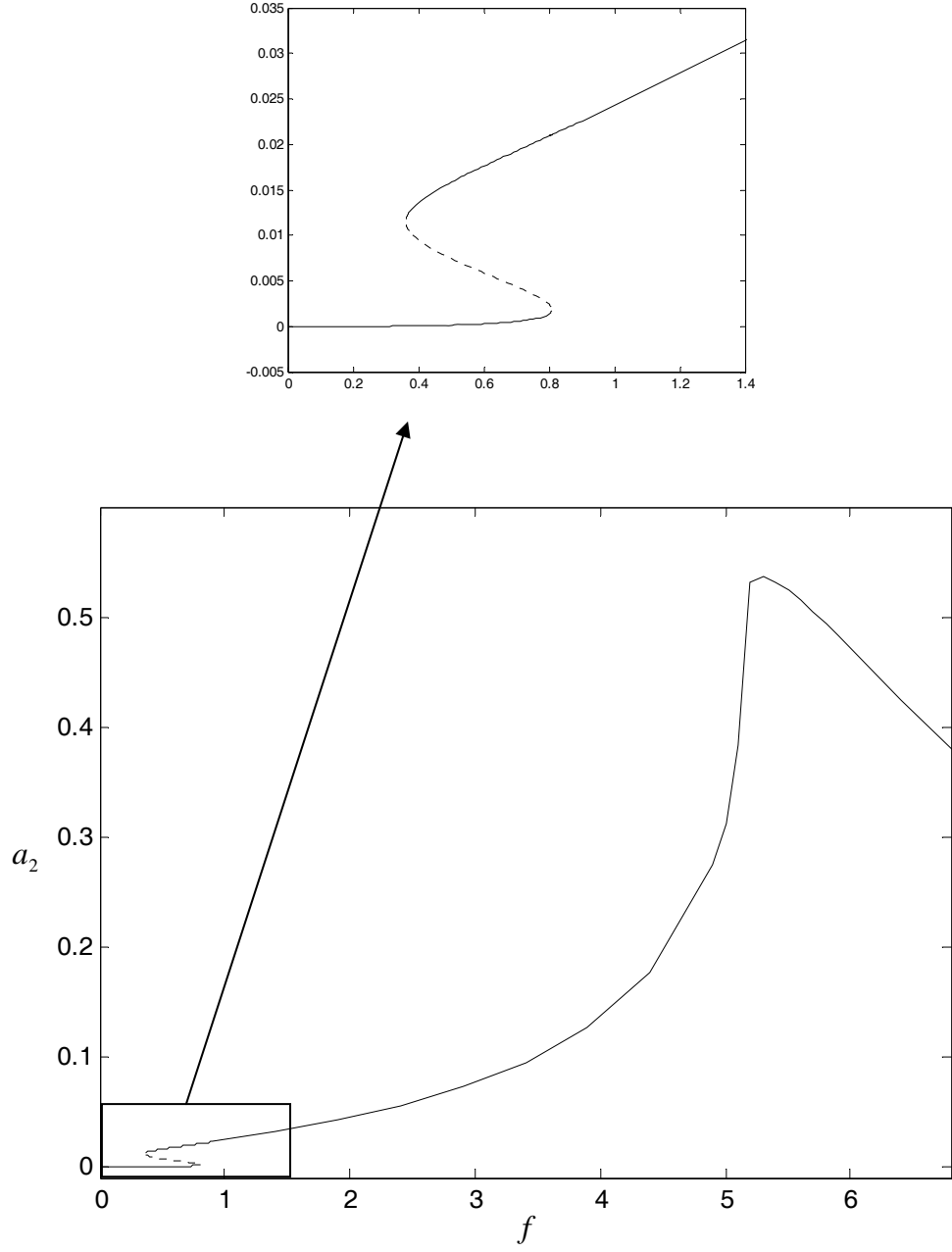
Şekil 4.42. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.8$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



Şekil 4.43. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.8$, $\sigma_1 = 2$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)



Şekil 4.44. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.8$, $\sigma_1 = 2$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$)

4.3.2.Uygulama Problemi 2

Eksenel hareketli, viskoelastik kirişe ait hareket denklemi ve sınır şartları,

$$\ddot{w} + (v_0^2 - 1)w'' + 2v_0\dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \varepsilon\alpha \dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu \dot{w} = \varepsilon F \cos \Omega t + \varepsilon \left\{ \frac{3}{2}v_l^2 w'' w'^2 + 2\alpha k \dot{w}' w' w'' + \alpha k \dot{w}'' w'^2 \right\} \quad (4.198)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (4.199)$$

ile verilmiştir. Genel operatörlerin karşılıkları aşağıda sıralanmıştır,

$$\mathbf{L}_1(w) = (v_0^2 - 1)w'' + v_f^2 w^{IV} \quad (4.200)$$

$$\mathbf{L}_2(\dot{w}) = 2v_0 \dot{w}' \quad (4.201)$$

$$\mathbf{L}_3(\dot{w}) = \alpha \dot{w}^{IV} + \mu \dot{w} \quad (4.202)$$

$$\mathbf{L}_4(w) = F \quad (4.203)$$

$$\mathbf{C}_1(w, w, w) = \frac{3}{2}v_l^2 w'' w'^2 \quad (4.204)$$

$$\mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) = 2\alpha k \dot{w}' w' w'' + \alpha k \dot{w}'' w'^2 \quad (4.205)$$

Denklemler (4.108)-(4.110) ve (4.111)-(4.113)'te tanımlanan özdeğer-özfonksiyon problemlerinin bu uygulama için karşılıkları ise,

$$v_f^2 Y_n^{IV} + (v_0^2 - 1)Y_n'' + 2iv_0\omega_n Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (4.206)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \quad (4.207)$$

ve

$$v_f^2 Y_m^{IV} + (v_0^2 - 1)Y_m'' + 2iv_0\omega_m Y_m' - \omega_m^2 Y_m = 0 \quad (4.208)$$

$$Y_m(0) = Y_m(1) = Y_m''(0) = Y_m''(1) = 0 \quad (4.209)$$

şeklindeir. İşlemlere yine n indisi üzerinden devam edilirse Denklem (4.206)'ya,

$$Y_n(x) = C_{1n} e^{i\beta_{1n}x} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}x} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}x} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}x} \quad (4.210)$$

çözümü önerilebilir. Önerilen çözümün, diferansiyel denklemde ve sınır şartlarında yerine yazılmasıyla saçılma denklemi ve destek şartı elde edilir,

$$v_f^2 \beta_{in}^4 + (1 - v_0^2) \beta_{in}^2 - 2v_0 \omega_n \beta_{in} - \omega_n^2 = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.211)$$

$$\begin{aligned} & (e^{i(\beta_{1n} + \beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{4n}^2) + (e^{i(\beta_{1n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{2n} + \beta_{4n})})(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) \\ & + (e^{i(\beta_{2n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{1n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{3n}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.212)$$

Sisteme ait şekil fonksiyonu,

$$\begin{aligned} Y_n(x) = c_1 \left\{ e^{i\beta_{1n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} e^{i\beta_{2n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} e^{i\beta_{3n}x} \right. \\ \left. + \left[-1 + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} \right] e^{i\beta_{4n}(x)} \right\} \end{aligned} \quad (4.213)$$

ile ifade edilir. Denklemler (4.135)-(4.143)'te verilen katsayıların karşılıkları aşağıda sıralanmıştır,

$$k_{1n} = \frac{i \omega_n \int_0^1 (\alpha Y_n^{IV} + \mu Y_n) \bar{Y}_n dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2v_0 \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (4.214)$$

$$k_{1m} = \frac{i \omega_m \int_0^1 (\alpha Y_m^{IV} + \mu Y_m) \bar{Y}_m dx}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2v_0 \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (4.215)$$

$$f_n = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 F \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y'_n \bar{Y}_n dx} \quad (4.216)$$

$$k_{2n} = \frac{\frac{3}{2} \nu_\ell^2 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' Y_n'^2 dx \right\} + i\omega_n \alpha k \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' Y_n'^2 dx + 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' Y_n' \bar{Y}_n' dx \right\}}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y'_n \bar{Y}_n dx} \quad (4.217)$$

$$k_{2m} = \frac{\frac{3}{2} \nu_\ell^2 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' Y_m' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}_m'' Y_m'^2 dx \right\} + i\omega_m \alpha k \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}_m'' Y_m'^2 dx + 2 \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' Y_m' \bar{Y}_m' dx \right\}}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y'_m \bar{Y}_m dx} \quad (4.218)$$

$$k_{3nm} = \frac{\frac{3}{2} \nu_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' \bar{Y}_n'^2 dx + 2 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' Y_m' \bar{Y}_n' dx \right\} - 2i\omega_n \alpha k \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' \bar{Y}_n' Y_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'^2 Y_m'' dx \right\} + i\omega_m \alpha k \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' \bar{Y}_n' Y_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'^2 Y_m'' dx \right\}}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y'_n \bar{Y}_n dx} \quad (4.219)$$

$$k_{4nm} = \frac{3\nu_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_m'' \bar{Y}_m' Y_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' Y_m' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_m'' Y_m' Y_n' dx \right\} + 2i\omega_n \alpha k \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' Y_m' \bar{Y}_m'' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' Y_m' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' \bar{Y}_m' Y_m'' dx \right\}}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y'_n \bar{Y}_n dx} \quad (4.220)$$

$$k_{4mn} = \frac{3\nu_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_n'' \bar{Y}_n' Y_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}_n'' Y_n' Y_m' dx \right\} + 2i\omega_m \alpha k \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' Y_n' \bar{Y}_n'' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' \bar{Y}_n' Y_n'' dx \right\}}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2\nu_0 \int_0^1 Y'_m \bar{Y}_m dx} \quad (4.221)$$

$$k_{5mm} = \frac{\frac{3}{2} v_\ell^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_n'' Y_n'^2 dx \right\} + 3i \omega_n \alpha k \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_n'' Y_n'^2 dx \right\}}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2v_0 \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (4.222)$$

Modlar arası etkileşim yukarıdaki denklemler kullanılarak incelenebilir. Katsayılar bu özel durum için yazıldığına göre burada da denklemler (4.156)-(4.167) kullanılarak sayısal analizler yürütülebilir.

4.3.2.1.Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde aksel hareketli viskoelastik kirişe ait 3:1 iç rezonans durumu için elde edilen frekans-tepki grafikleri ele alınacaktır.

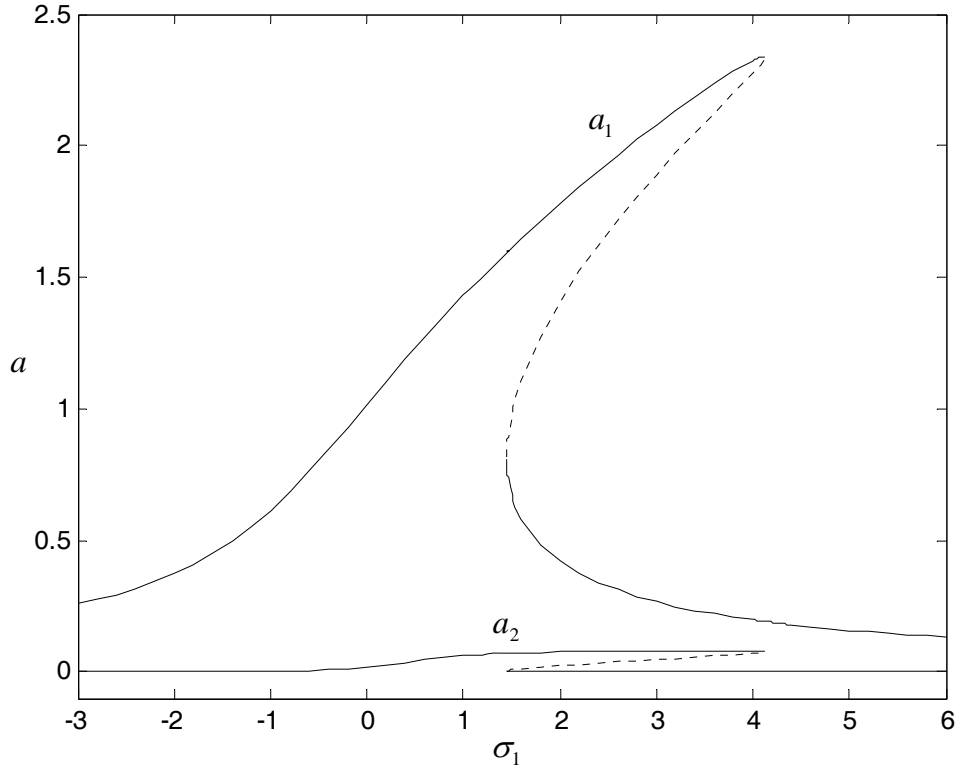
Şekil 4.45'te seçilen parametre değerleri için birinci ve ikinci moda ait frekans-tepki grafiği görülmektedir. Kararsız bölgeler kesik çizgilerle gösterilmiştir.

Şekil 4.46'da ikinci moda ait frekans-tepki grafiği daha ayrıntılı şekilde gösterilmiştir.

Şekil 4.47'de aynı parametre değerlerine ait ancak belirli bir σ_1 değeri kullanılarak elde edilen, ilk iki moda ait kuvvet-tepki grafikleri görülmektedir. Şekil 4.48'de ise ikinci moda ait grafik daha ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

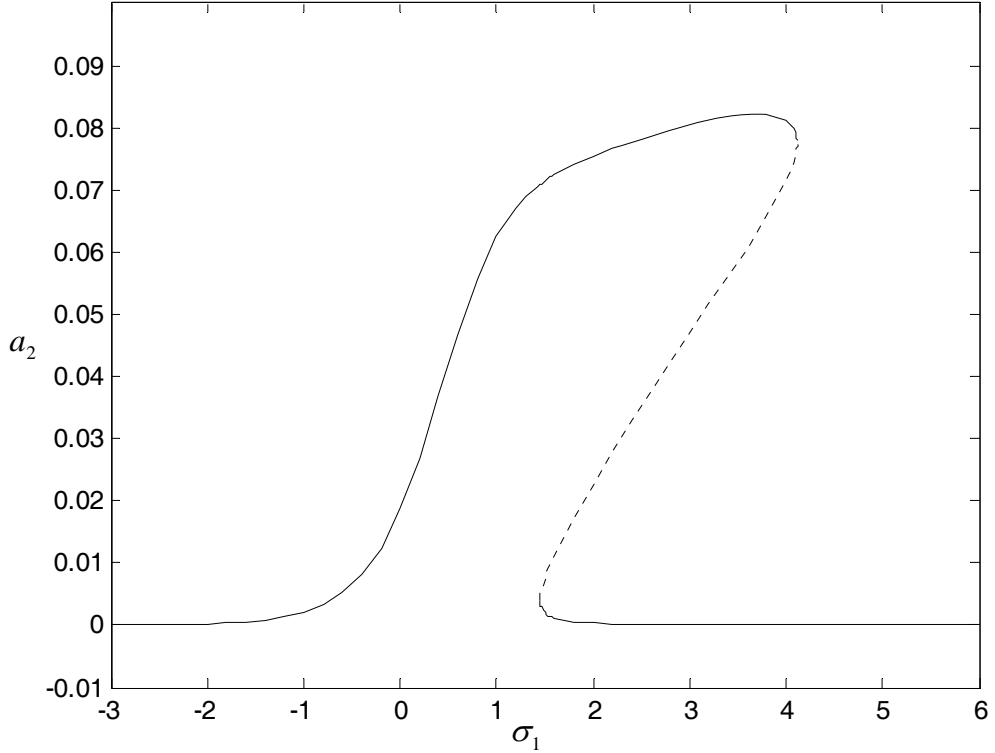
Şekil 4.49 'da, aksel hareketli Euler-Bernoulli kirişi uygulamasında olduğu gibi yine sönüm katsayısının artırılması ile elde edilen frekans-tepki grafikleri görülmektedir. Bu grafikte ilk iki mod biraradadır. Şekil 4.50'de ise yine ikinci moda ait grafik ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Beklenildiği üzere sönüm artışı genlik değerlerini düşürmüştür.

Şekil 4.51'de aynı parametreler için kuvvet-tepki grafikleri yine kararlı ve kararsız bölgeleriyle birlikte görülmektedir. Bu grafikte iki mod biraradadır. Şekil 4.52'de ise yine ikinci moda ait kuvvet-tepki grafiği ayrıntılı olarak gösterilmiştir.



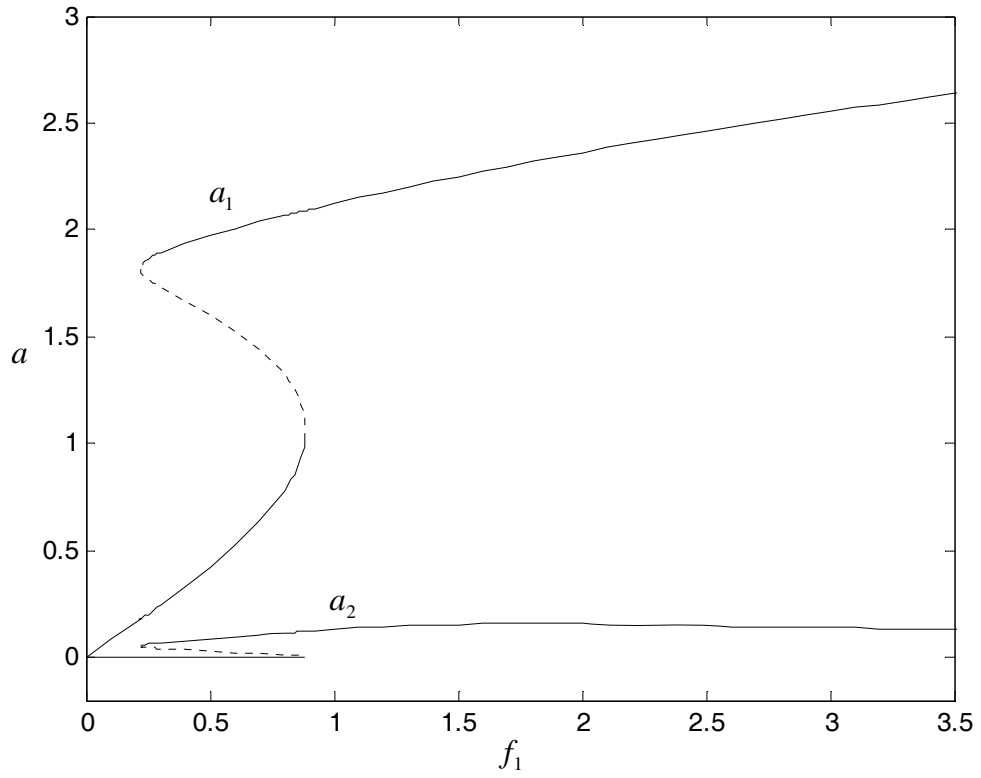
Şekil 4.45. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)



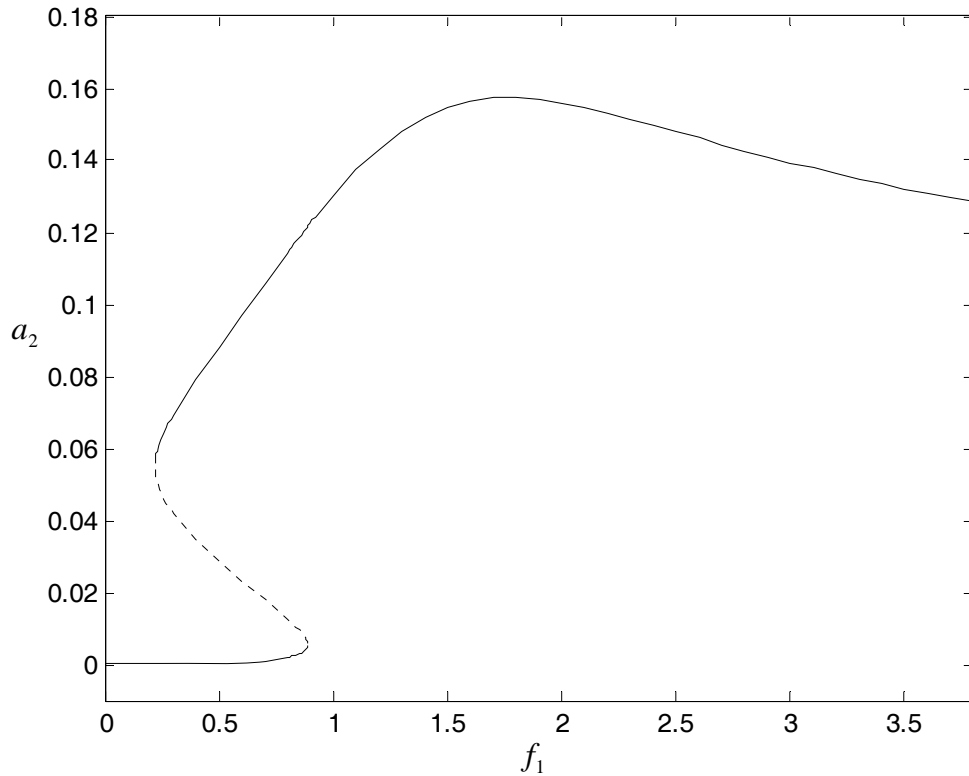
Şekil 4.46. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)



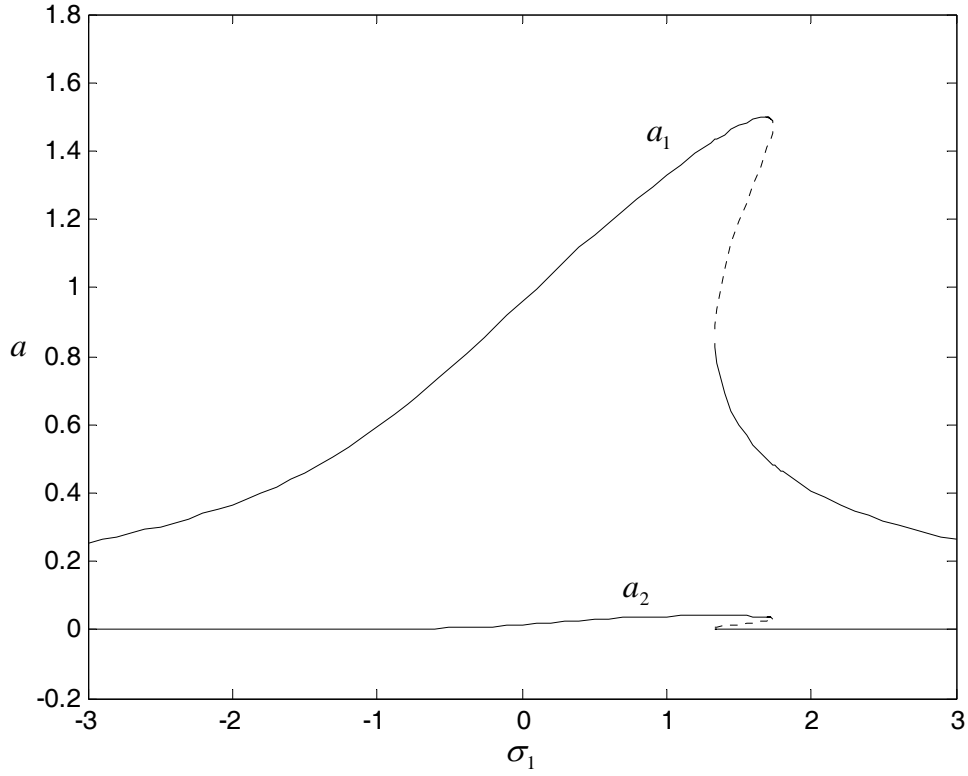
Şekil 4.47. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\sigma_1 = 2.5$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)



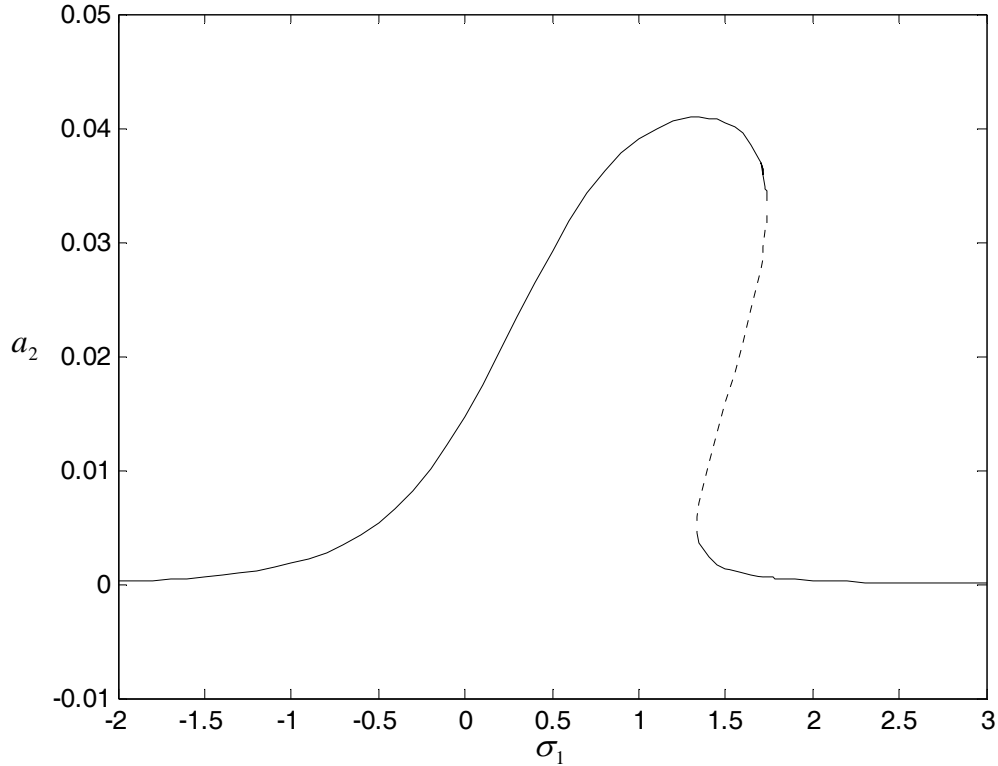
Şekil 4.48. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\sigma_1 = 2.5$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)



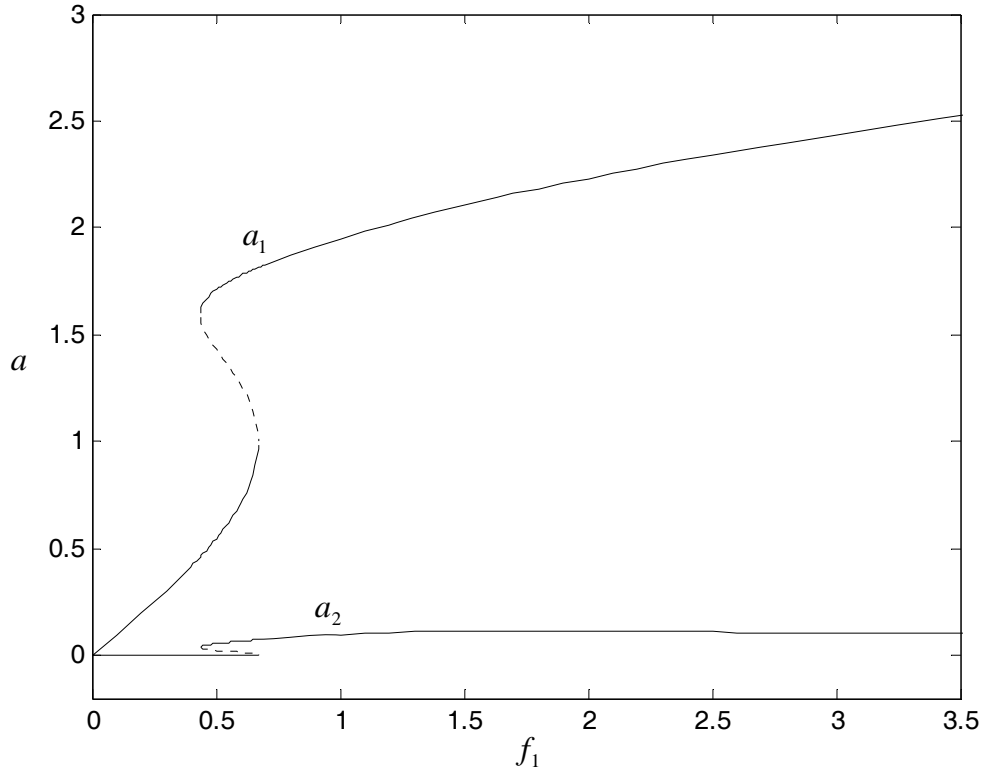
Şekil 4.49. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_l = 0.2$, $\mu = 0.8$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)



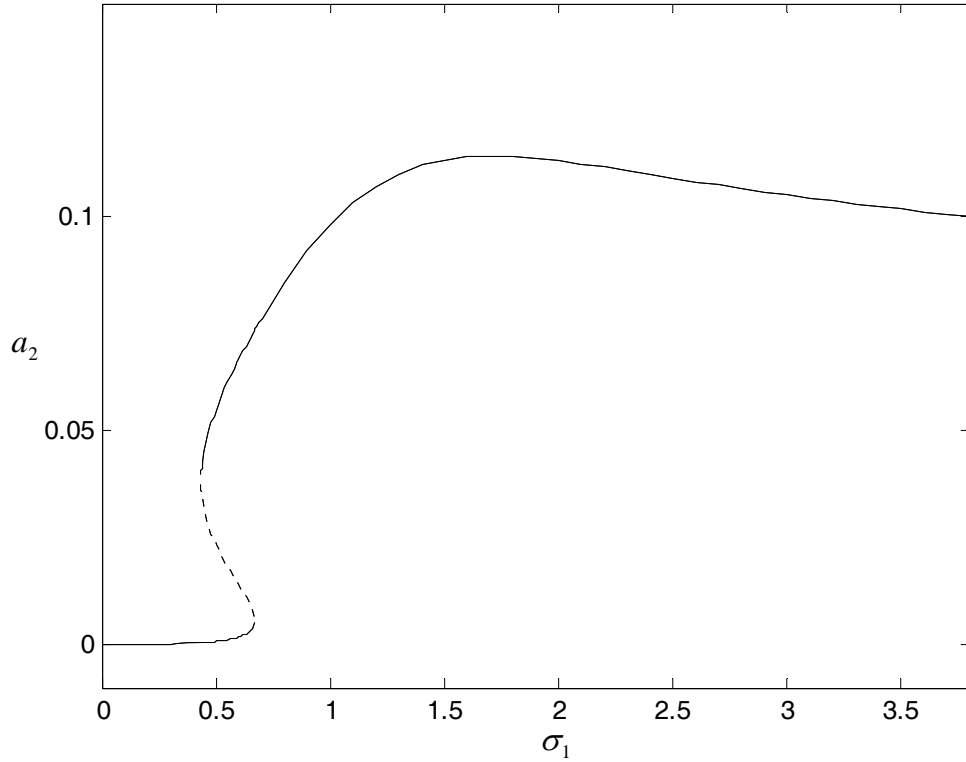
Şekil 4.50. Frekans Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_l = 0.2$, $\mu = 0.8$, $F = 10$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)



Şekil 4.51. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.8$, $\sigma_1 = 2$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)



Şekil 4.52. Kuvvet Tepki Grafiği

($v_f = 0.2$, $v_\ell = 0.2$, $\mu = 0.8$, $\sigma_1 = 2$, $v_0 = 0.4$, $\omega_1 = 3.39841$, $\omega_2 = 9.78513$, $\alpha = 0.001$, $k = 1$)

5.PARAMETRİK TİTREŞİMLER

Bölüm 4'te, genel modelde önerilen $\mathbf{L}_4(w)$ operatörü baskın rezonans ve iç rezonans analizi için bir kuvvet (dış zorlama) terimiyle karşılanmıştır. Bu bölümde ise $\mathbf{L}_4(w)$ operatörü bir parametrik terime karşılık gelecektir. Bu durumda $\mathbf{L}_4(w)$ operatörü bağımlı değişkeni (ve/veya türevlerini) içerir. Böylelikle bağımlı değişken, $\cos \Omega t$ gibi bir değişken katsayı terimiyle çarpım haline gelir ve parametrik zorlamalı titreşim modeli elde edilir. $\mathbf{L}_4(w)$ operatörü analitik işlemlere bu haliyle girecek, genel çözümler bulunacak ve ardından uygulama probleminde bu operatöre karşılık gelen terim yazılacaktır.

Daha önce denklemler (3.1)-(3.3) ile ortaya konulan genel model aşağıdaki gibidir,

$$\ddot{w} + \mathbf{L}_1(w) + \mathbf{L}_2(\dot{w}) + \varepsilon \mathbf{L}_3(\dot{w}) = \varepsilon \mathbf{L}_4(w) \cos \Omega t + \varepsilon \{ \mathbf{C}_1(w, w, w) + \mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) \} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{B}_1(w) = 0 \quad x = 0 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B}_2(w) = 0 \quad x = 1 \quad (5.3)$$

5.1.Perturbasyon Yöntemi Çözümleri

Bu bölümde yine Çok Zaman Ölçekli Metod, Denklem (5.1)' de ifade edilen genel modele direkt olarak uygulanacaktır. Çözüm fonksiyonu $w(x, t)$, aşağıdaki yapıda kabul edilmiştir,

$$w(x, T_0, T_1; \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \dots \quad (5.4)$$

Zamanın ölçeklendirilmesinde Bölüm 4'te olduğu gibi $T_0 = t$ hızlı zaman ölçeği, $T_1 = \varepsilon t$ yavaş zaman ölçeği olarak alınmıştır. Genel yapıda $D_k = \partial / \partial T_k$ şeklinde tanımlanan türev ifadeleri aşağıda sıralanmıştır,

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (5.6)$$

Denklem (5.4) ile verilen yaklaşık çözüm, denklemler (5.5) ve (5.6)'da verilen türev kuralları uygulanarak denklemler (5.1)-(5.3)'te yazılır,

$$\begin{aligned}
& (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) + \mathbf{L}_1(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) + \mathbf{L}_2([D_0 + \varepsilon D_1 + \dots][w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) \\
& + \varepsilon \mathbf{L}_3([D_0 + \varepsilon D_1 + \dots][w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) = \varepsilon \mathbf{L}_4(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) \cos \Omega T_0 \\
& + \varepsilon \{ \mathbf{C}_1([w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) \\
& + \mathbf{C}_2([D_0 + \varepsilon D_1 + \dots][w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots], [w_0 + \varepsilon w_1 + \dots]) \}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\mathbf{B}_1(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) = 0 \quad x = 0 \tag{5.8}$$

$$\mathbf{B}_2(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) = 0 \quad x = 1 \tag{5.9}$$

Mertebe ayrıştırması yapılır,

$O(\varepsilon^0)$

$$D_0^2 w_0 + \mathbf{L}_1(w_0) + \mathbf{L}_2(D_0 w_0) = 0 \tag{5.10}$$

$$\mathbf{B}_1(w_0) = 0 \quad x = 0 \tag{5.11}$$

$$\mathbf{B}_2(w_0) = 0 \quad x = 1 \tag{5.12}$$

$O(\varepsilon^1)$

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & - 2 D_0 D_1 w_0 - \mathbf{L}_2(D_1 w_0) - \mathbf{L}_3(D_0 w_0) + \mathbf{L}_4(w_0) \cos \Omega T_0 \\
& + \mathbf{C}_1(w_0, w_0, w_0) + \mathbf{C}_2(D_0 w_0, w_0, w_0)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \tag{5.14}$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \tag{5.15}$$

Buradan itibaren çözülebilirlik şartları ve çözüm fonksiyonları -yine- incelenecek rezonans tipine göre ayrı ayrı bulunacaktır.

5.2. Temel Parametrik Rezonans : İç Rezonansın Olmadığı Durum

Bu kısımda zorlama frekansının tabii frekanslardan birinin iki katı olduğu durum (Temel parametrik rezonans) ele alınacaktır. Tabii frekanslar arasında iç rezonansın olmadığı varsayılacaktır. Bir mertebesindeki (5.10) diferansiyel denkleminde aşağıdaki çözüm önerilir,

$$w_0(x, T_0, T_1) = A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} Y_n(x) + \bar{A}_n(T_1)e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

Bu çözüm Denklem (5.10)'da yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $Y_n(x)$ fonksiyonu aşağıdaki özdeğer-özfonksiyon problemini sağlar,

$$\mathbf{L}_1(Y_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(Y_n) - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_n) = 0 \quad x = 0 \quad (5.18)$$

$$\mathbf{B}_2(Y_n) = 0 \quad x = 1 \quad (5.19)$$

Denklem (5.16) ile gösterilen çözüm fonksiyonu ε mertebesindeki denklem (5.13)'te yazılırsa,

$$\begin{aligned} D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) &= -2 D_1(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \\ &- \mathbf{L}_2(D_1(A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n)) - \mathbf{L}_3(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \\ &+ \mathbf{L}_4(A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \left(\frac{e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}}{2} \right) \\ &+ \mathbf{C}_1(A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \\ &+ \mathbf{C}_2(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n, A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n) \end{aligned} \quad (5.20)$$

ifadesi elde edilir. Önerilen (5.16) çözümünün (5.14) ve (5.15) ile verilen sınır şartlarında da yazılıp eşitliklerin düzenlenmesiyle ε mertebesindeki denklem ve sınır şartları elde edilir,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & -2i\omega_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + 2i\omega_n D_1 \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n \\
& - D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(Y_n) - D_1 \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(\bar{Y}_n) \\
& - i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(Y_n) + i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(\bar{Y}_n) \\
& + A_n \mathbf{L}_4(Y_n) \left(\frac{e^{i(\omega_n + \Omega)T_0} + e^{i(\omega_n - \Omega)T_0}}{2} \right) \\
& + \bar{A}_n \mathbf{L}_4(\bar{Y}_n) \left(\frac{e^{i(-\omega_n + \Omega)T_0} + e^{i(-\omega_n - \Omega)T_0}}{2} \right) \\
& + A_n^3 e^{3i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) \} \quad (5.21) \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \} \\
& + A_n \bar{A}_n^2 e^{-i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + A_n \bar{A}_n^2 e^{-i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, \bar{Y}_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n \bar{A}_n^2 e^{-i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_n) \} \\
& + \bar{A}_n^3 e^{-3i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) - i\omega_n \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad (5.22)$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (5.23)$$

Temel parametrik rezonans, zorlama frekansının tabii frekanslardan birisinin iki katına yakın olması ile ortaya çıkar,

$$\Omega = 2\omega_n + \varepsilon \sigma_n \quad (5.24)$$

Burada σ_n terimi ayar parametresidir ve bir mertebesinde. Rezonans koşulu, Denklem (5.21)'e yerleştirilir ve düzenlenir,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & -2i\omega_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(Y_n) \\
& - i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(Y_n) + \frac{1}{2} \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} e^{i\sigma_n T_1} \mathbf{L}_4(\bar{Y}_n) \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \} \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n)] - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + k.e. + S.O.T. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad (5.26)$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (5.27)$$

Elde edilen (5.25) denklemine şu çözüm fonksiyonu önerilebilir,

$$w_1(x, T_0, T_1) = \varphi_n(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + \bar{\varphi}_n(x, T_1) e^{-i\omega_n T_0} + W(x, T_0, T_1) \quad (5.28)$$

$W(x, T_0, T_1)$ terimi seküler olmayan terimleri içerir. Önerilen çözüm fonksiyonu Denklem (5.25)'e yerleştirilip her iki tarafta $e^{i\omega_n T_0}$ teriminin katsayıları eşitlenir,

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 \varphi_n + \mathbf{L}_1(\varphi_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(\varphi_n) = & -2i\omega_n D_1 A_n Y_n - D_1 A_n \mathbf{L}_2(Y_n) - i\omega_n A_n \mathbf{L}_3(Y_n) \\ & + \frac{1}{2} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \mathbf{L}_4(\bar{Y}_n) + A_n^2 \bar{A}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \\ & + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \\ & - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{B}_1(\varphi_n) = 0 \quad x = 0 \quad (5.30)$$

$$\mathbf{B}_2(\varphi_n) = 0 \quad x = 1 \quad (5.31)$$

Çözülebilirlik şartı gereği, Denklem (5.29), homojen olmayan kısmını sıfır yapacak bir $u_n(x)$ fonksiyonu ile çarpılıp tanım kümesi üzerinden integre edilmelidir.

$$\omega_n^2 \int_0^1 u_n(x) \varphi_n(x, T_1) dx - \int_0^1 u_n(x) \mathbf{L}_1(\varphi_n(x, T_1)) dx - i\omega_n \int_0^1 u_n(x) \mathbf{L}_2(\varphi_n(x, T_1)) dx = 0 \quad (5.32)$$

$u_n(x) = \bar{Y}_n(x)$ olur. Denklem (5.29)'da sağ taraf $\bar{Y}_n(x)$ ile çarpılır, tanım kümesi üzerinden integre edilir ve sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + D_1 A_n \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx + i\omega_n A_n \int_0^1 \bar{Y}_n L_3(Y_n) dx - \frac{1}{2} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \int_0^1 \bar{Y}_n L_4(\bar{Y}_n) dx \\
& - A_n^2 \bar{A}_n \int_0^1 \bar{Y}_n \{C_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& + C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)]\} dx = 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemelerin ardından kompleks (karmaşık) genliklerin zamanla değişimini veren denklem,

$$D_1 A_n + k_{1n} A_n - k_{2n} A_n^2 \bar{A}_n - k_{3n} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} = 0 \tag{5.34}$$

elde edilir. Katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$k_{1n} = \frac{i\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_n L_3(Y_n) dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx} \tag{5.35}$$

$$k_{2n} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{C_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)]\} dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx} \tag{5.36}$$

$$k_{3n} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \bar{Y}_n L_4(\bar{Y}_n) dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx} \tag{5.37}$$

Katsayıların gerçel ve sanal kısımları mevcuttur,

$$k_{jn} = k_{jnR} + ik_{jnI} \quad j = 1, 2, 3 \tag{5.38}$$

Kompleks genlikler polar formda ifade edilir,

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \tag{5.39}$$

Denklem (5.39), Denklem (5.34)'e yerleştirilir,

$$a'_n + i\beta'_n a_n + (k_{1nR} + ik_{1nI}) a_n - \frac{1}{4}(k_{2nR} + ik_{2nI}) a_n^3 - a_n (k_{3nR} + ik_{3nI}) e^{i(\sigma_n T_1 - 2\beta_n)} = 0 \quad (5.40)$$

Denklem (5.40)'ta,

$$\gamma_n = \sigma_n T_1 - 2\beta_n \quad (5.41)$$

tanımlaması yapılmıştır. Denklem (5.41)'de gerçel ve sanal kısımların ayrıştırılıp gerekli işlemlerin yapılmasıyla genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir,

$$a'_n = -a_n k_{1nR} + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} + a_n k_{3nR} \cos \gamma_n - a_n k_{3nI} \sin \gamma_n \quad (5.42)$$

$$\gamma'_n = \sigma_n + 2k_{1nI} - \frac{1}{2} a_n^2 k_{2nI} - 2k_{3nR} \sin \gamma_n - 2k_{3nI} \cos \gamma_n \quad (5.43)$$

Düzgün rejim çözümleri için $a'_n = \gamma'_n = 0$ alınırsa, $a_n \neq 0$ durumu için,

$$a_n k_{1nR} - \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} - a_n k_{3nR} \cos \gamma_n + a_n k_{3nI} \sin \gamma_n = 0 \quad (5.44)$$

$$\sigma_n + 2k_{1nI} - \frac{1}{2} a_n^2 k_{2nI} - 2k_{3nR} \sin \gamma_n - 2k_{3nI} \cos \gamma_n = 0 \quad (5.45)$$

denklemleri elde edilir. γ_n terimi yok edilirse, σ_n ayar parametresine ait iki eşitlik elde edilir,

$$\sigma_n = -2k_{1nI} + \frac{1}{2} a_n^2 k_{2nI} + 2\sqrt{k_{3nR}^2 + k_{3nI}^2 - \left(k_{1nR} - \frac{1}{4} a_n^2 k_{2nR}\right)^2} \quad (5.46)$$

$$\sigma_n = -2k_{1nI} + \frac{1}{2} a_n^2 k_{2nI} - 2\sqrt{k_{3nR}^2 + k_{3nI}^2 - \left(k_{1nR} - \frac{1}{4} a_n^2 k_{2nR}\right)^2} \quad (5.47)$$

Bu eşitlikler ile temel parametrik rezonansa ait frekans-tepki grafikleri elde edilecektir. Jakobiyen matris için denklemler (5.42) ve (5.43)'te $F_{in}(a_n, \gamma_n)$ tanımlamaları yapılmalıdır ($i = 1, 2$),

$$a'_n = -a_n k_{1nR} + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} + a_n k_{3nR} \cos \gamma_n - a_n k_{3nI} \sin \gamma_n = F_{1n}(a_n, \gamma_n) \quad (5.48)$$

$$\gamma'_n = \sigma_n + 2k_{1nI} - \frac{1}{2} a_n^2 k_{2nI} - 2k_{3nR} \sin \gamma_n - 2k_{3nI} \cos \gamma_n = F_{2n}(a_n, \gamma_n) \quad (5.49)$$

Jakobiyen Matris aşağıdaki gibidir,

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_n} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_n} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma_n} \end{bmatrix}_{\substack{a_n = a_{n0} \\ \gamma_n = \gamma_{n0}}} \quad (5.50)$$

Sistemin kararlı olması için Jakobiyen Matris'in özdeğerlerinin gerçel kısımlarının sıfırdan küçük olması gerekir. Denklem (5.4)'teki ifadeye, $w_0(x, t)$ çözümü yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa, kübik nonlineer bir sürekli ortam sisteminin, parametrik titreşimlerine ait temel parametrik rezonans durumu için yaklaşık çözümü elde edilir,

$$w(x, t; \varepsilon) = a_n \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}(\Omega t - \gamma_n)\right) Y_{nR} - \sin\left(\frac{1}{2}(\Omega t - \gamma_n)\right) Y_{nI} \right\} + O(\varepsilon) \quad (5.51)$$

$Y_n(x)$ fonksiyonu gerçel ve sanal kısımlardan meydana gelmiştir,

$$Y_n = Y_{nR} + iY_{nI} \quad (5.52)$$

(5.44) ve (5.45) denklemleri kullanılarak a_n ve γ_n değerleri sayısal olarak hesaplanabilir. Dikkat edilmesi gerekli bir husus, basit çözümlerin kararlılığı analiz edilirken, polar formdaki karmaşık genliklerin yerine yazılmasıyla elde edilen (5.48) ve (5.49) denklemlerinin uygun olmadığıdır. Basit çözümün kararlılığını araştırmak için karmaşık genlikler aşağıdaki gibi yeniden tanımlanır,

$$A_n = \frac{1}{2} (p_n + iq_n) e^{i\frac{\sigma_n T_1}{2}} \quad (5.53)$$

Bu ifade, (5.34)'te verilen çözülebilirlik şartı denkleminde yerine yazılır, gerçel ve sanal kısımları ayıştırılırsa,

$$p'_n = \frac{\sigma_n}{2} q_n - p_n k_{1nR} + q_n k_{1nI} + \frac{1}{4} p_n^3 k_{2nR} + \frac{1}{4} p_n q_n^2 k_{2nR} - \frac{1}{4} q_n p_n^2 k_{2nI} - \frac{1}{4} q_n^3 k_{2nI} + p_n k_{3nR} + q_n k_{3nI} = F_{1n}(p_n, q_n) \quad (5.54)$$

$$q'_n = -\frac{\sigma_n}{2} p_n - q_n k_{1nR} - p_n k_{1nI} + \frac{1}{4} q_n p_n^2 k_{2nR} + \frac{1}{4} q_n^3 k_{2nR} + \frac{1}{4} p_n^3 k_{2nI} + \frac{1}{4} p_n q_n^2 k_{2nI} - q_n k_{3nR} + p_n k_{3nI} = F_{2n}(p_n, q_n) \quad (5.55)$$

ifadeleri elde edilir. Basit çözümlerin kararlılık analizi için Jakobiyen matris oluşturulur,

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_n} & \frac{\partial F_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_n} & \frac{\partial F_2}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{p_n=q_n=0} \quad (5.56)$$

Matrisin özdeğerleri analitik olarak hesaplanırsa,

$$\lambda_{1,2} = -k_{1nR} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4(k_{3nR}^2 + k_{3nI}^2) - (\sigma_n + 2k_{1nI})^2} \quad (5.57)$$

bulunur. Bilindiği üzere reel özdeğerler pozitif olursa sistem kararsız, negatif olursa sistem kararlıdır. Özdeğerin karmaşık sayı çıkması sistemi sınırlı hale getirir.

$$-2k_{1nI} - 2\sqrt{k_{3nR}^2 + k_{3nI}^2 - k_{1nR}^2} < \sigma_n < -2k_{1nI} + 2\sqrt{k_{3nR}^2 + k_{3nI}^2 - k_{1nR}^2} \quad (5.58)$$

Kararlılık sınırı (5.58) ifadesiyle verilmiştir. Belirtilen aralıkta sistem kararsızdır.

5.2.1.Uygulama Problemi

Bu bölümde uygulama problemi olarak akışkan taşıyan viskoelastik borunun nonlineer titreşimlerine ait model incelenecektir. Hareket denklemi, Bölüm 2.4.3'te ele alındığı üzere,

$$\ddot{w} + (v_0^2 - P_0)w'' + 2v_0\sqrt{\beta}\dot{w}' + w^{IV} + \varepsilon\alpha\dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu\dot{w} = \varepsilon P_1 w'' \cos \Omega t + \varepsilon \left(k_1 w'' \int_0^1 w'^2 dx + k_2 \int_0^1 \dot{w}' w' dx w'' \right) \quad (5.59)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (5.60)$$

ile ifade edilir. Genel operatörlerin karşılıkları,

$$\mathbf{L}_1(w) = (v_0^2 - P_0)w'' + w^{IV} \quad (5.61)$$

$$\mathbf{L}_2(\dot{w}) = 2v_0\sqrt{\beta}\dot{w}' \quad (5.62)$$

$$\mathbf{L}_3(\dot{w}) = \alpha\dot{w}^{IV} + \mu\dot{w} \quad (5.63)$$

$$\mathbf{L}_4(w) = P_1 w'' \quad (5.64)$$

$$\mathbf{C}_1(w, w, w) = k_1 w'' \int_0^1 w'^2 dx \quad (5.65)$$

$$\mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) = k_2 \int_0^1 \dot{w}' w' dx w'' \quad (5.66)$$

(5.17)-(5.19)'da genel hali tanımlanan özdeğer-özfonksiyon problemi,

$$Y_n^{IV} + (v_0^2 - P_0)Y_n'' + 2i\omega_n v_0 \sqrt{\beta} Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (5.67)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \quad (5.68)$$

şeklinde dir. Denklem (5.67) ile verilen diferansiyel denkleme,

$$Y_n(x) = C_{1n} e^{i\beta_{1n}x} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}x} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}x} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}x} \quad (5.69)$$

çözümü önerilebilir. Çözüm denkleme yazılırsa, saçılma denklemini elde edilir,

$$\beta_{in}^4 + (P_0 - v_0^2)\beta_{in}^2 - 2v_0\sqrt{\beta}\omega_n\beta_{in} - \omega_n^2 = 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad n = 1,2 \quad (5.70)$$

Önerilen diferansiyel denklemin çözümü mesnet sınır şartlarını sağlamalıdır,

$$C_{1n} + C_{2n} + C_{3n} + C_{4n} = 0 \quad (5.71)$$

$$C_{1n}\beta_{1n}^2 + C_{2n}\beta_{2n}^2 + C_{3n}\beta_{3n}^2 + C_{4n}\beta_{4n}^2 = 0 \quad (5.72)$$

$$C_{1n}e^{i\beta_{1n}} + C_{2n}e^{i\beta_{2n}} + C_{3n}e^{i\beta_{3n}} + C_{4n}e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (5.73)$$

$$C_{1n}\beta_{1n}^2e^{i\beta_{1n}} + C_{2n}\beta_{2n}^2e^{i\beta_{2n}} + C_{3n}\beta_{3n}^2e^{i\beta_{3n}} + C_{4n}\beta_{4n}^2e^{i\beta_{4n}} = 0 \quad (5.74)$$

Eşitlik, matris yapısında gösterilirse,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\beta_{1n}} & e^{i\beta_{2n}} & e^{i\beta_{3n}} & e^{i\beta_{4n}} \\ \beta_{1n}^2 & \beta_{2n}^2 & \beta_{3n}^2 & \beta_{4n}^2 \\ e^{i\beta_{1n}}\beta_{1n}^2 & e^{i\beta_{2n}}\beta_{2n}^2 & e^{i\beta_{3n}}\beta_{3n}^2 & e^{i\beta_{4n}}\beta_{4n}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

olur. Basit olmayan çözüm ele alınır, destek şartı elde edilir,

$$\begin{aligned} & (e^{i(\beta_{1n}+\beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n}+\beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{4n}^2) + (e^{i(\beta_{1n}+\beta_{3n})} + e^{i(\beta_{2n}+\beta_{4n})})(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) \\ & + (e^{i(\beta_{2n}+\beta_{3n})} + e^{i(\beta_{1n}+\beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{3n}^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

ω_n ve β_{in} sayısal değerleri, saçılma denklemini ve destek şartının ortak çözümüyle bulunur.

Denklemler (5.71)-(5.74) eşitliklerinde katsayıların elenmesiyle şekil fonksiyonu bulunur,

$$\begin{aligned}
Y_n(x) = c_1 \left\{ e^{i\beta_{1n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} e^{i\beta_{2n}x} - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} e^{i\beta_{3n}x} \right. \\
\left. + \left[-1 + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{2n}})} + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} \right] e^{i\beta_{4n}(x)} \right\}
\end{aligned} \quad (5.77)$$

(5.35)-(5.37) eşitliklerinde tanımlanan katsayıların akışkan taşıyan vikoelastik boru modeli için karşılıkları aşağıdaki gibidir,

$$k_{1n} = \frac{i\omega_n \int_0^1 (\alpha Y_n^{IV} + \mu Y_n) \bar{Y}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.78)$$

$$k_{2n} = \frac{k_1 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' dx \int_0^1 Y_n'^2 dx \right\} + i\omega_n k_2 \left\{ \int_0^1 Y_n'^2 dx \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' dx \right\}}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.79)$$

$$k_{3n} = \frac{\frac{1}{2} P_1 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.80)$$

$n = 1$ için ayar parametresi,

$$\sigma_1 = -2k_{11I} + \frac{1}{2} a_1^2 k_{21I} \mp 2 \sqrt{k_{31R}^2 + k_{31I}^2 - \left(k_{11R} - \frac{1}{4} a_1^2 k_{21R} \right)^2} \quad (5.81)$$

Jakobiyen matrise ait eşitlikler,

$$a_1' = -a_1 k_{11R} + \frac{1}{4} a_1^3 k_{21R} + a_1 k_{31R} \cos \gamma_1 - a_1 k_{31I} \sin \gamma_1 = F_{11}(a_1, \gamma_1) \quad (5.82)$$

$$\gamma_1' = \sigma_1 + 2k_{11I} - \frac{1}{2}a_1^2 k_{21I} - 2k_{31R} \sin \gamma_1 - 2k_{31I} \cos \gamma_1 = F_{21}(a_1, \gamma_1) \quad (5.83)$$

ile hesaplanır. Genel çözüm ise aşağıdaki gibidir,

$$w(x, t; \varepsilon) = a_1 \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}(\Omega t - \gamma_1)\right) Y_{1R} - \sin\left(\frac{1}{2}(\Omega t - \gamma_1)\right) Y_{1I} \right\} + O(\varepsilon) \quad (5.84)$$

5.2.1.1. Sayısal Sonuçlar

Akışkan taşıyan viskoelastik boruya ait temel parametrik rezonans durumunun sayısal sonuçları bu kısımda verilmiştir.

Şekil 5.1'de akışkan taşıyan viskoelastik boruya ait birinci mod tabii frekanslarının akışkan hızıyla değişimi belirli bir β oranı ve değişik eksenel gerilme kuvveti değerleri için çizilmiştir. Eksenel gerilme kuvveti arttıkça sistemin birinci mod tabii frekans değerleri artmaktadır. Akışkan hızı arttıkça birinci mod tabii frekans değerleri azalmaktadır. Kararsızlık durumu yoktur.

Şekiller 5.2-5.4'te birinci moda ait grafikler aynı β oranı ve değişik eksenel gerilme kuvveti değerleri için ayrı ayrı verilmiştir. Bu grafiklerde akış hızının artışı tabii frekans değerlerini azaltmaktadır. Üç grafikte de saçılma denklemi ile destek şartının ortak çözümünden elde edilen değerlerin gerçel ve sanal kısımları gösterilmiştir. Sanal kısımlar Bölüm 4'te de ifade edildiği gibi çok küçük çıkmaktadır. Sistem tabii frekansı olarak çözümlerin gerçel kısımları alınır. Birinci modda, akış hızı arttıkça gerçel kısımlar sınırlanabilmektedir. Bundan sonra sanal değerlerde değişim gözlenmektedir.

Şekil 5.5'te yine bir β oranı ve değişik eksenel gerilme kuvveti değerleri için, bu sefer ikinci mod tabii frekanslarının akış hızıyla değişimi görülmektedir. Akış hızı arttıkça tabii frekanslar azalmakta ancak sınırlanamamaktadır. Grafikler belirli noktalardan itibaren kesilmiştir. Bunun sebebi kararsızlıkların başlamasıdır. Şekiller 5.6-5-8'de görüldüğü üzere ikinci modda belirli hızlarda, saçılma denklemi ile destek şartının ortak çözümünden elde edilen değerlerin sanal kısımları sıfırdan farklı değerler almaktadır. Şekil 5.5'te sistemin tabii frekansı olarak alınan gerçel kısımlar işte tam bu hız değerlerinde kesilmiştir.

Şekil 5.9'da yine değişik eksenel gerilme kuvveti değerleri için bu sefer üçüncü mod tabii frekans değerlerinin akış hızıyla değişimi görülmektedir. İkinci modda olduğu gibi üçüncü mod tabii frekans grafikleri de kararsızlığın başladığı noktalardan itibaren kesilmiştir. Şekiller 5.10-5.12'de yine belirli bir β oranı ve her bir eksenel gerilme kuvveti değeri için saçılma denklemi ile destek şartının ortak çözümünden elde edilen değerlerin sanal ve gerçel kısımları birarada gösterilmiştir.

Şekiller 5.13-5.15'te bir β değeri ve değişik eksenel gerilme kuvveti değerleri için ilk üç mod tabii frekans grafikleri birarada gösterilmiştir.

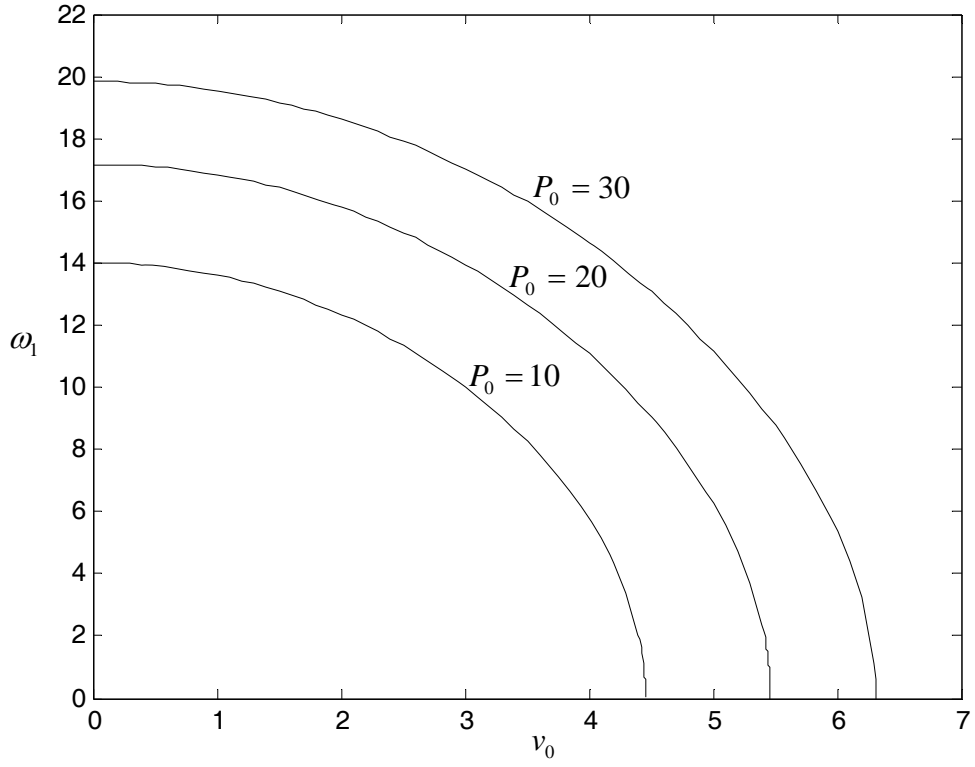
Şekil 5.16'da frekans-tepki grafikleri k_2 parametresinin değişimi için çizilmiştir. Nonlineer davranış grafiklerde açıkça görülmektedir. Bu parametre değerinin artması genlik değerlerini düşürmektedir. Nonlineerliği azaltmaktadır. Burada hem basit hem de basit olmayan çözümlerin kararlılığına bakılmıştır. Kararsız bölgeler kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Grafiklerde görüldüğü üzere yatay ekseninde küçük değerlerden büyüğe doğru ilerledikçe kararlı olan basit çözüm belli bir bifürkasyon değerinde bir kararlı basit olmayan çözüme ve bir kararsız basit çözüme dönüşmektedir. Bu noktalar çözümlerin dallandığı noktalardır (bifürkasyon noktaları). Bu kavram nonlineer dinamiğin önemli kavramlarından biridir. Grafiklerde yatay ekseninde ilerledikçe bir kararlı basit olmayan çözümün ve bir kararsız basit çözümün belli bir değerden sonra bir kararlı basit çözüme dönüştüğü görülmektedir. Bu arada sıçrama hadisesinden dolayı basit olmayan çözümdeki kararsız bölgeler yine mevcuttur. k_2 parametresinin değişimi bifürkasyon değerlerini değiştirmemiştir.

Şekil 5.17'de ise α parametresinin etkisine bakılmıştır. Görülmektedir ki bu parametre değerinin artışı da genliği düşürmektedir. Nonlineerlik yine azalmaktadır. Ayrıntılı grafiklerle birlikte ele alınacak olursa yine yatay ekseninde küçük değerlerden büyüğe doğru ilerledikçe kararlı olan basit çözüm belli bir bifürkasyon değerinde bir kararlı basit olmayan çözüme ve bir kararsız basit çözüme dönüşmektedir. Bifürkasyon değerleri α arttıkça artmaktadır. Grafikte ilerledikçe bir kararlı ve bir kararsız çözümün belli bir değerden sonra bir kararlı çözüme dönüştüğü görülmektedir.

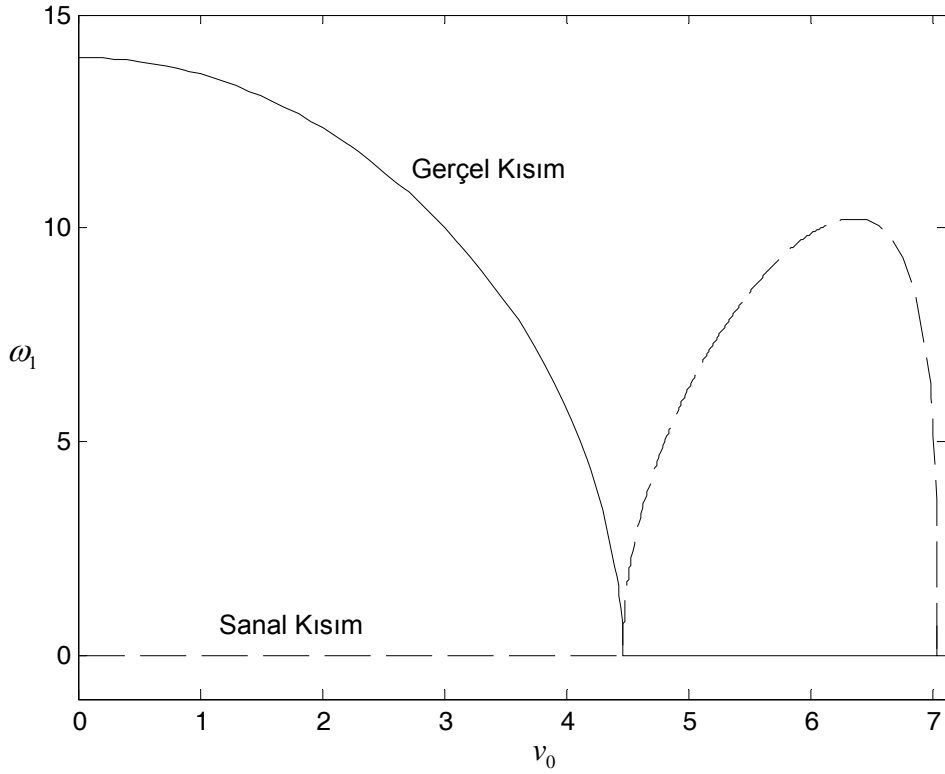
Şekil 5.18'de eksenel gerilme kuvvetinin değişimi gösterilmiştir. Bu grafikten anlaşılacağı üzere eksenel gerilme kuvvetinin artışı genlikleri ve nonlineerliği artırmaktadır. Ayrıca sistemde yine kararlı olan basit çözüm belli bir bifürkasyon değerinde bir kararlı basit olmayan ve bir kararsız basit çözüme dönüşmektedir. Bifürkasyon değerleri eksenel gerilme kuvveti değeri azaldıkça artmaktadır. Grafikte ilerledikçe bir kararlı ve bir kararsız çözümün belli bir değerden sonra bir

kararlı çözüme dönüştüğü görülmektedir. Bu değişim noktasının değerleri ise gerilme kuvveti arttıkça artmaktadır.

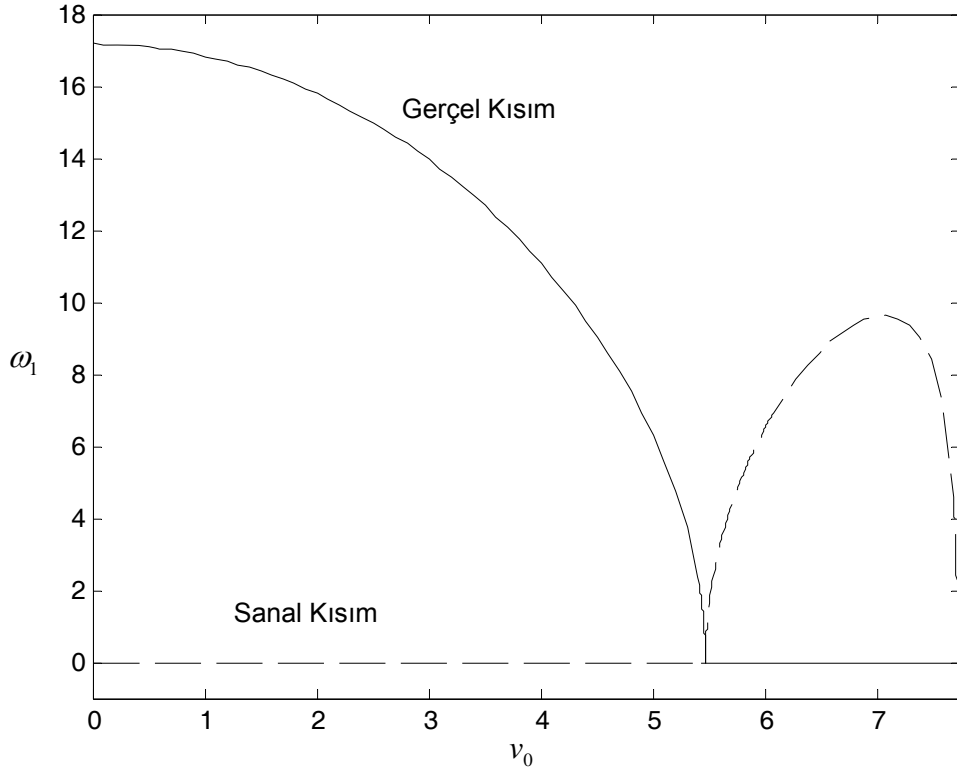
Şekil 5.19'da k_1 parametresinin etkisi incelenmiştir. Bu parametrenin değişimi bifürkasyon noktalarının değerini etkilememiştir. Her bir k_1 parametre değeri için bifürkasyon noktaları aynıdır. k_1 parametresinin artmasıyla nonlineerlik artmaktadır.



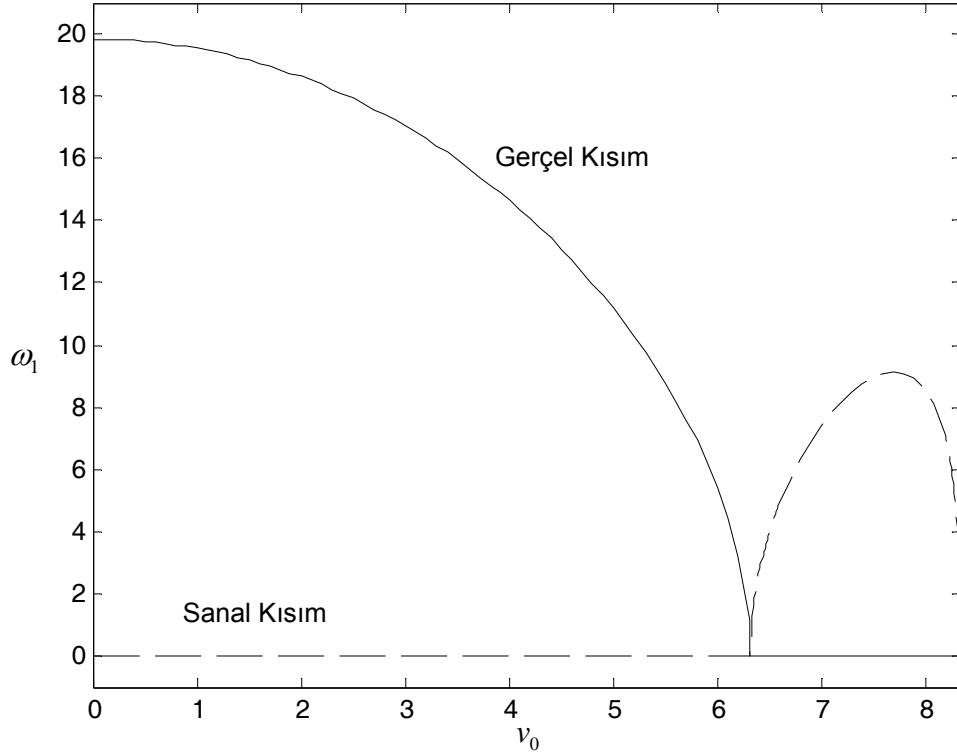
Şekil 5.1. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4$)



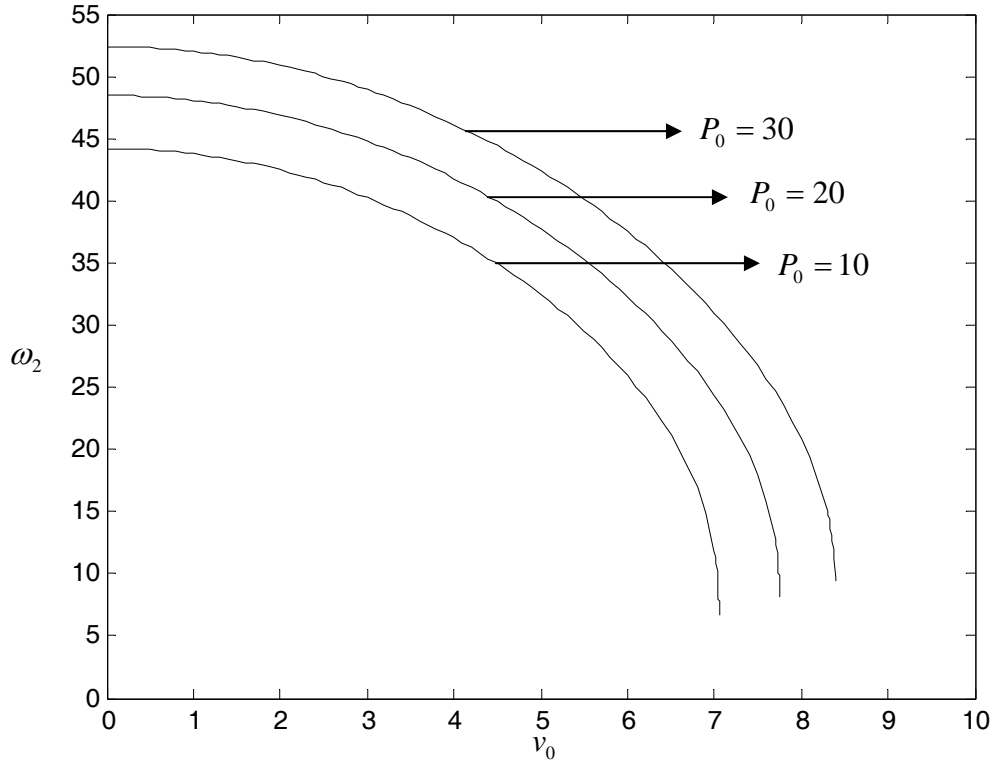
Şekil 5.2. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 10$, $\beta = 0.4$)



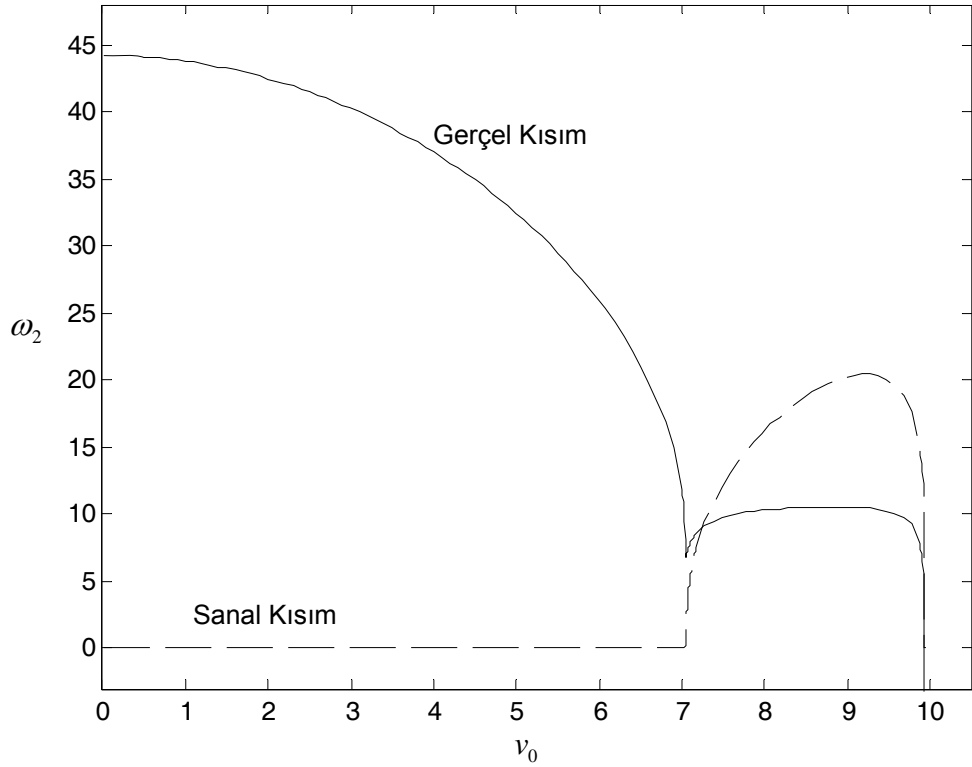
Şekil 5.3. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 20$, $\beta = 0.4$)



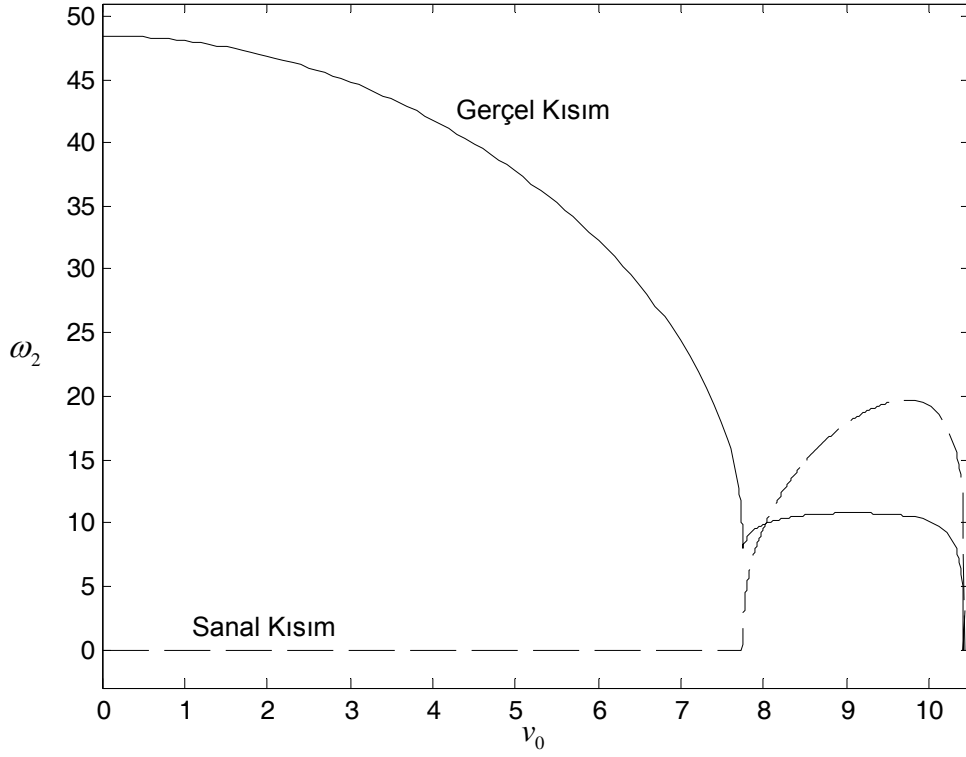
Şekil 5.4. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 30$, $\beta = 0.4$)



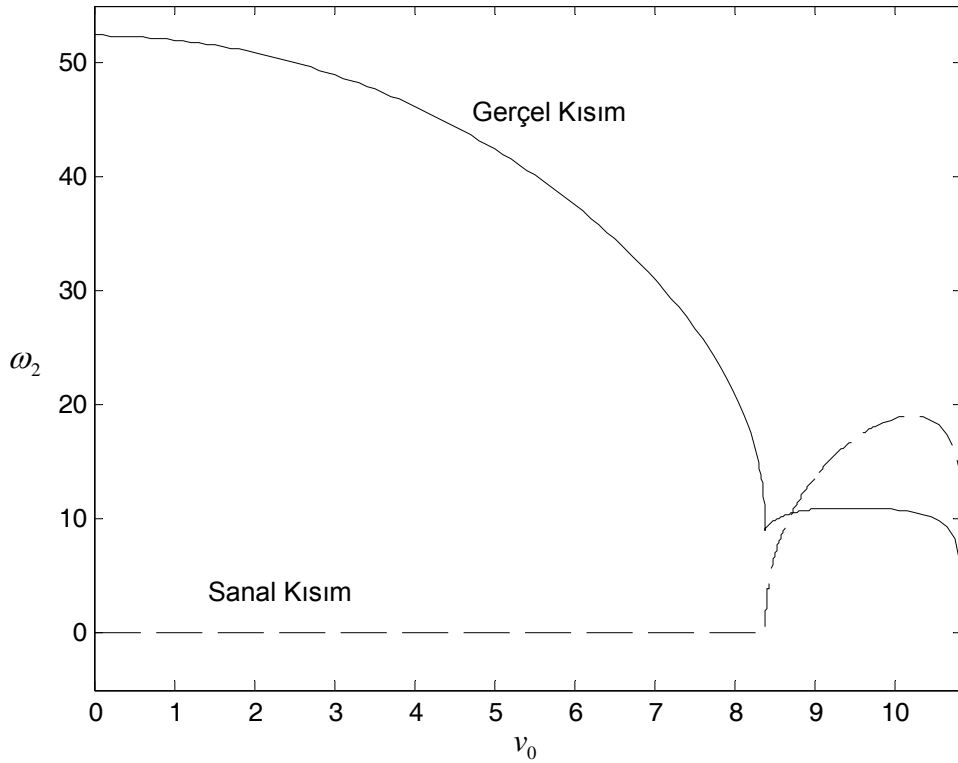
Şekil 5.5. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekans değerleri
($\beta = 0.4$)



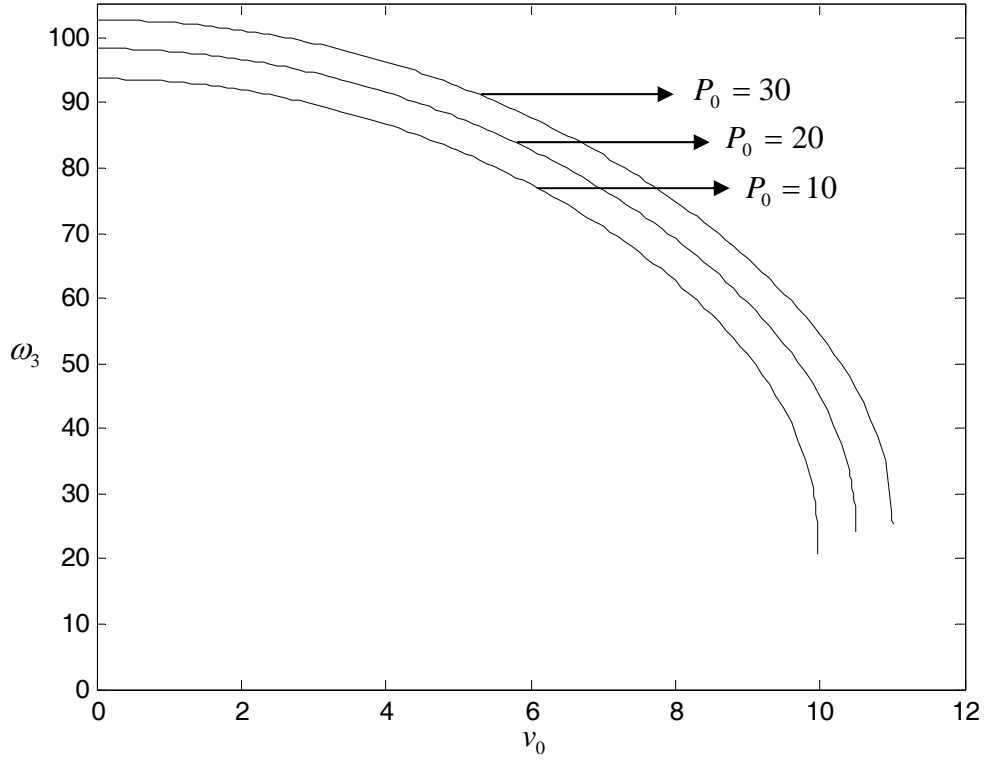
Şekil 5.6. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($P_0 = 10$, $\beta = 0.4$)



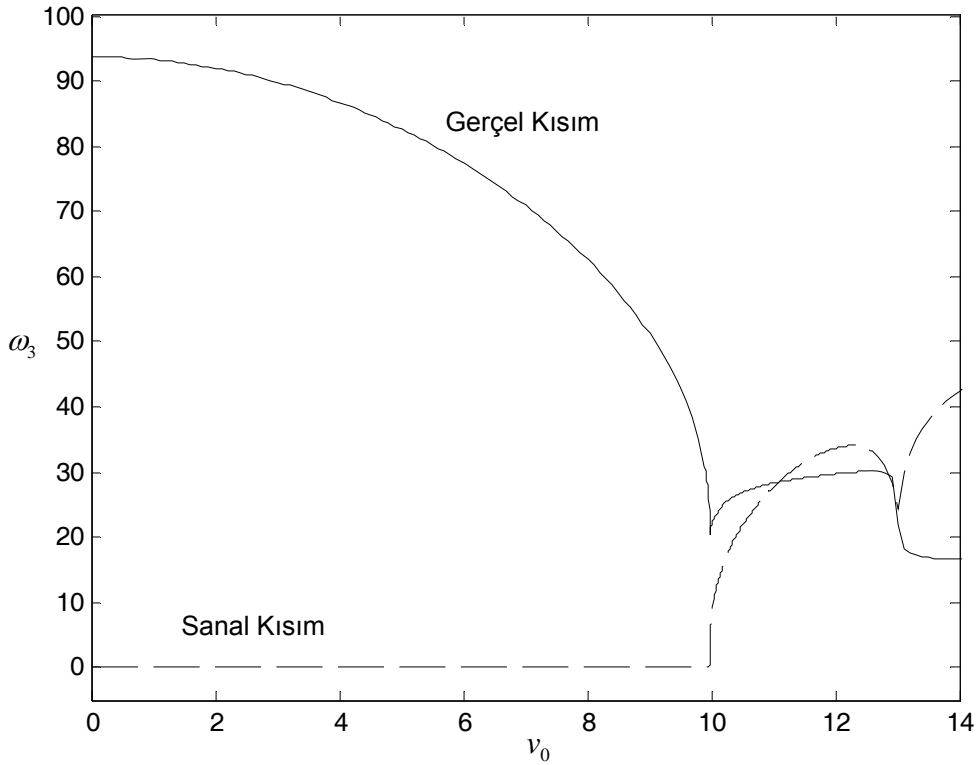
Şekil 5.7. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($P_0 = 20$, $\beta = 0.4$)



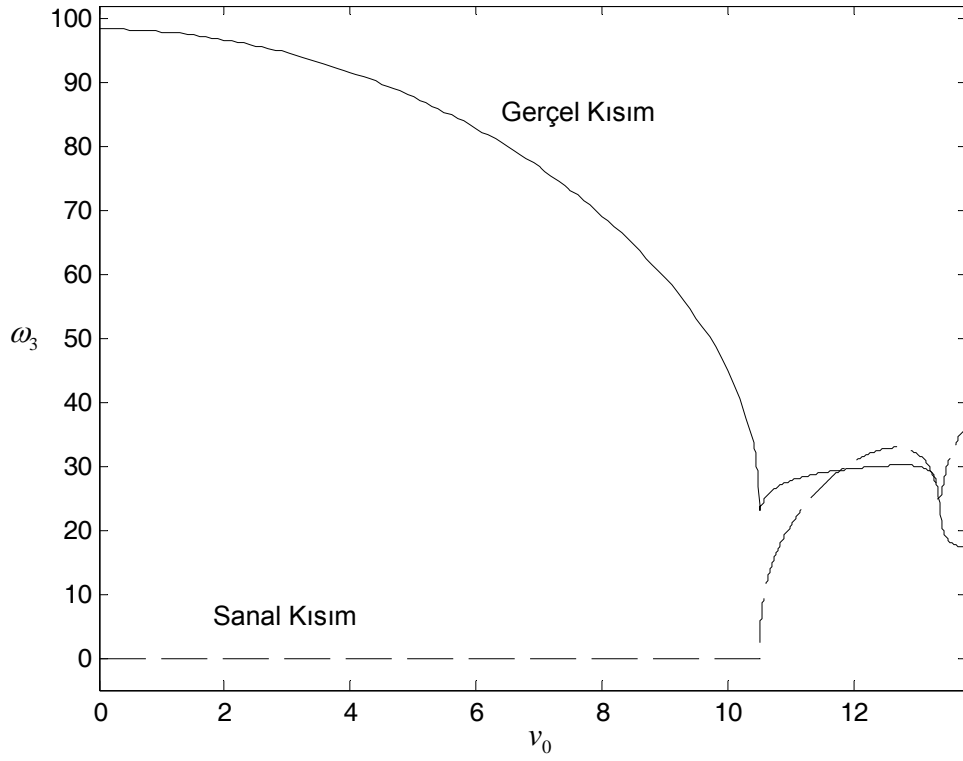
Şekil 5.8. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($P_0 = 30$, $\beta = 0.4$)



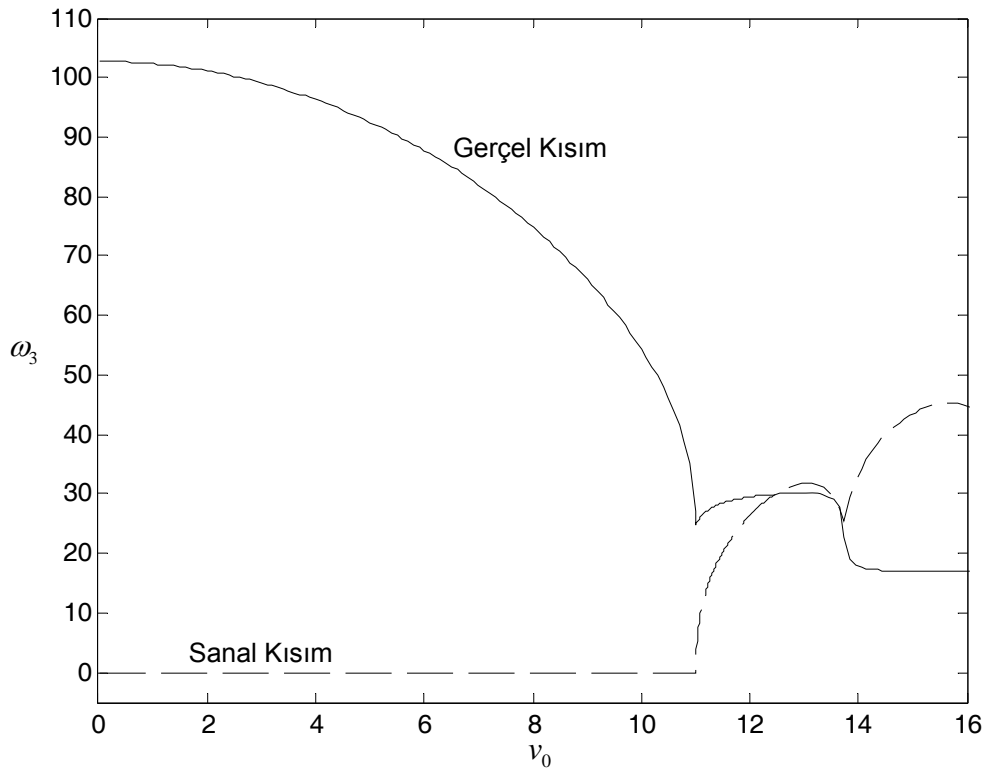
Şekil 5.9. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4$)



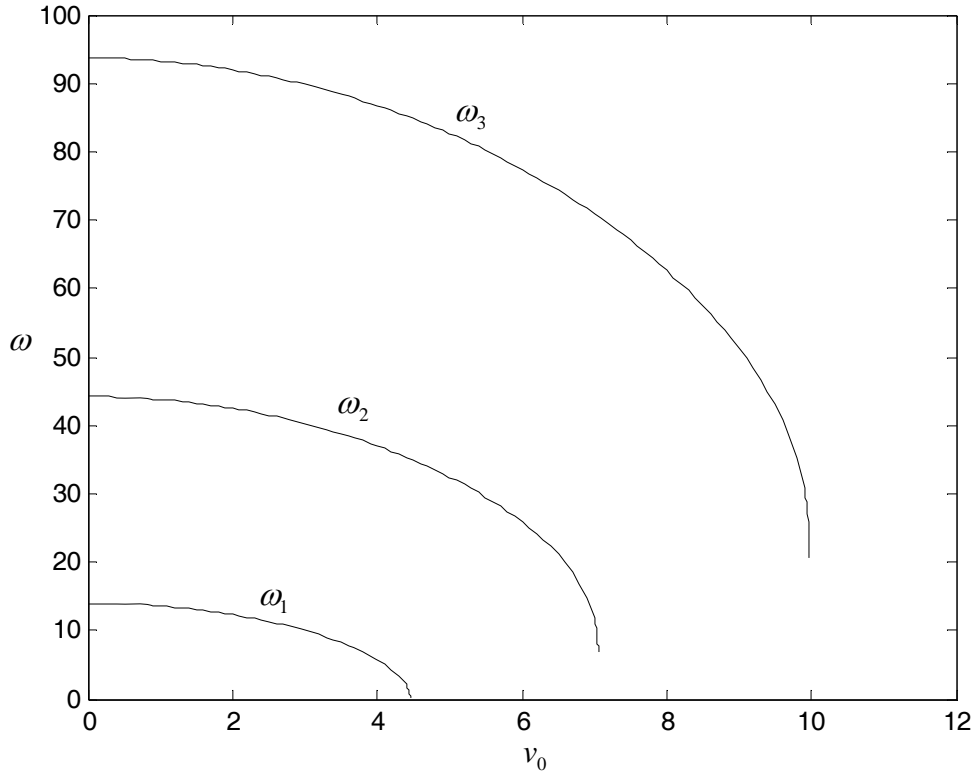
Şekil 5.10. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($P_0 = 10$, $\beta = 0.4$)



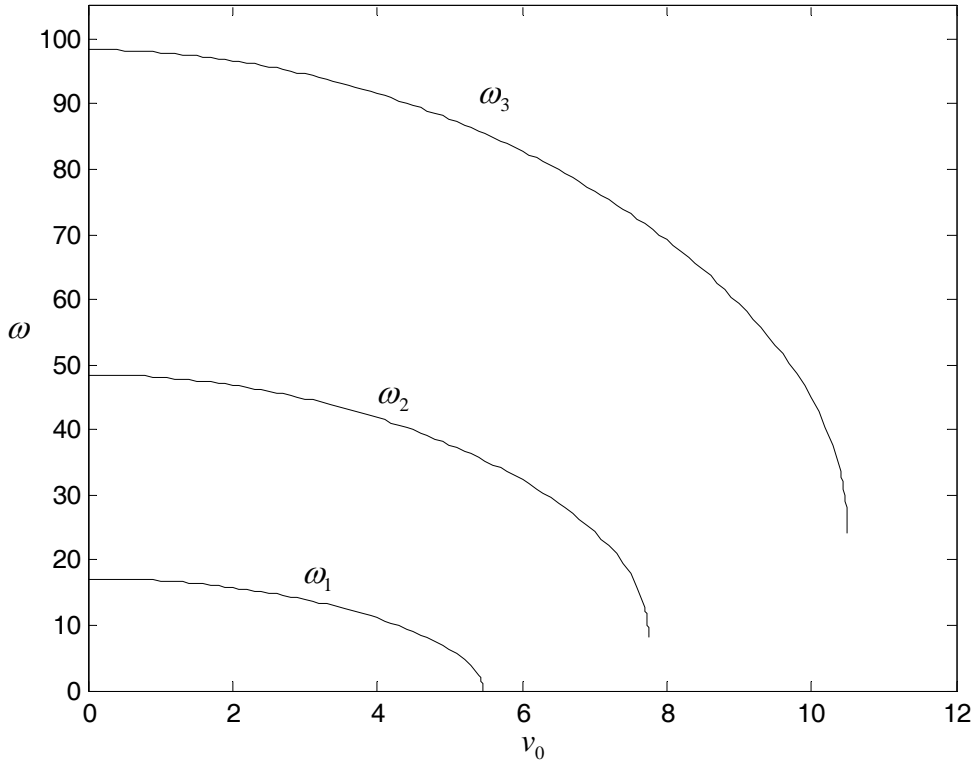
Şekil 5.11. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($P_0 = 20$, $\beta = 0.4$)



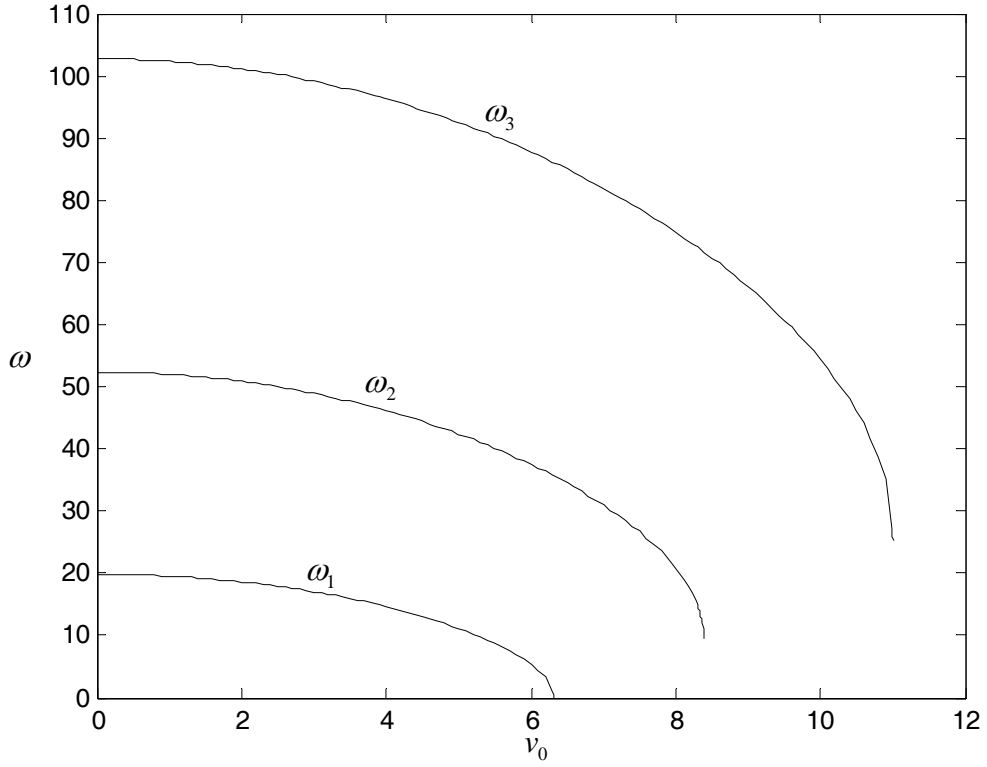
Şekil 5.12. Akışkan hızına karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($P_0 = 30$, $\beta = 0.4$)



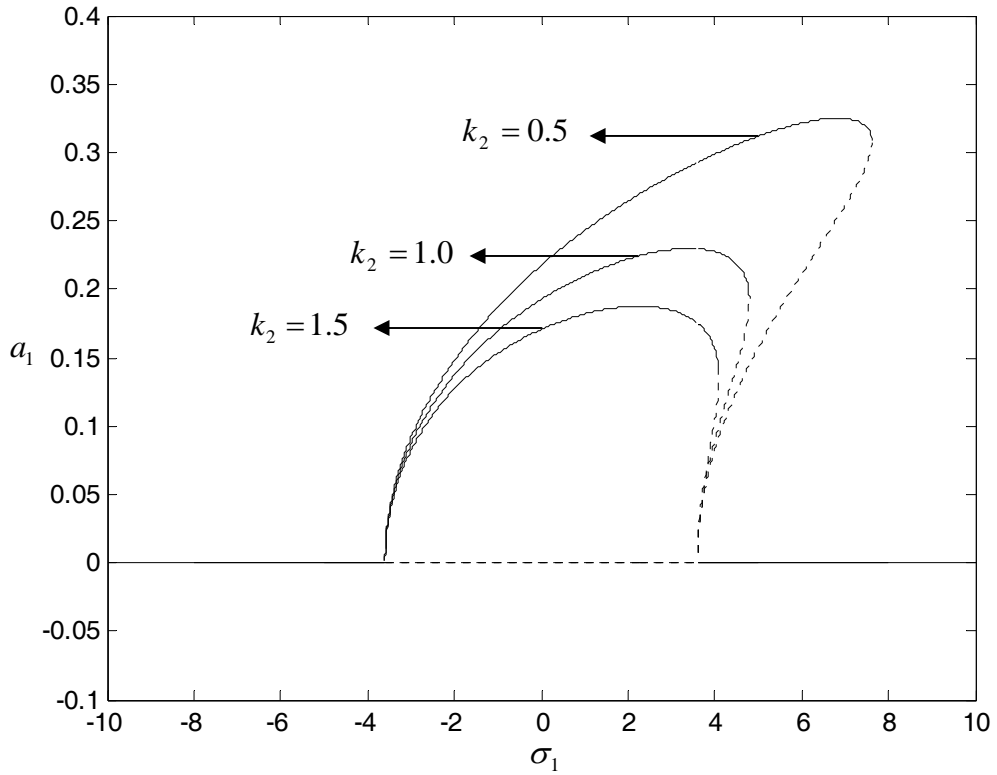
Şekil 5.13. Akışkan hızına karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4, P_0 = 10$)



Şekil 5.14. Akışkan hızına karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri ($\beta = 0.4, P_0 = 20$)

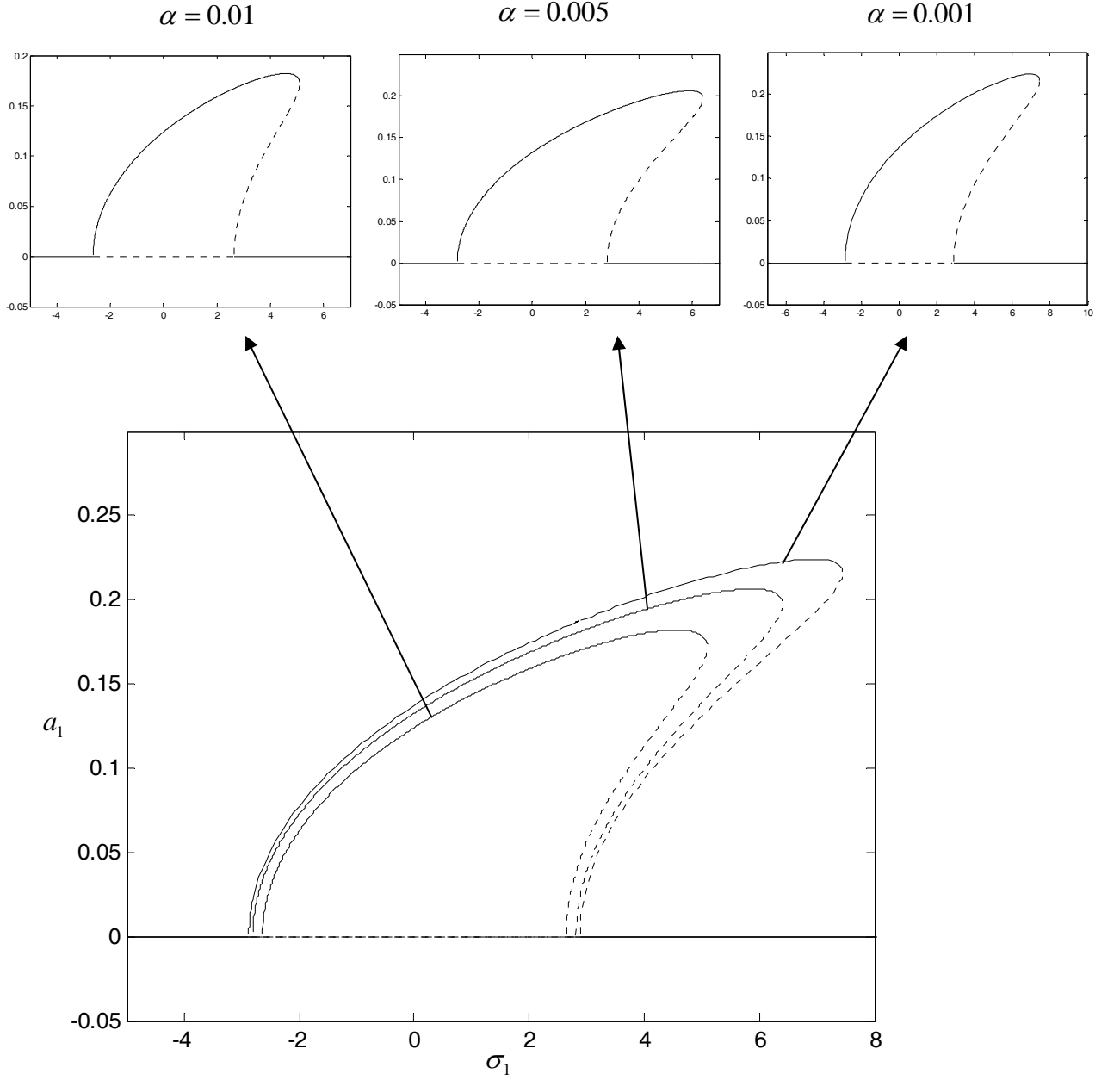


Şekil 5.15. Akışkan hızına karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri
($\beta = 0.4, P_0 = 30$)



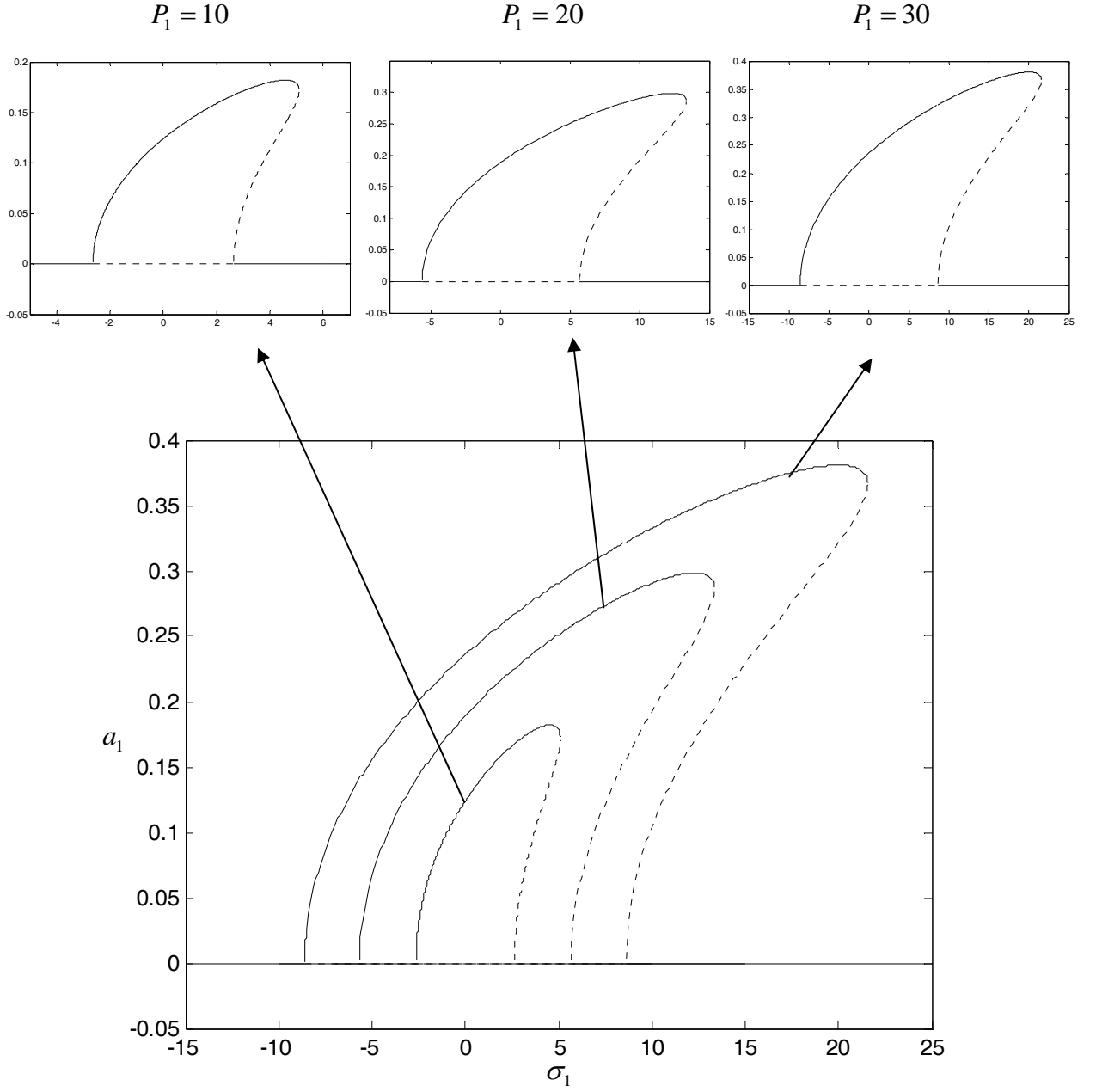
Şekil 5.16. Frekans Tepki Grafiği

($v_0 = 1.4, \beta = 0.4, \mu = 0.2, \alpha = 0.005, P_0 = 10, P_1 = 10, k_1 = 5, k_2 = 0.5 - 1.0 - 1.5, \omega_1 = 13.2078$)



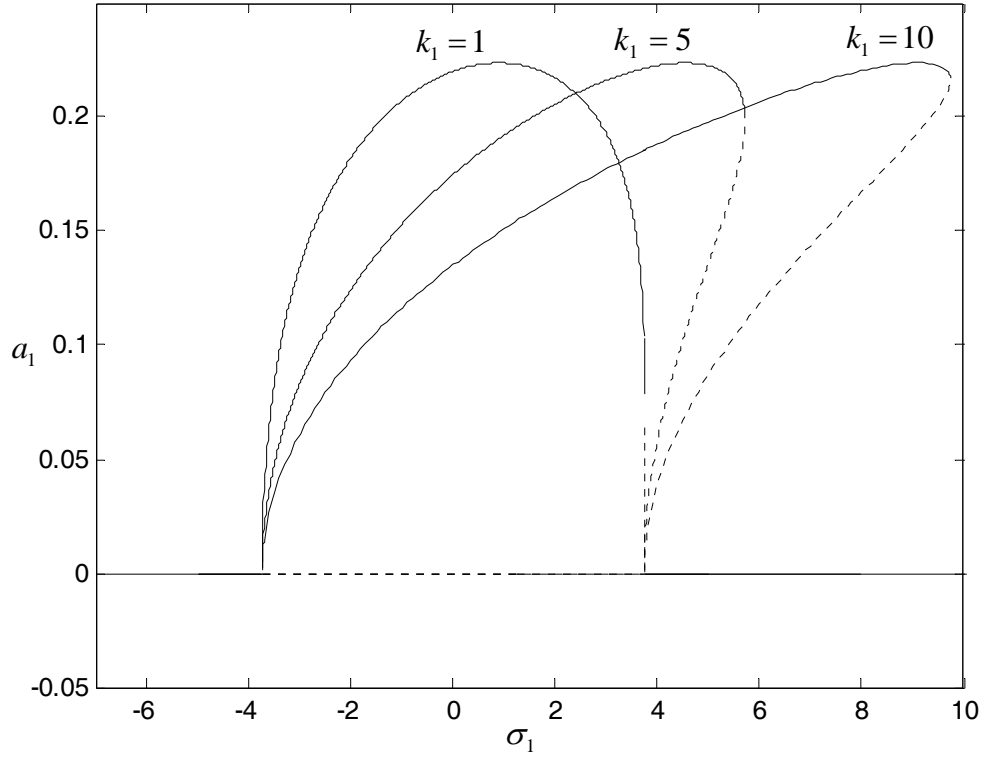
Şekil 5.17. Frekans Tepki Grafiği

($\nu_0 = 0.8, \beta = 0.4, \mu = 0.2, \alpha = 0.001 - 0.005 - 0.01, P_0 = 20, P_1 = 10, k_1 = 15, k_2 = 1, \omega_1 = 16.95413$)



Şekil 5.18. Frekans Tepki Grafiği

($v_0 = 0.8, \beta = 0.4, \mu = 0.2, \alpha = 0.01, P_0 = 20, P_1 = 10 - 20 - 30, k_1 = 15, k_2 = 1, \omega_1 = 16.95413$)



Şekil 5.19. Frekans Tepki Grafiği

($\nu_0 = 4, \beta = 0.4, \mu = 0.3, \alpha = 0.005, P_0 = 20, P_1 = 10, k_1 = 1-5-10, k_2 = 1, \omega_1 = 11.07468$)

5.3. Temel Parametrik Rezonans : 3:1 İç Rezonans Durumu

Bu bölümde parametrik titreşim halindeki sürekli ortam sisteminde temel parametrik rezonans ve 3:1 iç rezonans koşullarının birlikte olduğu durum ele alınacaktır. n . ve m . modların etkin olduğu varsayımı ile ilk mertebedeki (5.10) denklemine,

$$w_0(x, T_0, T_1) = A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} Y_n(x) + \bar{A}_n(T_1)e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n(x) + A_m(T_1)e^{i\omega_m T_0} Y_m(x) + \bar{A}_m(T_1)e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m(x) \quad (5.85)$$

çözümü önerilir. Bu çözüm ilk mertebedeki denklem (5.10)'da yerine yazılırsa,

$$\mathbf{L}_1(Y_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(Y_n) - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.86)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_n) = 0 \quad x = 0 \quad (5.87)$$

$$\mathbf{B}_2(Y_n) = 0 \quad x = 1 \quad (5.88)$$

ve

$$\mathbf{L}_1(Y_m) + i\omega_m \mathbf{L}_2(Y_m) - \omega_m^2 Y_m = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.89)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_m) = 0 \quad x = 0 \quad (5.90)$$

$$\mathbf{B}_2(Y_m) = 0 \quad x = 1 \quad (5.91)$$

özdeğer özfonksiyon problemleri elde edilir. (5.85) çözümü ε mertebesindeki (5.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & -2 D_1 (i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m - i\omega_m \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m) \\
& - \mathbf{L}_2 \left(D_1 (A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m) \right) \\
& - \mathbf{L}_3 \left(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m - i\omega_m \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m \right) \\
& + \mathbf{L}_4 \left(A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m \right) \left(\frac{e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}}{2} \right) \\
& + \mathbf{C}_1 \left(A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \right. \\
& \quad A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \\
& \quad \left. A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m \right) \\
& + \mathbf{C}_2 \left(i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - i\omega_n \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m - i\omega_m \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \right. \\
& \quad A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m, \\
& \quad \left. A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \bar{Y}_n + A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m + \bar{A}_m e^{-i\omega_m T_0} \bar{Y}_m \right)
\end{aligned} \tag{5.92}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \tag{5.93}$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \tag{5.94}$$

elde edilir. Parametrik zorlamaya ait frekansın, n'inci modun frekansının 2 katına yakın olduğu ve n'inci mod frekansı ile m'inci mod frekansı arasında 3:1 iç rezonans olduğu kabulü yapılır,

$$\Omega = 2\omega_n + \varepsilon \sigma_n \tag{5.95}$$

$$\omega_m = 3\omega_n + \varepsilon \rho_n \tag{5.96}$$

σ_n ve ρ_n , bir mertebesinde ayar parametreleridir. İç rezonans koşulları (5.92) denkleminde yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \mathbf{L}_1(w_1) + \mathbf{L}_2(D_0 w_1) = & -2i\omega_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} Y_n - 2i\omega_m D_1 A_m e^{i\omega_m T_0} Y_m \\
& - D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_2(Y_n) - D_1 A_m e^{i\omega_m T_0} \mathbf{L}_2(\bar{Y}_m) \\
& - i\omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} \mathbf{L}_3(Y_n) - i\omega_m A_m e^{i\omega_m T_0} \mathbf{L}_3(Y_m) \\
& + \frac{1}{2} A_n e^{i(\omega_n + \Omega)T_0} \mathbf{L}_4(Y_n) + \frac{1}{2} \bar{A}_n e^{i(-\omega_n + \Omega)T_0} \mathbf{L}_4(\bar{Y}_n) \\
& + \frac{1}{2} A_m e^{i(\omega_m - \Omega)T_0} \mathbf{L}_4(Y_m) \\
& + A_n^3 e^{i\omega_n T_0} e^{-i\rho_n T_1} \{C_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n C_2(Y_n, Y_n, Y_n)\} \\
& + \bar{A}_n^2 A_m e^{i\omega_n T_0} e^{i\rho_n T_1} \{C_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + C_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) \\
& \quad - i\omega_n [C_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + C_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m C_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n)\} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \{C_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \\
& \quad + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)]\} \\
& + A_m^2 \bar{A}_m e^{i\omega_m T_0} \{C_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + C_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + C_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) \\
& \quad + i\omega_m [C_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + C_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - C_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)]\} \\
& + A_n \bar{A}_n A_m e^{i\omega_m T_0} \{C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + C_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + C_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& \quad + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + C_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + C_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& \quad + i\omega_n [C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + C_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) \\
& \quad - C_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n)] + i\omega_m [C_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + C_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n)]\} \\
& + A_n A_m \bar{A}_m e^{i\omega_n T_0} \{C_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + C_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + C_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) \\
& \quad + C_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + C_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + C_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) \\
& \quad + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + C_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m)] + i\omega_m [C_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) \\
& \quad + C_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) - C_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) - C_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m)]\} \\
& + k.e. + S.O.T.
\end{aligned} \tag{5.97}$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \tag{5.98}$$

$$\mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \tag{5.99}$$

elde edilir. Denkleme aşağıdaki çözüm önerilir,

$$w_1(x, T_0, T_1) = \varphi_n(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + \varphi_m(x, T_1) e^{i\omega_m T_0} + k.e. + W(x, T_0, T_1) \tag{5.100}$$

$W(x, T_0, T_1)$ seküler olmayan terimleri içerir. Denklem (5.100) ile gösterilen çözüm, denklemler (5.97)-(5.99)'da yazılır ve seküler terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
-\omega_n^2 \varphi_n + \mathbf{L}_1(\varphi_n) + i\omega_n \mathbf{L}_2(\varphi_n) = & -2i\omega_n D_1 A_n Y_n - D_1 A_n \mathbf{L}_2(Y_n) - i\omega_n A_n \mathbf{L}_3(Y_n) \\
& + \frac{1}{2} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \mathbf{L}_4(\bar{Y}_n) + \frac{1}{2} A_m e^{i(\rho_n - \sigma_n) T_1} \mathbf{L}_4(Y_m) \\
& + \bar{A}_n^2 A_m e^{i\rho_n T_1} \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) - i\omega_n [\mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} \\
& + A_n^2 \bar{A}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} \\
& + A_n A_m \bar{A}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) \\
& + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m)] + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) \\
& - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m)] \}
\end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\mathbf{B}_1(\varphi_n) = 0 \quad x = 0 \tag{5.102}$$

$$\mathbf{B}_2(\varphi_n) = 0 \quad x = 1 \tag{5.103}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_m^2 \varphi_m + \mathbf{L}_1(\varphi_m) + i\omega_m \mathbf{L}_2(\varphi_m) = & -2i\omega_m D_1 A_m Y_m - D_1 A_m \mathbf{L}_2(Y_m) \\
& - i\omega_m A_m \mathbf{L}_3(Y_m) + \frac{1}{2} A_n e^{i(\sigma_n - \rho_n) T_1} \mathbf{L}_4(Y_n) \\
& + A_n^3 e^{-i\rho_n T_1} \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, Y_n) \} \\
& + A_m^2 \bar{A}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) \\
& + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)] \} \\
& + A_n \bar{A}_n A_m \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) \\
& - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n)] + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n)] \}
\end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\mathbf{B}_1(\varphi_m) = 0 \quad x = 0 \tag{5.105}$$

$$\mathbf{B}_2(\varphi_m) = 0 \quad x = 1 \tag{5.106}$$

denklemleri ve sınır şartları elde edilir. Çözülebilirlik şartı gereği, Denklem (5.101) $u_n(x) = \bar{Y}_n(x)$, Denklem (5.104) ise $u_m(x) = \bar{Y}_m(x)$ fonksiyonları ile çarpılıp tanım kümesi üzerinden integre edilmelidir. Sonuç olarak aşağıdaki denklemler elde edilir,

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + D_1 A_n \int_0^1 \bar{Y}_n L_2(Y_n) dx + i\omega_n A_n \int_0^1 L_3(Y_n) \bar{Y}_n dx \\
& - \frac{1}{2} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \int_0^1 \bar{Y}_n L_4(\bar{Y}_n) dx - \frac{1}{2} A_m e^{i(\rho_n - \sigma_n) T_1} \int_0^1 \bar{Y}_n L_4(Y_m) dx \\
& - \bar{A}_n^2 A_m e^{i\rho_n T_1} \int_0^1 \bar{Y}_n \{C_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + C_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) \\
& - i\omega_n [C_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + C_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m C_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n)\} dx \\
& - A_n^2 \bar{A}_n \int_0^1 \bar{Y}_n \{C_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) \\
& + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)]\} dx \\
& - A_n A_m \bar{A}_m \int_0^1 \bar{Y}_n \{C_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + C_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + C_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) \\
& + C_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + C_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + C_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) + i\omega_n [C_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + C_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m)] \\
& + i\omega_m [C_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + C_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) - C_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) - C_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m)]\} dx = 0
\end{aligned} \tag{5.107}$$

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_m D_1 A_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + D_1 A_m \int_0^1 \bar{Y}_m L_2(Y_m) dx + i\omega_m A_m \int_0^1 L_3(Y_m) \bar{Y}_m dx \\
& - \frac{1}{2} A_n e^{i(\sigma_n - \rho_n) T_1} \int_0^1 \bar{Y}_m L_4(Y_n) dx - A_n^3 e^{-i\rho_n T_1} \int_0^1 \bar{Y}_m \{C_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n C_2(Y_n, Y_n, Y_n)\} dx \\
& - A_m^2 \bar{A}_m \int_0^1 \bar{Y}_m \{C_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + C_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + C_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) \\
& + i\omega_m [C_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + C_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - C_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)]\} dx \\
& - A_n \bar{A}_n A_m \int_0^1 \bar{Y}_m \{C_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + C_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + C_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) \\
& + C_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + C_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + C_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) \\
& + i\omega_n [C_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + C_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) - C_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) - C_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n)] \\
& + i\omega_m [C_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + C_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n)]\} dx = 0
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Çözülebilirlik şartları,

$$D_1 A_n + k_{1n} A_n - k_{2n} A_n^2 \bar{A}_n - k_{3n} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} - k_{4nm} A_m e^{i(\rho_n - \sigma_n) T_1} - k_{5nm} \bar{A}_n^2 A_m e^{i\rho_n T_1} - k_{6nm} A_n A_m \bar{A}_m = 0 \tag{5.109}$$

$$D_1 A_m + k_{1m} A_m - k_{2m} A_m^2 \bar{A}_m - k_{4mm} A_n e^{i(\sigma_n - \rho_n)T_1} - k_{6mn} A_n \bar{A}_n A_m - k_{7mn} A_n^3 e^{-i\rho_n T_1} = 0 \quad (5.110)$$

olur. Katsayılar aşağıda tanımlanmıştır,

$$k_{1n} = \frac{i \omega_n \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_3(Y_n) dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (5.111)$$

$$k_{1m} = \frac{i \omega_m \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_3(Y_m) dx}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \quad (5.112)$$

$$k_{2n} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n) + i \omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_n)] \} dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (5.113)$$

$$k_{2m} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m) + i \omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_m)] \} dx}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \quad (5.114)$$

$$k_{3n} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_4(\bar{Y}_n) dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (5.115)$$

$$k_{4nm} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_4(Y_m) dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (5.116)$$

$$k_{4nm} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_4(Y_n) dx}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \quad (5.117)$$

$$k_{5nm} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m) - i\omega_n [\mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, \bar{Y}_n, Y_m)] + i\omega_m \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, \bar{Y}_n) \} dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (5.118)$$

$$k_{6nm} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_n \{ \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m) + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_m, Y_m)] + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_m, Y_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_m, Y_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_m, Y_n, Y_m)] \} dx}{2i\omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \mathbf{L}_2(Y_n) dx} \quad (5.119)$$

$$k_{6mn} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) + \mathbf{C}_1(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n) + \mathbf{C}_1(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n) + i\omega_m [\mathbf{C}_2(Y_m, Y_n, \bar{Y}_n) + \mathbf{C}_2(Y_m, \bar{Y}_n, Y_n)] + i\omega_n [\mathbf{C}_2(Y_n, \bar{Y}_n, Y_m) + \mathbf{C}_2(Y_n, Y_m, \bar{Y}_n) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_n, Y_m) - \mathbf{C}_2(\bar{Y}_n, Y_m, Y_n)] \} dx}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \quad (5.120)$$

$$k_{7mn} = \frac{\int_0^1 \bar{Y}_m \{ \mathbf{C}_1(Y_n, Y_n, Y_n) + i\omega_n \mathbf{C}_2(Y_n, Y_n, Y_n) \} dx}{2i\omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \mathbf{L}_2(Y_m) dx} \quad (5.121)$$

Katsayılar gerçel ve sanal kısımlara sahiptirler,

$$k_j = k_{j_R} + i k_{j_I} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (5.122)$$

Polar formdaki genlik ifadeleri,

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \quad (5.123)$$

$$A_m = \frac{1}{2} a_m(T_1) e^{i\beta_m(T_1)} \quad (5.124)$$

şeklindedir. (5.123) ve (5.124) ifadeleri birinci çözülebilirlik şartı olan denklem (5.109)'da yazılır,

$$\begin{aligned} & a'_n + i\beta'_n a_n + (k_{1nR} + ik_{1nI})a_n - \frac{1}{4} a_n^3 (k_{2nR} + ik_{2nI}) - (k_{3nR} + ik_{3nI})a_n e^{i(-2\beta_n + \sigma_n T_1)} \\ & - (k_{4nmR} + ik_{4nmI})a_m e^{i(\beta_m - \beta_n + (\rho_n - \sigma_n)T_1)} - \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{5nmR} + ik_{5nmI}) e^{i(-3\beta_n + \beta_m + \rho_n T_1)} \\ & - \frac{1}{4} a_n a_m^2 (k_{6nmR} + ik_{6nmI}) = 0 \end{aligned} \quad (5.125)$$

Denklem (5.125)'de aşağıdaki tanımlamalar yapılır,

$$\lambda_{nm} = (\rho_n - \sigma_n)T_1 - \beta_n + \beta_m \quad (5.126)$$

$$\gamma_n = \sigma_n T_1 - 2\beta_n \quad (5.127)$$

$$\delta_{nm} = \gamma_n + \lambda_{nm} \quad (5.128)$$

Gerçel ve sanal terimler ayrıştırılırsa birinci genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir,

$$\begin{aligned} a'_n = & -a_n k_{1nR} + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} + a_n k_{3nR} \cos \gamma_n - a_n k_{3nI} \sin \gamma_n + a_m k_{4nmR} \cos \lambda_{nm} - a_m k_{4nmI} \sin \lambda_{nm} \\ & + \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{5nmR} \cos \delta_{nm} - \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{5nmI} \sin \delta_{nm} + \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{6nmR} \end{aligned} \quad (5.129)$$

$$\begin{aligned} a_n \beta'_n = & -a_n k_{1nI} + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nI} + a_n k_{3nR} \sin \gamma_n + a_n k_{3nI} \cos \gamma_n + a_m k_{4nmR} \sin \lambda_{nm} + a_m k_{4nmI} \cos \lambda_{nm} \\ & + \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{5nmR} \sin \delta_{nm} + \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{5nmI} \cos \delta_{nm} + \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{6nmI} \end{aligned} \quad (5.130)$$

(5.123) ve (5.124) ifadeleri bu sefer ikinci çözülebilirlik şartı olan denklem (5.110)'da yazılır,

$$\begin{aligned}
& a'_m + i\beta'_m a_m + (k_{1mR} + ik_{1mI})a_m - \frac{1}{4}a_m^3(k_{2mR} + ik_{2mI}) - (k_{4mnR} + ik_{4mnI})a_n e^{i(\beta_n - \beta_m + (\sigma_n - \rho_n)T_1)} \\
& - \frac{1}{4}a_n^2 a_m (k_{6mnR} + ik_{6mnI}) - \frac{1}{4}a_n^3(k_{7mnR} + ik_{7mnI})e^{i(3\beta_n - \beta_m - \rho_n T_1)} = 0
\end{aligned} \tag{5.131}$$

Gerçel ve sanal terimler ayrıştırılırsa ikinci genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir,

$$\begin{aligned}
a'_m = & -a_m k_{1mR} + \frac{1}{4}a_m^3 k_{2mR} + a_n k_{4mnR} \cos \lambda_{nm} + a_n k_{4mnI} \sin \lambda_{nm} + \frac{1}{4}a_n^2 a_m k_{6mnR} \\
& + \frac{1}{4}a_n^3 k_{7mnR} \cos \delta_{nm} + \frac{1}{4}a_n^3 k_{7mnI} \sin \delta_{nm}
\end{aligned} \tag{5.132}$$

$$\begin{aligned}
a_m \beta'_m = & -a_m k_{1mI} + \frac{1}{4}a_m^3 k_{2mI} - a_n k_{4mnR} \sin \lambda_{nm} + a_n k_{4mnI} \cos \lambda_{nm} + \frac{1}{4}a_n^2 a_m k_{6mnI} \\
& - \frac{1}{4}a_n^3 k_{7mnR} \sin \delta_{nm} + \frac{1}{4}a_n^3 k_{7mnI} \cos \delta_{nm}
\end{aligned} \tag{5.133}$$

Düzgün rejim çözümleri $a'_n = a'_m = \lambda'_n = \gamma'_m = 0$ için genlik ve faz modülasyon denklemleri,

$$\begin{aligned}
& a_n k_{1nR} - \frac{1}{4}a_n^3 k_{2nR} - a_n (k_{3nR} \cos \gamma_n - k_{3nI} \sin \gamma_n) - a_m (k_{4nmR} \cos \lambda_{nm} - k_{4nmI} \sin \lambda_{nm}) \\
& - \frac{1}{4}a_n^2 a_m (k_{5nmR} \cos \delta_{nm} - k_{5nmI} \sin \delta_{nm}) - \frac{1}{4}a_n a_m^2 k_{6nmR} = 0
\end{aligned} \tag{5.134}$$

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{\sigma_n}{2} + a_n k_{1nI} - \frac{1}{4}a_n^3 k_{2nI} - a_n (k_{3nR} \sin \gamma_n + k_{3nI} \cos \gamma_n) - a_m (k_{4nmR} \sin \lambda_{nm} + k_{4nmI} \cos \lambda_{nm}) \\
& - \frac{1}{4}a_n^2 a_m (k_{5nmR} \sin \delta_{nm} + k_{5nmI} \cos \delta_{nm}) - \frac{1}{4}a_n a_m^2 k_{6nmI} = 0
\end{aligned} \tag{5.135}$$

$$\begin{aligned}
& a_m k_{1mR} - \frac{1}{4}a_m^3 k_{2mR} - a_n (k_{4mnR} \cos \lambda_{nm} + k_{4mnI} \sin \lambda_{nm}) - \frac{1}{4}a_n^2 a_m k_{6mnR} - \frac{1}{4}a_n^3 (k_{7mnR} \cos \delta_{nm} \\
& + k_{7mnI} \sin \delta_{nm}) = 0
\end{aligned} \tag{5.136}$$

$$\begin{aligned}
& a_m \left(\frac{3\sigma_n}{2} - \rho_n \right) + a_m k_{1mI} - \frac{1}{4} a_m^3 k_{2mI} + a_n (k_{4mnR} \sin \lambda_{nm} - k_{4mnI} \cos \lambda_{nm}) - \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{6mnI} \\
& + \frac{1}{4} a_n^3 (k_{7mnR} \sin \delta_{nm} - k_{7mnI} \cos \delta_{nm}) = 0
\end{aligned} \tag{5.137}$$

Jakobiyen matrisi oluşturmak için $F_i(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n)$ tanımlamaları yapılır ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$\begin{aligned}
a'_n &= -a_n k_{1nR} + \frac{1}{4} a_n^3 k_{2nR} + a_n (k_{3nR} \cos \gamma_n - k_{3nI} \sin \gamma_n) + a_m (k_{4nmR} \cos \lambda_{nm} - k_{4nmI} \sin \lambda_{nm}) \\
& + \frac{1}{4} a_n^2 a_m (k_{5nmR} \cos(\gamma_n + \lambda_{nm}) - k_{5nmI} \sin(\gamma_n + \lambda_{nm})) + \frac{1}{4} a_n a_m^2 k_{6nmR} = F_1(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n)
\end{aligned} \tag{5.138}$$

$$\begin{aligned}
a'_m &= -a_m k_{1mR} + \frac{1}{4} a_m^3 k_{2mR} + a_n (k_{4mnR} \cos \lambda_{nm} + k_{4mnI} \sin \lambda_{nm}) + \frac{1}{4} a_n^2 a_m k_{6mnR} \\
& + \frac{1}{4} a_n^3 (k_{7mnR} \cos(\gamma_n + \lambda_{nm}) + k_{7mnI} \sin(\gamma_n + \lambda_{nm})) = F_2(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n)
\end{aligned} \tag{5.139}$$

$$\begin{aligned}
\gamma'_n &= \sigma_n + 2k_{1nI} - \frac{1}{2} a_n^2 k_{2nI} - 2(k_{3nR} \sin \gamma_n + k_{3nI} \cos \gamma_n) - \frac{2a_m}{a_n} (k_{4nmR} \sin \lambda_{nm} + k_{4nmI} \cos \lambda_{nm}) \\
& - \frac{1}{2} a_n a_m (k_{5nmR} \sin(\gamma_n + \lambda_{nm}) + k_{5nmI} \cos(\gamma_n + \lambda_{nm})) - \frac{1}{2} a_m^2 k_{6nmI} = F_3(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n)
\end{aligned} \tag{5.140}$$

$$\begin{aligned}
\lambda'_{nm} &= \rho_n - \sigma_n + k_{1nI} - \frac{1}{4} a_n^2 k_{2nI} - (k_{3nR} \sin \gamma_n + k_{3nI} \cos \gamma_n) - \frac{a_m}{a_n} (k_{4nmR} \sin \lambda_{nm} + k_{4nmI} \cos \lambda_{nm}) \\
& - \frac{1}{4} a_n a_m (k_{5nmR} \sin(\gamma_n + \lambda_{nm}) + k_{5nmI} \cos(\gamma_n + \lambda_{nm})) - \frac{1}{4} a_m^2 k_{6nmI} - k_{1mI} + \frac{1}{4} a_m^2 k_{2mI} - \frac{a_n}{a_m} (k_{4mnR} \sin \lambda_{nm} \\
& - k_{4mnI} \cos \lambda_{nm}) + \frac{1}{4} a_n^2 k_{6mnI} - \frac{1}{4} \frac{a_n^3}{a_m} (k_{7mnR} \sin(\gamma_n + \lambda_{nm}) - k_{7mnI} \cos(\gamma_n + \lambda_{nm})) = F_4(a_n, a_m, \lambda_{nm}, \gamma_n)
\end{aligned} \tag{5.141}$$

Jakobiyen matris ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_n} & \frac{\partial F_1}{\partial a_m} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_n} & \frac{\partial F_2}{\partial a_m} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a_n} & \frac{\partial F_3}{\partial a_m} & \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a_n} & \frac{\partial F_4}{\partial a_m} & \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial F_4}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial a_n}{\partial a_n} & \frac{\partial a_n}{\partial a_m} & \frac{\partial a_n}{\partial \lambda_{nm}} & \frac{\partial a_n}{\partial \gamma_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_n = a_{n0} \\ a_m = a_{m0} \\ \lambda_{nm} = \lambda_{nm0} \\ \gamma_n = \gamma_{n0} \end{matrix} \quad (5.142)$$

Kararlı durum şartı Jakobiyen matrisin özdeğerlerinin gerçel kısımlarının negatif olmasıdır. Bulunan ifadeler genel çözüm ifadesinde yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa, kübik nonlineer bir sürekli ortam sisteminin, parametrik titreşimlerine ait temel parametrik ve 3:1 iç rezonans durumu için, yaklaşık çözümü elde edilir,

$$\begin{aligned} w(x,t;\varepsilon) = & a_n \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}[\Omega t - \gamma_n]\right) Y_{nR} - \sin\left(\frac{1}{2}[\Omega t - \gamma_n]\right) Y_{nI} \right\} \\ & + a_m \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}[3\Omega t - \gamma_n] + \lambda_{nm}\right) Y_{mR} - \sin\left(\frac{1}{2}[3\Omega t - \gamma_n] + \lambda_{nm}\right) Y_{mI} \right\} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.143)$$

$Y_n(x)$, reel ve sanal kısımlardan oluşur,

$$Y_n = Y_{nR} + iY_{nI} \quad (5.144)$$

$$Y_m = Y_{mR} + iY_{mI} \quad (5.145)$$

a_n ve a_m değerleri sayısal olarak bulunur.

5.3.1.Uygulama Problemi

Akışkan taşıyan elastik boruya ait nonlinear titreşim modeli,

$$\ddot{w} + (v_0^2 - P_0) w'' + 2v_0\sqrt{\beta} \dot{w}' + w^{IV} + \varepsilon\mu \dot{w} = \varepsilon P_1 w'' \cos \Omega t + \varepsilon \left(k_1 w'' \int_0^1 w'^2 dx \right) \quad (5.146)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (5.147)$$

şeklindedir. Genel operatörlerin karşılıkları ise aşağıdaki gibidir,

$$\mathbf{L}_1(w) = (v_0^2 - P_0) w'' + w^{IV} \quad (5.148)$$

$$\mathbf{L}_2(\dot{w}) = 2v_0\sqrt{\beta} \dot{w}' \quad (5.149)$$

$$\mathbf{L}_3(\dot{w}) = \mu \dot{w} \quad (5.150)$$

$$\mathbf{L}_4(w) = P_1 w'' \quad (5.151)$$

$$\mathbf{C}_1(w, w, w) = k_1 w'' \int_0^1 w'^2 dx \quad (5.152)$$

$$\mathbf{C}_2(\dot{w}, w, w) = 0 \quad (5.153)$$

Özdeğer özfonksiyon problemleri denklemler (5.86)-(5.88) ve (5.89)-(5.91) ile tanımlanmıştır. n indisi üzerinden ele alınırsa özdeğer özfonksiyon problemi aşağıdaki gibidir,

$$Y_n^{IV} + (v_0^2 - P_0) Y_n'' + 2v_0\sqrt{\beta} i \omega_n Y_n' - \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (5.154)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \quad (5.155)$$

Denklem (5.154)'e,

$$Y_n(x) = C_{1n} e^{i\beta_{1n} x} + C_{2n} e^{i\beta_{2n} x} + C_{3n} e^{i\beta_{3n} x} + C_{4n} e^{i\beta_{4n} x} \quad (5.156)$$

çözümü önerilir. Çözüm, (5.154) denklemi ve (5.155) sınır şartlarında yerine yazılır gerekli işlemler yapılırsa önceki bölümlerde olduğu gibi saçılma denklemi, destek şartı ve şekil

fonksiyonu elde edilir. Genel çözümde denklemler (5.111)-(5.121) ile bulunan katsayıların bu özel problemdeki karşılıkları,

$$k_{1n} = \frac{i \omega_n \mu \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.157)$$

$$k_{1m} = \frac{i \omega_m \mu \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (5.158)$$

$$k_{2n} = \frac{k_1 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_n'^2 dx \right\}}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.159)$$

$$k_{2m} = \frac{k_1 \left\{ 2 \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' dx \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' dx \int_0^1 Y_m'^2 dx \right\}}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (5.160)$$

$$k_{3n} = \frac{\frac{1}{2} P_1 \int_0^1 \bar{Y}_n'' \bar{Y}_n dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.161)$$

$$k_{4nm} = \frac{\frac{1}{2} P_1 \int_0^1 Y_m'' \bar{Y}_n dx}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.162)$$

$$k_{4mn} = \frac{\frac{1}{2} P_1 \int_0^1 Y_n'' \bar{Y}_m dx}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2\nu_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (5.163)$$

$$k_{5nm} = \frac{k_1 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_m'' dx \int_0^1 \bar{Y}_n'^2 dx + 2 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' dx \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_n' dx \right\}}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2v_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.164)$$

$$k_{6nm} = \frac{2k_1 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_n Y_m'' dx \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' dx \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m' dx + \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_m'' dx \int_0^1 Y_m' Y_n' dx \right\}}{2i \omega_n \int_0^1 Y_n \bar{Y}_n dx + 2v_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n dx} \quad (5.165)$$

$$k_{6mn} = \frac{2k_1 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_n'' dx \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m'' dx \int_0^1 Y_n' \bar{Y}_n' dx + \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}_n'' dx \int_0^1 Y_n' Y_m' dx \right\}}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2v_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (5.166)$$

$$k_{7mn} = \frac{k_1 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_m Y_n'' dx \int_0^1 Y_n'^2 dx \right\}}{2i \omega_m \int_0^1 Y_m \bar{Y}_m dx + 2v_0 \sqrt{\beta} \int_0^1 Y_m' \bar{Y}_m dx} \quad (5.167)$$

şeklinde sıralanır. Herhangi bir n . mod ile m . mod etkileşimi için, bulunan katsayılar ile denklemler (4.134)-(4.145) birlikte kullanılarak sayısal analizler yürütülebilir.

6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sürekli ortamların dış zorlamalı ve parametrik zorlamalı titreşimleri ile ilgili bir çok özel uygulama problemini karşılayan bir genel model ele alınmıştır. Genel modelde genel operatör notasyonu kullanılmıştır. Terimler genel lineer integral /diferansiyel ve kübik nonlinear operatörlerle ifade edilmiştir. Çalışmanın önceki çalışmalardan farkı, özellikle kübik nonlinear sistemlerde hem mekana hem zamana bağlı değişimlerin olduğu problemlere uygulanabilir olmasıdır. Genel notasyon ile perturbasyon yöntemleri kullanılarak dış zorlamalı ve parametrik zorlamalı titreşimler ele alınmıştır. Dış zorlamalı titreşimlerde baskın rezonans ve 3:1 iç rezonans, parametrik zorlamalı titreşimlerde ise temel parametrik rezonans ile 3:1 iç rezonans analizleri yapılmıştır. Bahsedilen analizler ile genel çözüm algoritmaları oluşturulmuş, bu algoritmalar örnek problemlere uygulanmıştır. Problemler, eksenel hareketli sürekli ortamlardan seçilmiştir. Bunlar, eksenel hareketli Euler-Bernoulli kirişinin nonlinear titreşimleri, eksenel hareketli viskoelastik kirişin nonlinear titreşimleri ve akışkan taşıyan boruların nonlinear titreşimleri problemleridir. Kararlılık analizleri de dahil olmak üzere uygulama problemlerine ait çeşitli parametrelerin değişimlerinin sisteme etkileri sayısal olarak ele alınmıştır ve grafiklerle gösterilmiştir.

Bu çalışma bir çok yönden geliştirilebilir :

- 1- Genel modele uygun başka uygulama problemleri ele alınabilir,
- 2- Toplam ve fark tipi kombinasyon rezonansları, farklı iç rezonanslar, ikiden fazla modun etkileşimleri ile ortaya çıkan rezonanslar gibi farklı rezonans etkileşimlerine bakılabilir.
- 3- Sınır şartlarının homojen olmadığı uygulama problemleri genel notasyon kullanılarak ele alınabilir,
- 4- Daha farklı nonlinearliğe sahip sürekli ortam titreşimlerine ait genel notasyon çözümleri yapılabilir,
- 5- Sayısal anlamda çıkarılan algoritmaları işletecek bilgisayar programları yazılabilir.

EK1.EKSENEL HAREKETLİ VISKOELASTİK KİRİŞLERİN VE AKIŞKAN TAŞIYAN VISKOELASTİK BORULARIN TABİİ FREKANSLARI

Eksenel hareketli viskoelastik kiriş ile akışkan taşıyan viskoelastik boru modelleri önceden çıkarılmıştı (Bkz.bölümler 2.4.2-2.4.3)

$$\ddot{w} + (v_0^2 - 1)w'' + 2v_0\dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \varepsilon\alpha\dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu\dot{w} = \varepsilon F \cos \Omega t + \varepsilon \left\{ \frac{3}{2}v_c^2 w'' w'^2 + 2\alpha k\dot{w}' w' w'' + \alpha k\dot{w}'' w'^2 \right\} \quad (\text{E.1})$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$\ddot{w} + (v_0^2 - P_0)w'' + 2v_0\sqrt{\beta}\dot{w}' + w^{IV} + \varepsilon\alpha\dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu\dot{w} = \varepsilon P_1 w'' \cos \Omega t + \varepsilon \left(k_1 w'' \int_0^1 w'^2 dx + k_2 \int_0^1 \dot{w}' w' dx w'' \right) \quad (\text{E.3})$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (\text{E.4})$$

Denklem (E.1), eksenel hareketli viskoelastik kirişe, Denklem (E.3) ise akışkan taşıyan viskoelastik boruya ait hareket denklemleridir. Bu iki denklemde ortak olan terimlerden, $\mu\dot{w}$ terimi dış sönüm, $\alpha\dot{w}^{IV}$ terimi ise viskoelastisiteden kaynaklı iç (yapısal) sönüm terimidir. Gerek kaynak taramalarında karşılaşılan, gerekse bu çalışmada ele alınan haliyle bahsedilen sönüm terimleri küçük kabul edilip ε mertebesinde ele alınmıştır. $\varepsilon\alpha$ yerine α olarak viskoelastisiteden kaynaklanan yapısal sönüm teriminin bir mertebesinde olduğu varsayılırsa tabii frekanslar bu durumdan etkilenecektir. Tabii frekansları hesaplayabilmek için çözülmesi gereken lineer denklemler şöyledir,

$$\ddot{w} + (v_0^2 - 1)w'' + 2v_0\dot{w}' + v_f^2 w^{IV} + \alpha\dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu\dot{w} = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (\text{E.6})$$

$$\ddot{w} + (v_0^2 - P_0)w'' + 2v_0\sqrt{\beta}\dot{w}' + w^{IV} + \alpha\dot{w}^{IV} + \varepsilon\mu\dot{w} = 0 \quad (\text{E.7})$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w''(0,t) = w''(1,t) = 0 \quad (\text{E.8})$$

Denklemlere,

$$w(x,t) = A_n(t)e^{i\omega_n t} Y_n(x) + \bar{A}_n(t)e^{-i\omega_n t} \bar{Y}_n(x) \quad (\text{E.9})$$

şeklinde bir çözüm önerilirse $Y_n(x)$ fonksiyonları önceki analizlere benzer şekilde alınabilir. Ancak frekansları veren denklemde küçük bir değişiklik meydana gelir. Viskoelastik kiriş için denklemler,

$$(v_f^2 + i\omega_n \alpha) \beta_{in}^4 + (1 - v_0^2) \beta_{in}^2 - 2v_0 \omega_n \beta_{in} - \omega_n^2 = 0 \quad i = 1,2,3,4, \quad n = 1,2 \quad (\text{E.10})$$

$$(e^{i(\beta_{1n} + \beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{4n}^2) + (e^{i(\beta_{1n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{2n} + \beta_{4n})})(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) + (e^{i(\beta_{2n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{1n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{3n}^2) = 0 \quad (\text{E.11})$$

şeklinde dir. Viskoelastik boru için ise denklemler şöyledir,

$$(1 + i\omega_n \alpha) \beta_{in}^4 + (P_0 - v_0^2) \beta_{in}^2 + 2v_0 \sqrt{\beta} \omega_n \beta_{in} - \omega_n^2 = 0 \quad i = 1,2,3,4, \quad n = 1,2 \quad (\text{E.12})$$

$$(e^{i(\beta_{1n} + \beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{4n}^2) + (e^{i(\beta_{1n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{2n} + \beta_{4n})})(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) + (e^{i(\beta_{2n} + \beta_{3n})} + e^{i(\beta_{1n} + \beta_{4n})})(\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{3n}^2) = 0 \quad (\text{E.13})$$

Saçılma denkleminin destek şartı ile ortak çözümünden her bir hız değerine karşılık elde edilen sonuçlar (tabii frekanslar) $\omega_n = \omega_{nR} + i\omega_{nI}$ karmaşık sayı yapısındadır. Yapısal sönüm ε mertebesinde olursa, elde edilen sonucun sanal kısımları ihmal edilebilecek düzeyde küçük çıkmaktadır. Dolayısıyla sistemin tabii frekans değeri olarak, elde edilen sonucun gerçel kısmı alınır ($\omega_n = \omega_{nR}$).

Yapısal sönüm bir mertebesinde olursa, elde edilen sonuç yine gerçel ve sanal kısımlardan oluşmaktadır ancak bu durumda sanal kısımlar ihmal edilebilecek çok küçük değerler olmamaktadır. Tabii frekans $\omega_n = \omega_{nR} + i\omega_{nI}$ yapısındadır. Ancak tabii frekansın sanal kısımları fiziksel olarak anlamlı değildir. Sanal kısımlar sönüm etkisi olarak değerlendirilip tabii frekans değeri olarak gerçel kısım alınır ($\omega_n = \omega_{nR}$). Bu kısımda ek bir çalışma olarak saçılma denkleminin destek şartının çözümüyle elde edilen sonuçlar aksel hızın değişimine bağlı olarak çizilmiştir. Bu haliyle sonuçların gerçel ve sanal kısımlarının değişimi açıkça görülüp ilk mertebede alınan viskoelastisitenin tabii frekanslar üzerine etkisi yorumlanabilir.

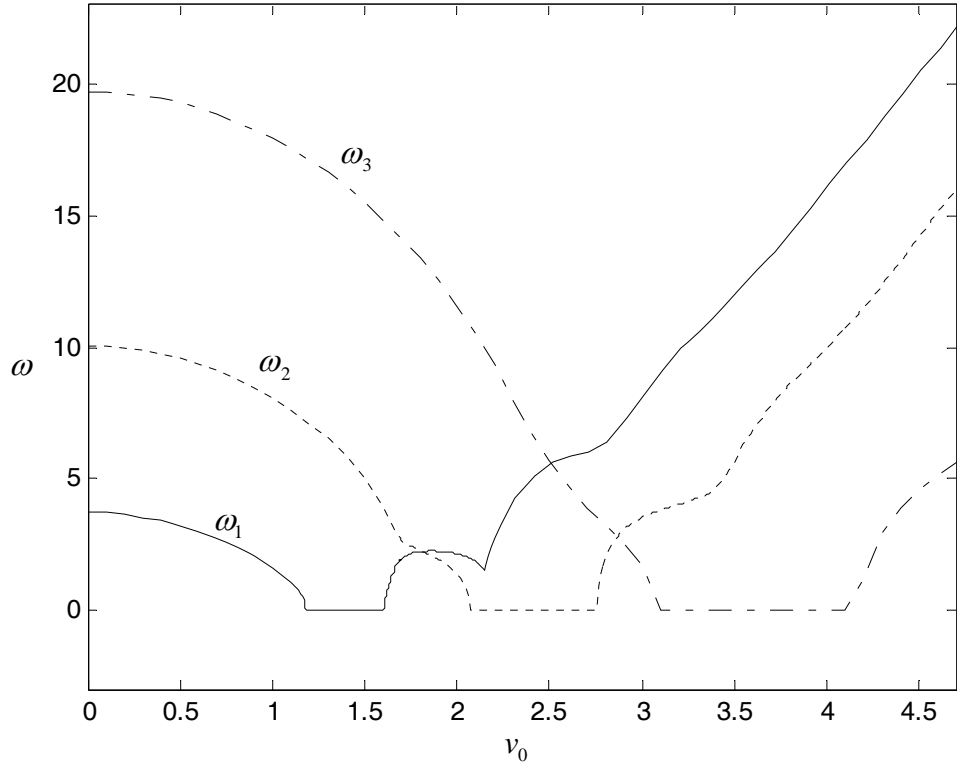
Şekiller E.1.1.-E.1.10'da aksel hareketli viskoelastik kirişe ait aksel hız-tabii frekans grafikleri görülmektedir. Grafiklerde, belirli bir kirişlik katsayısı değeri için, viskoelastisitenin etkisi incelenmiştir. Kirişlik katsayısı ve viskoelastisitenin belli bir değeri için hız arttıkça çözümlerin gerçel kısmı (tabii frekans) azalmaktadır. Bölüm 4.2'de bahsedildiği gibi özellikle yüksek modlarda tabii frekans sınırlanamaz. Bu noktadan itibaren iterasyonlar yardımıyla gerçel kısmın sıfır olduğu noktaya ulaşılmaktadır. Ancak her ne kadar sınırlansa da gerçel kısımların yapısının değiştiği grafiklerde görülmektedir. Çünkü belirli hız değerlerinde (kritik hız) kararsızlık başlamıştır. Bir modda kirişlik katsayısı arttıkça tabii frekans değerleri artmaktadır. Viskoelastisite etkisi arttıkça sistem tabii frekansları azalmaktadır.

Şekil E.1.11'de aksel hareketli viskoelastik kirişte, birinci mod için değişik viskoelastisite katsayısına karşılık gelen aksel hız-tabii frekans grafikleri birarada çizilmiştir. α değeri arttıkça viskoelastisitenin etkisi artmaktadır. Tabii frekans değerleri azalmaktadır. Ayrıntı grafiklerinde değişimin etkileri gösterilmiştir. α değerinin azalması viskoelastik kirişi gittikçe elastik kiriş özelliklerine yaklaştırmaktadır. $\alpha = 0$ değeri için çizilen grafik, aksel hareketli, elastik Euler-Bernoulli kirişine tekabül eder.

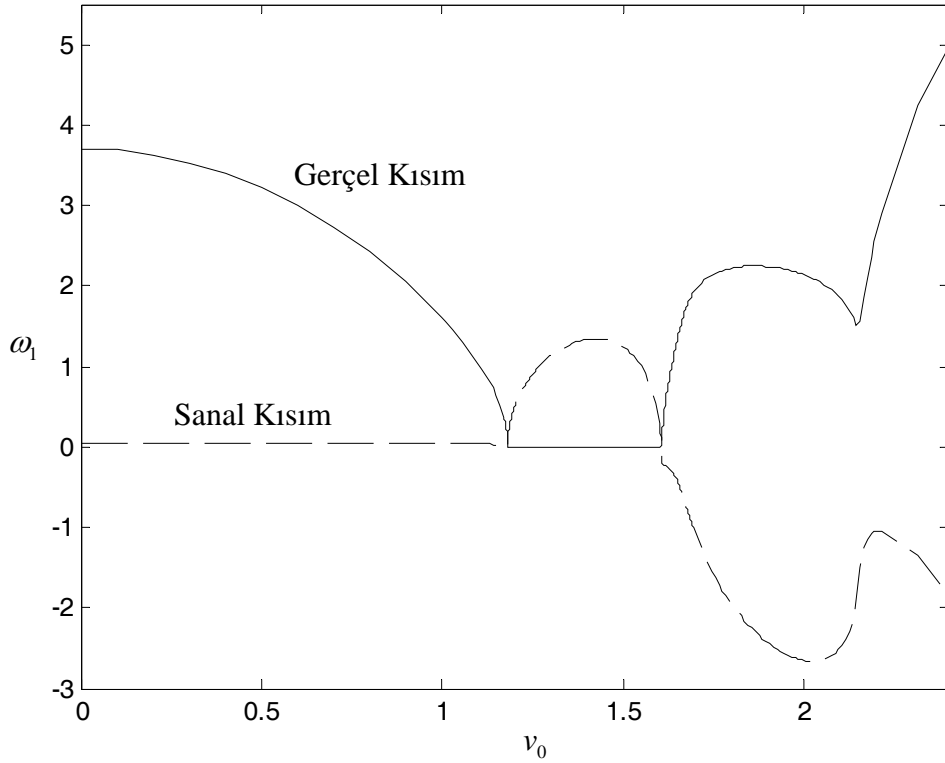
Şekiller E.1.12.-E.1.23'te ise akışkan taşıyan viskoelastik boruya ait akış hızı-tabii frekans grafikleri görülmektedir. Bu grafiklerde, boruya ait belirli bir β oranı ve aksel gerilme kuvveti değeri için viskoelastisitenin etkisi ele alınmıştır. Akış hızının artışı tabii frekansları azaltmaktadır. Viskoelastisite etkisi arttıkça da sistemin tabii frekansları azalmaktadır.

Şekil E.1.24'te akışkan taşıyan viskoelastik boruya ait, birinci mod akış hızı-tabii frekans grafikleri birarada gösterilmiştir. α değeri arttıkça tabii frekans değerleri azalmaktadır.

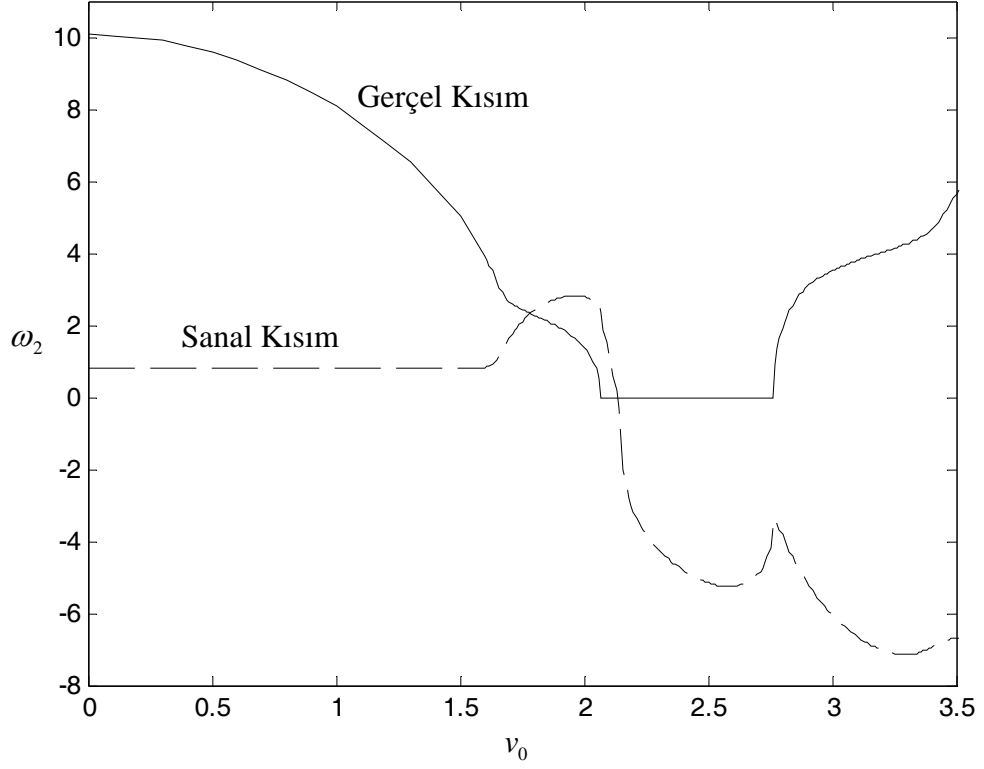
Elde edilen grafiklerde aksel hareketli elastik kiriş veya akışkan taşıyan elastik borudan farklı olarak çözümlerin sanal kısımları sıfırdan farklıdır. Sanal kısımların ani değişim noktalarından itibaren o moda ait kararsızlığın başladığı söylenebilir.



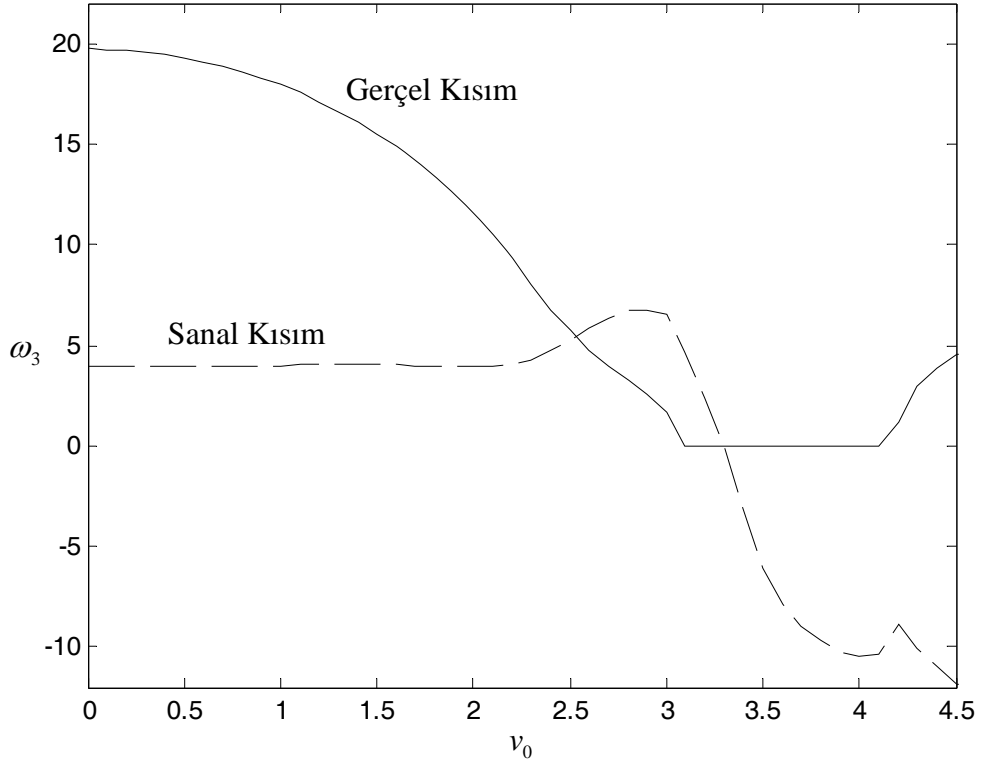
Şekil E.1.1.Eksenel hıza karşılık gelen ilk üç tabii frekans değerleri ($\nu_f = 0.2$ $\alpha = 0.001$)



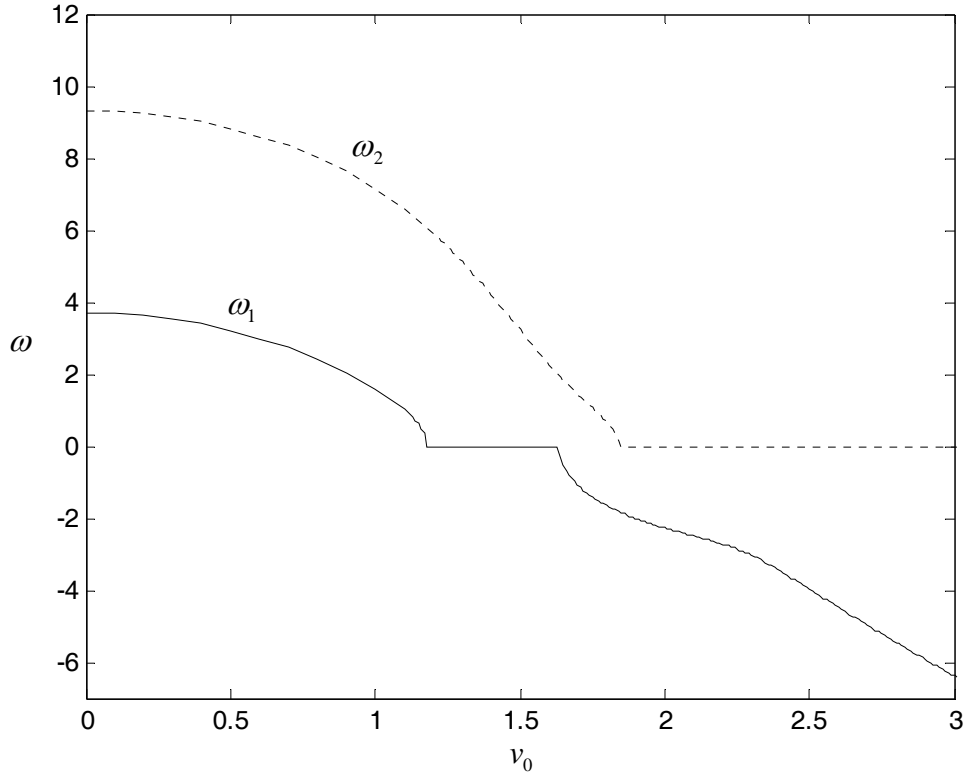
Şekil E.1.2. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\nu_f = 0.2$ $\alpha = 0.001$)



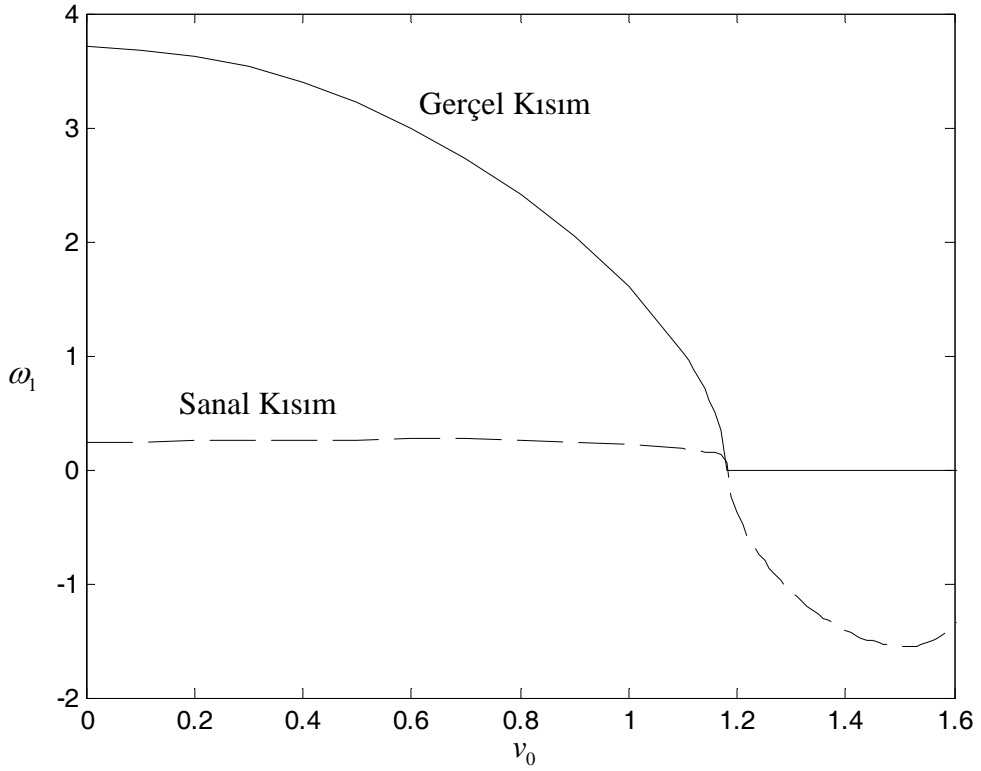
Şekil E.1.3. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.001$)



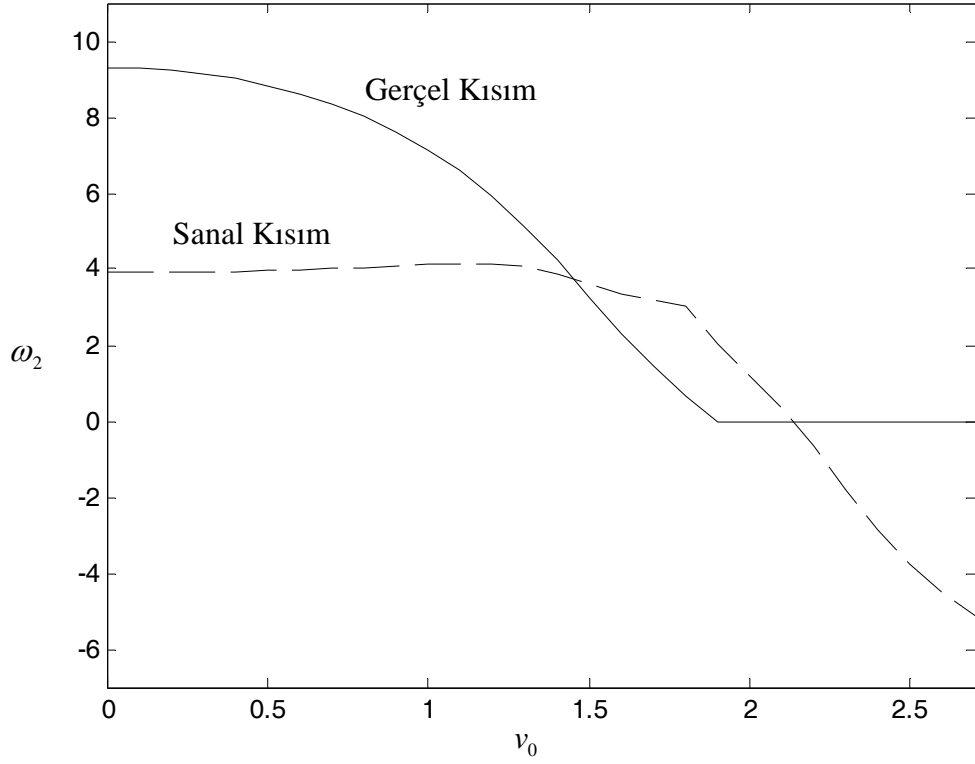
Şekil E.1.4. Eksenel hıza karşılık gelen üçüncü tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.001$)



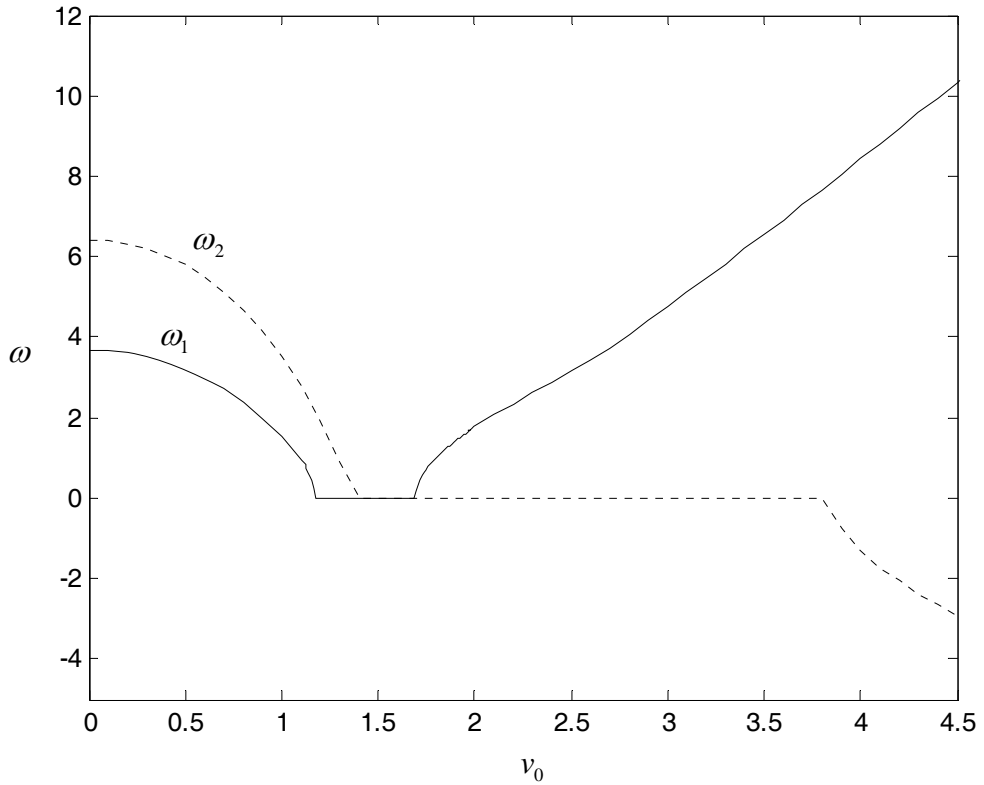
Şekil E.1.5. Eksenel hıza karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri
($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.005$)



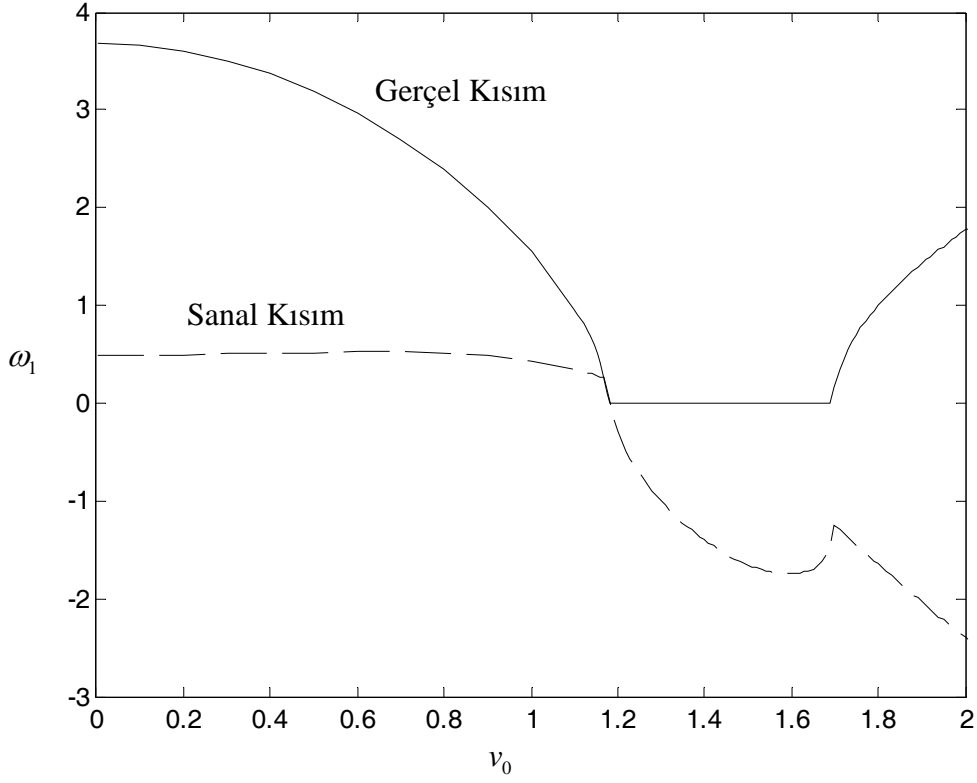
Şekil E.1.6. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.005$)



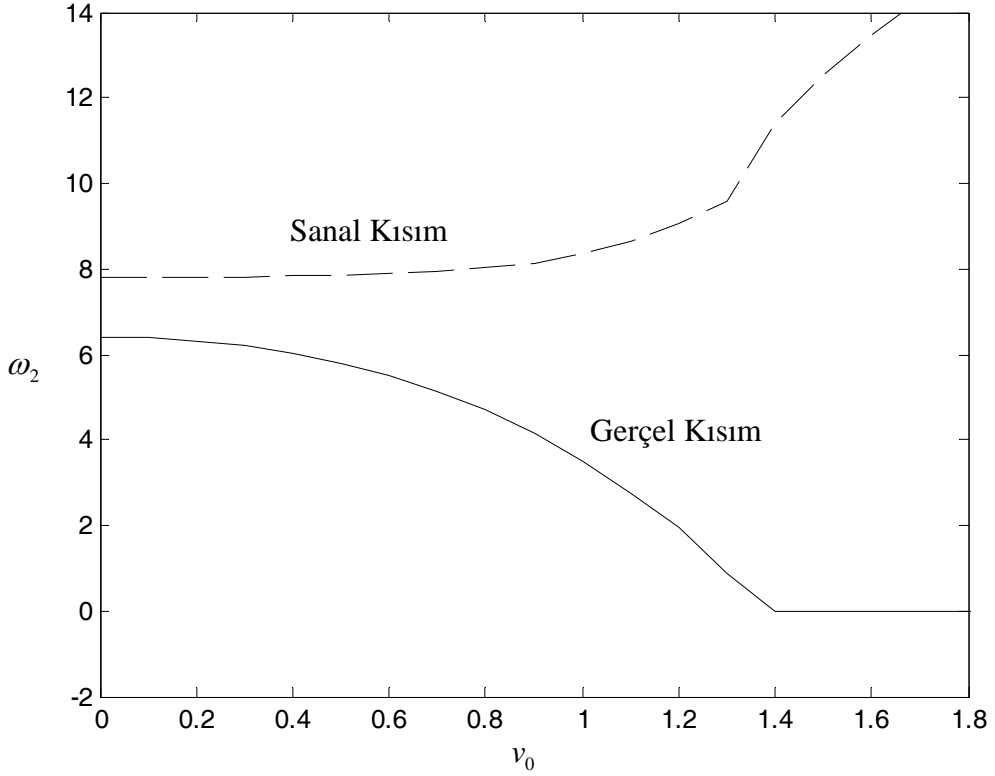
Şekil E.1.7. Eksenal hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.005$)



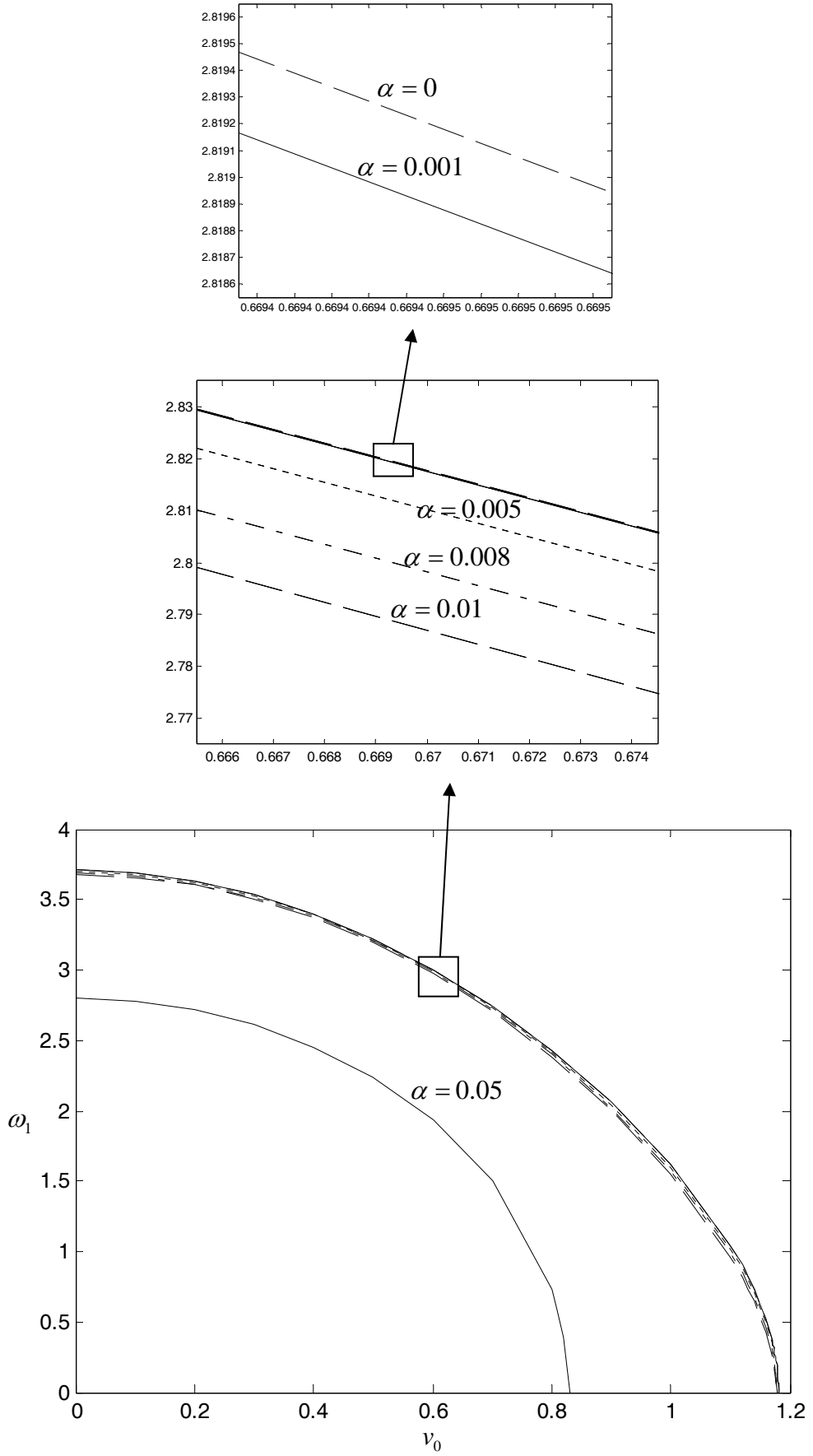
Şekil E.1.8. Eksenal hıza karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri
($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.01$)



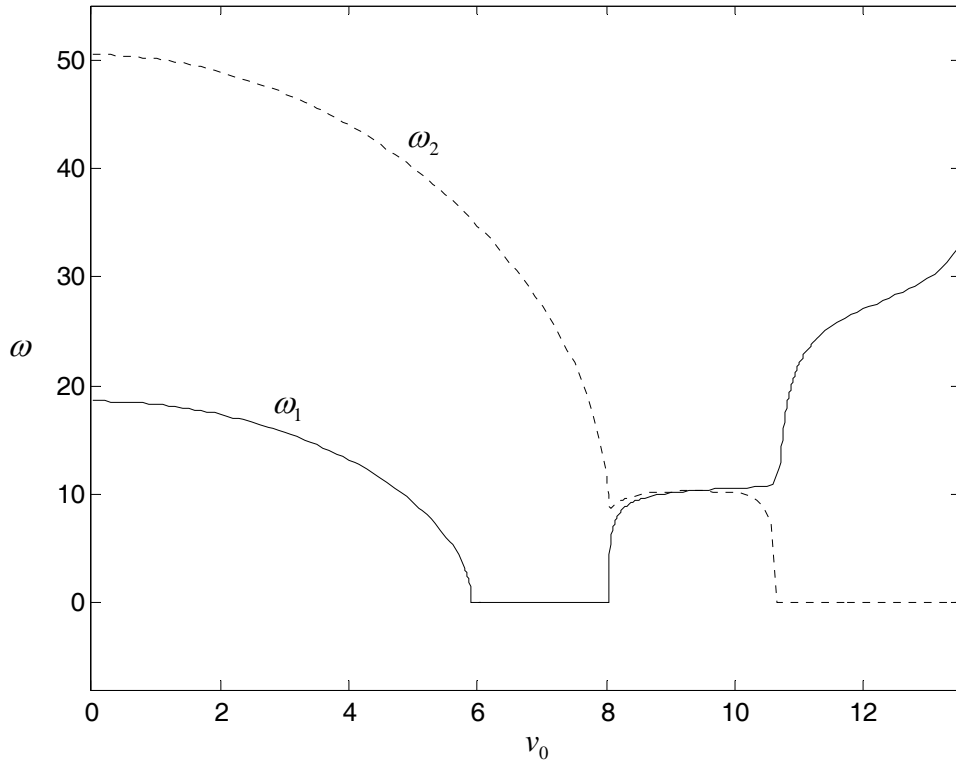
Şekil E.1.9. Eksenel hıza karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.01$)



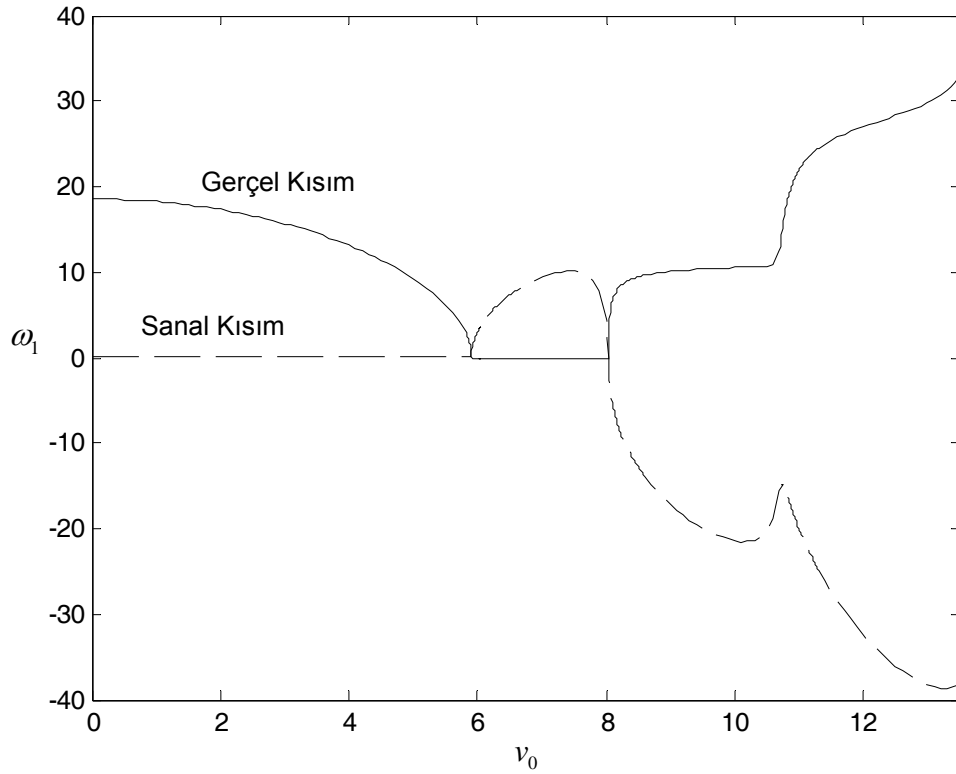
Şekil E.1.10. Eksenel hıza karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($v_f = 0.2$ $\alpha = 0.01$)



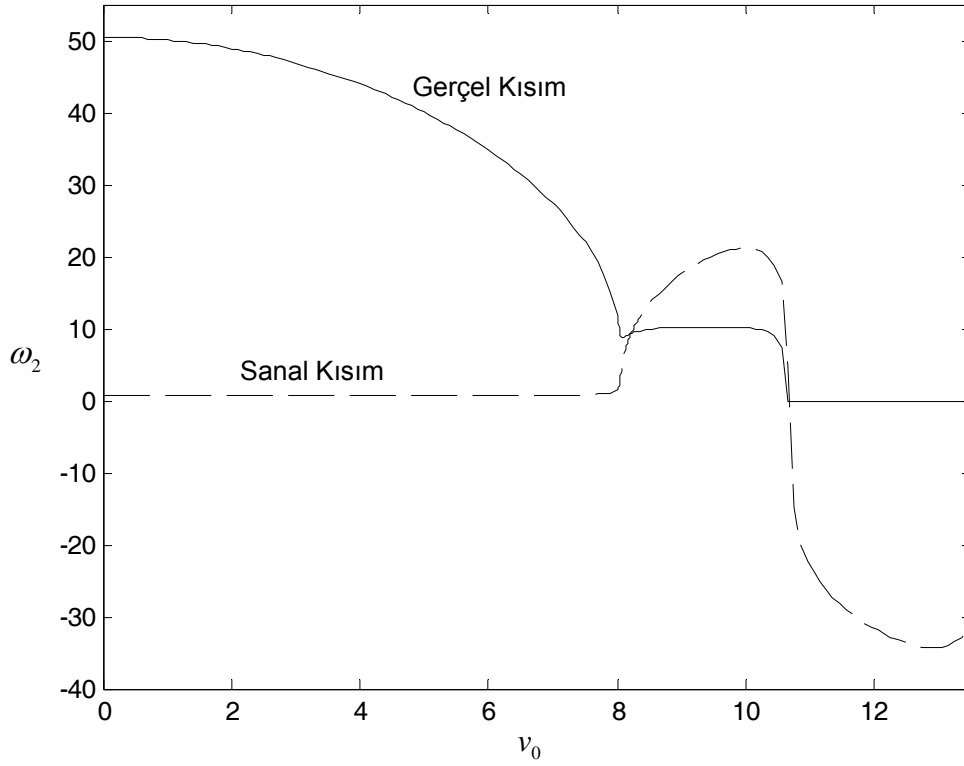
Şekil E.1.11. Aksel hızı karşılık gelen birinci tabii frekanslar ($v_f = 0.2$)



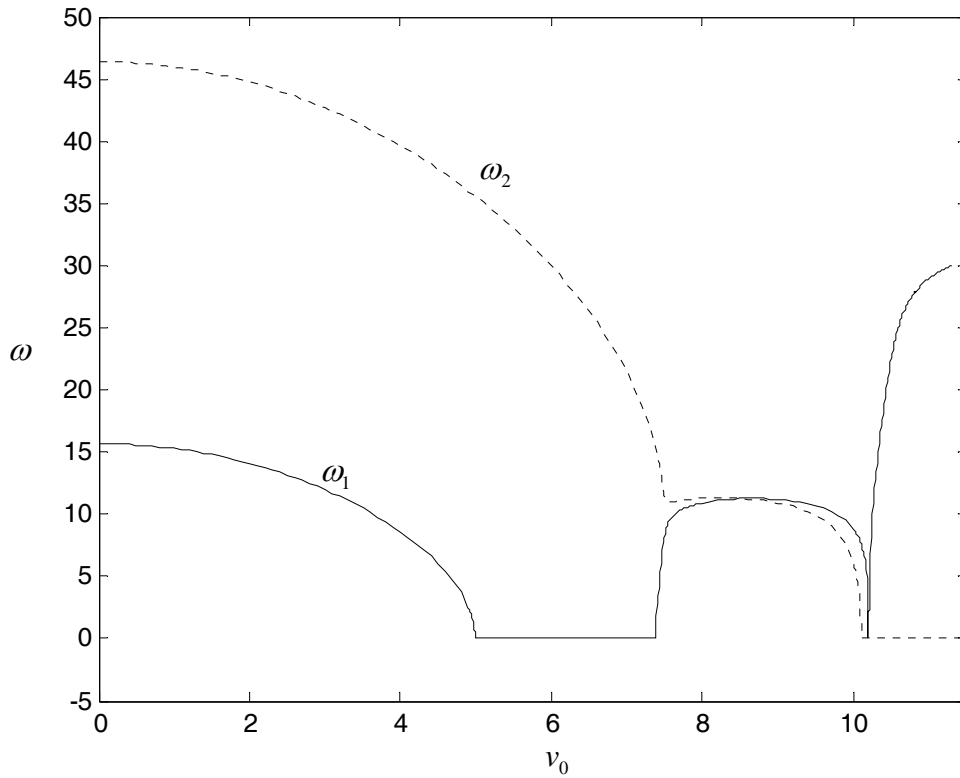
Şekil E.1.12. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri
($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)



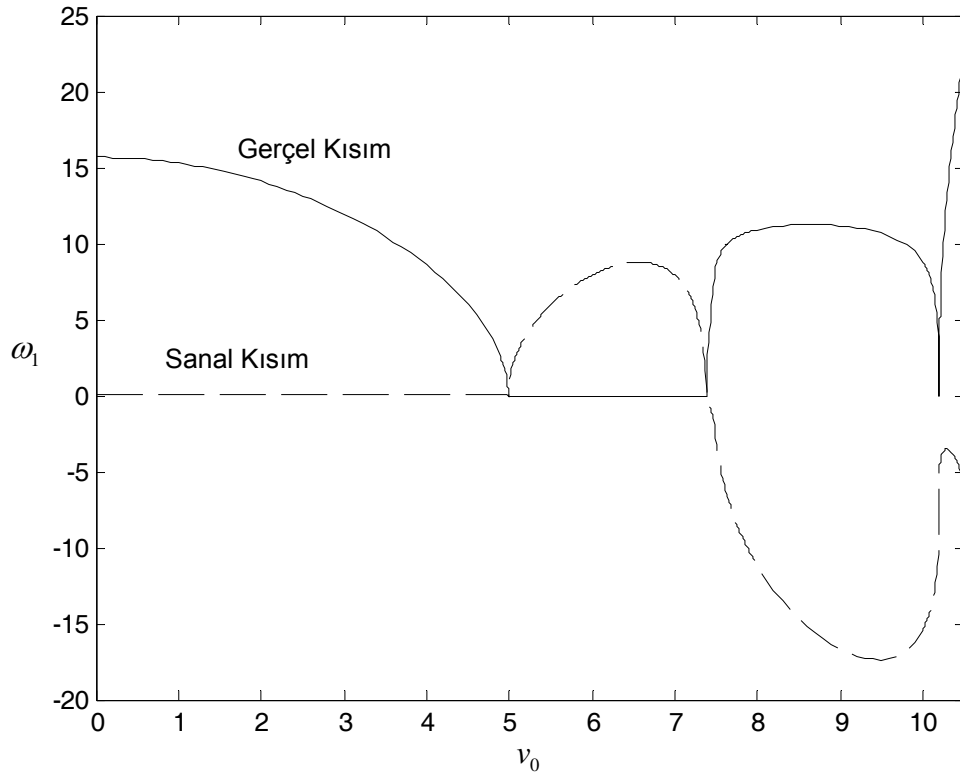
Şekil E.1.13. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)



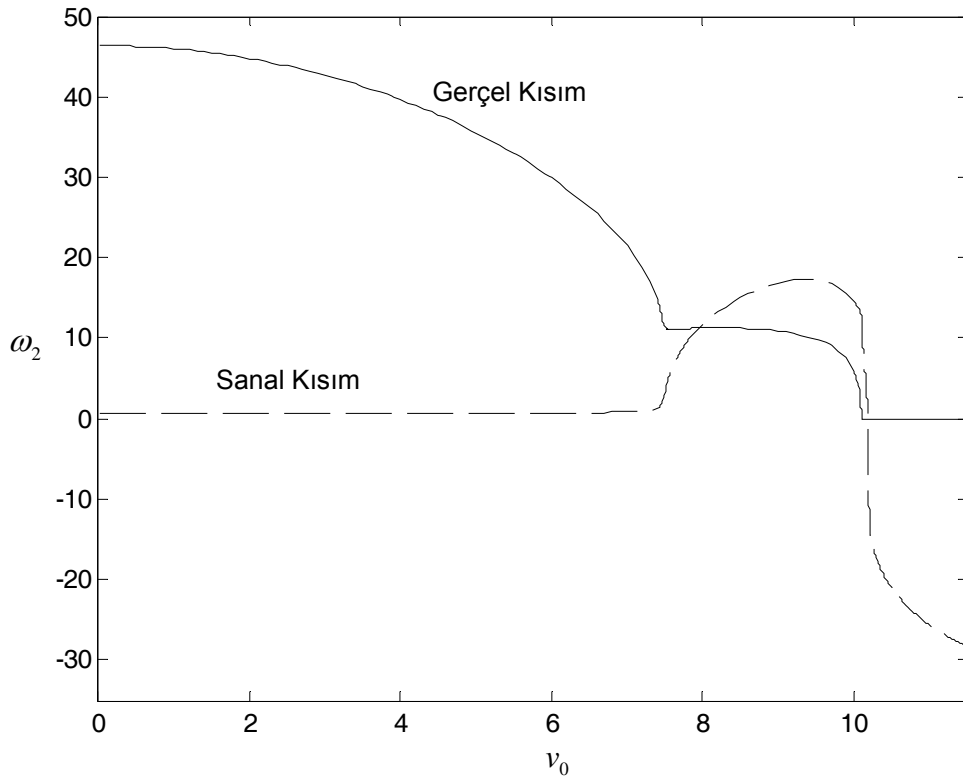
Şekil E.1.14. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)



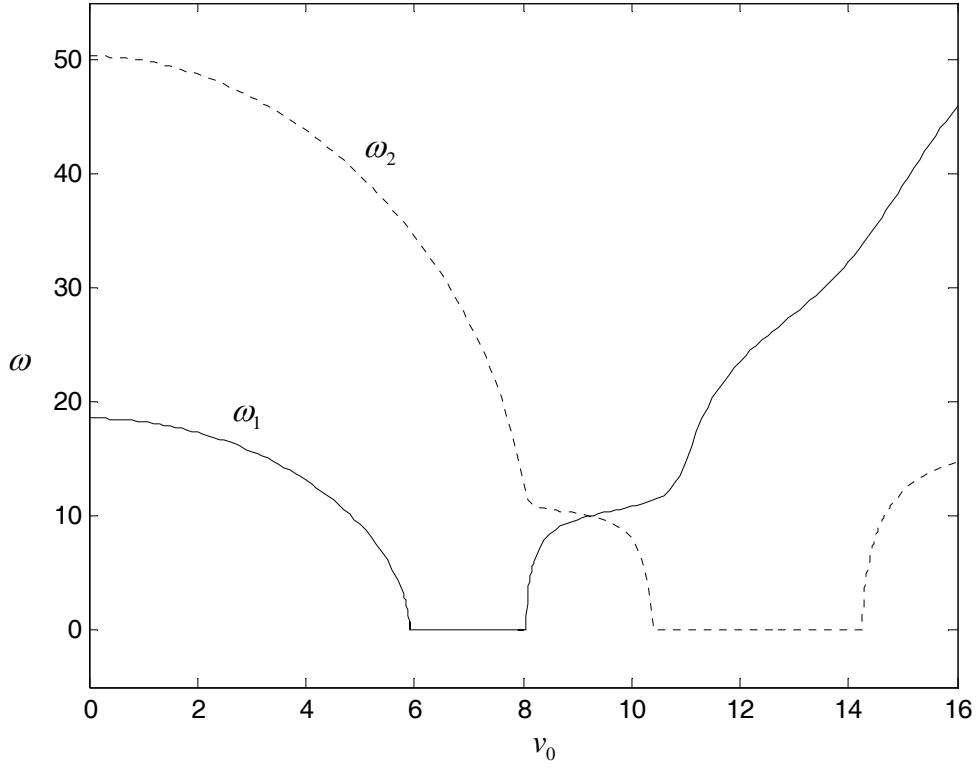
Şekil E.1.15. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri
($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$)



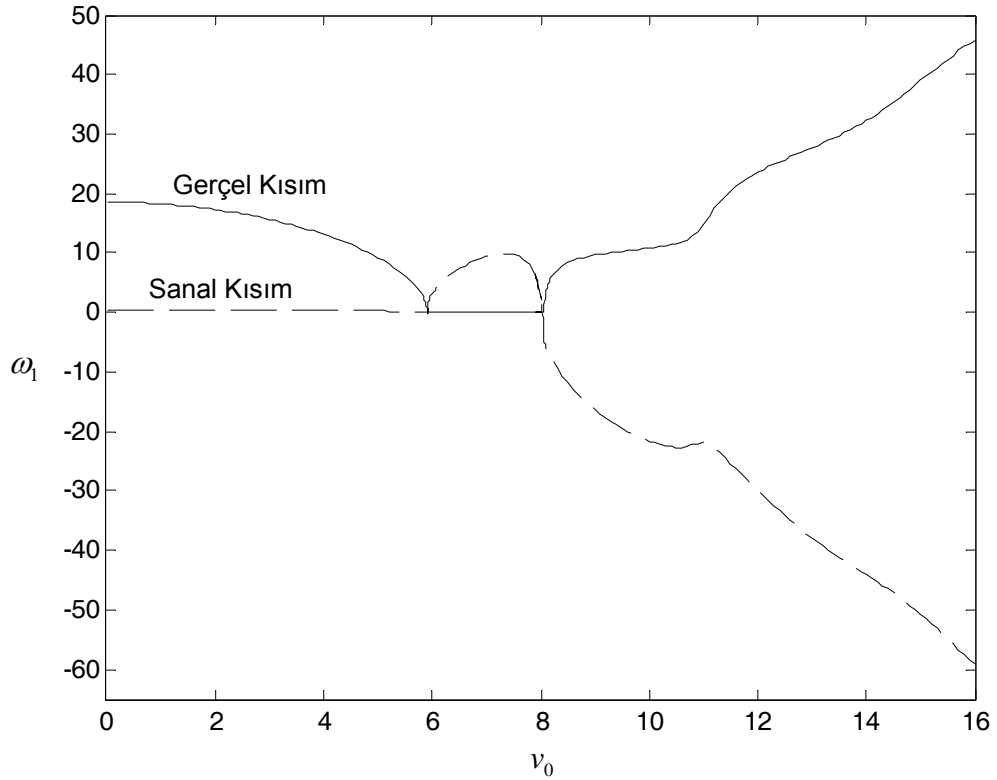
Şekil E.1.16. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$)



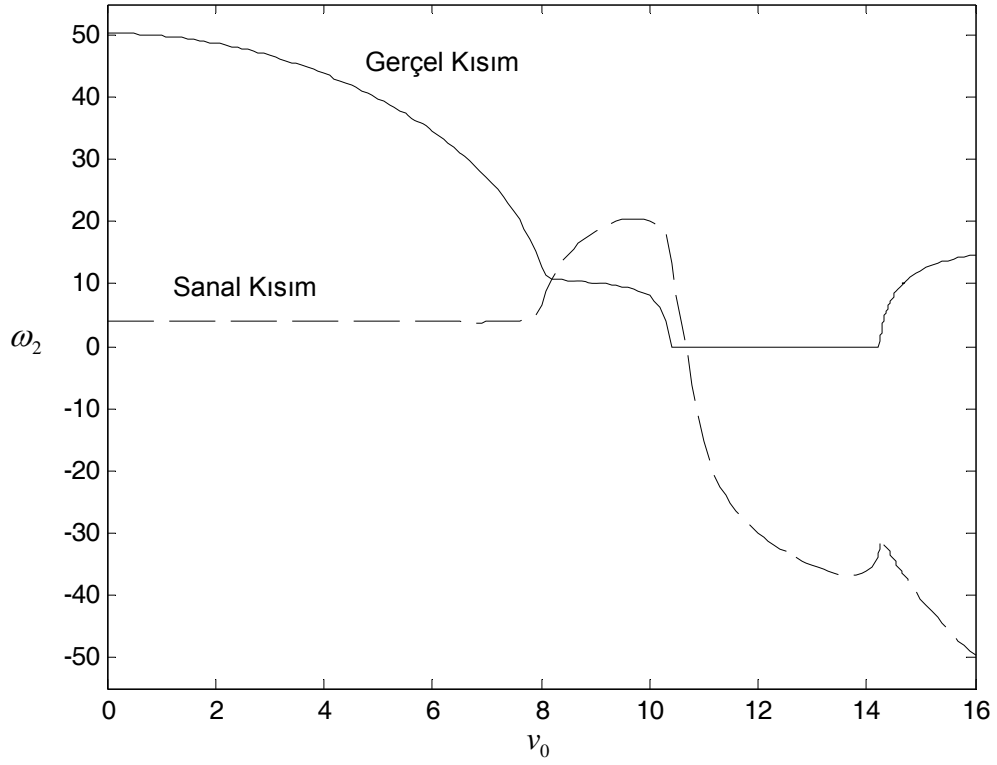
Şekil E.1.17. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları ($\alpha = 0.001$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$)



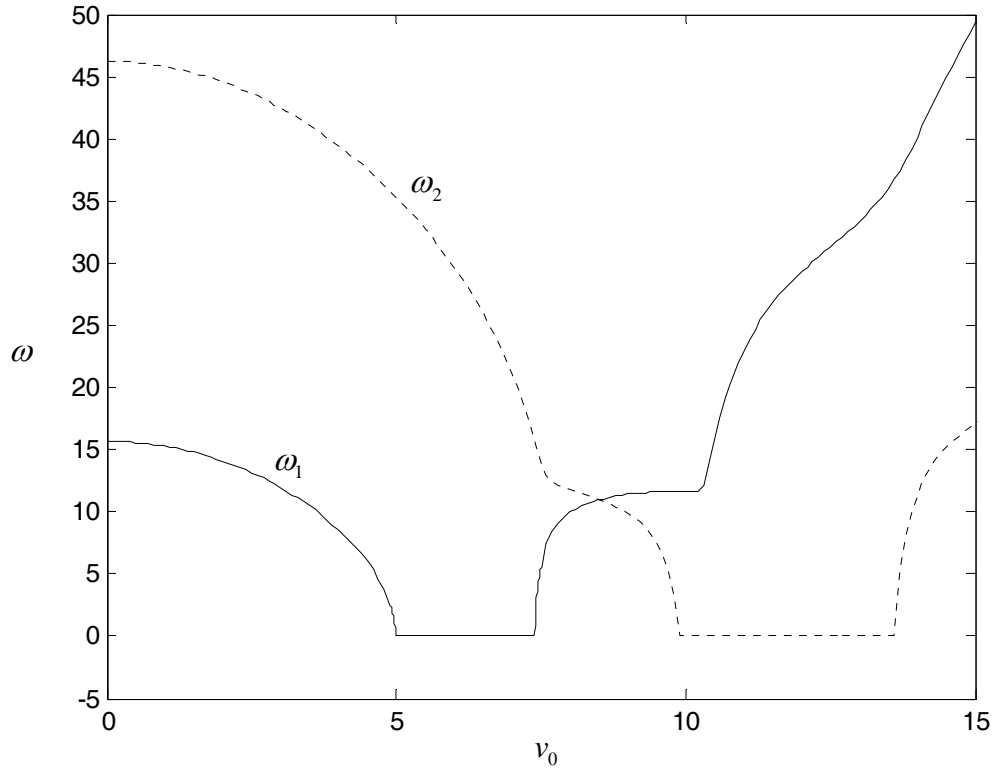
Şekil E.1.18. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri
($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)



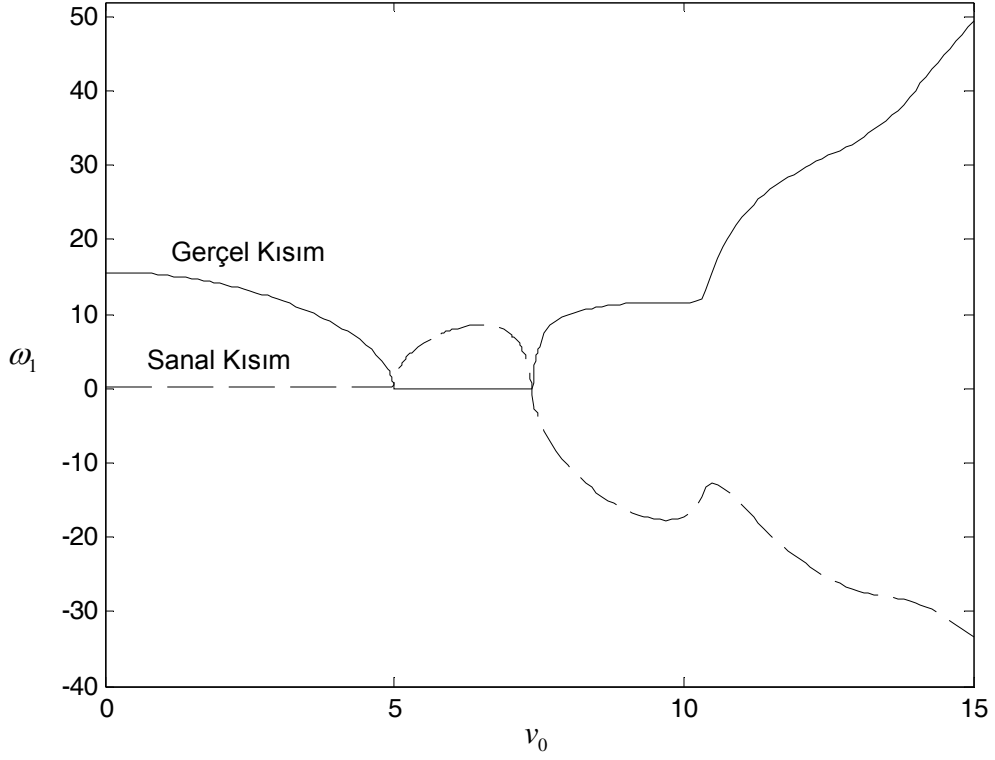
Şekil E.1.19. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)



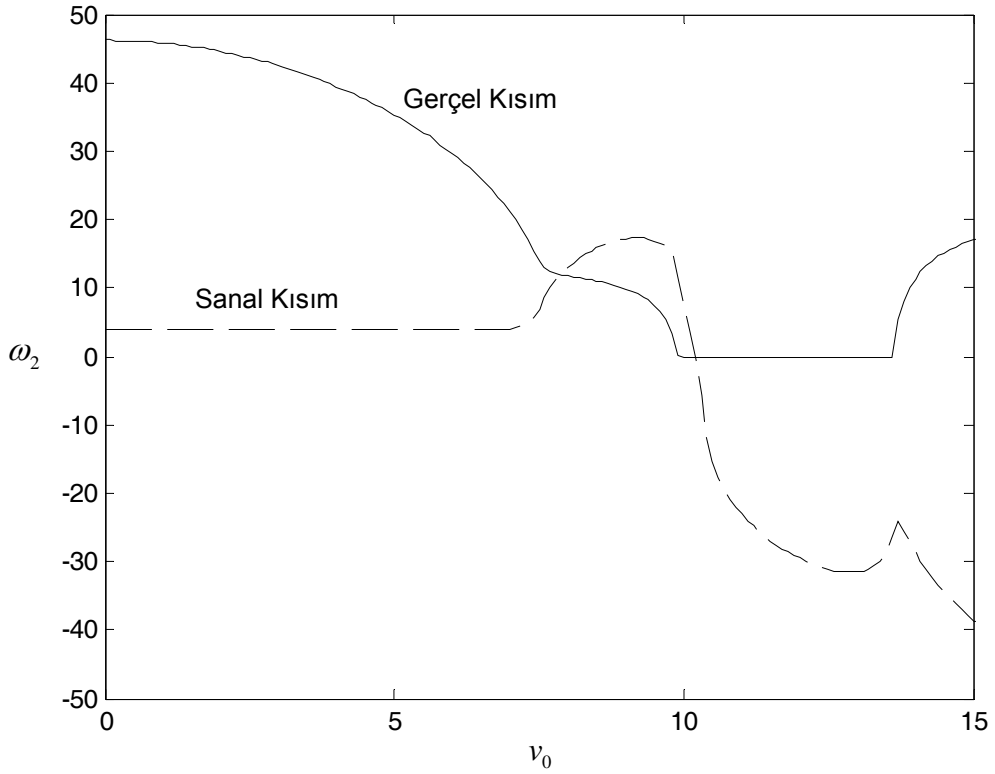
Şekil E.1.20. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)



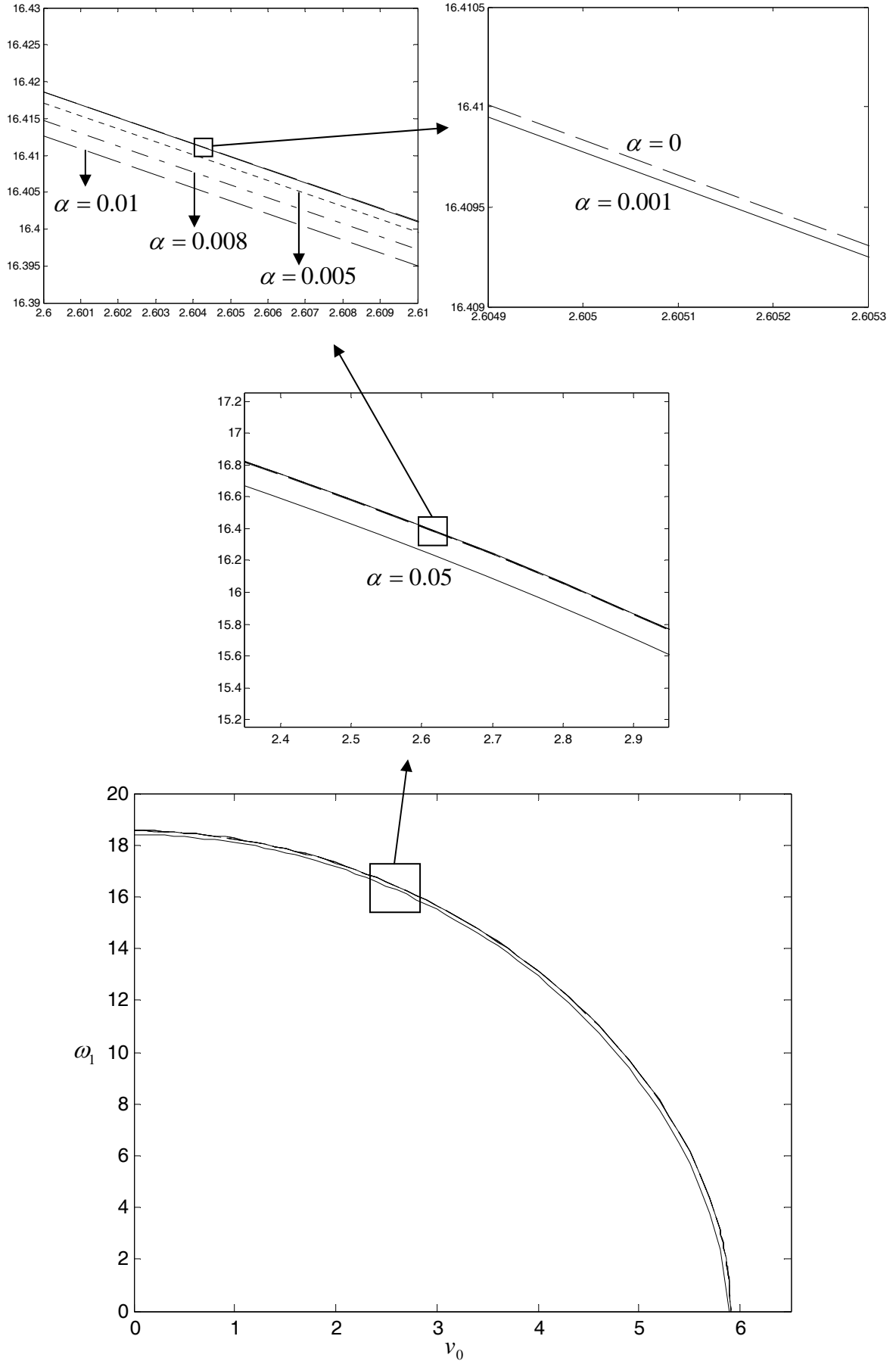
Şekil E.1.21. Akışkan hızına karşılık gelen ilk iki tabii frekans değerleri
($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$)



Şekil E.1.22. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$)



Şekil E.1.23. Akışkan hızına karşılık gelen ikinci tabii frekansların gerçel ve sanal kısımları
($\alpha = 0.005$, $\beta = 0.6$, $P_0 = 15$)



Şekil E.1.24. Akışkan hızına karşılık gelen birinci tabii frekanslar
($\beta = 0.3$, $P_0 = 25$)

KAYNAKLAR

- 1.Boyacı, H., Pakdemirli, M., 1997. A comparison of different versions of the method of multiple scales for partial differential equations, Journal of Sound and Vibration , 204(4), 595-607, 1997.
- 2.Burton, T.D., 1994. Introduction To Dynamic Systems Analysis, McGraw – Hill International Editions, 1994.
- 3.Chen, L.Q., Yang, X.D., 2005. Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models, International Journal of Solids and Structures 42(1),37-50, 2005
- 4.Chen, L.Q., Yang, X.D., 2005. Stability in parametric resonance of axially moving viscoelastic beams with time-dependent speed, Journal of Sound and Vibration 284 ,879–891, 2005.
- 5.Chen, L.Q., Yang, X.D., 2006. Transverse nonlinear dynamics of axially accelerating viscoelastic beams based on 4-term Galerkin truncation, Chaos, Solitons and Fractals 27 748–757, 2006.
- 6.Ercan, Y., 1992. Mühendislik sistemlerinin modellenmesi ve dinamiği, Gazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Yayınları, 179-12.
- 7.Fung, Y.C., 1968. Foundations Of Solid Mechanics, Prentice Hall International Editions, 1968.
- 8.Gürgöze, M.,1984, Analitik Metodlarla Titreşimlerin Etüdü,İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayın No:1.
- 9.İnan, Mustafa, 1996. Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü. Vakfı Yayınları,1996.
- 10.Lacarbonara, W, 1999. Direct treatment and discretizations of non-linear spatially continuous systems, Journal of Sound and Vibration 221, 849–866, 1999.
- 11.Magnus, K., 1978. Titreşimler, Titreşim Problemlerinin Teorik İncelenmesine Giriş (Schwingungen, Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen 1961 kitabının çevirisi, Pasin,F. ve Gürgöze,M.), 1978.
- 12.Mase,G.,E., 1970. Continuum Mechanics, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1970.

13. Matematik Terimleri Sözlüğü, 2000. Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu, Türk Dil Kurumu Yayınları, 739, 1. Baskı, Ankara 2000.
14. Mockenstrum, E.M., Perkins, N.C., and Ulsoy, A.G., 1994. Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving strings, ASME Journal of Vibration and Acoustics 118 346-350, 1994.
15. Nayfeh, A., H., 1973. Perturbation Methods, A Wiley Interscience, John Wiley & Sons, New York, 1973.
16. Nayfeh, A., H., Pai, F., P., 2004. Linear and Nonlinear Structural Mechanics, A Wiley Interscience, John Wiley & Sons, 2004.
17. Nayfeh, A., H., 2000. Nonlinear Interactions, A Wiley Interscience, John Wiley & Sons, 2000.
18. Nayfeh, A., H., Balachandran, B., 1995. Applied Nonlinear Dynamics, A Wiley Interscience, John Wiley & Sons, 1995.
19. Nayfeh, A., H., Mook, D.T., 1979. Nonlinear Oscillations, A Wiley Interscience, John Wiley & Sons, 1979.
20. Nayfeh, A., H., 1998. Reduced order models of weakly nonlinear spatially continuous systems, Nonlinear Dynamics 16, 105–125, 1998.
21. Nayfeh, A., H., Nayfeh, S.A., and Mook, D.T., 1992. On Methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities, Nonlinear Dynamics, 3, 145-162, 1992.
22. Nayfeh, A., H., 1981. Introduction to Perturbation Techniques, A Wiley Interscience, John Wiley & Sons, New York, 1981.
23. Öz, H.R., Pakdemirli, M., Boyacı, H., 2001. Non-linear vibrations and stability of an axially moving beam with time-dependent velocity, International Journal of Non-Linear Mechanics 36, 107-115, 2001.
24. Öz, H.R., 1999. Eksenel Hareketli Sürekli Ortam Titreşimleri, Doktora Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü 1999.

25. Pakdemirli, M., 1994. A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Mechanics Research Communications* 21, (2), 203-208, 1994.
26. Pakdemirli, M., Boyacı, H., 1995. Comparison of direct- perturbation methods with discretization-perturbation methods for nonlinear vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 186, 837-845, 1995.
27. Pakdemirli, M., Boyacı, H., 1996. Vibrations of continuous systems having arbitrary quadratic and cubic nonlinearities, *Applied Mechanics and Engineering*, , 1, 3, 445-463, 1996.
28. Pakdemirli, M., Boyacı, H., 1997. The direct perturbation method versus the discretization perturbation method: Linear systems, *Journal of Sound and Vibration*, 199(5), 825-832, 1997.
29. Pakdemirli, M., 2001. Vibrations of continuous systems with a general operator notation suitable for perturbative calculations , *Journal of Sound and Vibration*, 246(5), 841-851, 2001.
30. Pakdemirli, M., 2001. A general solution procedure for coupled systems with arbitrary internal resonances, *Mechanics Research Communications*, Vol. 28. No. 6, pp. 617-522, 2001.
31. Pakdemirli , M., 2003. Comparison of higher order versions of the method of multiple scales for an odd non-linearity problem, *Journal of Sound and Vibration* 262, 989–998, 2003.
32. Pakdemirli, M., Özkaya, E. , 2003. Three-to-one internal resonances in a general cubic non-linear continuous system, *Journal of Sound and Vibration* 268, 543–553, 2003.
33. Pakdemirli, M., Özkaya, E., 2004. Two-to-one internal resonances in continuous systems with arbitrary quadratic nonlinearities, *Arabian Journal for Science and Engineering* 29 (1C), 99-112 (Mechanical Vibration and Noise Theme Issue), 2004.
34. Panda, L.N., Kar, R.C., 2008. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances, *Journal of Sound and Vibration* 309, 375-406, 2008.
35. Pasin, F., 1994. *Mekanik Sistemler Dinamiği*, İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları, 1994.
36. Rao, S., 2004. *Mechanical Vibrations*, Pearson Prentice Hall, 2004.

- 37.Türkçe Sözlük, 2005. Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu, Türk Dil Kurumu Yayınları, 549, 10.Baskı, Ankara 2005.
- 38.Tanır, G., 2004. Titreşim, Dalgalar ve Problemler,Palme Yayıncılık,2004.
- 39.Tez, Z., 2008. Fiziğin Kültürel Tarihi, Doruk Yayınları, 2008.
- 40.Wickert, J. A., 1992. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam, International Journal of Non-Linear Mechanics 27 503-517,1992 .
- 41.Wickert, J. A., Mote Jr., C.D., 1988. Current research on the vibration and stability of axially moving materials, Shock and Vibration Digest 20(5) 3-13,1988.
- 42.Wickert, J. A., Mote Jr., C.D., 1990. Classical vibration analysis of axially moving continua, ASME Journal of Applied Mechanics 57 738-744,1990.
- 43.Yang, X.D., Chen, L.Q., 2005. Bifurcation and chaos of an axially accelerating viscoelastic beam, Chaos, Solitons and Fractals 23 , 249–258, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

- Doğum Tarihi** : 17 Haziran 1977
- Doğum Yeri** : Ankara
- İlkokul** : Atatürk İlkokulu, Kağızman Kars – 1988
- Ortaokul** : Suphi Koyuncuoğlu Lisesi, Bornova İzmir – 1991
- Lise** : Mithat Paşa Teknik Lisesi, Elektrik Bölümü, Konak İzmir – 1995
- Lisans** : Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Manisa – 2001
- Yüksek Lisans** : Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Deniz Bilimleri ve Teknolojisi Anabilim Dalı, Kıyı Mühendisliği Bölümü, İzmir – 2004
- Doktora** : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Bilim Dalı, Manisa – 2009