T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSENEL HAREKETLI ÇOK MESNETLI KIRIŞ TITREŞIMLERI

DOKTORA TEZİ

Makine Yüksek Mühendisi Süleyman Murat BAĞDATLI

Anabilim Dalı	**: Makine Mühendisliği**
Programı	**: Makine Teorisi ve Dinamiği**

MANİSA 2009

T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSENEL HAREKETLI ÇOK MESNETLI KIRIŞ TITREŞIMLERI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09 Haziran 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 01 Temmuz 2009

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Erdoğan ÖZKAYA
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ
Prof. Dr. Halil Rıdvan ÖZ
Doç. Dr. Hakan BOYACI
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ALTINTAŞ

MANİSA 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

SEMBOL LİSTESİ

A	: Kirişin kesit alanı
E	: Elastisite modülü
I	: Kütle ataleti
L	: Kiriş uzunluğu
λ	: Kararlılığı belirleyen özdeğerler
£	: Lagrangian
Ω	: Hız değişim frekansı
T	: Kinetik enerji
V	: Elastik potansiyel enerji
W	: Yerdeğiştirme fonksiyonunun seküler olmayan terimleri ile ilgili kısmı
D_0, D_1	: Hızlı ve yavaş zaman ölçeklerine göre türevler
η	: Mesnedin boyutsuz konumu
ϕ_n	: Yerdeğiştirme fonksiyonunun seküler terimleri ile ilgili kısmı
T_0, T_1	: Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri
Y_{m+1}	: Yerdeğiştirmenin mekana ait kısmı
$\frac{d}{dt}$	: Zamana göre türev
$\frac{d}{dx}$	: Mekana göre türev
dx^*	: Kirişten alınan uzamamış parça
ds^*	: Kirişten alınan uzamış parça
δ	: Varyasyon
e_{m+1}	: Şekil değiştirme
ε	: Küçük perturbasyon parametresi
ρ	: Kirişin yoğunluğu
σ	: Hız değişim frekansı tabii frekansın iki katına yakın olduğunu gösteren ayar parametresi
t^*	: Boyutlu zaman değişkeni
u^*_{m+1}	: Boyutlu boyuna yerdeğiştirme
v^*	: Boyutlu eksenel hız
w^*_{m+1}	: Boyutlu enine yerdeğiştirme
x^*, z^*	: Boyutlu Kartezyen koordinatlar
a	: Genlik

$k_{0,}$ k_1, k_2, k_3	: Kirişte çözülebilirlik şartındaki katsayılar
v_0	: Kirişin ortalama hızı
v_1	: Kiriş hızının değişim genliği
v_b	: Kirişin uzunlamasına esnekliği (boyuna direngenlik)
v_f	: Kiriş katsayısı (enine direngenliği)

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa Numarası

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında başlangıcından sonuna kadar, tavsiyelerde bulunan, gerekli yönlendirmeleri yapan, karşılaştığım problemlerin çözümünde deneyimlerinden yararlandığım, derin bilgi ve tecrübesiyle katkılarından, cesaretlendirici telkinlerinden dolayı, sınırsız sabrı ve hoşgörüsüyle zaman gözetmeksizin yardımlarını esirgemeyen, bilim insanı olmasının yanında benim için çok özel bir önemi olan saygıdeğer tez danışmanın ve hocam Doç. Dr. Erdoğan ÖZKAYA' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım uzaklardan yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Halil Rıdvan Öz' e teşekkür ederim.

Çalışmamın her aşamasında beni destekleyen, çalışmaların sırasında uykusuz gecelerimi paylaşan, gösterdiği özveri ve desteğinden dolayı canım eşime teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde büyük emekleri olan, maddi ve manevi her türlü desteğini esirgemeyen canım anneme, kahramanım olan babama, fedakâr ablama ve biricik erkek kardeşime teşekkür ederim.

Doyumsuz sohbetleri ile manevi yol gösterici, sıcak tebessümünü esirgemeyen bilge insan Öğr. Gör. Dr. Ersel OBUZ' a teşekkür ederim.

Her zaman desteklerini hissettiren, bir dost ve ağabey olarak gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Salim ŞAHİN ve Öğr. Gör. Dr. N. Sinan KÖKSAL' a teşekkür ederim.

Tezimin hazırlanmasında iyi bir çalışma ortamı sunan Makine Mühendisliği Bölüm Başkanı Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ' ye teşekkür ederim.

Kendilerini tanımaktan ve aynı ortamda çalışmaktan mutluluk duyduğum oda arkadaşım Arş. Gör. Ahmet Kesimli' ye, eski oda arkadaşım Arş. Gör. Tevfik Ertuğrul Özdemir' e, Arş. Gör. Murat Sarıgül' e teşekkür ederim.

Bu çalışma 107M302 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.

ÖZET

Bu çalışmada eksenel hareketli çok mesnetli kiriş ele alınmıştır. Kirişin uçlarında ve orta kısımlarında yer alan mesnetler basit mesnettir. Kiriş hızının ortalama bir hız etrafında harmonik olarak değiştiği kabul edilmiştir. Hamilton prensibi kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Kiriş uzamalarından kaynaklanan nonlineer etkiler dikkate alınarak çok mesnetli kiriş için en genel nonlineer hareket denklemleri elde edilmiştir. Perturbasyon metotlarından biri olan çok zaman ölçekli metot kullanılarak yaklaşık çözümler bulunmuştur. Perturbasyon serisindeki ilk terim lineer problemi oluşturmaktadır. Lineer problemin çözümü ile orta kısımda yer alan mesnedin sayısı, değişik konumları, değişik kiriş katsayısı ve eksenel hız değerleri için tabii frekanslar tam olarak hesaplanmıştır. İkinci mertebede ortaya çıkan nonlineer terimler, lineer probleme düzeltme terimleri getirmektedir. Nonlineer terimlerin tabii frekansa etkisi değişik parametreler için hesaplanmıştır. Hız değişim frekansının sıfır ve tabii frekansın iki katından uzak olduğu, hız değişim frekansının sıfıra yakın olduğu ve hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olması durumunda temel parametrik rezonans meydana gelmektedir. Temel parametrik rezonans durumu detaylı bir şekilde incelenmiştir. Her durum için kararlılık analizi yapılarak çözümlerinin kararlı ve kararsız olduğu bölgeler tespit edilmiştir. Eksenel hızın, kirişlik katsayısının, mesnet adedinin ve konumlarının bifurkasyon noktalarına etkileri incelenmiştir. Faz modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Genliklerin artmaya başladığı bifurkasyon (dallanma) noktaları tespit edilmiştir. Toplam-fark tipi kombinasyon rezonansları incelenmiştir. Toplam tipi ve fark tipi kombinasyon rezonansları için kararsız bölgeler araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Eksenel hareket, çok mesnetli kiriş titreşimleri, perturbasyon analizi, nonlineer titreşim

ABSTRACT

In this study, axially moving beam system supported from both ends and in middle part simple was discussed. Supports at the end and middle of the beam were simple supports. It is suggested that beam velocity is harmonically changed around the average speed. The equations of motion were obtained using Hamilton's Principle. General Nonlinear equation of motion was obtained by considering nonlinear effect caused by beam stretching for multi-supported beam. Approximate solutions were obtained using the Method of Multiple Scales, a perturbation method. First term in perturbation series compose linear problem. Natural frequencies were calculated by solving the linear problem for different displacement of support in the middle. Correction terms are needed because of the nonlinear terms appears in the second order. The effect of nonlinear terms on natural frequency was calculated for different parameters. Base parametric resonance occurred where the velocity change frequency was equal to approximately twofold of natural frequency. Basic parametric resonance condition was examined in detail. By performing stability analysis of solutions, stable and unstable regions were identified. The effects of axial velocity on the bifurcation points of transverse flexibility coefficient, support number and position have been investigated. Phase modulation equations were obtained. The bifurcation (pitchfork) points where amplitude starts were determined. Unstable regions for total difference type resonances were investigated.

Keywords: axially moving beams, vibrations of multiple supported beam, perturbation methods, and nonlinear vibration.

1. GİRİŞ

Eksenel hareketli sürekli sistemler uzun zamandır araştırılmaktadır. Uygulama alanları çok yaygındır. Bunlara örnek olarak yüksek hızlı manyetik ve kâğıt şeritler, iplik üretimi, kayış kasnak sistemleri, yürüyen bantlar, motorlu testereler, hareket aktaran zincirler, akışkan taşıyan borular, havai hattı kullanan taşıma araçları (teleferik, telesiyej gibi) verilebilir. Titreşim analizinin en önemli kısmı sistemlerin tabii frekanslarının hesaplanmasıdır. Sistemlerin tabii frekansını hesaplarken sistemleri lineer kabul etmek hesaplamada büyük kolaylıklar sağlasa da sonuçlar sağlıklı olmaz. Çünkü hiçbir sistem lineer hareket etmez ve elde edilen lineer sonuçlar bizi yanıltabilir. Bu nedenle kirişin titreşimi sırasında uzamadan dolayı meydana gelen nonlineer etkilerinde hesaba katılması gerekmektedir.

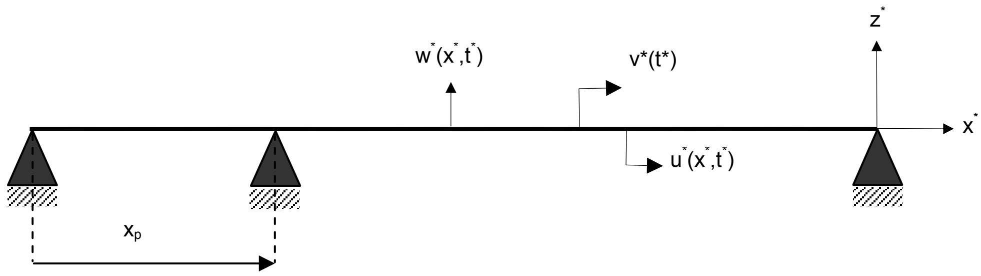
Kiriş titreşimleri ile ilgili lineer ve nonlineer olmak üzere birçok araştırma yapılmıştır. 1979' a kadar yapılan çalışmalar Nayfeh ve Mook [1] tarafından özetlenmiştir. Özellikle uçların hareket etmemesinden kaynaklanan nonlineer davranış birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir[2–5]. Quasi [6-7] basit ve ankastre mesnetlenmiş kirişlerin nonlineer titreşimlerini güçlü seri yaklaşımı kullanarak elde etmiş ve sonuçları mevcut sonuçlar ile kıyaslamıştır. Özkaya ve arkadaşları [8] değişik sınır şartları için kütle-kiriş sistemini ele almıştır. Uzamalardan kaynaklanan etkileri dikkate alarak elde ettikleri nonlineer denkleme, ayrıca sönüm ve zorlama etkilerini de eklemişlerdir. Bu denklemi çok zaman ölçekli metodu kullanarak çözmüşlerdir. Karlık ve arkadaşları [9], Özkaya ve arkadaşlarının [8] çalışmasından elde ettikleri sonuçları, yapay sinir ağı metodunu kullanarak elde ettiği sonuçlar ile karşılaştırmıştır. Özkaya ve Pakdemirli [10] ankastre mesnetli kütle kiriş problemini ele almıştır. Nonlineer analiz ve yapay sinir ağları uygulaması yapmışlardır. Özkaya [11] basit mesnetli kiriş üzerine yerleştirilmiş n tane kütle alarak, genel bir formülasyon ve bu formülasyona ait çözümleri elde etmiştir. n adet kütlenin konumun değiştirilmesi ve farklı kütle oranları için çözümler kullanarak uygulamalar yapmıştır.

Eksenel hareket ile ilgili literatür çalışmalarında Ulsoy ve arkadaşları [12], Wickert ve arkadaşları [13] tarama makalelerinde yüzlerce makaleye atıf yapılmıştır. Wickert ve Mote [14] hareketli şerit ve kirişlerin enine titreşimlerini incelemişlerdir. Wickert [15] gergin kiriş problemini ele almıştır. Atıf yapılan çalışmaların hepsinde eksenel hız sabit alınmıştır. Hareketli sürekli ortamlarda değişken hıza ait ilk denklemleri Miranker [16] elde etmiştir. Pellicano ve Zirilli [17] eksenel hareketli kirişlerin nonlineer titreşimlerini ve sınır tabakalarını incelemişlerdir. Mockenstrum ve arkadaşları [18] sabit hızlı sistemler için gerilme kuvvetinin zamanla değişimini ele almış ve kararlılık durumunu incelemişlerdir. Pakdemirli ve arkadaşları [19] eksenel olarak ivmelenen şeridin hareket denklemlerini Hamilton prensibi kullanarak tekrar elde etmiş ve titreşimlerin kararlılığını sayısal olarak araştırmıştır. Pakdemirli ve Batan [20] sabit ivme ile periyodik olarak hızlanıp yavaşlayan durum için bu analizi tekrar etmiştir. Pakdemirli ve Ulsoy [21] çok zaman ölçekli metot (perturbasyon tekniği) ile eksenel olarak ivmelenen şerit için yaklaşık analitik çözüm elde etmiş ve direkt-perturbasyon, diskritizasyon-perturbasyon metodlarını karşılaştırmıştır. Nayfeh ve arkadaşları [22] kuadratik ve kübik nonlineeriteler için direkt-perturbasyon metodunun daha iyi sonuç verdiğini göstermiştir. Pakdemirli ve arkadaşları [23] nonlineer kablo titreşimi için iki metodun sonucunu karşılaştırmış ve her iki metod için dallanma ve kararlılık analizinin farklılaştığını ve gerçek sistemin davranışının direkt-perturbasyon metodu ile daha iyi temsil edildiğini gösterilmiştir. Pakdemirli [24] ve Pakdemirli ve Boyacı [25,26] keyfi kuadratik ve kübik nonlineeriteli genel bir model kullanarak direkt perturbasyon metodunun daha hassas sonuç verdiğini göstermiştir. Öz ve arkadaşları [27], Özkaya ve Pakdemirli [28] perturbasyon metodu ile, Özkaya ve Pakdemirli [29] lie metodu ile çözümler yapmış iki metot arasındaki farklılıkların nonlineer denklemlere has bir durum olmadığını lineer denklemlerde de görülebileceğini göstermiştir. Öz ve Pakdemirli [30], Öz [31] ve Özkaya ve Öz [32] enine direngenliğin az olduğu şeritten kirişe geçiş durumunu farklı metotlarla incelemiştir. Bu çalışmalarda değişken hızlı eksenel hareketli kirişlerin temel parametrik ve kombinasyon rezonans durumları pertürbasyon ve yapay sinir ağları yöntemi ile incelenmiş, toplam tipi kombinasyon rezonanslarının olduğu ancak fark tipi kombinasyon rezonanslarının olmadığı gösterilmiştir. Eksenel hareketli şeritin geometrik nonlineerite durumu için çözümleri de Chung ve arkadaşları [33] ve Chen ve arkadaşları [34] tarafından elde edilmiştir.

Bu çalışmada, eksenel hareketli çok mesnetli kirişin nonlineer titreşimleri incelenmiştir. Ele alınan kiriş Euler-Bernolli kirişidir. Bu yaklaşım eksenel hareketli kiriş için yeterlidir. Çünkü eğilme momenti etkilerinin dışındaki etkiler ihmal edilebilecek düzeydedir. Hamilton prensibi ile hareket denklemleri çıkartılmıştır. Denklemlerin çözümü için pertürbasyon tekniklerinden çok zaman ölçekli metot kullanılmıştır. Kiriş katsayısına, kiriş hızına, mesnet adedine ve konumuna bağlı olarak tabii frekans analizi yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur. Daha sonra kiriş uzamasından ve eğilme momenti etkilerinden kaynaklanan nonlineer terimler dikkate alınmış ve oluşan nonlineer kısmi diferansiyel denklemin çözümü araştırılmıştır. Lineer probleme ilave olarak nonlineer etkilerin tabii frekansa ve çözümlere olan etkileri incelenmiştir. Nonlineer terimlerin tabii frekansa etkisi değişik parametreler için hesaplanmıştır. Hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olduğu, sıfırdan ve tabii frekansın iki katından uzak olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olması durumunda temel parametrik rezonans meydana gelmektedir. Temel parametrik rezonans durumu detaylı bir şekilde incelenmiştir. Her durum için kararlılık analizi yapılarak çözümlerinin kararlı ve kararsız olduğu bölgeler tespit edilmiştir. Eksenel hızın, kirişlik katsayısının ve mesnet adedinin bifurkasyon noktalarına etkileri incelenmiştir. Faz modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Genliklerin artmaya başladığı bifurkasyon (dallanma) noktaları tespit edilmiştir. Toplam ve fark tipi kombinasyon rezonans için çözümler yapılmıştır. Toplam tipi kombinasyon rezonansı durumu için kararlı ve kararsız bölgeler tespit edilmiş ve grafikler halinde sunulmuştur. Fark tipi kombinasyon rezonansları durumu için kararsızlık ortaya çıkmadığı tespit edilmiştir.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

Bu bölümde Şekil 2.1' de gösterilen eksenel hareketli çok mesnetli kiriş için hareket denklemleri elde edilmiştir. Hareket denklemlerini elde ederken bazı kabuller yapılmıştır. Dönme ataleti ve kayma gerilmesi etkilerinin ihmal edildiği Euler-Bernoulli kirişi ele alınmıştır. Kirişin başlangıç ve bitiş noktalarında "korunumlu sistem" kabulünü bozmayacak hareket edemeyen basit mesnet mevcuttur. Ön gerilme kuvvetindeki değişme miktarı uzamanın değişimi ile ihmal edilebilir seviyededir. Kesit boyutları hareket esnasında değişmemektedir. Yerçekimi etkisi gerilme kuvvetine göre yeteri kadar küçüktür, böylece kiriş denge konumunda düz durmaktadır.

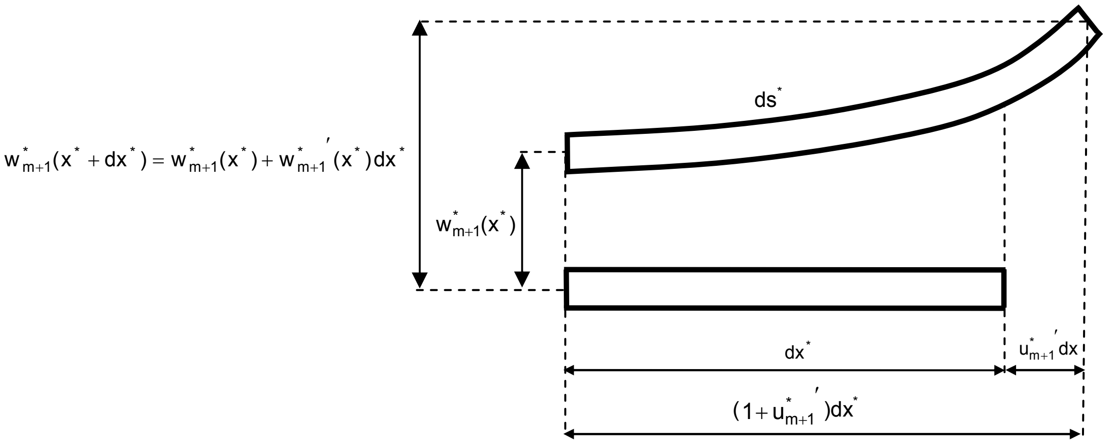


Şekil 2.1 Eksenel hareketli çok mesnetli kiriş.

Şekil 2.1' de görülen eksenel hareketli kirişte $u^*(x^*,t^*)$, x^* yönündeki boyuna değiştirmeyi, $v^*(t^*)$, x^* yönündeki eksenel hızı, $w^*(x^*,t^*)$ ise z^* yönündeki yer değiştirmeyi göstermektedir.

2.1. Hamilton Prensibiyle Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Sistemin Langrangian' ını hesaplamaya geçmeden önce uzama etkilerini ve sistemin toplam hızları hesaplanacaktır. Uzama etkilerinin hesaplanması için Şekil 2.2' deki gibi dx^* uzunluğunda bir parça göz önüne alınmıştır. Titreşim esnasında uzunluk ds^*, eksenel uzama miktarı $u^{*\prime}_{m+1}dx$, sol uçtaki enine yer değiştirme $w^*_{m+1}(x^*)$ ve sağ uçtaki enine yer değiştirme $w^*_{m+1}(x^*+dx)$ olarak alınmıştır.



Şekil 2.2 Hareketli kirişten alınan dx parçasındaki yer değiştirmeler

Her iki uçtaki enine yer değiştirmeler arasındaki fark ise,

$$w^*_{m+1}\left(x^* + dx^*\right) - w^*_{m+1}\left(x^*\right) = w^{*\prime}_{m+1} dx^* \qquad (m=0,1,2...n) \tag{2.1}$$

şeklinde elde edilir. m orta kısımda bulunan mesnet sayısını ifade etmektedir. dx^* uzunluğu, yer değiştirme sonrası ds^* uzunluğu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$ds = \sqrt{\left(1 + u^{*\prime}_{m+1}\right)^2 dx^{*2} + w^{*\prime 2}_{m+1} dx^{*2}} = \sqrt{\left(1 + u^{*\prime}_{m+1}\right)^2 + w^{*\prime 2}_{m+1}}\, dx^* \tag{2.2}$$

Şekil değiştirme,

$$e^*_{m+1} = \frac{ds^* - dx^*}{dx^*} \tag{2.3}$$

olduğundan denklem (2.3)' e denklem (2.2)' yi yerleştirir, Taylor açılımı yapıp küçük terimleri ihmal edelirse şekil değiştirme,

$$e^*_{m+1} = u^{*\prime}_{m+1} + \frac{1}{2} u^{*\prime 2}_{m+1} + \frac{1}{2} w^{*\prime 2}_{m+1} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Boyuna yer değiştirme, enine yer değiştirmeye göre küçük kabul edilirse ve $u^* = O(w^{*2})$ alınırsa bazı terimler diğer terimlere göre küçük olacaktır.

$$e^*_{m+1} = u^{*\prime}_{m+1} + \frac{1}{2} w^{*\prime 2}_{m+1} \tag{2.5}$$

Boyuna ve enine yönündeki hızlar ise sırasıyla şöyle bulunur.

$$\frac{du^*_{m+1}}{dt^*} = \frac{\partial u^*_{m+1}}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*_{m+1}}{\partial x^*}\frac{dx^*}{dt^*} = \dot{u}^*_{m+1} + u^{*\prime}_{m+1} v^* \tag{2.6}$$

$$\frac{dw^*_{m+1}}{dt^*} = \frac{\partial w^*_{m+1}}{\partial t^*} + \frac{\partial w^*_{m+1}}{\partial x^*}\frac{dx^*}{dt^*} = \dot{w}^*_{m+1} + w^{*\prime}_{m+1} v^* \tag{2.7}$$

Toplam yatay hız ise x^* yönündeki hız ile kiriş uzamalarından kaynaklanan (2.6)' da verilen hızın toplamıdır $(v^* + \dot{u}^*_{m+1} + u^{*\prime}_{m+1} v^*)$. Kinetik enerji ve elastik potansiyel enerji sırasıyla şöyle yazılabilir.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} \int_{x^*_m}^{x^*_{m+1}} \rho A \left\{ \left(\dot{w}^*_{m+1} + w^{*\prime}_{m+1} v^* \right)^2 + \left(v^* + \dot{u}^*_{m+1} + u^{*\prime}_{m+1} v^* \right)^2 \right\} dx^* \tag{2.8}$$

$$V = \sum_{m=0}^{n} \left[\frac{1}{2} \int_{x^*_m}^{x^*_{m+1}} EA \left(u^{*\prime}_{m+1} + \frac{1}{2} w^{*\prime 2}_{m+1} \right)^2 dx^* + \frac{1}{2} \int_{x^*_m}^{x^*_{m+1}} EIw^{*\prime\prime 2}_{m+1} dx^* + \int_{x^*_m}^{x^*_{m+1}} P \left(u^{*\prime}_{m+1} + \frac{1}{2} w^{*\prime 2}_{m+1} \right) dx^* \right] \tag{2.9}$$

Denklemlerde x^*_{m+1} orta kısımda bulunan mesnedin başlangıç noktasından olan uzaklığını ifade etmektedir. Denklem (2.9) ‘ da birinci integral şekil değiştirme, ikinci integral eğilme, üçüncü integral ise eksenel gerilme ile ilgilidir. Denklem (2.8) ve (2.9)' da x_0=0 ve x_{n+1}=L, ρ kirişin yoğunluğu, A kirişin her bir parçasının kesit alanı, w^*_{m+1} kirişin mesnetler arasındaki her bir parçasının enine deplasmanı, E elastisite modülü, I kirişin nötr eksene göre kesit atalet momenti, u^*_{m+1} kirişin mesnetler arasındaki her bir parçasının eksenel yer değiştirmesi, $(\dot{\ })$ zamana göre türev, $(\ )'$ x' e göre türevi göstermektedir. Sistemin Lagrangian' ı kinetik ve potansiyel enerji farkıdır.

$$£=T-V \tag{2.10}$$

Hamilton Prensibi ise Lagrangian' ın zaman üzerinden integralinin varyasyonunun sıfır olduğunu belirtmektedir.

$$\delta\int_{t_1^*}^{t_2^*} £dt^* = 0 \tag{2.11}$$

Denklem (2.8) (2.9) denklem (2.10)'a yerleştirilir ve elde edilen Lagrangian (2.11)' e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
&\delta\int_{t_1^*}^{t_2^*}\left[\sum_{m=0}^{n}\left\{\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}\frac{1}{2}\rho A\left\{\left(\dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*\prime} v^*\right)^2 + \left(v^* + \dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*\prime} v^*\right)^2\right\}dx^*\right.\right.\\
&-\left\{\frac{1}{2}\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} EA\left(u_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 2}\right)^2 dx^* - \frac{1}{2}\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} EIw_{m+1}^{*\prime\prime 2}\, dx^*\right.\\
&\left.\left.\left.-\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} P\left(u_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 2}\right)dx^*\right\}\right\}\right]dt = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir. Denklem (2.12)' nın varyasyonu alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1^*}^{t_2^*}\left[\sum_{m=0}^{n}\left\{\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}\left\{\rho A\left(\left(\dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*\prime} v^*\right)\left(\delta\dot{w}_{m+1}^* + v^*\delta w_{m+1}^{*\prime} + w_{m+1}^{*\prime}\delta v^*\right)\right.\right.\right.\right.\\
&+\left.\left(\dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*\prime} v^* + v^*\right)\left(\delta\dot{u}_{m+1}^* + v^*\delta u_{m+1}^{*\prime} + u_{m+1}^{*\prime}\delta v^* + \delta v^*\right)\right)\\
&-EA\left(u_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 2}\right)\left(\delta u_{m+1}^{*\prime} + w_{m+1}^{*\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime}\right) - EIw_{m+1}^{*\prime\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime\prime}\\
&\left.\left.\left.-P\left(\delta u_{m+1}^{*\prime} + w_{m+1}^{*\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime}\right)\right\}dx^*\right\}\right]dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

elde edilir. Eksenel hızı belirli bir fonksiyon seçeceğimiz için δv=0 olacaktır.

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1^*}^{t_2^*}\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}\left\{\rho A\left(\left(\dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*\prime} v^*\right)\left(\delta\dot{w}_{m+1}^* + v^*\delta w_{m+1}^{*\prime}\right)\right.\right.\\
&+\left.\left(\dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*\prime} v^* + v^*\right)\left(\delta\dot{u}_{m+1}^* + v^*\delta u_{m+1}^{*\prime}\right)\right)\\
&-EA\left(u_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 2}\right)\left(\delta u_{m+1}^{*\prime} + w_{m+1}^{*\prime}\delta w_1^{*\prime}\right)\\
&\left.-EIw_{m+1}^{*\prime\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime\prime} - P\left(\delta u_{m+1}^{*\prime} + w_{m+1}^{*\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime}\right)\right\}dx^* dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Parantezler tek tek açılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1^*}^{t_2^*}\left[\sum_{m=0}^{n}\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}\left\{\rho A\left(\left(\dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*\prime} v^*\right)\delta\dot{w}_1^* + \left(\dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*\prime} v^*\right)v^*\delta w_{m+1}^{*\prime}\right.\right.\right.\\
&+\left.\left(\dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*\prime} v^* + v^*\right)\delta\dot{u}_{m+1}^* + \left(\dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*\prime} v^* + v^*\right)v^*\delta u_{m+1}^{*\prime}\right)\\
&-EA\left(u_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 2}\right)\delta u_{m+1}^{*\prime} - EA\left(u_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 2}\right)w_{m+1}^{*\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime}\\
&\left.\left.-EIw_{m+1}^{*\prime\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime\prime} - P\delta u_{m+1}^{*\prime} - Pw_{m+1}^{*\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime}\right\}dx^*\right]dt^* = 0
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

İlk integrallerden başlayarak integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa, kısmi integrasyon işlemleri sonunda denklem (2.16) elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1^*}^{t_2^*}\sum_{m=0}^{n}\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}\left\{-\rho A\left(\ddot{w}_{m+1}^* + 2\dot{w}_{m+1}^{*\prime} v^* + w_{m+1}^{*\prime}\dot{v}^* + w_{m+1}^{*\prime\prime} v^{*2}\right) - EIw_{m+1}^{*iv} + Pw_{m+1}^{*\prime\prime}\right.\\
&\left.+EA\left(u_{m+1}^{*\prime\prime} w_{m+1}^{*\prime} + u_{m+1}^{*\prime} w_{m+1}^{*\prime\prime} + \frac{3}{2}w_{m+1}^{*\prime 2} w_{m+1}^{*\prime\prime}\right)\right\}\delta w_{m+1}^* dx^* dt^*\\
&+\int_{t_1^*}^{t_2^*}\sum_{m=0}^{n}\int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}\left\{-\rho A\left(\ddot{u}_{m+1}^* + 2\dot{u}_{m+1}^{*\prime} v^* + u_{m+1}^{*\prime}\dot{v}^* + \dot{v}^* + u_{m+1}^{*\prime\prime} v^{*2}\right)\right.\\
&\left.+EA\left(u_{m+1}^{*\prime\prime} + w_{m+1}^{*\prime} w_{m+1}^{*\prime\prime}\right)\right\}\delta u_{m+1}^* dx^* dt^*\\
&+\int_{t_1^*}^{t_2^*}\sum_{m=0}^{n}\left\{\rho A\left(\dot{w}_{m+1}^* v^* + w_{m+1}^{*\prime} v^{*2}\right) - EA\left(u_{m+1}^{*\prime} w_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 3}\right)\right.\\
&\left.+EIw_{m+1}^{*\prime\prime\prime} - Pw_{m+1}^{*\prime}\right\}\delta w_{m+1}^*\Big|_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} dt^*\\
&+\int_{t_1^*}^{t_2^*}\sum_{m=0}^{n}\left\{\rho A\left(\dot{u}_{m+1}^* v^* + u_{m+1}^{*\prime} v^{*2} + v^{*2}\right) - EA\left(u_{m+1}^{*\prime} + \frac{1}{2}w_{m+1}^{*\prime 2}\right) - P\right\}\delta u_{m+1}^*\Big|_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} dt^*\\
&-\int_{t_1^*}^{t_2^*}\sum_{m=0}^{n}\left\{EIw_{m+1}^{*\prime\prime}\delta w_{m+1}^{*\prime}\Big|_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}\right\}dt^* = 0
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Yukarıda iki katlı integralin sıfır olabilmesi ancak ve ancak δw_{m+1}^* ve δu_{m+1}^* katsayılarının sıfıra eşit olması ile mümkündür. Buradan iki grup eşitlik elde edilir.

<u>δw*dx*dt* ‘ın katsayısı</u>

$$
\begin{aligned}
&-\rho A\left(\ddot{w}^{*}_{m+1}+2\dot{w}^{*\prime}_{m+1}v^{*}+w^{*\prime}_{m+1}\dot{v}^{*}+w^{*\prime\prime}_{m+1}v^{*2}\right)-EIw^{*\,iv}_{m+1}+Pw^{*\prime\prime}_{m+1}\\
&+EA\left(u^{*\prime\prime}_{m+1}w^{*\prime}_{m+1}+u^{*\prime}_{m+1}w^{*\prime\prime}_{m+1}+\frac{3}{2}w^{*\prime 2}_{m+1}w^{*\prime\prime}_{m+1}\right)=0
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

<u>δu*dx*dt* ‘ın katsayısı</u>

$$
-\rho A\left(\ddot{u}^{*}_{m+1}+2\dot{u}^{*\prime}_{m+1}v^{*}+u^{*\prime}_{m+1}\dot{v}^{*}+\dot{v}^{*}+u^{*\prime\prime}_{m+1}v^{*2}\right)+EA\left(u^{*\prime\prime}_{m+1}+w^{*\prime}_{m+1}w^{*\prime\prime}_{m+1}\right)=0
\tag{2.18}
$$

Bu iki denklem hareket denklemleridir. Sınır şartları ise geriye kalan terimlerin sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

İlk olarak,

$$
\int_{t_1^*}^{t_2^*}\left\{\rho A\left(\dot{w}^{*}_{m+1}v^{*}+w^{*\prime}_{m+1}v^{*2}\right)-EA\left(u^{*\prime}_{m+1}w^{*\prime}_{m+1}+\frac{1}{2}w^{*\prime 3}_{m+1}\right)+EIw^{*\prime\prime}_{m+1}-Pw^{*\prime}_{m+1}\right\}\delta w^{*}_{m+1}\Big|_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}dt^{*}=0
\tag{2.19}
$$

(m=0,1,2…n)

Denklem (2.19)’ un sıfıra eşit olabilmesi için ya parantez içinin ya da δw^{*}_{m+1} katsayısının sıfıra olması gerekmektedir.

İkinci olarak,

$$
\int_{t_1^*}^{t_2^*}\left\{\rho A\left(\dot{u}^{*}_{m+1}v^{*}+u^{*\prime}_{m+1}v^{*2}+v^{*2}\right)-EA\left(u^{*\prime}_{m+1}+\frac{1}{2}w^{*\prime 2}_{m+1}\right)-P\right\}\delta u^{*}_{m+1}\Big|_{x_m^*}^{x_{m+1}^*}dt^{*}=0
\tag{2.20}
$$

(m=0,1,2…n)

Denklem (2.20)’ nin sıfır olabilmesi için ya parantezin içi ya da δu^{*}_{m+1} ın sıfır olması gerekmektedir. Başlangıç ve bitiş noktalarında boyuna uzama olmadığından dolayı,

$$
\delta u_1^{*}(0,t)=0\ ,\qquad \delta u^{*}_{n+1}(L,t)=0
\tag{2.21}
$$

yazılabilir. Ayrıca orta kısımdaki mesnedin bulunduğu noktada enine deplasmanlar ve eğimler birbirine eşit olduğundan denklem (2.16)' dan süreklilik şartları aşağıdaki gibi elde edilir.,

$$w_p^*(x_p^*,t)=0\,,\qquad w_{p+1}^*(x_p^*,t)=0\,,\tag{2.22}$$

$$w_p^{*'}(x_p^*,t)=w_{p+1}^{*'}(x_p^*,t)\,,\qquad w_p^{*''}(x_p^*,t)=w_{p+1}^{*''}(x_p^*,t)\tag{2.23}$$

(p=1,2,3….n)

Sınır şartları ise şu şekildedir.

$$w_1^*(0,t)=0\,,\qquad w_{n+1}^*(L,t)=0\tag{2.24}$$

$$w_1^{*''}(0,t)=0\,,\qquad w_{n+1}^{*''}(L,t)=0\tag{2.25}$$

Böylece ele alınan fiziksel sisteme karşılık gelen hareket denklemi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}&-\rho A\left(\ddot{w}_{m+1}^*+2\dot{w}_{m+1}^{*'}v^*+w_{m+1}^{*'}\dot{v}^*+w_{m+1}^{*''}v^{*2}\right)-EIw_{m+1}^{*iv}+Pw_{m+1}^{*''}\\&+EA\left(u_{m+1}^{*''}w_{m+1}^{*'}+u_{m+1}^{*'}w_{m+1}^{*''}+\frac{3}{2}w_{m+1}^{*'2}w_{m+1}^{*''}\right)=0\end{aligned}\tag{2.26}$$

$$-\rho A\left(\ddot{u}_{m+1}^*+2\dot{u}_{m+1}^{*'}v^*+u_{m+1}^{*'}\dot{v}^*+\dot{v}^*+u_{m+1}^{*''}v^{*2}\right)+EA\left(u_{m+1}^{*''}+w_{m+1}^{*'}w_{m+1}^{*''}\right)=0\tag{2.27}$$

Denklem (2.26) ve (2.27) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}&\left(\ddot{w}_{m+1}^*+2\dot{w}_{m+1}^{*'}v^*+w_{m+1}^{*'}\dot{v}^*+w_{m+1}^{*''}v^{*2}\right)+\frac{EI}{\rho A}w_{m+1}^{*iv}-\frac{P}{\rho A}w_{m+1}^{*''}\\&-\frac{E}{\rho}\left(u_{m+1}^{*''}w_{m+1}^{*'}+u_{m+1}^{*'}w_{m+1}^{*''}+\frac{3}{2}w_{m+1}^{*'2}w_{m+1}^{*''}\right)=0\end{aligned}\tag{2.28}$$

$$\left(\ddot{u}_{m+1}^*+2\dot{u}_{m+1}^{*'}v^*+u_{m+1}^{*'}\dot{v}^*+\dot{v}^*+u_{m+1}^{*''}v^{*2}\right)-\frac{E}{\rho}\left(u_{m+1}^{*'}+\frac{1}{2}w_{m+1}^{*'2}\right)'=0\tag{2.29}$$

2.2. Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Önceki bölümde elde ettiğimiz denklem (2.28) ve (2.29) sistemin genelleştirilmiş hareket denklemleridir. Denklemleri daha sade hale getirmek, çözümlerin kullanılan malzeme ve geometrik yapıdan bağımsız olabilmesi ve böylece sonuçların daha genel olabilmesi için denklemlerin boyutsuzlaştırılması gerekir. Bunun için aşağıdaki değişken parametreleri tanımlanmıştır.

$$w_{m+1} = \frac{w^*_{m+1}}{L},\;\; u_{m+1} = \frac{u^*_{m+1}}{L},\;\; \eta = \frac{x^*_{m+1}}{L},\;\; t = t^*\sqrt{\frac{P}{\rho A L^2}},\;\; v = \frac{v^*}{\sqrt{P/\rho A}},\;\; v_b^2 = \frac{EA}{P},\;\; \bar{v}_f^2 = \frac{EI}{PL^2} \quad (2.30)$$

Yukarıda v_b boyuna direngenliği, $\bar{v}_f$ enine direngenliği göstermektedir. v* eksenel hızı durgun kirişteki dalga hızı ile boyutsuzlaştırılmıştır. Denklem (2.30)' a tanımlanan boyutsuz ifadeler önceki bölümde elde ettiğimiz denklem (2.28) ve (2.29)' da ilgili yerlere yerleştirilirse boyutsuz hareket denklemleri ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left(\ddot{w}_{m+1} + 2\dot{w}'_{m+1}v + w'_{m+1}\dot{v} + w''_{m+1}v^2\right) + \bar{v}_f^2 w_{m+1}^{iv} - \left(w'_{m+1}\left(1 + v_b^2\left(u'_{m+1} + \frac{1}{2}w'^2_{m+1}\right)\right)\right)' = 0 \quad (2.31)$$

$$\left(\ddot{u}_{m+1} + 2\dot{u}'_{m+1}v + u'_{m+1}\dot{v} + \dot{v} + u''_{m+1}v^2\right) - v_b^2\left(u'_{m+1} + \frac{1}{2}w'^2_{m+1}\right)' = 0 \quad (2.32)$$

Sınır şartları ve süreklilik şartları şu şekilde yazılabilir.

$$w_1(0,t) = 0,\;\; w_{n+1}(1,t) = 0,\;\; w''_1(0,t) = 0,\;\; w''_{n+1}(1,t) = 0, \quad (2.33)$$

$$u_1(0,t) = 0,\;\; u_{n+1}(1,t) = 0 \quad (2.34)$$

$$w^*_p(x^*_p,t) = 0\,,\;\; w^*_{p+1}(x^*_p,t) = 0 \quad (2.35)$$

$$w^{*\prime}_p(x^*_p,t) = w^{*\prime}_{p+1}(x^*_p,t)\,,\;\; w^{*\prime\prime}_p(x^*_p,t) = w^{*\prime\prime}_{p+1}(x^*_p,t) \quad (2.36)$$

(p=1,2,3….n)

Teknolojik kullanımı olan parametreler için hesap yapmak gerekirse, boyuna titreşimler enine titreşimlerden önemli ölçüde daha hızlı yayıldığı için $v_b^2 >> 1$ alınabilir. Bu durumda denklem (2.31)' in birinci kısmı ikinci kısımdan çok küçüktür. Öyleyse denklem (2.32)' yi aşağıdaki gibi yazabiliriz. Gelecek denklemlerdeki indis problemini engellemek için m indisi yerine bu kısımda r indisi kullanılmıştır.

$$\left(u'_{r+1}+\frac{1}{2}w'^{2}_{r+1}\right)'=0 \qquad (r=0,1,2,....n) \qquad (2.37)$$

Yukarıdaki denklemin x' e göre integrali aşağıdaki gibi alınırsa,

$$u'_{r+1}+\frac{1}{2}w'^{2}_{r+1}=C_{r+1}(t)=e_{r+1} \qquad (2.38)$$

elde edilir. Orta kısımda yer alan mesnedin bulunduğu noktada, yani $x=x_p$' de $u'_p=u'_{p+1}$ ve $w'^{2}_p=w'^{2}_{p+1}$ olduğundan $C_{r+1}(t)=C_{r+2}(t)=C(t)$ yazılabilir. Her bir bölge için $C_{r+1}(t)$ ifadesi integre edilirse,

$$\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}u'_{r+1}dx+\frac{1}{2}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}w'^{2}_{r+1}dx=\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}C(t)dx \qquad (2.39)$$

$r=0,1,2,....n \qquad (\eta_0=0,\ \eta_{n+1}=1)$

elde edilir. Denklem (2.39)' de elde edilen bütün denklemler alt alta toplanırsa aşağıdaki ifade,

$$C(t)=u'_{r+1}+\frac{1}{2}w'^{2}_{r+1}=\frac{1}{2}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}w'^{2}_{r+1}dx \qquad (2.40)$$

elde edilir. Denklem (2.40)' ı, denklem (2.31)' e yerleştirip gerekli düzenlemeleri yaparsak eksenel hareketli çok mesnetli kiriş için nonlineer integro diferansiyel genel hareket denklemi elde edilir.

$$\left(\ddot{w}_{m+1}+2\dot{w}'_{m+1}v+w'_{m+1}\dot{v}\right)+\left(v^2-1\right)w''_{m+1}+\bar{v}_f^{2}\,w^{iv}_{m+1}=\frac{1}{2}v_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}w'^{2}_{r+1}dx\right)w''_{m+1} \qquad (2.41)$$

$m=0,1,2...n, \qquad \eta_0=0, \quad \eta_{n+1}=1$

n sürekli ortamın uçları dışında kalan, iki mesnet arasındaki toplam mesnet sayısıdır. Denklem (2.41)' de $\ddot{w}_{m+1}$ yerel ivmeyi, $2\dot{w}'_{m+1}v$ Coriolis ivmesini, $v_b^2\,w''_{m+1}$ merkezcil ivmeyi $\bar{v}_f^{2}$ kiriş katsayısını (enine direngenlik) göstermekte ve eşitliğin sağındaki boyuna direngenliğin çarpımı olan kübik nonlineerite ise titreşim esnasında asal eksenin sonlu uzamasından kaynaklanmaktadır.

3. Analitik Çözümler

Önceki bölümde çok kademeli kirişler için genel hareket denklemi (2.41) aşağıdaki gibi elde edilmişti.

$$\left(\ddot{w}_{m+1}+2\dot{w}'_{m+1}v+w'_{m+1}\dot{v}\right)+\left(v^2-1\right)w''_{m+1}+\bar{v}_f^2\, w_{m+1}{}^{iv}=\frac{1}{2}v_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}w'_{r+1}{}^2dx\right)w''_{m+1} \qquad (3.1)$$

m=0,1,2…n, η_0=0, η_{n+1}=1

Bu denklemdeki n parametresi iki uç mesnet arasındaki mesnet sayısını göstermektedir. Çözümlere geçmeden önce sistemin genel hareket denklemine sönüm ilave edilecektir [35]. Sönüm ilave edilmiş hareket denklemleri şu şekilde yazılabilir.

$$\left(\ddot{w}_{m+1}+2\dot{w}'_{m+1}v+w'_{m+1}\dot{v}\right)+\left(v^2-1\right)w''_{m+1}+\bar{v}_f^2\, w_{m+1}{}^{iv}+\bar{\mu}(\dot{w}_{m+1}+v\,w'_{m+1})=\frac{1}{2}v_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}w'_{r+1}{}^2dx\right)w''_{m+1} \qquad (3.2)$$

m=0,1,2…n, η_0=0, η_{n+1}=1

Eksenel hareketli çok mesnetli kirişe ait elde edilen genel hareket denklemin yaklaşık çözümünü için perturbasyon metotlarından çok zaman ölçekli metot kısmi diferansiyel denkleme ve sınır şartlarına direkt olarak uygulanacaktır. Kiriş hızının ortalama bir v_0 hızı etrafında, εv_1 genliğinde ve Ω frekansı ile değişen biçimde olduğunu varsayalım.

$$v(t)=v_0+\varepsilon v_1\sin\Omega t \qquad (3.3)$$

ε hız değişiminin küçüklüğünü ifade etmek için kullanılmış bir katsayıdır. Hız fonksiyonu denklem (3.2)' ye yerleştirilirse hareket denklemi şu şekli alır.

$$\begin{aligned}&\ddot{w}_{m+1}+2\dot{w}'_{m+1}v_0+2\varepsilon\,\dot{w}'_{m+1}v_1\sin\Omega t+\varepsilon\,w'_{m+1}v_1\Omega\cos\Omega t+\bar{v}_f^2\,w_{m+1}{}^{iv}+\bar{\mu}(\dot{w}_{m+1}+v\,w'_{m+1})\\&+\left(v_0^2+\varepsilon^2v_1^2\sin^2\Omega t+2\varepsilon\,v_0v_1\sin\Omega t-1\right)w''_{m+1}=\frac{1}{2}v_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}w'_{r+1}{}^2dx\right)w''_{m+1}\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Ele alınan bütün mesnetlerin basit mesnet olduğu kabul edilecektir. Bu durumda sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$w_1(0,t)=0,\quad w''_1(0,t)=0,\quad w_{n+1}(1,t)=0,\quad w''_{n+1}(1,t)=0 \qquad (3.5)$$

$$w_p(\eta_p,t)=0,\; w_{p+1}(\eta_p,t)=0,\; w'_p(\eta_p,t)=w'_{p+1}(\eta_p,t),\quad w''_p(\eta_p,t)=w''_{p+1}(\eta_p,t) \tag{3.6}$$

p=1, 2,…n

Nonlineer etkilerle ortaya çıkan boyuna direngenliğin (v_b) yüksek mertebe ortaya çıkabilmesi için,

$$w_{m+1}=\sqrt{\varepsilon}\,y_{m+1} \tag{3.7}$$

dönüşümünü boyutsuz hareket denklemleri ile sınır şartlarına uygularsak hareket denklemimiz ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir. Bu kabul ile titreşim genliklerinin $\sqrt{\varepsilon}$ mertebesini aşmadığı kabul edilmiştir. Elde edilecek olan çözümler küçük titreşim genlikleri için geçerli olacaktır.

$$\begin{aligned}&\ddot{y}_{m+1}+2\dot{y}'_{m+1}v_0+2\varepsilon\,\dot{y}'_{m+1}v_1\sin\Omega t+\varepsilon\,y'_{m+1}v_1\Omega\cos\Omega t+\bar{v}_f^{2}\,y^{iv}_{m+1}+\varepsilon\bar{\mu}(\dot{y}_{m+1}+v_0\,y'_{m+1})\\&+\left(v_0^2+\varepsilon^2v_1^2\sin^2\Omega t+2\varepsilon\,v_0v_1\sin\Omega t-1\right)y''_{m+1}=\frac{1}{2}v_b^2\,\varepsilon\,y''_{m+1}\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}y'^{\,2}_{r+1}dx\right)y''_{m+1}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sınır şartları ise şu şekildedir.

$$y_1(0,t)=0,\quad y''_1(0,t)=0,\qquad y_{n+1}(1,t)=0,\quad y''_{n+1}(1,t)=0 \tag{3.9}$$

$$y_p(\eta_p,t)=0,\quad y_{p+1}(\eta_p,t)=0 \tag{3.10}$$

$$y'_p(\eta_{p+1},t)=y'_{p+1}(\eta_p,t),\quad y''_p(\eta_p,t)=y''_{p+1}(\eta_p,t)) \tag{3.11}$$

Kiriş özelliğinin baskın olması için kiriş katsayısı bir mertebesinde alınmıştır.

$$\bar{v}_f^2=v_f^2 \tag{3.12}$$

Sönümün nonlineer terimler ile aynı mertebede ortaya çıkabilmesi sönüm ifadesi aşağıdaki gibi mertebelendirilmiştir.

$$\bar{\mu}=\varepsilon\mu \tag{3.13}$$

Yer değiştirme fonksiyonu için aşağıdaki gibi seri açılımı yazabiliriz.

$$y_{m+1}(x,t;\varepsilon)=y_{(m+1)1}(x,T_0,T_1)+\varepsilon y_{(m+1)2}(x,T_0,T_1)+\ldots \qquad (3.14)$$

Burada $y_{(m+1)1}$ ilk mertebedeki titreşim fonksiyonunu ve $y_{(m+1)2}$ ise ε mertebesindeki fonksiyonu ifade etmektedir. T_0=t ve T_1=εt sırasıyla hızlı ve yavaş zaman ölçekleridir. Zamana göre türevler ise,

$$\frac{d}{dt}=D_0+\varepsilon D_1+\ldots,\quad \frac{d^2}{dt^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0 D_1+\ldots \qquad (3.15)$$

şeklindedir. ($D_i=\partial/\partial T_i$). Denklem (3.12–3.15)' i denklem (3.8)' e yerleştirirsek şu denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&\left(D_0^2+2\varepsilon D_0D_1\right)\left(y_{(m+1)1}+\varepsilon y_{(m+1)2}\right)+2\left(D_0+\varepsilon D_1\right)\left(y'_{(m+1)1}+\varepsilon y'_{(m+1)2}\right)v_0\\
&+2\varepsilon\left(D_0+\varepsilon D_1\right)\left(y'_{(m+1)1}+\varepsilon y'_{(m+1)2}\right)v_1\sin\Omega t+\varepsilon\left(y'_{(m+1)1}+\varepsilon y'_{(m+1)2}\right)v_1\Omega\cos\Omega t\\
&+v_f^2\left(y^{iv}_{(m+1)1}+\varepsilon y^{iv}_{(m+1)2}\right)+\left(v_0^2+\varepsilon^2v_1^2\sin^2\Omega t+2\varepsilon v_0v_1\sin\Omega t-1\right)\left(y''_{(m+1)1}+\varepsilon y''_{(m+1)2}\right)\\
&+\varepsilon\mu\left(D_0+\varepsilon D_1\right)y_{(m+1)1}+\varepsilon\mu v_0y'_{(m+1)1}=\frac{1}{2}v_b^2\,\varepsilon\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\left(y'_{(m+1)1}+\varepsilon y'_{(m+1)2}\right)^2dx\right)\left(y''_{(m+1)1}+\varepsilon y''_{(m+1)2}\right)
\end{aligned} \qquad (3.16)$$

$$m=0,1,2\ldots n,\qquad \eta_0=0,\quad \eta_{n+1}=1$$

Denklemlerde mertebe düzenlemesi yapıp ve yüksek mertebe terimleri ihmal edip, 1 ve ε mertebesine göre denklemleri ayrıştıralım.

1 mertebesi:

$$D_0^2y_{(m+1)1}+2v_0D_0y'_{(m+1)1}+\left(v_0^2-1\right)y''_{(m+1)1}+v_f^2y^{iv}_{(m+1)1}=0 \qquad (3.17)$$

ε mertebesi:

$$\begin{aligned}
&D_0^2y_{(m+1)2}+2v_0D_0y'_{(m+1)2}+v_f^2y^{iv}_{(m+1)2}+\left(v_0^2-1\right)y''_{(m+1)2}=-2D_0D_1y_{(m+1)1}-2v_0D_1y'_{(m+1)1}\\
&-2v_1\sin\Omega tD_0y'_{(m+1)1}-2y''_{(m+1)1}v_0v_1\sin\Omega t-y'_{(m+1)1}v_1\Omega\cos\Omega t-\mu D_0y_{(m+1)1}-\mu v_0y'_{(m+1)1}\\
&+\frac{1}{2}v_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}y'^2_{(m+1)1}dx\right)y''_{(m+1)1}
\end{aligned} \qquad (3.18)$$

3.1. Lineer Problem

1 mertebesindeki denklemler ve sınır şartları lineer problemi oluşturmaktadır. Bu problemin çözümü ile tabii frekanslar elde edilecektir. 1 mertebesindeki hareket denklemi (3.17) için çözüm fonksiyonunu aşağıdaki gibi alalım.

$$y_{(m+1)1}(x,T_0,T_1;\varepsilon)=A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_{(m+1)}(x)+\overline{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}\overline{Y}_{(m+1)}(x) \tag{3.19}$$

Denklem (3.19) çözüm fonksiyonunu, denklem (3.17)' ye yerleştirirsek mekana bağlı hareket denklemi şu şekilde elde edilir.

$$v_f^2Y_{m+1}^{iv}+\left(v_0^2-1\right)Y''_{m+1}+2iv_0\omega Y'_{m+1}-\omega^2Y_{m+1}=0 \tag{3.20}$$

Sınır şartları ise şu şekildedir.

$$Y_1(0)=0,\qquad Y_{n+1}(1)=0,\qquad Y''_1(0)=0,\qquad Y''_{n+1}(1)=0 \tag{3.21}$$

$$Y_p(\eta_p)=0,\quad Y_{p+1}(\eta_p)=0,\quad Y'_p(\eta_p)=Y'_{p+1}(\eta_p),\quad Y''_p(\eta_p)=Y''_{p+1}(\eta_p) \tag{3.22}$$

Denklem (3.20) için denklem (3.23)' ü çözüm için önerilebiliriz.

$$Y_{m+1}(x)=c_{4m+1}e^{i\beta_{4m+1}x}+c_{4m+2}e^{i\beta_{4m+2}x}+c_{4m+3}e^{i\beta_{4m+3}x}+c_{4m+4}e^{i\beta_{4m+4}x} \tag{3.23}$$

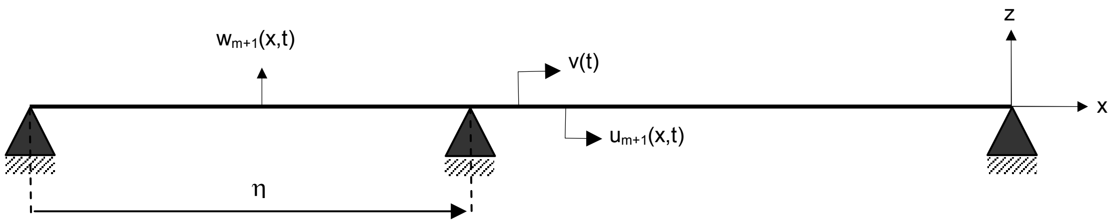
Bu fonksiyonu denklem (3.20)' ye yerleştirirsek saçılma denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left[v_f^2\beta_{4m+1}^4+\left(1-v_0^2\right)\beta_{4m+1}^2-2\omega v_0\beta_{4m+1}-\omega^2\right]c_{4m+1}e^{i\beta_{4m+1}x}+\\
&\left[v_f^2\beta_{4m+2}^4+\left(1-v_0^2\right)\beta_{4m+2}^2-2\omega v_0\beta_{4m+2}-\omega^2\right]c_{4m+2}e^{i\beta_{4m+2}x}+\\
&\left[v_f^2\beta_{4m+3}^4+\left(1-v_0^2\right)\beta_{4m+3}^2-2\omega v_0\beta_{4m+3}-\omega^2\right]c_{4m+3}e^{i\beta_{4m+3}x}+\\
&\left[v_f^2\beta_{4m+4}^4+\left(1-v_0^2\right)\beta_{4m+4}^2-2\omega v_0\beta_{4m+4}-\omega^2\right]c_{4m+4}e^{i\beta_{4m+4}x}=0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$v_f^2\beta_{4m+1}^4+\left(1-v_0^2\right)\beta_{4m+1}^2-2\omega v_0\beta_{4m+1}-\omega^2=0 \tag{3.25}$$

(m=0,1,2….n)

3.1.1. Üç Mesnetli Durum İçin Analitik Çözümler



Şekil 3.1 Eksenel hareketli üç mesnetli kiriş.

1 ve ε mertebeleri için elde ettiğimiz genelleştirilmiş denklemleri ortada tek mesnet olma durumuna göre düzenlenirse, 1 ve ε mertebesindeki denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

1 mertebesi:

I. Bölge (0~η) : $$D_0^2 y_{11} + 2v_0 D_0 y'_{11} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{11} + v_f^2 y_{11}^{iv} = 0 \tag{3.26}$$

II. Bölge (η~1) : $$D_0^2 y_{21} + 2v_0 D_0 y'_{21} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{21} + v_f^2 y_{21}^{iv} = 0 \tag{3.27}$$

ε mertebesi:

I. Bölge (0~η) :

$$\begin{aligned} D_0^2 y_{12} + 2v_0 D_0 y'_{12} + v_f^2 y_{12}^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{12} &= -2D_0 D_1 y_{11} - 2v_0 D_1 y'_{11} - 2v_1 \sin\Omega t D_0 y'_{11} \\ &- 2y''_{11} v_0 v_1 \sin\Omega t - y'_{11} v_1 \Omega \cos\Omega t + \frac{1}{2} v_b^2 \left(\int_0^\eta y'^2_{11} dx + \int_\eta^1 y'^2_{21} dx \right) y''_{11} \end{aligned} \tag{3.28}$$

II. Bölge (η~1) :

$$\begin{aligned} D_0^2 y_{22} + 2v_0 D_0 y'_{22} + v_f^2 y_{22}^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{22} &= -2D_0 D_1 y_{21} - 2v_0 D_1 y'_{21} - 2v_1 \sin\Omega t D_0 y'_{21} \\ &- 2y''_{21} v_0 v_1 \sin\Omega t - y'_{21} v_1 \Omega \cos\Omega t + \frac{1}{2} v_b^2 \left(\int_0^\eta y'^2_{11} dx + \int_\eta^1 y'^2_{21} dx \right) y''_{21} \end{aligned} \tag{3.29}$$

1 mertebesindeki denklemlerin çözümü lineer problemin çözümünü verecektir. Denklem (3.26-3.27) çözümünden lineer tabii frekans denklemleri elde edilecektir. Denklem (3.26–3.27) için çözüm fonksiyonlarını aşağıdaki gibi alabiliriz.

$$y_{11}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_1(x) + \overline{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \overline{Y}_1(x) \tag{3.30}$$

$$y_{21}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_2(x) + \overline{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \overline{Y}_2(x) \tag{3.31}$$

Bu durumda her iki bölge için mekana bağlı denklemler şu şekilde elde edilir.

I. Bölge (0~η) : $$v_f^2 Y_1^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right) Y_1'' + 2iv_0 \omega Y_1' - \omega^2 Y_1 = 0 \tag{3.32}$$

II. Bölge (η~1) : $$v_f^2 Y_2^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right) Y_2'' + 2iv_0 \omega Y_2' - \omega^2 Y_2 = 0 \tag{3.33}$$

Sınır şartları ise şu şekildedir.

$$Y_1(0) = 0, \quad Y_2(1) = 0, \quad Y_1''(0) = 0, \quad Y_2''(1) = 0 \tag{3.34}$$

$$Y_1(\eta) = 0, \quad Y_2(\eta) = 0, \quad Y_1'(\eta) = Y_2'(\eta), \quad Y_1''(\eta) = Y_2''(\eta) \tag{3.35}$$

Denklem (3.32-3.33) için şu fonksiyonları çözüm olarak ele alalım.

$$Y_1(x) = c_1 e^{i\beta_1 x} + c_2 e^{i\beta_2 x} + c_3 e^{i\beta_3 x} + c_4 e^{i\beta_4 x} \tag{3.36}$$

$$Y_2(x) = c_5 e^{i\beta_5 x} + c_6 e^{i\beta_6 x} + c_7 e^{i\beta_7 x} + c_8 e^{i\beta_8 x} \tag{3.37}$$

Bu denklemi birinci ve ikinci bölgedeki denklemlere yani (3.32–3.33)' e ayrı ayrı yerleştirirsek,

$$\begin{aligned}
&\left[v_f^2 \beta_1^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_1^2 - 2\omega \ v_0 \beta_1 - \omega^2\right] c_1 e^{i\beta_1 x} + \\
&\left[v_f^2 \beta_2^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_2^2 - 2\omega \ v_0 \beta_2 - \omega^2\right] c_2 e^{i\beta_2 x} + \\
&\left[v_f^2 \beta_3^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_3^2 - 2\omega \ v_0 \beta_3 - \omega^2\right] c_3 e^{i\beta_3 x} + \\
&\left[v_f^2 \beta_4^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_4^2 - 2\omega \ v_0 \beta_4 - \omega^2\right] c_4 e^{i\beta_4 x} = 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
&\left[v_f^2 \beta_5^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_5^2 - 2\omega \ v_0 \beta_5 - \omega^2\right] c_5 e^{i\beta_5 x} + \\
&\left[v_f^2 \beta_6^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_6^2 - 2\omega \ v_0 \beta_6 - \omega^2\right] c_6 e^{i\beta_6 x} + \\
&\left[v_f^2 \beta_7^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_7^2 - 2\omega \ v_0 \beta_7 - \omega^2\right] c_7 e^{i\beta_7 x} + \\
&\left[v_f^2 \beta_8^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_8^2 - 2\omega \ v_0 \beta_8 - \omega^2\right] c_8 e^{i\beta_8 x} = 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

elde ederiz. Bu denklem ise aşağıdaki saçılma denklemini verir.

$$v_f^2 \beta^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta^2 - 2\omega \ v_0 \beta - \omega^2 = 0 \tag{3.40}$$

Denklem (3.38) ve (3.39) benzer formda olduğu için $\beta_1 = \beta_5$, $\beta_2 = \beta_6$, $\beta_3 = \beta_7$, $\beta_4 = \beta_8$ yazılabilir.

Saçılma denkleminde elde edilen β değerleri denklem (3.36–3.37) önerilen çözümde yerine konulup bu denklemlere sınır şartları uygulanırsa elde edilen 8 denklem matris formunda şu şekilde gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\beta_5} & e^{i\beta_6} & e^{i\beta_7} & e^{i\beta_8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5^2 e^{i\beta_5} & \beta_6^2 e^{i\beta_5} & \beta_7^2 e^{i\beta_5} & \beta_8^2 e^{i\beta_5} \\ e^{i\beta_1\eta} & e^{i\beta_2\eta} & e^{i\beta_3\eta} & e^{i\beta_4\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\beta_5\eta} & e^{i\beta_6\eta} & e^{i\beta_7\eta} & e^{i\beta_8\eta} \\ i\beta_1 e^{i\beta_1} & i\beta_2 e^{i\beta_2} & i\beta_3 e^{i\beta_3} & i\beta_4 e^{i\beta_4} & -i\beta_5 e^{i\beta_5} & -i\beta_6 e^{i\beta_6} & -i\beta_7 e^{i\beta_7} & -i\beta_8 e^{i\beta_8} \\ -\beta_1^2 e^{i\beta_1} & -\beta_2^2 e^{i\beta_2} & -\beta_3^2 e^{i\beta_3} & -\beta_4^2 e^{i\beta_4} & \beta_5^2 e^{i\beta_5} & \beta_6^2 e^{i\beta_6} & \beta_7^2 e^{i\beta_7} & \beta_8^2 e^{i\beta_8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Denklemlerin basit olmayan çözümleri için elde edilen katsayılar matrisi determinantının sıfır olması gerekir. Bu şekilde, ele alınan durum için tabii frekans denklemi elde edilir. Frekans denkleminin değişkenler cinsinde elde edilmesi zordur ve elde edilen denklem karmaşık ve uzundur. Bu nedenle ele alınan parametrelerin nümerik değerleri ile tabii frekansların hesaplanması daha uygundur. Denklem (3.40–3.41)’ in çözümü için Maple ve Mathematica paket programlarından yararlanılmıştır. Her iki program ile elde edilen çözümler karşılaştırılarak çapraz kontrol yapılmıştır. Grafiklerin çiziminde Matlab paket programı kullanılmıştır.

Üç mesnetli duruma ait Şekil 3.2–3.4’ de ortadaki mesnedin η=0.1–0.3–0.5 konumları için v_f‘ nin farklı durumlarının eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.5–3.7’ mesnedin η=0.1–0.3–0.5 konumları için v_f‘ nin farklı durumlarının eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.8–3.10’ da mesnedin η=0.1–0.3–0.5 konumları için v_f‘ nin farklı durumlarının eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi verilmiştir.

Üç mesnetli duruma ait Şekil 3.11–3.13’ de v_f=0.2–0.6–1 ve η’ nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.14–3.16’ da v_f=0.2–0.6–1 ve η’ nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.17–3.19’ da v_f=0.2–0.6–1 ve η’ nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi verilmiştir.

Üç mesnetli duruma ait Şekil 3.20–3.24’ de v_0=0.2 ve η=0.1–0.2–0.3–0.4–0.5 konumları için, ilk üç mod yapısının değişim grafikleri verilmiştir.

Şekiller göz önüne alındığında ilk üç mod genel olarak söyleyebileceğimiz şu sonuçlar elde edilmiştir.

İlk üç mod ait Şekil 3.2–3.13 incelendiğinde aynı mesnet konumları ve aynı kirişlik katsayısı için, v_0 değerinin artmasıyla frekans değerleri azalmaktadır. Belli bir v_0 değerinden sonra ani olarak düşmektedir.

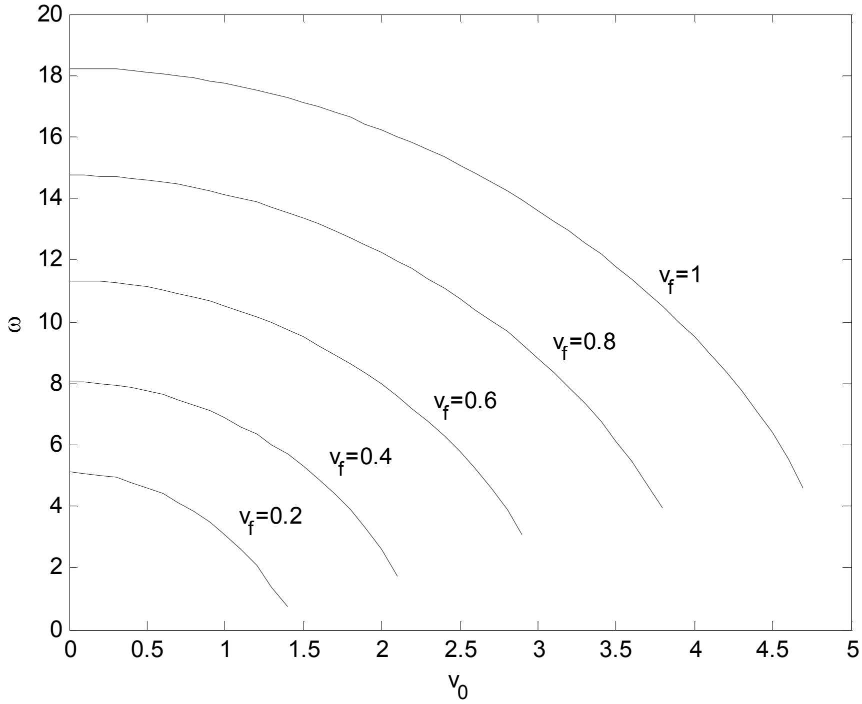
İlk üç mod ait Şekil 3.2–3.10 incelendiğinde aynı mesnet konumu için, kirişlik özelliğini gösteren v_f katsayısı artması ile frekans değerleri artmaktadır.

Aynı v_f değerleri için mesnedin konumunun soldan sağa doğru yer değiştirildiğinde, tabii frekans değerleri artmıştır.

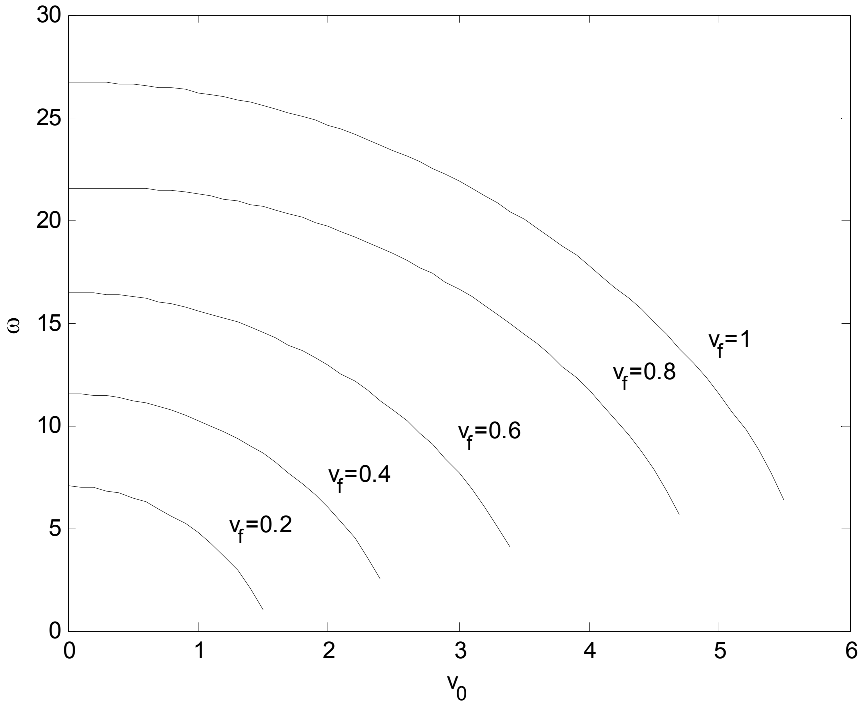
Eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi olan Şekil 3.11–3.13 incelendiğinde mesnet konumunun soldan sağa doğru hareket ettirilmesi ile frekans değerleri artmaktadır. Herhangi bir v_0 değerinde frekans grafiklerinde çakışma olmamıştır. Mod yapılarının değişimini gösteren Şekil 3.20–3.24' de birinci moda ait grafikler incelendiğinde mod yapılarında herhangi bir benzerlik gözlenmemiştir.

Eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi olan Şekil 3.14–3.16 incelendiğinde η=0.1 ile η=0.5, η=0.2 ile η=0.4 grafikleri belirli bir v_0 değerinde çakışmaktadır. Mod yapılarının değişimini gösteren Şekil 3.20–3.24' de ikinci moda ait grafikler incelendiğinde, η=0.1 ile η=0.5, η=0.2 ile η=0.4 grafikleri çakışmanın olduğu v_0 değerinde mod yapılarının benzer olduğu görülmüştür.

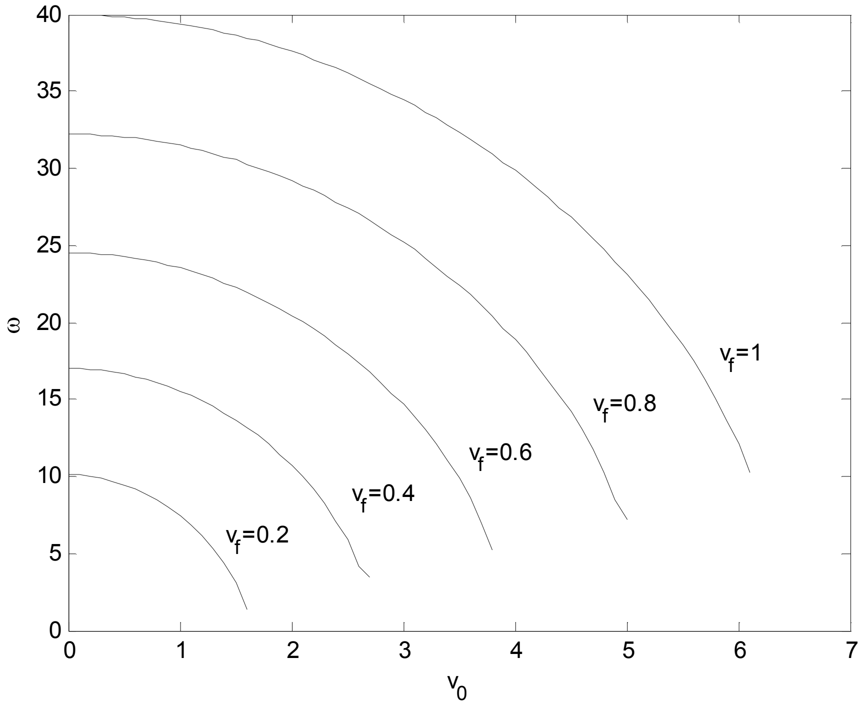
Eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi olan Şekil 3.17–3.19 incelendiğinde mesnet konumları η=0.1–η=0.3 ve η=0.4 ile mesnet konumları η=0.2–η=0.5 olan grafikler belirli bir v_0 değerinde çakışmaktadır. Mod yapılarının değişimini gösteren Şekil 3.20–3.24' de üçüncü moda ait grafikler incelendiğinde mesnet konumlar η=0.1–η=0.3 ve η=0.4 ile mesnet konumları η=0.2–η=0.5 olan grafiklerde çakışmanın olduğu yerdeki v_0 değerinde mod yapılarının benzer olduğu görülmüştür.



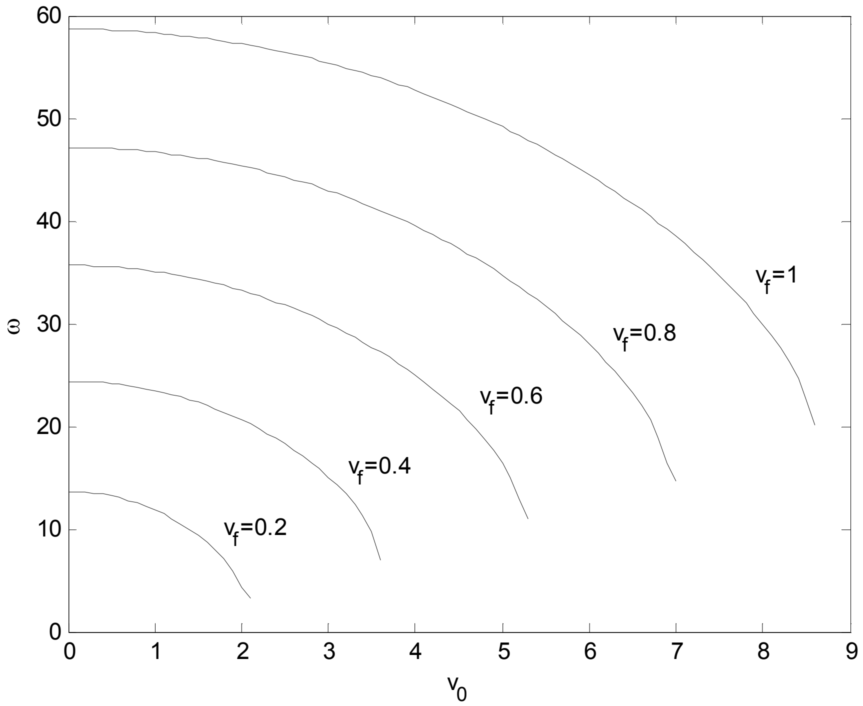
Şekil 3.2 Üç mesnetli durum η=0.1 ve v_f‘ nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



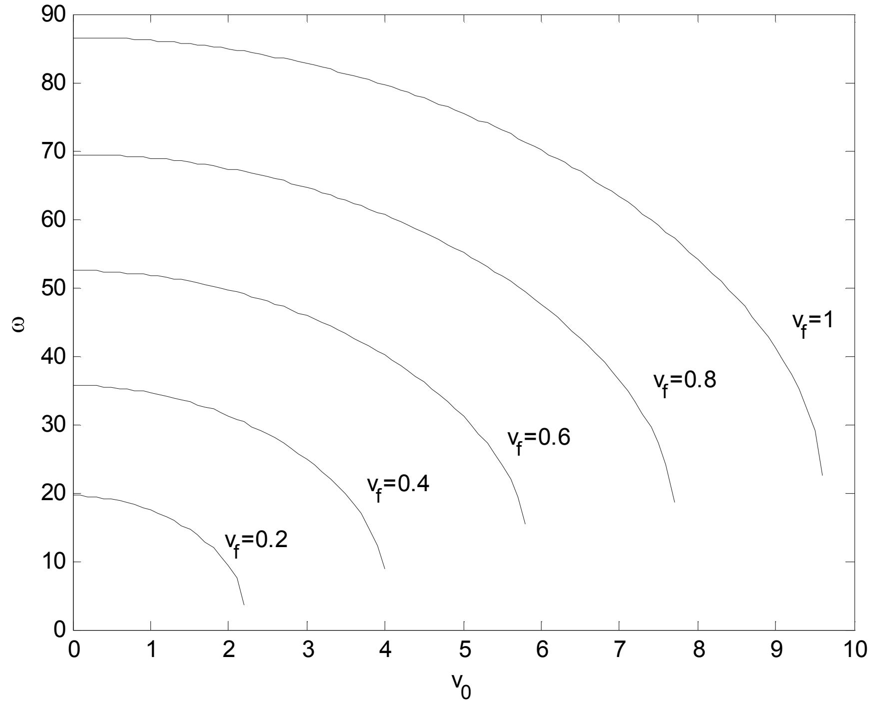
Şekil 3.3 Üç mesnetli durum η=0.3 ve v_f‘ nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



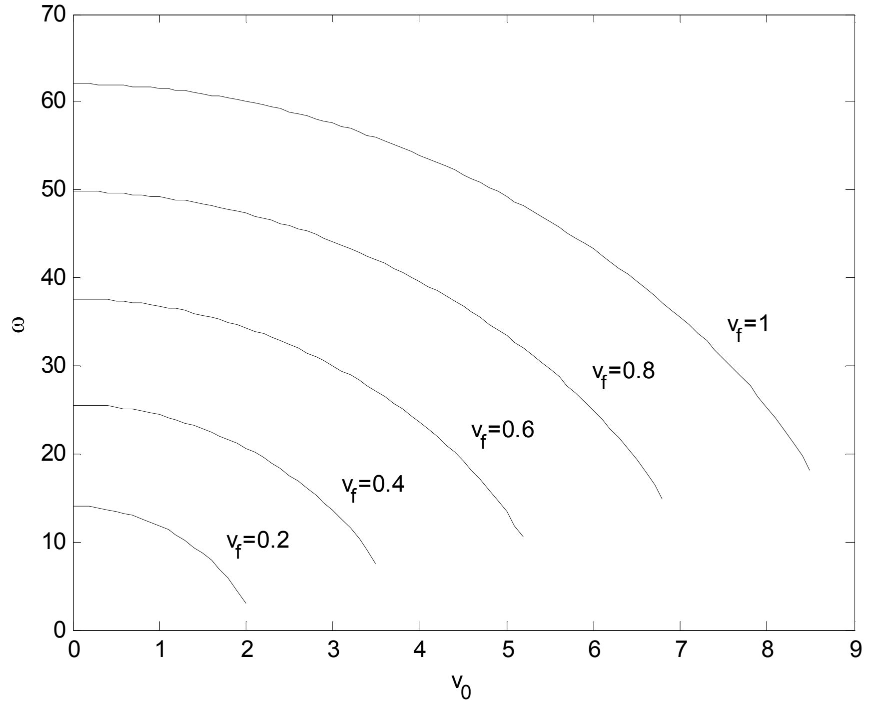
Şekil 3.4 Üç mesnetli durum η=0.5 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



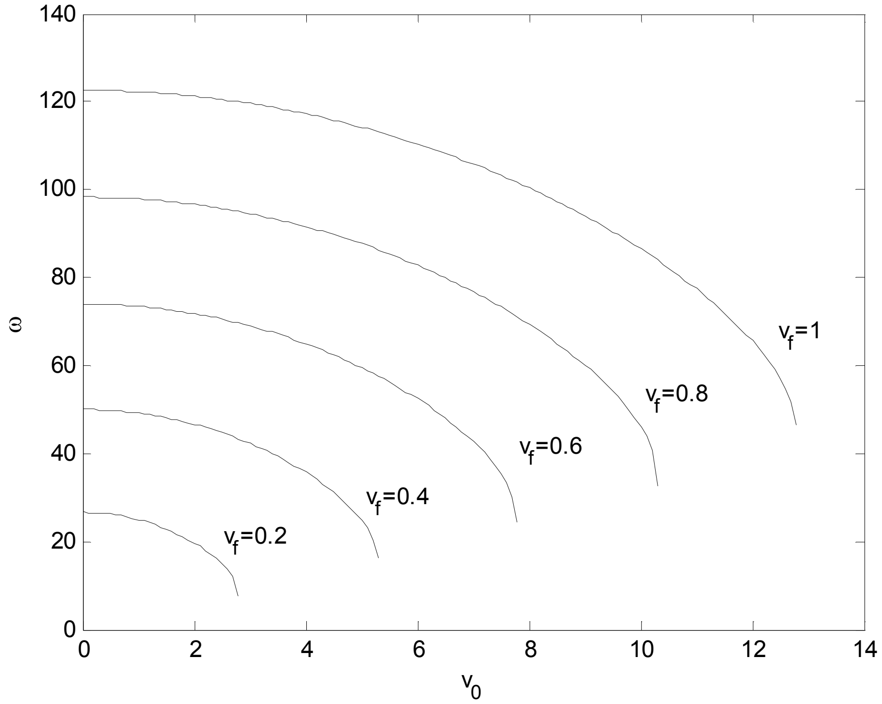
Şekil 3.5 Üç mesnetli durum η=0.1 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



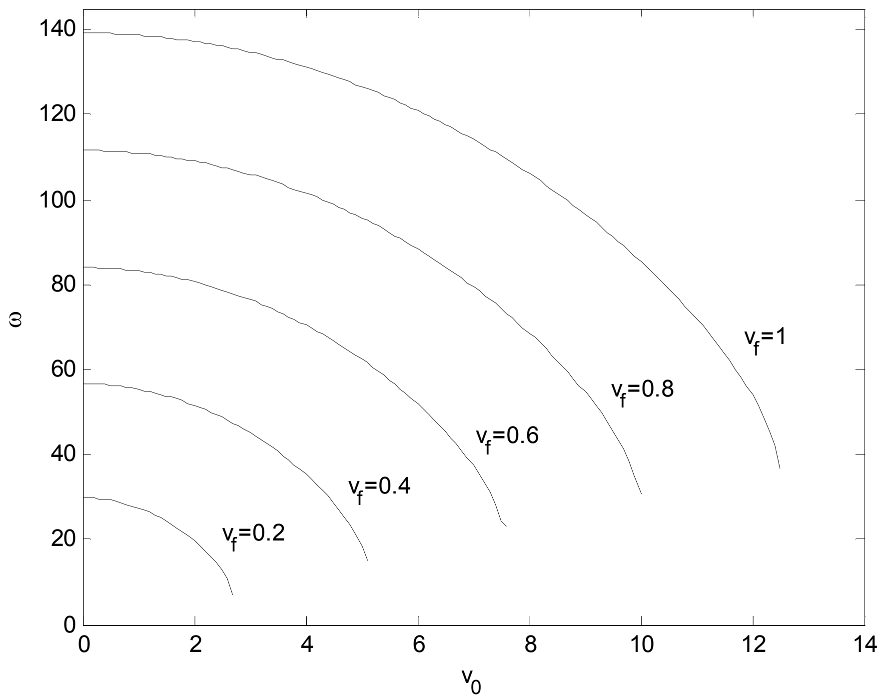
Şekil 3.6 Üç mesnetli durum η=0.3 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



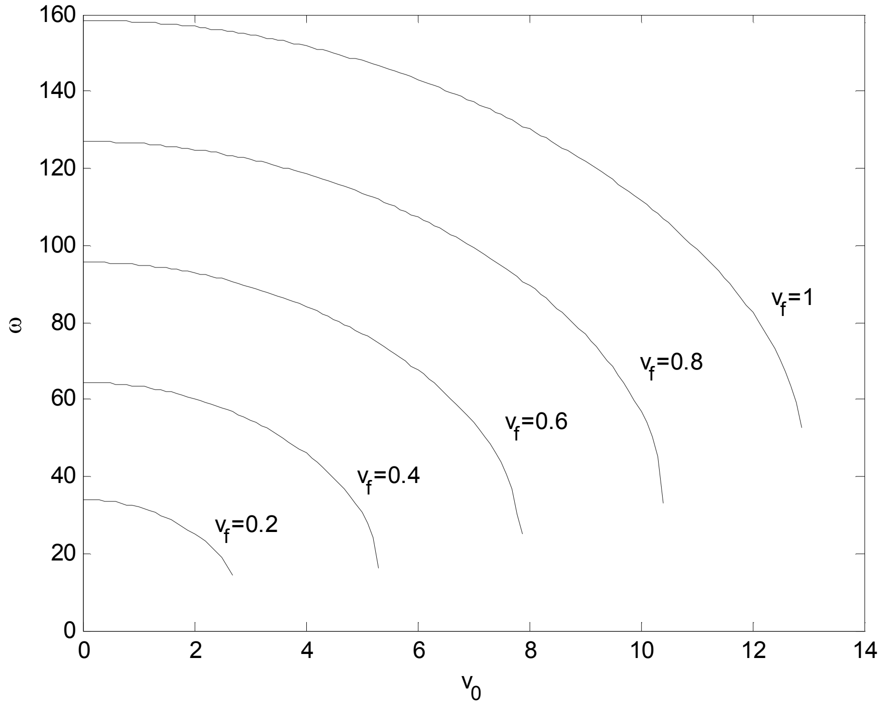
Şekil 3.7 Üç mesnetli durum η=0.5 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



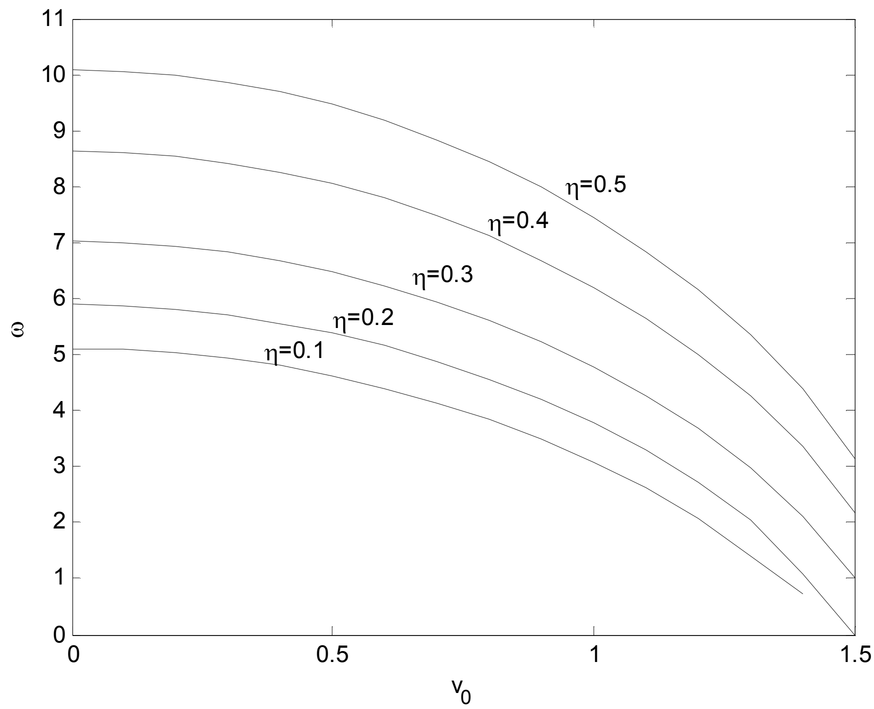
Şekil 3.8 Üç mesnetli durum η=0.1 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



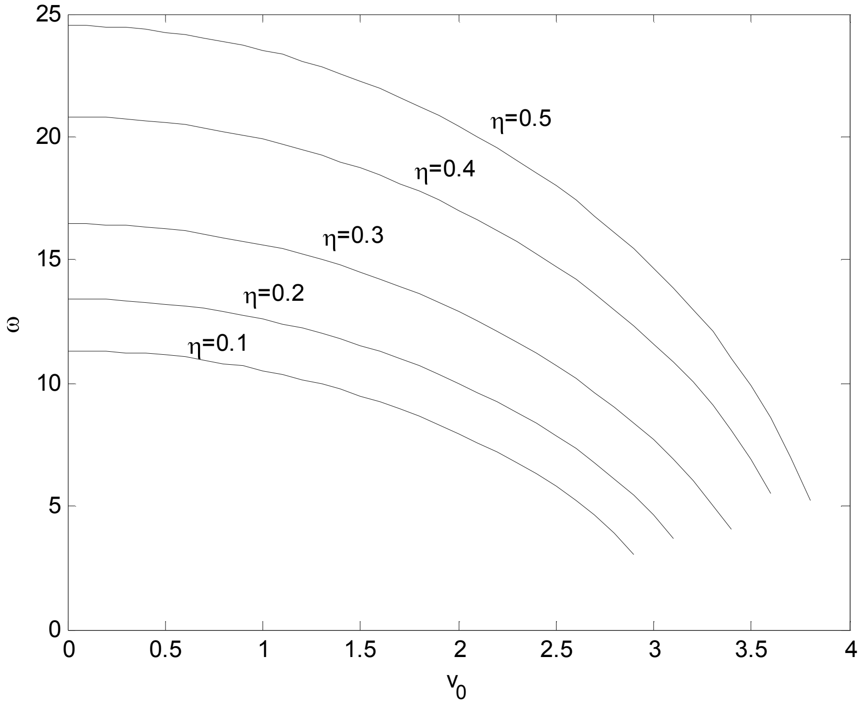
Şekil 3.9 Üç mesnetli durum η=0.3 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



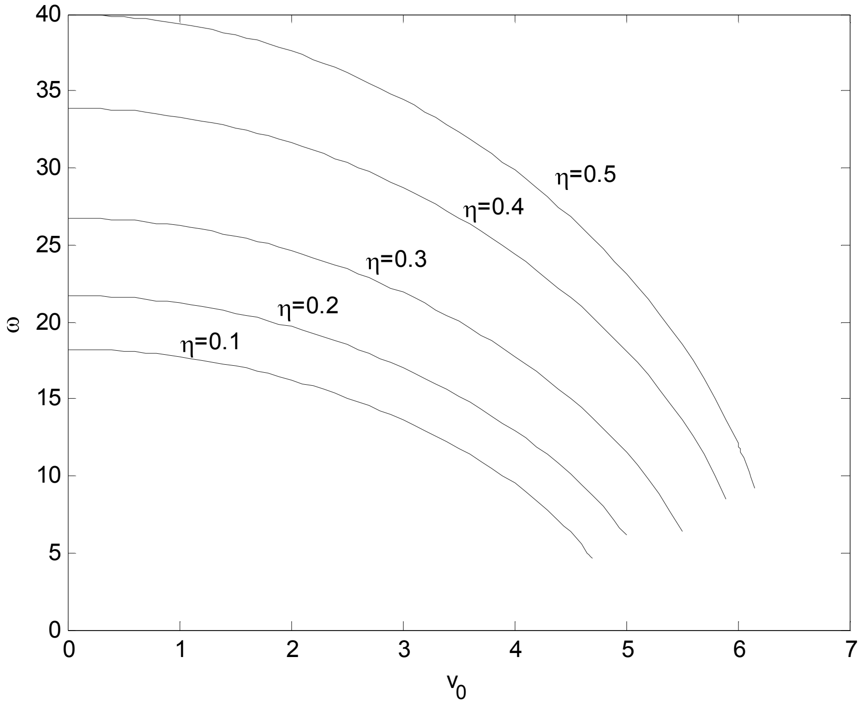
Şekil 3.10 Üç mesnetli durum η=0.5 ve v_f‘ nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



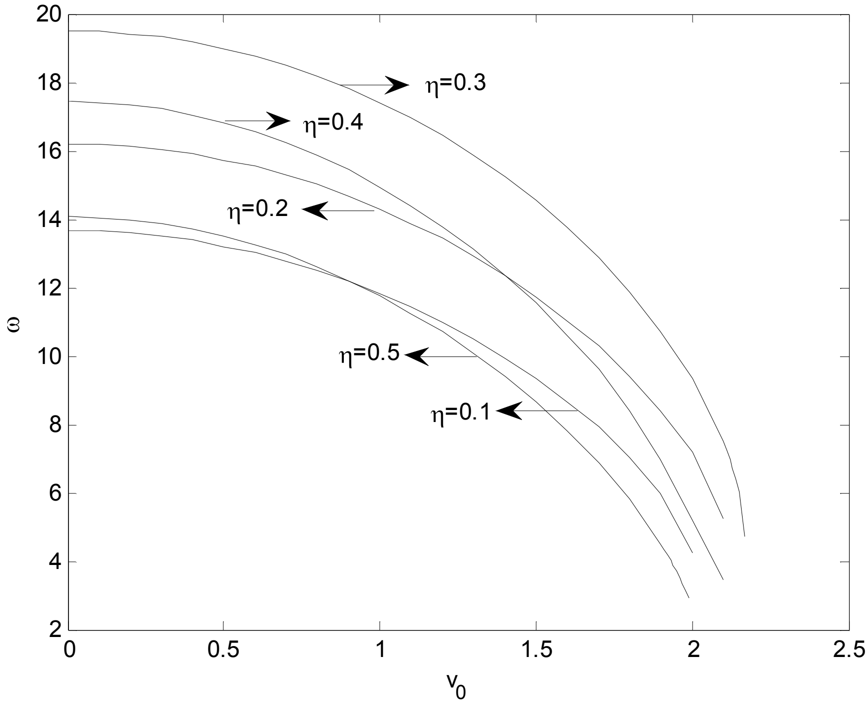
Şekil 3.11 Üç mesnetli durum v_f=0.2 ve η’ nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



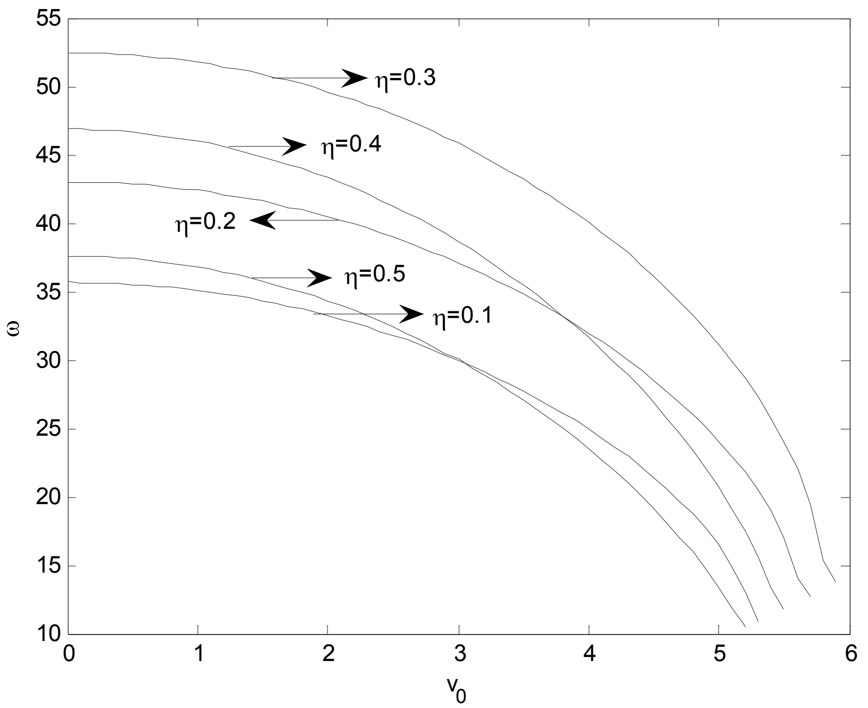
Şekil 3.12 Üç mesnetli durum v_f=0.6 ve η' nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



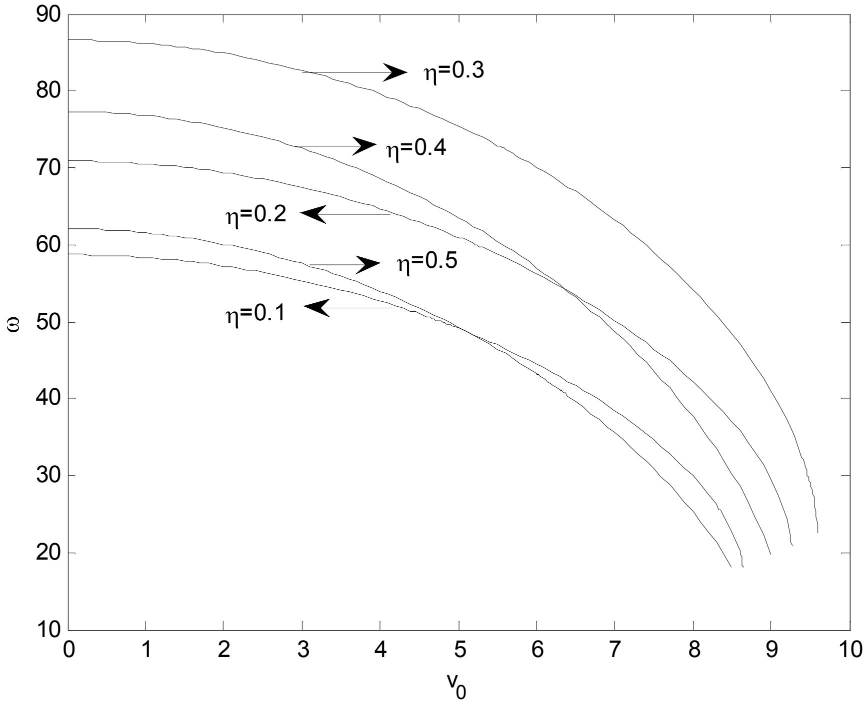
Şekil 3.13 Üç mesnetli durum v_f=1 ve η' nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



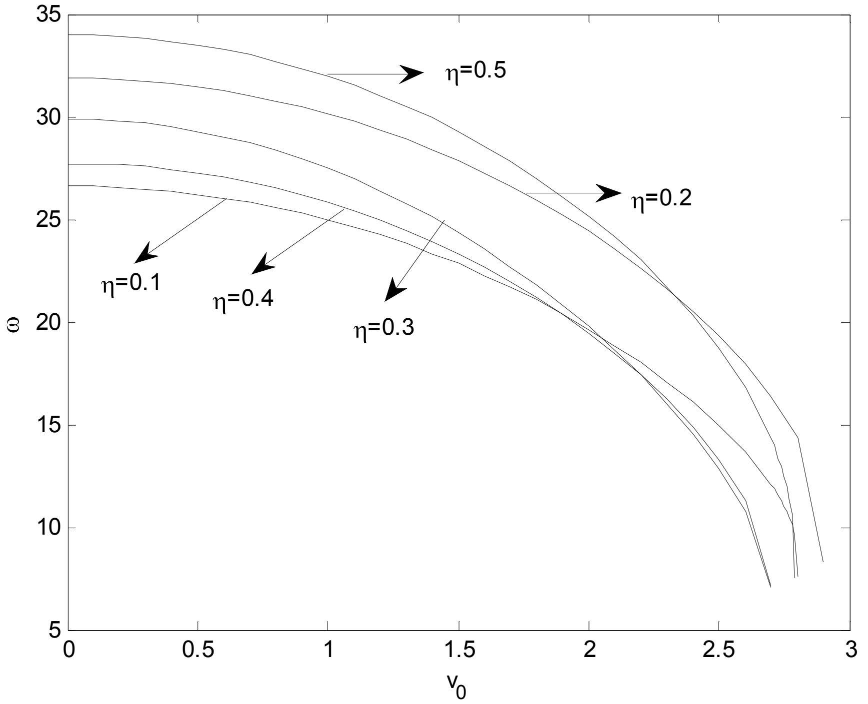
Şekil 3.14 Üç mesnetli durum v_f=0.2 ve η’ nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



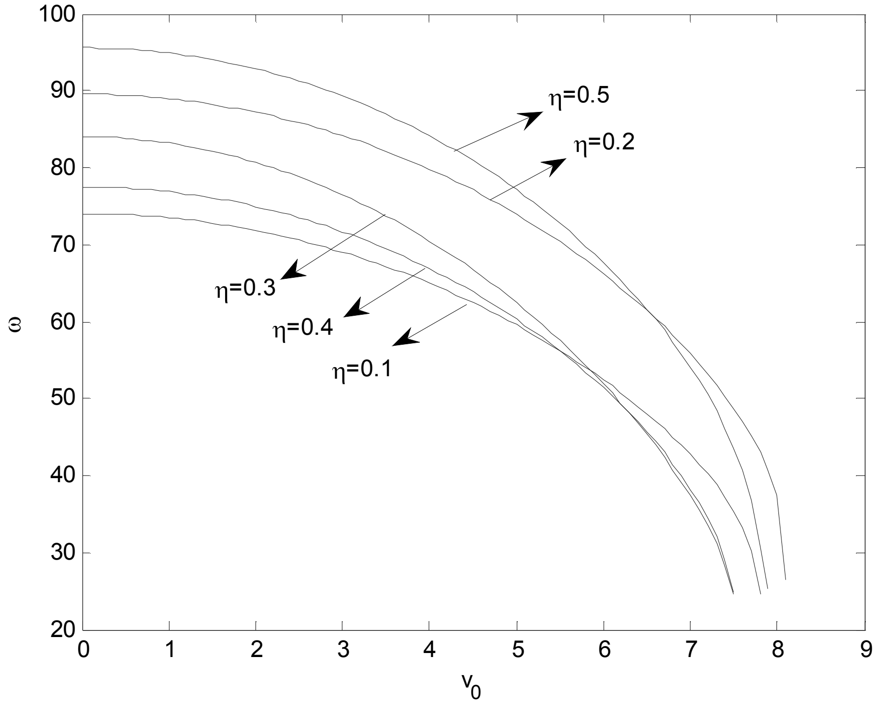
Şekil 3.15 Üç mesnetli durum v_f=0.6 ve η’ nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



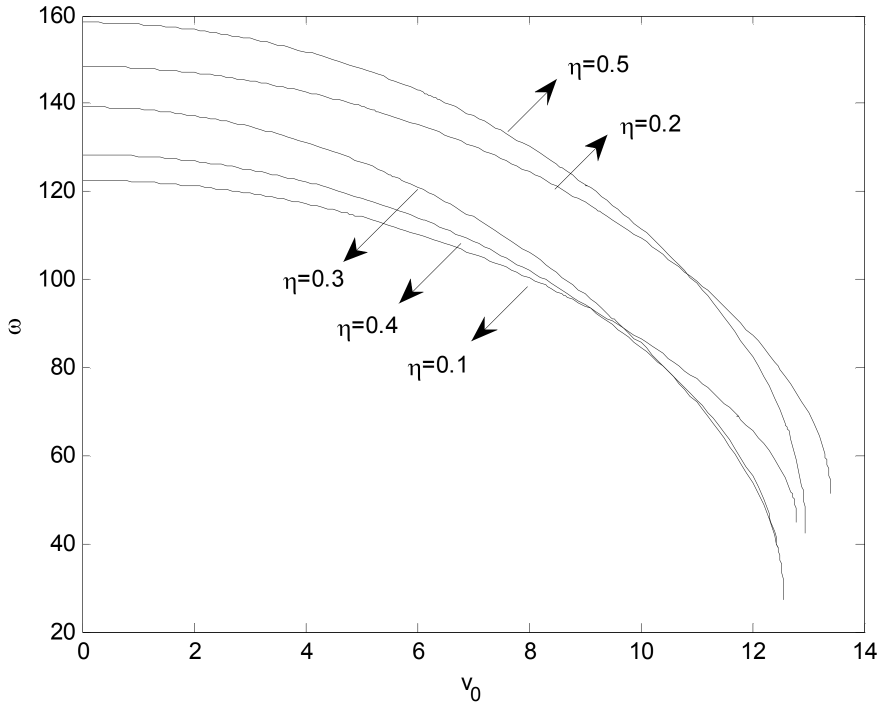
Şekil 3.16 Üç mesnetli durum v_f=1 ve η' nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



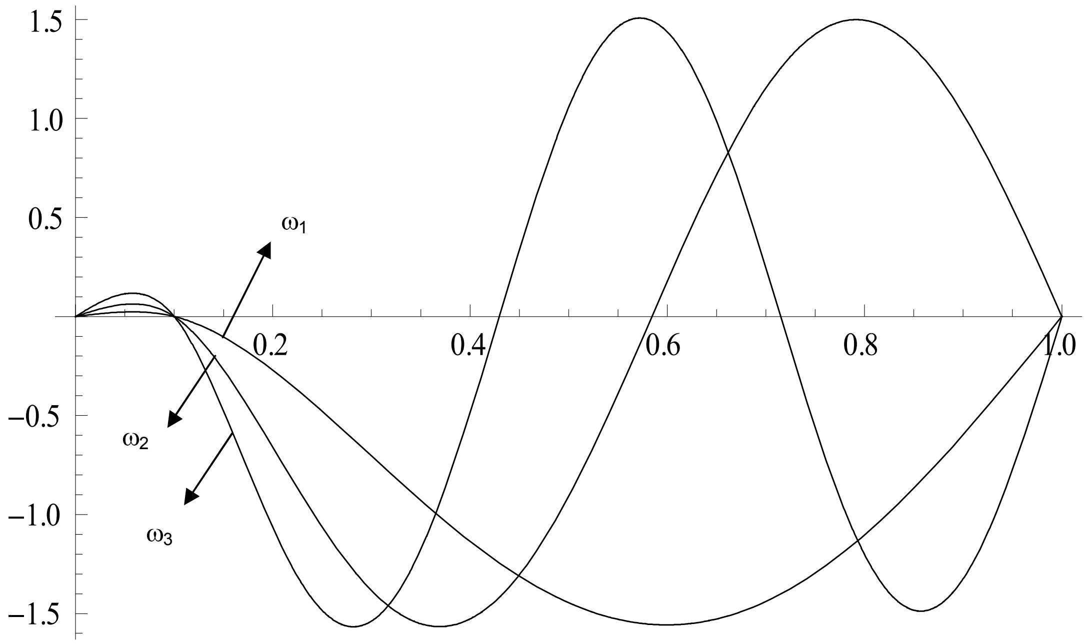
Şekil 3.17 Üç mesnetli durum v_f=0.2 ve η' nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



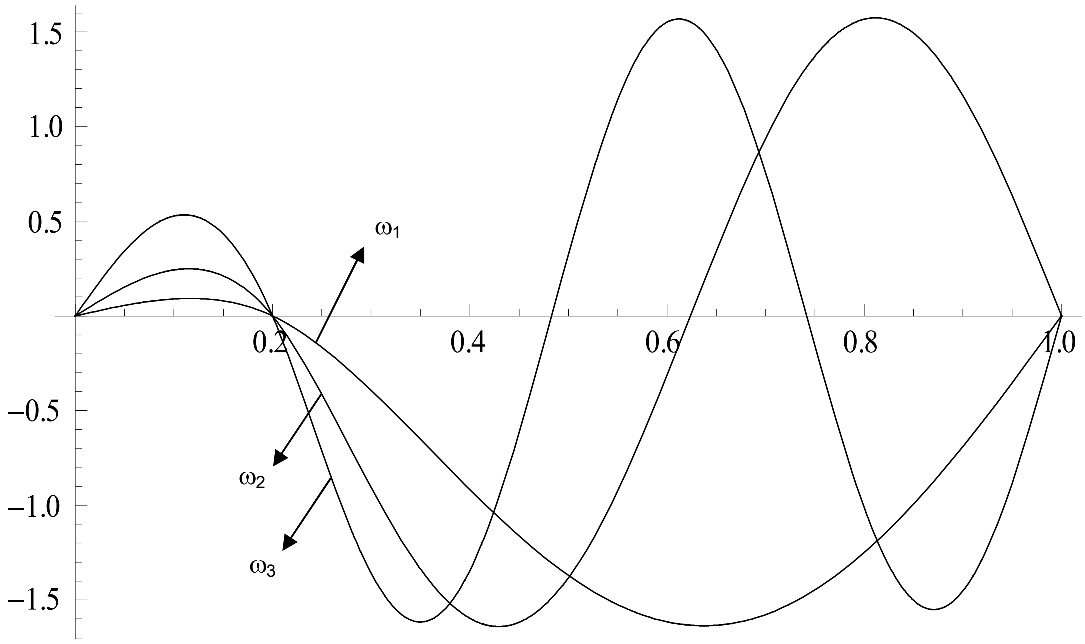
Şekil 3.18 Üç mesnetli durum v_f=0.6 ve η' nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



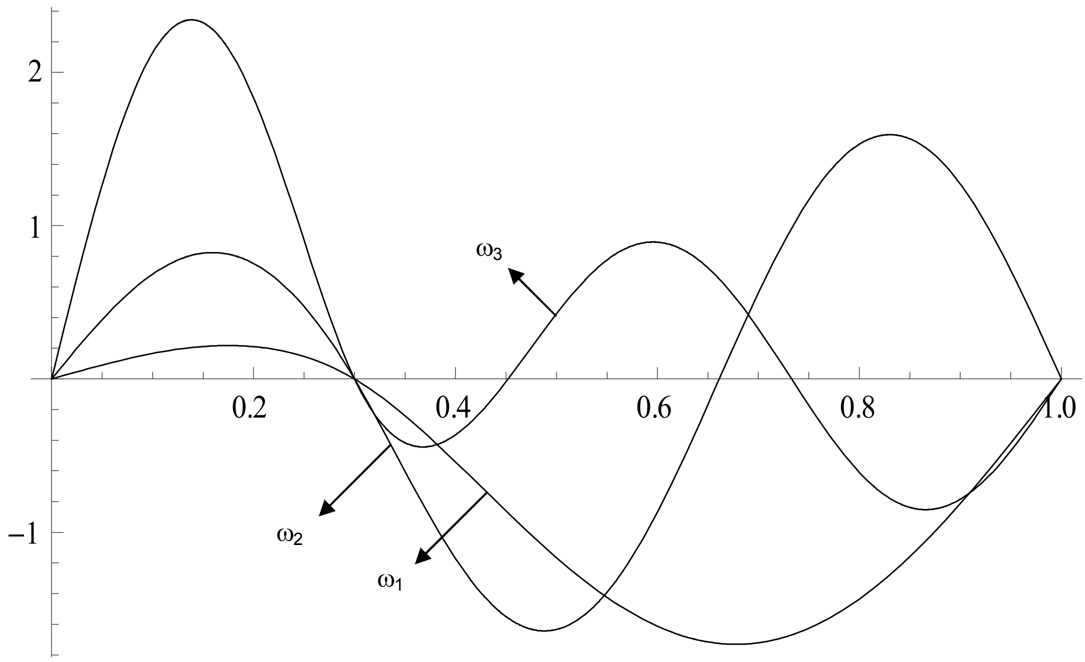
Şekil 3.19 Üç mesnetli durum v_f=1 ve η' nın farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



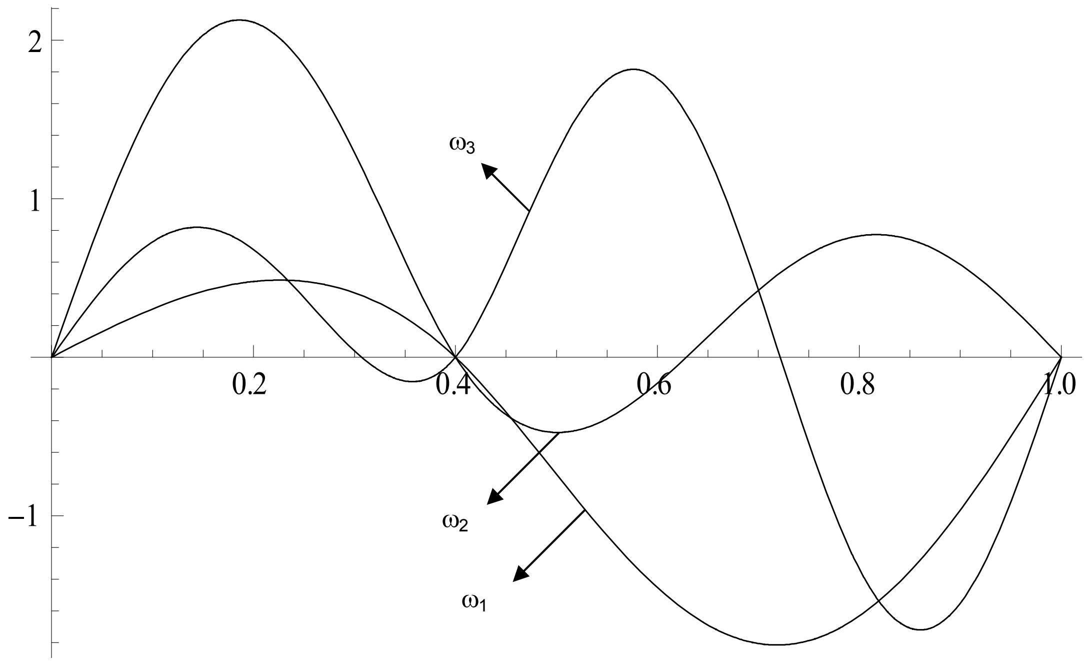
Şekil 3.20 Üç mesnetli duruma ait v_f=0.2 ve η=0.1 için ilk üç mod yapısı



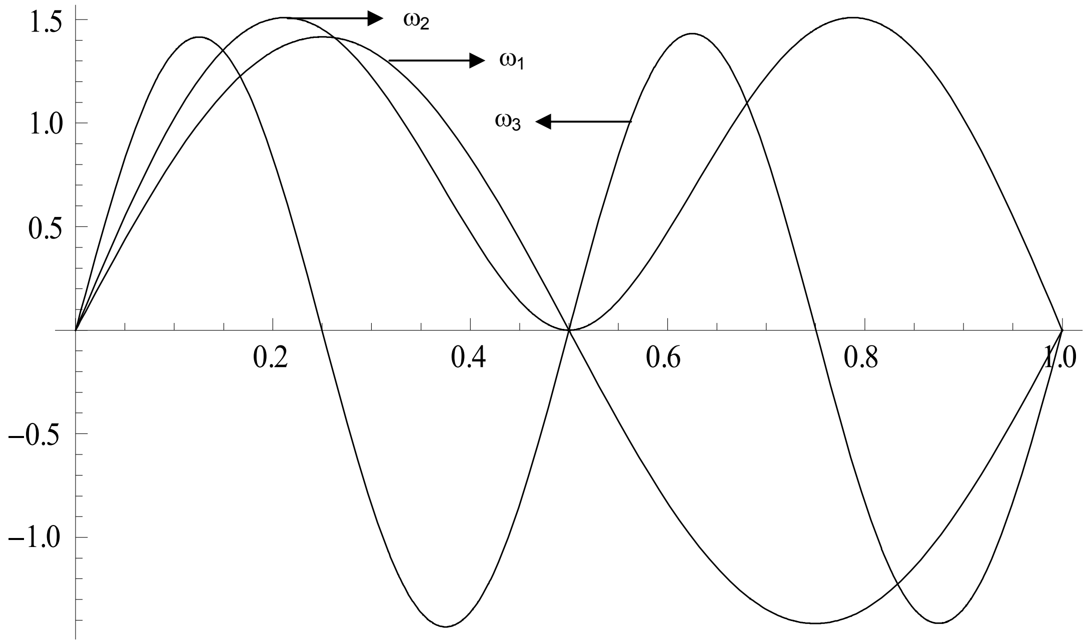
Şekil 3.21 Üç mesnetli duruma ait v_f=0.2 ve η=0.2 için ilk üç mod yapısı



Şekil 3.22 Üç mesnetli duruma ait v_f=0.2 ve η=0.3 için ilk üç mod yapısı

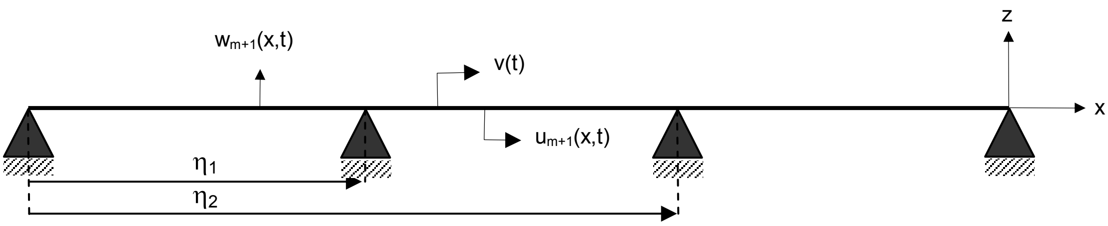


Şekil 3.23 Üç mesnetli duruma ait v_f=0.2 ve η=0.4 için ilk üç mod yapısı



Şekil 3.24 Üç mesnetli duruma ait v_f=0.2 ve η=0.5 için ilk üç mod yapısı

3.1.2. Dört Mesnetli Durum İçin Analitik Çözümler



Şekil 3.25 Eksenel hareketli dört mesnetli kiriş.

Benzer şekilde genelleştirilmiş hareket denklemindeki ifadeleri dört mesnetli durum için özelleştirirsek, 1 ve ε mertebelerindeki denklemleri aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

<u>1 mertebesi:</u>

$$D_0^2 y_{11} + 2v_0 D_0 y'_{11} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{11} + v_f^2 y_{11}^{iv} = 0 \tag{3.42}$$

$$D_0^2 y_{21} + 2v_0 D_0 y'_{21} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{21} + v_f^2 y_{21}^{iv} = 0 \tag{3.43}$$

$$D_0^2 y_{31} + 2v_0 D_0 y'_{31} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{31} + v_f^2 y_{31}^{iv} = 0 \tag{3.44}$$

<u>ε mertebesi:</u>

$$\begin{gathered} D_0^2 y_{12} + 2v_0 D_0 y'_{12} + v_f^2 y_{12}^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{12} = -2D_0 D_1 y_{11} - 2v_0 D_1 y'_{11} - 2v_1 \sin\Omega t D_0 y'_{11} \\ -2y''_{11} v_0 v_1 \sin\Omega t - y'_{11} v_1 \Omega \cos\Omega t + \frac{1}{2} v_b^2 \left(\int_0^{\eta_1} {y'_{11}}^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} {y'_{21}}^2 dx + \int_{\eta_2}^{1} {y'_{31}}^2 dx \right) y''_{11} \end{gathered} \tag{3.45}$$

$$\begin{gathered} D_0^2 y_{22} + 2v_0 D_0 y'_{22} + v_f^2 y_{22}^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{22} = -2D_0 D_1 y_{21} - 2v_0 D_1 y'_{21} - 2v_1 \sin\Omega t D_0 y'_{21} \\ -2y''_{21} v_0 v_1 \sin\Omega t - y'_{21} v_1 \Omega \cos\Omega t + \frac{1}{2} v_b^2 \left(\int_0^{\eta_1} {y'_{11}}^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} {y'_{21}}^2 dx + \int_{\eta_2}^{1} {y'_{31}}^2 dx \right) y''_{21} \end{gathered} \tag{3.46}$$

$$\begin{gathered} D_0^2 y_{32} + 2v_0 D_0 y'_{32} + v_f^2 y_{32}^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{32} = -2D_0 D_1 y_{31} - 2v_0 D_1 y'_{31} - 2v_1 \sin\Omega t D_0 y'_{31} \\ -2y''_{31} v_0 v_1 \sin\Omega t - y'_{31} v_1 \Omega \cos\Omega t + \frac{1}{2} v_b^2 \left(\int_0^{\eta_1} {y'_{11}}^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} {y'_{21}}^2 dx + \int_{\eta_2}^{1} {y'_{31}}^2 dx \right) y''_{31} \end{gathered} \tag{3.47}$$

1 mertebesindeki denklemlerin çözümünden lineer frekans denklemleri elde edilecektir. Denklem (3.42-3.44) için çözüm fonksiyonlarını aşağıdaki gibi önerelim.

$$y_{11}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1)e^{i\omega T_0} Y_1(x) + \overline{A}(T_1)e^{-i\omega T_0} \overline{Y}_1(x) \tag{3.48}$$

$$y_{21}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1)e^{i\omega T_0} Y_2(x) + \overline{A}(T_1)e^{-i\omega T_0} \overline{Y}_2(x) \tag{3.49}$$

$$y_{31}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1)e^{i\omega T_0} Y_3(x) + \overline{A}(T_1)e^{-i\omega T_0} \overline{Y}_3(x) \tag{3.50}$$

Denklem (3.48-3.50) çözüm fonksiyonlarını (3.42-3.44)' de ilgili yerlere ayrı ayrı yerleştirirsek, her bölge için mekana bağlı denklemler şu şekilde elde edilir.

I. Bölge ($0 \sim \eta_1$) : $$v_f^2 Y_1^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right)Y_1'' + 2iv_0\omega Y_1' - \omega^2 Y_1 = 0 \tag{3.51}$$

II. Bölge ($\eta_1 \sim \eta_2$): $$v_f^2 Y_2^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right)Y_2'' + 2iv_0\omega Y_2' - \omega^2 Y_2 = 0 \tag{3.52}$$

III. Bölge ($\eta_2 \sim 1$): $$v_f^2 Y_3^{iv} + \left(v_0^2 - 1\right)Y_3'' + 2iv_0\omega Y_3' - \omega^2 Y_3 = 0 \tag{3.53}$$

Sınır şartları ise şu şekildedir.

$$Y_1(0) = 0, \quad Y_1''(0) = 0, \quad Y_3(1) = 0, \quad Y_3''(1) = 0 \tag{3.54}$$

$$Y_1(\eta_1) = 0, \quad Y_2(\eta_1) = 0, \quad Y_1'(\eta_1) = Y_2'(\eta_1), \quad Y_1''(\eta_1) = Y_2''(\eta_1) \tag{3.55}$$

$$Y_2(\eta_2) = 0, \quad Y_3(\eta_2) = 0, \quad Y_2'(\eta_2) = Y_3'(\eta_2), \quad Y_2''(\eta_2) = Y_3''(\eta_2) \tag{3.56}$$

(3.51-3.53) için şu fonksiyonu çözüm olarak ele alalım.

$$Y_1(x) = c_1 e^{i\beta_1 x} + c_2 e^{i\beta_2 x} + c_3 e^{i\beta_3 x} + c_4 e^{i\beta_4 x} \tag{3.57}$$

$$Y_2(x) = c_5 e^{i\beta_5 x} + c_6 e^{i\beta_6 x} + c_7 e^{i\beta_7 x} + c_8 e^{i\beta_8 x} \tag{3.58}$$

$$Y_3(x) = c_9 e^{i\beta_9 x} + c_{10} e^{i\beta_{10} x} + c_{11} e^{i\beta_{11} x} + c_{12} e^{i\beta_{12} x} \tag{3.59}$$

Çözüm fonksiyonlarını denklem (3.51-3.53)' te ayrı ayrı yerleştirirsek şu eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left[v_f^2\beta_1^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_1^2 - 2\omega\, v_0\beta_1 - \omega^2\right] c_1 e^{i\beta_1 x} + \\
&\left[v_f^2\beta_2^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_2^2 - 2\omega\, v_0\beta_2 - \omega^2\right] c_2 e^{i\beta_2 x} + \\
&\left[v_f^2\beta_3^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_3^2 - 2\omega\, v_0\beta_3 - \omega^2\right] c_3 e^{i\beta_3 x} + \\
&\left[v_f^2\beta_4^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_4^2 - 2\omega\, v_0\beta_4 - \omega^2\right] c_4 e^{i\beta_4 x} = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
&\left[v_f^2\beta_5^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_5^2 - 2\omega\, v_0\beta_5 - \omega^2\right] c_5 e^{i\beta_5 x} + \\
&\left[v_f^2\beta_6^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_6^2 - 2\omega\, v_0\beta_6 - \omega^2\right] c_6 e^{i\beta_6 x} + \\
&\left[v_f^2\beta_7^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_7^2 - 2\omega\, v_0\beta_7 - \omega^2\right] c_7 e^{i\beta_7 x} + \\
&\left[v_f^2\beta_8^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_8^2 - 2\omega\, v_0\beta_8 - \omega^2\right] c_8 e^{i\beta_8 x} = 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
&\left[v_f^2\beta_9^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_9^2 - 2\omega\, v_0\beta_9 - \omega^2\right] c_9 e^{i\beta_9 x} + \\
&\left[v_f^2\beta_{10}^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_{10}^2 - 2\omega\, v_0\beta_{10} - \omega^2\right] c_{10} e^{i\beta_{10} x} + \\
&\left[v_f^2\beta_{11}^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_{11}^2 - 2\omega\, v_0\beta_{11} - \omega^2\right] c_{11} e^{i\beta_{11} x} + \\
&\left[v_f^2\beta_{12}^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta_{12}^2 - 2\omega\, v_0\beta_{12} - \omega^2\right] c_{12} e^{i\beta_{12} x} = 0
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Yukarıdaki denklemler aşağıdaki saçılma denklemini verir.

$$v_f^2\beta^4 + \left(1 - v_0^2\right)\beta^2 - 2\omega v_0\beta - \omega^2 = 0 \tag{3.63}$$

Bu denklemlerde $\beta_1 = \beta_5 = \beta_{9,}$ $\beta_2 = \beta_6 = \beta_{10,}$ $\beta_3 = \beta_7 = \beta_{11,}$ $\beta_4 = \beta_8 = \beta_{12}$ yazılabilir.

Denklem (3.63)' de elde edilen β değerleri denklem (3.57–3.59)' da konulup, sınır şartları önerilen çözümlere uygulanırsa 12 adet denklem elde edilir. Bu denklemlerin üç mesnetli durumdakine benzer çözümünden tabii frekans değerleri elde edilir.

Dört mesnetli duruma ait Şekil 3.26–3.29' da mesnet konumları sırasıyla η_1 =0.1–η_2=0.9, η_1 =0.2–η_2=0.8, η_1 =0.3–η_2=0.7 ve η_1 =0.4–η_2=0.6 için v_f' nin farklı değerlerinin eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.30–3.33' de mesnet konumları sırasıyla η_1 =0.1–η_2=0.9, η_1 =0.2–η_2=0.8, η_1 =0.3–η_2=0.7 ve η_1 =0.4–η_2=0.6 için v_f' nin farklı değerlerinin eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.34–3.37' de mesnet konumları sırasıyla η_1 =0.1–η_2=0.9, η_1 =0.2–η_2=0.8, η_1 =0.3–η_2=0.7 ve η_1 =0.4–η_2=0.6 için v_f' nin farklı değerlerinin eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi verilmiştir.

Dört mesnetli duruma ait Şekil 3.38- 3.40' da v_f=0.2–0.6–1 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.41- 3.43' de v_f=0.2–0.6–1 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi, Şekil 3.44- 3.46' da v_f=0.2–0.6–1 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi verilmiştir.

Dört mesnetli duruma ait Şekil 3.47–3.50' de v_0=0.2 ve η_1 ve η_2' nin, 0.1–0.9, 0.2–0.8, 0.3–0.7, 0.4–0.8 mesnet konumları için, ilk üç mod yapısının değişim grafikleri verilmiştir.

Şekiller göz önüne alındığında ilk üç mod için söyleyebileceğimiz şu sonuçlar elde edilmiştir.

İlk üç mod ait Şekil 3.26–3.39 incelendiğinde aynı mesnet konumları ve aynı kirişlik katsayısı için, v_0 değerinin artmasıyla frekans değerleri azalmaktadır. Belli bir v_0 değerinden sonra ani olarak düşmektedir.

İlk üç mod ait Şekil 3.26–3.39 incelendiğinde aynı mesnet konumlarında, kirişlik özelliğini gösteren v_f katsayısı artması ile frekans değerleri artmaktadır.

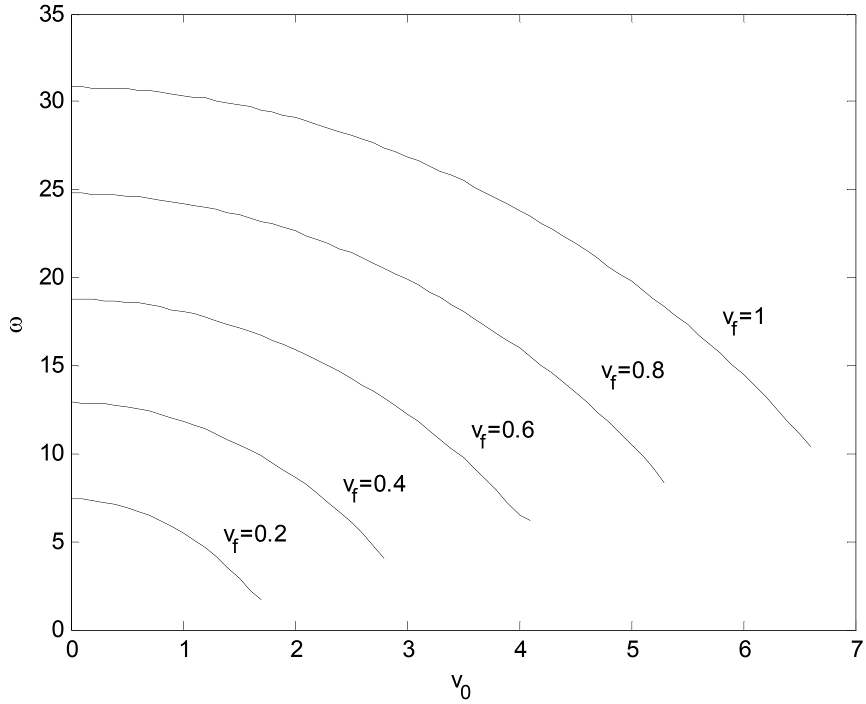
Eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi olan Şekil 3.38–3.40 incelendiğinde η_1=0.3–η_2=0.7 ve η_1=0.4–η_2=0.6 mesnet konumlarında, frekans değişim grafikleri birbirlerine yakındır. Mod yapılarının değişimini gösteren Şekil 3.47–3.50' de birinci moda ait grafikler incelendiğinde η_1=0.3–η_2=0.7 ve η_1=0.4–η_2=0.6 mesnet konumları için mod yapılarının birbirine benzediği sonucu elde edilmiştir.

Eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi olan Şekil 3.41–3.43 incelendiğinde uç mesnede yakın olan mesnet konumu olan η_1=0.1–η_2=0.9 ile orta kısma yakın olan mesnet konumu olan η_1=0.4–η_2=0.6 ve uç mesnede yakın olan mesnet konumu olan η_1=0.2–η_2=0.8 ile orta kısma yakın olan mesnet konumu olan η_1=0.3–η_2=0.7 mesnet konumlarında v_0' ın başlangıç değerlerinde yani v_0=0 iken frekans değerleri birbirine eşittir.

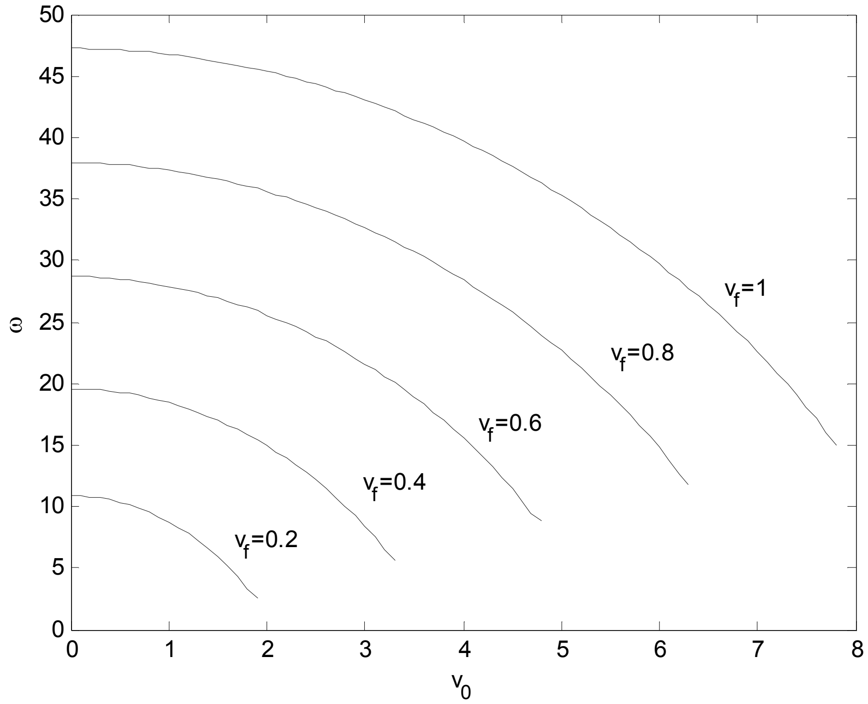
Aynı v_0 değerleri için Şekil 3.41–3.43 incelendiğinde v_0=0' da frekans değerleri birbirine eşit olan η_1=0.1–η_2=0.9 ile η_1=0.4–η_2=0.6 ve η_1=0.2–η_2=0.8 ile η_1=0.3–η_2=0.7 mesnet konumları birbirleri göre karşılaştırıldığında, uç mesnetlere yakın olan mesnetlerin frekansı, ortaya yakın olan mesnetlerin frekansına göre daha yüksektir.

Mod yapılarının değişimini gösteren Şekil 3.47–3.50' de ikinci moda ait grafikler incelendiğinde v_0=0 olduğundaki η_1=0.1–η_2=0.9 ile η_1=0.4–η_2=0.6, η_1=0.2–η_2=0.8 ile η_1=0.3–η_2=0.7 mesnet durumlarının mod yapılarının benzer olduğu elde edilmiştir.

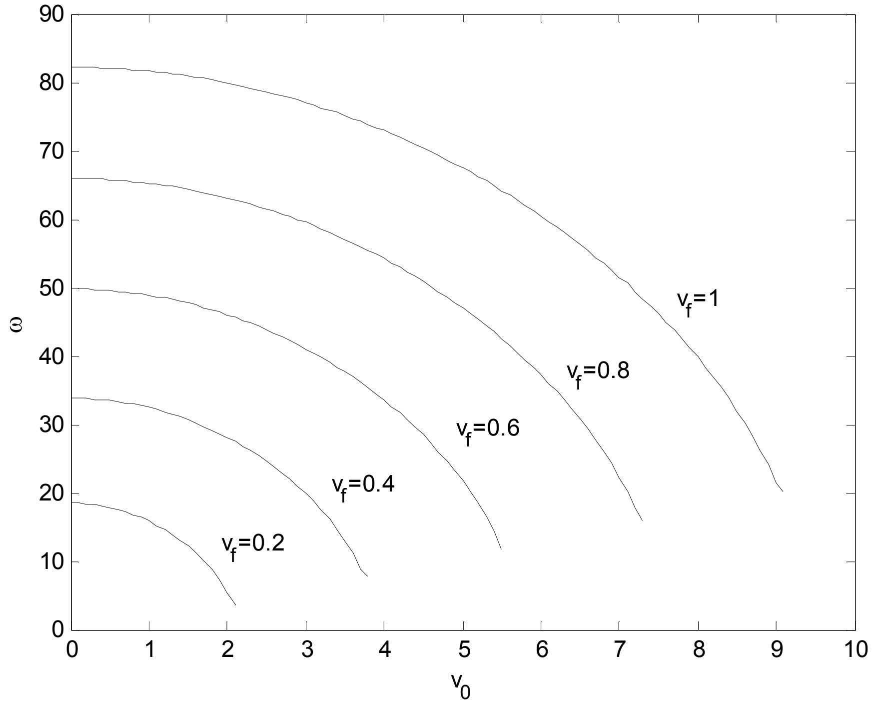
Eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi olan Şekil 3.44–3.46 incelendiğinde η_1=0.2–η_2=0.8 ve η_1=0.4–η_2=0.6 mesnet konumlarında, frekans değişim grafikleri birbirlerine oldukça yakındır. Mod yapılarının değişimini gösteren Şekil 3.47–3.50' de üçüncü moda ait grafikler incelendiğinde η_1=0.2–η_2=0.8 ve η_1=0.4–η_2=0.6 mesnet konumları için mod yapılarının benzer olduğu görülmüştür.



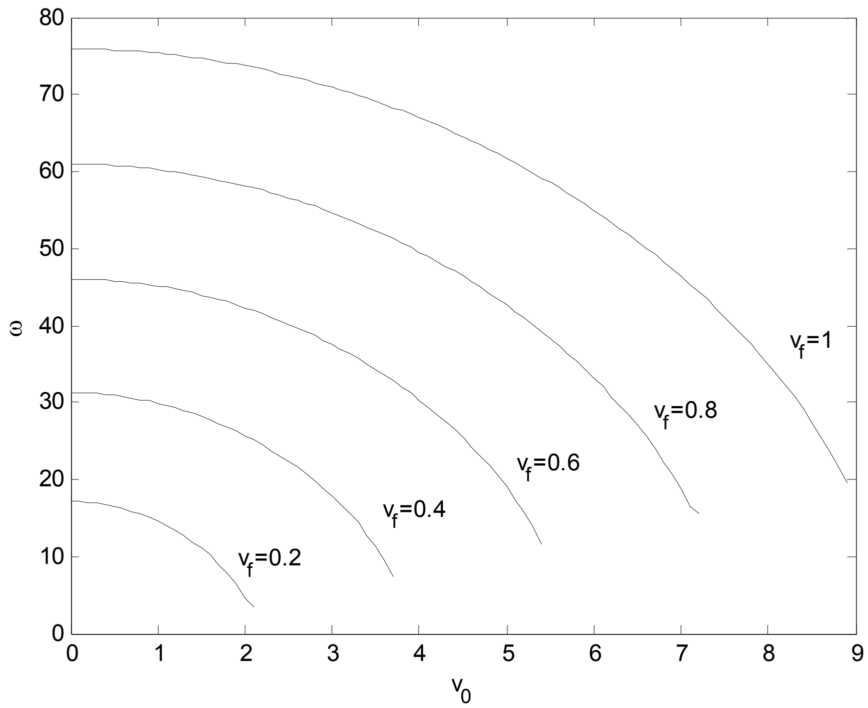
Şekil 3.26 Dört mesnetli durum η_1=0.1, η_2=0.9 ve v_f‘ nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



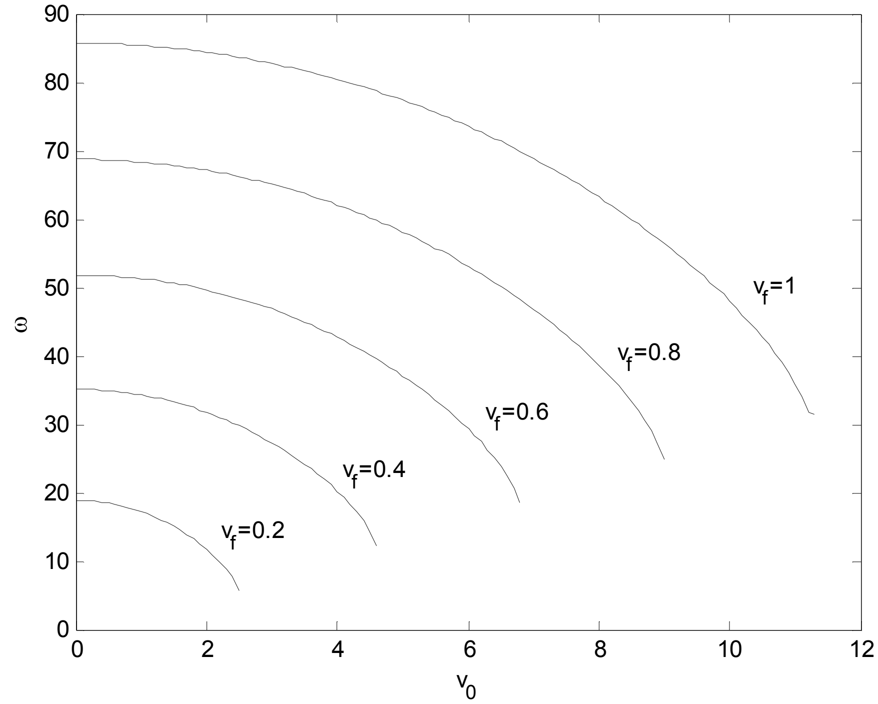
Şekil 3.27 Dört mesnetli durum η_1=0.2, η_2=0.8 ve v_f‘ nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



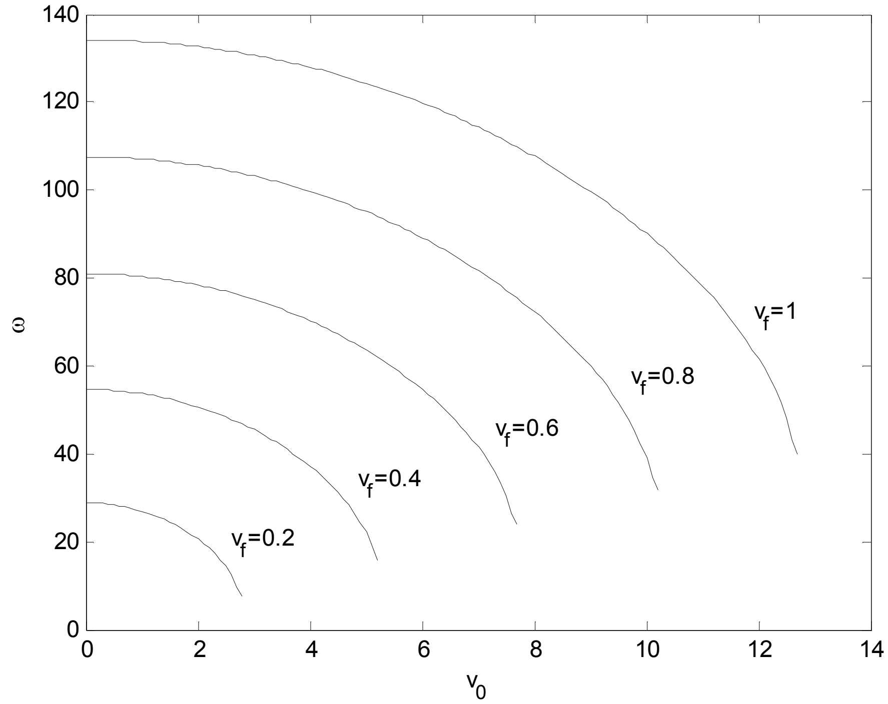
Şekil 3.28 Dört mesnetli durum η_1=0.3, η_2=0.7 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



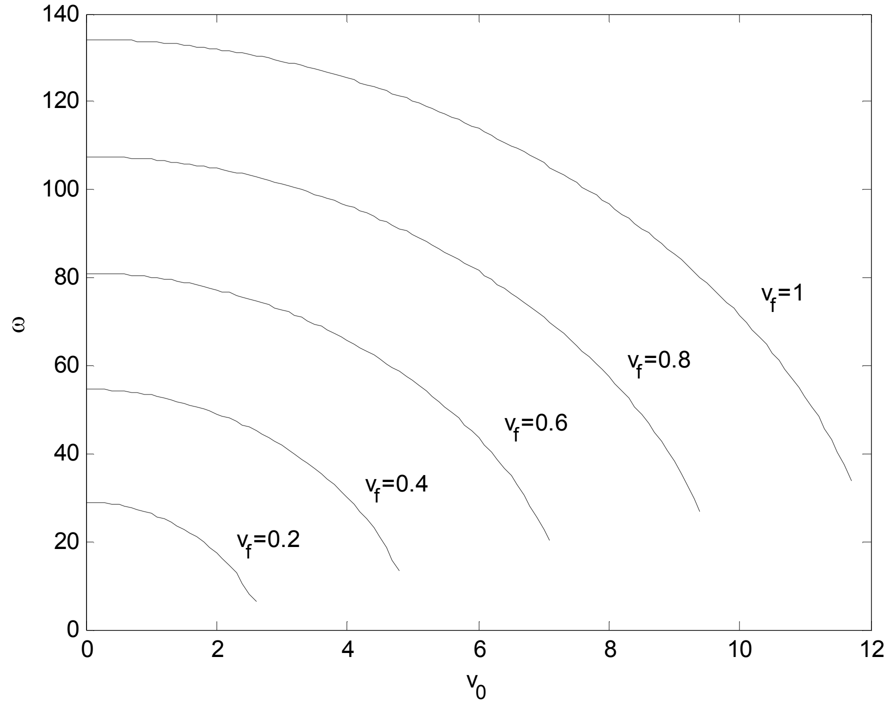
Şekil 3.29 Dört mesnetli durum η_1=0.4, η_2=0.6 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



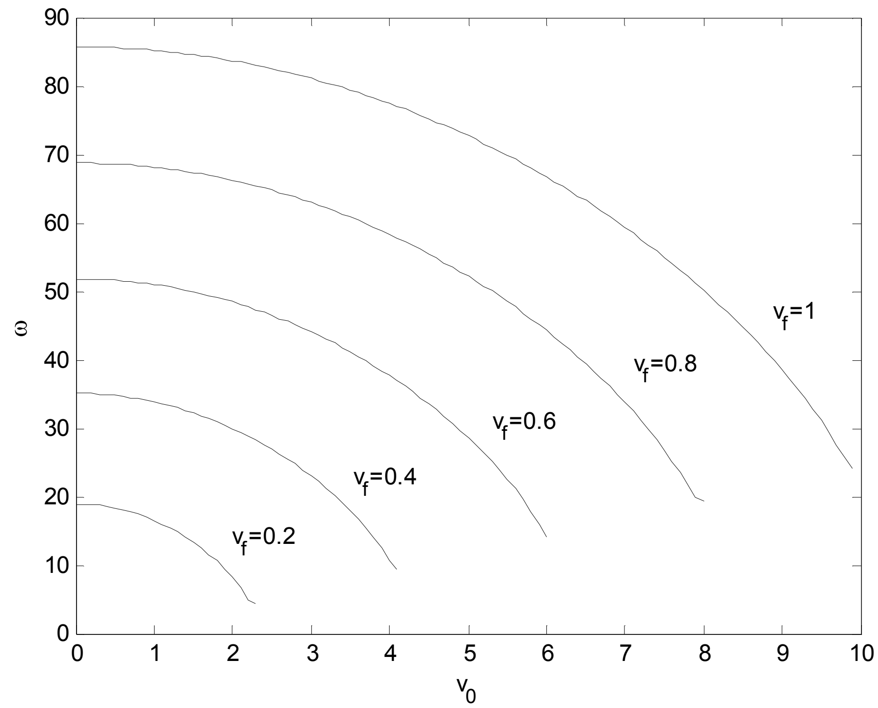
Şekil 3.30 Dört mesnetli durum η_1=0.1, η_2=0.9 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



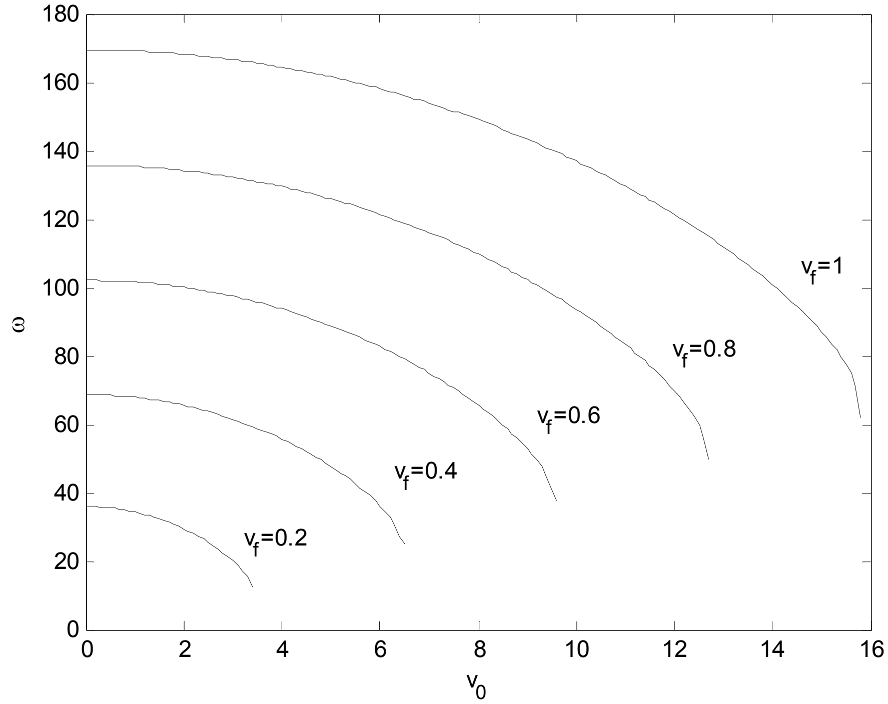
Şekil 3.31 Dört mesnetli durum η_1=0.2, η_2=0.8 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



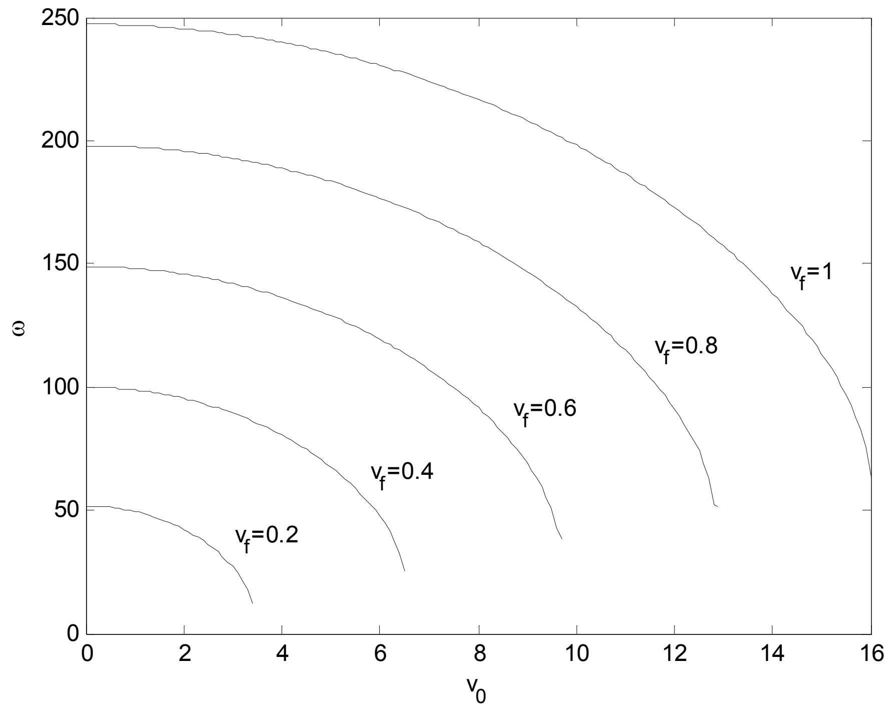
Şekil 3.32 Dört mesnetli durum η_1=0.3, η_2=0.7 ve v_f‘ nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



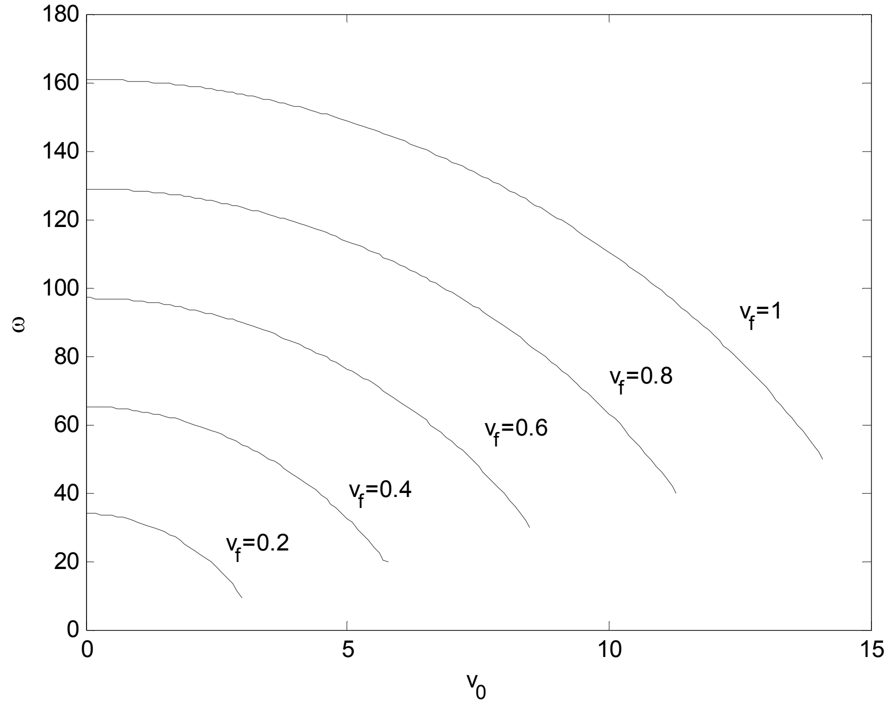
Şekil 3.33 Dört mesnetli durum η_1=0.4, η_2=0.6 ve v_f‘ nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



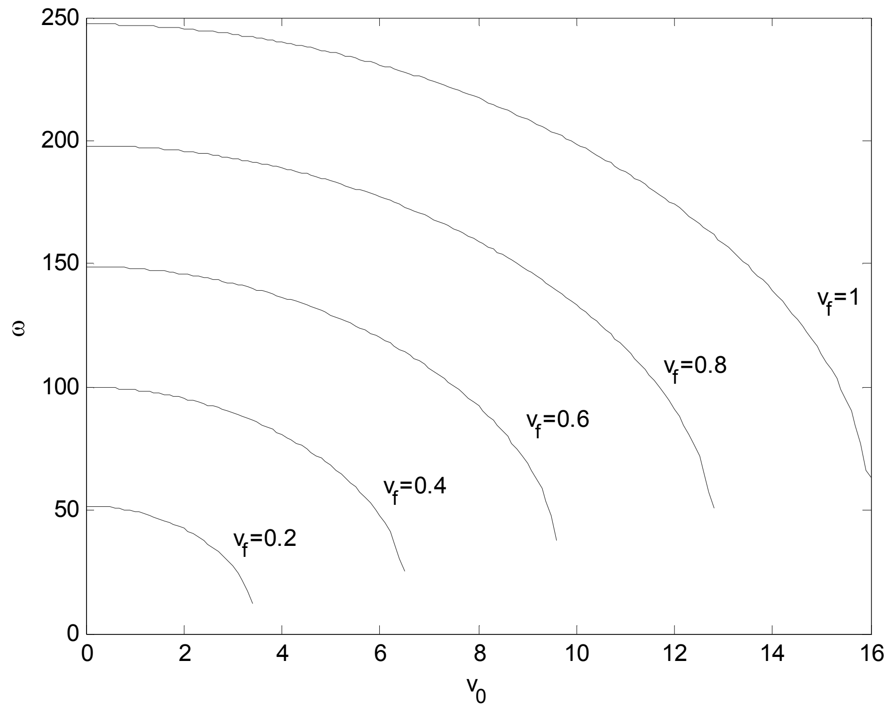
Şekil 3.34 Dört mesnetli durum η_1=0.1, η_2=0.9 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



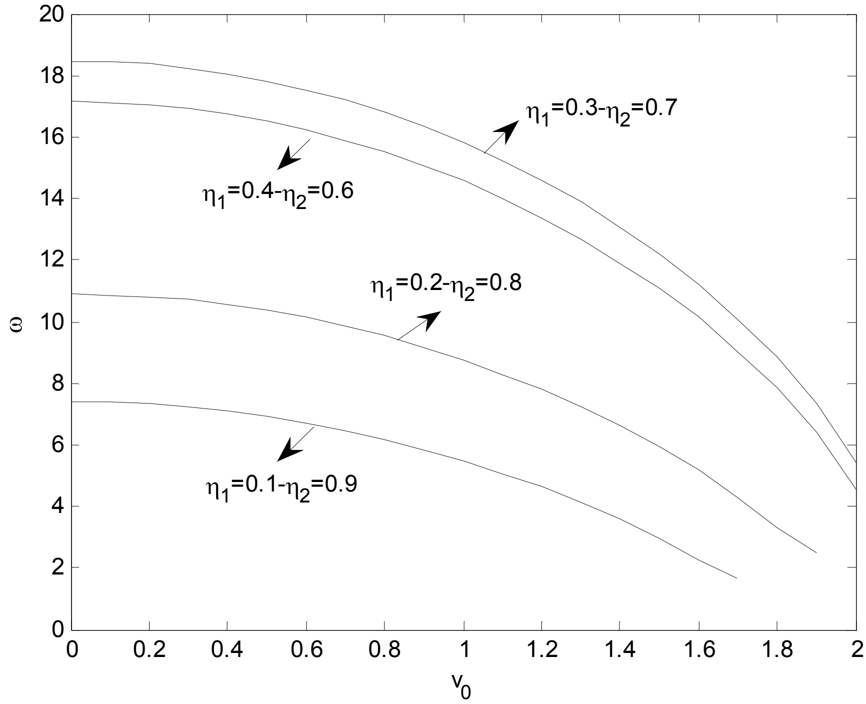
Şekil 3.35 Dört mesnetli durum η_1=0.2, η_2=0.8 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



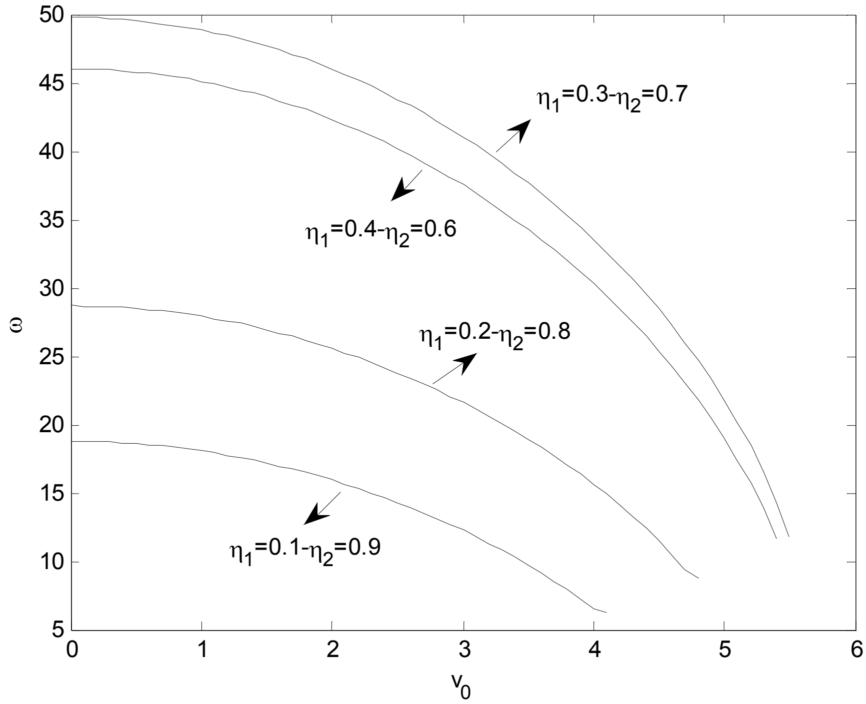
Şekil 3.36 Dört mesnetli durum η_1=0.3, η_2=0.7 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



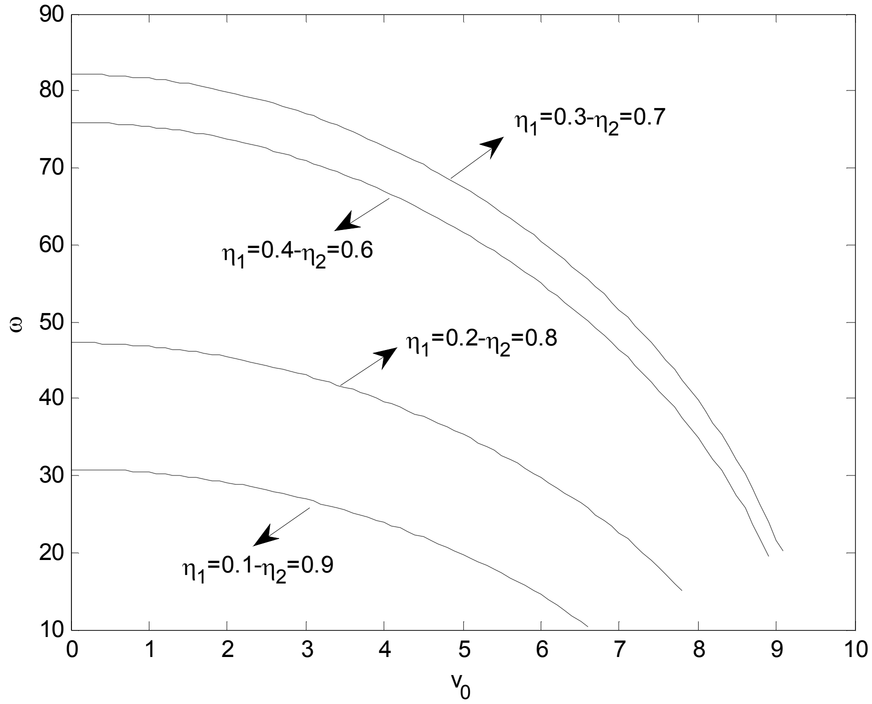
Şekil 3.37 Dört mesnetli durum η_1=0.4, η_2=0.6 ve v_f' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



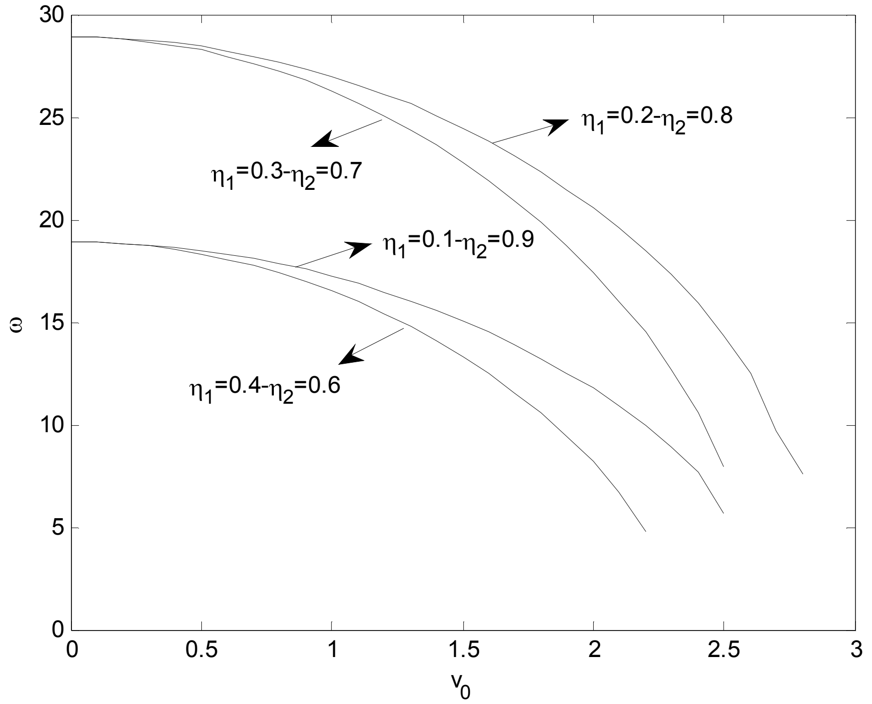
Şekil 3.38 Dört mesnetli durum v_f=0.2 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



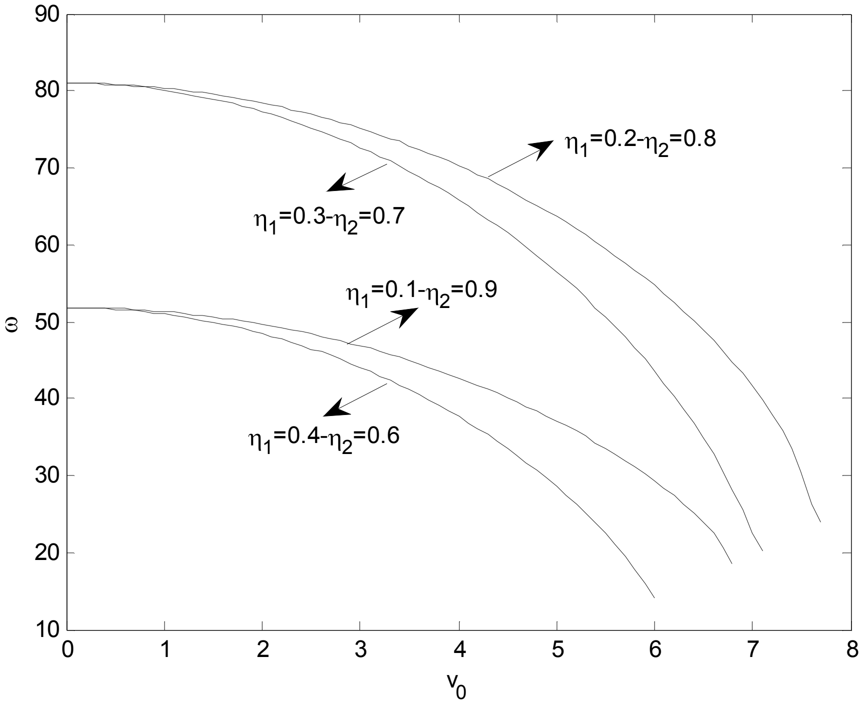
Şekil 3.39 Dört mesnetli durum v_f=0.6 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



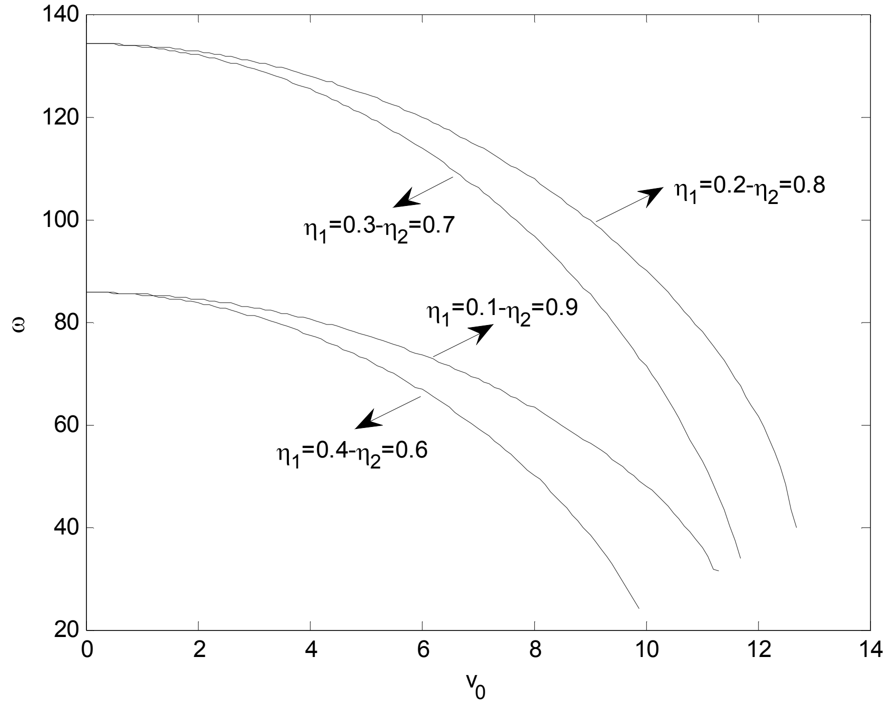
Şekil 3.40 Dört mesnetli durum v_f=1 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimi



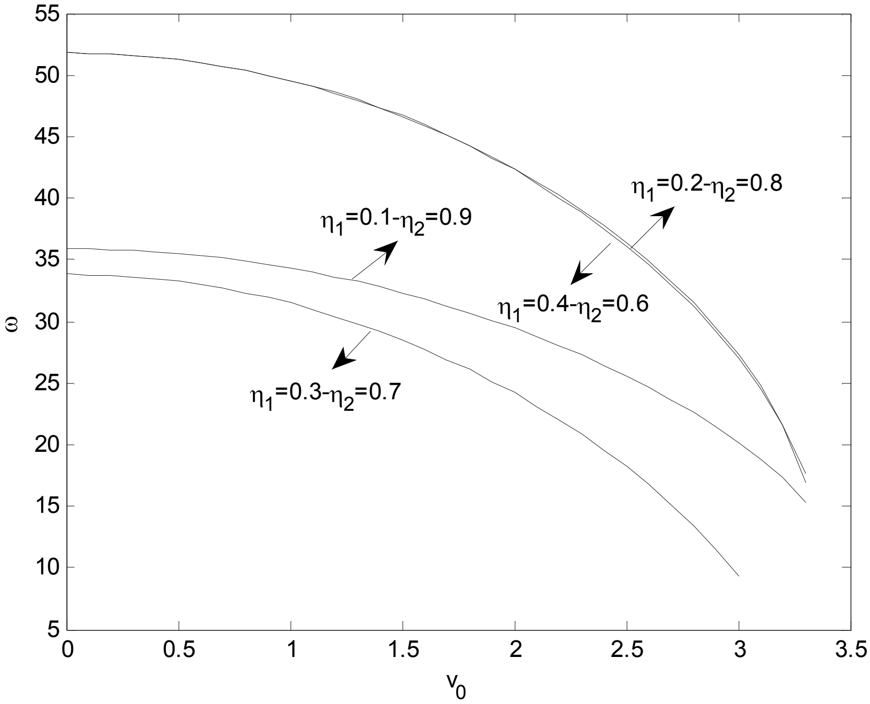
Şekil 3.41 Dört mesnetli durum v_f=0.2 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



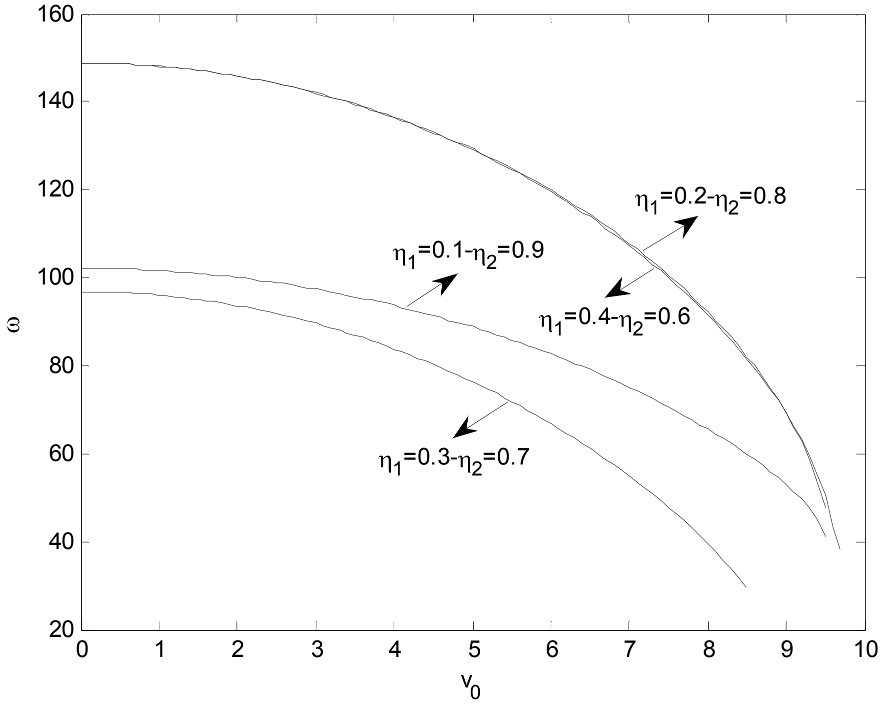
Şekil 3.42 Dört mesnetli durum v_f=0.6 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



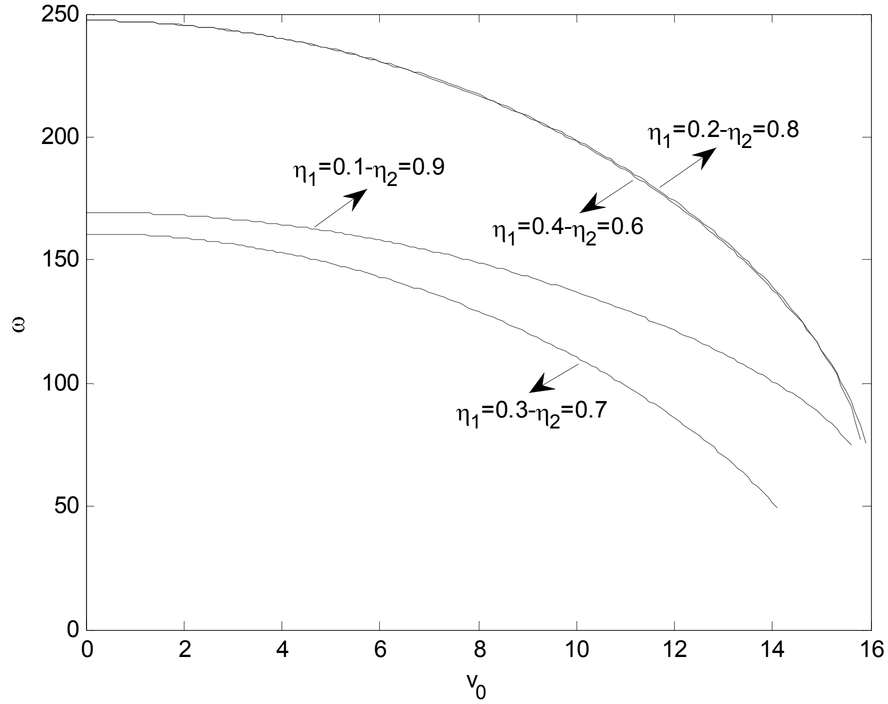
Şekil 3.43 Dört mesnetli durum v_f=1 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi



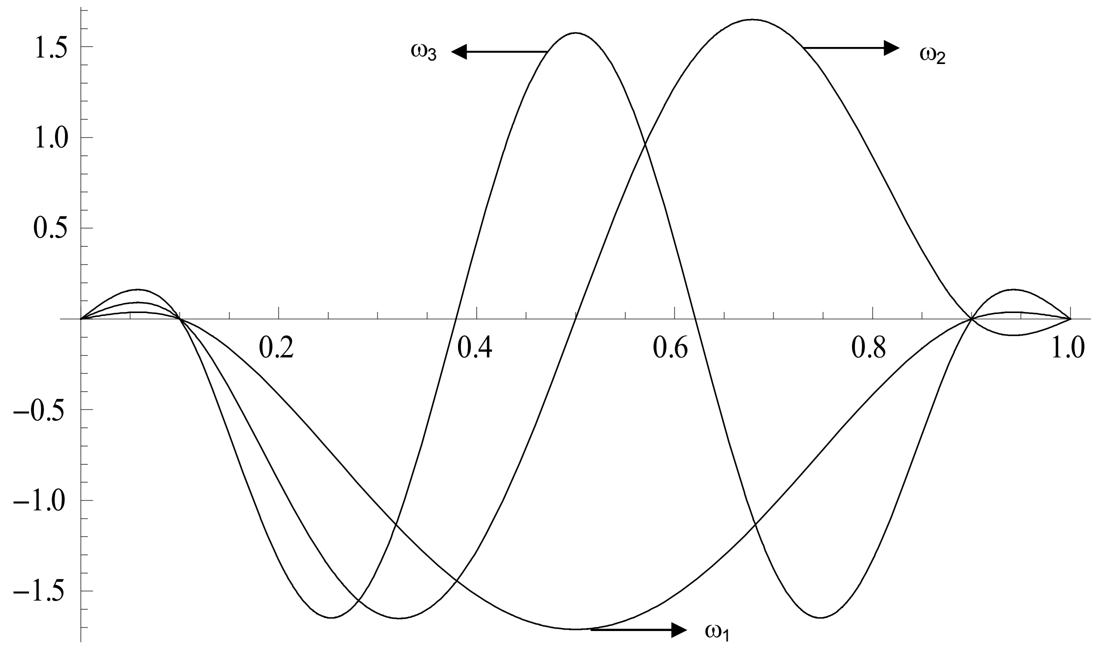
Şekil 3.44 Dört mesnetli durum v_f=0.2 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



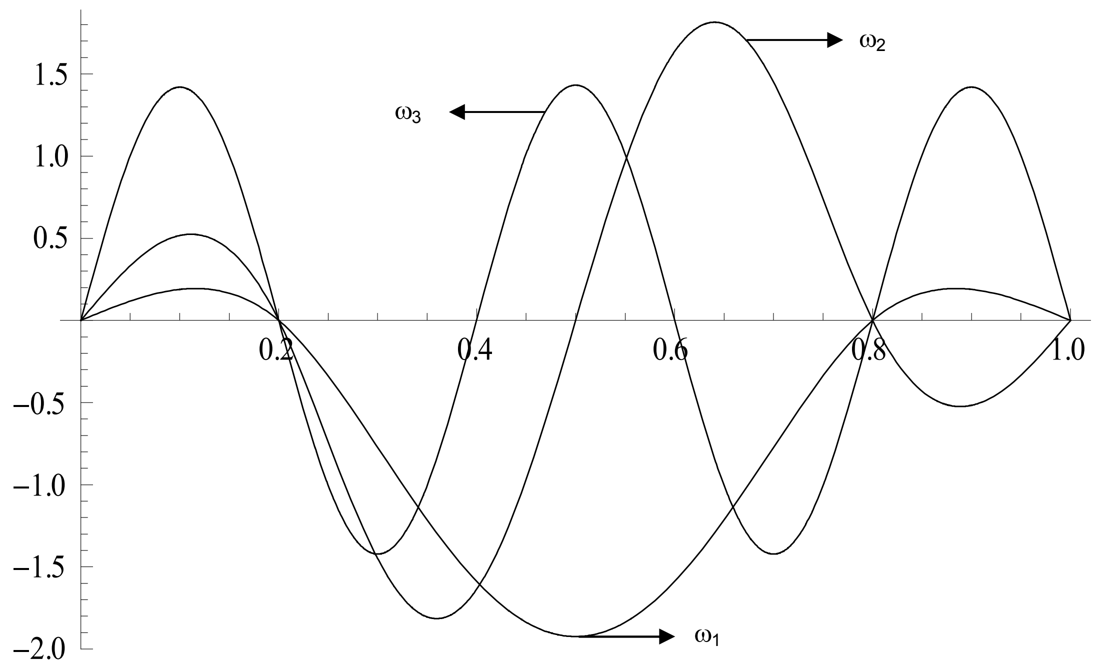
Şekil 3.45 Dört mesnetli durum v_f=0.6 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



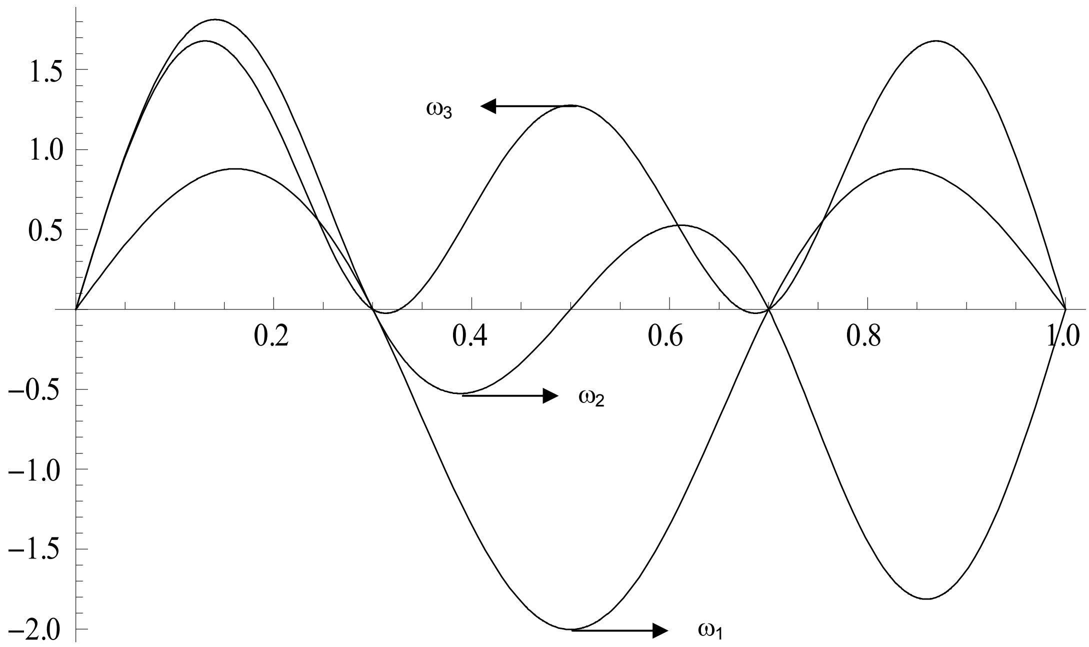
Şekil 3.46 Dört mesnetli durum v_f=1 ve η_1 ve η_2' nin farklı durumları için eksenel hıza bağlı üçüncü tabii frekans değerlerinin değişimi



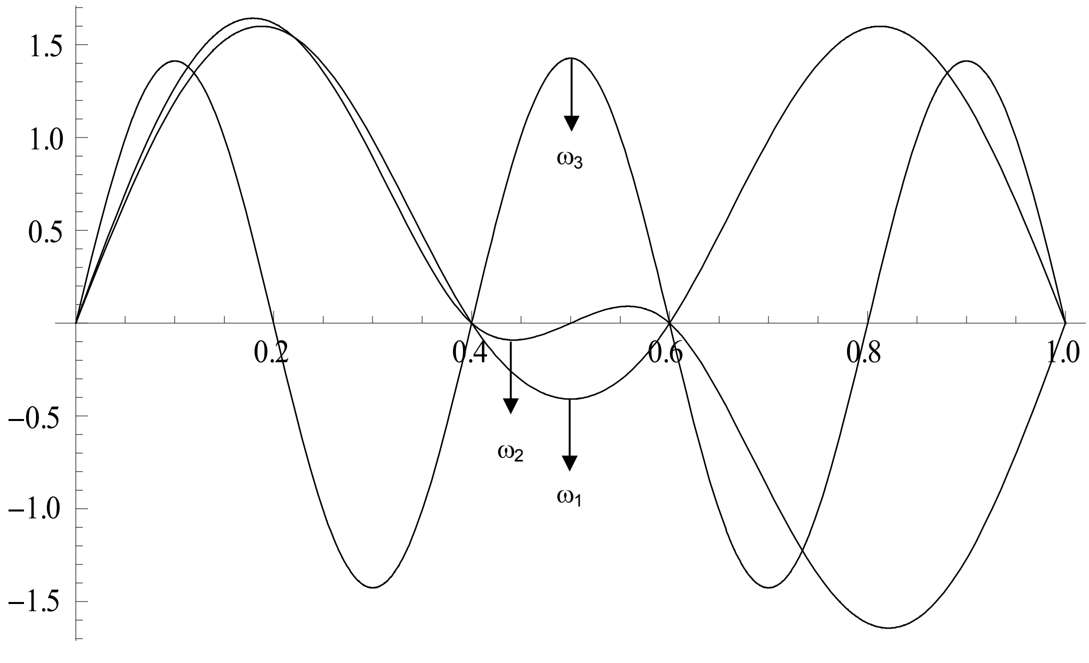
Şekil 3.47 Dört mesnetli duruma ait v_f=0.2, η_1 =0.1 ve η_2=0.9 için ilk üç mod yapısı



Şekil 3.48 Dört mesnetli duruma ait v_f=0.2, η_1 =0.2 ve η_2=0.8 için ilk üç mod yapısı



Şekil 3.49 Dört mesnetli duruma ait v_f=0.2, η_1 =0.3 ve η_2=0.7 için ilk üç mod yapısı



Şekil 3.50 Dört mesnetli duruma ait v_f=0.2, η_1 =0.4 ve η_2=0.6 için ilk üç mod yapısı

3.2. Nonlineer Problem

Bu bölümde nonlineer etkilerin lineer frekansa katkıları hesaplanacaktır. Homojen denklemlerin basit olmayan çözümleri olduğu için, homojen olmayan denklemin çözümünün olabilmesi ancak bir çözülebilirlik şartını sağlamasına bağlıdır[23]. Denklem (3.18)' nin sağ tarafının çözümü için Bölüm 3.1' de tanımladığımız çözüm fonksiyonu olan denklem (3.19) denkleme yerleştirilmiştir. Ayrıca denklem (3.18)' i sol tarafının çözümü için yer değiştirme fonksiyonunu aşağıdaki gibi ele alınmıştır.

$$y_{(m+1)2}(x,T_0,T_1;\varepsilon)=\phi_{m+1}(x,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{m+1}(x,T_0,T_1)+\text{k.e.} \qquad (3.64)$$

Çözüm fonksiyonunda ilk terim (ϕ_{m+1}) fonksiyonun seküler terimleri ile ilgili, ikinci terim (W_{m+1}) ise fonksiyonun seküler olmayan terimleri ile ilgilidir.

$$\cos\Omega T_0=\frac{e^{i\Omega T_0}+e^{-i\Omega T_0}}{2} \qquad (3.65)$$

$$\sin\Omega T_0=\frac{e^{i\Omega T_0}-e^{-i\Omega T_0}}{2i} \qquad (3.66)$$

Denklemlerde yer alan sinüs ve kosinüs ifadelerinin yerine (3.65) ve (3.66) açılımlarını denklem (3.18)' de yerleştirirsek,

$$\begin{aligned}
&\left(v_f^2\,\phi_{m+1}^{iv}+\left(v_0^2-1\right)\phi''_{m+1}+2iv_0\omega\phi'_{m+1}-\omega^2\phi_{m+1}\right)e^{i\omega T_0}=-2\left(i\omega Y_{m+1}+v_0Y'_{m+1}\right)D_1Ae^{i\omega T_0}\\
&+v_1\left(-\omega Y'_{m+1}-\frac{\Omega}{2}Y'_{m+1}+iv_0Y''_{m+1}\right)Ae^{i(\Omega+\omega)T_0}+v_1\left(\omega\overline{Y}'_{m+1}-\frac{\Omega}{2}\overline{Y}'_{m+1}+iv_0\overline{Y}''_{m+1}\right)\overline{A}e^{i(\Omega-\omega)T_0}\\
&-\mu\left(i\omega Y_{m+1}+v_0Y'_{m+1}\right)Ae^{i\omega T_0}\\
&+\frac{1}{2}v_b^2\left[\overline{Y}''_{m+1}\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{m+1}dx\right)+2Y''_{m+1}\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{m+1}\overline{Y}'_{m+1}\,dx\right)\right]A^2\overline{A}e^{i\omega T_0}+\text{k.e.}+\text{S.O.T.}
\end{aligned} \qquad (3.67)$$

$m=0,1,2\ldots n,\qquad \eta_0=0,\quad \eta_{n+1}=1$

ε mertebesi elde edilir. Burada k.e. terimlerin kompleks eşleniklerini ve S.O.T. ise seküler olmayan terimleri göstermektedir.

3.2.1. Hız Değişim Frekanslarının Farklı Durumları ve Kararlılık Analizleri

Bu kısımda, denklem (3.67)' de elde edilen nonlineer denklemde yer alan zorlama frekansı olan Ω' nın değişik durumları için farklı titreşim yapıları bölümler halinde aşağıda ayrı ayrı incelenmiştir.

3.2.1.1. Ω' nın 2ω' ya Yakın Olduğu Durum (Temel Parametrik Rezonans)

Bu kısımda temel parametrik rezonans incelenecektir. Hız değişim frekansının (Ω), 2ω' ya yakın olduğu durum ele alınmıştır. Bu durumda hız değişim frekansının 2ω' ya yaklaşıklığını ifade etmek için,

$$\Omega=2\omega+\varepsilon\sigma \tag{3.68}$$

alalım. Denklem (3.68)' teki σ ayar parametresi olup 1 mertebesinde bir terimdir. Denklemlerde ε=0.1 alınmıştır. Denklem (3.68), denklem (3.67)' e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} & v_f^2\,\phi_{m+1}^{iv} + \left(v_0^2-1\right)\phi_{m+1}'' + 2iv_0\omega\phi_{m+1}' - \omega^2\phi_{m+1} = -2\left(i\omega Y_{m+1} + v_0 Y_{m+1}'\right)D_1 A \\ & + v_1\left(\omega\overline{Y}_{m+1}' - \frac{\Omega}{2}\overline{Y}_{m+1}' + iv_0\overline{Y}_{m+1}''\right)\overline{A}e^{i\sigma T_1} - \mu\left(i\omega Y_{m+1} + v_0 Y_{m+1}'\right)A \\ & + \frac{1}{2}v_b^2\left[\overline{Y}_{m+1}''\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1}'^2 dx\right) + 2Y_{m+1}''\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1}'\,\overline{Y}_{m+1}'\,dx\right)\right]A^2\overline{A} + k.e. + S.O.T. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Sınır şartları ise,

$$\phi_1(0)=0, \qquad \phi_{n+1}(1)=0, \qquad \phi_1''(0)=0, \qquad \phi_{n+1}''(1)=0 \tag{3.70}$$

Burada k.e. kompleks eşlenik terimlerini, S.O.T. ise seküler olmayan terimleri ifade etmektedir. Bu denklemler 1. mertebedeki denklemler (3.20)' in homojen olmayan halleridirler. Homojen denklemin basit olmayan bir çözümü olduğuna göre, homojen olmayan denklemin de çözülebilmesi ancak ve ancak çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır [23].

Denklem (3.69)' un sol tarafını aşağıdaki gibi gösterirsek.

$$L_{m+1}(\phi_{m+1}) = v_f^2\,\phi_{m+1}^{iv} + \left(v_0^2-1\right)\phi_{m+1}'' + 2iv_0\omega\phi_{m+1}' - \omega^2\phi_{m+1} \tag{3.71}$$

Denklem (3.71) keyfi bir g_{m+1} fonksiyonu ile çarpıp tanım kümesi üzerinden integre edilirse,

$$\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} g_{m+1}\,L_{m+1}\,dx=\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} g_{m+1}\,\{\text{Sağ taraf}\}\,dx \tag{3.72}$$

elde edilir. g_{m+1} başlangıçta keyfi bir fonksiyon idi. Bu fonksiyonu sol taraftaki integrali sıfır yapacak şekilde seçilirse ve sol taraftaki denklem (3.72)' deki kısmi integrasyon işlemi çözümlenirse,

$$\sum_{r=0}^{n}\Bigg[\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\left(v_f^2\,g_{m+1}^{iv}+\left(v_0^2-1\right)g''_{m+1}+2iv_0\omega g'_{m+1}-\omega^2 g_{m+1}\right)\phi_{m+1}\,dx \\ +v_f^2\left[g_{m+1}\,\phi'''_{m+1}-g'_{m+1}\,\phi''_{m+1}+g''_{m+1}\,\phi'_{m+1}-g'''_{m+1}\,\phi_{m+1}\right]\Big|_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}+2iv_0\omega(g_{m+1}\,\phi_{m+1})\Big|_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\Bigg]=0 \tag{3.73}$$

$m=0,1,2\ldots n,\qquad \eta_0=0,\quad \eta_{n+1}=1$

elde edebiliriz. Çözülebilirlik şartını bulmak için denklem (3.72)' nin sağ tarafı sıfırlarsak sol tarafın sıfıra eşit olabilmesi ancak ve ancak integral içinin sıfır olması ve sınır şartlarının sıfır olması ile mümkündür. Böylece,

$$v_f^2\,g_{m+1}^{iv}+\left(v_0^2-1\right)g''_{m+1}+2iv_0\omega g'_{m+1}-\omega^2 g_{m+1}=0 \tag{3.74}$$

yazılabilir. Sınır şartlarını açık olarak yazılırsa g_{m+1} fonksiyonu O(1) mertebesi çözümü için kullandığımız Y_{m+1} fonksiyonun kompleks eşleniği olduğu anlaşılmaktadır.

$$g_{m+1}(x)=\overline{Y}_{m+1}(x) \tag{3.75}$$

Bulduğumuz g_{m+1} fonksiyonunu denklem (3.72)' in sağ tarafına yerleştirirse çözülebilirlik şartı elde edilir.

$$D_1A+k_0\overline{A}e^{i\sigma T_1}+\frac{\mu}{2}A-k_3A^2\overline{A}=0 \tag{3.76}$$

Burada k_0 ve k_3 aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. k_0 ve k_3 terimleri içerisinde yer alan kiriş hızının değişim genliği v_1=4, kirişin uzunlamasına esnekliği (boyuna direngenlik) v_b=5 alınmıştır.

$$k_0 = v_1 \frac{\left[(\frac{\Omega}{2} - \omega) \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}'_{m+1} \overline{Y}_{m+1}\, dx \right) - i v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{m+1} \overline{Y}_{m+1}\, dx \right) \right]}{2 \left[i\omega \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1} \overline{Y}_{m+1}\, dx \right) + v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \overline{Y}_{m+1}\, dx \right) \right]} \tag{3.77}$$

$$k_3 = \frac{1}{2} v_b^2 \frac{\left[\sum_{r=0}^{n} \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{m+1} \overline{Y}_{m+1} dx \right) \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'^2_{m+1} dx \right) + 2 \sum_{r=0}^{n} \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{m+1} \overline{Y}_{m+1} dx \right) \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \overline{Y}'_{m+1} dx \right) \right]}{2 \left[i\omega \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1} \overline{Y}_{m+1}\, dx \right) + v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \overline{Y}_{m+1}\, dx \right) \right]} \tag{3.78}$$

Basit olmayan çözüm için kompleks genlik şu şekilde tanımlanabilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\theta} \tag{3.79}$$

Denklem (3.65), denklem (3.76)' ya yerleştirip, denklemler gerçel ve sanal kısımlarına ayrıldığında genlik faz modülasyon denklemlerini aşağıdaki gibi elde edebilir.

$$D_1 a = a(k_{0_I} \sin\gamma - k_{0_R} \cos\gamma + \frac{1}{2}\mu) \tag{3.80}$$

$$a D_1 \gamma = a\sigma + 2a(k_{0_I} \cos\gamma + k_{0_R} \sin\gamma) - \frac{1}{2} k_{3_I} a^3 \tag{3.81}$$

Denklemlerde yer alan faz ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\gamma = \sigma T_1 - 2\theta \tag{3.82}$$

Faz modülasyon denklemlerinde basit çözüm (a=0) ve basit olmayan çözüm (a≠0) mevcuttur. Basit olmayan çözümde, düzgün rejim bölgesi için $D_1 a = 0$, $D_1 \gamma = 0$' dır. Bu durumda faz modülasyon denklemleri şu hali alır.

$$F_1(a,\gamma) = (k_{0_I} \sin\gamma - k_{0_R} \cos\gamma + \frac{1}{2}\mu) \tag{3.83}$$

$$F_2(a,\gamma) = \sigma + 2(k_{0_I} \cos\gamma + k_{0_R} \sin\gamma) - \frac{1}{2} k_{3_I} a^2 \tag{3.84}$$

Buradan hız değişim frekansı ve genlik arasındaki ilişki şu şekilde elde edilir.

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}a^2 k_{3_I} \mp 2\sqrt{k_{0_I}{}^2 + k_{0_R}{}^2 - \frac{1}{4}\mu^2} \tag{3.85}$$

Denklem (3.83-3.84) Jacobian matrisini elde etmek için kullanılırsa,

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = 0 \tag{3.86}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = a(\frac{1}{4}k_{3_I}a^2 - \frac{\sigma}{2}) \tag{3.87}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial a} = -k_{3_I}a \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = -\mu \tag{3.89}$$

elde edilebilir. Jacobian matrisinde sırasıyla terimler yerlerine yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \end{bmatrix}_{\substack{a=a_0 \\ \gamma=\gamma_0}} \tag{3.90}$$

elde edilir. Buradan özdeğerlerimiz aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -\lambda & a(\frac{1}{4}k_{3_I}a^2 - \frac{\sigma}{2}) \\ -k_{3_I}a & -\mu - \lambda \end{bmatrix}_{\substack{a=a_0 \\ \gamma=\gamma_0}} \tag{3.91}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\mu \mp \sqrt{\mu^2 + 2a^2\sigma k_{3_I} - a^4 k_{3_I}{}^2}\right) \tag{3.92}$$

denklem (3.85)' de elde ettiğimiz σ_1 ve σ_2 eğrilerinin kararlılığı için denklem (3.92) kullanılmaktadır. Bu eğrilerden σ_1 için her zaman kararlı, σ_2 ' nin ise kararsız olduğu sonucuna varılmıştır.

Faz modülasyon denklemlerinde a=0 durumu basit çözümdür. Basit çözümün kararlılık analizi için, kompleks genlik kutupsal formda şu şekilde yazalım,

$$A=\frac{1}{2}(p+iq)e^{i\frac{\sigma}{2}T_1} \tag{3.93}$$

denklem (3.93), denklem (3.76) da yerleştirilirse kompleks genlikleri gerçel ve sanal kısımlarına ayırdığımızda genlik faz modülasyon denklemlerini aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$D_1p=-(k_{0_R}-\frac{1}{2}\mu)p+(\frac{\sigma}{2}-k_{0_I})q-\frac{1}{4}k_{3_I}q(p^2-q^2) \tag{3.94}$$

$$D_1q=(k_{0_R}-\frac{1}{2}\mu)q+(\frac{\sigma}{2}+k_{0_I})p+\frac{1}{4}k_{3_I}p(p^2+q^2) \tag{3.95}$$

Benzer şekilde özdeğerler hesaplanırsa,

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\mu\mp\sqrt{4({k_{0_I}}^2+{k_{0_R}}^2)-\sigma^2}\right) \tag{3.96}$$

elde edilir. Kararlılık sınırlarını bulmak için λ=0 kabulü yapılırsa,

$$\sigma_{1,2}=\mp 2\sqrt{{k_{0_I}}^2+{k_{0_R}}^2-\frac{1}{4}\mu^2} \tag{3.97}$$

$$\Omega=2\omega+\varepsilon\sigma \tag{3.98}$$

elde edilebilir.

Temel parametrik rezonans durumu için üç mesnetli ve dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genliklerin değişimi gösteren grafikleri elde edilmiştir. Orta kısımda bulunan mesnet sayısının, farklı kirişlik katsayısının ve değişik mesnet konumlarının hız değişimine bağlı genlikleri nasıl değiştirdiği incelenmiştir. Basit çözümün kararsız olduğu ve basit olmayan çözümlerin ortaya çıktığı kararsızlık bölgesine mesnet sayısının, farklı kirişlik katsayısının ve değişik mesnet konumlarının nasıl etkilediği araştırılmıştır.

Üç mesnet durumuna ait Şekil 3.51–3.53' de v_f=0.2, η=0.1 ve v_0=0.2–0.8–1, Şekil 3.54' te kritik hız değeri olan v_0=1.4 için birinci moda ait σ-a grafikleri ayrı ayrı çizilmiştir. Grafiklerin daha iyi anlaşılması ve grafiklerin bir arada olabilmesi amacıyla v_0' ın farklı değerleri için eğriler bir şekilde gösterilmiştir. Değişik v_0 değerleri için bir eksende gösterilen grafiklerde, kararlı ve kararsızlık bölgeleri grafiklerin üst üste gelmesi nedeniyle kararsız bölgeler kararlı gibi gözükse bu bölgeler çatallanmanın başladığı bölgelerdir ve kararsızdır. Bu nedenle baştan verilen ayrı ayrı çizilmiş grafikler, daha sonradan birleştirilmiş olan grafiklerin anlaşılır olabilmesi için verilmiştir.

Üç mesnetli duruma ait, Şekil 3.51–3.54' de η=0.1, Şekil 3.55–3.56' da η=0.3, Şekil 3.57–3.58' de η=0.5 ve birinci mod v_f=0.2 için, Şekil 3.59–3.60' de η=0.1, Şekil 3.61–3.62' de η=0.3, Şekil 3.63–3.64' de η=0.5 ve ikinci mod v_f=0.2 için, Şekil 3.65–3.66' da η=0.1, Şekil 3.67–3.68' de η=0.3, Şekil 3.69–3.70' da η=0.5 ve üçüncü mod v_f=0.2 için σ-a grafikler verilmiştir.

İlk üç mod ait şekiller incelendiğinde, aynı kirişlik katsayısı için v_0' ın artması ile kararsızlık bölgeleri artmaktadır. Kararsızlık bölgesi kritik hızda ise en büyüktür.

Üç mesnetli durum, Şekil 3.71–3.73' de η=0.1, v_0=0.2 ve farklı kirişlik katsayıları (v_f) için sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tabii frekanslara ait σ-a grafikler verilmiştir.

İlk üç mod ait şekiller incelendiğinde, aynı mesnet konumları ve aynı eksenel hız değerleri için, kirişlik katsayısının (v_f) artmasıyla kararsızlık bölgesinin azaldığı gözlenmiştir.

Üç mesnetli durum, Şekil 3.74–3.75' de birinci tabii frekansa ait, Şekil 3.76–3.78' de ikinci tabii frekansa ait, Şekil 3.79–3.81' de üçüncü tabii frekansa ait v_f=0.2 için ve sırasıyla η=0.1–0.3–0.5 mesnet konumlarına göre hız değişim frekansına bağlı genlik değişimleri verilmiştir.

Şekiller incelendiğinde üç mesnetli duruma ait kararsızlık bölgeleri ilk üç mod için farklılıklar göstermektedir.

Birinci mod için mesnedin konumunu soldan orta noktaya hareket ettirilmesiyle kararsızlık bölgesi artmaktadır. İkinci mod ve üçüncü mod için ise mesnedin soldan orta noktaya kaydırılması ile kararsızlık bölgesi bir noktada maksimum olmakta, mesnet konumu orta noktaya yaklaştıkça kararsızlık bölgesi azalmaktadır.

Üç mesnetli duruma ait, Şekil 3.82–3.84' de birinci tabii frekans, Şekil 3.85–3.87' de ikinci tabii frekans, Şekil 3.88–3.90' da üçüncü tabii frekans, v_f=0.2 için ve sırasıyla η=0.1–0.3–0.5 mesnet konumlarına göre kararsızlık bölgelerinin eksenel hıza bağlı değişimleri verilmiştir.

Üç mesnetli duruma ait, Şekil 3.91–3.93' de birinci tabii frekans, Şekil 3.94–3.96' da ikinci tabii frekans, Şekil 3.97–3.99' da üçüncü tabii frekans, v_f=0.8 için ve sırasıyla η=0.1–0.3–0.5 mesnet konumlarına göre kararsızlık bölgelerinin eksenel hıza bağlı değişimleri verilmiştir.

İlk üç mod için v_0' ın artması ile kararsızlık bölgeleri artmaktadır. Kararsızlık bölgesi v_0'ın sıfıra yakın değerleri için küçük, kritik hızda ise en büyüktür. Mesnedin konumunu soldan orta noktaya kaydırılması kararsızlık bölgesi artmaktadır. Eksenel hızın sıfıra yakın değerleri için kararsızlık bölgesi aniden büyümektedir.

Dört mesnetli durumuna ait, Şekil 3.100–3.101' de η_1=0.1–η_2=0.9, Şekil 3.102–3.103' de η_1=0.2–η_2=0.8, Şekil 3.104–3.105' de η_1=0.3–η_2=0.7, Şekil 3.106–3.107' de η_1=0.4–η_2=0.6 birinci tabii frekans v_f=0.2 için, Şekil 3.108–3.109' da η_1=0.1–η_2=0.9, Şekil 3.110–3.111' de η_1=0.2–η_2=0.8, Şekil 3.112–3.113' de η_1=0.3–η_2=0.7, Şekil 3.114–3.115' de η_1=0.4–η_2=0.6 ikinci tabii frekans v_f=0.2 için, Şekil 3.116–3.117' de η_1=0.1–η_2=0.9, Şekil 3.118–3.119' da η_1=0.2–η_2=0.8, Şekil 3.120–3.121' da η_1=0.3–η_2=0.7, Şekil 3.122–3.123' de η_1=0.4–η_2=0.6 üçüncü tabii frekans v_f=0.2 için σ-a grafikler verilmiştir.

Şekiller incelendiğinde dört mesnetli duruma ait kararsızlık bölgeleri ilk üç mod için farklılıklar göstermektedir.

Birinci mod ait şekiller incelendiğinde, aynı kirişlik katsayısı ve aynı mesnet konumu için v_0' ın artması ile kararsızlık bölgeleri artmaktadır.

İkinci mod için ise ile kararsızlık bölgesi v_0' ın değerinin artmasıyla bir noktada maksimum olmakta daha sonra azalmaktadır. Kararsızlık bölgesinin artıp daha sonra azalması orta kısımda yer alan, sağ ve sol taraftaki mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile ortadan kalmaktadır.

Üçüncü mod için ise ile kararsızlık bölgesi v_0' ın değerinin artmasıyla bir noktada maksimum olmakta daha sonra azalmaktadır. İlk üç mod için kararsızlık bölgesi kritik hızda ise en büyüktür.

Dört mesnetli durum, Şekil 3.124–3.126' da η_1=0.1–η_2=0.9, v_0=0.2 ve farklı kirişlik katsayıları (v_f) için sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tabii frekanslara ait σ-a grafikler verilmiştir.

İlk üç moda ait şekiller incelendiğinde aynı mesnet konumları ve aynı eksenel hız değerleri için kirişlik katsayısının (v_f) artmasıyla kararsızlık bölgesinin azaldığı gözlenmiştir.

Dört mesnetli durum, Şekil 3.127' de birinci tabii frekansa ait, Şekil 3.128' de ikinci tabii frekansa ait, Şekil 3.130' da üçüncü tabii frekansa ait v_f=0.2 ve v_0=0.2 için sırasıyla η_1=0.1–η_2=0.9, η_1=0.2–η_2=0.8, η_1=0.3–η_2=0.7, η_1=0.4–η_2=0.6 mesnet konumlarına göre hız değişim frekansına bağlı genlik değişimleri verilmiştir.

Birinci mod için sağ ve sol taraftaki mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile kararsızlık bölgesi artmaktadır. İkinci mod için, uç mesnetlere ya da orta noktaya eşit mesafe yakınlık gösteren mesnet konumları için kararsızlık bölgeleri birbirine çok yakındır. Mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile kararsızlık bölgesi artmaktadır. Üçüncü mod için ise mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile kararsızlık bölgesi artmakta, belirli bir mesnet konumunda en minimuma inmekte, orta noktadaki mesnede yaklaştıkça kararsızlık bölgesi artmaktadır.

Dört mesnetli duruma ait, Şekil 3.130–3.133' de birinci tabii frekans, Şekil 3.134–3.137' de ikinci tabii frekans, Şekil 3.138–3.141' de üçüncü tabii frekans, v_f=0.2 için ve sırasıyla η_1=0.1–η_2=0.9, η_1=0.2–η_2=0.8, η_1=0.3–η_2=0.7, η_1=0.4–η_2=0.6 mesnet konumlarına göre kararsızlık bölgelerinin eksenel hıza bağlı değişimleri verilmiştir.

Dört mesnetli durum, Şekil 3.142–3.145' de birinci tabii frekans, Şekil 3.146–3.149' da ikinci tabii frekans, Şekil 3.150–3.153' de üçüncü tabii frekans, v_f=0.8 için ve sırasıyla η_1=0.1–η_2=0.9, η_1=0.2–η_2=0.8, η_1=0.3–η_2=0.7, η_1=0.4–η_2=0.6 mesnet konumlarına göre kararsızlık bölgelerinin eksenel hıza bağlı değişimleri verilmiştir.

Birinci moda ait şekiller göz önüne alındığında aynı kirişlik katsayı için orta kısımda yer alan sağ ve sol taraftaki mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile kararsızlık bölgesi artmakta, orta kısımda yer alan mesnede yaklaştıkça kararsızlık bölgesi diğer durumlara göre azalmaktadır. Eksenel hızın (v_0) sıfıra yakın değerleri için yani kritik hızda kararsızlık bölgesi aniden büyümektedir.

İkinci moda ait şekiller göz önüne alındığında aynı kirişlik katsayısı için orta kısımda yer alan sağ ve sol taraftaki mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile kararsızlık bölgesi artmakta, orta kısımda yer alan mesnede yaklaştıkça kararsızlık bölgesi diğer durumlara göre azalmaktadır. Ayrıca, Şekil 134–137 incelendiğinde kararsızlık bölgeleri mesnet konumuna göre karşılaştırıldığında Şekil 134–135 ' de v_0 yüksek değerinde bir düğüm noktası oluşturmakta, belirli bir v_0 değerinde sıfırlanmakta ve eksenel hızın artmasının yani kritik v_0 değerine ulaşmasıyla kararsızlık bölgesi büyümektedir. Şekil 136–137' de orta kısımda yer alan iki uçtaki mesnetlerin orta noktaya yaklaşmasıyla bu düğüm noktası kaybolmaktadır.

Üçüncü moda ait şekiller göz önüne alındığında aynı kirişlik katsayısı için orta kısımda yer alan sağ ve sol taraftaki mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile kararsızlık bölgesi artmakta, orta kısımda yer alan mesnede yaklaştıkça kararsızlık bölgesi diğer durumlara göre azalmaktadır. Şekil 138–141 incelendiğinde kararsızlık bölgeleri mesnet konumuna göre karşılaştırıldığında Şekil 138–140 ‘ da ikinci moda göre daha düşük v_0 değerinde bir düğüm noktası oluşturmakta, belirli bir v_0 değerinde sıfırlanmakta ve eksenel hızın artmasının yani kritik v_0 değerine ulaşmasıyla kararsızlık bölgesi büyümektedir. Şekil 141’ de orta kısımda yer alan iki uçtaki mesnetlerin orta noktaya yaklaşmasıyla bu düğüm noktası kaybolmaktadır.

Üç ve dört mesnetli durumlarına ait v_f=0.2, sırasıyla v_0=0.2–1, tek mesnetli durumda η=0.1 ve iki mesnetli durumda η_1=0.1–η_2=0.9 için Şekil 3.154–3.155’ da birinci moda ait, Şekil 3.158–3.159’ da ikinci moda ait, Şekil 3.162–3.163’ de üçüncü moda ait, aynı v_f ve v_0 değerleri için tek mesnetli durumda η=0.3 ve iki mesnetli durumda η_1=0.3–η_2=0.7 için mesnet konumlarına göre Şekil 3.156–3.157’ de birinci tabii frekansın, Şekil 3.160–3.161’ da ikinci tabii frekansın, Şekil 3.164–3.165’ de üçüncü tabii frekansın hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi verilmiştir.

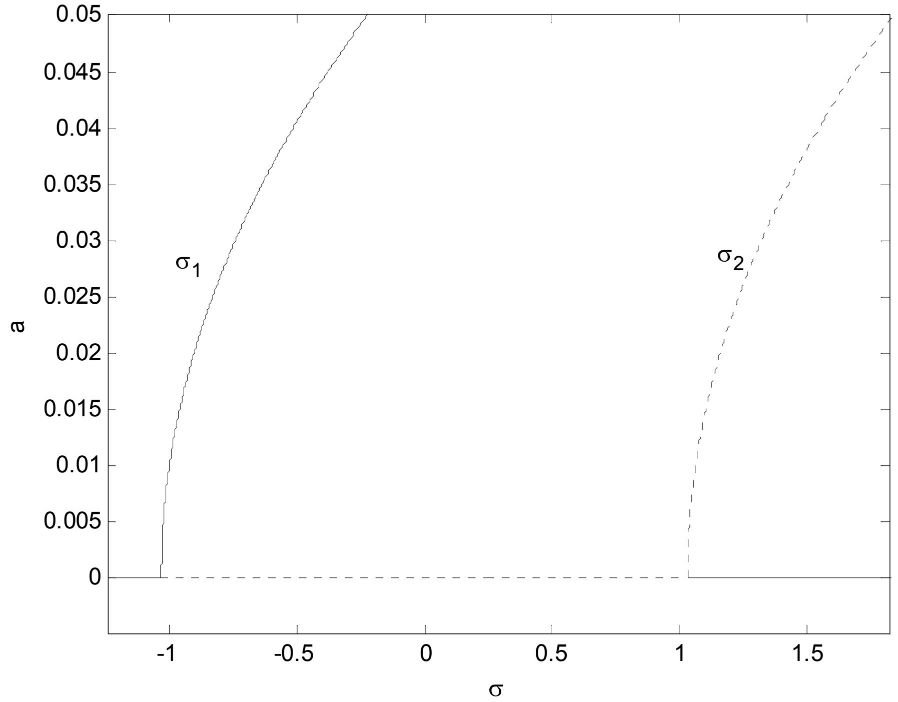
Şekiller incelendiğinde ilk üç mod için, orta kısımda yer alan mesnedin sayısının artırılması kararsızlık bölgesinin artmasında etkili olduğu gözlenmiştir.

Kararsızlık bölgesi için genel olarak şu sonuçları da elde ettiğimiz sonuçlara ilave edebiliriz.

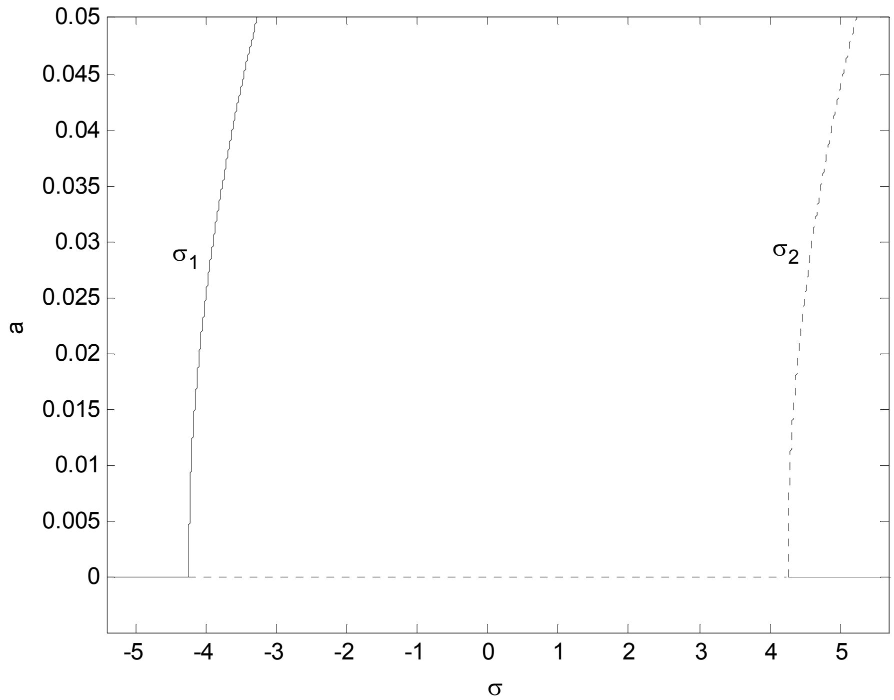
Kararsızlık sınırlarını belirleyen σ ifadesi k_0 bağlı yani kirişin hız değişim genliğine (v_1)’ e bağlıdır. Hız değişim genliğinin artması ile kararsızlık bölgesi genişlemektedir.

Kararsızlık bölgesine ortalama hız (v_0), kirişlik katsayısı (v_f) ve kirişin hız değişim genliği (v_1) etki etmektedir.

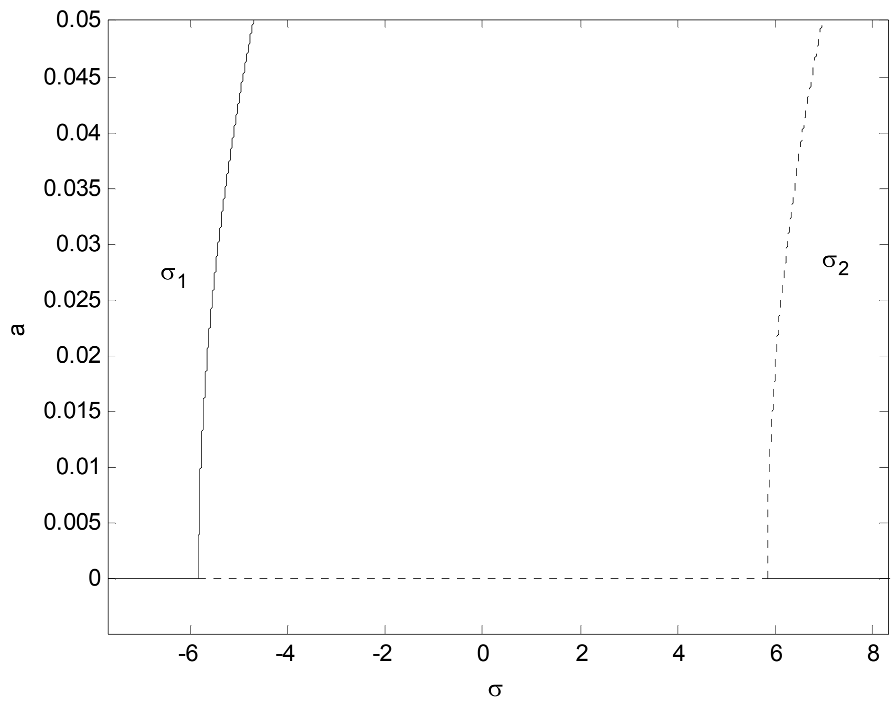
Kararsızlığın ortaya çıktığı bölgelerde genliklerde artışlar meydana gelmektedir. Bu nedenle bu bölgeler kritik bölgelerdir ve çalışma şartlarının bu bölgelerden uzak olması gerekmektedir.



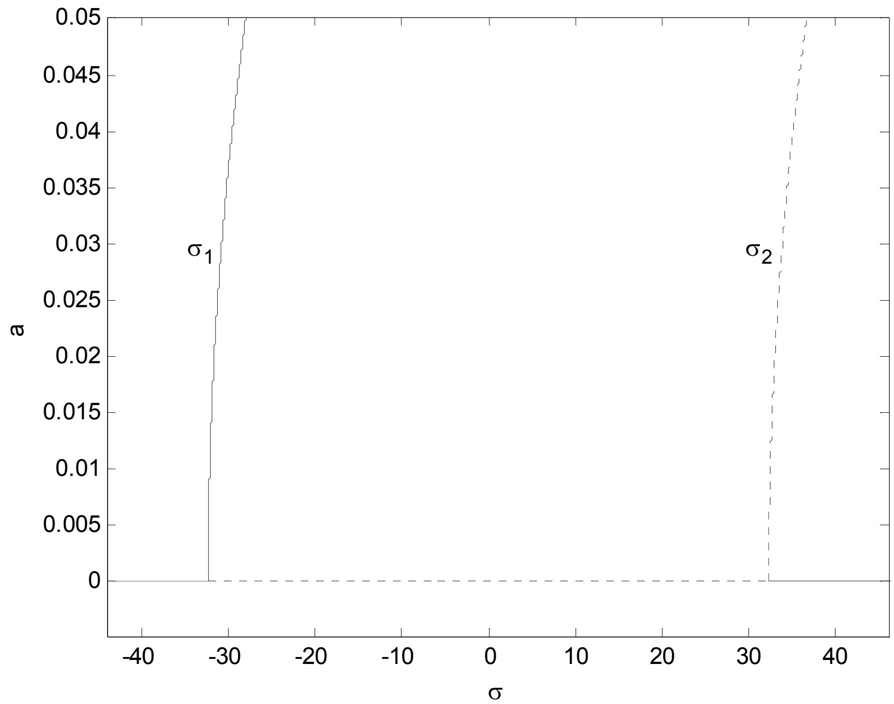
Şekil 3.51 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.1, v_0 =0.2)



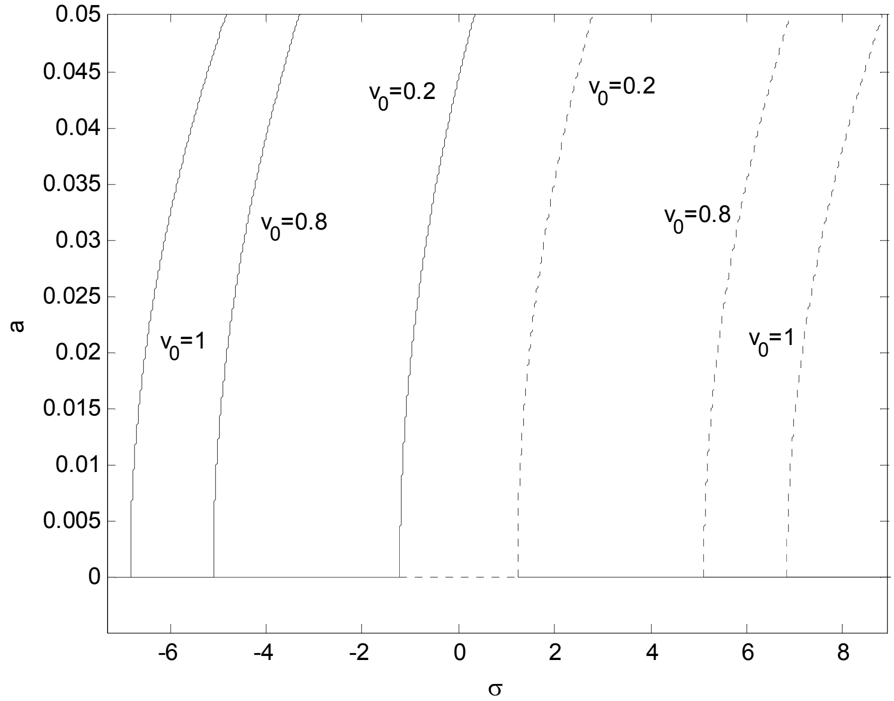
Şekil 3.52 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.1, v_0 =0.8)



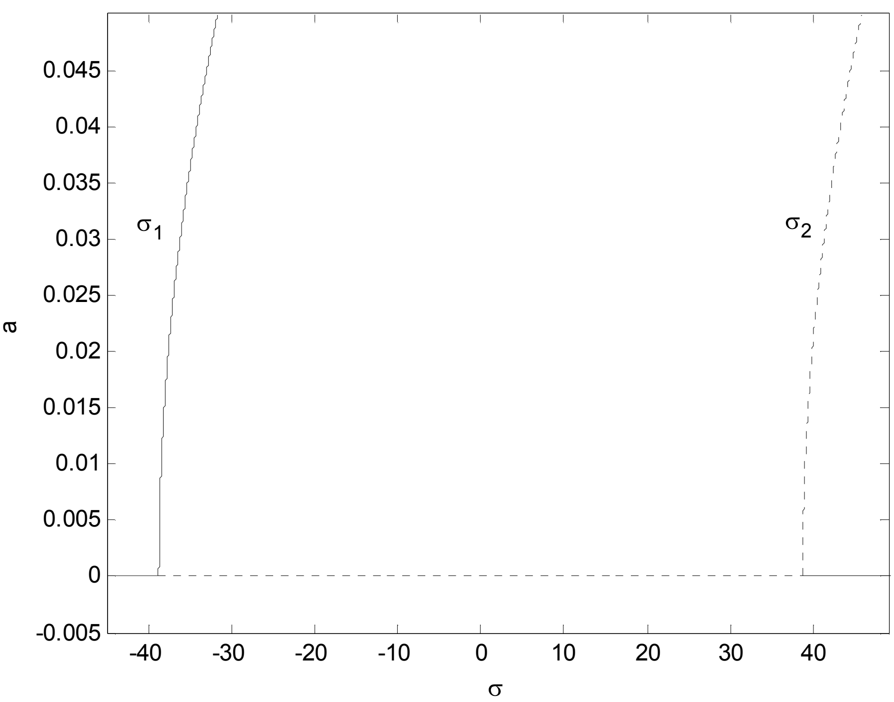
Şekil 3.53 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.1, v_0 =1)



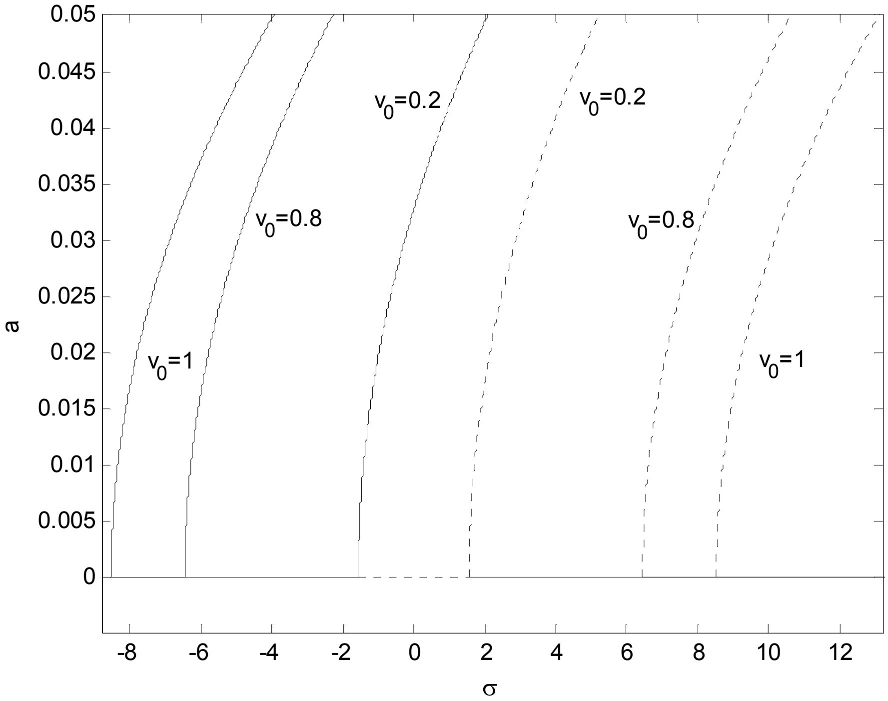
Şekil 3.54 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.1, v_0 =1.4)



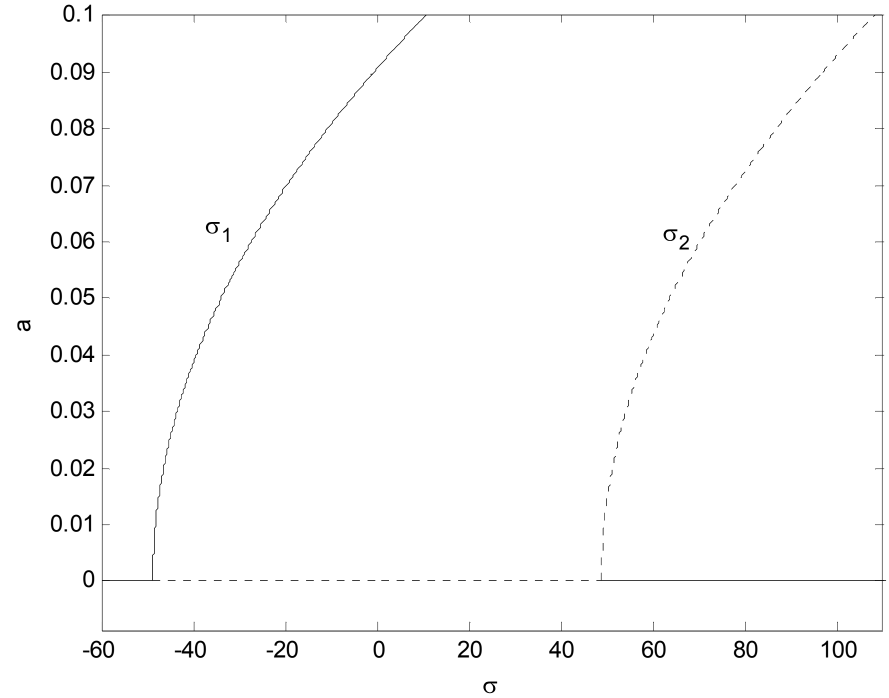
Şekil 3.55 – Üç mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.3)



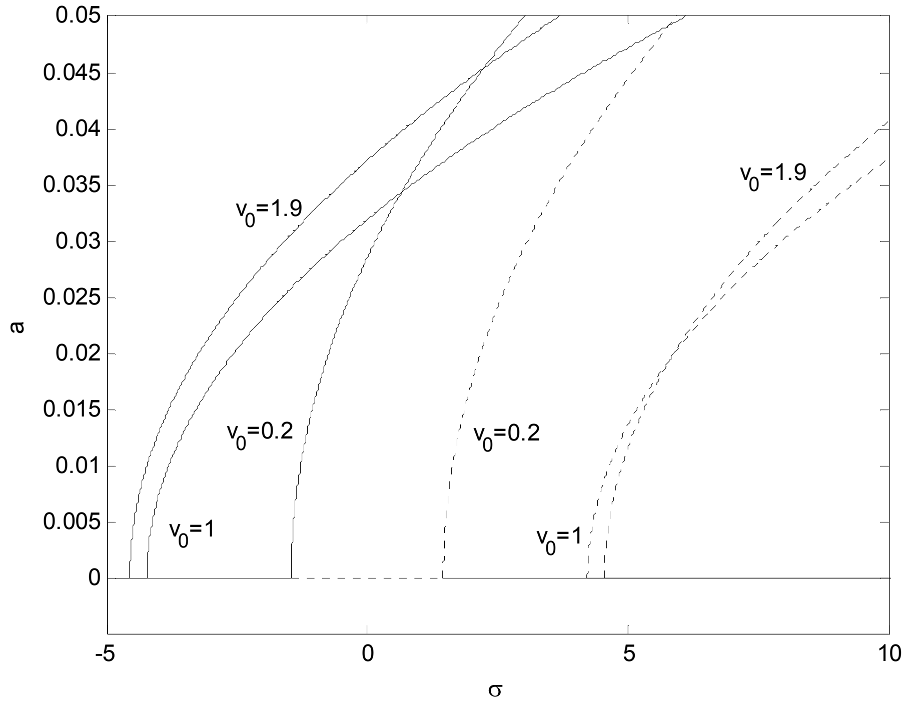
Şekil 3.56 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.3, v_0 =1.5)



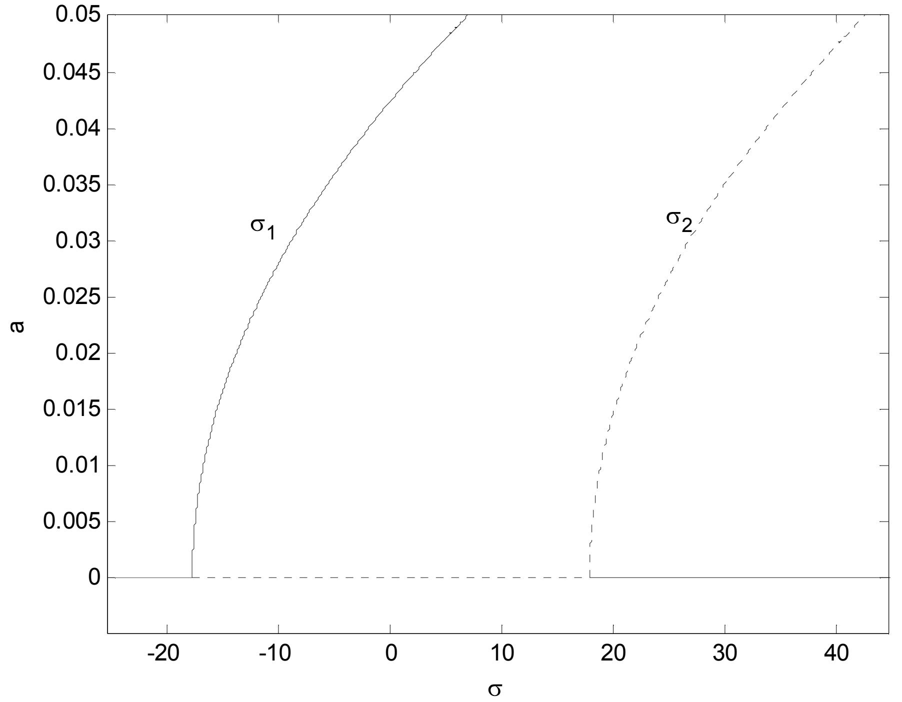
Şekil 3.57 – Üç mesnetli duruma ait v_0' ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.5)



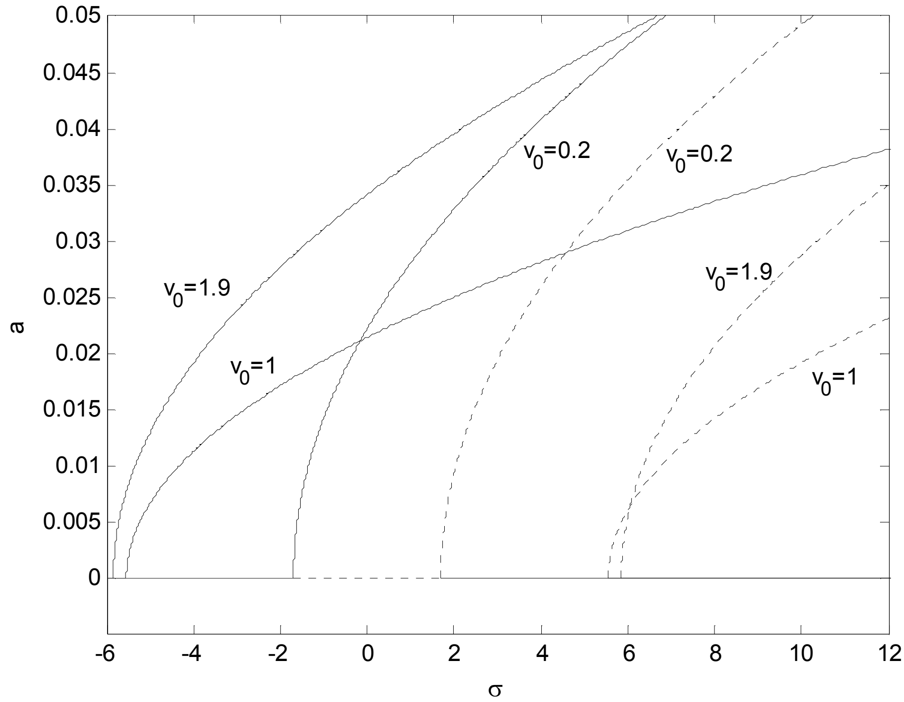
Şekil 3.58 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.5, v_0 =1.55)



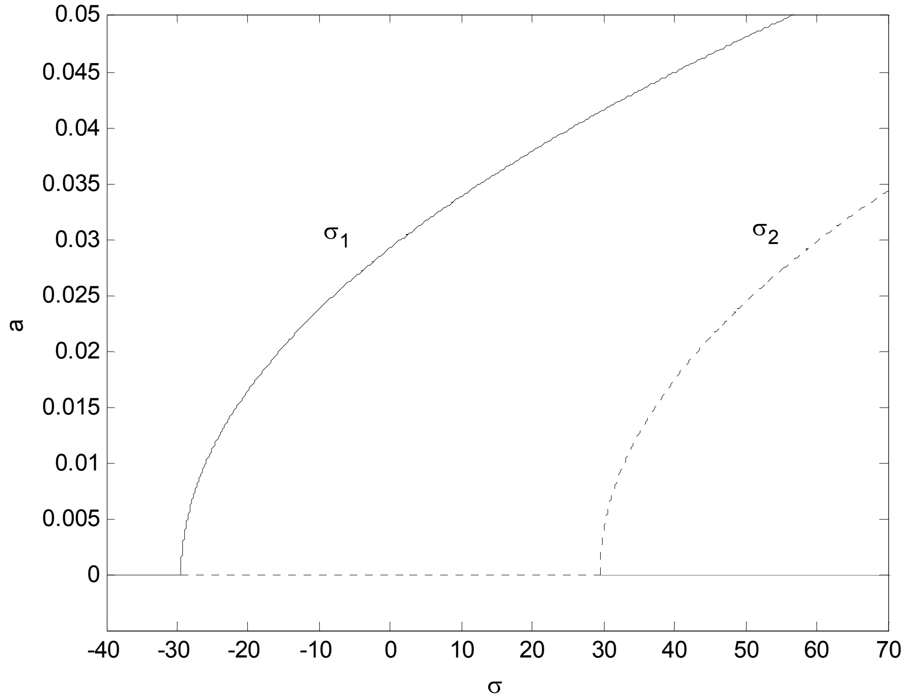
Şekil 3.59 – Üç mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η=0.1)



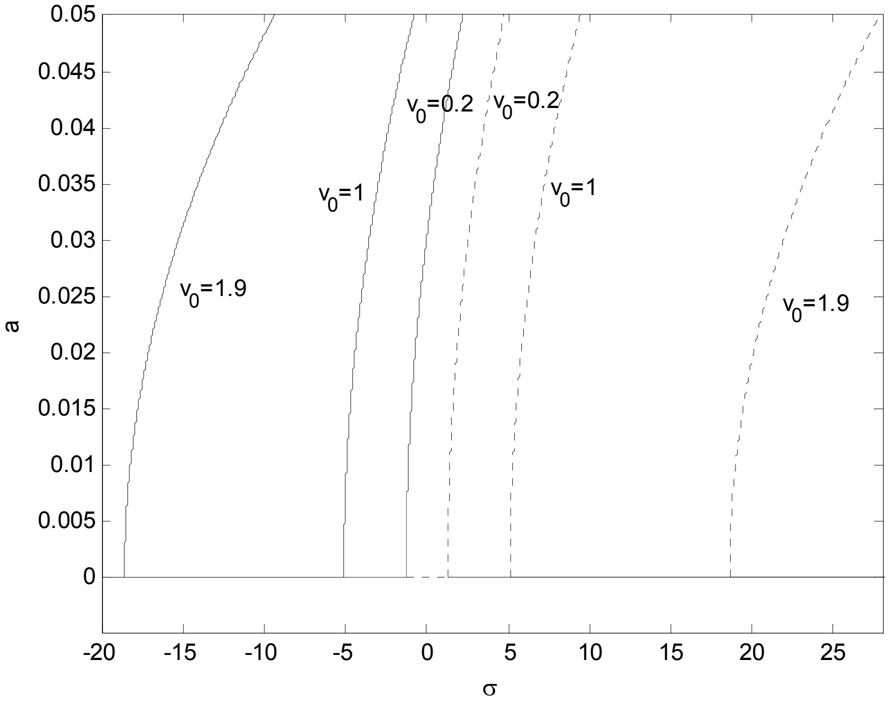
Şekil 3.60 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η=0.1, v_0 =2)



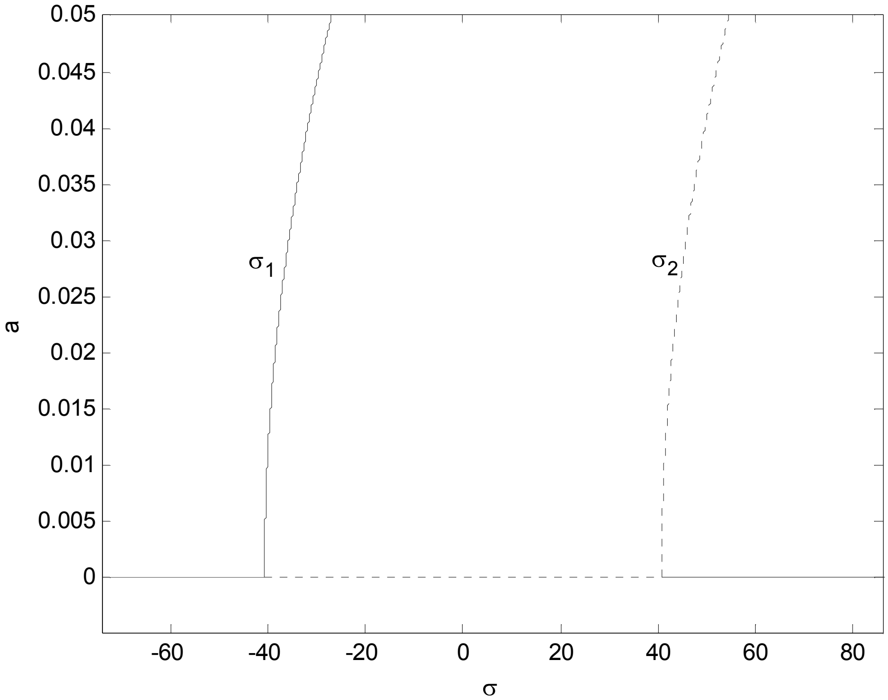
Şekil 3.61 – Üç mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η=0.3)



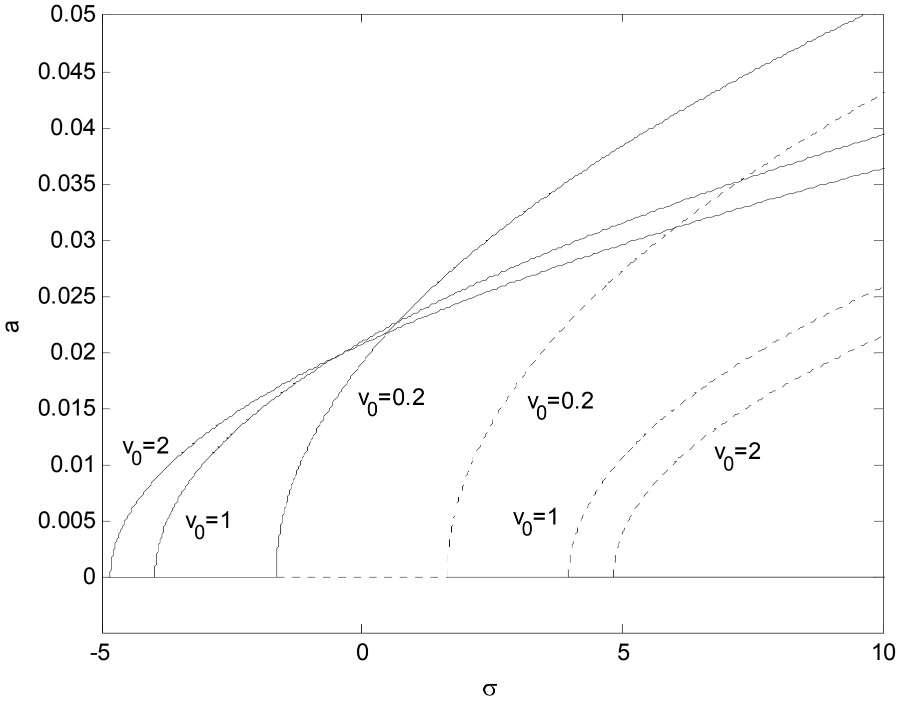
Şekil 3.62 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η=0.3, v_0 =2.15)



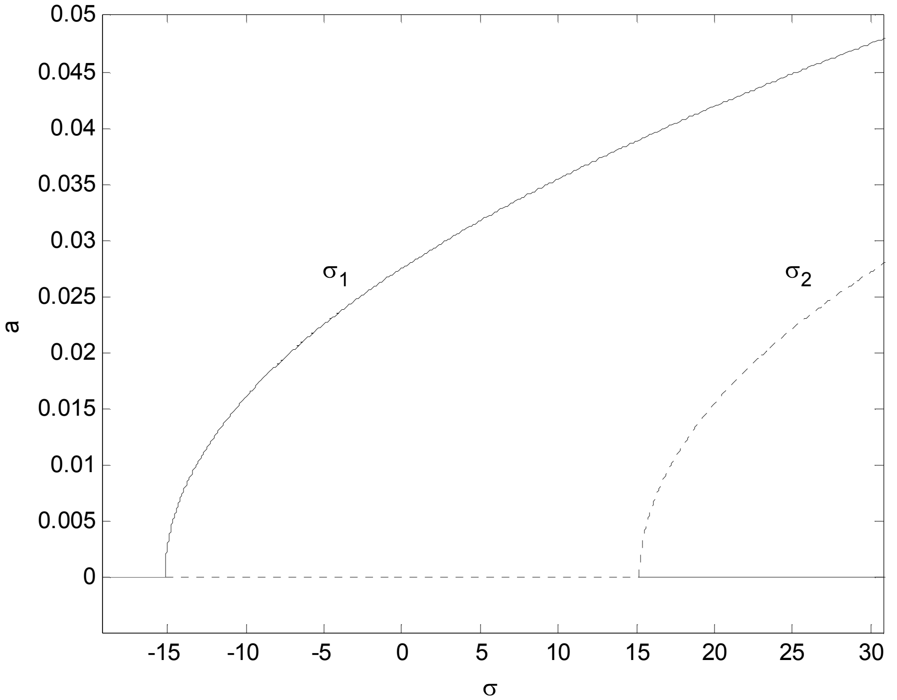
Şekil 3.63 – Üç mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η=0.5)



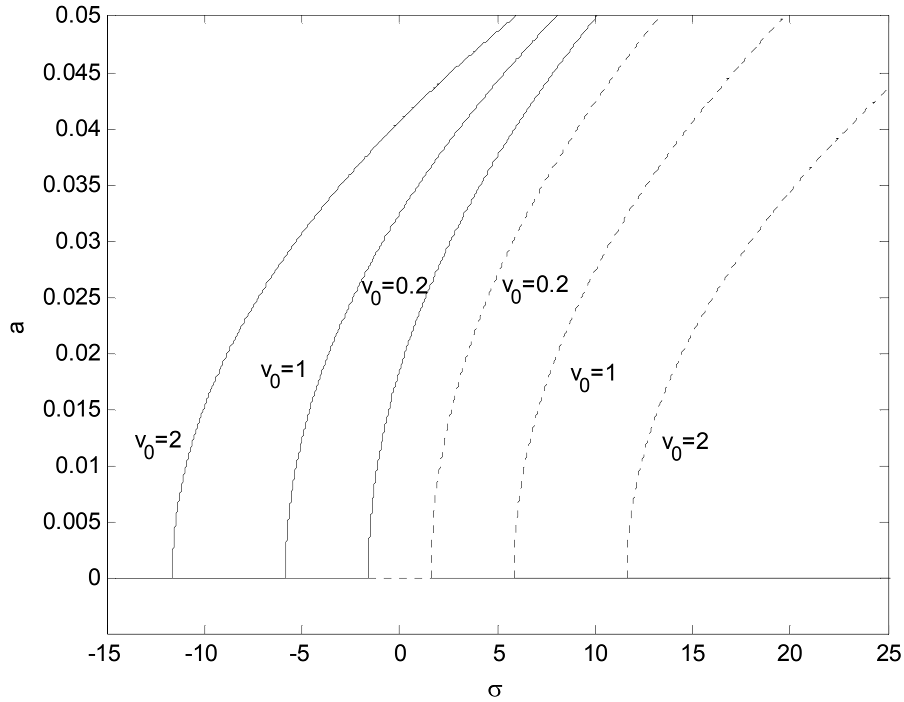
Şekil 3.64 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η=0.5, v_0 =2)



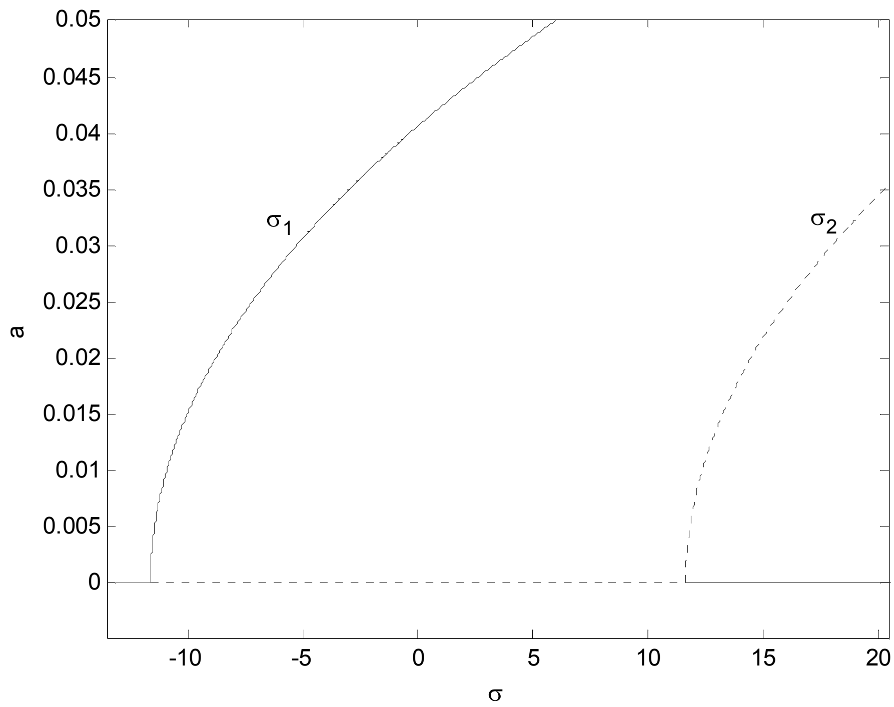
Şekil 3.65 – Üç mesnetli duruma ait v_0' ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.1)



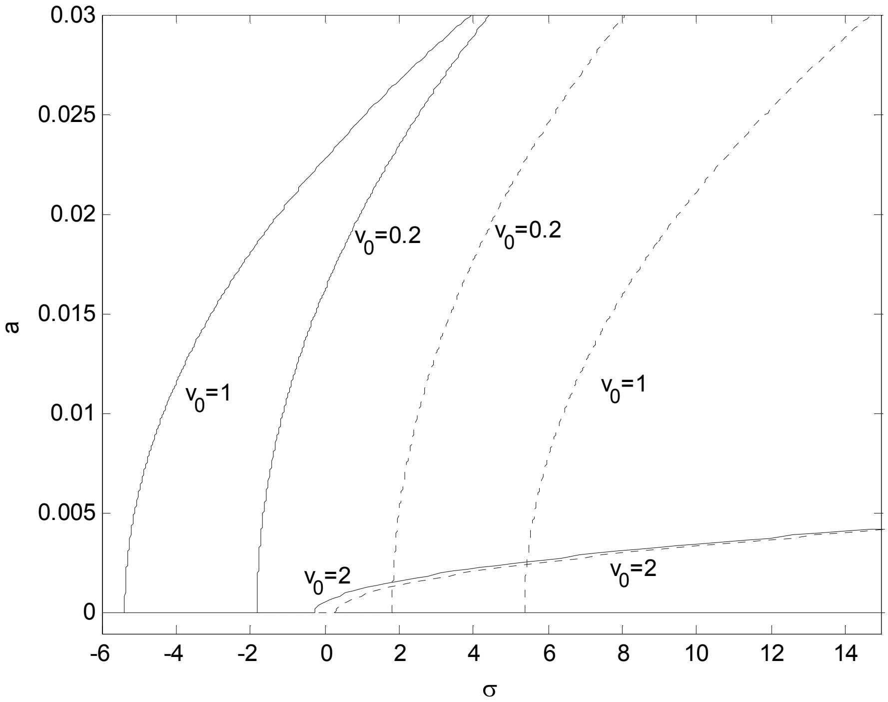
Şekil 3.66 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.1, v_0 =2.79)



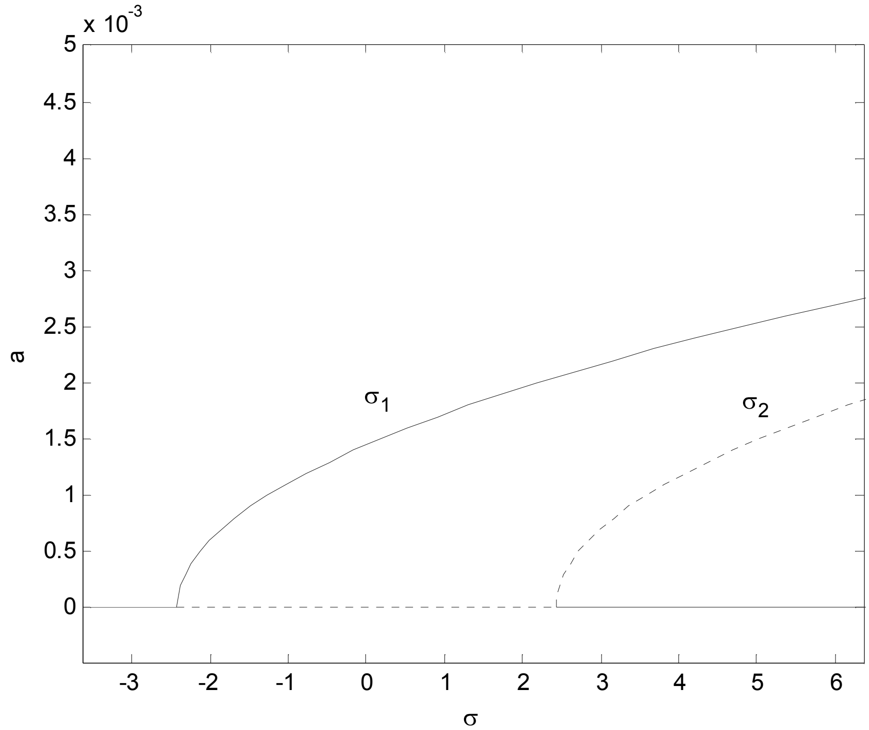
Şekil 3.67 – Üç mesnetli duruma ait v_0' ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.3)



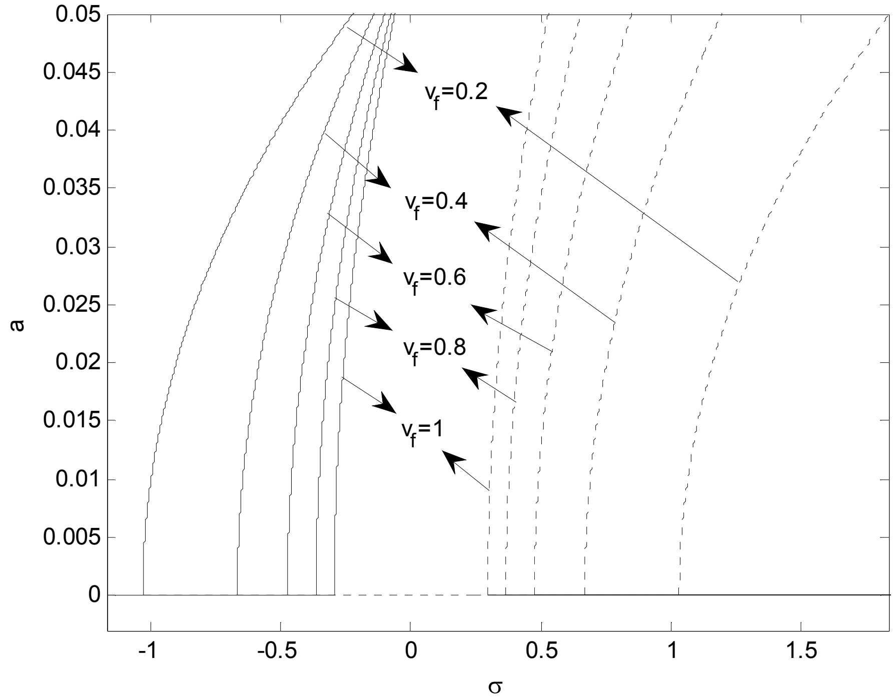
Şekil 3.68 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.3, v_0 =2)



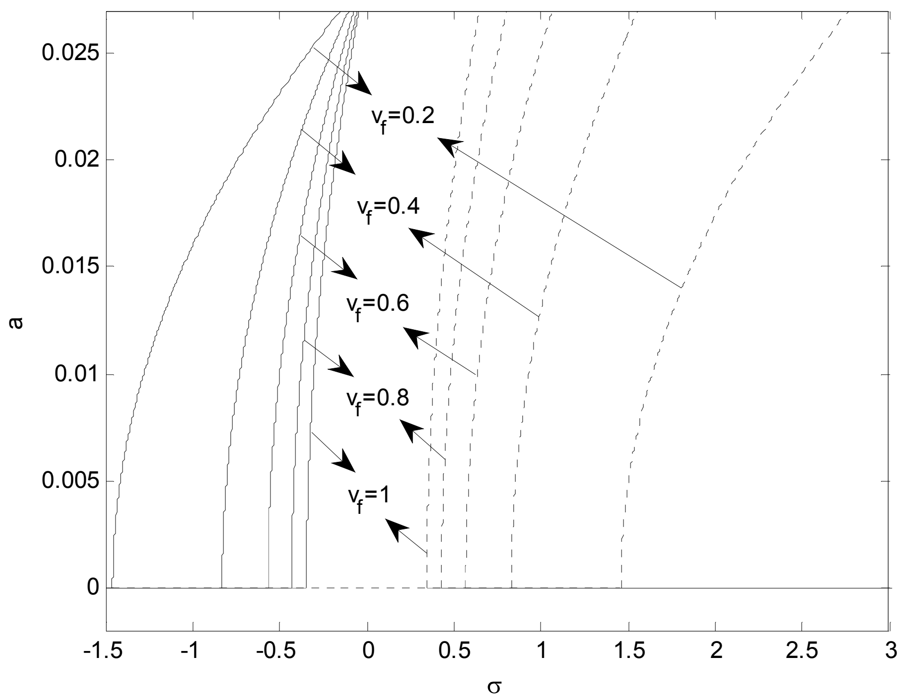
Şekil 3.69 – Üç mesnetli duruma ait v_0' ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.5)



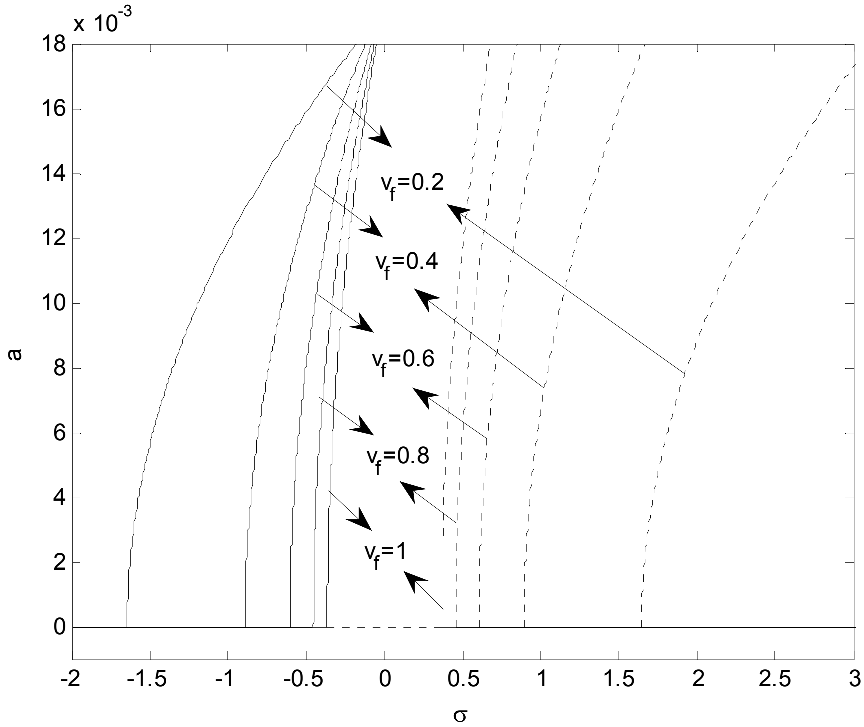
Şekil 3.70 – Üç mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.5, v_0 =2.7)



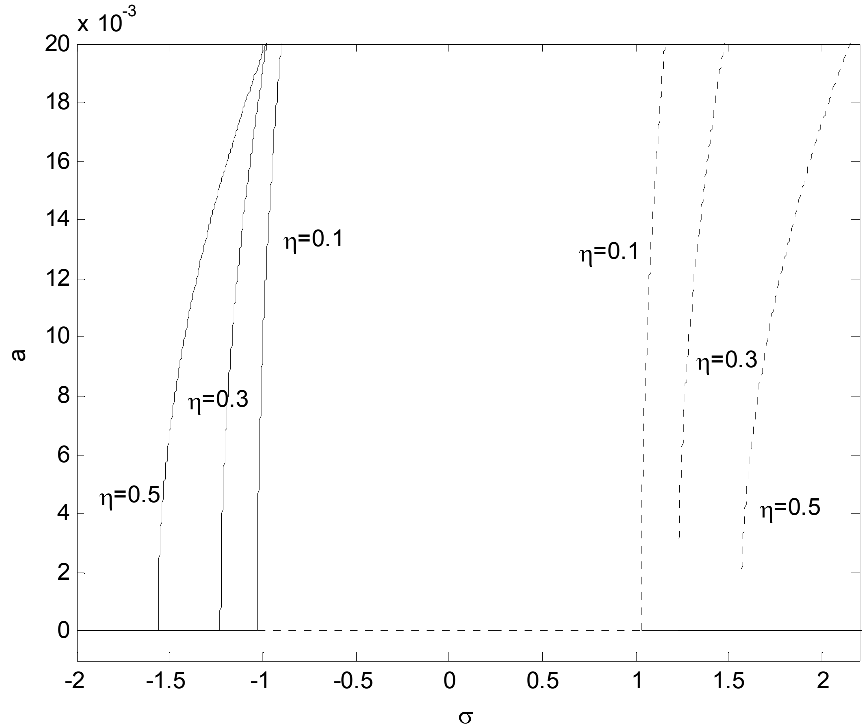
Şekil 3.71 – Üç mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, η =0.1, v_0 =0.2)



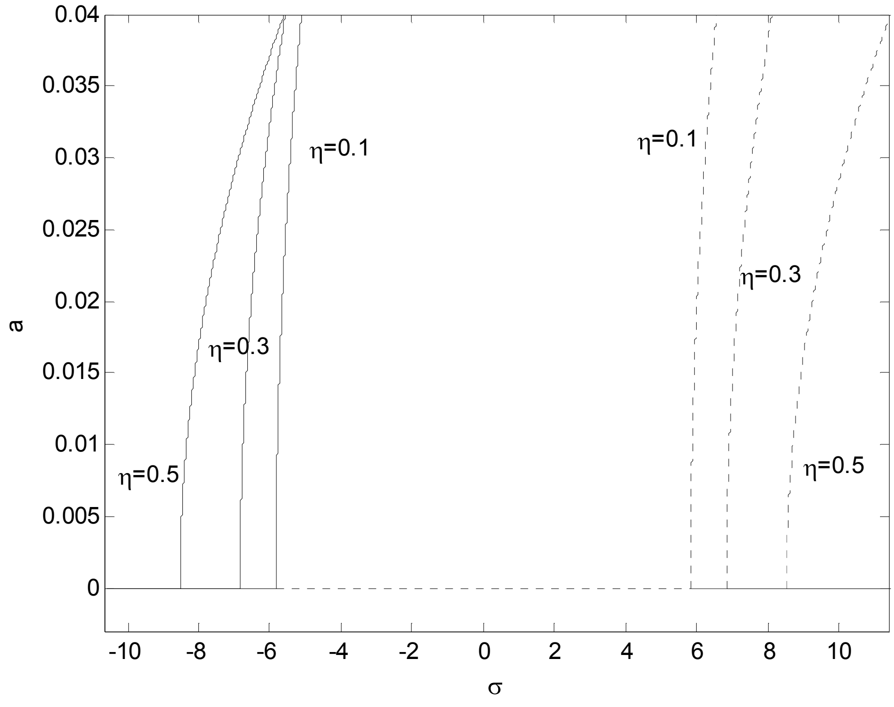
Şekil 3.72 – Üç mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, η =0.1, v_0 =0.2)



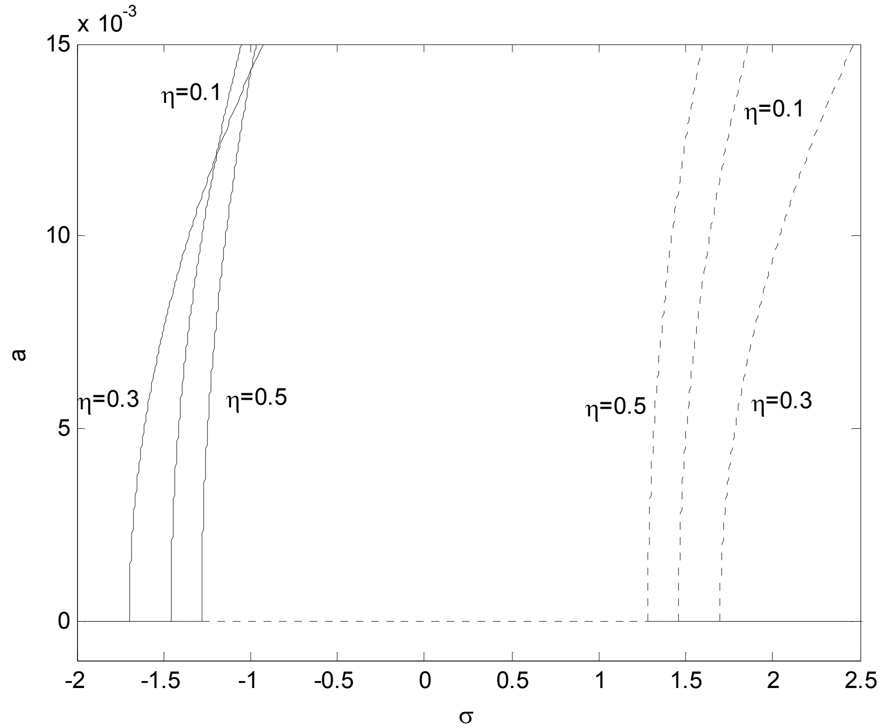
Şekil 3.73 – Üç mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, η =0.1, v_0 =0.2)



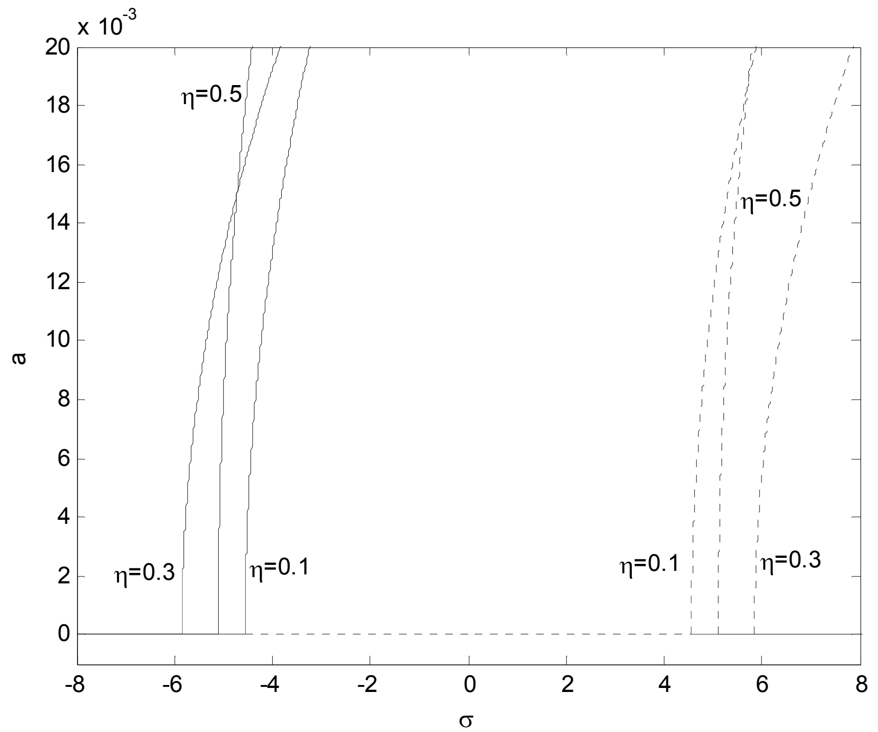
Şekil 3.74 – Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



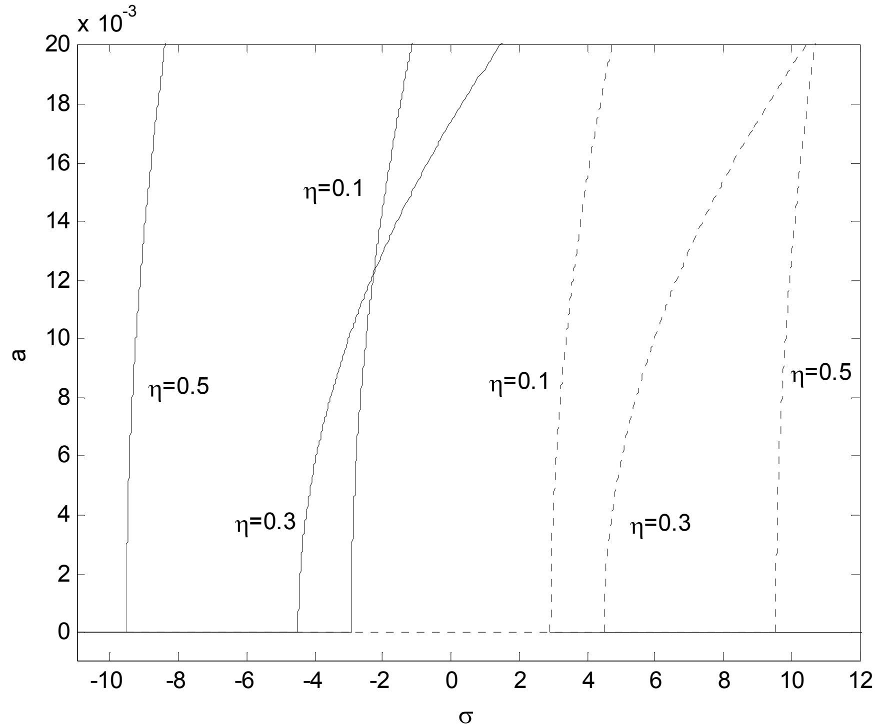
Şekil 3.75– Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



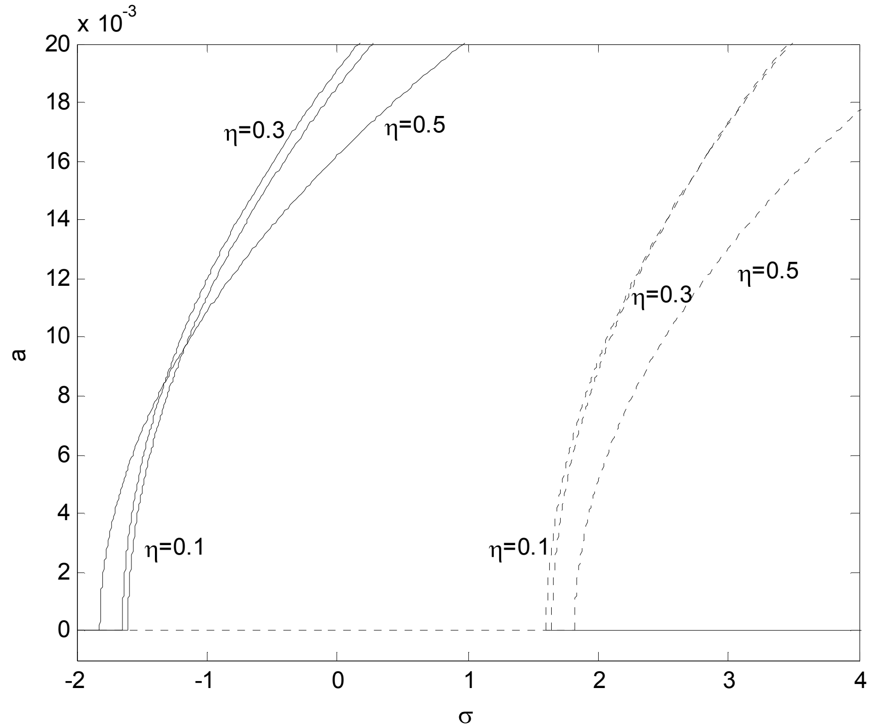
Şekil 3.76 – Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



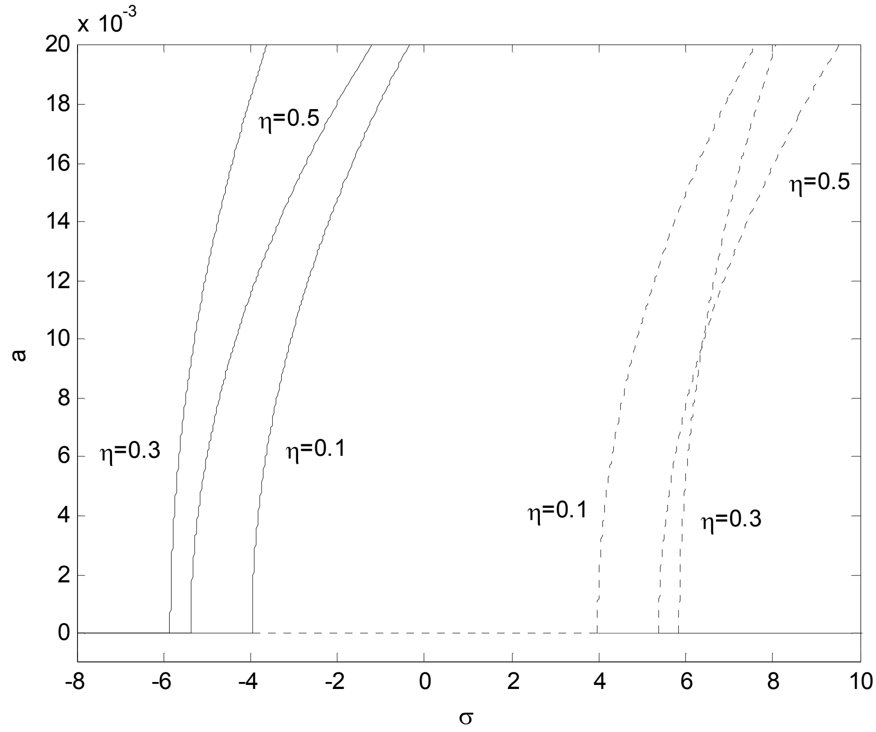
Şekil 3.77 – Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



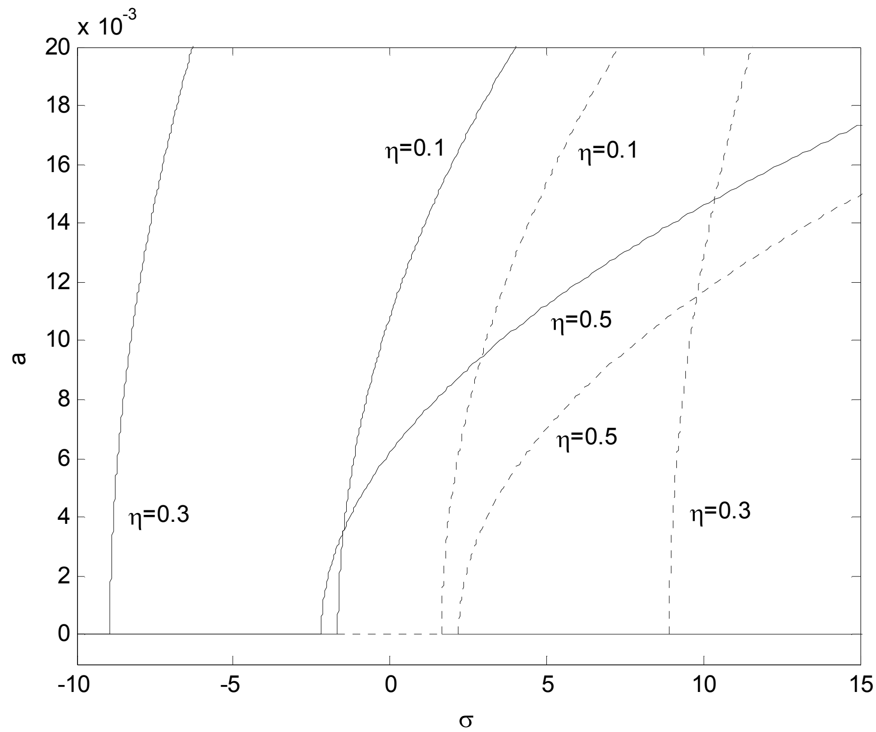
Şekil 3.78 – Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =1.7)



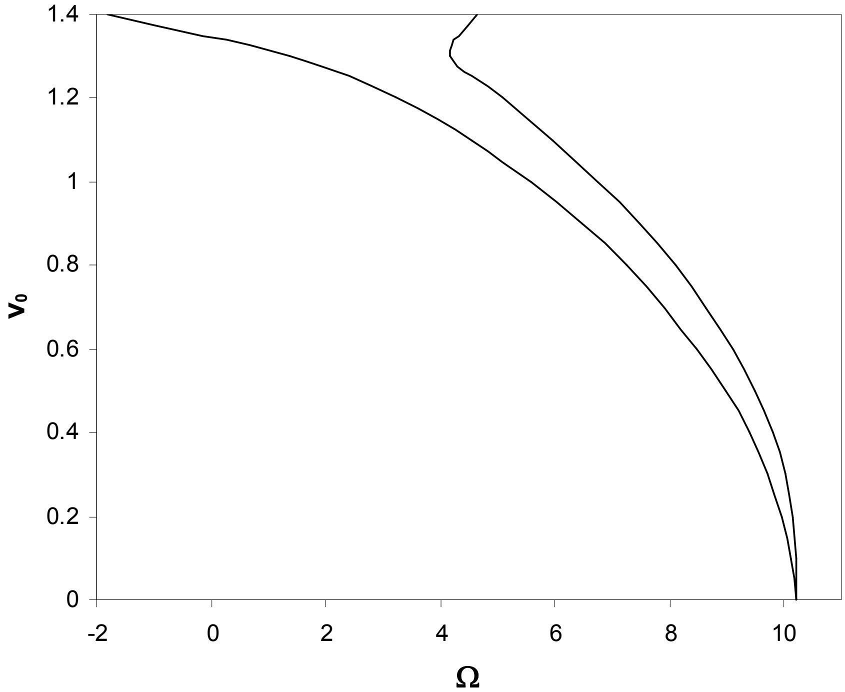
Şekil 3.79 – Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



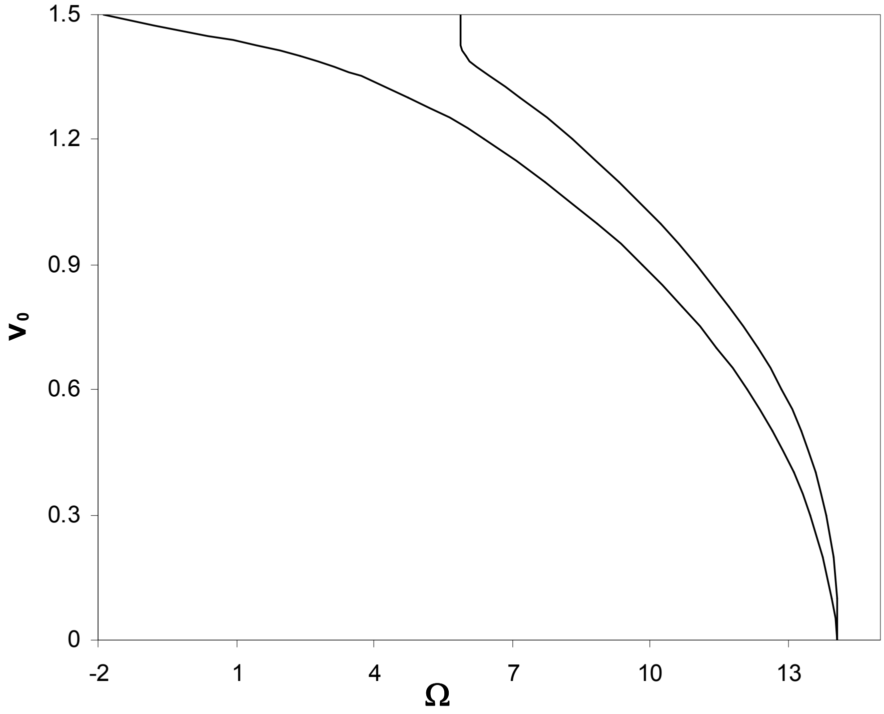
Şekil 3.80 – Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



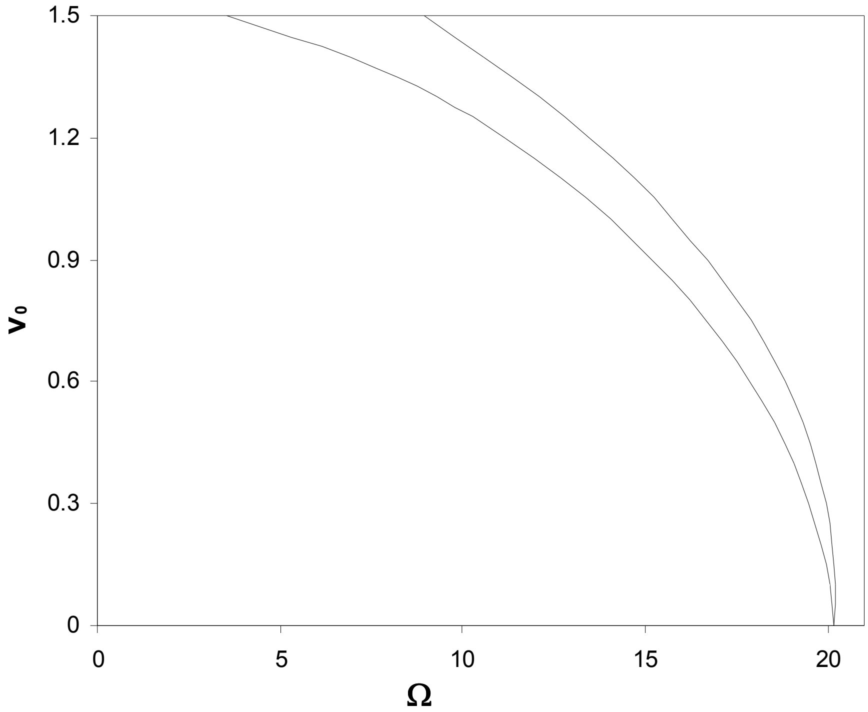
Şekil 3.81 – Üç mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =1.7)



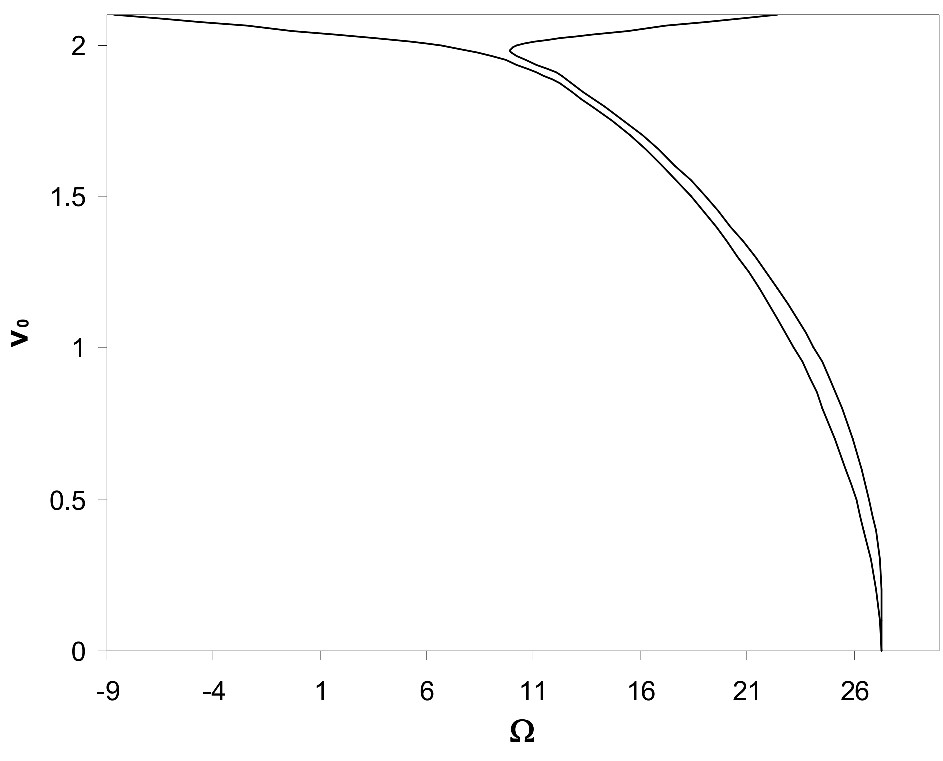
Şekil 3.82– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1.mod, v_f =0.2, η=0.1)



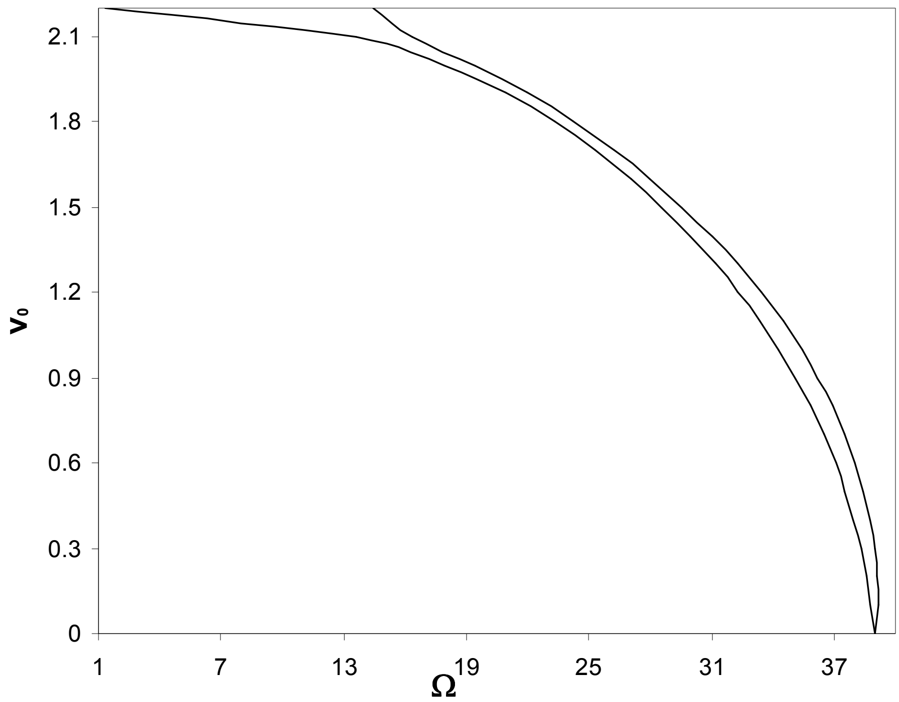
Şekil 3.83 – Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.3)



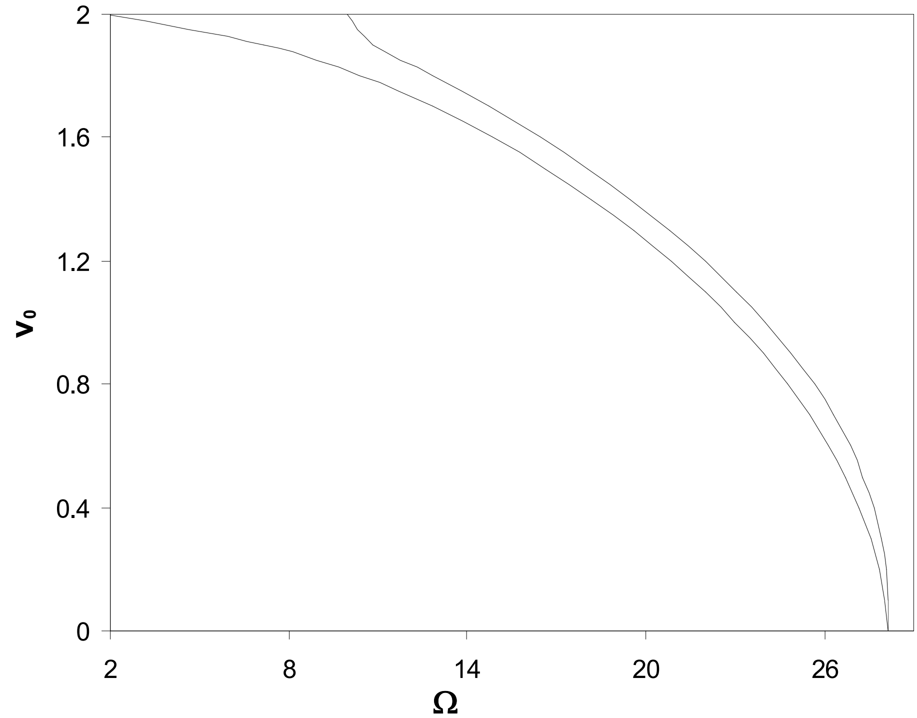
Şekil 3.84 – Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.5)



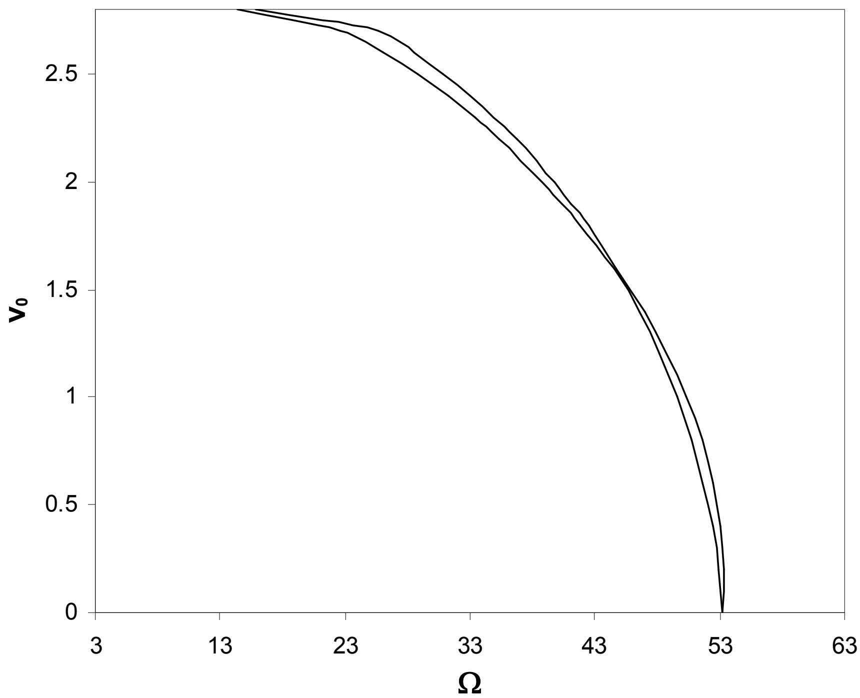
Şekil 3.85– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.2, η=0.1)



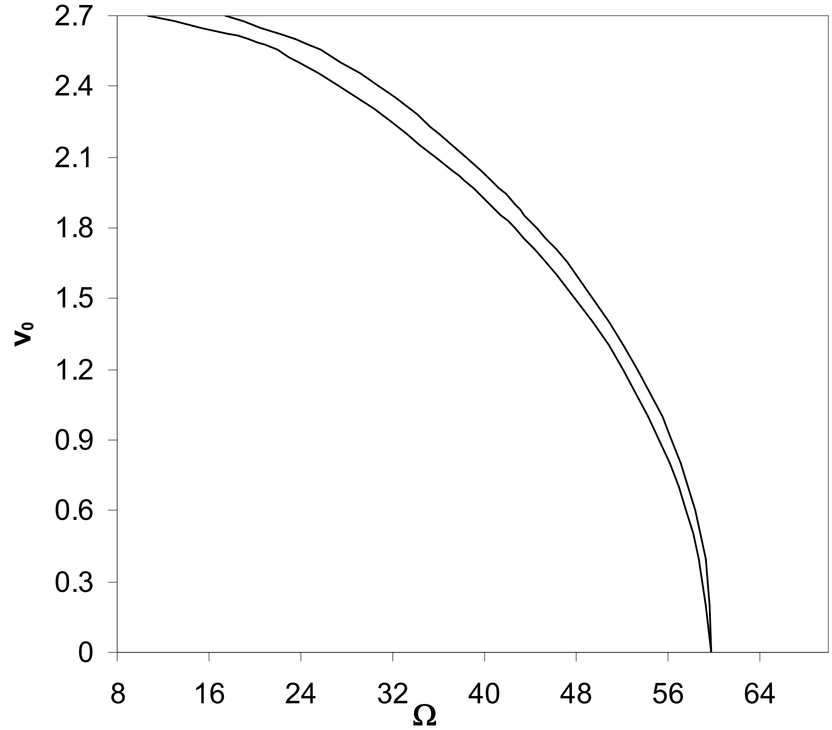
Şekil 3.86– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.2, η=0.3)



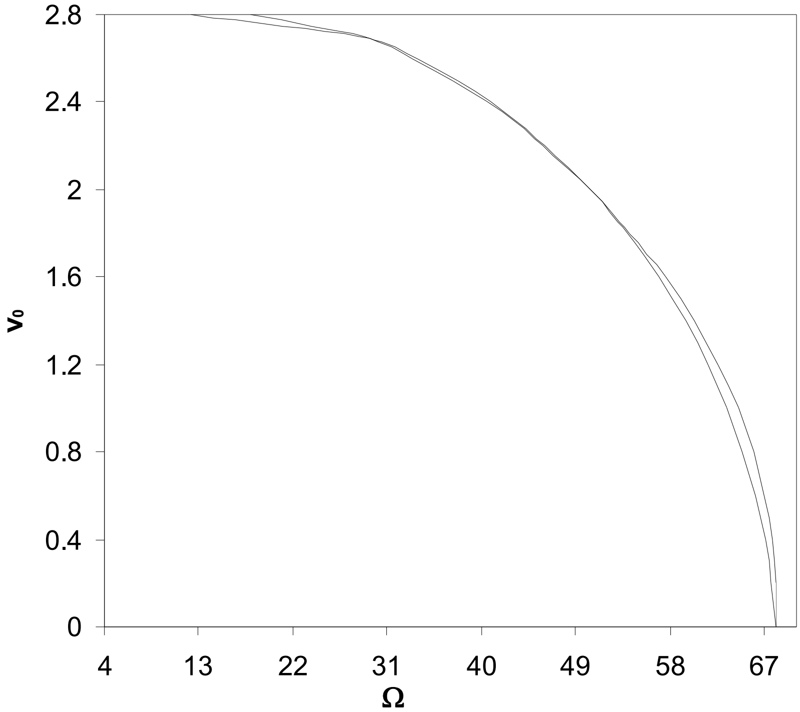
Şekil 3.87– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.2, η=0.5)



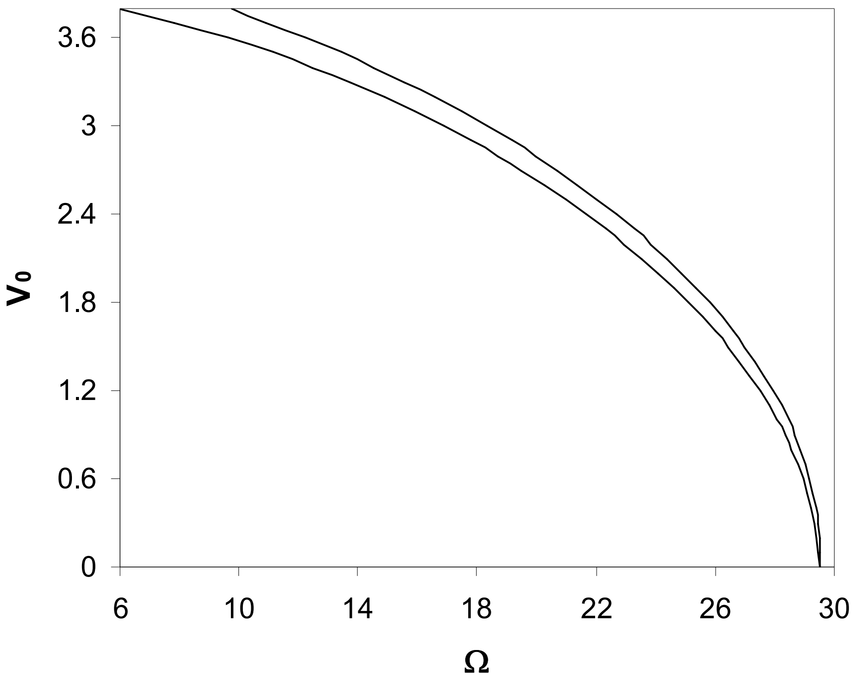
Şekil 3.88– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.2, η=0.1)



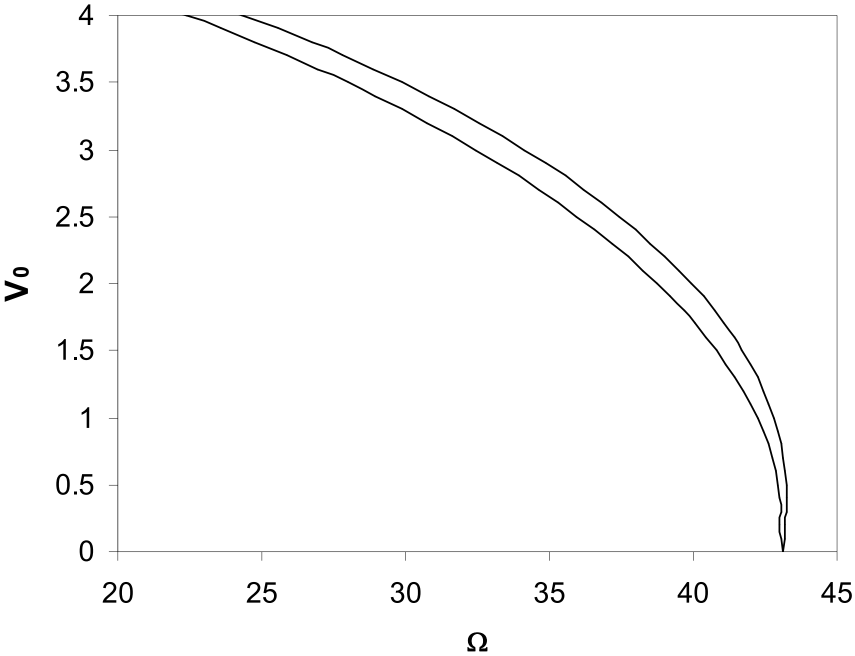
Şekil 3.89– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.2, η=0.3)



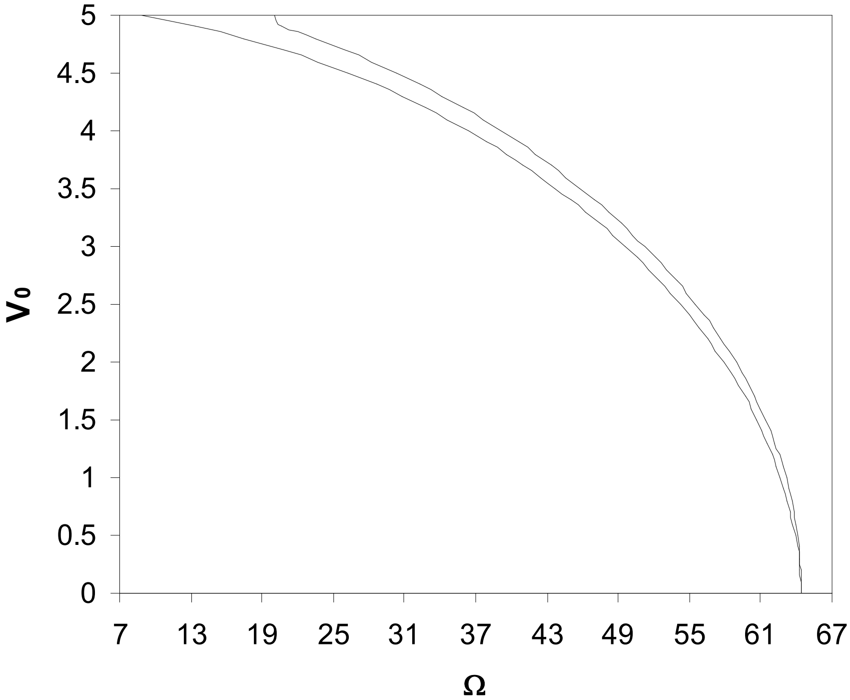
Şekil 3.90– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.2, η=0.5)



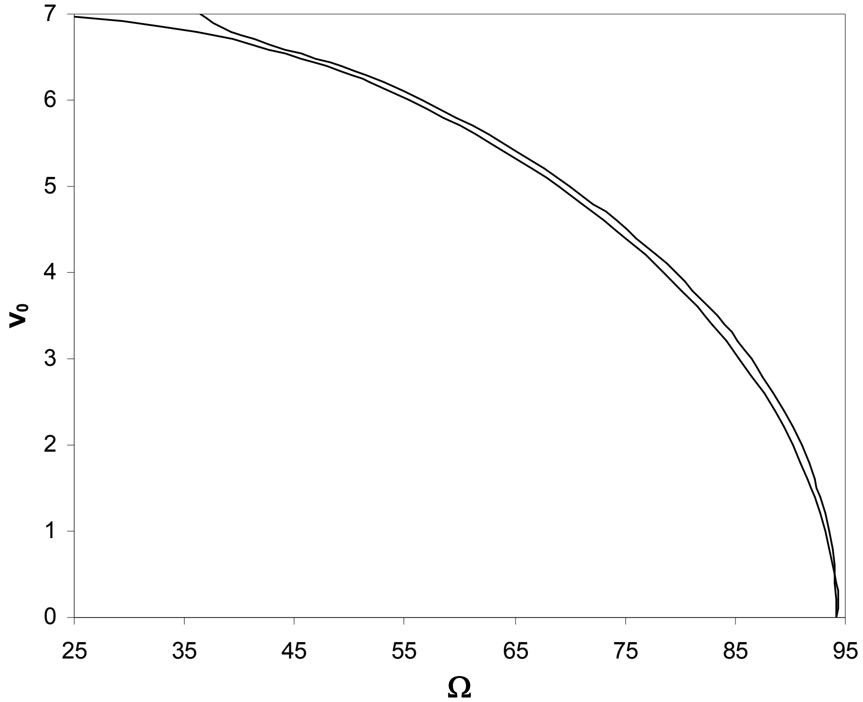
Şekil 3.91 – Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.8, η=0.1)



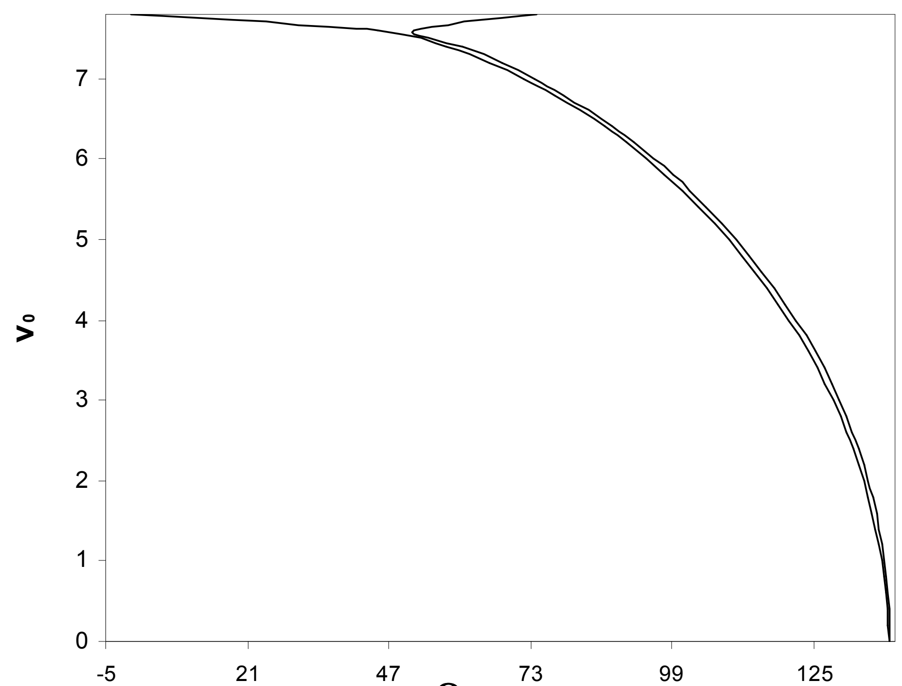
Şekil 3.92 – Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.8, η=0.3)



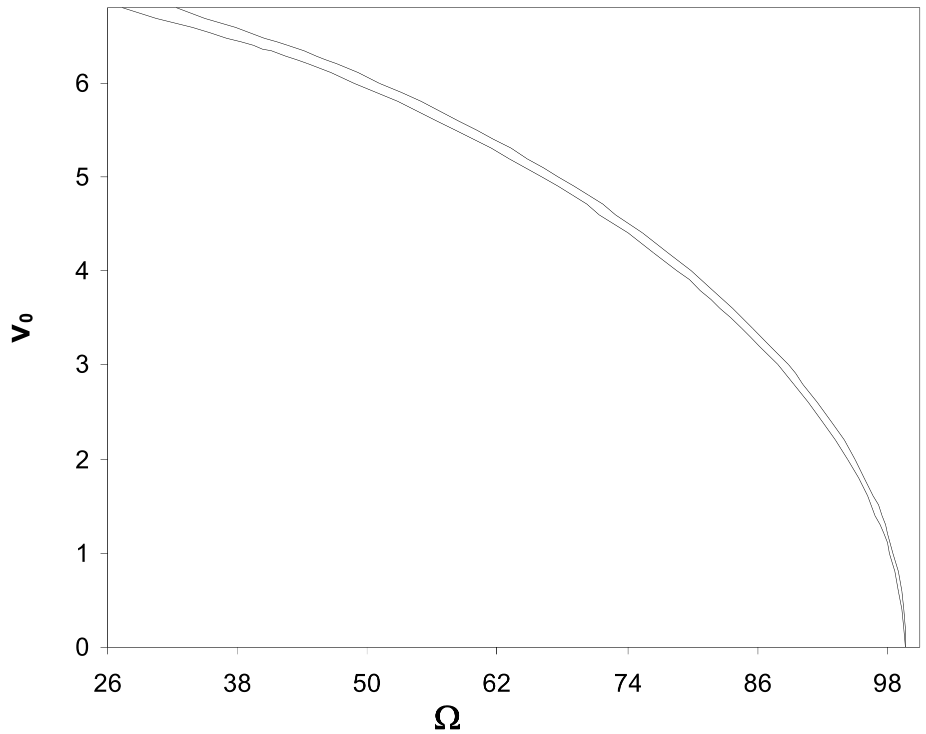
Şekil 3.93 – Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.8, η=0.5)



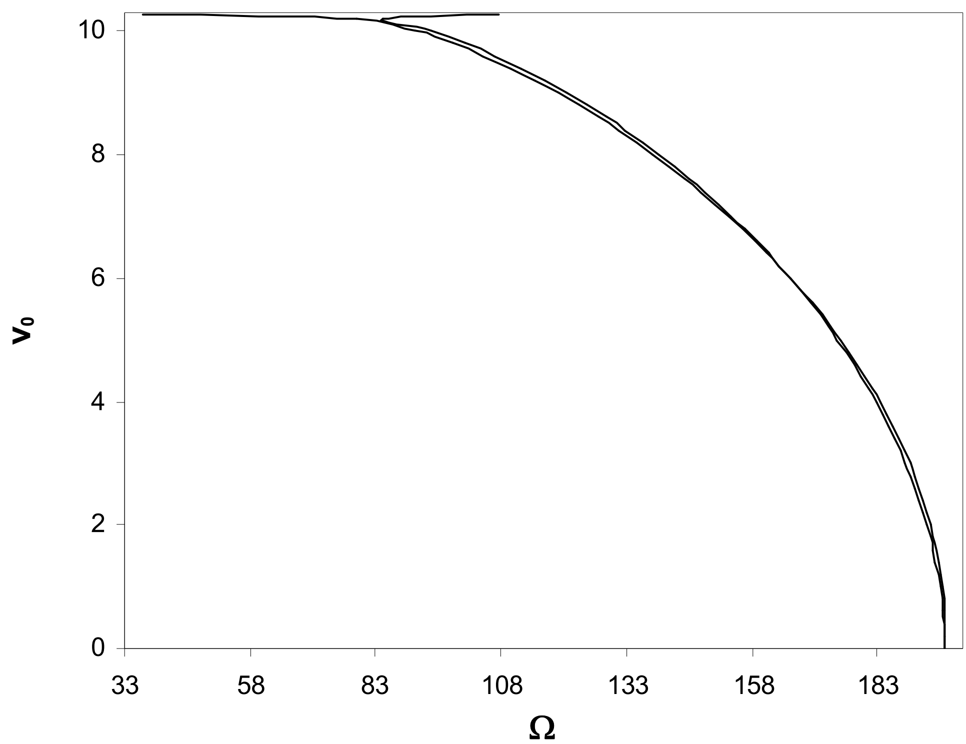
Şekil 3.94– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.8, η=0.1)



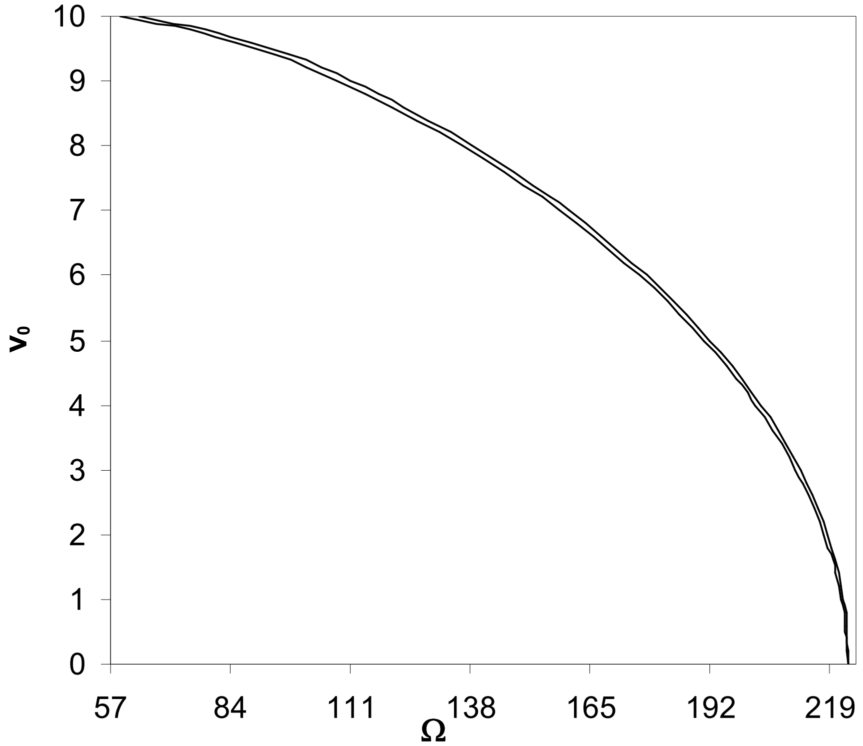
Şekil 3.95– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.8, η=0.3)



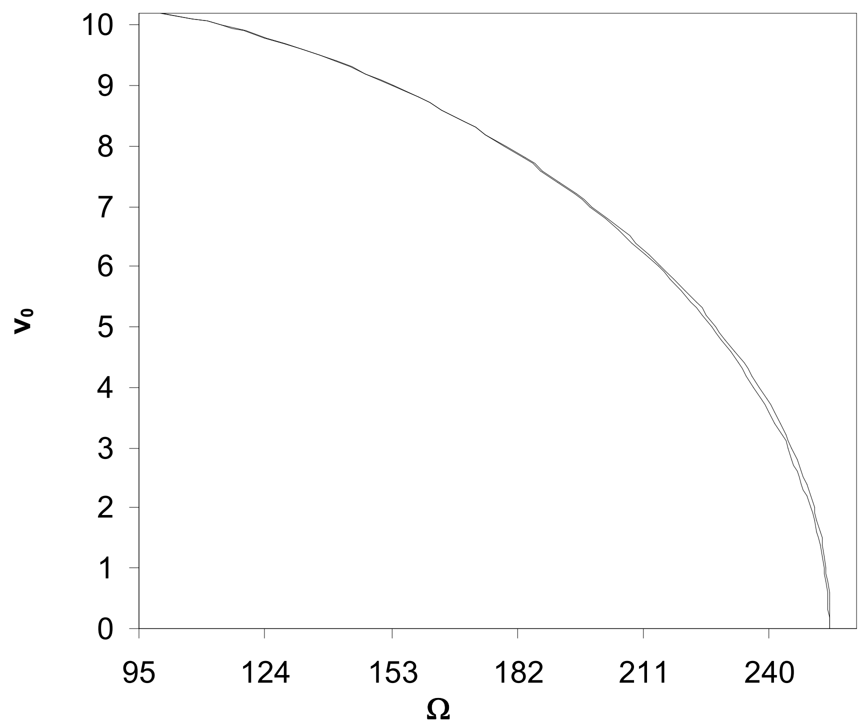
Şekil 3.96– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.8, η=0.5)



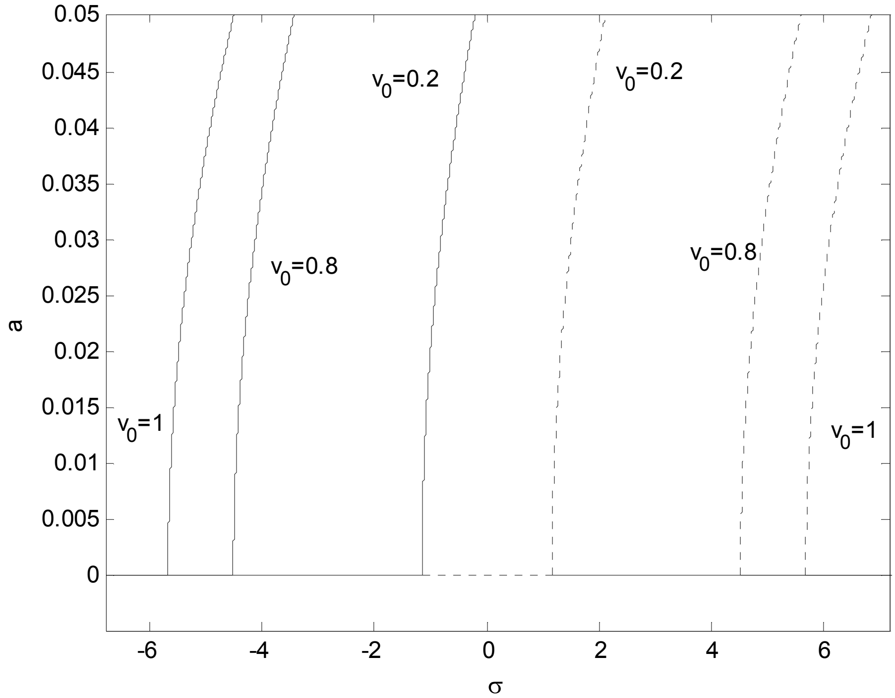
Şekil 3.97– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.8, η=0.1)



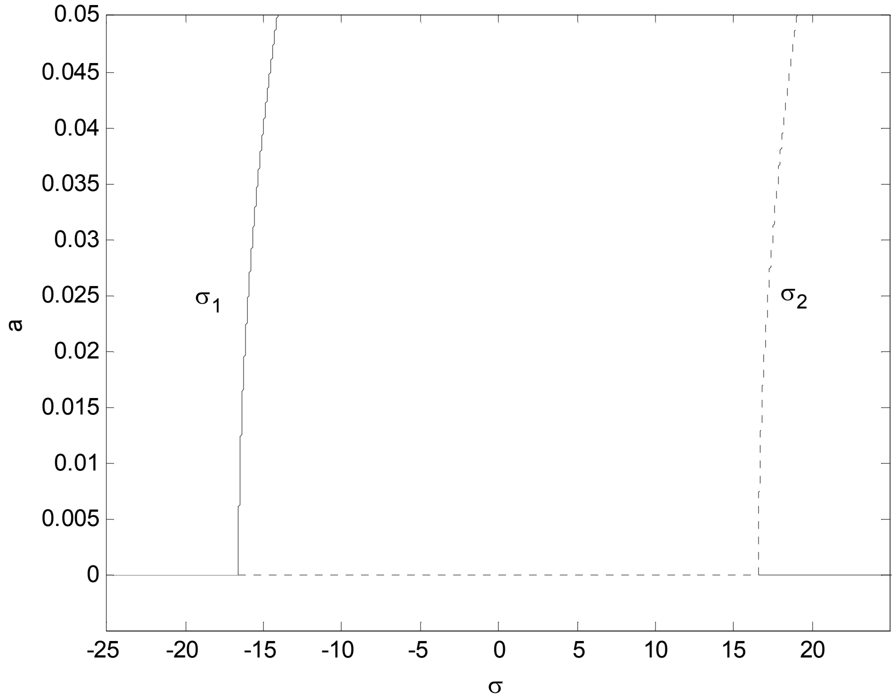
Şekil 3.98– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.8, η=0.3)



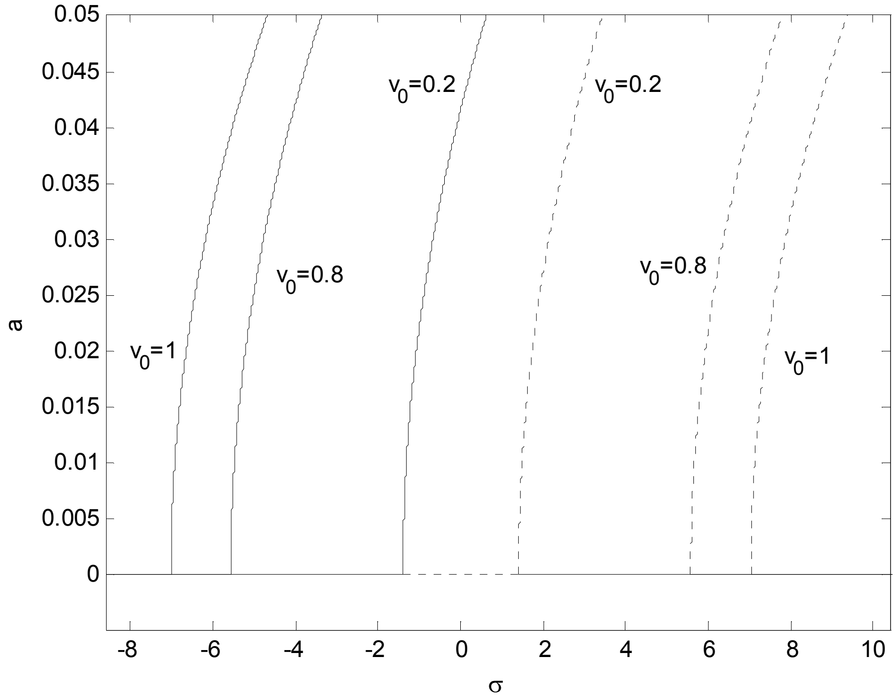
Şekil 3.99– Üç mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.8, η=0.5)



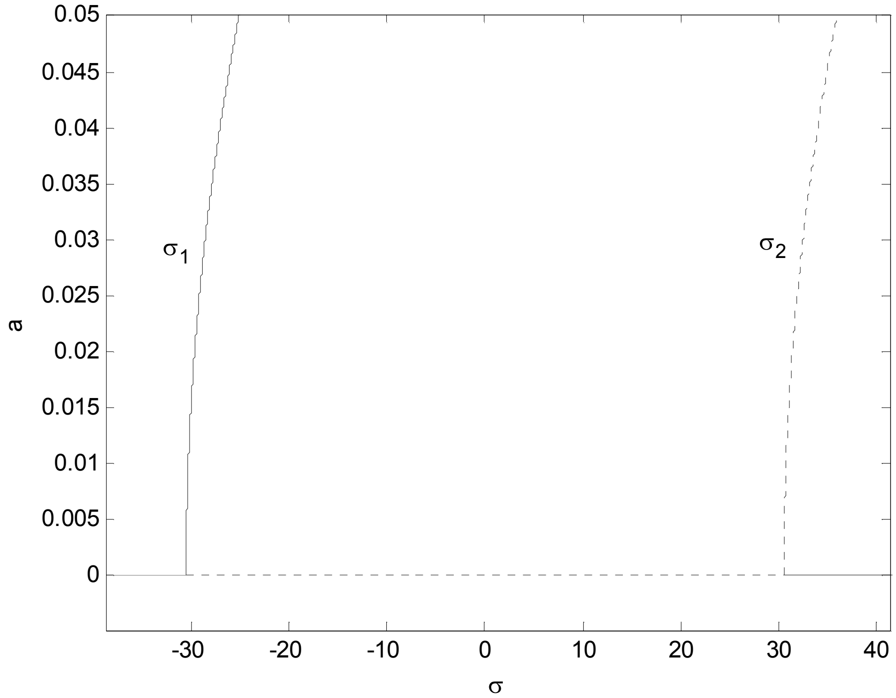
Şekil 3.100 – Dört Mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



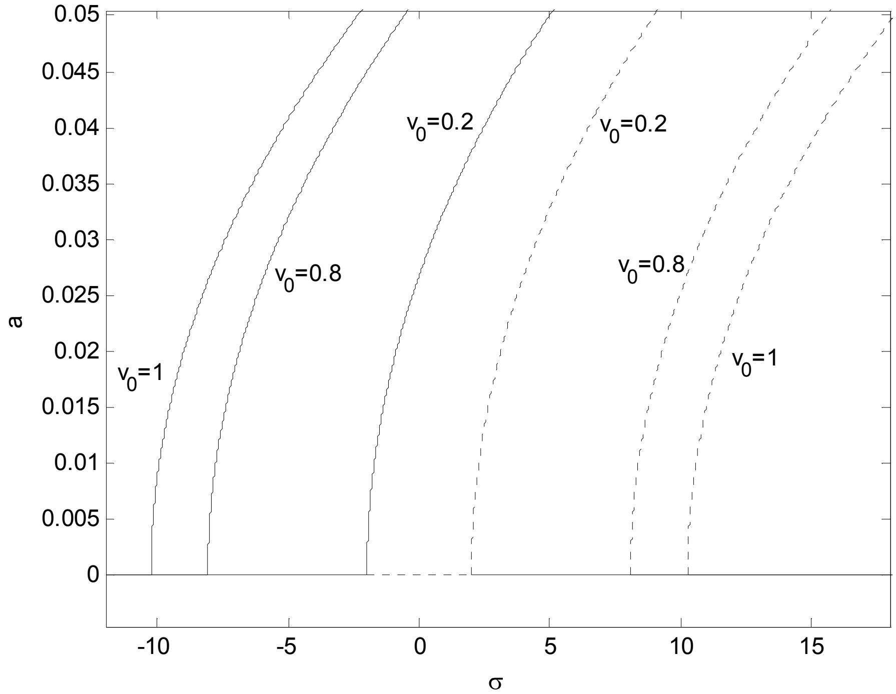
Şekil 3.101 – Dört Mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9, , v_0 =1.7)



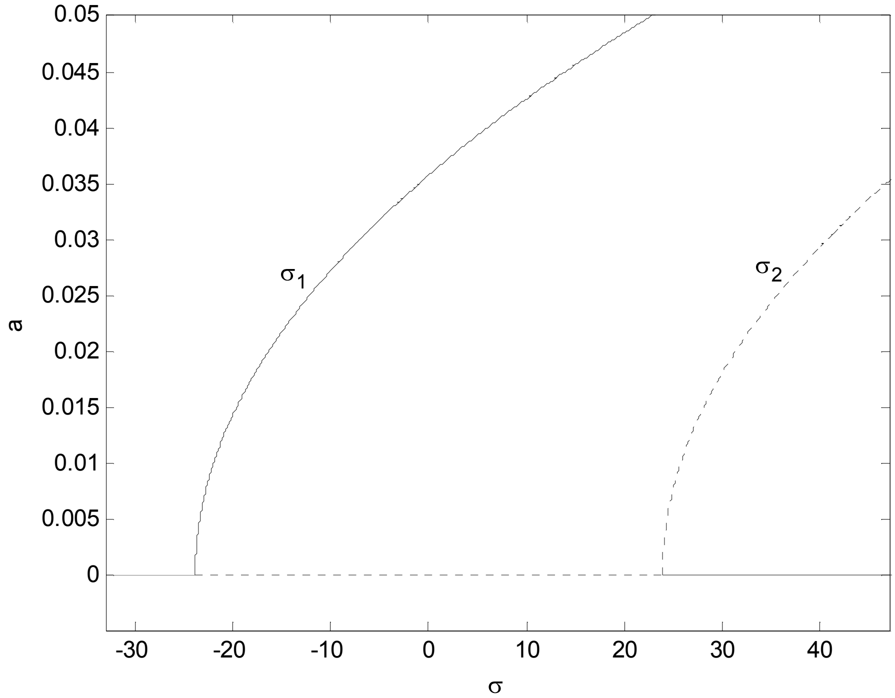
Şekil 3.102 – Dört Mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



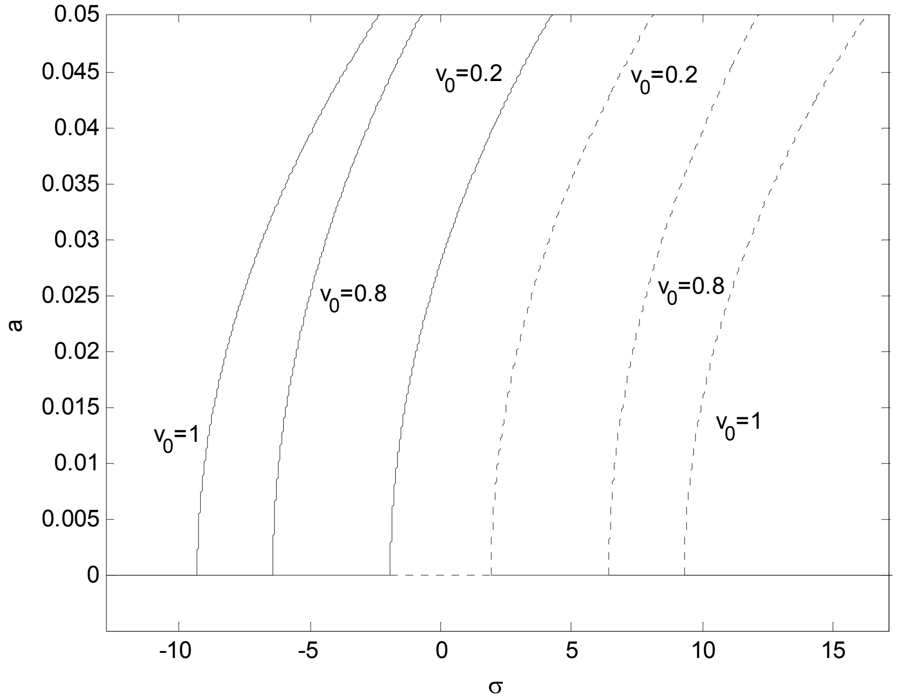
Şekil 3.103 – Dört Mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8, v_0 =1.9)



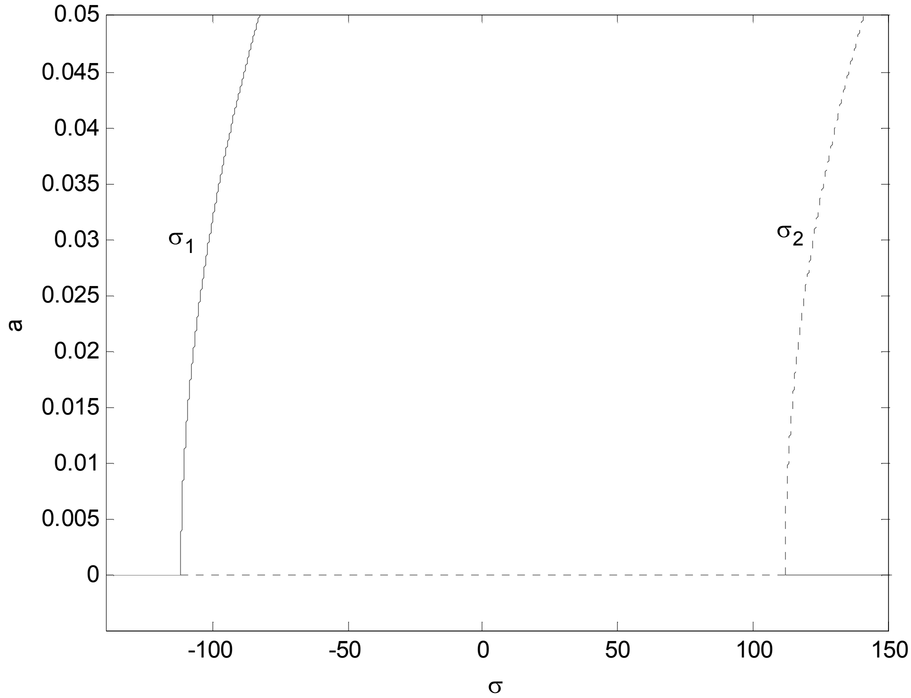
Şekil 3.104 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



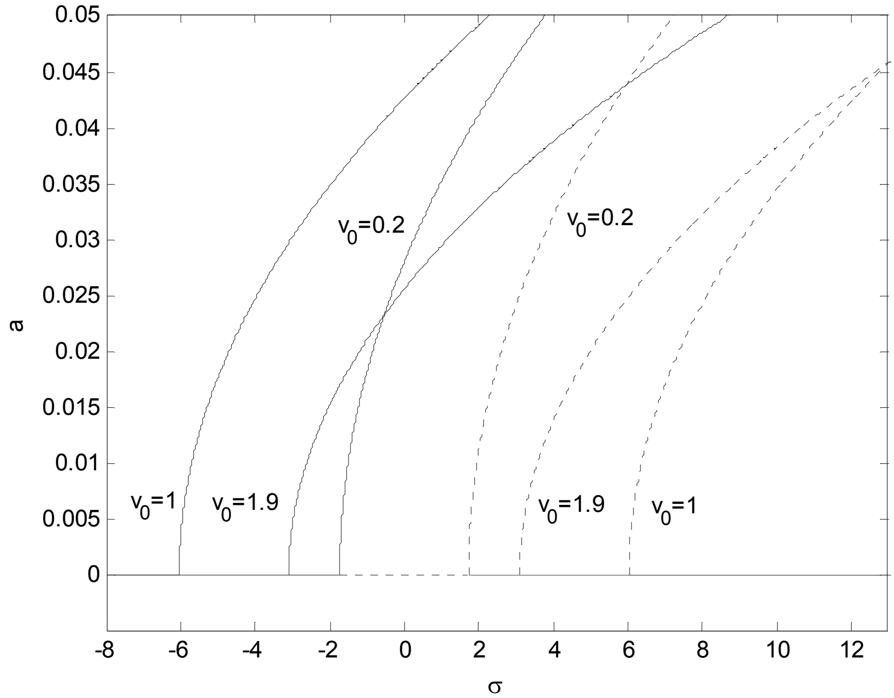
Şekil 3.105 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7, v_0 =2.1)



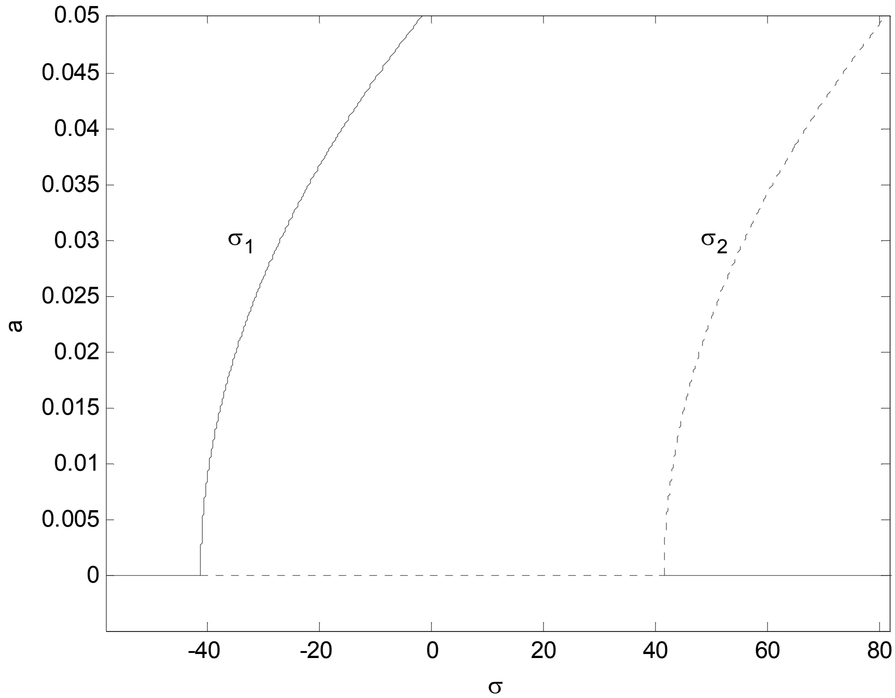
Şekil 3.106 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



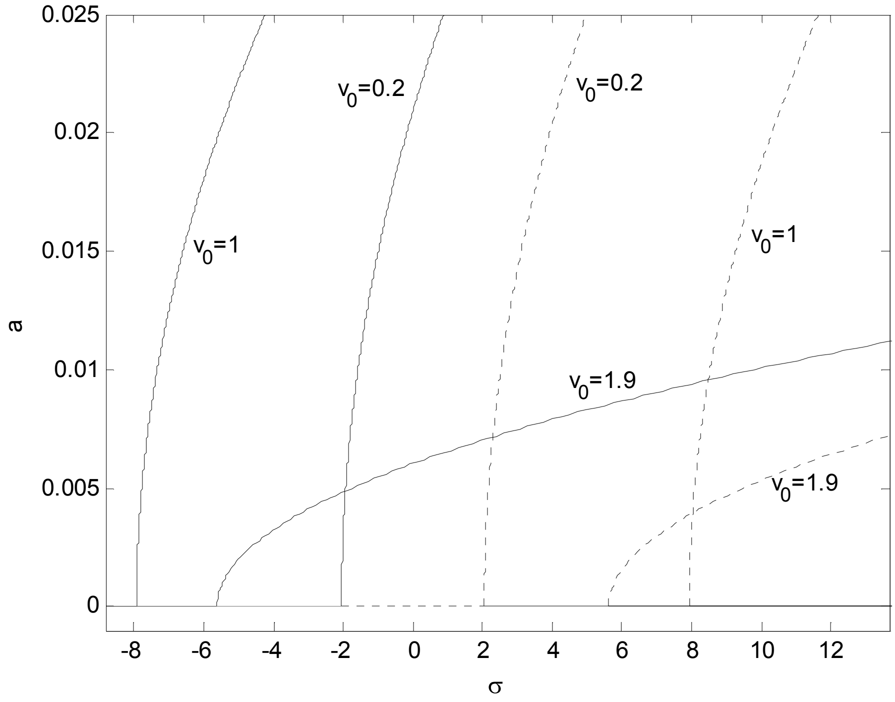
Şekil 3.107 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6, v_0 =2.1)



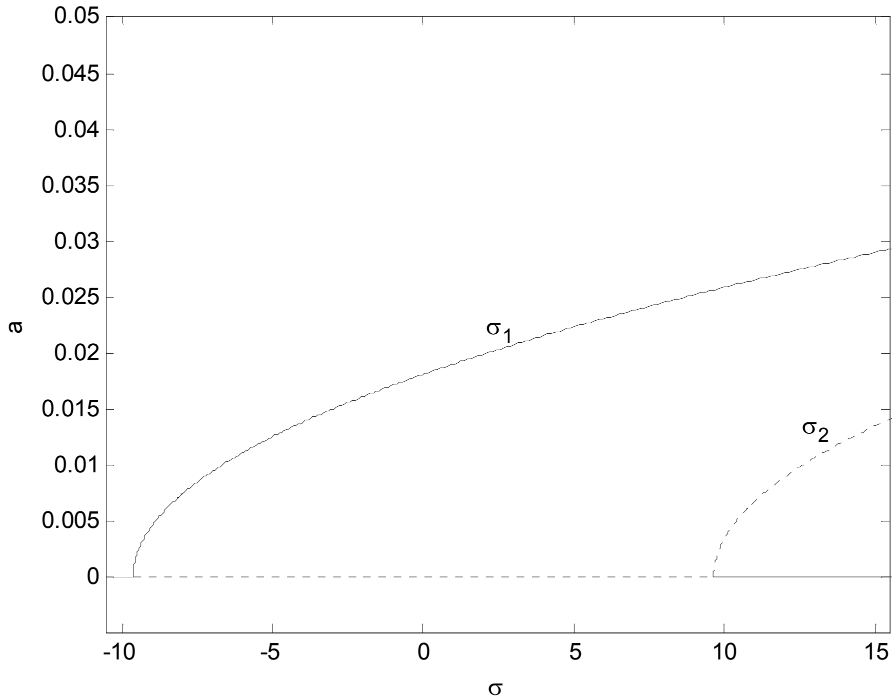
Şekil 3.108 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



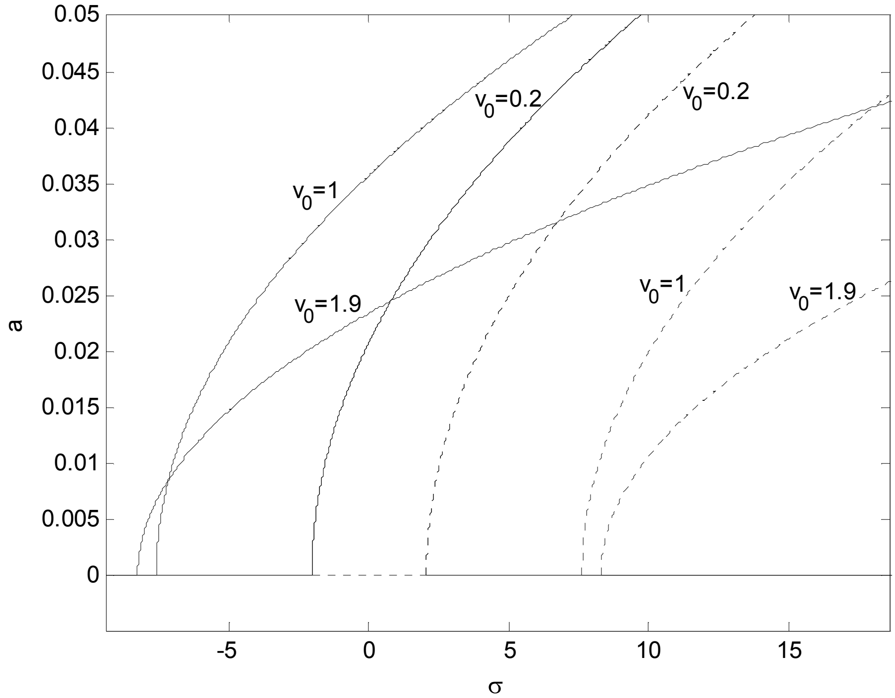
Şekil 3.109 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9, v_0 =2.5)



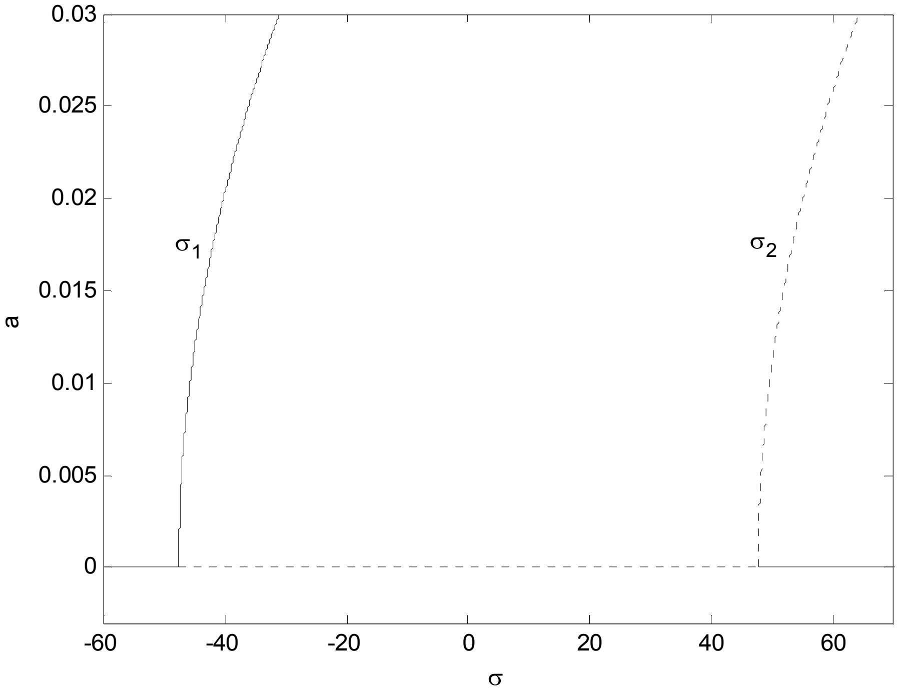
Şekil 3.110 – Dört mesnetli duruma ait v_0' ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



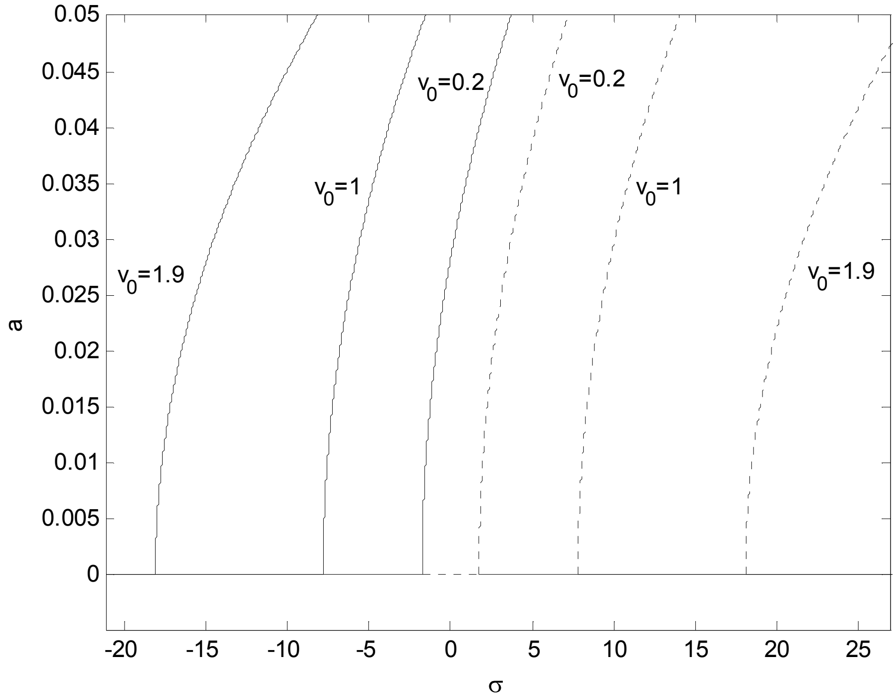
Şekil 3.111 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8, v_0 =2.7)



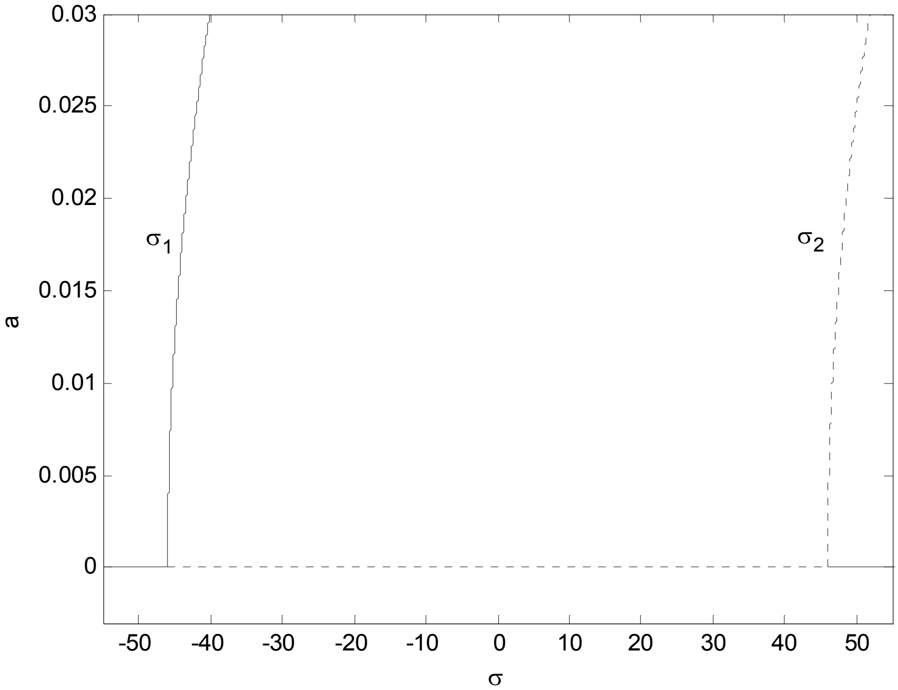
Şekil 3.112 – Dört mesnetli duruma ait v_0' ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



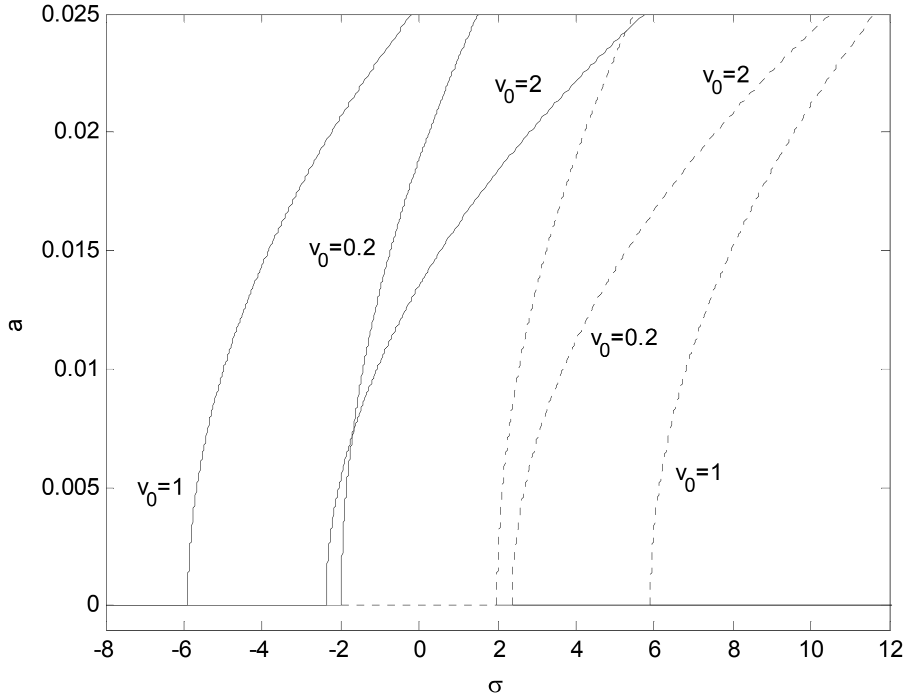
Şekil 3.113 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7, v_0 =2.5)



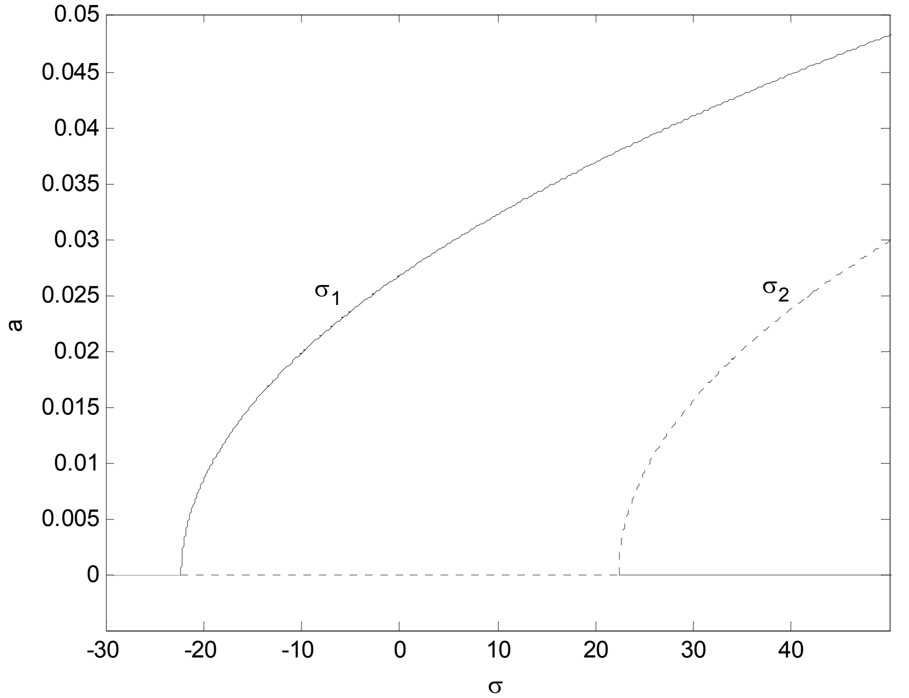
Şekil 3.114 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



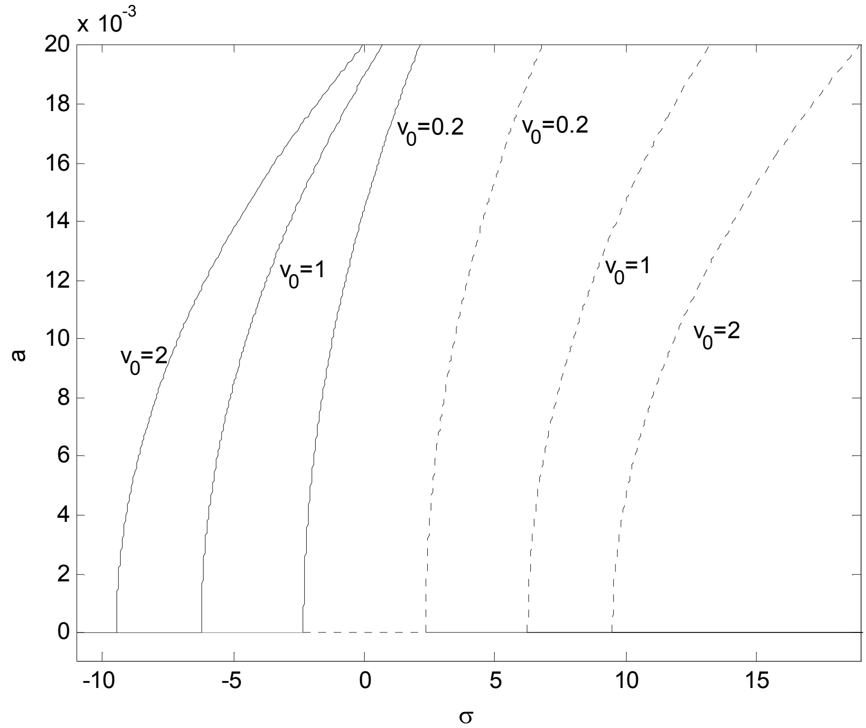
Şekil 3.115 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6, v_0 =2.2)



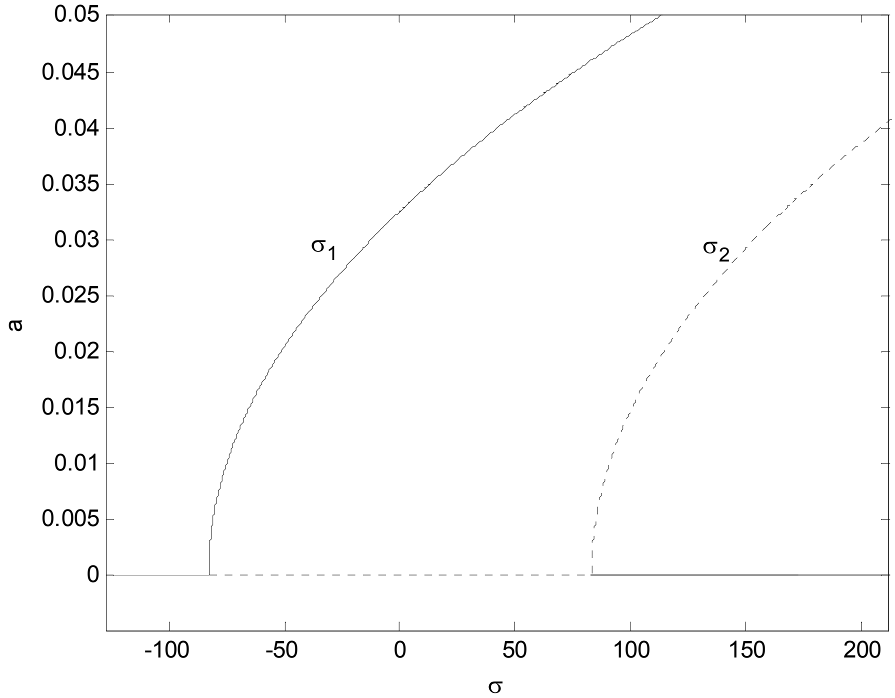
Şekil 3.116 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



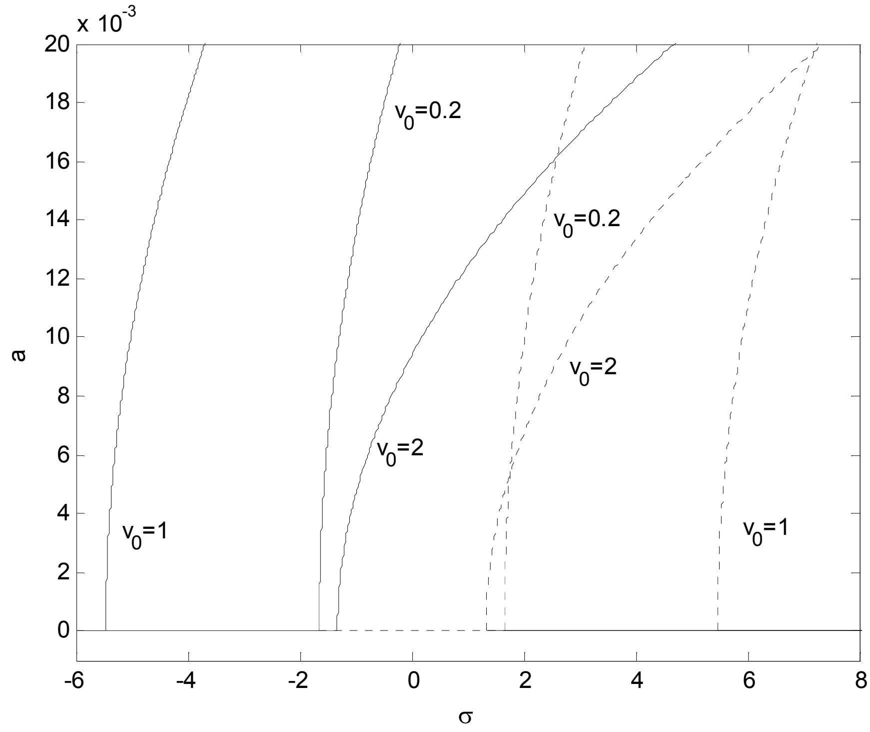
Şekil 3.117 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9, v_0 =3.3)



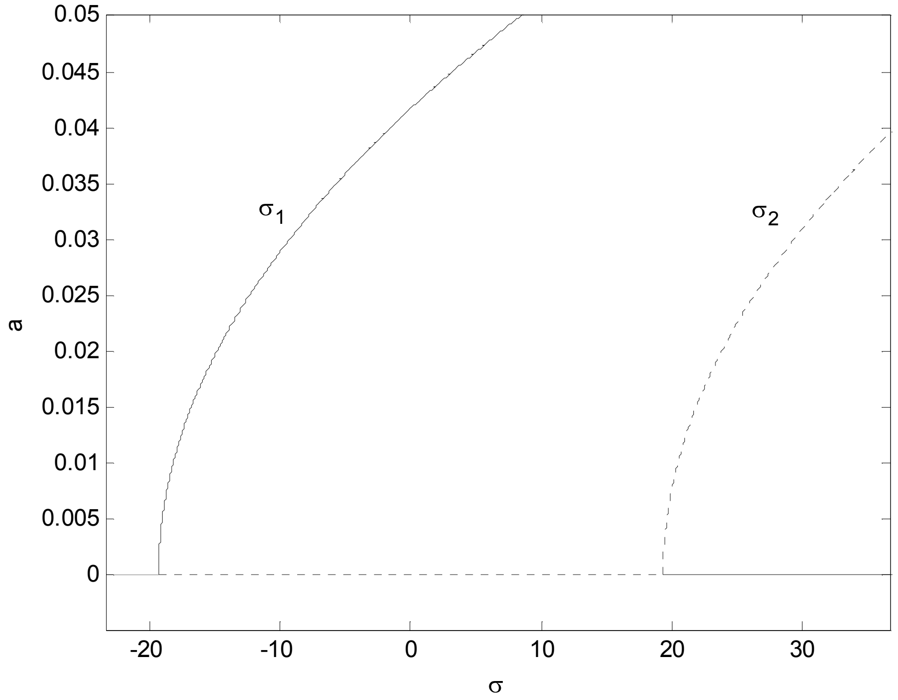
Şekil 3.118 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



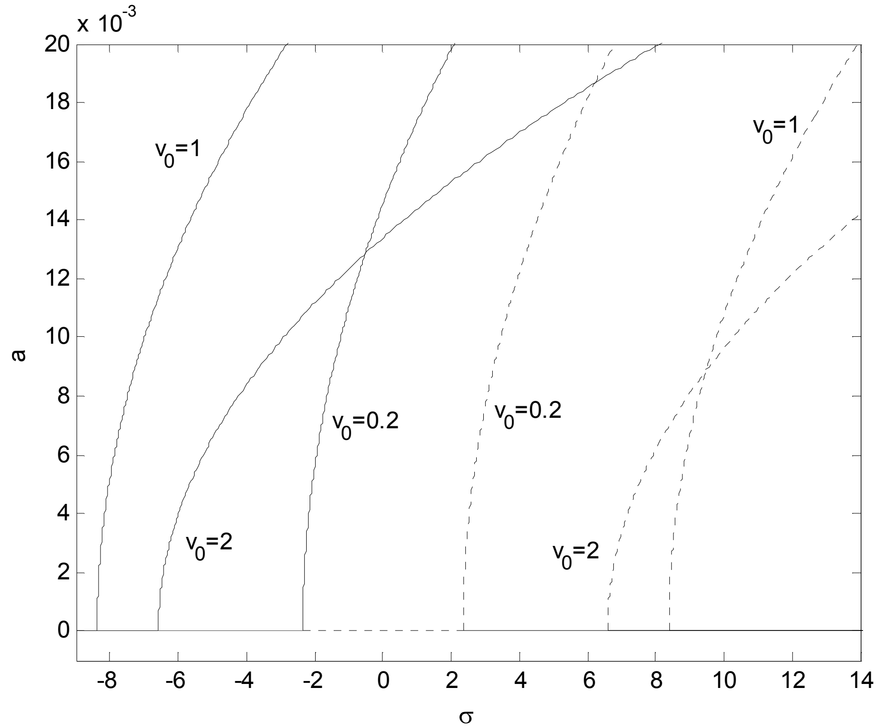
Şekil 3.119 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8, v_0 =3.3)



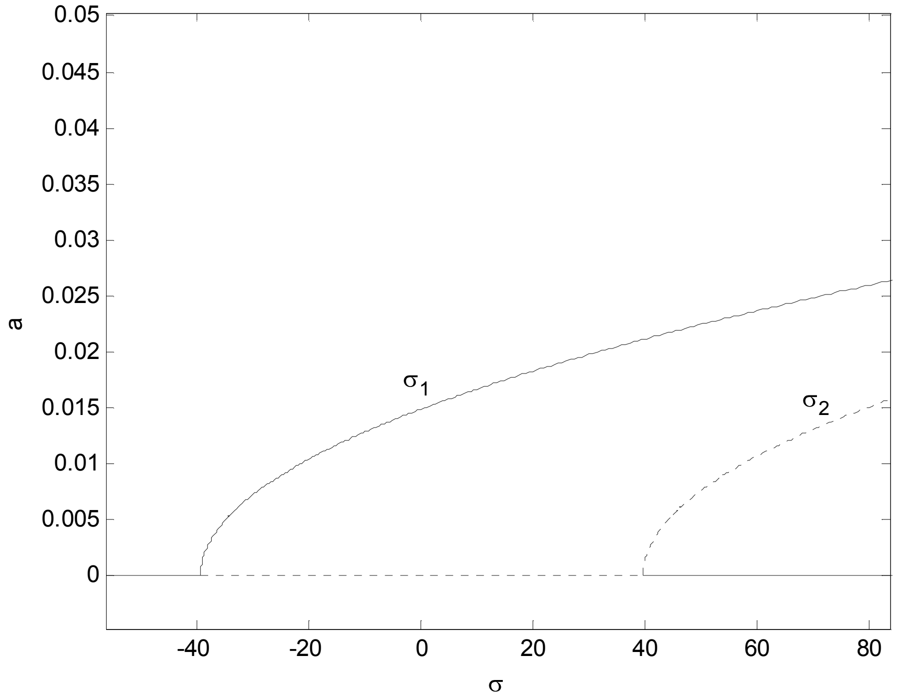
Şekil 3.120 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



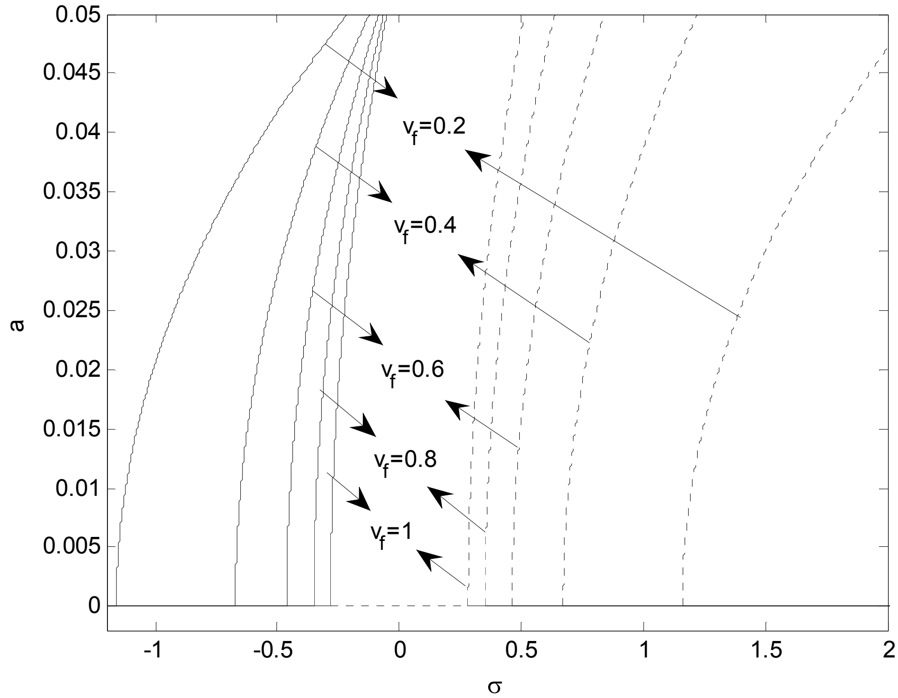
Şekil 3.121 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7, v_0 =3)



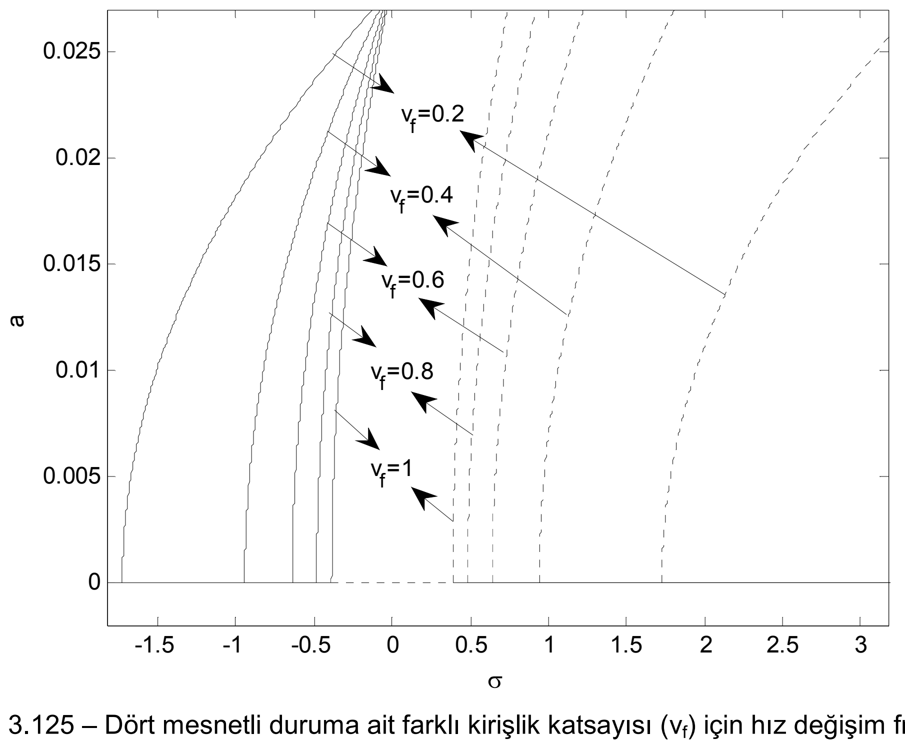
Şekil 3.122 – Dört mesnetli duruma ait v_0‘ ın farklı değerleri için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



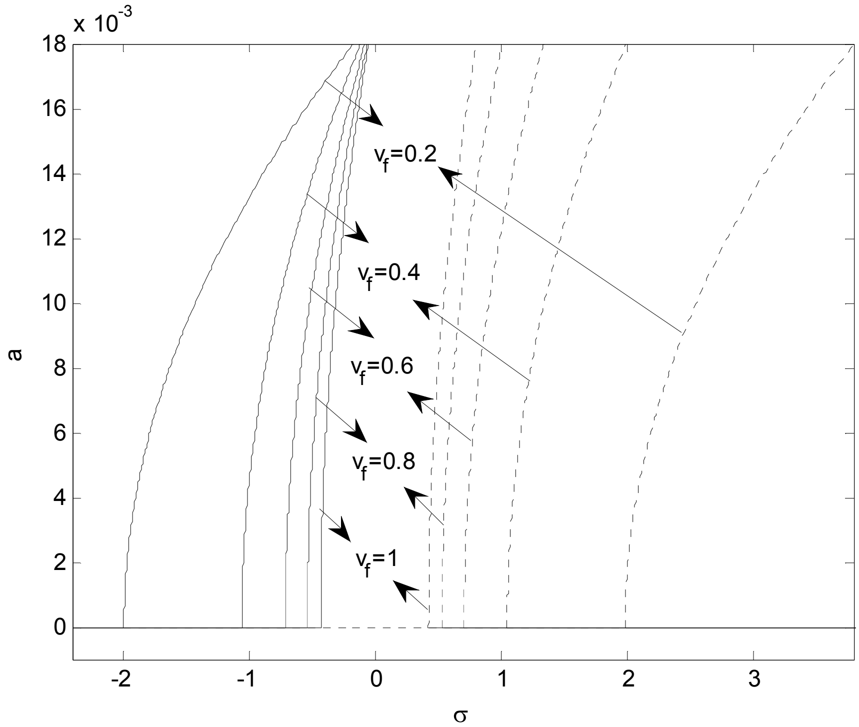
Şekil 3.123 – Dört mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6, v_0 =3)



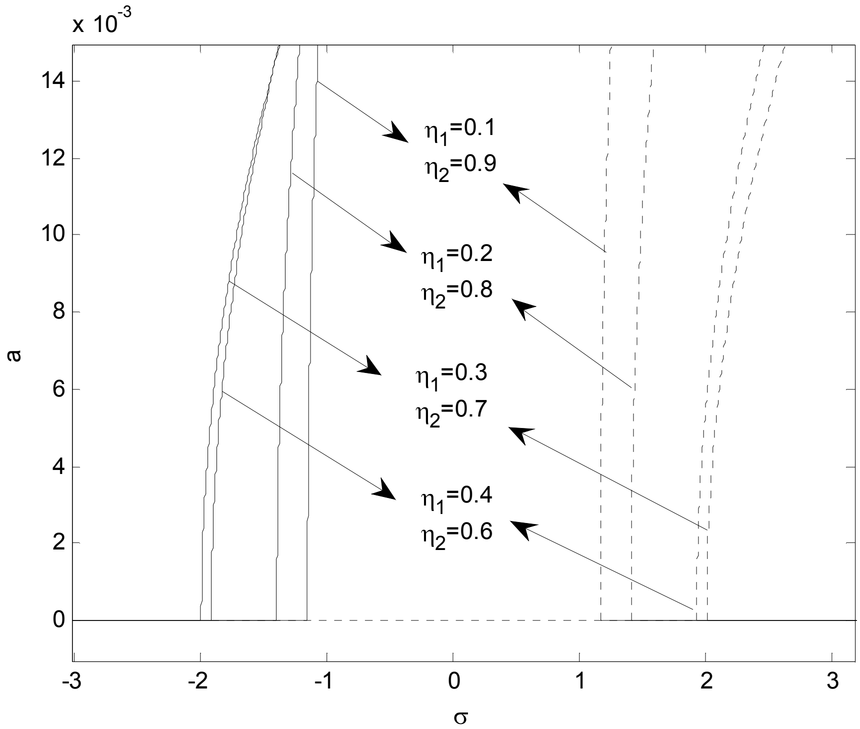
Şekil 3.124 – Dört mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, η_1 =0.1-η_2 =0.9, v_0 =0.2)



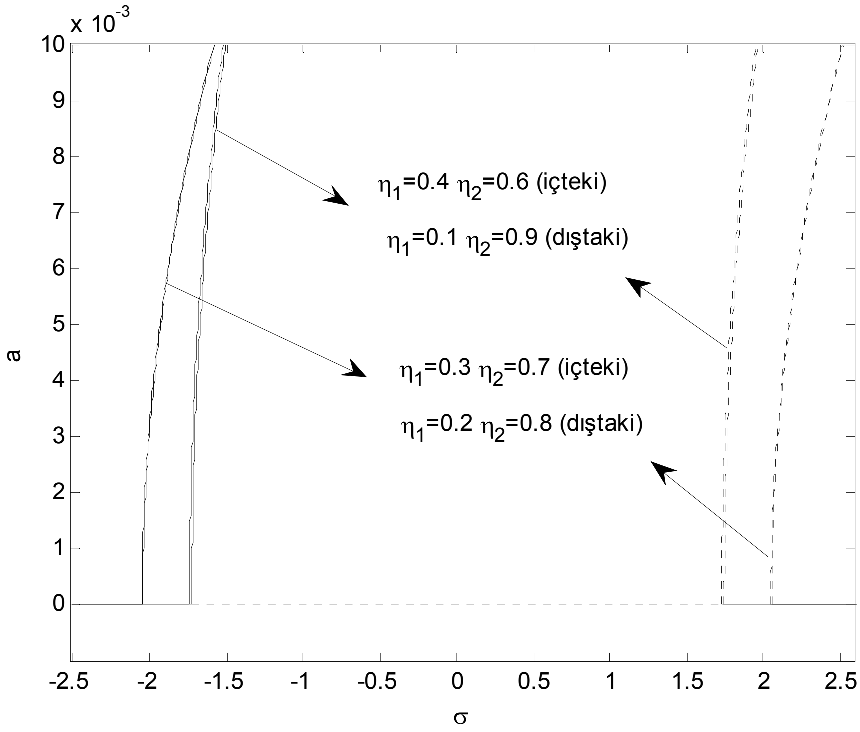
Şekil 3.125 – Dört mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, η_1 =0.1-η_2 =0.9, v_0 =0.2)



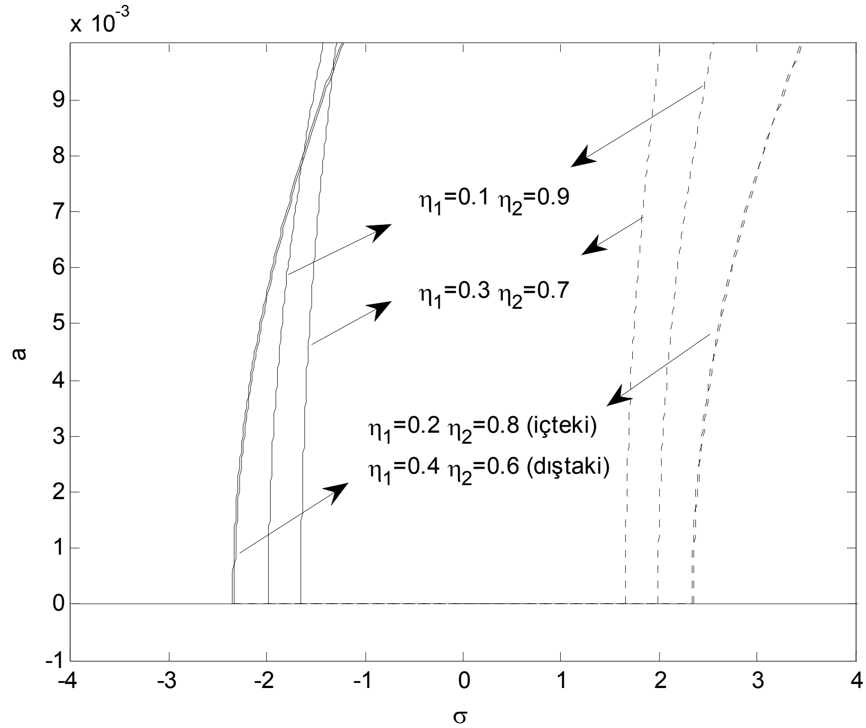
Şekil 3.126 – Dört mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, η_1 =0.1-η_2 =0.9, v_0 =0.2)



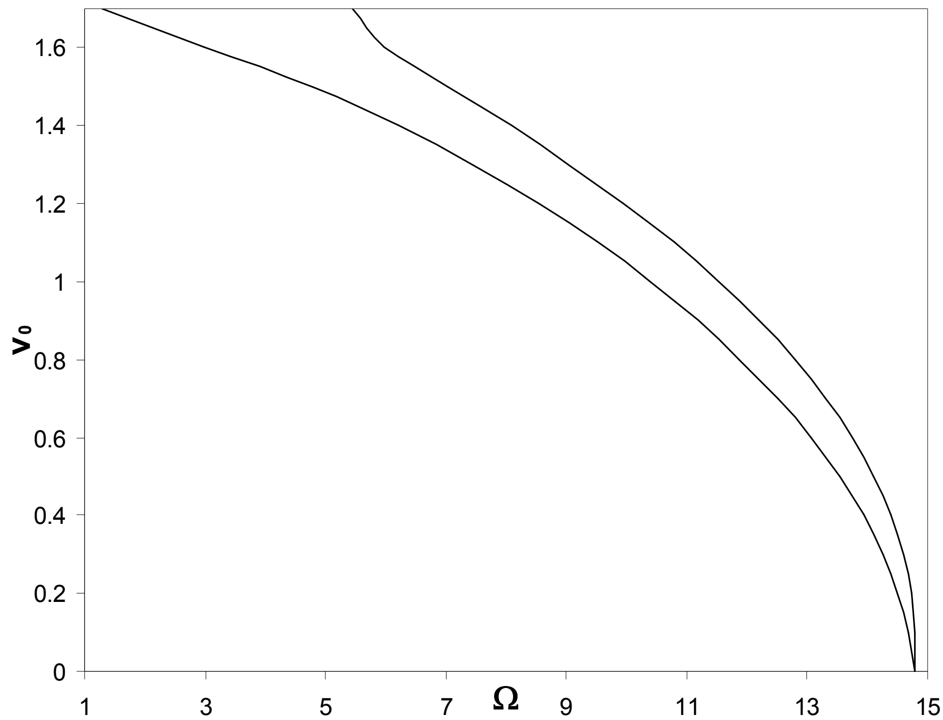
Şekil 3.127 – Dört mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



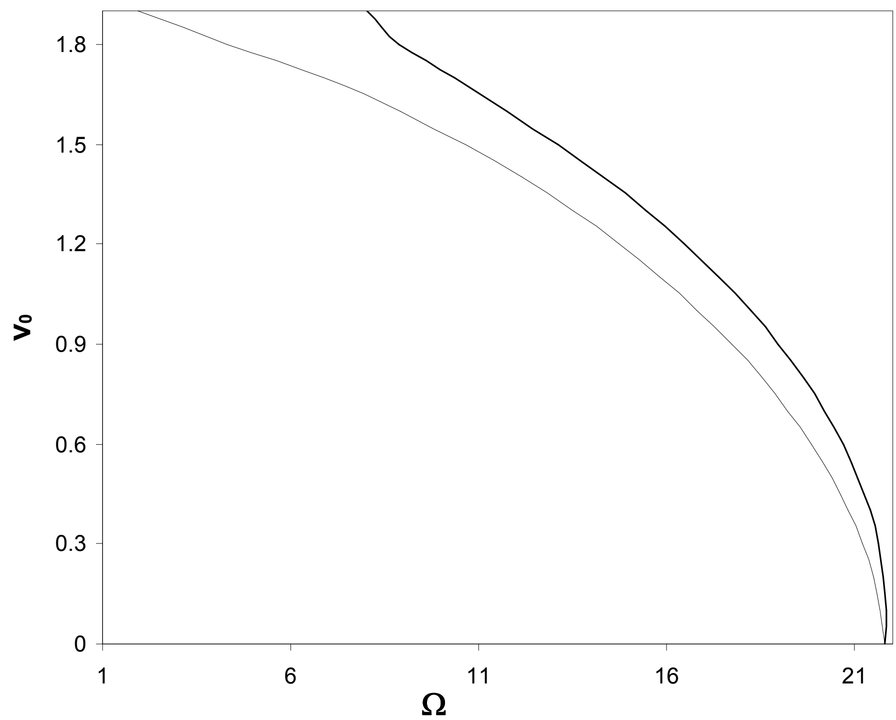
Şekil 3.128 – Dört mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



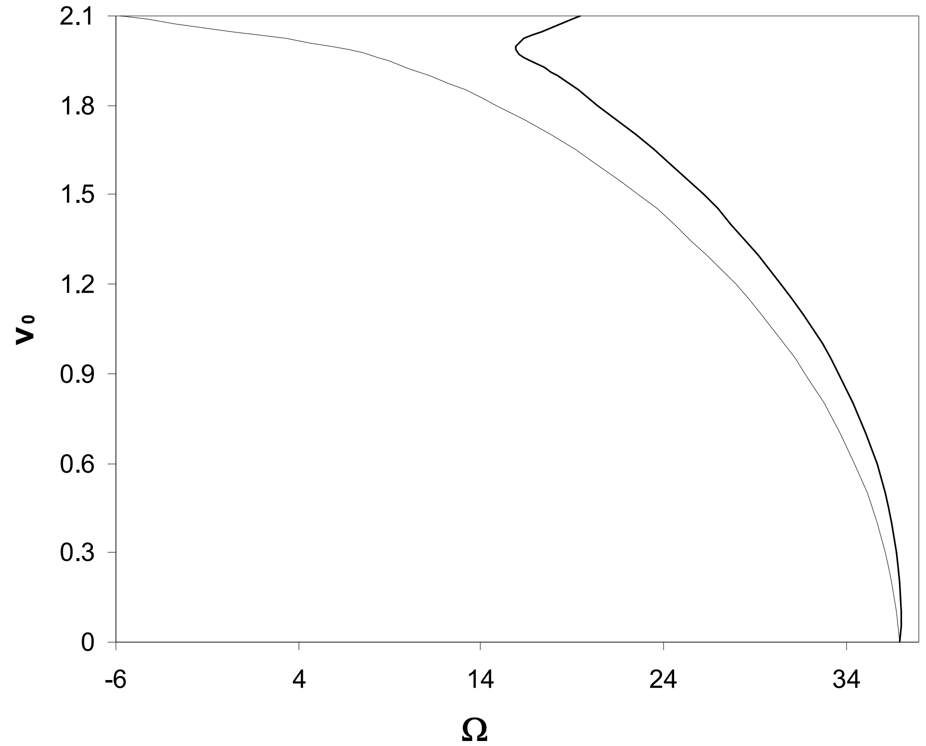
Şekil 3.129 – Dört mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



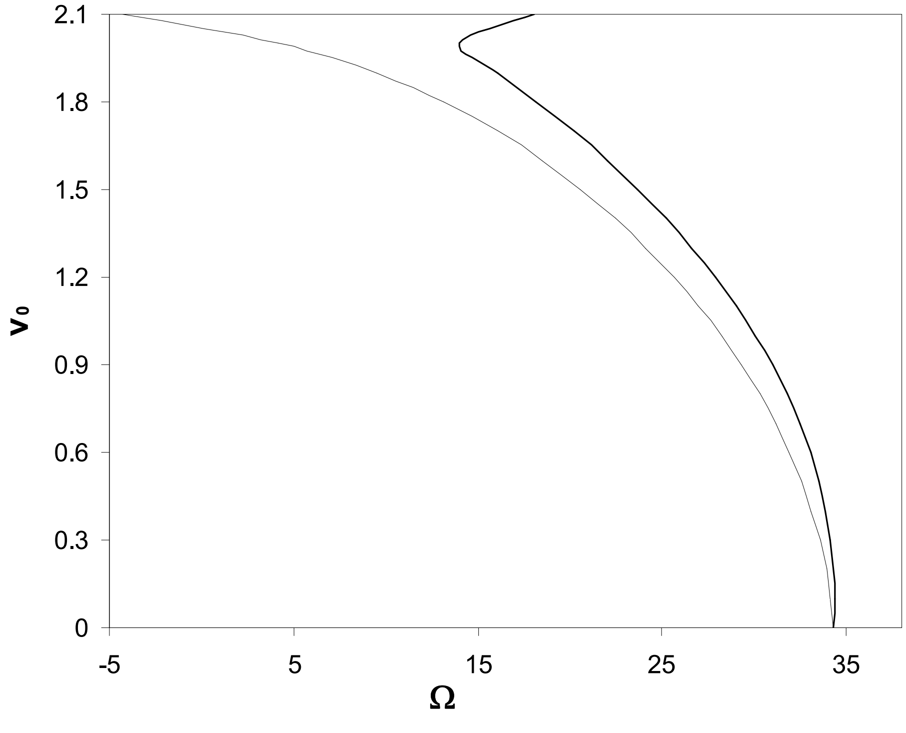
Şekil 3.130– Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1.mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



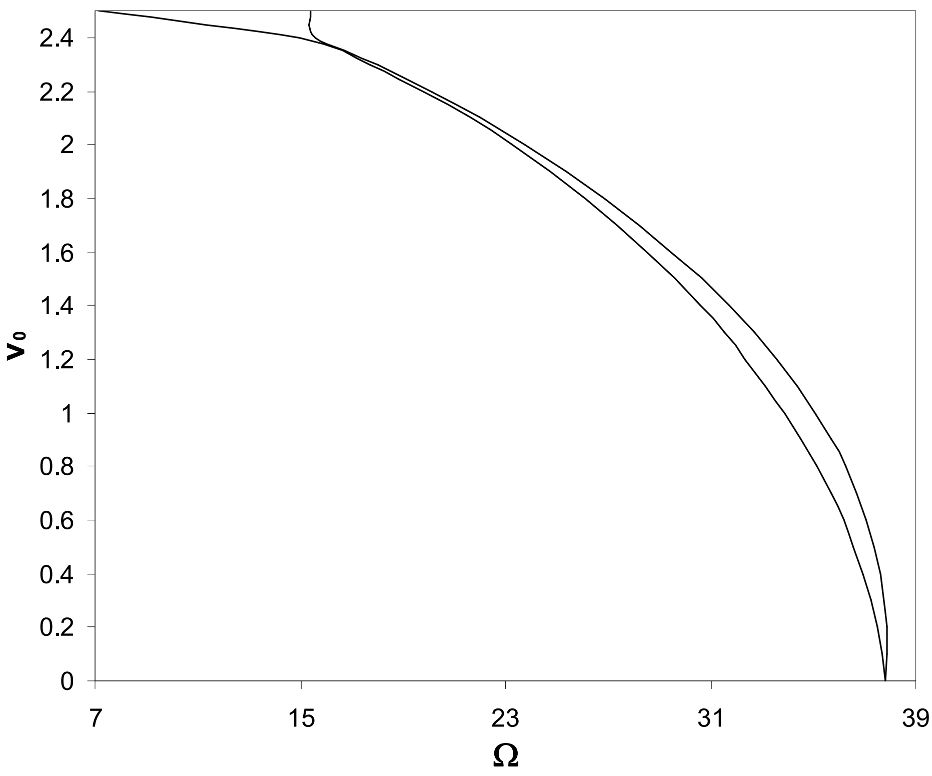
Şekil 3.131 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



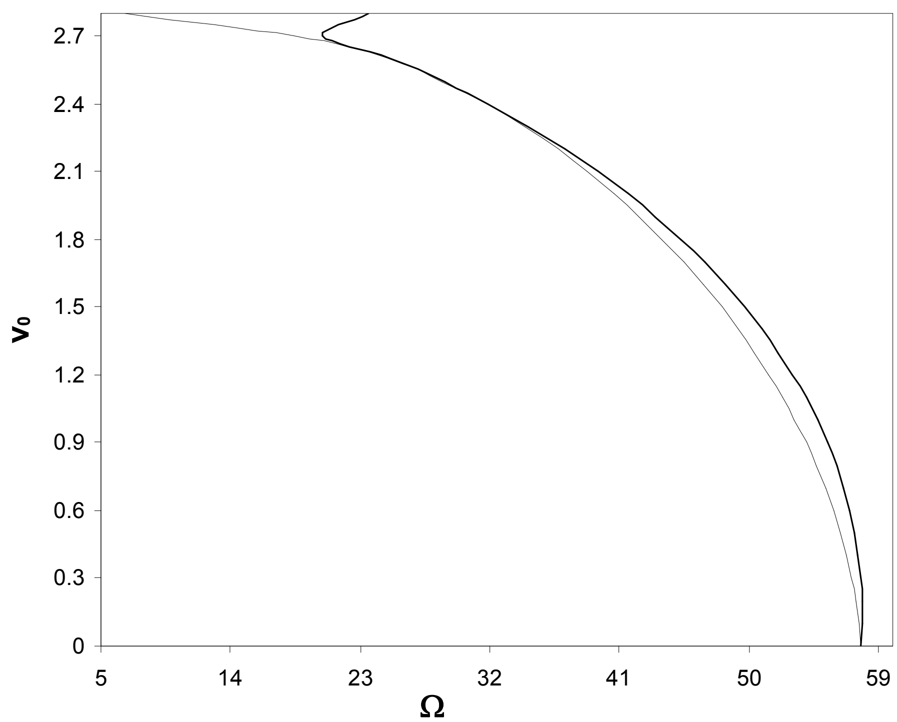
Şekil 3.132 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



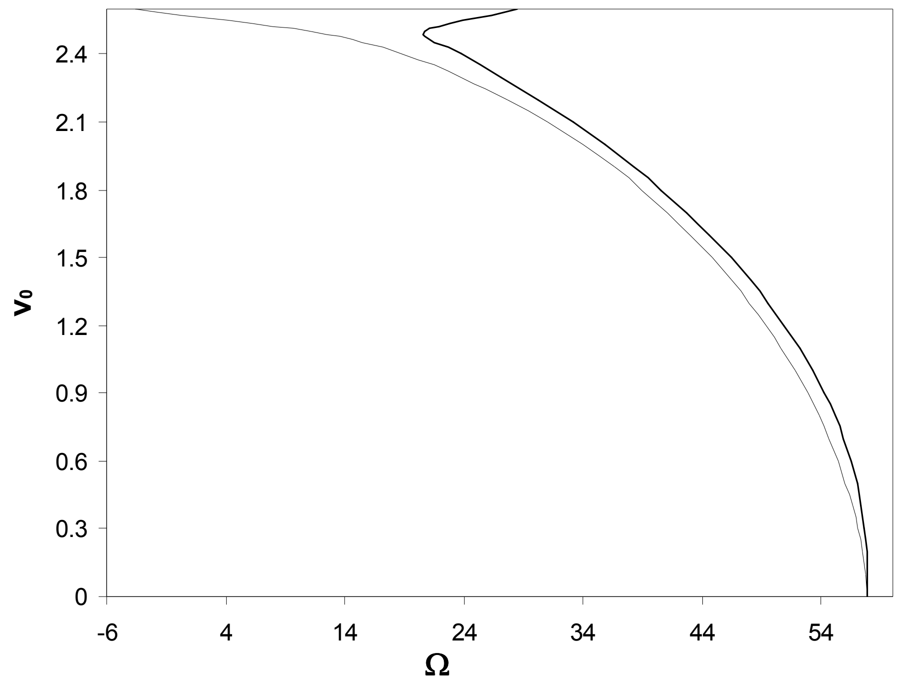
Şekil 3.133 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



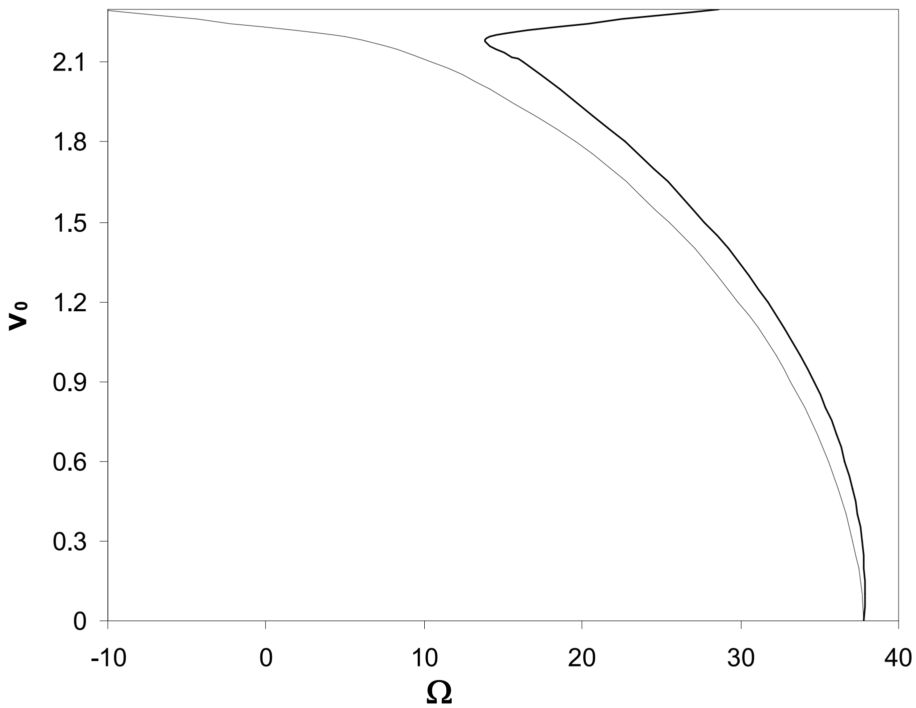
Şekil 3.134– Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



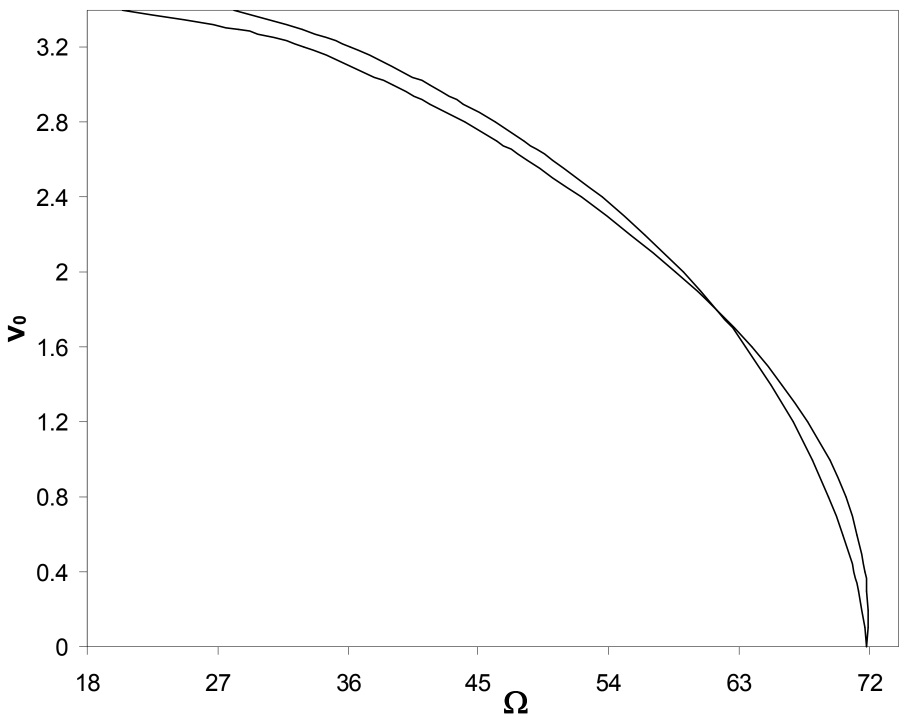
Şekil 3.135 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



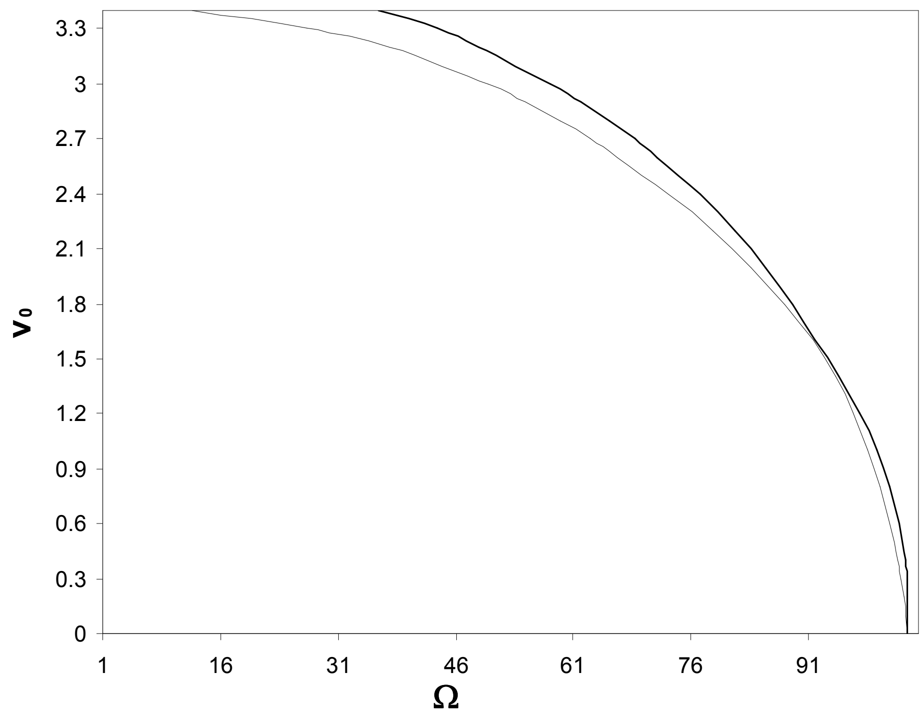
Şekil 3.136 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



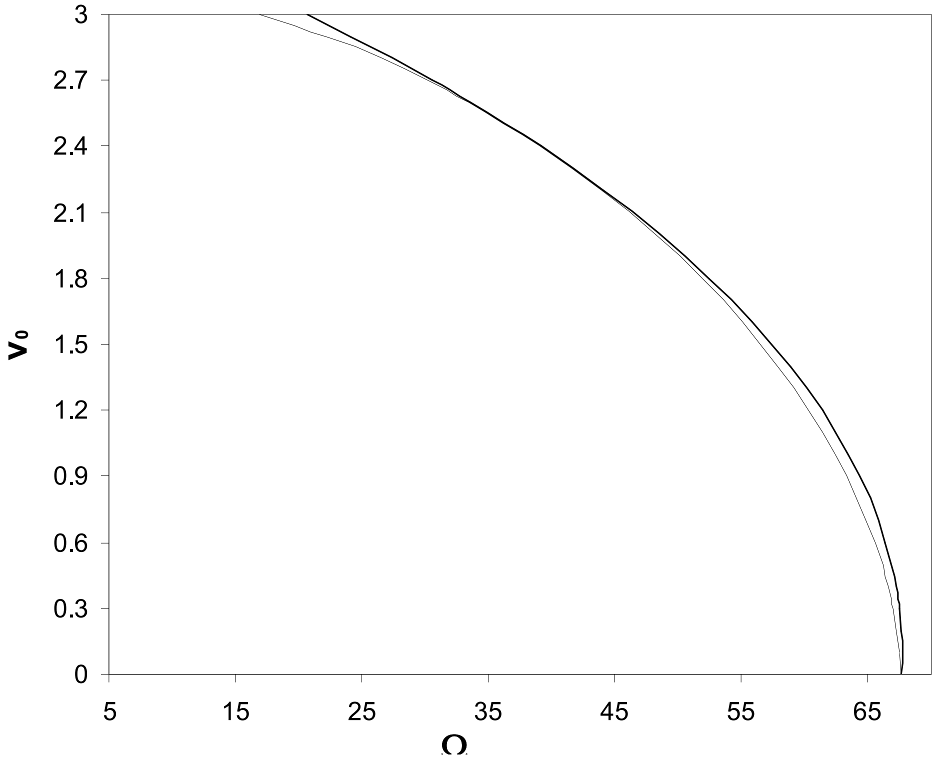
Şekil 3.137 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



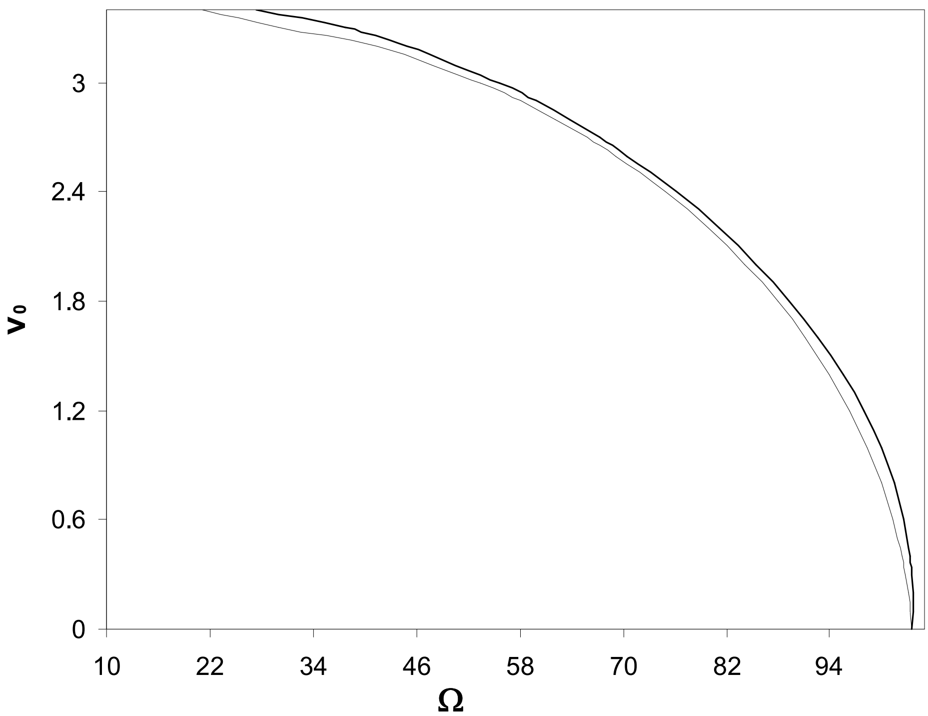
Şekil 3.138– Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



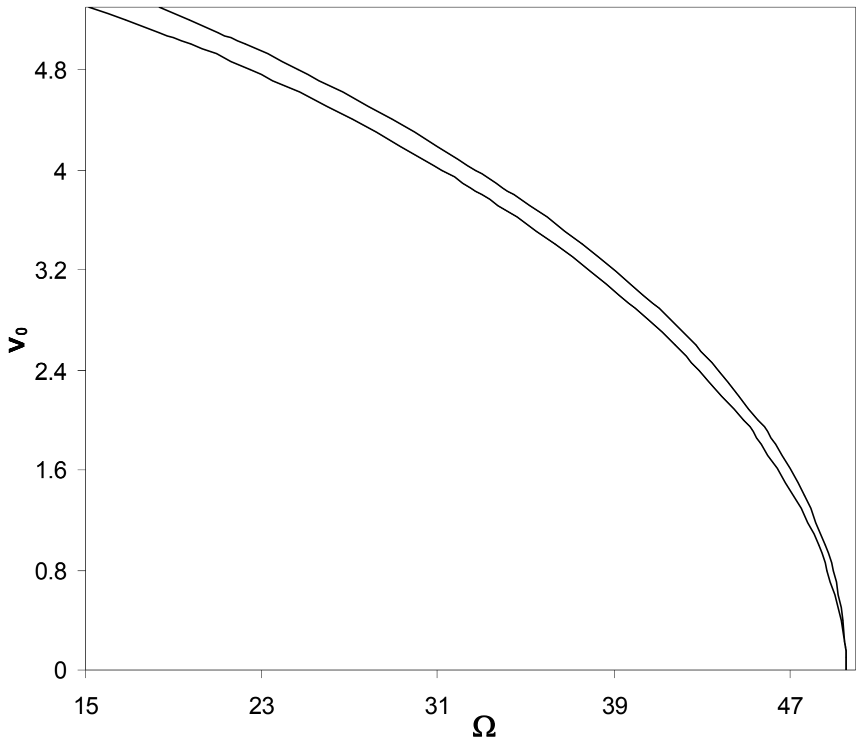
Şekil 3.139 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



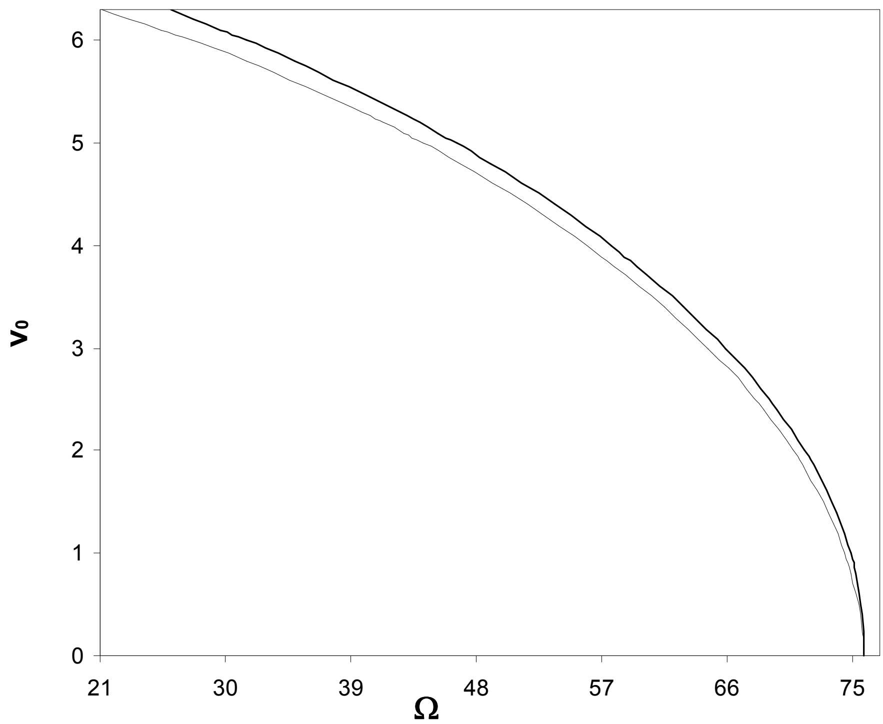
Şekil 3.140 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



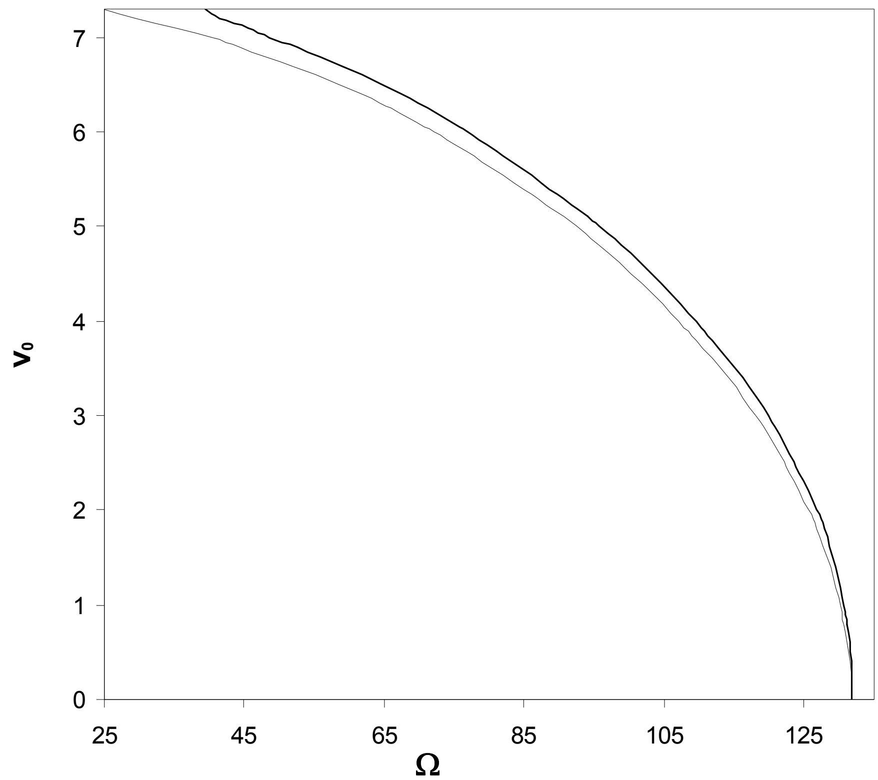
Şekil 3.141 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



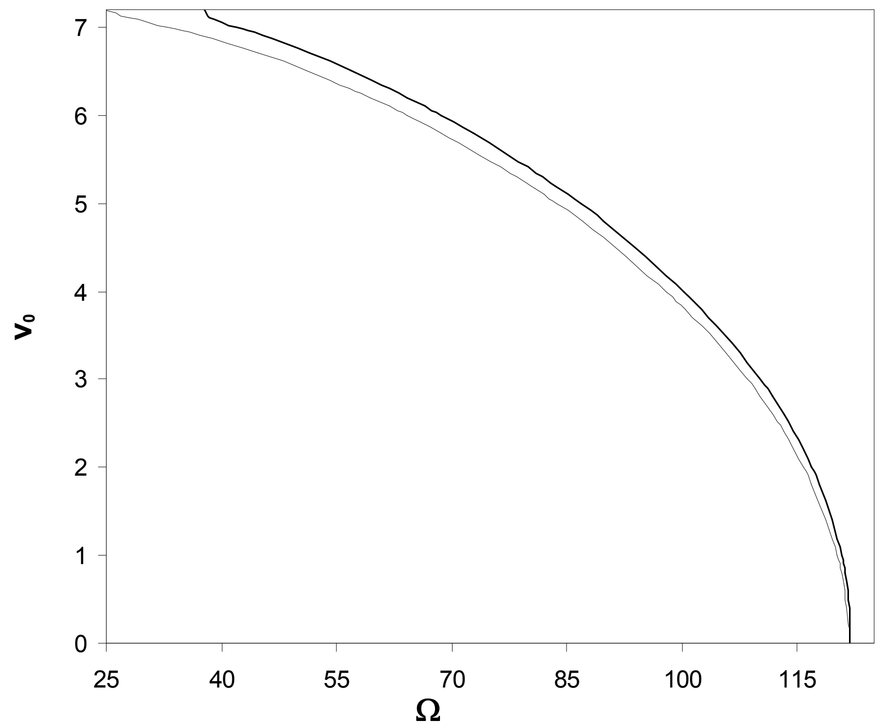
Şekil 3.142– Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi
(1.mod, v_f =0.8, η_1=0.1, η_2=0.9)



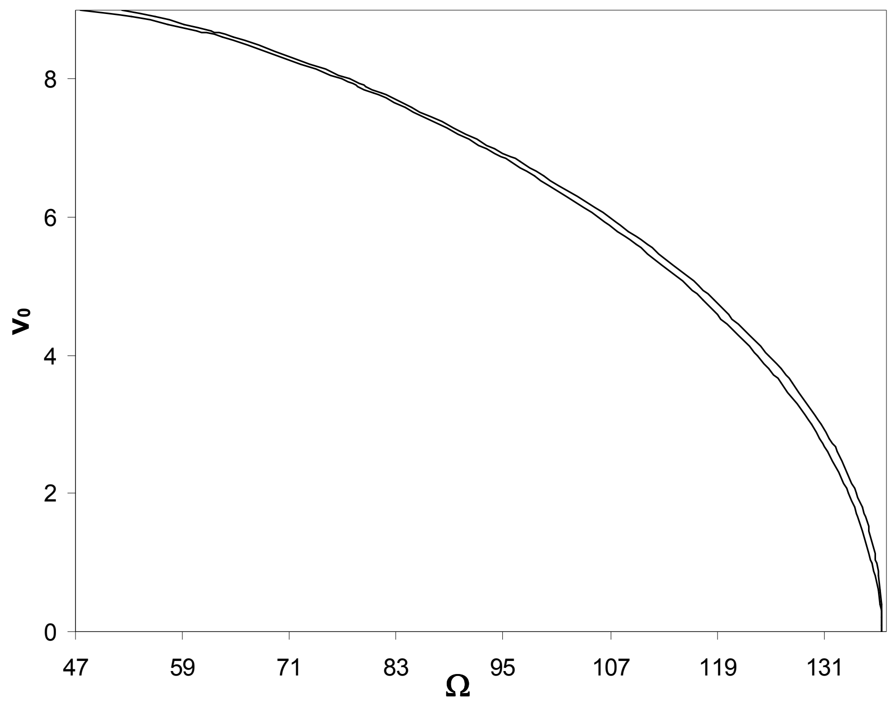
Şekil 3.143 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi
(1. mod, v_f =0.8, η_1=0.2, η_2=0.8)



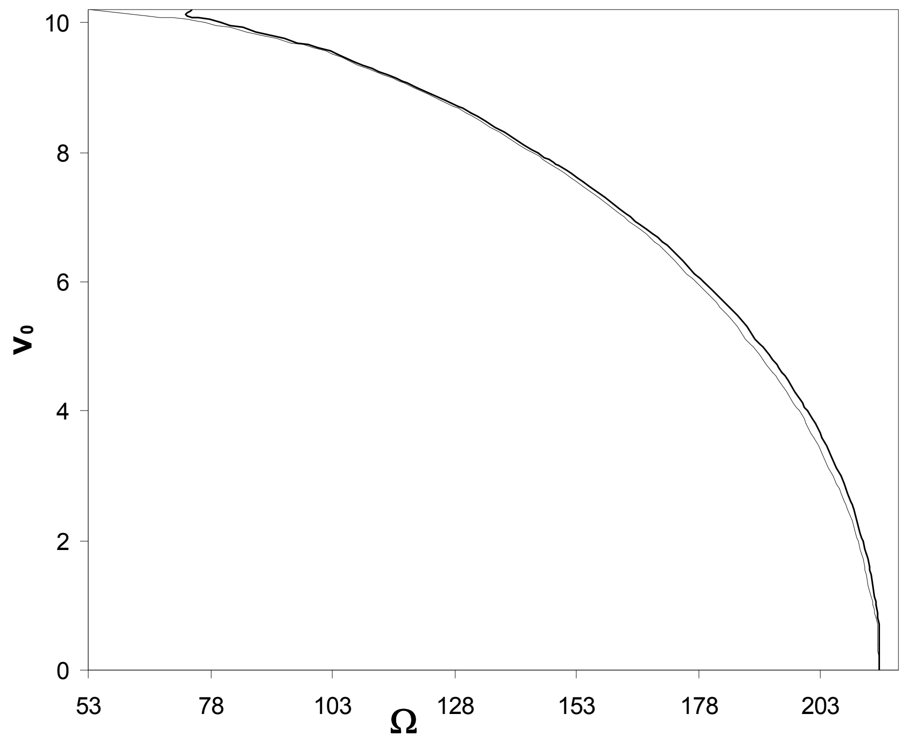
Şekil 3.144 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.8, η_1=0.3, η_2=0.7)



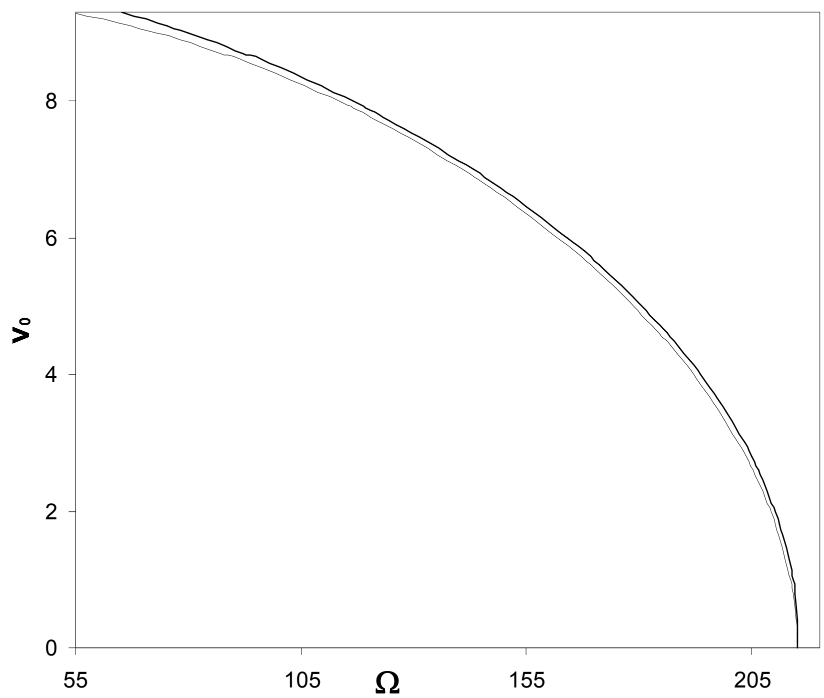
Şekil 3.145 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.8, η_1=0.4, η_2=0.6)



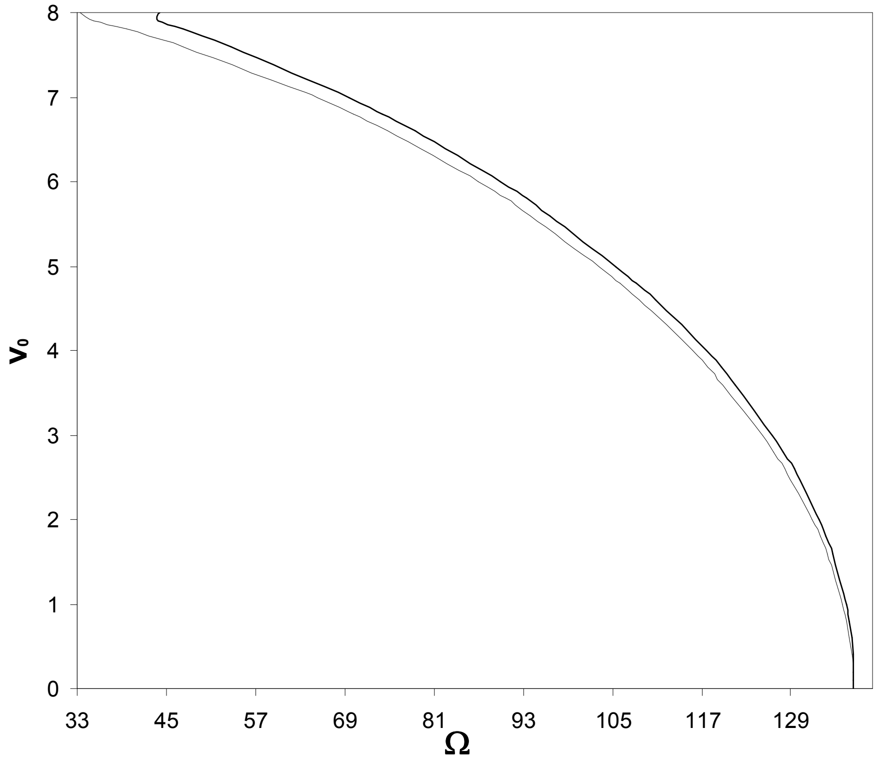
Şekil 3.146– Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2.mod, v_f =0.8, η_1=0.1, η_2=0.9)



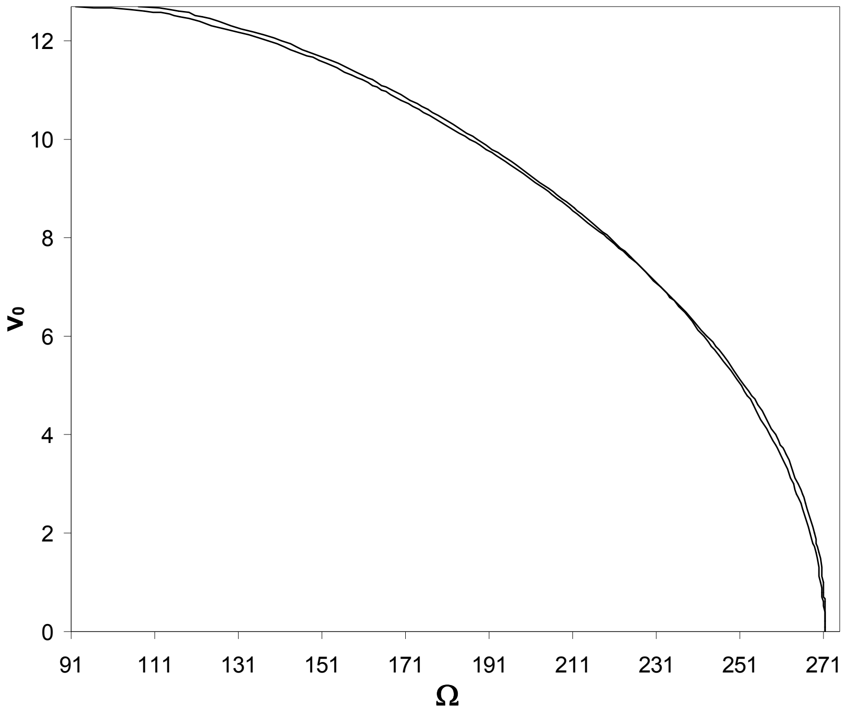
Şekil 3.147 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.8, η_1=0.2, η_2=0.8)



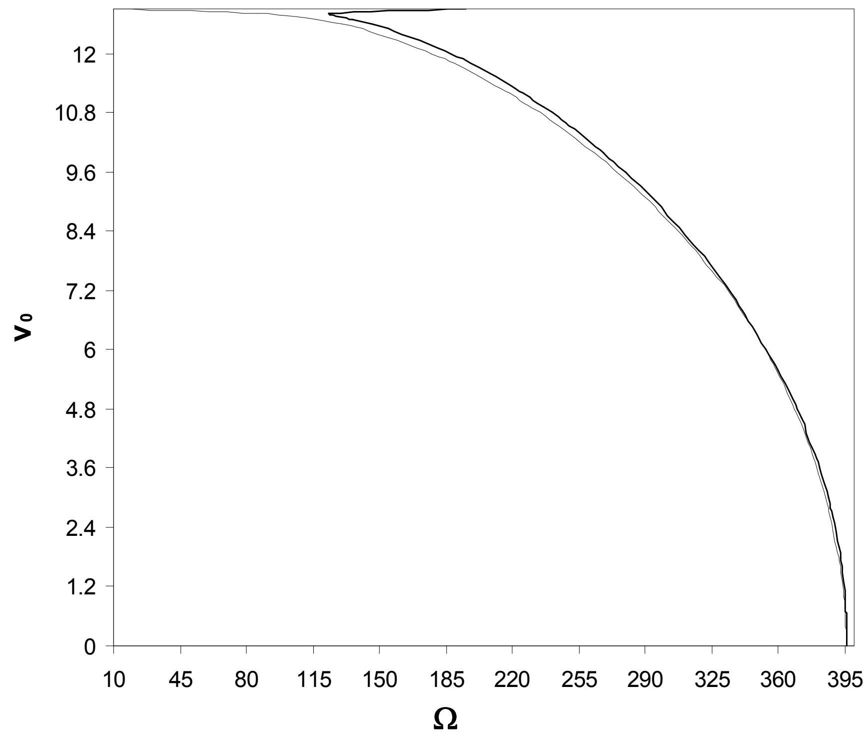
Şekil 3.148 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.8, η_1=0.3, η_2=0.7)



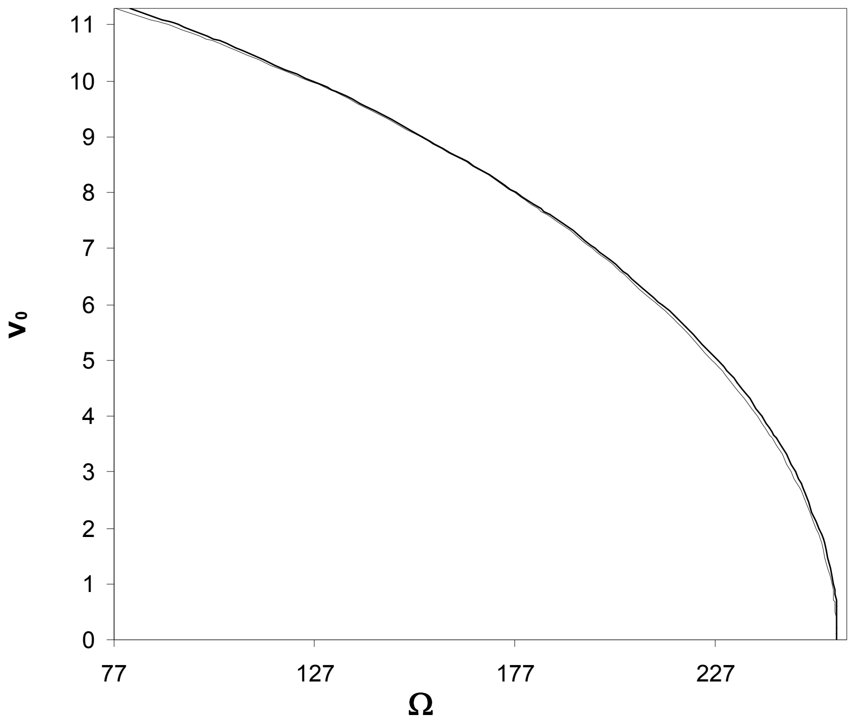
Şekil 3.149 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.8, η_1=0.4, η_2=0.6)



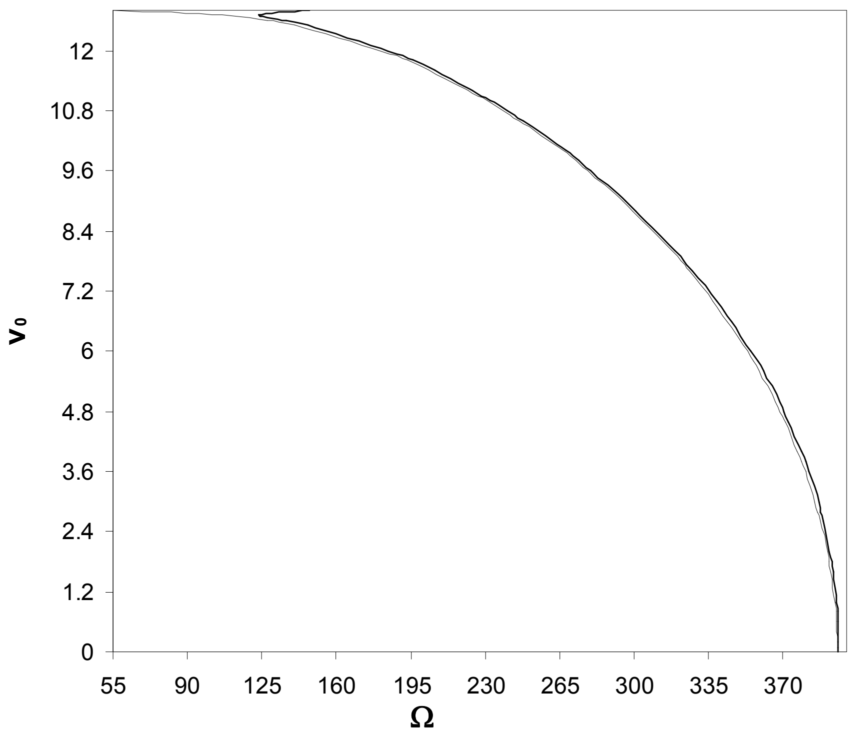
Şekil 3.150– Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3.mod, v_f =0.8, η_1=0.1, η_2=0.9)



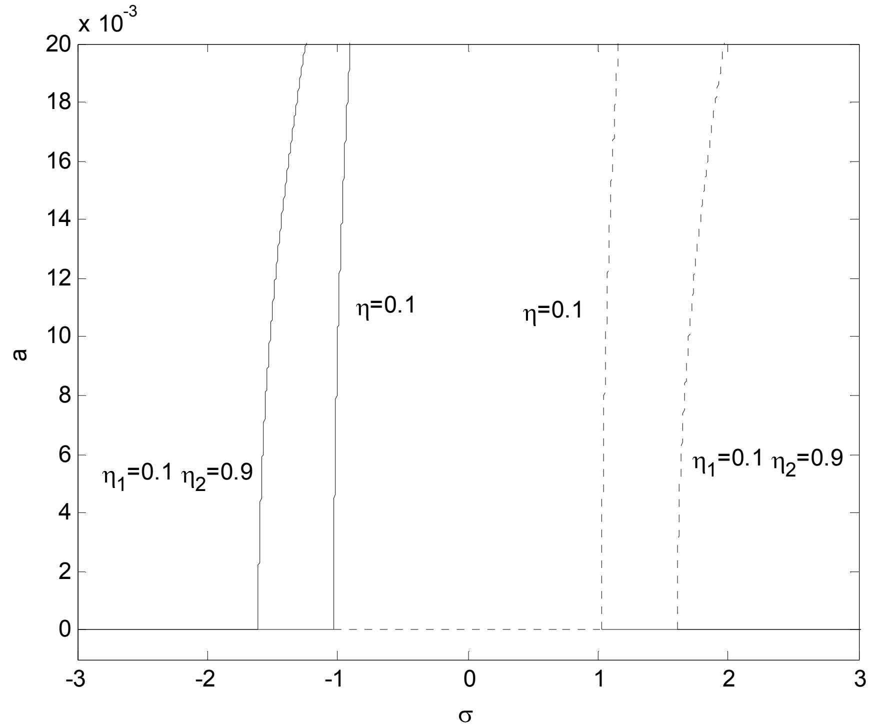
Şekil 3.151 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.8, η_1=0.2, η_2=0.8)



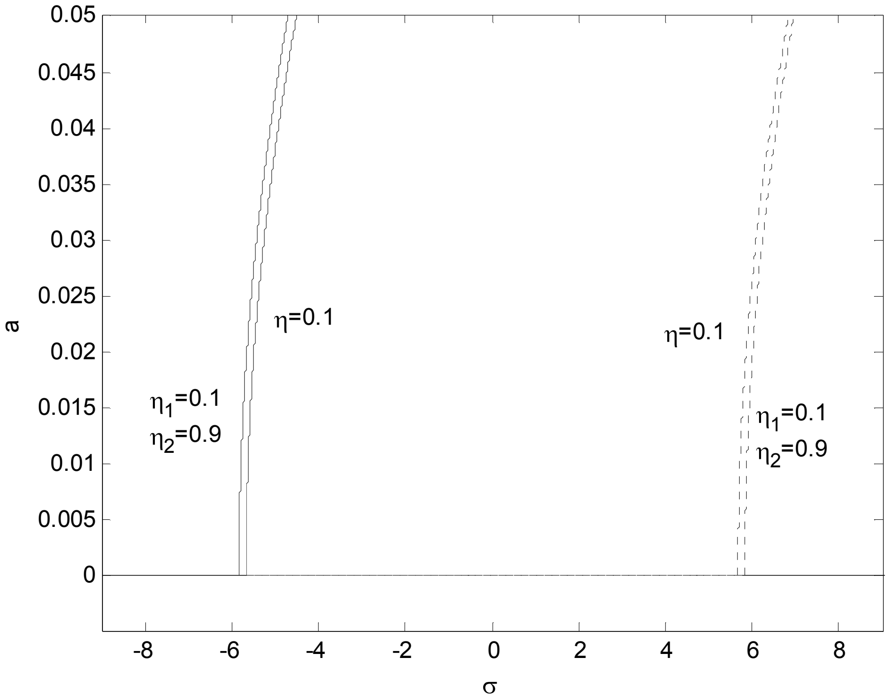
Şekil 3.152 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.8, η_1=0.3, η_2=0.7)



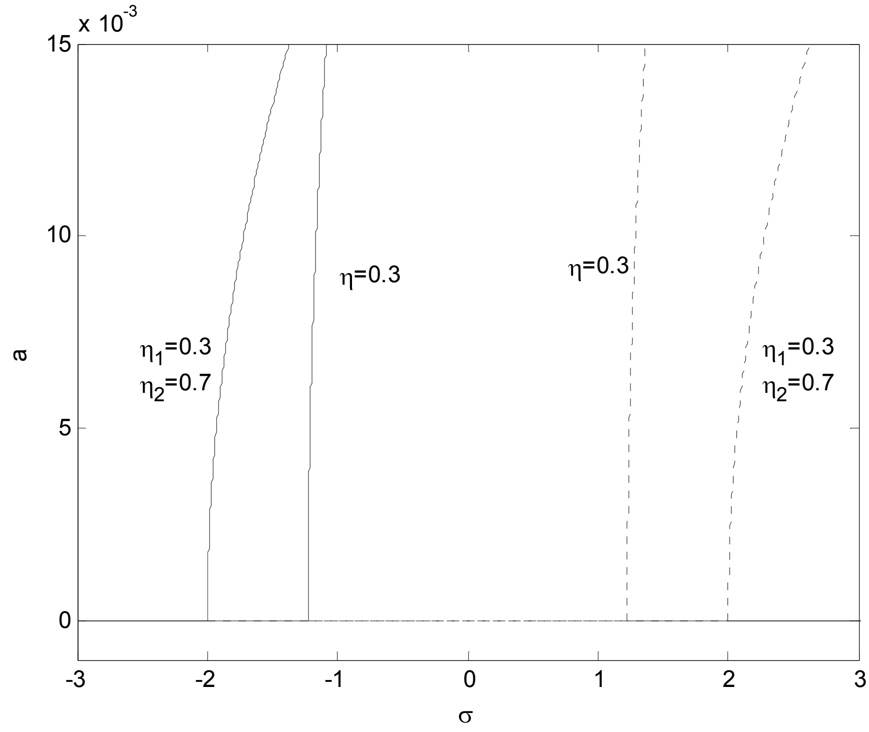
Şekil 3.153 – Dört mesnetli duruma ait kararlılık bölgesinin eksenel hıza bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.8, η_1=0.4, η_2=0.6)



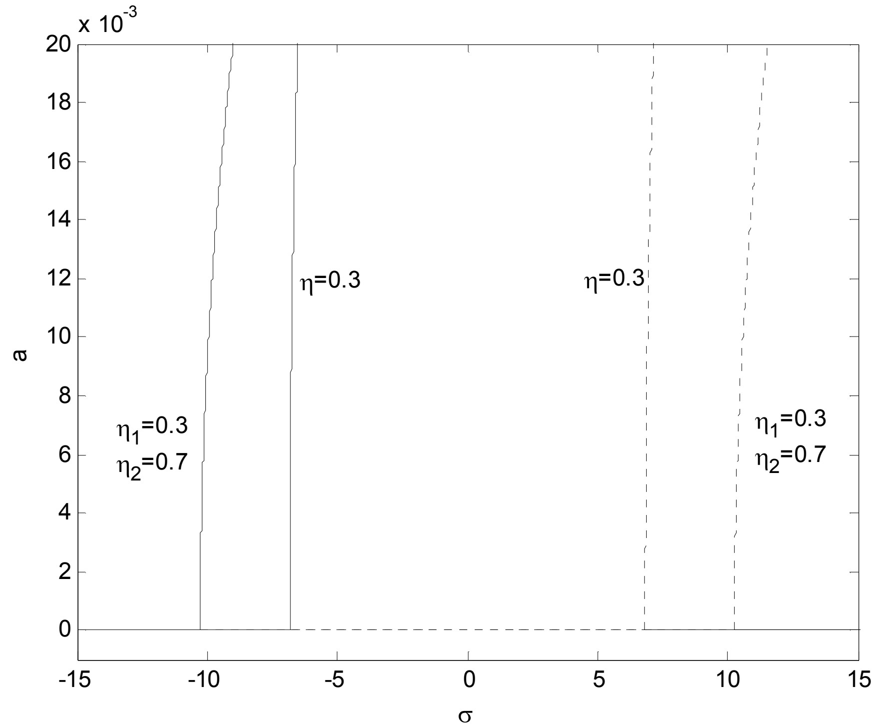
Şekil 3.154 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



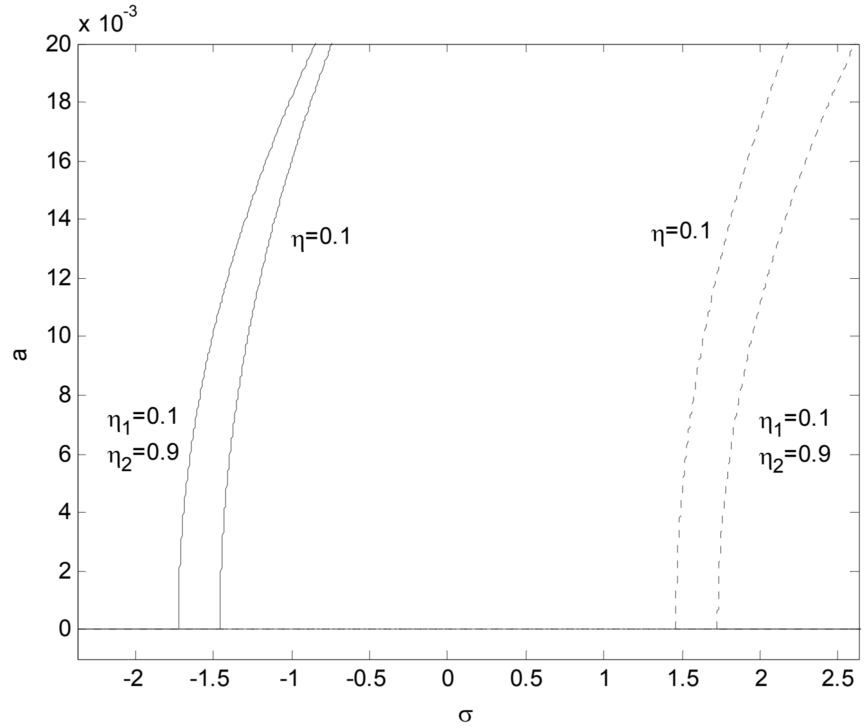
Şekil 3.155 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



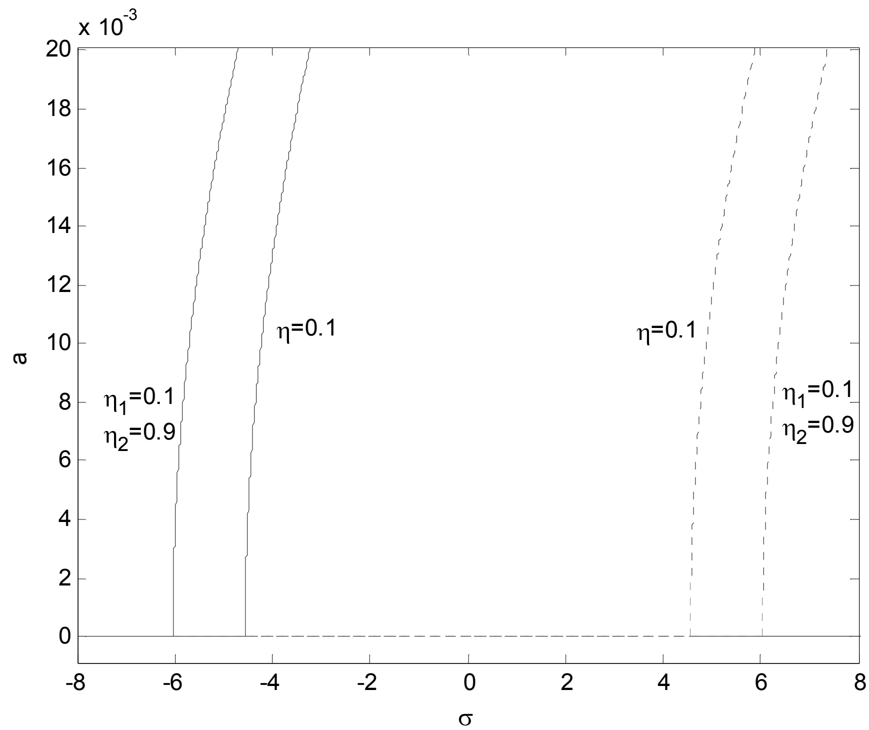
Şekil 3.156 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



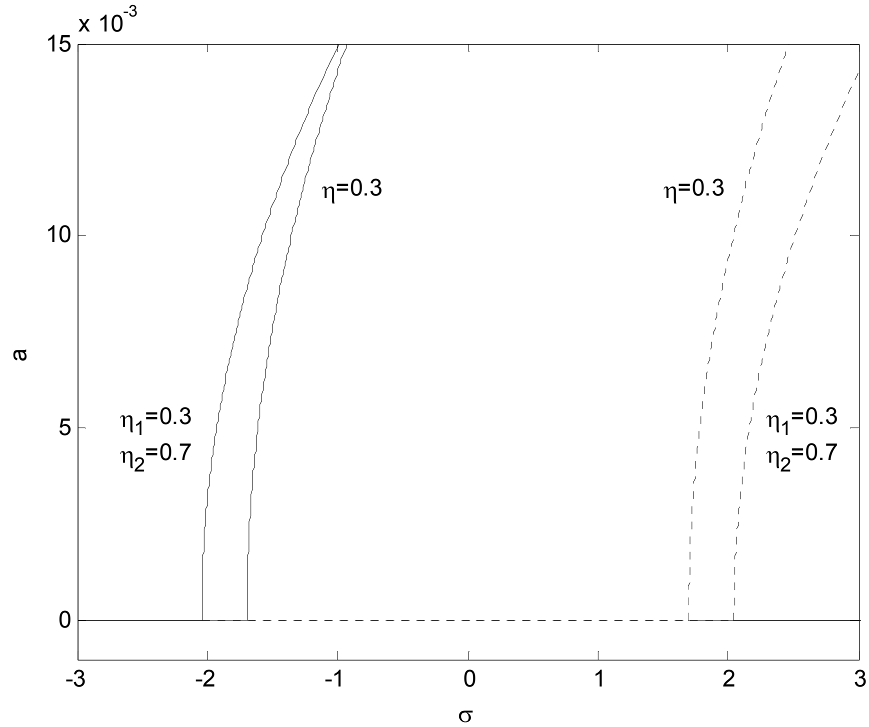
Şekil 3.157 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



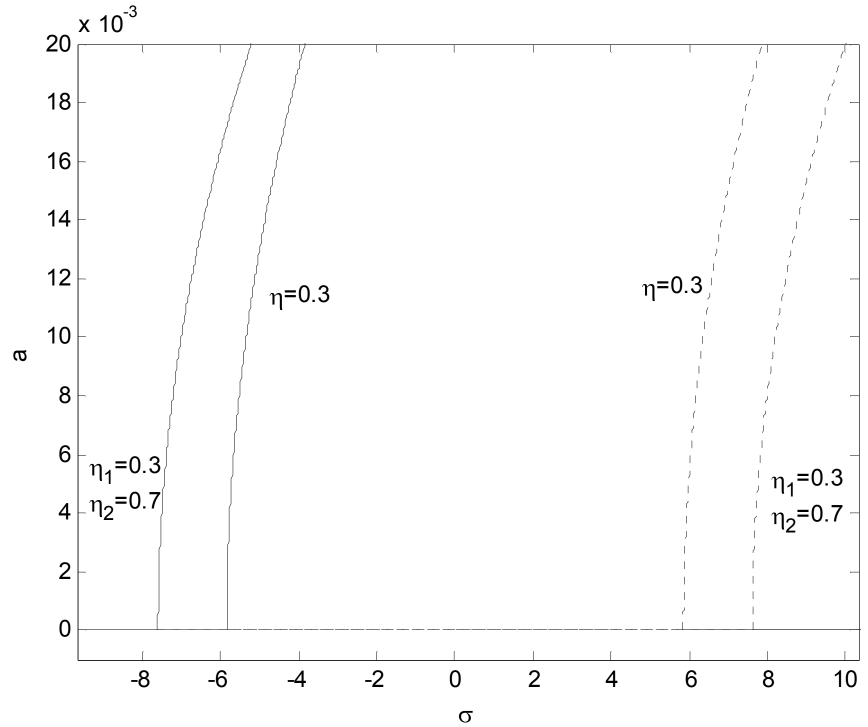
Şekil 3.158 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



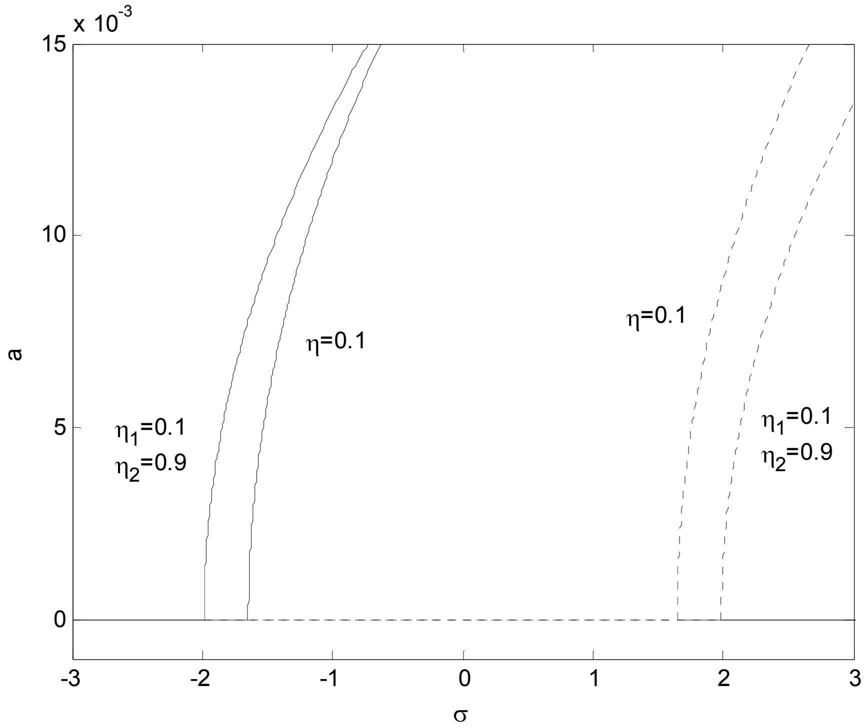
Şekil 3.159 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



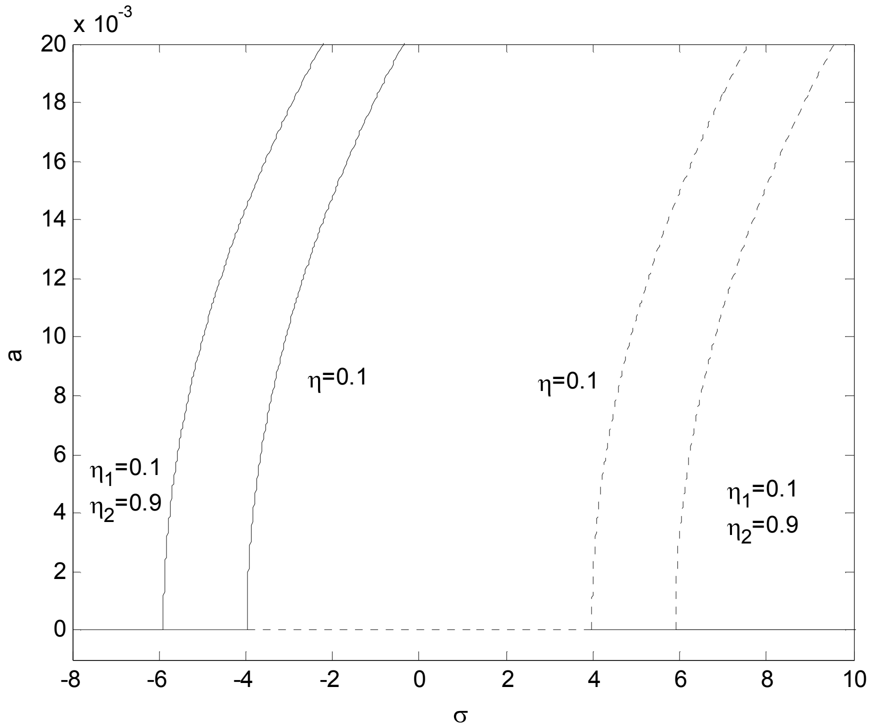
Şekil 3.160 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



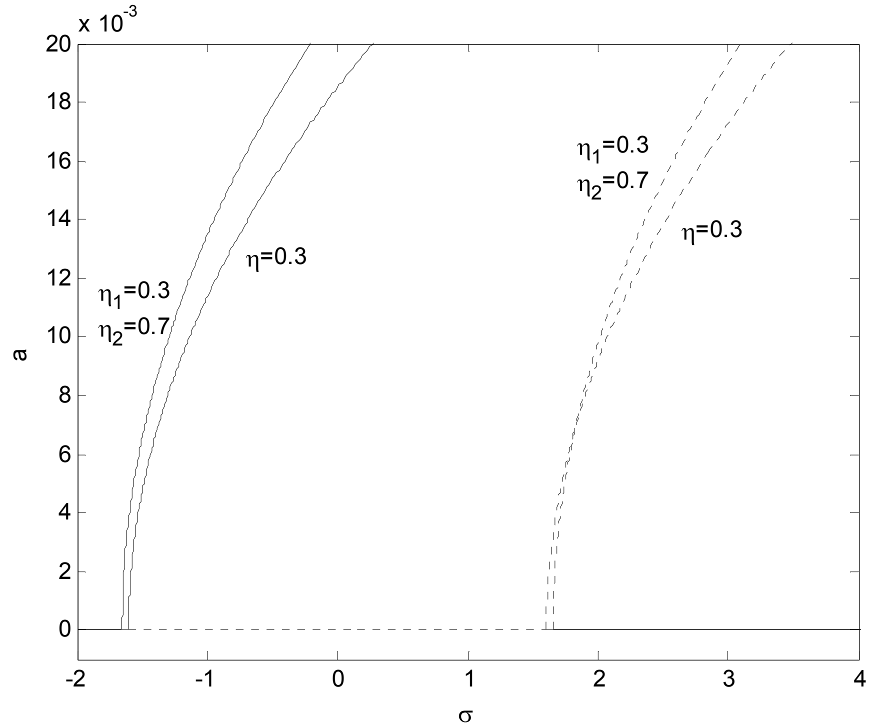
Şekil 3.161 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



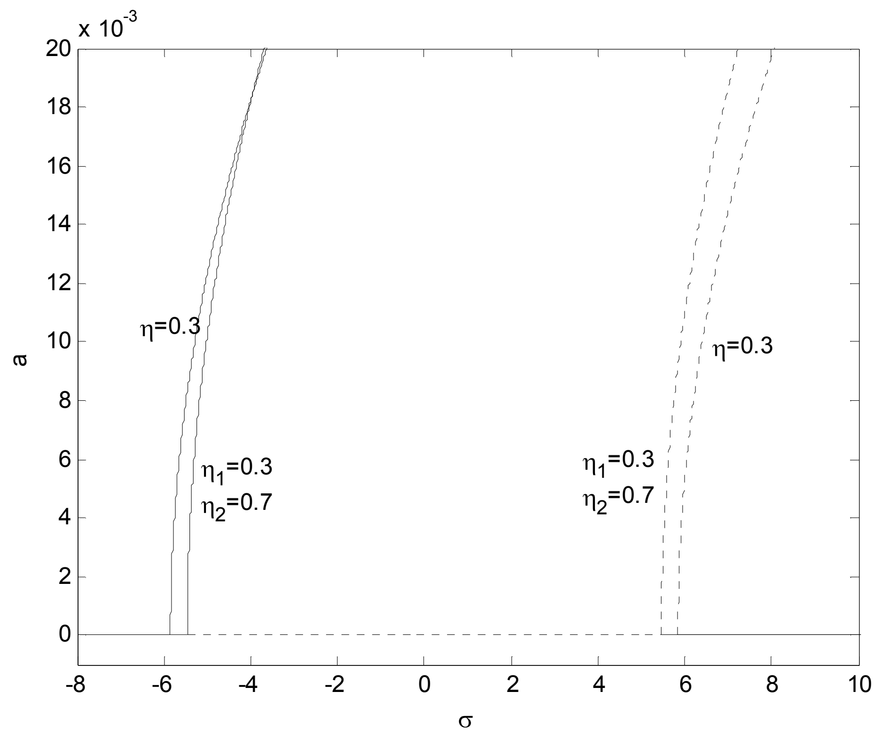
Şekil 3.162 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



Şekil 3.163 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =1)



Şekil 3.164 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =0.2)



Şekil 3.165 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için hız değişim frekansına bağlı genlik değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =1)

3.2.1.2 Ω' nın 0' dan ve 2ω' dan Uzak Olduğu Durum:

Bu durumda hız değişim frekansı (Ω), 0'dan ve 2ω' dan uzak alınmıştır. Bu durum için çözülebilirlik şartı şu şekilde elde edilir.

$$D_1A + \frac{\mu}{2}A - k_3A^2\overline{A} = 0 \tag{3.99}$$

Kompleks genlik ifadesi yazılır ve denklem gerçek ve sanal kısımlara ayrılırsa faz modülasyon denklemler elde edilir.

$$D_1a + \frac{\mu}{2}a = 0 \tag{3.100}$$

$$aD_1\theta - \frac{1}{4}k_{3_I}a^3 = 0 \tag{3.101}$$

Serbest titreşimler için μ=0 alınmalıdır. Bu durumda,

$$a=a_0 \text{ (sabit)} \tag{3.102}$$

$$\theta = \frac{1}{4}k_{3_I}a^2T_1 + \beta_0 \tag{3.103}$$

elde edilir. Buradan hareketli kiriş için nonlineer frekans denklemi şu şekilde elde edilir.

$$\omega_{nl} = \omega + \varepsilon(\frac{1}{4}k_{3_I}a^2) \tag{3.104}$$

Ω' nın 0' dan ve 2ω' dan uzak olduğu durum için üç mesnetli ve dört mesnetli kirişe ait titreşim genliği ile nonlineer frekans arasındaki ilişkiyi gösteren grafikler elde edilmiştir.

Üç mesnetli duruma ait, Şekil 3.166–3.168 birinci mod v_f=0.2 mesnet konumları sırasıyla η=0.1–0.3–0.5 ve farklı v_0 değerleri için, Şekil 3.169–3.171 ikinci mod v_f=0.2 mesnet konumları sırasıyla η=0.1–0.3–0.5 ve farklı v_0 değerleri için, Şekil 3.172–3.174 üçüncü mod v_f=0.2 mesnet konumları sırasıyla η=0.1–0.3–0.5 ve farklı v_0 değerleri için nonlineer frekans-genlik grafiği verilmiştir.

Nonlineer eğrilerin sağa doğru yatması hardening (sertleşme) tip davranışın göstergesidir. Üç mesnetli durum için v_0 değerinin artmasıyla, nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı belirgin bir şekilde artmaktadır. Kritik hıza yaklaştıkça nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı çok artmaktadır.

Üç mesnetli durumda, Şekil 3.175 birinci mod için, Şekil 3.176 ikinci mod için, Şekil 3.177 üçüncü mod için η=0.1, v_0=0.2 ve farklı v_f değerlerine ait nonlineer frekans-genlik grafiği verilmiştir.

Aynı mesnet konumu ve aynı eksenel hız değeri için, kirişlik katsayısının artmasıyla tabii frekansa gelen nonlineer etkileri azalmaktadır.

Üç mesnetli durumda, Şekil 3.178–179 sırasıyla v_0=0.2–1 ve farklı η değerleri ve v_f=0.2 için birinci moda ait, Şekil 3.180–181 sırasıyla v_0=0.2–1 ve farklı η değerleri ve v_f=0.2 için ikinci moda ait, Şekil 3.182–183 sırasıyla v_0=0.2–1 ve farklı η değerleri ve v_f=0.2 için üçüncü moda ait nonlineer frekans-genlik grafiği verilmiştir.

Üç mesnetli durumda, birinci mod ve üçüncü mod ait grafikler incelendiğinde aynı v_0 değeri ve v_f değeri için orta kısımda yer alan mesnedin soldan orta noktaya hareket ettirilmesi ile nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı artmaktadır. İkinci mod ait grafikler incelendiğinde nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı mesnedin orta noktaya hareket etmesiyle artmakta, orta noktaya yaklaştıkça azalmaktadır.

Dört mesnetli duruma ait, Şekil 3.184–3.187 birinci mod v_f=0.2 mesnet konumları sırasıyla η_1=0.1-η_2=0.9, η_1=0.2-η_2=0.8, η_1=0.3-η_2=0.7 ve η_1=0.4-η_2=0.6 ve farklı v_0 değerleri için, Şekil 3.188–3.191 ikinci mod v_f=0.2 mesnet konumları sırasıyla η_1=0.1-η_2=0.9, η_1=0.2-η_2=0.8, η_1=0.3-η_2=0.7 ve η_1=0.4-η_2=0.6 ve farklı v_0 değerleri için, Şekil 3.192–3.195 üçüncü mod v_f=0.2 mesnet konumları sırasıyla η_1=0.1-η_2=0.9, η_1=0.2-η_2=0.8, η_1=0.3-η_2=0.7 ve η_1=0.4-η_2=0.6 ve farklı v_0 değerleri için nonlineer frekans-genlik grafiği verilmiştir.

Dört mesnetli durum için v_0 değerinin artmasıyla, nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı artmaktadır. Kritik hıza yaklaştıkça nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı daha çok artmaktadır.

Dört mesnetli durumda, Şekil 3.196’ de birinci mod için, Şekil 3.197’ de ikinci mod için, Şekil 3.198’ de üçüncü mod için η_1=0.1-η_2=0.9, v_0=0.2 ve farklı v_f değerlerine ait nonlineer frekans-genlik grafiği verilmiştir.

Aynı mesnet konumları ve eksenel hız değeri için, kirişlik katsayısının artmasıyla tabii frekansa gelen nonlineer etkileri azalmaktadır.

Dört mesnetli durum, v_f=0.2, v_0=0.2 ve farklı mesnet konumlarına için Şekil 3.199' da birinci moda ait, Şekil 3.200' de ikinci moda ait, Şekil 3.201' de üçüncü moda ait nonlineer frekansın genliğe bağlı grafikleri verilmiştir.

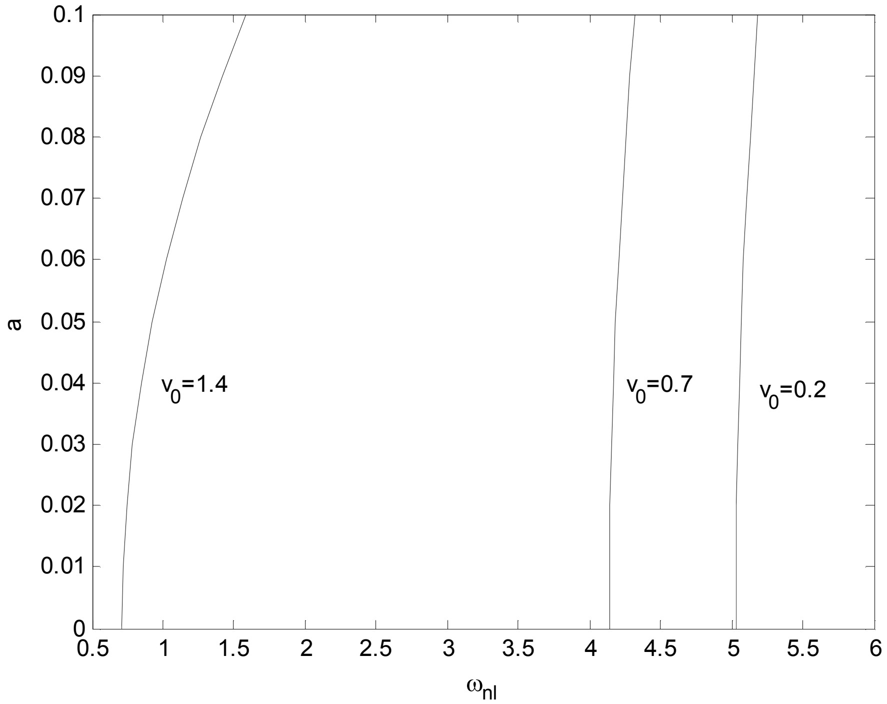
Dört mesnetli durumda, birinci moda ait şekil incelendiğinde aynı v_0 değeri ve v_f değeri için orta kısımda yer alan mesnetlerin orta noktaya doğru simetrik olarak hareket ettirilmesi ile nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı maksimum noktaya ulaşmakta, mesnetler orta noktaya yaklaştıkça tabii frekansa gelen düzeltme azalmaktadır.

İkinci moda ait grafikler şekil incelendiğinde aynı v_0 değeri ve v_f değeri için orta kısımda yer alan mesnetlerin orta noktaya doğru simetrik olarak hareket ettirilmesi ile artmaktadır. Mesnetlerin orta noktaya ve uç noktalara eşit mesafede olan mesnet durumları için nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı birbirlerine çok yakın çıkmaktadır.

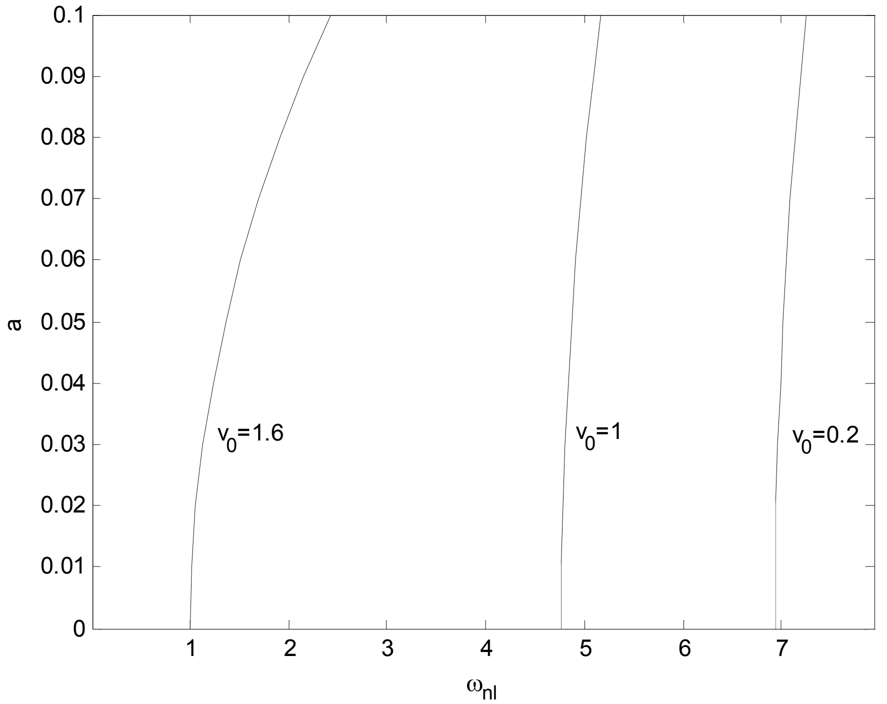
Üçüncü moda ait grafikler şekil incelendiğinde aynı v_0 değeri ve v_f değeri için orta kısımda yer alan mesnetlerin orta noktaya doğru simetrik olarak hareket ettirilmesi ile nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı artmakta, daha sonra azalıp, mesnetler orta noktaya yaklaştıkça tabii frekansa gelen düzeltme maksimum noktaya ulaşmaktadır.

Üç ve dört mesnetli durumlarına ait v_f=0.2, v_0=0.5 tek mesnetli durumda η=0.1 ve iki mesnetli durumda η_1=0.1–η_2=0.9 için Şekil 3.202' de birinci moda, Şekil 3.204' de ikinci moda, Şekil 3.206' da üçüncü moda, aynı v_f ve v_0 değerleri için tek mesnetli durumda η=0.3 ve iki mesnetli durumda η_1=0.3–η_2=0.7 için mesnet konumlarına göre Şekil 3.203' de birinci tabii frekansın, Şekil 3.205' de ikinci tabii frekansın, Şekil 3.207' de üçüncü tabii frekansın nonlineer frekans genlik grafiği verilmiştir.

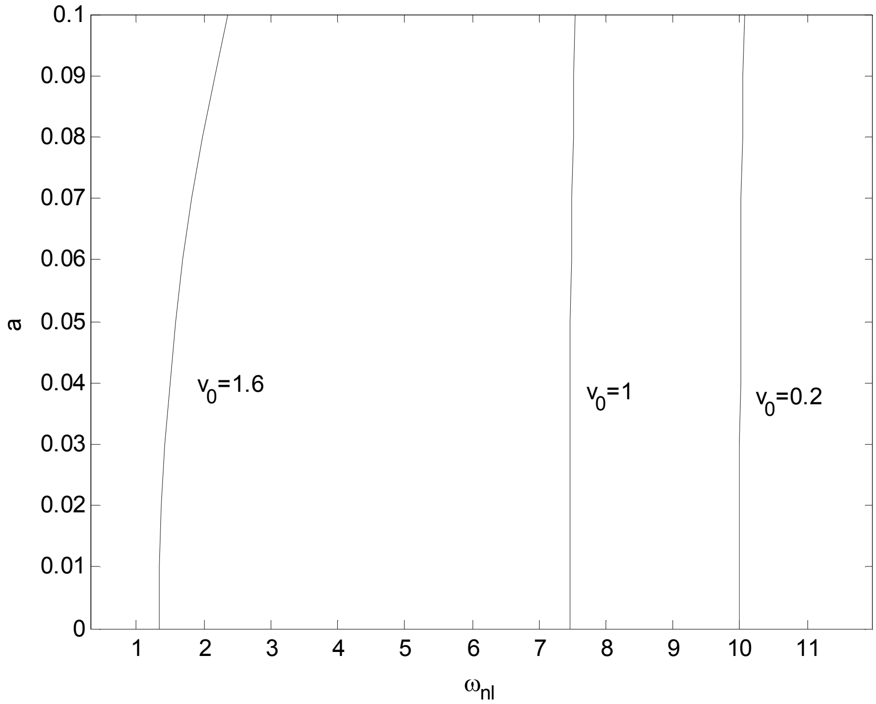
Orta kısımda yer alan mesnedin sayısının artırılması ile aynı v_0 değeri ve aynı v_f değeri için ilk üç moda ait nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı belirgin bir şekilde artmaktadır.



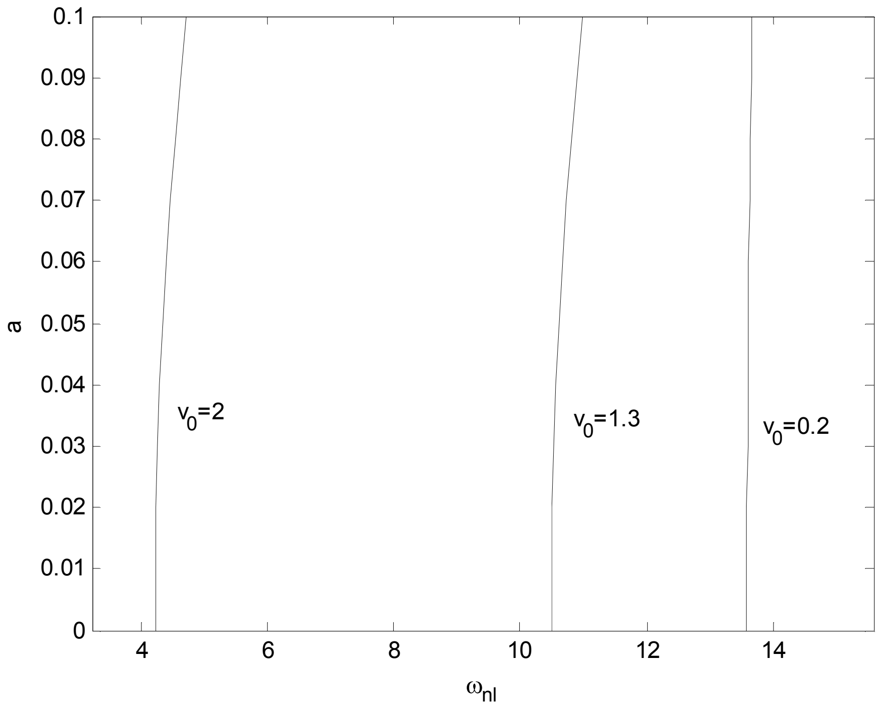
Şekil 3.166 - Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.1)



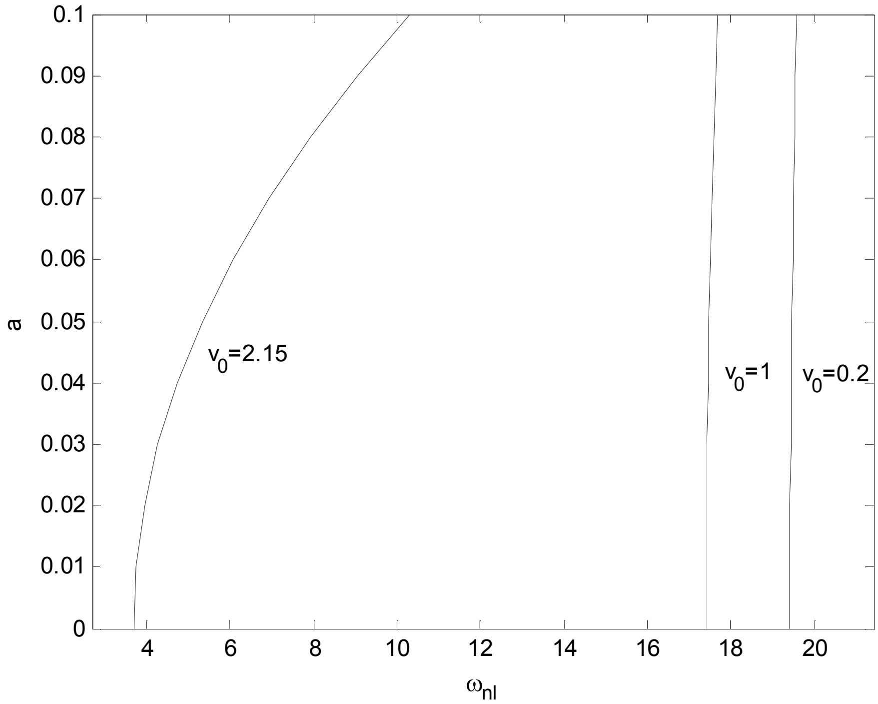
Şekil 3.167 – Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.3)



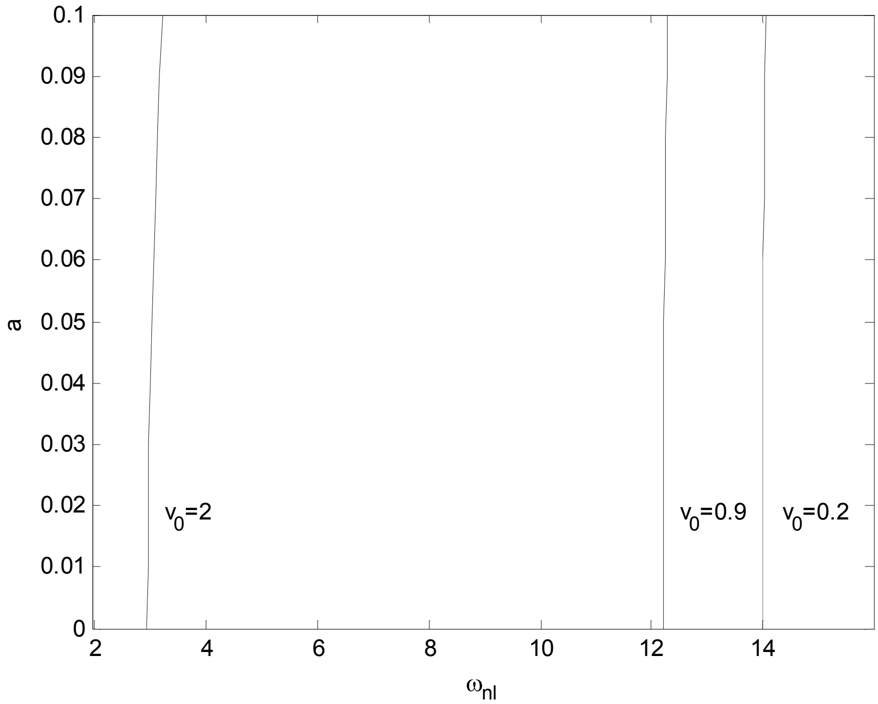
Şekil 3.168 – Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η=0.5)



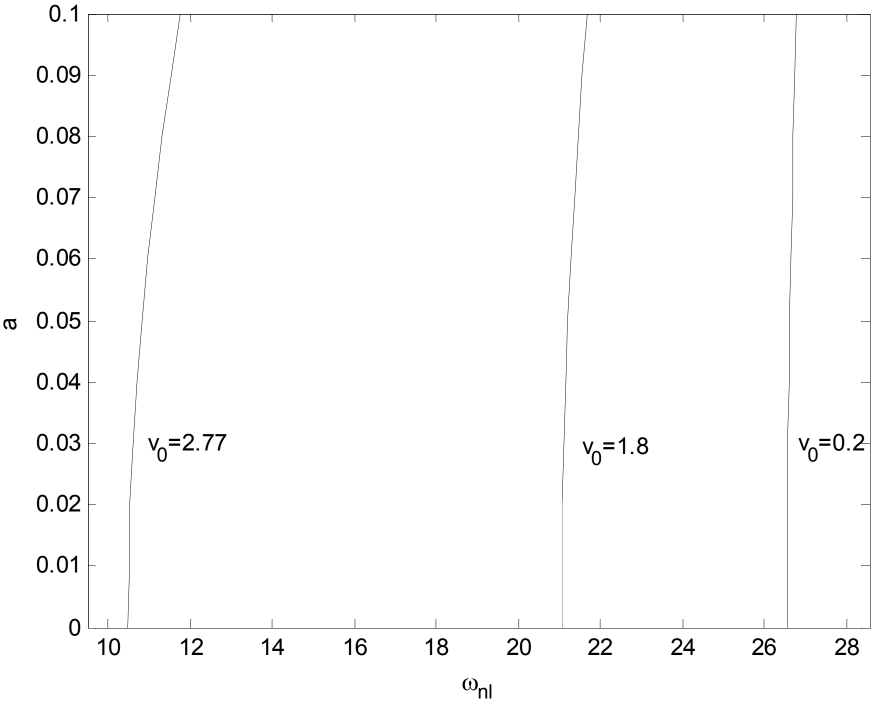
Şekil 3.169 - Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, η=0.1)



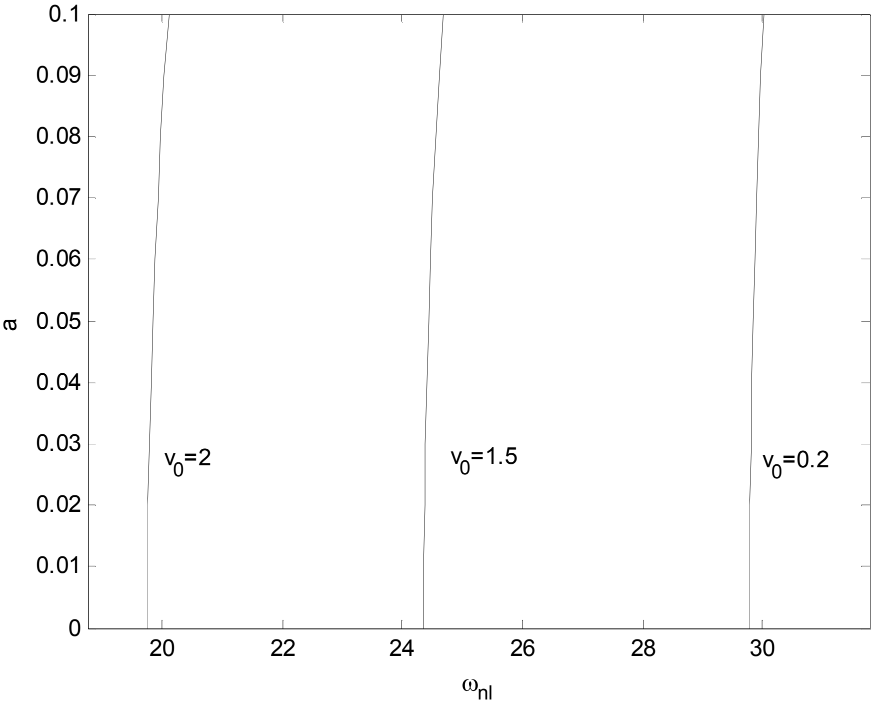
Şekil 3.170 – Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(2. mod, v_f =0.2, η=0.3)



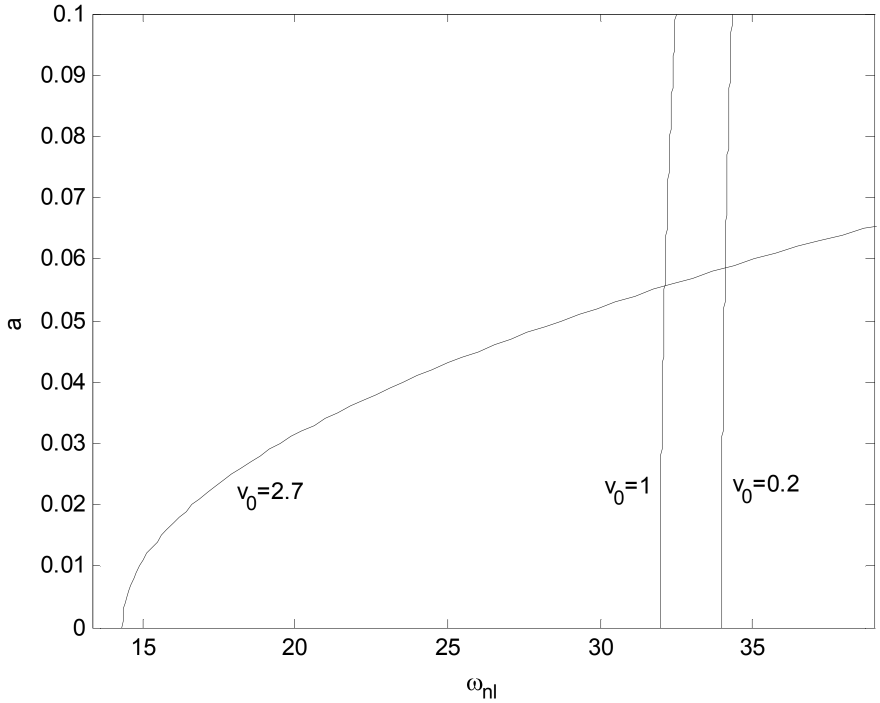
Şekil 3.171 – Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(2. mod, v_f =0.2, η=0.5)



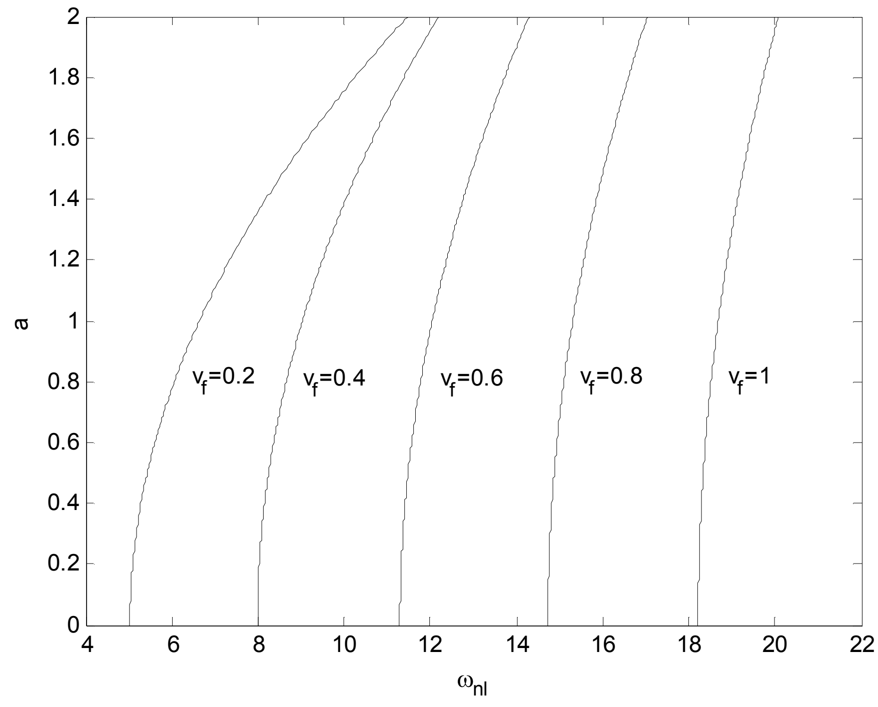
Şekil 3.172 - Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.1)



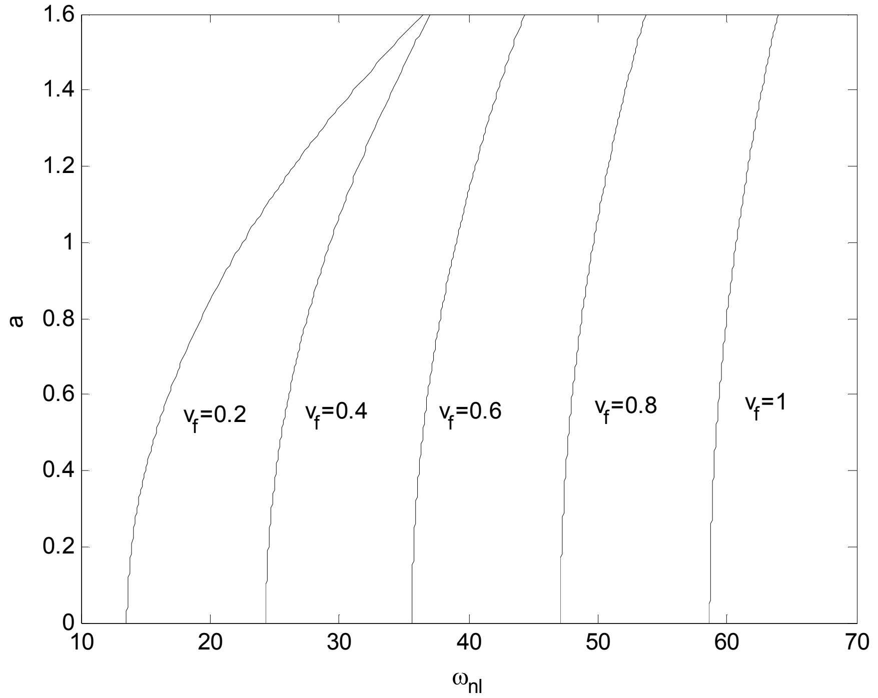
Şekil 3.173 – Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.3)



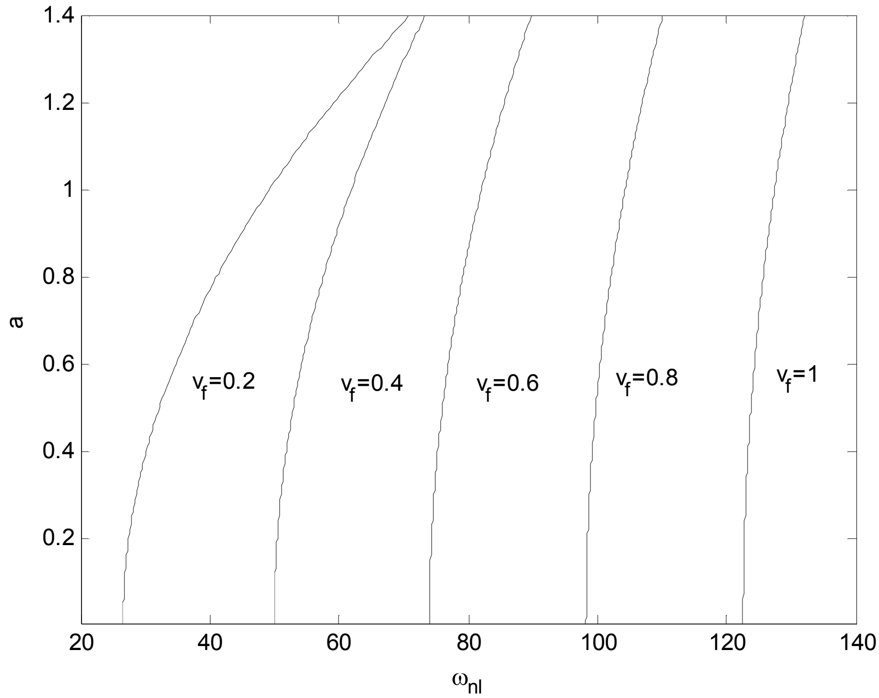
Şekil 3.174 – Üç mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η=0.5)



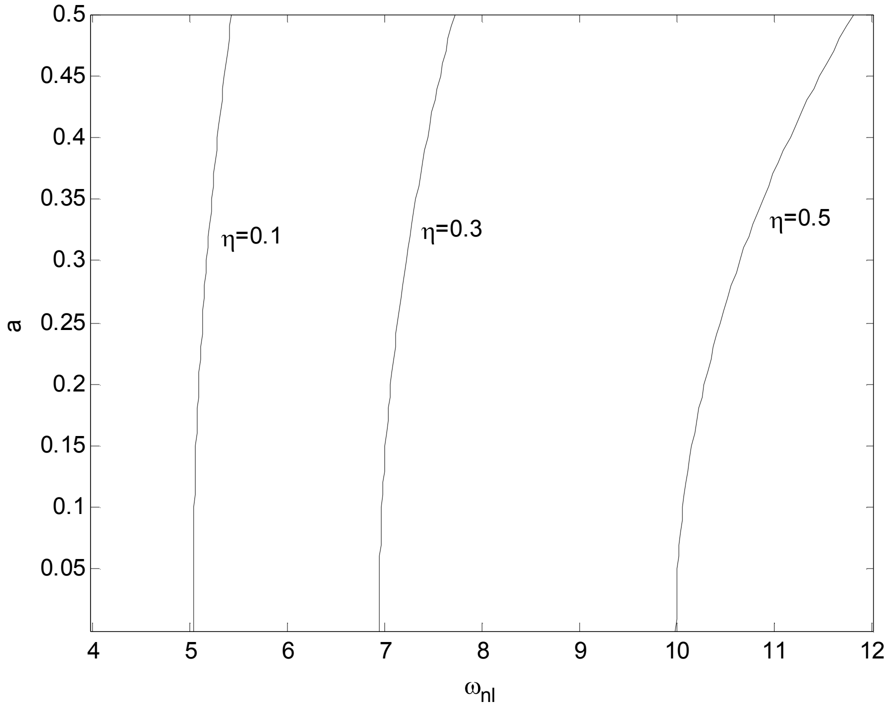
Şekil 3.175 – Üç mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, η =0.1, v_0 =0.2)



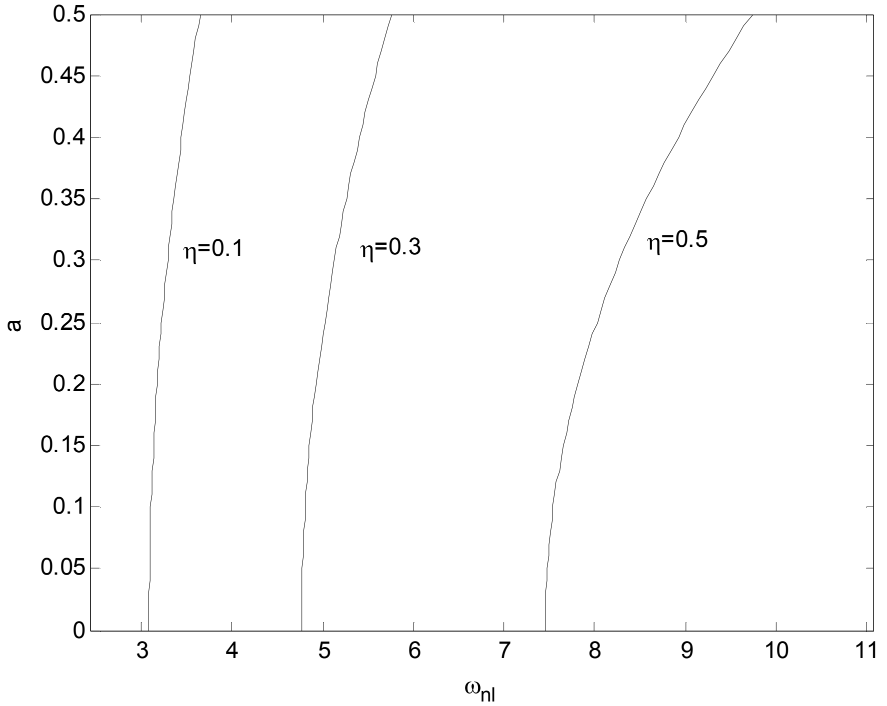
Şekil 3.176 – Üç mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, η =0.1, v_0 =0.2)



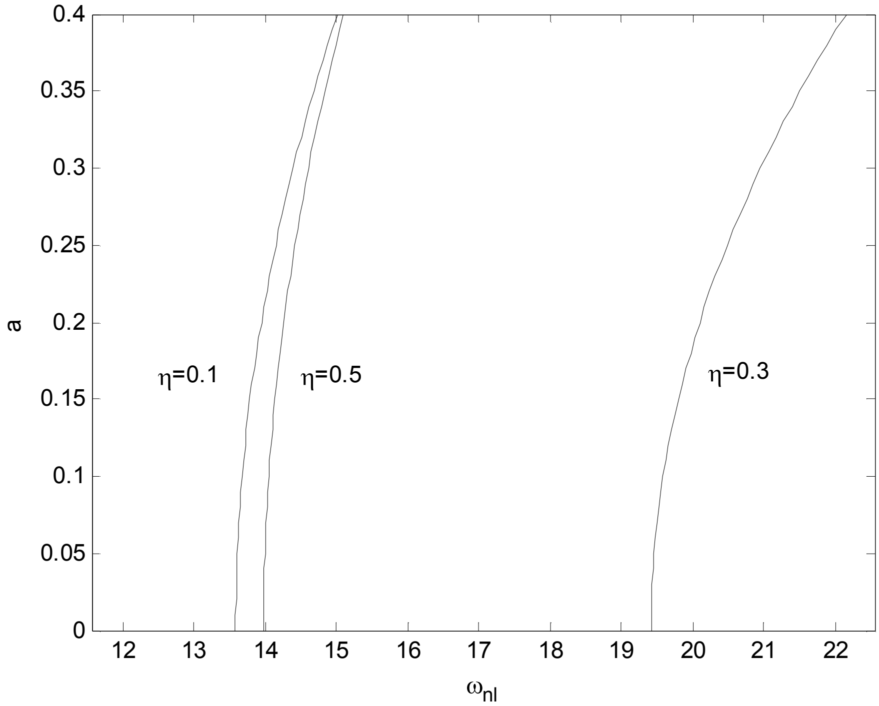
Şekil 3.177 – Üç mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, η =0.1, v_0 =0.2)



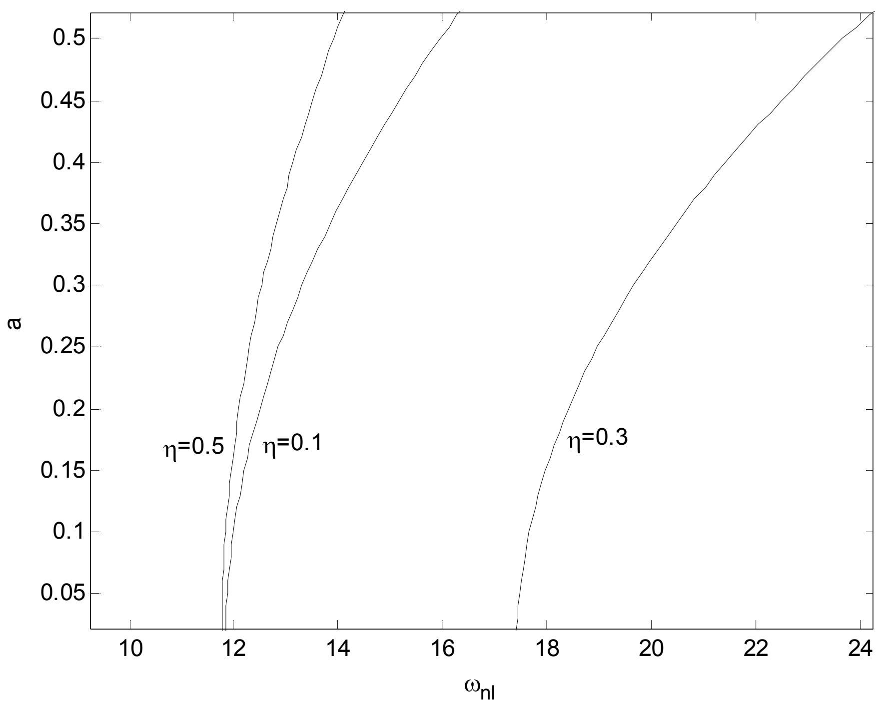
Şekil 3.178 - Üç mesnetli durumuna ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f=0.2, v_0=0.2)



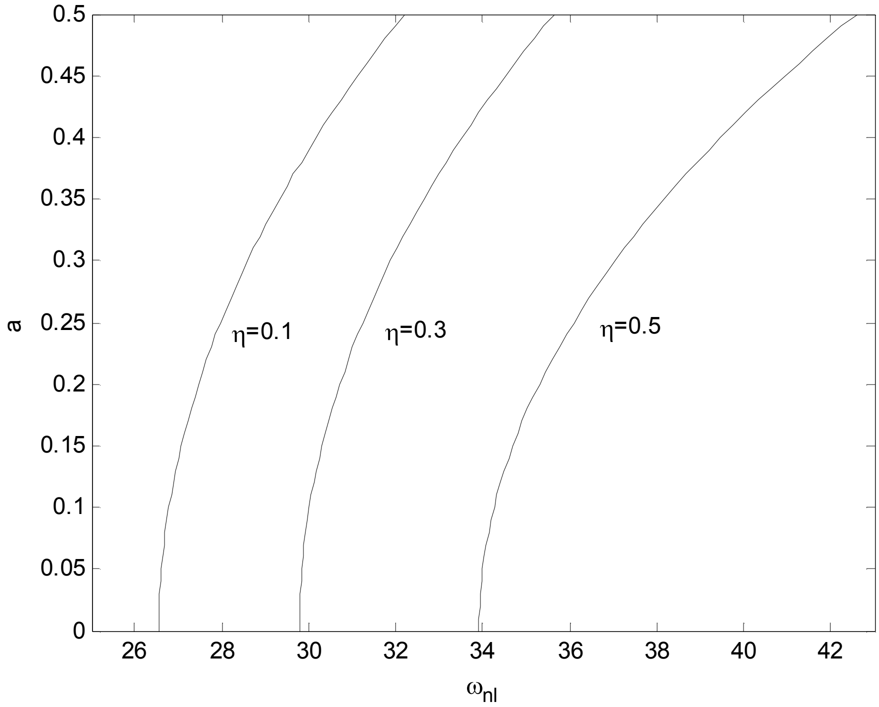
Şekil 3.179 Üç mesnetli durumuna ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f=0.2, v_0=1)



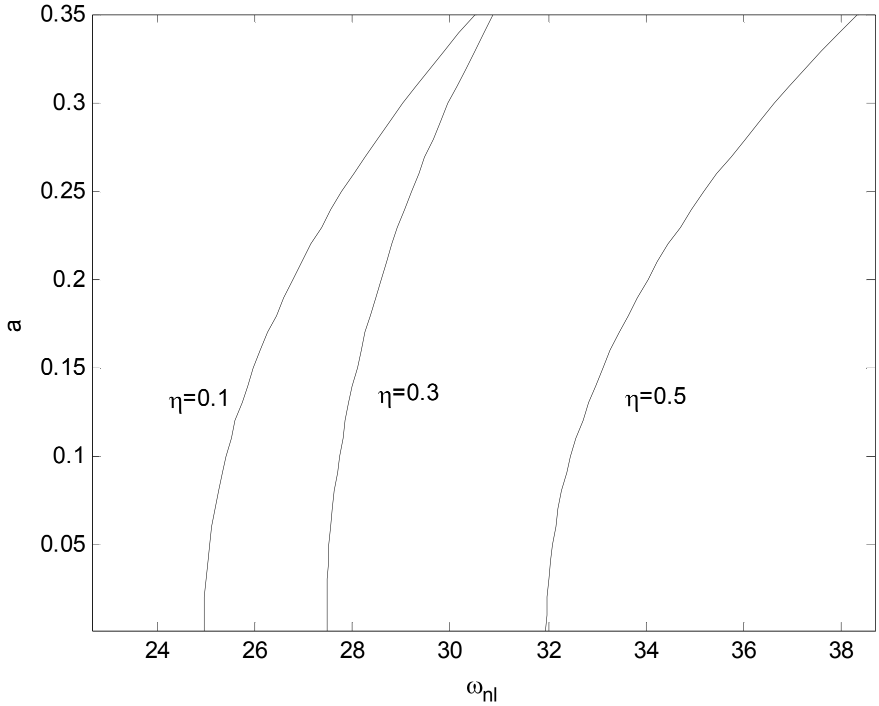
Şekil 3.180 - Üç mesnetli durumuna ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f=0.2, v_0=0.2)



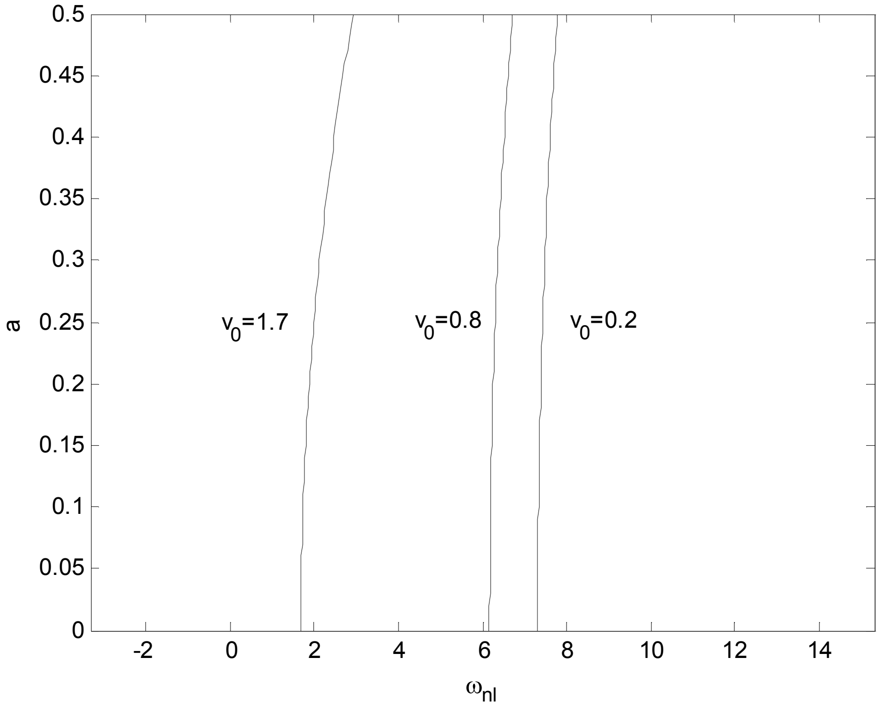
Şekil 3.181 - Üç mesnetli durumuna ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f=0.2, v_0=1)



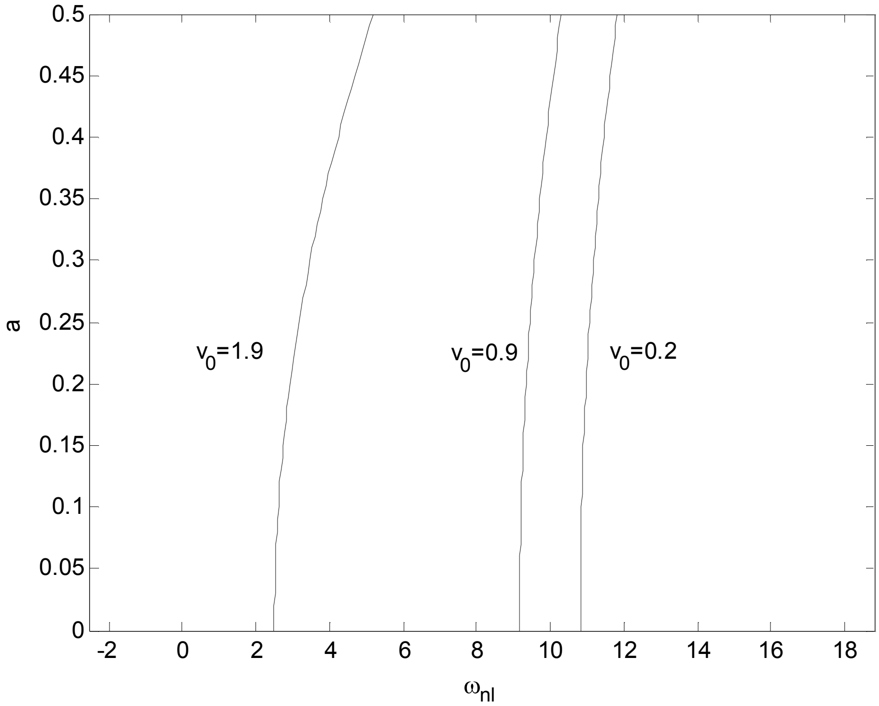
Şekil 3.182 - Üç mesnetli durumuna ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f=0.2, v_0=0.2)



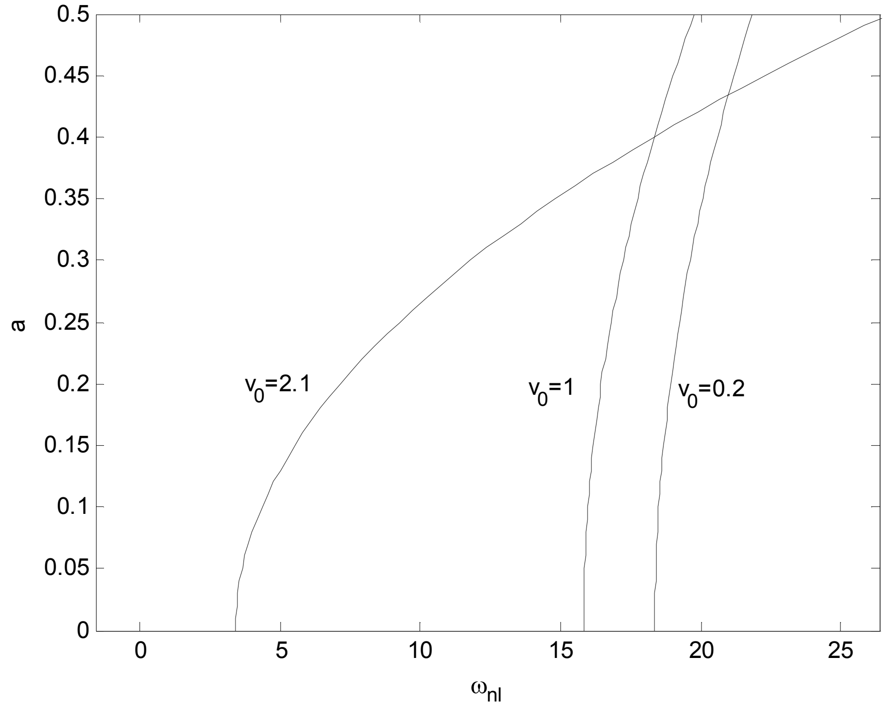
Şekil 3.183 - Üç mesnetli durumuna ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f=0.2, v_0=1)



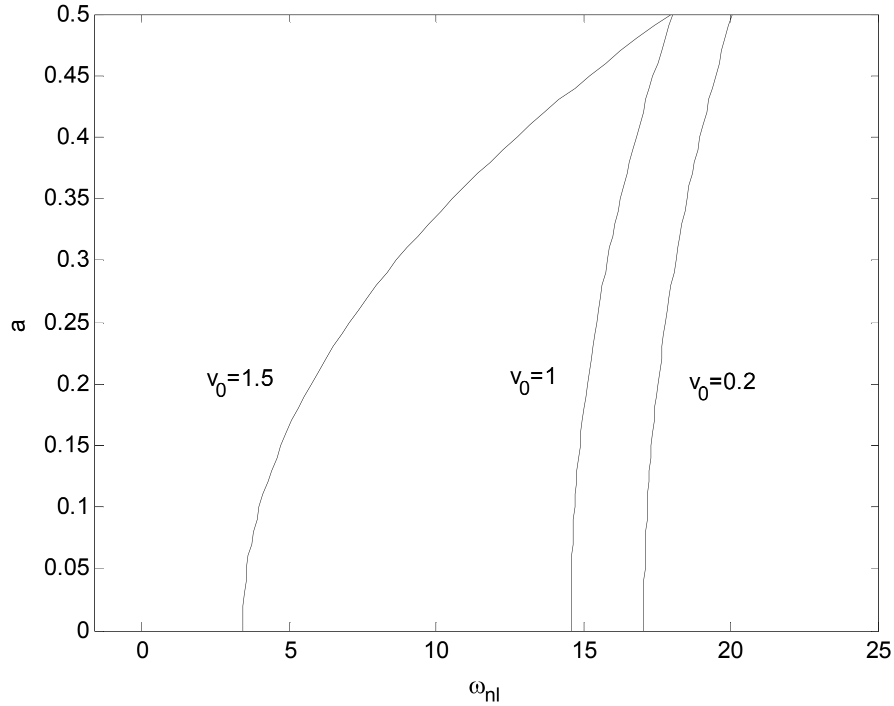
Şekil 3.184 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



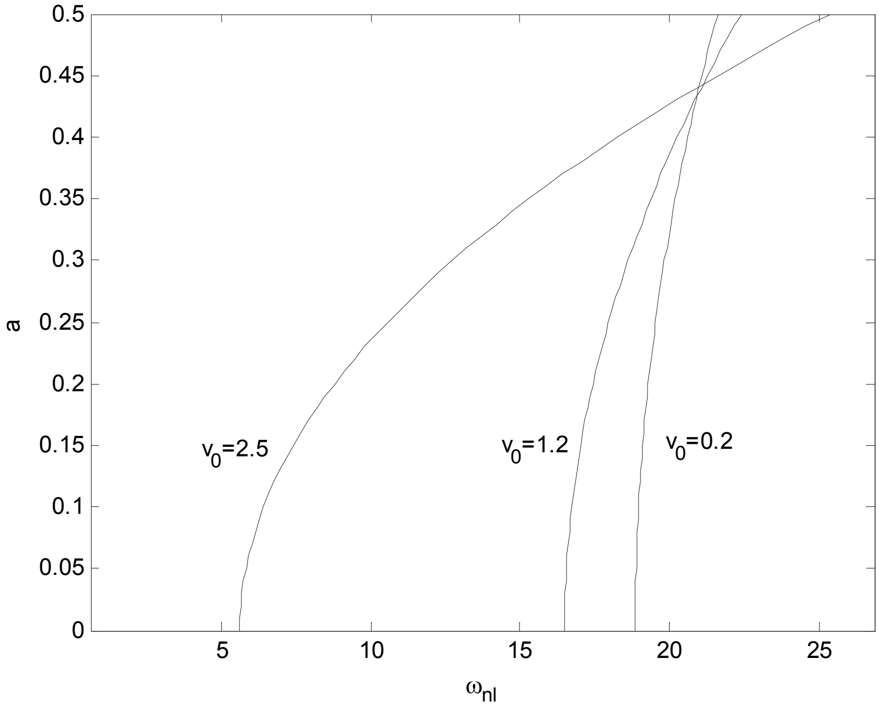
Şekil 3.185 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



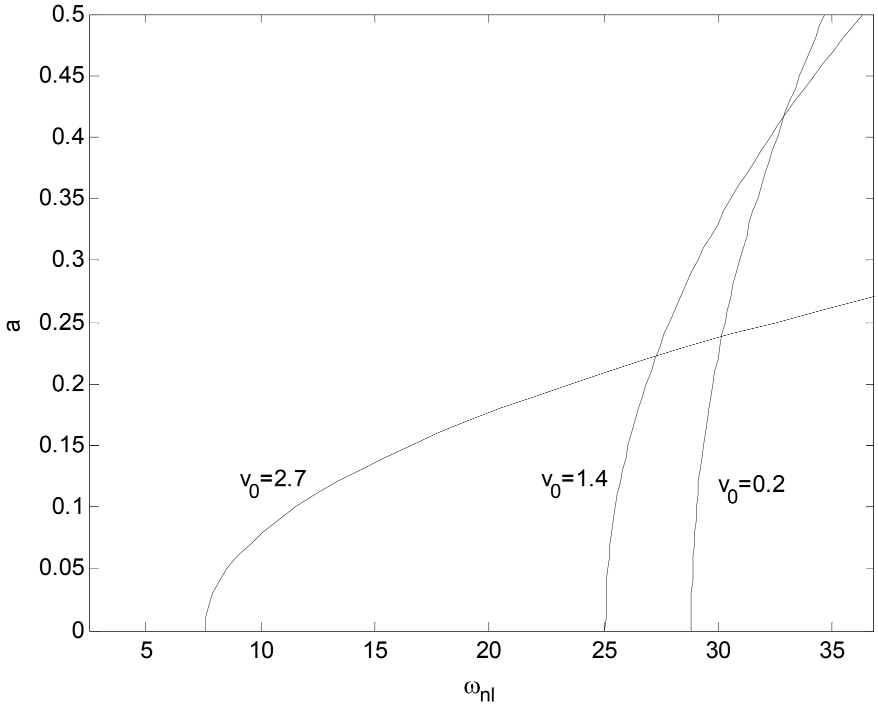
Şekil 3.186 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(1. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



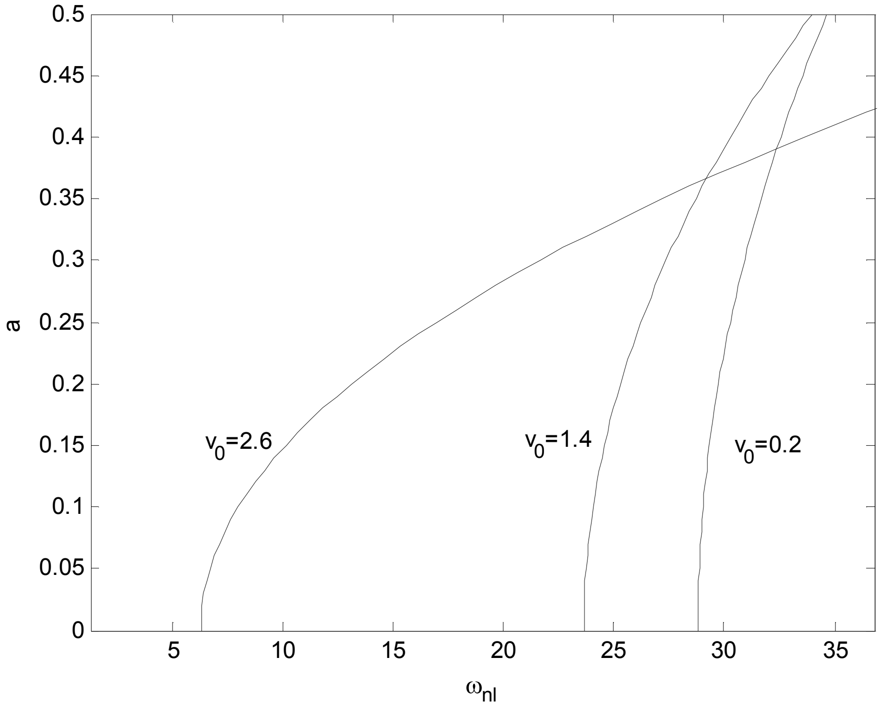
Şekil 3.187 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(1. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



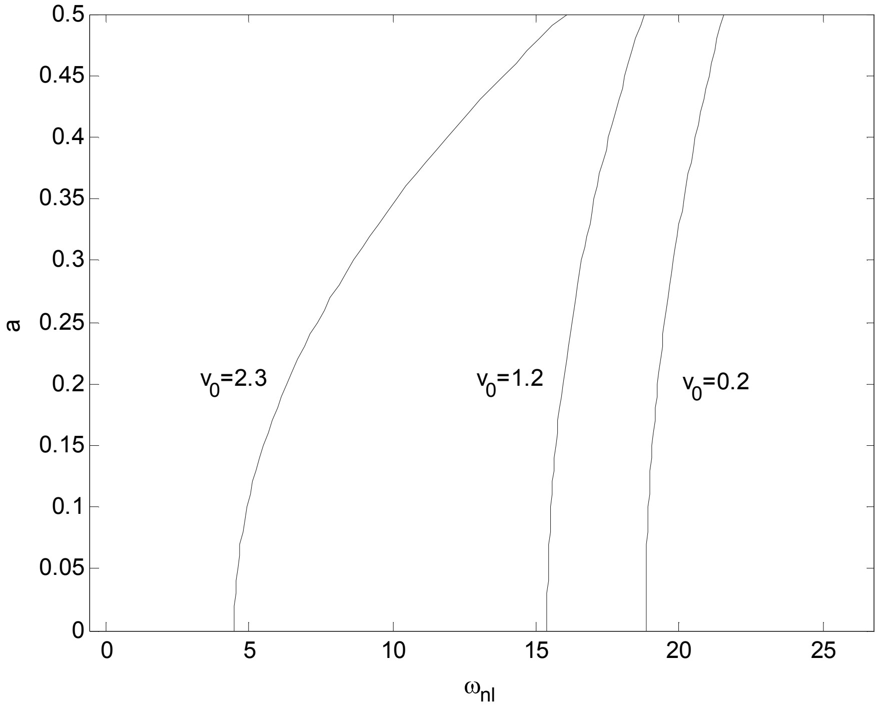
Şekil 3.188 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



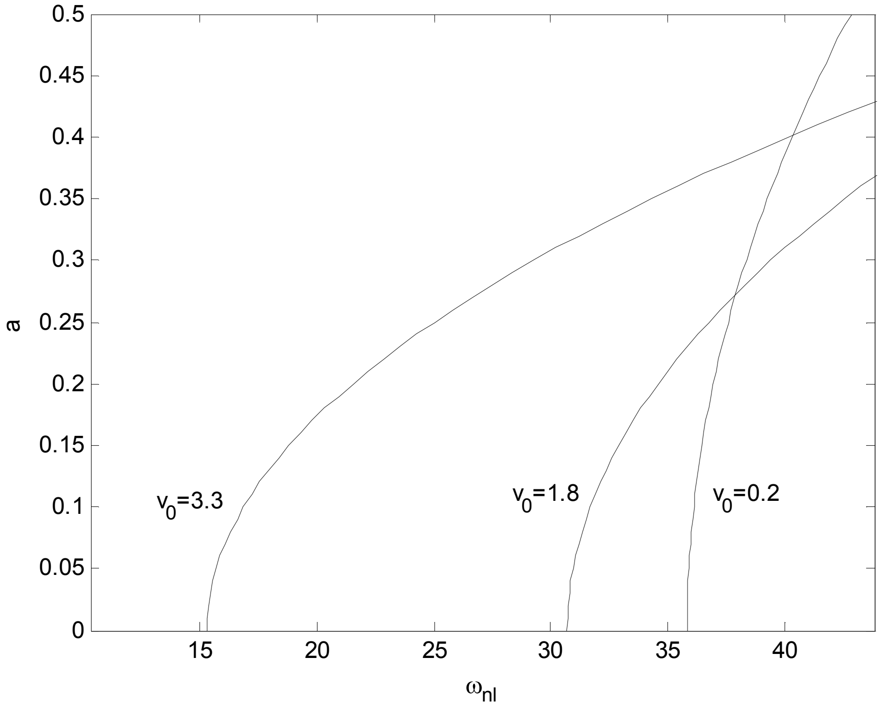
Şekil 3.189 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



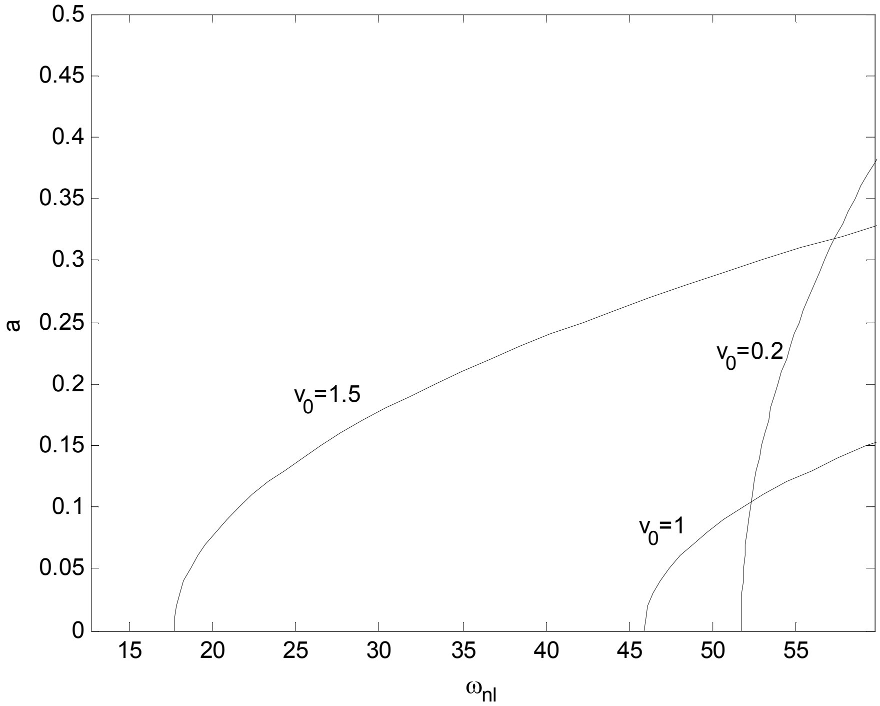
Şekil 3.190 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(2. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



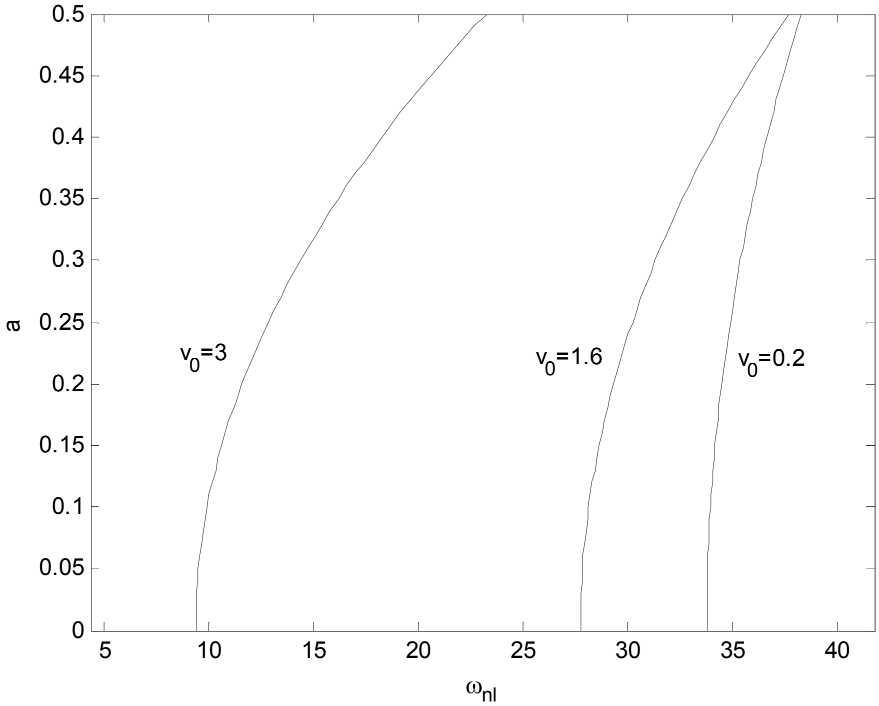
Şekil 3.191 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(2. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



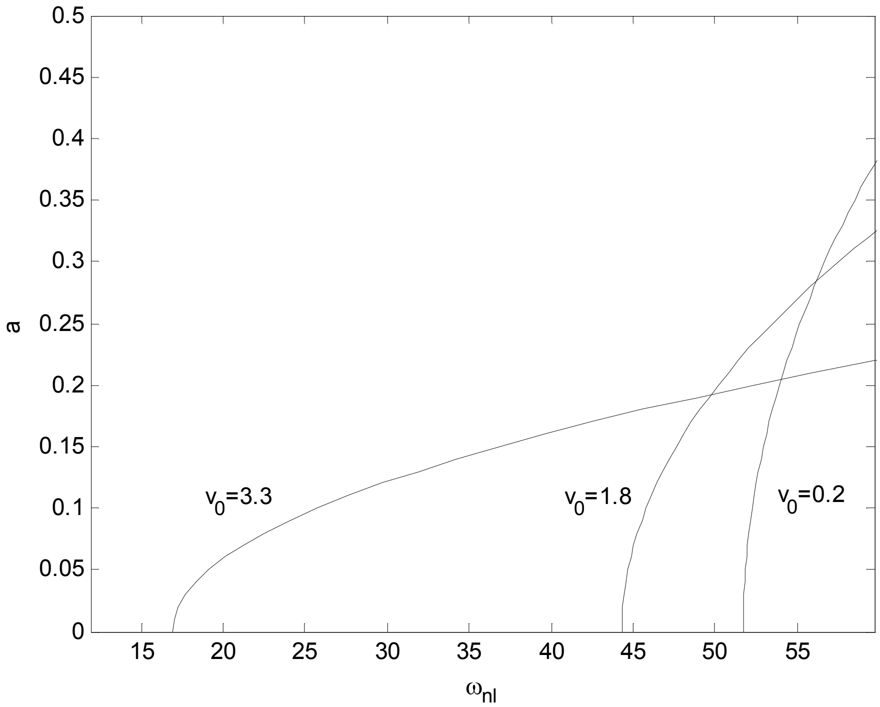
Şekil 3.192 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(3. mod, v_f =0.2, η_1=0.1, η_2=0.9)



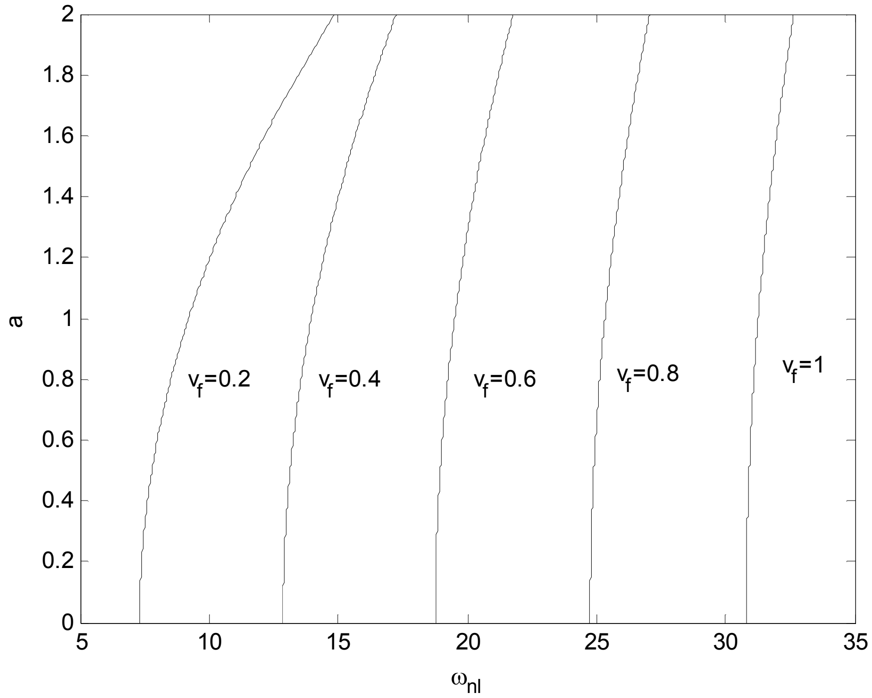
Şekil 3.193 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi
(3. mod, v_f =0.2, η_1=0.2, η_2=0.8)



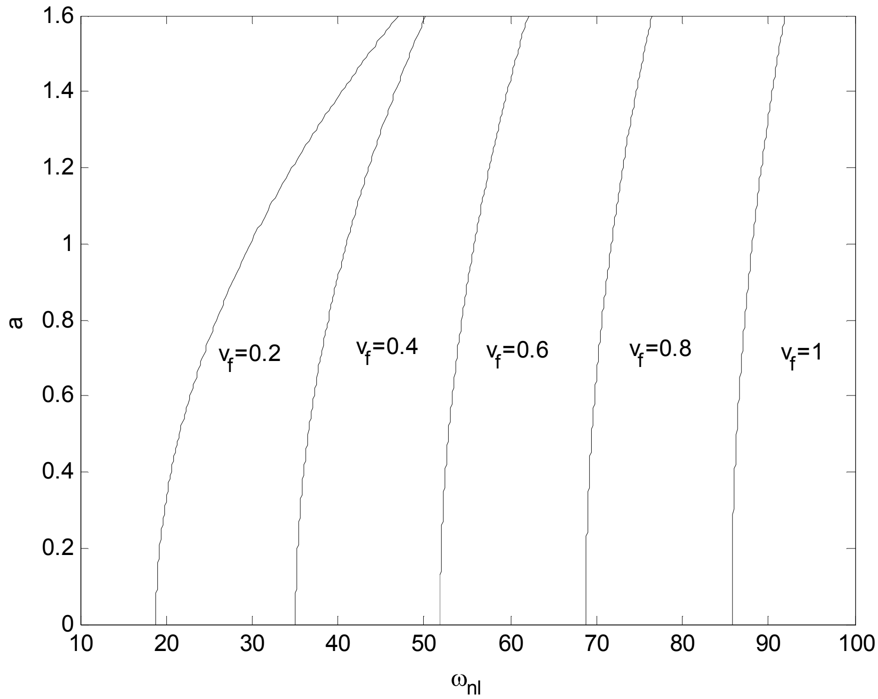
Şekil 3.194 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.3, η_2=0.7)



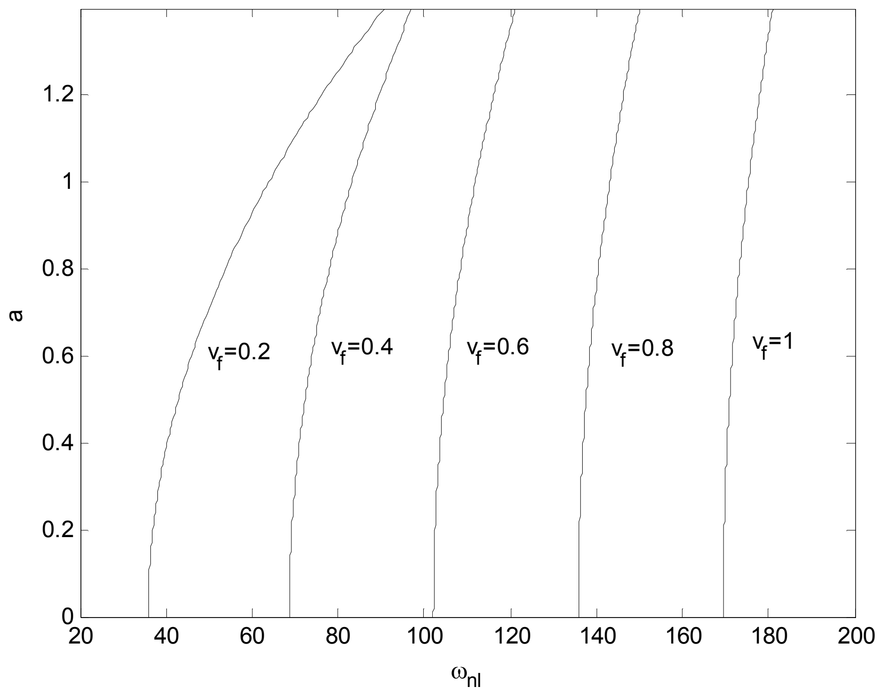
Şekil 3.195 - Dört mesnetli durum için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, η_1=0.4, η_2=0.6)



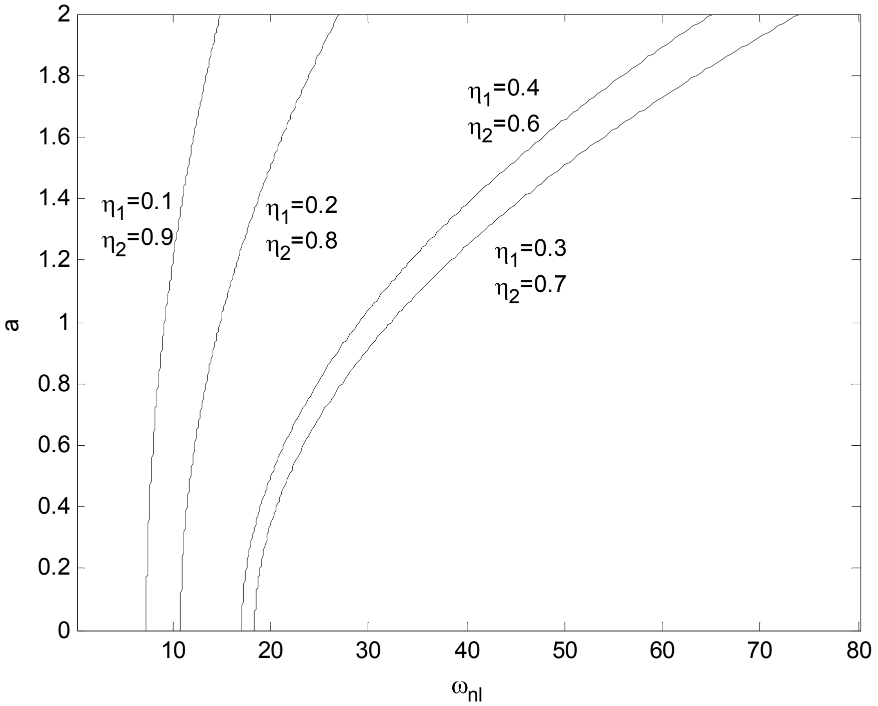
Şekil 3.196 – Dört mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, η_1 =0.1-η_2 =0.9, v_0 =0.2)



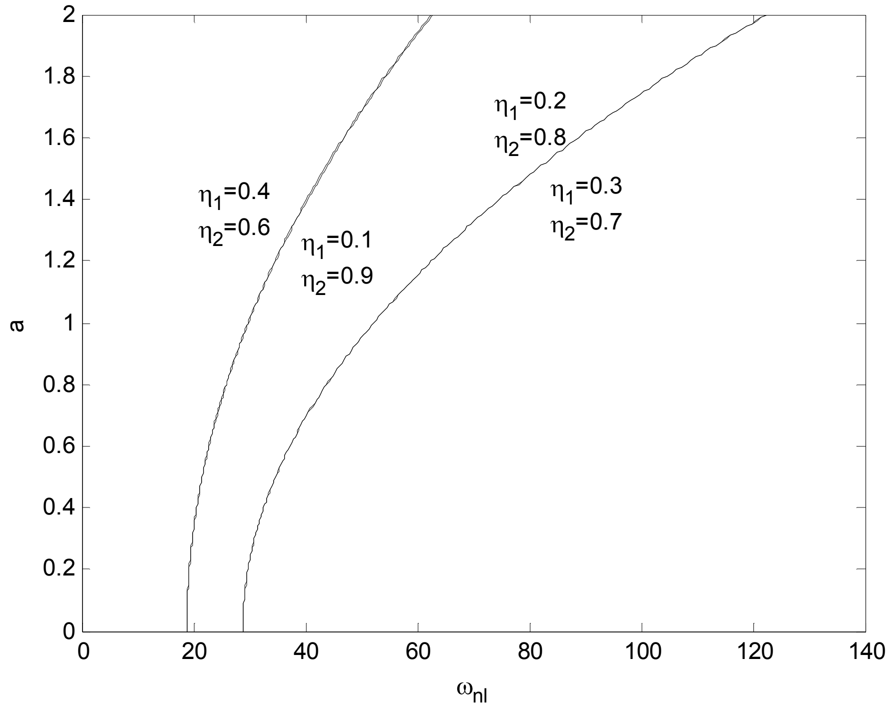
Şekil 3.197 – Dört mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, η_1 =0.1-η_2 =0.9, v_0 =0.2)



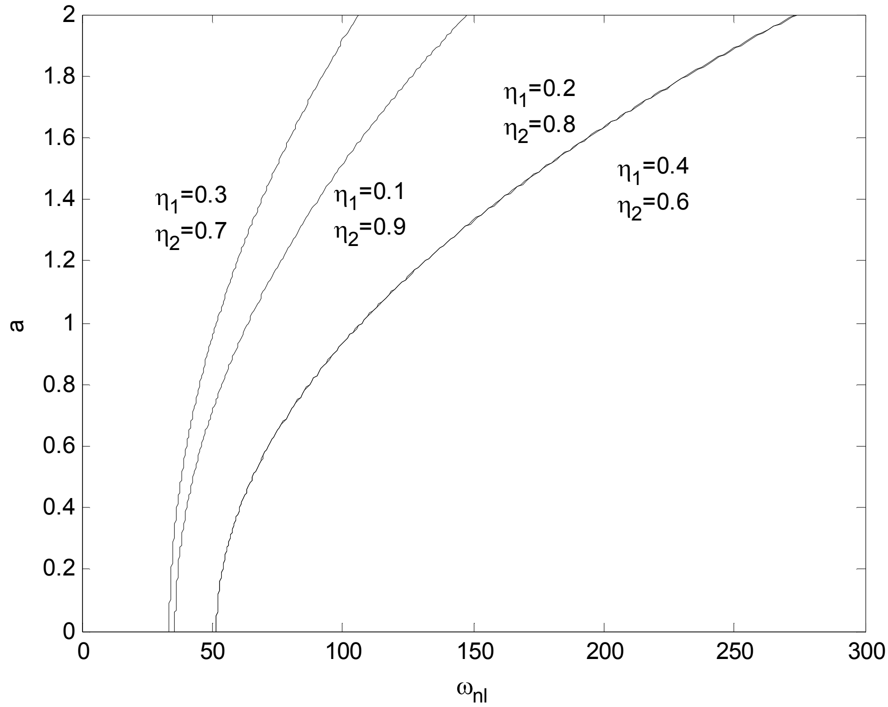
Şekil 3.198 – Dört mesnetli duruma ait farklı kirişlik katsayısı (v_f) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, η_1 =0.1-η_2 =0.9, v_0 =0.2)



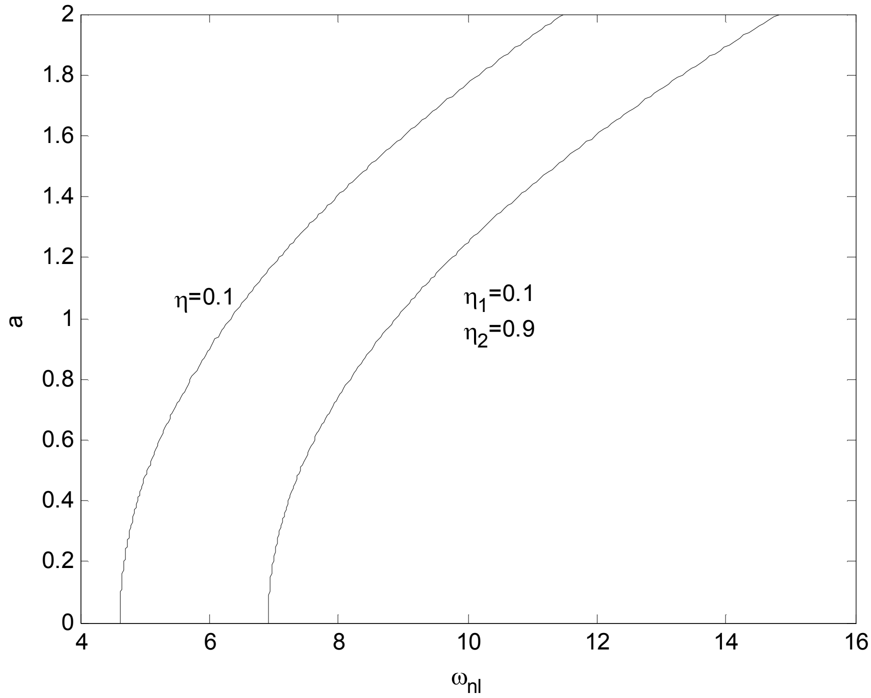
Şekil 3.199 - Dört mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f=0.2, v_0=0.2)



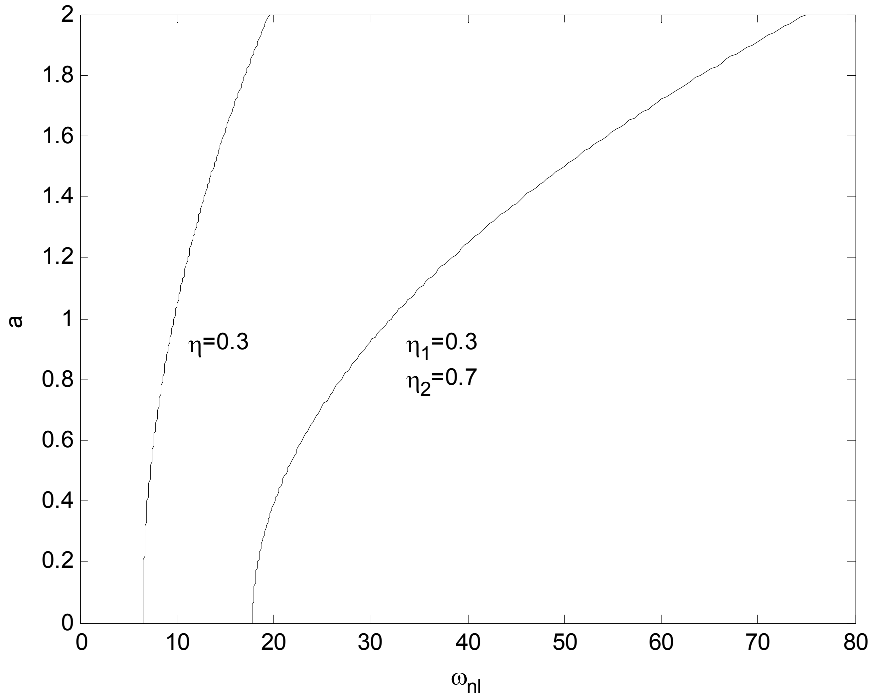
Şekil 3.200 - Dört mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f=0.2, v_0=0.2)



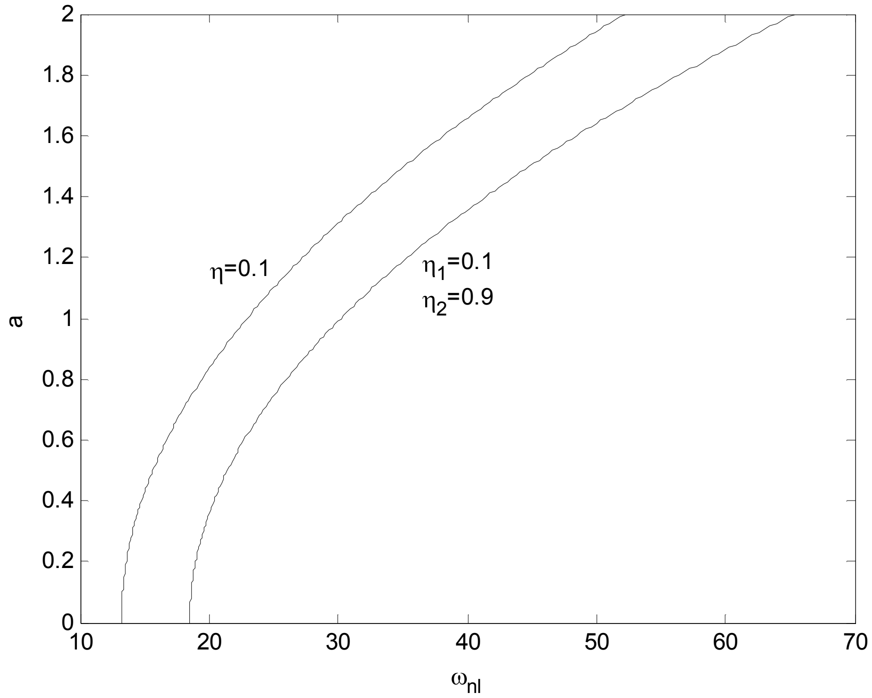
Şekil 3.201 - Dört mesnetli duruma ait farklı mesnet konumları için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f=0.2, v_0=0.2)



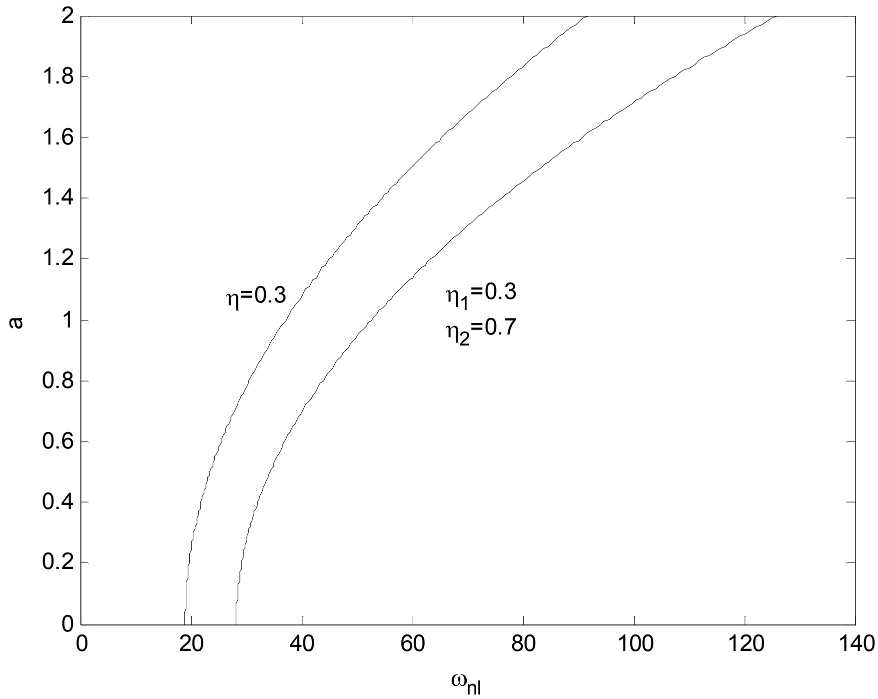
Şekil 3.202 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =0.5)



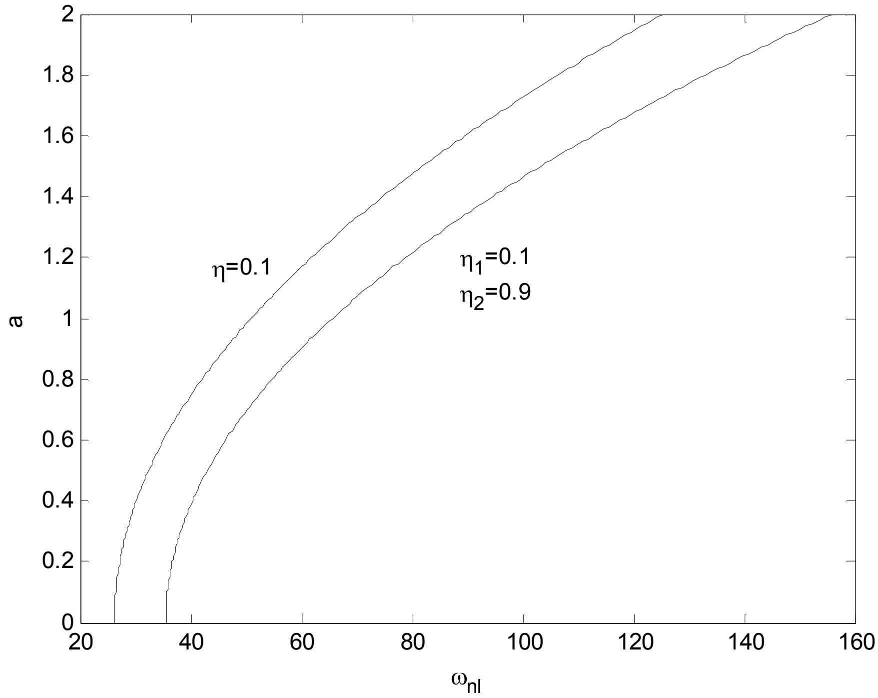
Şekil 3.203 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (1. mod, v_f =0.2, v_0 =0.5)



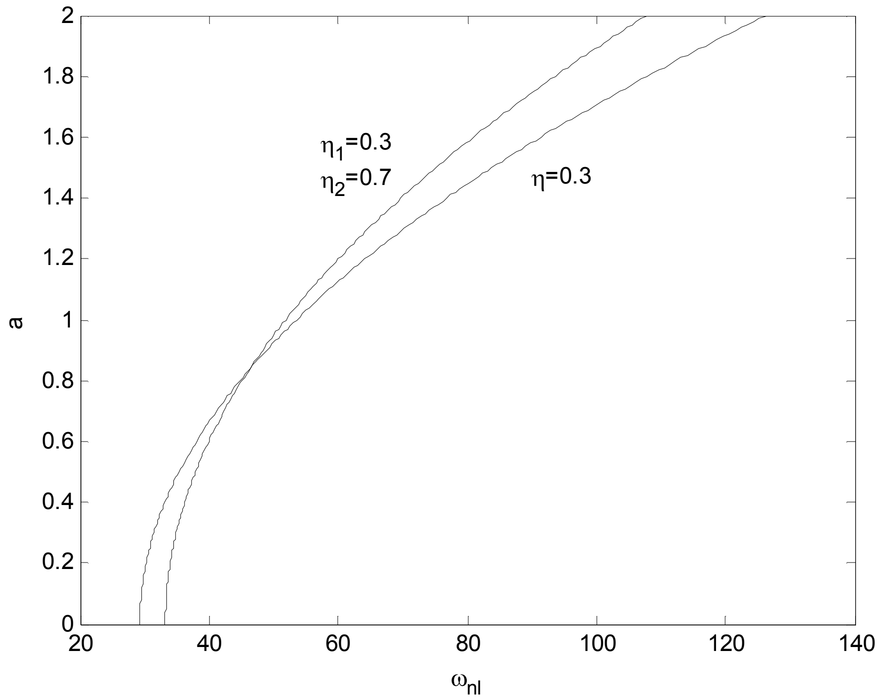
Şekil 3.204 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =0.5)



Şekil 3.205 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (2. mod, v_f =0.2, v_0 =0.5)



Şekil 3.206 – Üç mesnetli durum (η=0.1) ve dört mesnetli durum (η_1=0.1-η_2=0.9) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =0.5)



Şekil 3.207 – Üç mesnetli durum (η=0.3) ve dört mesnetli durum (η_1=0.3-η_2=0.7) için nonlineer frekansın genliğe bağlı değişimi (3. mod, v_f =0.2, v_0 =0.5)

3.2.1.3. Ω’ nın 0’ a Yakın Olduğu Durum:

Bu durumda hız değişim frekansı Ω’ nın sıfıra yakınlığını,

$$\Omega=\varepsilon\sigma \tag{3.105}$$

olarak gösterelim. Bu durum için çözülebilirlik şartı şu hali alır.

$$D_1A+\frac{\mu}{2}A+(k_1\cos\sigma T_1+k_2\sin\sigma T_1)A-k_3A^2\overline{A}=0 \tag{3.106}$$

burada k_1 ve k_2 sabitleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$k_1=\frac{v_1\Omega\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{m+1}\overline{Y}_{m+1}\,dx\right)}{2\left[i\omega\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y_{m+1}\overline{Y}_{m+1}\,dx\right)+v_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{m+1}\overline{Y}_{m+1}\,dx\right)\right]} \tag{3.107}$$

$$k_2=\frac{iv_1\,\omega\left(\int_0^{\eta}Y'_1\overline{Y}_1\,dx+\int_{\eta}^{1}Y'_2\overline{Y}_2\,dx\right)}{\left[i\omega\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y_{m+1}\overline{Y}_{m+1}\,dx\right)+v_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{m+1}\overline{Y}_{m+1}\,dx\right)\right]} \tag{3.108}$$

Genlik katsayısını gösteren a ifadesi şu şekilde elde edilir.

$$a=a_o\,e^{-\mu T_1+\frac{(k_{1R}\cos\sigma T_1-k_{2R}\sin\sigma T_1)}{\sigma}} \tag{3.109}$$

$|\sin\sigma T_1|\le 1$ ve $|\cos\sigma T_1|\le 1$ olduğundan kompleks genlikler sınırlıdır. Dolayısıyla bu durum için herhangi bir kararsızlık yoktur.

4. Toplam – Fark Tipi Kombinasyon Rezonansları:

Bu kısımda toplam ve fark tipi kombinasyon rezonansları incelenecektir. Önceki bölümlerden elde ettiğimiz O(1) ve O(ε) mertebe açılımlarını aşağıdaki gibi aynen alabiliriz.

1 mertebesi:

$$D_0^2 y_{(m+1)1} + 2v_0 D_0 y'_{(m+1)1} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{(m+1)1} + v_f^2 y^{iv}_{(m+1)1} = 0 \tag{4.1}$$

ε mertebesi:

$$\begin{aligned} D_0^2 y_{(m+1)2} &+ 2v_0 D_0 y'_{(m+1)2} + v_f^2 y^{iv}_{(m+1)2} + \left(v_0^2 - 1\right) y''_{(m+1)2} = -2D_0 D_1 y_{(m+1)1} - 2v_0 D_1 y'_{(m+1)1} \\ &- 2v_1 \sin\Omega t D_0 y'_{(m+1)1} - 2y''_{(m+1)1} v_0 v_1 \sin\Omega t - y'_{(m+1)1} v_1 \Omega \cos\Omega t - \mu D_0 y_{(m+1)1} - \mu v_0 y'_{(m+1)1} \\ &+ \frac{1}{2} v_b^2 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} y'^2_{(m+1)1} dx \right) y''_{(m+1)1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

O(1) mertebesinin çözümü için çözüm fonksiyonunu, a. ve b. modlarının etkin olduğu göz önüne bulundurarak aşağıdaki gibi ele alalım. Çözüm fonksiyonu olan denklem (4.3) aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$y_{(m+1)1}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A_a(T_1) e^{i\omega_a T_0} Y_{(m+1)a}(x) + A_b(T_1) e^{i\omega_b T_0} Y_{(m+1)b}(x) + \text{k.e.} \tag{4.3}$$

Çözüm fonksiyonundaki ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$Y_{(m+1)a}(x) = c_{4m+1} e^{i\beta_{4m+1}x} + c_{4m+2} e^{i\beta_{4m+2}x} + c_{4m+3} e^{i\beta_{4m+3}x} + c_{4m+4} e^{i\beta_{4m+4}x} \tag{4.4}$$

$$Y_{(m+1)b}(x) = d_{4m+1} e^{i\beta_{4m+1}x} + d_{4m+2} e^{i\beta_{4m+2}x} + d_{4m+3} e^{i\beta_{4m+3}x} + d_{4m+4} e^{i\beta_{4m+4}x} \tag{4.5}$$

Denklem (4.3)' u, denklem (4.1)' e yerleştirilirse, etkin olan a. ve b. modlarına ait aşağıdaki gibi iki tane denklemi elde edebiliriz

$$v_f^2 Y^{iv}_{(m+1)a} + \left(v_0^2 - 1\right) Y''_{(m+1)a} + 2iv_0 \omega_a Y'_{(m+1)a} - \omega_a^2 Y_{(m+1)a} = 0 \tag{4.6}$$

$$v_f^2 Y^{iv}_{(m+1)b} + \left(v_0^2 - 1\right) Y''_{(m+1)b} + 2iv_0 \omega_b Y'_{(m+1)b} - \omega_b^2 Y_{(m+1)b} = 0 \tag{4.7}$$

Bu denklemlerin çözüm yolu önceki bölümlerde izah edilmişti. O(ε) mertebesinin için değiştirme fonksiyonunu ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$y_{(m+1)2}\left(x,T_0,T_1;\varepsilon\right)=\phi_{(m+1)a}\left(x,T_1\right)e^{i\omega_a T_0}+\phi_{(m+1)b}\,e^{i\omega_b T_0}+W_{(m+1)}(x,T_0,T_1)+\text{k.e.} \tag{4.8}$$

İlk iki terim fonksiyonun a. ve b. modlarına ait seküler terimler ile ilgili, üçüncü terim ise fonksiyonun seküler olmayan terimleri ile ilgilidir. Tanımladığımız yer değiştirme fonksiyonu olan denklem (4.8)' i ve çözüm fonksiyonu olarak denklem (4.3)' ü, denklem (4.2)' deki uygun yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(v_f^2\,\phi^{iv}_{(m+1)a}+\left(v_0^2-1\right)\phi''_{(m+1)a}+2iv_0\omega_a\phi'_{(m+1)a}-\omega_a^2\phi_{(m+1)a}\right)e^{i\omega_a T_0}\\
&+\left(v_f^2\,\phi^{iv}_{(m+1)b}+\left(v_0^2-1\right)\phi''_{(m+1)b}+2iv_0\omega_a\phi'_{(m+1)b}-\omega_a^2\phi_{(m+1)b}\right)e^{i\omega_b T_0}=\\
&-\left(2D_1A_a+\mu A_a\right)\left(i\omega_a Y_{(m+1)a}+v_0Y'_{(m+1)a}\right)e^{i\omega_a T_0}\\
&-\left(2D_1A_b+\mu A_b\right)\left(i\omega_b Y_{(m+1)b}+v_0Y'_{(m+1)b}\right)e^{i\omega_b T_0}\\
&+A_a v_1\left(-\omega_a Y'_{(m+1)a}-\frac{\Omega}{2}Y'_{(m+1)a}+iv_0Y''_{(m+1)a}\right)e^{i(\Omega+\omega_a)T_0}\\
&+A_b v_1\left(-\omega_b Y'_{(m+1)b}-\frac{\Omega}{2}Y'_{(m+1)b}+iv_0Y''_{(m+1)b}\right)e^{i(\Omega+\omega_b)T_0}\\
&+\overline{A}_a v_1\left(\omega_a \overline{Y}'_{(m+1)a}-\frac{\Omega}{2}\overline{Y}'_{(m+1)a}+iv_0\overline{Y}''_{(m+1)a}\right)e^{i(\Omega-\omega_a)T_0}\\
&+\overline{A}_b v_1\left(\omega_b \overline{Y}'_{(m+1)b}-\frac{\Omega}{2}\overline{Y}'_{(m+1)b}+iv_0\overline{Y}''_{(m+1)b}\right)e^{i(\Omega-\omega_b)T_0}\\
&+\frac{1}{2}v_b^2\Bigg[\Bigg[A_a^3\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{(m+1)a}dx\right)e^{3i\omega_a T_0}+A_a\overline{A}_a^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'^2_{(m+1)a}dx\right)e^{-i\omega_a T_0}\\
&+2A_a\overline{A}_a\overline{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)b}dx\right)e^{-i\omega_b T_0}+A_a\overline{A}_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'^2_{(m+1)b}dx\right)e^{i(\omega_a-2\omega_b)T_0}\\
&+2A_a^2\overline{A}_a\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)a}dx\right)e^{i\omega_a T_0}+2A_a^2\overline{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)b}dx\right)e^{i(2\omega_a-\omega_b)T_0} \qquad (4.9)\\
&+2A_a\overline{A}_aA_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)b}dx\right)e^{i\omega_b T_0}+2A_aA_b\overline{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\overline{Y}'_{(m+1)b}dx\right)e^{i\omega_a T_0}\\
&+2A_a^2A_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)b}dx\right)e^{i(2\omega_a+\omega_b)T_0}+A_aA_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'^2_{(m+1)b}dx\right)e^{i(\omega_a+2\omega_b)T_0}\Bigg]Y''_{(m+1)a}\\
&+\Bigg[A_b^3\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{(m+1)b}dx\right)e^{3i\omega_b T_0}+\overline{A}_a^2A_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'^2_{(m+1)a}dx\right)e^{i(-2\omega_a+\omega_b)T_0}
\end{aligned}$$

$$+2\overline{A}_a A_b \overline{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)b}dx\right)e^{-i\omega_a T_0}+A_b\overline{A}_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'^2_{(m+1)b}dx\right)e^{-i\omega_b T_0}$$

$$+2A_a\overline{A}_a A_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)a}dx\right)e^{i\omega_b T_0}+2A_a A_b\overline{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)b}dx\right)e^{i\omega_a T_0}$$

$$+2A_a^2 A_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{(m+1)a}dx\right)e^{i(2\omega_a+\omega_b)T_0}++2\overline{A}_a A_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)b}dx\right)e^{i(-\omega_a+2\omega_b)T_0}$$

$$\left.\left.+2A_b^2\overline{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\overline{Y}'_{(m+1)b}dx\right)e^{i\omega_b T_0}+2A_a A_b^2\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)b}dx\right)e^{i(\omega_a+2\omega_b)T_0}\right]Y''_{(m+1)b}\right]+\text{k.e.}+\text{S.O.T.}$$

elde edilir.

4.1. Toplam Tipi Kombinasyon Rezonansları:

Hız değişim frekanslarının a. ve b. tabii frekanslarının toplamına yakın olma durumu ele alınmıştır. Bu durumda frekansı aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\Omega=\omega_a+\omega_b+\varepsilon\sigma \tag{4.10}$$

Bu çözümü denklem (4.9)' a yerleştirir a. ve b. moda ait çözümleri ayrıştırırsak,

$$\begin{aligned}
&v_f^2\phi_{(m+1)a}^{iv}+\left(v_0^2-1\right)\phi''_{(m+1)a}+2iv_0\omega_a\phi'_{(m+1)a}-\omega_a^2\phi_{(m+1)a}= \\
&-\left(2D_1A_a+\mu A_a\right)\left(i\omega_a Y_{(m+1)a}+v_0Y'_{(m+1)a}\right)+\bar{A}_b v_1\left(\left(\omega_b-\frac{\Omega}{2}\right)\bar{Y}'_{(m+1)b}+iv_0\bar{Y}''_{(m+1)b}\right)e^{i\sigma T_1} \\
&+\frac{1}{2}v_b^2\left[A_a^2\bar{A}_a\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{(m+1)a}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)a}+2A_a^2\bar{A}_a\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)a}dx\right)Y''_{(m+1)a}\right. \\
&+2A_aA_b\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\bar{Y}'_{(m+1)b}dx\right)Y''_{(m+1)a} \\
&\left.+2A_aA_b\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)b}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)b}\right]+k.e.+S.O.T.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
&v_f^2\phi_{(m+1)b}^{iv}+\left(v_0^2-1\right)\phi''_{(m+1)b}+2iv_0\omega_b\phi'_{(m+1)b}-\omega_b^2\phi_{(m+1)b}= \\
&-\left(2D_1A_b+\mu A_b\right)\left(i\omega_b Y_{(m+1)b}+v_0Y'_{(m+1)b}\right)+\bar{A}_a v_1\left(\left(\omega_a-\frac{\Omega}{2}\right)\bar{Y}'_{(m+1)a}+iv_0\bar{Y}''_{(m+1)a}\right)e^{i\sigma T_1} \\
&+\frac{1}{2}v_b^2\left[A_b^2\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{(m+1)b}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)b}+2A_a\bar{A}_aA_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)a}dx\right)Y''_{(m+1)b}\right. \\
&+2A_b^2\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\bar{Y}'_{(m+1)b}dx\right)Y''_{(m+1)b} \\
&\left.+2A_a\bar{A}_aA_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)a}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)a}\right]+k.e.+S.O.T.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

denklemlerini elde edebiliriz. Homojen denklemlerin basit olmayan çözümleri olduğuna göre homojen olmayan denklem (4.11) ve (4.12)' nin çözümlerinin olabilmesi ancak çözülebilirlik şartının olmasına bağlıdır. Bunun için önceki bölümlerdeki çözüm tarzına benzer şekilde, çözüm yolu takip edilirse, $g_{(m+1)a}$ ve $g_{(m+1)b}$ fonksiyonu O(1) mertebesi çözümü için kullandığımız $Y_{(m+1)a}$ ve $Y_{(m+1)b}$ fonksiyonun kompleks eşleniği olduğu anlaşılmaktadır.

$$g_{(m+1)a}(x) = \overline{Y}_{(m+1)a}(x) \tag{4.13}$$

$$g_{(m+1)b}(x) = \overline{Y}_{(m+1)b}(x) \tag{4.14}$$

Çözülebilirlik şartını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$D_1 A_a + \frac{\mu}{2} A_a + k_{0_{ab}} \overline{A}_b e^{i\sigma T_1} - k_{3_{ab}} A_a^2 \overline{A}_b - k_{2_{ab}} A_a A_b \overline{A}_b = 0 \tag{4.15}$$

$$D_1 A_b + \frac{\mu}{2} A_b + k_{0_{ba}} \overline{A}_a e^{i\sigma T_1} - k_{3_{ba}} A_b^2 \overline{A}_b - k_{2_{ba}} A_a \overline{A}_a A_b = 0 \tag{4.16}$$

denklemlerdeki katsayılar ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$k_{0_{ab}} = v_1 \frac{\left[\left(\frac{\Omega}{2} - \omega_b\right) \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}'_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) - i v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) \right]}{2 \left[i\omega_a \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) + v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) \right]} \tag{4.17}$$

$$k_{3_{ab}} = \frac{1}{2} v_b^2 \frac{\left[\sum_{r=0}^{n} \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a} dx \right) \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'^{2}_{(m+1)a} dx \right) + 2 \sum_{r=0}^{n} \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a} dx \right) \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} \overline{Y}'_{(m+1)a} dx \right) \right]}{2 \left[i\omega_a \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) + v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) \right]} \tag{4.18}$$

$$k_{2_{ab}} = \frac{1}{2} v_b^2 \frac{\left[2 \sum_{r=0}^{n} \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a} dx \right) \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)b} \overline{Y}'_{(m+1)b} dx \right) + 2 \sum_{r=0}^{n} \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)a} dx \right) \left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} Y'_{(m+1)b} dx \right) \right]}{2 \left[i\omega_a \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) + v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) \right]} \tag{4.19}$$

$$k_{0_{ba}} = v_1 \frac{\left[\left(\frac{\Omega}{2} - \omega_a\right) \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}'_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) - i v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) \right]}{2 \left[i\omega_b \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) + v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) \right]} \tag{4.20}$$

$$k_{3_{ba}}=\frac{1}{2}v_b^2\frac{\left[\sum_{r=0}^{n}\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}''_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}dx\right)\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^{2}_{(m+1)a}dx\right)+2\sum_{r=0}^{n}\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y''_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}dx\right)\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\overline{Y}'_{(m+1)b}dx\right)\right]}{2\left[i\omega_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right)+v_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right)\right]} \tag{4.21}$$

$$k_{2_{ba}}=\frac{1}{2}v_b^2\frac{\left[2\sum_{r=0}^{n}\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y''_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}dx\right)\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)a}dx\right)+2\sum_{r=0}^{n}\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}\overline{Y}''_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)b}dx\right)\left(\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)b}dx\right)\right]}{2\left[i\omega_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right)+v_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right)\right]} \tag{4.22}$$

Basit olmayan çözümün kararlılık analizini yapmak için kompleks genlikleri aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$A_a=\frac{1}{2}a_a(T_1)e^{i\theta_a(T_1)} \tag{4.23}$$

$$A_b=\frac{1}{2}a_b(T_1)e^{i\theta_b(T_1)} \tag{4.24}$$

tanımladığımız genlikleri denklem (4.15) ve (4.16)' ya yerleştirirsek,

$$D_1a_a+a_aiD_1\theta_a+\frac{\mu}{2}a_a+k_{0_{ab}}a_be^{i\gamma}-\frac{1}{4}k_{3_{ab}}a_a^3-\frac{1}{4}k_{2_{ab}}a_aa_b^2=0 \tag{4.25}$$

$$D_1a_b+a_biD_1\theta_b+\frac{\mu}{2}a_b+k_{0_{ba}}a_ae^{i\gamma}-\frac{1}{4}k_{3_{ba}}a_b^3-\frac{1}{4}k_{2_{ba}}a_a^2a_b=0 \tag{4.26}$$

elde edilir. Denklemlerde yer alan faz ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\gamma=\sigma T_1-\theta_a-\theta_b \tag{4.27}$$

$k_{0ab}=k_{0ab_R}+ik_{0ab_I}$, $k_{2ab}=ik_{2ab_I}$, $k_{3ab}=ik_{3ab_I}$, $k_{0ba}=k_{0ba_R}+ik_{0ba_I}$, $k_{2ba}=ik_{2ba_I}$, $k_{3ba}=ik_{3ba_I}$

şeklindedir. Elde ettiğimiz denklemleri sanal ve gerçel kısımlarına ayırsak faz modülasyon denklemleri aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$D_1a_a=-\frac{\mu}{2}a_a+k_{0ab_I}a_b\sin\gamma-k_{0ab_R}a_b\cos\gamma=F_1 \tag{4.28}$$

$$D_1a_b = -\frac{\mu}{2}a_b + k_{0ba_I}a_a\sin\gamma - k_{0ba_R}a_a\cos\gamma = F_2 \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} D_1\gamma = \sigma &+ \frac{1}{a_a a_b}(k_{0ab_R}a_b^2 + k_{0ba_R}a_a^2)\sin\gamma + \frac{1}{a_a a_b}(k_{0ab_I}a_b^2 + k_{0ba_I}a_a^2)\cos\gamma \\ &- \frac{a_a^2}{4}(k_{3ab_I} + k_{2ba_I}) - \frac{a_b^2}{4}(k_{2ab_I} + k_{3ba_I}) = F_3 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Düzgün rejim bölgesi için sürekli sistemlerde

$$D_1a_a = 0 \tag{4.31}$$

$$D_1a_b = 0 \tag{4.32}$$

$$D_1\gamma = 0 \tag{4.33}$$

şeklindedir. Jacobian matrisinde yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial a_a} & \dfrac{\partial F_1}{\partial a_b} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial a_a} & \dfrac{\partial F_2}{\partial a_b} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial a_a} & \dfrac{\partial F_3}{\partial a_b} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix}_{\substack{a_a = a_{0a} \\ a_b = a_{0b} \\ \gamma = \gamma_0}} \tag{4.34}$$

Jacobian matrisinden elde edilen özdeğerlerin reel kısımlarının negatif olan kökleri her zaman kararlıdır. Reel kısmın pozitif olan kökleri ise çözüm kararsızdır.

Basit çözümlerin kararlılık analizi yapmak için kompleks genlikleri aşağıdaki gibi kutupsal formda yazabiliriz,

$$A_a = \frac{1}{2}(p_a + ip_a)e^{i\frac{\sigma}{2}T_1} \tag{4.36}$$

$$A_b = \frac{1}{2}(p_b + ip_b)e^{i\frac{\sigma}{2}T_1} \tag{4.37}$$

tanımladığımız genlikleri denklem (4.15) ve (4.16)' ya yerleştirirsek,

$$D_1p_a = q_a\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4}k_{3ab_I}\left(p_a^2 - q_a^2\right) + \frac{1}{4}k_{2ab_I}(p_b^2 + q_b^2)\right) - \frac{\mu}{2}p_a - k_{0ab_R}p_b - k_{0ab_I}q_b = f_1 \tag{4.38}$$

$$D_1p_b = q_b\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4}k_{3ba_I}\left(p_b^2 - q_b^2\right) + \frac{1}{4}k_{2ba_I}(p_a^2 + q_a^2)\right) - \frac{\mu}{2}p_b - k_{0ba_R}p_a - k_{0ba_I}q_a = f_2 \tag{4.39}$$

$$D_1q_a = p_a\left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4}k_{3ab_I}\left(p_a^2 + q_a^2\right) + \frac{1}{4}k_{2ab_I}(p_b^2 + q_b^2)\right) - \frac{\mu}{2}q_a - k_{0ab_R}q_b - k_{0ab_I}p_b = f_3 \tag{4.40}$$

$$D_1q_a = p_b\left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4}k_{3ba_I}\left(p_b^2 + q_b^2\right) + \frac{1}{4}k_{2ba_I}(p_a^2 + q_a^2)\right) - \frac{\mu}{2}q_b - k_{0ba_R}q_a - k_{0ba_I}p_a = f_4 \tag{4.41}$$

Düzgün rejim bölgesi için sürekli sistemlerde

$$D_1p_a = 0 \tag{4.42}$$

$$D_1p_b = 0 \tag{4.43}$$

$$D_1q_a = 0 \tag{4.44}$$

$$D_1q_b = 0 \tag{4.45}$$

şeklindedir. Jacobian matrisinde yerleştirilirse,

$$\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_a} & \frac{\partial f_1}{\partial p_b} & \frac{\partial f_1}{\partial q_a} & \frac{\partial f_1}{\partial q_b} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_a} & \frac{\partial f_2}{\partial p_b} & \frac{\partial f_2}{\partial q_a} & \frac{\partial f_2}{\partial q_b} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p_a} & \frac{\partial f_3}{\partial p_b} & \frac{\partial f_3}{\partial q_a} & \frac{\partial f_3}{\partial q_b} \\ \frac{\partial f_4}{\partial p_a} & \frac{\partial f_4}{\partial p_b} & \frac{\partial f_4}{\partial q_a} & \frac{\partial f_4}{\partial q_b} \end{bmatrix}\right|_{\substack{p_a = p_{0a} \\ q_a = p_{0a} \\ p_b = p_{0b} \\ q_b = q_{0b}}} \tag{4.46}$$

Jacobian matrisinden elde edilen özdeğerlerin reel kısımlarının negatif olan kökleri her zaman kararlıdır. Reel kısmın pozitif olan kökleri ise çözüm kararsızdır.

Şekil 4.1–4.2 ‘ de toplam tipi kombinasyon rezonansı için v_f=0.2, η=0.1, v_0=0.2, ω_a=5.027732, ω_b=13.58318 ait hız değişim frekansına bağlı a_a ve a_b genlik değişimi grafiği, Şekil 4.3–4.4 ‘ de toplam tipi kombinasyon rezonansı için v_f=0.2, η=0.1, v_0=0.7, ω_a=4.138699, ω_b=12.77553 ait hız değişim frekansına bağlı a_a ve a_b genlik değişimi grafiği, Şekil 4.5–4.6 ‘ da toplam tipi kombinasyon rezonansı için v_f=0.2, η=0.3, v_0=0.2, ω_a=6.93804, ω_b=19.42035 ait hız değişim frekansına bağlı a_a ve a_b genlik değişimi grafiği, Şekil 4.7–4.8 ‘ de toplam tipi kombinasyon rezonansı için v_f=0.2, η=0.3, v_0=0.7, ω_a=4.76875, ω_b=17.41848 ait hız değişim frekansına bağlı a_a ve a_b genlik değişimi grafiği verilmiştir.

Hız değişim frekansının, düşük ve yüksek tabii frekansın toplamı olduğu çözümlere ait grafikler incelendiğinde şu sonuçlar elde edilmiştir.

Yüksek ve düşük frekanslar göz önünde bulundurulduğunda orta kısımda yer alan mesnedin soldan sağa doğru hareket ettirilmesi ile v_0' ın küçük değerlerinde kararsızlık bölgesi artmaktadır. v_0' ın artması ile kararsızlık bölgesi azalmaktadır. Kritik v_0 değerinde ise kararsızlık bölgesi genişlemektedir.

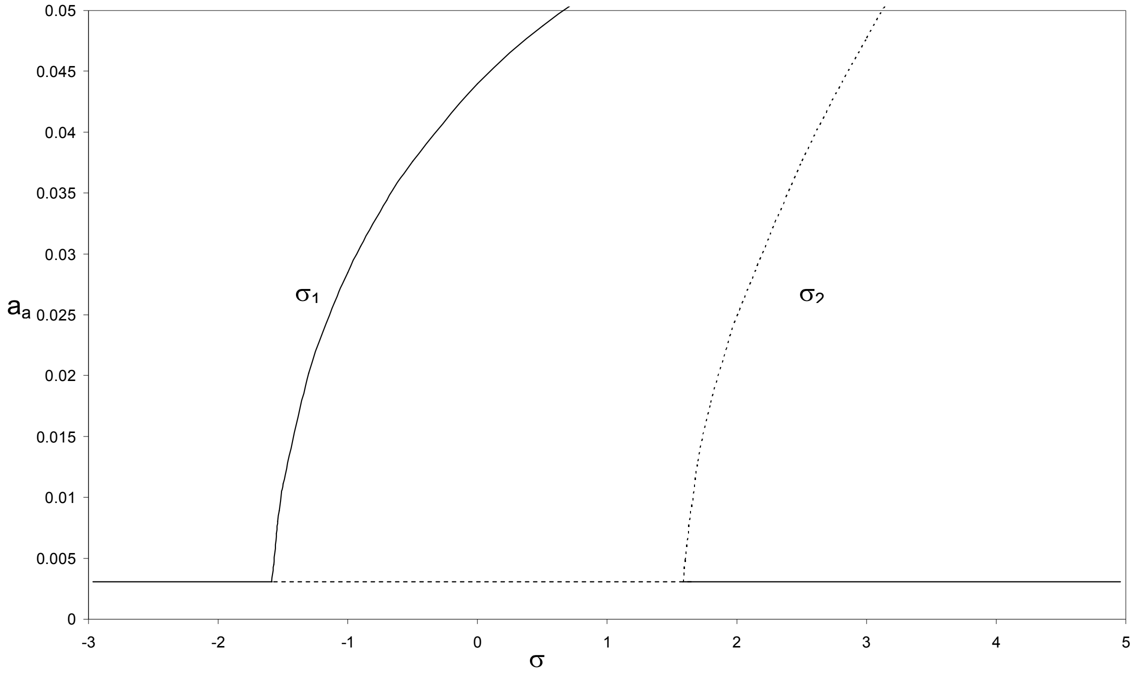
Düşük frekansın genliği hız değişim frekansının artmasıyla bir maksimum noktaya (peak noktasına) ulaşmakta daha sonra genlik azalmaktadır. Düşük frekansın genliği sınırlıdır.

Yüksek olan frekansın genliği yükselme eğilimdedir.

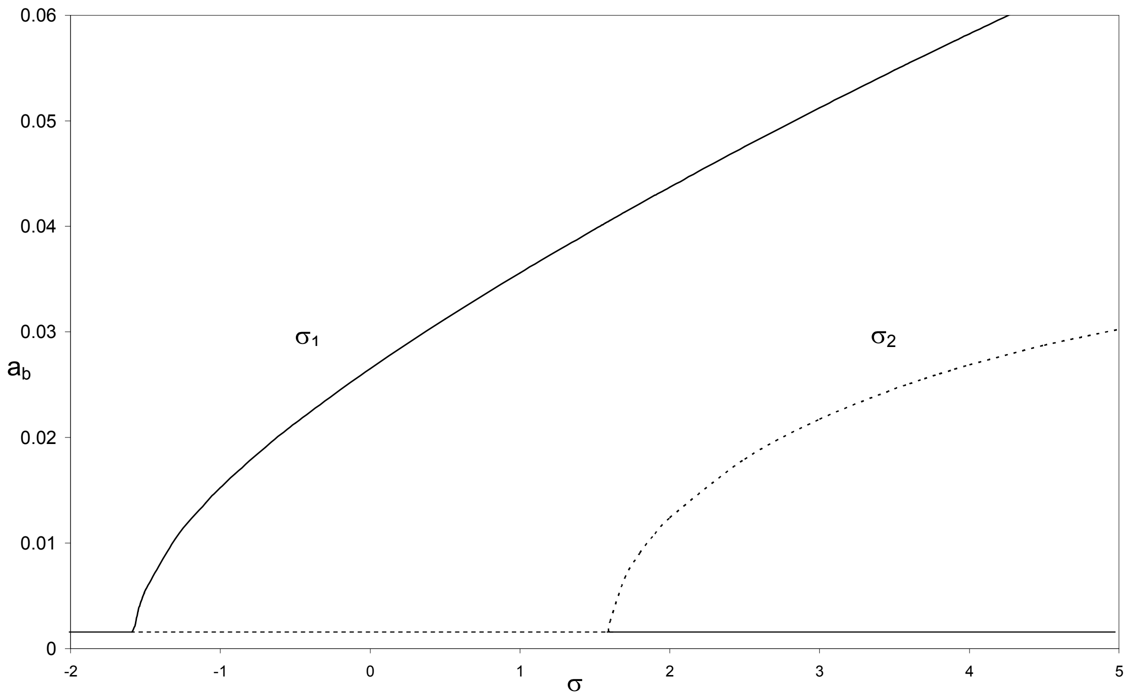
Toplam tipi kombinasyon rezonansı ($\Omega=\omega_a+\omega_b+\varepsilon\sigma$) ile temel parametrik rezonansı ($\Omega=2\omega+\varepsilon\sigma$) karşılaştırdığımızda şu sonuçlara ulaşabiliriz.

Düşük frekansta, v_0' ın küçük değerlerinde toplam tipi kombinasyon rezonansları kararsızlık sınırları, temel parametrik rezonans kararsızlık bölgesine göre daha geniştir.

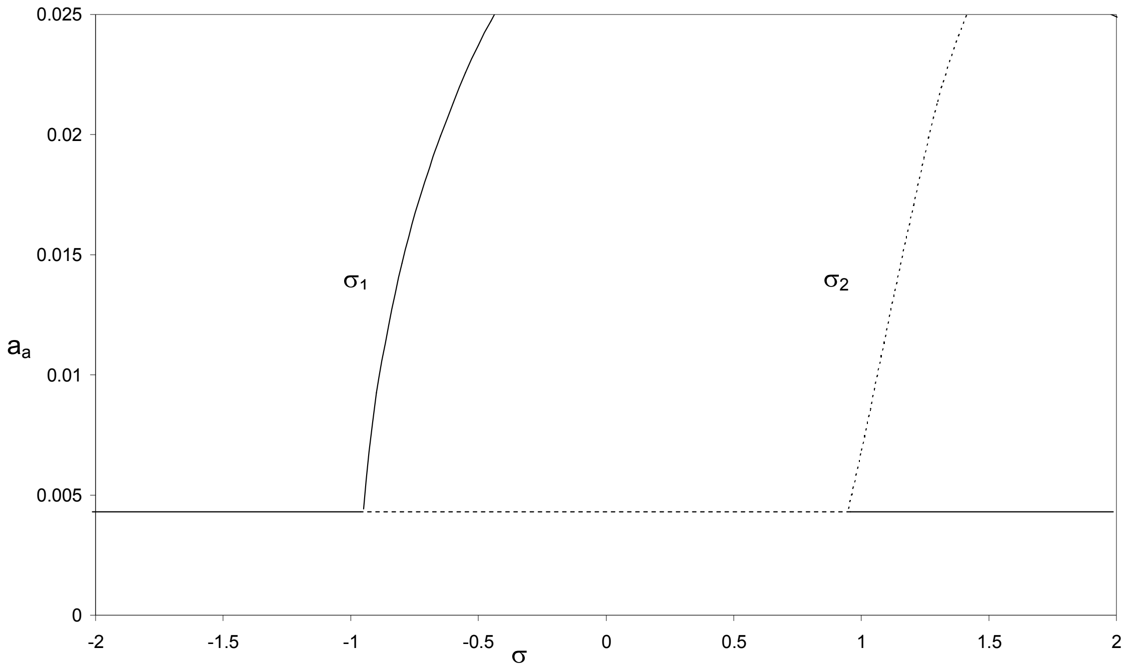
Yüksek frekanslarda ise, v_0' ın küçük değerlerinde toplam tipi kombinasyon rezonansları kararsızlık bölgesi, temel parametrik rezonans kararsızlık bölgesine birbirine yakındır.



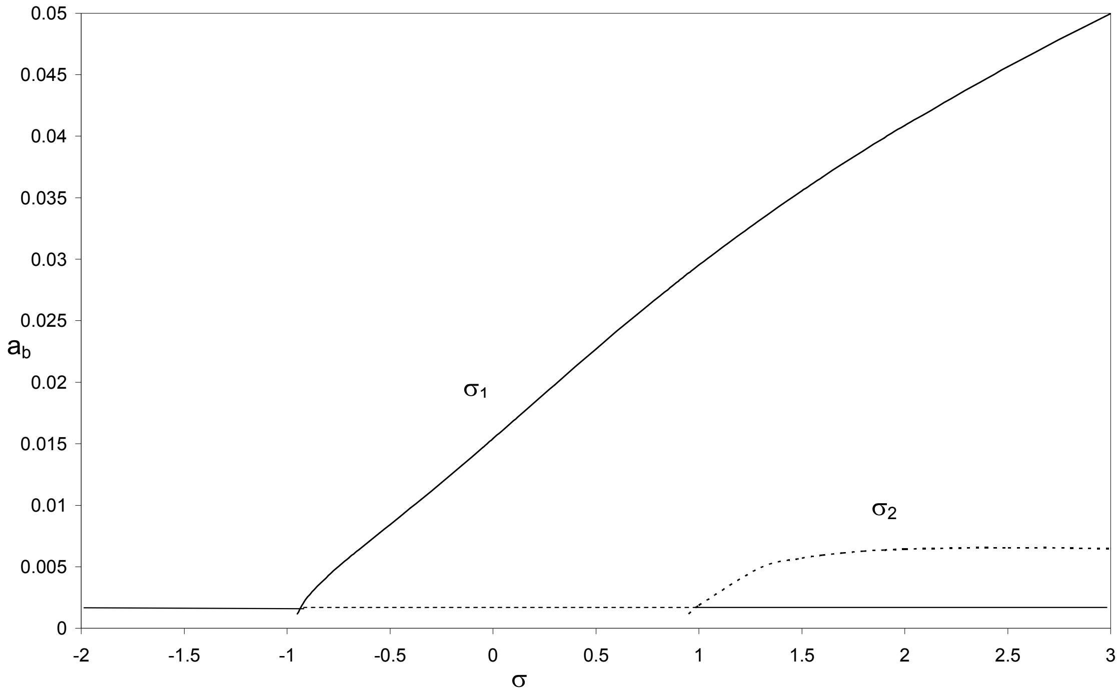
Şekil 4.1 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_a genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.1, v_0=0.2, ω_a=5.027732)



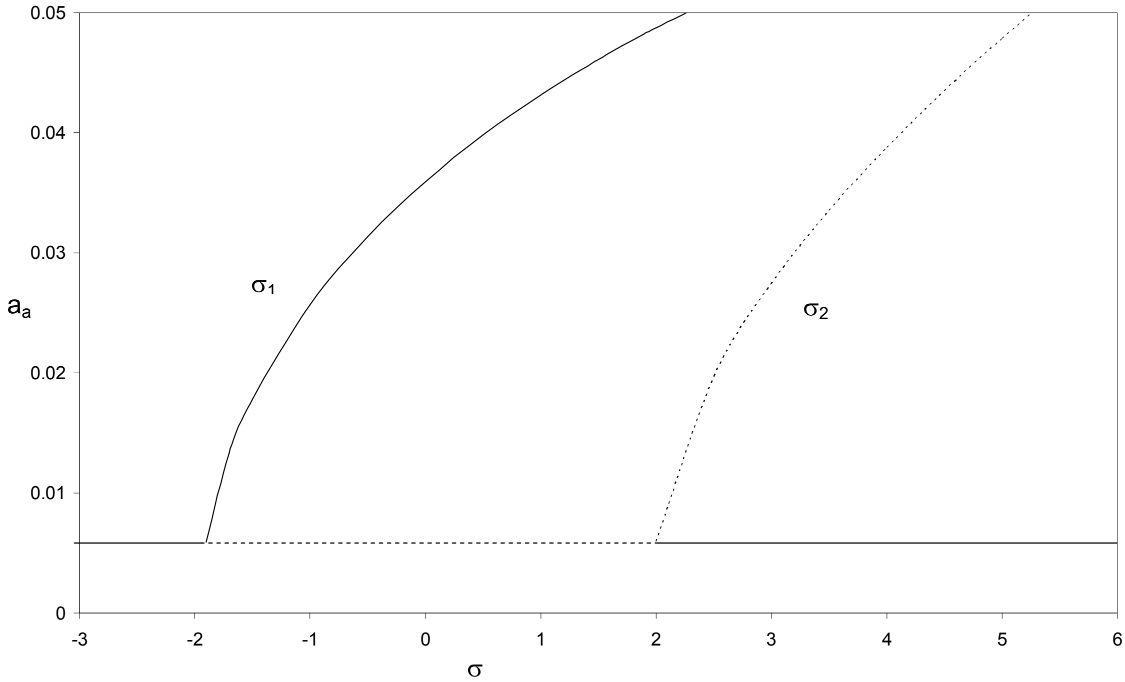
Şekil 4.2 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_b genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.1, v_0=0.2, ω_b=13.58318)



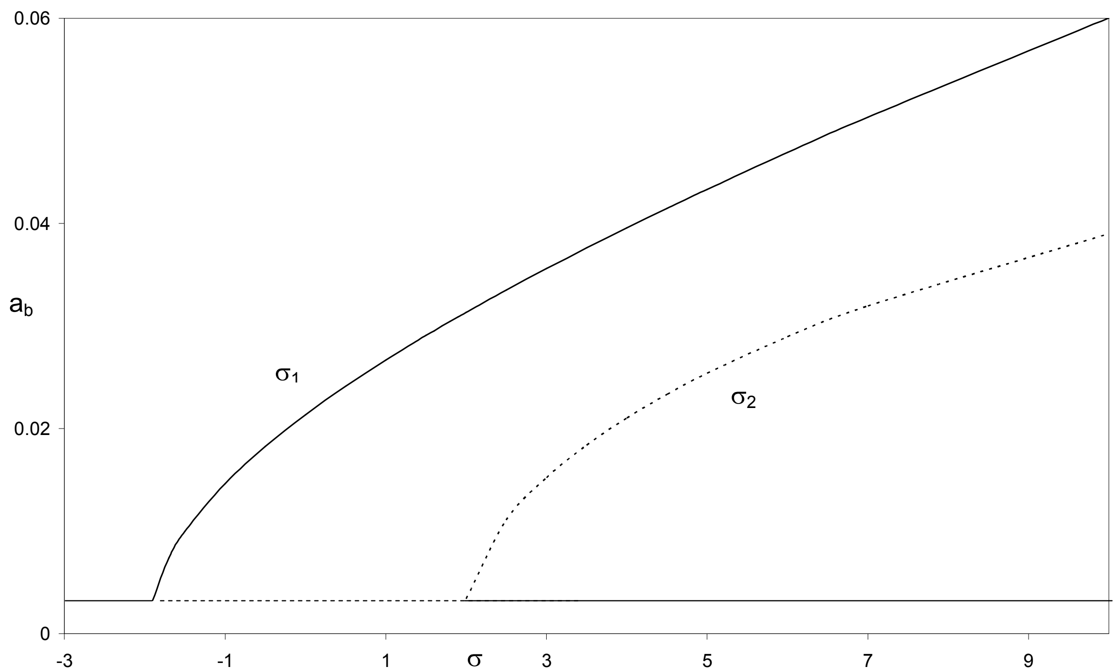
Şekil 4.3 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_a genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.1, v_0=0.7, ω_a=4.138699)



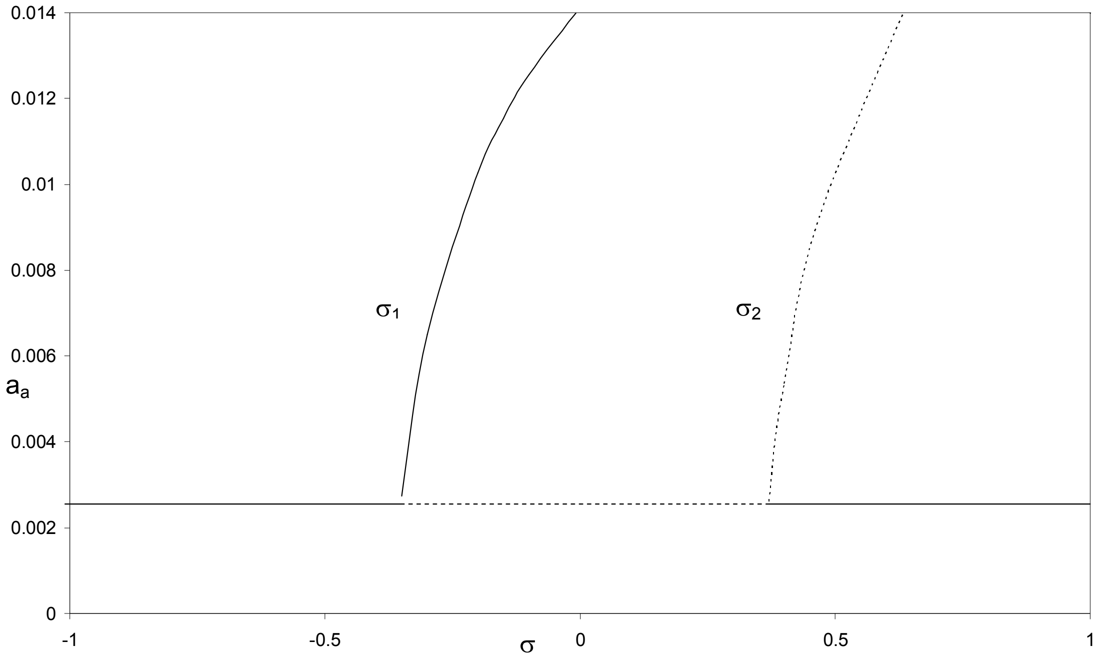
Şekil 4.4 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_b genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.1, v_0=0.7, ω_b=12.77553)



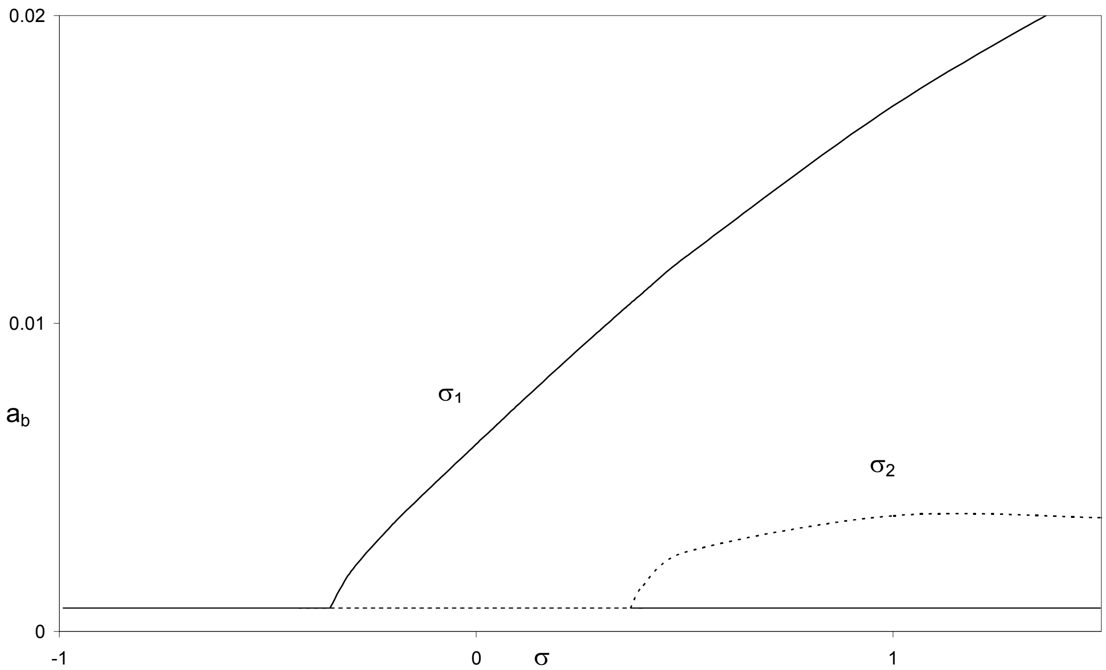
Şekil 4.5 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_a genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.3, v_0=0.2, ω_a=6.93804)



Şekil 4.6 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_b genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.3, v_0=0.2, ω_b=19.42035)



Şekil 4.7 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_a genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.3, v_0=1, ω_a=4.76875)



Şekil 4.8 Toplam tipi kombinasyon rezonansa ait hız değişim frekansına bağlı a_b genlik değişimi grafiği (v_f=0.2, η=0.3, v_0=1, ω_b=17.41848)

4.2. Fark Tipi Kombinasyon Rezonansları:

Hız değişim frekanslarının a. ve b. tabii frekanslarının farkına yakın olma durumunu ele alınmıştır (a>b) . Bu durumda frekansı aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\Omega=\omega_a-\omega_b+\varepsilon\sigma \tag{4.47}$$

Denklem (4.47)' de tanımlanan ifadeyi denklem (4.9)' a yerleştirir a. ve b. moda ait çözümleri ayrıştırırsak,

$$\begin{aligned}
&v_f^2\,\phi^{iv}_{(m+1)a}+\left(v_0^2-1\right)\phi''_{(m+1)a}+2iv_0\omega_a\phi'_{(m+1)a}-\omega_a^2\phi_{(m+1)a}=\\
&-\left(2D_1A_a+\mu A_a\right)\left(i\omega_a Y_{(m+1)a}+v_0 Y'_{(m+1)a}\right)+A_b v_1\left(-\left(\omega_b+\frac{\Omega}{2}\right)Y'_{(m+1)b}+iv_0 Y''_{(m+1)b}\right)e^{i\sigma T_1}\\
&+\frac{1}{2}v_b^2\left[A_a^2\bar{A}_a\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{(m+1)a}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)a}+2A_a^2\bar{A}_a\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)a}dx\right)Y''_{(m+1)a}\right.\\
&+2A_aA_b\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\bar{Y}'_{(m+1)b}dx\right)Y''_{(m+1)a}+2A_aA_b\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)b}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)b}\\
&\left.+2A_aA_b\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)b}dx\right)Y''_{(m+1)b}\right]+k.e.+S.O.T.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
&v_f^2\,\phi^{iv}_{(m+1)b}+\left(v_0^2-1\right)\phi''_{(m+1)b}+2iv_0\omega_b\phi'_{(m+1)b}-\omega_b^2\phi_{(m+1)b}=\\
&-\left(2D_1A_b+\mu A_b\right)\left(i\omega_b Y_{(m+1)b}+v_0 Y'_{(m+1)b}\right)+A_a v_1\left(\left(\omega_a-\frac{\Omega}{2}\right)Y'_{(m+1)a}+iv_0 Y''_{(m+1)a}\right)e^{-i\sigma T_1}\\
&+\frac{1}{2}v_b^2\left[A_b^2\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'^2_{(m+1)b}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)b}+2A_a\bar{A}_aA_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)a}dx\right)Y''_{(m+1)b}\right.\\
&+2A_b^2\bar{A}_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)b}\bar{Y}'_{(m+1)b}dx\right)Y''_{(m+1)b}+2A_a\bar{A}_aA_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)a}dx\right)\bar{Y}''_{(m+1)a}\\
&\left.+2A_a\bar{A}_aA_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}}Y'_{(m+1)a}\bar{Y}'_{(m+1)a}dx\right)Y''_{(m+1)a}\right]+k.e.+S.O.T.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

denklemlerini elde edebiliriz. Homojen denklemlerin basit olmayan çözümleri olduğuna göre homojen olmayan denklem (4.48) ve (4.49)' un çözümlerinin olabilmesi ancak çözülebilirlik şartının olmasına bağlıdır. Önceki bölümün çözüm tarzına benzer şekilde çözüm yolu takip edilirse çözülebilirlik şartını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$D_1A_a + \frac{\mu}{2}A_a - k_{4_{ab}}A_b e^{i\sigma T_1} - k_{3_{ab}}A_a^2\overline{A}_b - k_{5_{ab}}A_aA_b\overline{A}_b = 0 \tag{4.50}$$

$$D_1A_b + \frac{\mu}{2}A_b - k_{6_{ba}}A_a e^{-i\sigma T_1} - k_{3_{ba}}A_b^2\overline{A}_b - k_{7_{ba}}A_a\overline{A}_aA_b = 0 \tag{4.51}$$

denklemlerdeki katsayıları,

$$k_{4_{ab}} = v_1 \frac{\left[-(\omega_b + \frac{\Omega}{2})\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right) + iv_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right)\right]}{2\left[i\omega_a\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right) + v_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right)\right]} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} k_{5_{ab}} = \frac{1}{2}v_b^2 \Bigg[& \left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right)\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right) \\ & + \left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right)\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a}Y'_{(m+1)b}\,dx\right) \\ & + \left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right)\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a}\overline{Y}'_{(m+1)b}\,dx\right)\Bigg] \\ & \Bigg/ \left[i\omega_a\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right) + v_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)a}\,dx\right)\right] \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$k_{6_{ba}} = v_1 \frac{\left[(\omega_a - \frac{\Omega}{2})\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right) - iv_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)a}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right)\right]}{2\left[i\omega_b\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right) + v_0\left(\sum_{r=0}^{n}\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)b}\overline{Y}_{(m+1)b}\,dx\right)\right]} \tag{4.54}$$

$$k_{7_{ba}} = \frac{1}{2} v_b^2 \left[\left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)a}\, dx \right) \right.$$
$$+ \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \overline{Y}''_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} Y'_{(m+1)b}\, dx \right)$$
$$\left. + \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{(m+1)a} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)a} \overline{Y}'_{(m+1)b}\, dx \right) \right] \qquad (4.55)$$
$$\Bigg/ \left[i\omega_b \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) + v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{(m+1)b} \overline{Y}_{(m+1)b}\, dx \right) \right]$$

gibi tanımlanmıştır. Çözülebilirlik şartında yer alan $k_{3_{ab}}$ ve $k_{3_{ba}}$ katsayıları önceki bölümde tanımlanan katsayıların aynısıdır.

Basit olmayan çözümün kararlılık analizi yapmak için kompleks genlikleri aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$A_a = \frac{1}{2} a_a(T_1) e^{-i\theta_a(T_1)} \qquad (4.56)$$

$$A_b = \frac{1}{2} a_b(T_1) e^{i\theta_b(T_1)} \qquad (4.57)$$

tanımladığımız genlikleri denklem (4.50) ve (4.51)' de yerleştirirsek,

$$D_1 a_a - a_a i D_1 \theta_a + \frac{\mu}{2} a_a - k_{4_{ab}} a_b e^{i\gamma} - \frac{1}{4} k_{3_{ab}} a_a^3 - \frac{1}{4} k_{5_{ab}} a_a a_b^2 = 0 \qquad (4.58)$$

$$D_1 a_b + a_b i D_1 \theta_b + \frac{\mu}{2} a_b - k_{6_{ba}} a_a e^{-i\gamma} - \frac{1}{4} k_{3_{ba}} a_b^3 - \frac{1}{4} k_{7_{ba}} a_a^2 a_b = 0 \qquad (4.59)$$

elde edilir. Denklemlerde yer alan faz ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\gamma = \sigma T_1 + \theta_a + \theta_b \qquad (4.60)$$

$k_{3ab} = ik_{3ab_I}$, $k_{4ab} = k_{4ab_R} + ik_{4ab_I}$,, $k_{5ab} = ik_{5ab_I}$, $k_{6ba} = k_{6ba_R} + ik_{6ba_I}$, $k_{7ba} = ik_{7ba_I}$ şeklindedir. Elde ettiğimiz denklemleri sanal ve gerçel kısımlarına ayırsak faz modülasyon denklemleri aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$D_1 a_a = -\frac{\mu}{2} a_a - k_{4ab_I} a_b \sin\gamma + k_{4ab_R} a_b \cos\gamma = F_1 \tag{4.61}$$

$$D_1 a_b = -\frac{\mu}{2} a_b + k_{6ba_I} a_a \sin\gamma + k_{6ba_R} a_a \cos\gamma = F_2 \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned} D_1\gamma = \sigma - \frac{1}{a_a a_b}(k_{4ab_R} a_b^2 + k_{6ba_R} a_a^2)\sin\gamma - \frac{1}{a_a a_b}(k_{4ab_I} a_b^2 - k_{6ba_I} a_a^2)\cos\gamma \\ -\frac{a_a^2}{4}(k_{3ab_I} - k_{7ba_I}) - \frac{a_b^2}{4}(k_{5ab_I} - k_{3ba_I}) = F_3 \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$D_1 a_a = 0 \tag{4.64}$$

$$D_1 a_b = 0 \tag{4.65}$$

$$D_1\gamma = 0 \tag{4.66}$$

şeklindedir. Jacobian matrisinde yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial a_a} & \dfrac{\partial F_1}{\partial a_b} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial a_a} & \dfrac{\partial F_2}{\partial a_b} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial a_a} & \dfrac{\partial F_3}{\partial a_b} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix}_{\substack{a_a = a_{0a} \\ a_b = a_{0b} \\ \gamma = \gamma_0}} \tag{4.67}$$

Jacobian matrisinden elde edilen özdeğerlerin reel kısımlarının negatif olan kökleri her zaman kararlıdır. Reel kısmın pozitif olan kökleri ise çözüm kararsızdır.

Basit çözümlerin kararlılık analizi yapmak için kompleks genlikleri aşağıdaki gibi kutupsal formda yazabiliriz,

$$A_a = \frac{1}{2}(p_a + iq_a)e^{i\frac{\sigma}{2}T_1} \tag{4.68}$$

$$A_b = \frac{1}{2}(p_b + iq_b)e^{-i\frac{\sigma}{2}T_1} \tag{4.69}$$

tanımladığımız genlikleri denklem (4.15) ve (4.16)' ya yerleştirirsek,

$$D_1p_a = q_a\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{4}k_{3ab_I}\left(p_a^2 + q_a^2\right) - \frac{1}{4}k_{5ab_I}(p_b^2 + q_b^2)\right) - \frac{\mu}{2}p_a + k_{4ab_R}p_b - k_{4ab_I}q_b = f_1 \qquad (4.70)$$

$$D_1p_b = q_b\left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{4}k_{3ba_I}\left(p_b^2 + q_b^2\right) - \frac{1}{4}k_{7ba_I}(p_a^2 + q_a^2)\right) - \frac{\mu}{2}p_b + k_{6ba_R}p_a - k_{6ba_I}q_a = f_2 \qquad (4.71)$$

$$D_1q_a = p_a\left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4}k_{3ab_I}\left(p_a^2 + q_a^2\right) + \frac{1}{4}k_{5ab_I}(p_b^2 + q_b^2)\right) - \frac{\mu}{2}q_a - k_{4ab_R}q_b + k_{4ab_I}p_b = f_3 \qquad (4.72)$$

$$D_1q_b = p_b\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4}k_{3ba_I}\left(p_b^2 + q_b^2\right) + \frac{1}{4}k_{7ba_I}(p_a^2 + q_a^2)\right) - \frac{\mu}{2}q_b - k_{6ba_R}q_a + k_{6ba_I}p_a = f_4 \qquad (4.73)$$

Düzgün rejim bölgesi için sürekli sistemlerde

$$D_1p_a = 0 \qquad (4.74)$$

$$D_1p_b = 0 \qquad (4.75)$$

$$D_1q_a = 0 \qquad (4.76)$$

$$D_1q_b = 0 \qquad (4.77)$$

şeklindedir. Jacobian matrisinde yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_a} & \frac{\partial f_1}{\partial p_b} & \frac{\partial f_1}{\partial q_a} & \frac{\partial f_1}{\partial q_b} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_a} & \frac{\partial f_2}{\partial p_b} & \frac{\partial f_2}{\partial q_a} & \frac{\partial f_2}{\partial q_b} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p_a} & \frac{\partial f_3}{\partial p_b} & \frac{\partial f_3}{\partial q_a} & \frac{\partial f_3}{\partial q_b} \\ \frac{\partial f_4}{\partial p_a} & \frac{\partial f_4}{\partial p_b} & \frac{\partial f_4}{\partial q_a} & \frac{\partial f_4}{\partial q_b} \end{bmatrix}_{\substack{p_a = p_{0a} \\ q_a = p_{0a} \\ p_b = p_{0b} \\ q_b = q_{0b}}} \qquad (4.78)$$

Jacobian matrisinden elde edilen öz değerlerin reel kısımlarının negatif olan kökleri her zaman kararlıdır. Reel kısmın pozitif olan kökleri ise çözüm kararsızdır.

Fark tipi rezonanslarda kararsız bölgeye rastlanmamıştır.

5. Sonuçlar ve Yorumlar

Bu çalışmada, eksenel hareketli çok mesnetli kirişin nonlineer titreşimleri incelenmiştir. Hamilton prensibi ile hareket denklemleri çıkartılmıştır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon tekniklerinden çok zaman ölçekli metot kullanılmıştır. Perturbasyon analizinde 1 mertebesi lineer problemin çözümünü, ε mertebesi çözümü ise nonlineer problemin çözümünü vermektedir.

Lineer problemin çözümünden üç ve dört mesnetli duruma ait farklı mesnet durumları için birinci, ikinci ve üçüncü tabii frekanslar elde edilmiştir. Buna göre, aynı mesnet konumları ve aynı kirişlik katsayısı için, eksenel hız (v_0) değerinin artmasıyla frekans değerleri azalmaktadır. Belli bir v_0 değerinden sonra tabii frekanslar ani olarak düşmektedir. Kirişin üç noktadan mesnetlendiği durumda, eksenel hıza bağlı birinci tabii frekans değerlerinin değişimini gösteren şekiller incelendiğinde, mesnet konumunun sol baştan, orta noktaya doğru hareket ettirilmesi ile tabii frekans değerleri artmaktadır. Eksenel hıza bağlı ikinci tabii frekans değerlerinin değişimi olan şekiller incelendiğinde η=0.1 ile η=0.5, η=0.2 ile η=0.4 grafikleri belirli bir eksenel hız (v_0) değerinde çakışmaktadır. Mod yapılarının değişimini gösteren ikinci moda ait şekiller incelendiğinde, çakışmanın olduğu eksenel hız (v_0) değerinde mod yapılarının benzer olduğu görülmüştür. Benzer durum üçüncü tabii frekans değerleri içinde mevcuttur. Bu durumda çakışmanın olduğu yerdeki eksenel hız (v_0) değerinde mod yapılarının benzer olduğu görülmüştür. Kirişin dört noktadan mesnetlendiği durumda, ilk üç mod için, aynı mesnet konumları ve aynı kirişlik katsayısında, v_0 değerinin artmasıyla frekans değerleri azalmaktadır. Belli bir v_0 değerinden sonra tabii frekanslar ani olarak düşmektedir. İlk üç mod için, aynı mesnet konumlarında, kirişlik özelliğini gösteren v_f katsayısı artması ile frekans değerleri artmaktadır.Farklı mesnet konumları için çizilen grafiklerde tabii frekans değişim grafikleri birbirlerine yakın olduğu gözlenmiştir. Birbirine yakın olan tabii frekansların mod yapılarının değişimini gösteren grafikler incelendiğinde mod yapılarının birbirine benzediği sonucu elde edilmiştir. Orta kısımda bulunan mesnet adedinin artırılmasıyla elde edilen tabii frekansların daha yüksek çıkmasına neden olmaktadır.

Perturbasyon analizinde ε mertebesindeki denklemler nonlineer problemi oluşturmaktadır. Nonlineer problem hız değişim frekansının (Ω), sıfır ve tabii frekansın iki katından uzak olduğu, hız değişim frekansının sıfıra yakın olduğu ve hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Hız değişim frekansı tabii frekansın iki katına yakın olması durumunda temel parametrik rezonansı oluşturmaktadır. Temel parametrik rezonans durumunda problemin basit ve basit olmayan iki çözümü mevcuttur. Basit çözümün geçerli olduğu bölgelerde genlik sıfırdır. Basit olmayan çözümün olduğu bölgelerde ise genlikler hız değişim frekansına bağlı olarak artmaktadır. Bu ise istenmeyen bir durumdur.

Üç mesnetli durumda, basit olmayan çözümün geçerli olduğu bölge olan kararsızlık bölgesi eksenel hızın (v_0) artması ile genişlemektedir. Kararsızlık bölgesi kritik hızda ise en geniş olmaktadır. İkinci ve üçüncü mod yapılarında bu genel ifade geçerli değildir. Bu bölge, bazı durumlarda eksenel hıza bağlı olarak önce genişlemekte, daha sonra minimum değere düşüp tekrar artmaktadır. Kirişlik katsayısının (v_f) artmasıyla bütün mod yapılarında basit olmayan çözümün ortaya çıktığı bölge daralmaktadır.

Üç mesnetli durumda, mesnet konumlarının basit olmayan çözümün ortaya çıktığı bölgeye etkisi her mod için farklı olmaktadır. Birinci mod için, mesnedin konumunu soldan orta noktaya hareket ettirilmesiyle basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi genişlemektedir. İkinci ve üçüncü mod için ise mesnedin soldan orta noktaya kaydırılması ile basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi bir noktada maksimum olmakta, mesnet konumu orta noktaya yaklaştıkça kararsızlık bölgesi daralmaktadır.

Dört mesnetli durumda da mesnet konumlarının basit olmayan çözümün ortaya çıktığı bölgeye etkisi her mod için farklı olmaktadır. Birinci mod için, eksenel hızın (v_0) artması ile basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi genişlemektedir. İkinci mod için ise basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi eksenel hızın (v_0) artmasıyla bir noktada maksimum olmakta daha sonra daralmaktadır. Kararsızlık bölgesinin genişleyip daha sonra daralması orta kısımda yer alan, sağ ve sol taraftaki mesnetlerin orta noktaya hareket ettirilmesi ile ortadan kalmaktadır. Üçüncü mod için ise ile kararsızlık bölgesi v_0‘ ın değerinin artmasıyla bir noktada maksimum olmakta daha sonra daralmaktadır. İlk üç mod için kararsızlık bölgesi kritik hızda ise en geniştir. Her üç mod durumunda, kirişlik katsayısının (v_f) artmasıyla kararsızlık bölgesinin azaldığı gözlenmiştir. Orta kısımda yer alan mesnedin sayısının artırılması basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi genişlemektedir.

Kararsızlık sınırlarını belirleyen σ değeri ve dolayısı ile k_0‘a bağlı yani kirişin hız değişim genliğine (v_1) bağlıdır. Hız değişim genliğinin artması ile basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi genişlemektedir.

Perturbasyon analizinde ε mertebesindeki denklemlerin oluşturduğu nonlineer problemde, hız değişim frekansının (Ω) sıfırdan ve 2ω’ dan uzak olduğu durumunda, nonlineer terimlerin tabii frekansa katkılarını gösteren nonlineer frekans değerleri elde edilmiştir. Nonlineer frekans eğrilerinin sağa doğru yatması hardening (sertleşme) tip davranışın göstergesidir. Üç mesnetli durum için v_0 değerinin artmasıyla, titreşim genliğine bağlı olarak nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı belirgin bir şekilde artmaktadır. Kritik hıza yaklaştıkça titreşim genliğine bağlı olarak, nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı çok artmaktadır. Kirişlik katsayısının artmasıyla tabii frekansa gelen nonlineer etkileri azalmaktadır. Üç mesnetli durumda, birinci mod ve üçüncü mod için aynı v_0 değeri ve v_f değeri için orta kısımda yer alan mesnedin soldan orta noktaya hareket ettirilmesi ile nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı artmaktadır. İkinci mod için nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı mesnedin orta noktaya hareket etmesiyle artmakta, orta noktaya yaklaştıkça azalmaktadır. Dört mesnetli durumda eksenel hızın (v_0) artmasıyla, nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı artmaktadır. Kritik hıza yaklaştıkça nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı daha çok artmaktadır. Birinci mod için, orta kısımda yer alan mesnetlerin orta noktaya doğru simetrik olarak hareket ettirilmesi ile nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı maksimum noktaya ulaşmakta, mesnetler orta noktaya yaklaştıkça tabii frekansa gelen düzeltme azalmaktadır. İkinci mod için ise orta kısımda yer alan mesnetlerin orta noktaya doğru simetrik olarak hareket ettirilmesi ile artmaktadır. Mesnetlerin orta noktaya ve uç noktalara eşit mesafede olan mesnet durumları da nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı birbirlerine çok yakın çıkmaktadır. Üçüncü mod için ise orta kısımda yer alan mesnetlerin orta noktaya doğru simetrik olarak hareket ettirilmesi ile nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı orta noktaya yaklaştıkça maksimumdur.

Orta kısımda yer alan mesnedin sayısının artırılması ile aynı v_0 değeri ve aynı v_f değeri için ilk üç moda ait nonlineer terimlerin tabii frekansa katkısı belirgin bir şekilde artmaktadır. Nonlineer frekans ifadesi k_3' e bağlı ve dolayısıyla yani kirişin boyuna direngenliğine (v_b)' e bağlıdır. Boyuna direngenliğine artması ile nonlineer frekans titreşim genliğine bağlı olarak artmaktadır.

Toplam ve fark tipi kombinasyon rezonansların ele alındığı bölümde, hız değişim frekansının iki farklı moddaki tabii frekansların toplamına yada farkına yakın olması durumları incelenmiştir. Perturbasyon analizinin her bir mertebesi için çözümler elde edilmiştir. Hız değişim frekansına bağlı olarak genlik grafikleri çizilmiştir.

Toplam tipi kombinasyon rezonansı durumunda, orta kısımda yer alan mesnedin sol baştan orta noktaya doğru hareket ettirilmesi ile, eksenel hızın (v_0) küçük değerlerinde basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi genişlemektedir. Eksenel hızın (v_0) artması ile basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi daralmaktadır. Kritik eksenel hızda (v_0) ise basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi en geniştir. Yüksek moda ait genlikler, düşük moda ait genliklere göre daha hızlı yükselmektedir. Toplam tipi kombinasyon rezonansı ($\Omega=\omega_a+\omega_{b+}\varepsilon\sigma$) ile temel parametrik rezonansı ($\Omega=2\omega_+\varepsilon\sigma$) karşılaştırdığımızda, düşük frekansta, eksenel hızın (v_0) küçük değerlerinde toplam tipi kombinasyon rezonansları kararsızlık sınırları, temel parametrik rezonans basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesine göre daha geniştir. Yüksek frekanslarda ise, eksenel hızın (v_0) küçük değerlerinde toplam tipi kombinasyon rezonansları basit olmayan çözümün ortaya çıktığı basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesi, temel parametrik rezonans basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesine yakındır.

Fark tipi kombinasyon rezonansları için genlik artışı yoktur. Basit olmayan çözümün ortaya çıktığı kararsızlık bölgesine rastlanmamıştır.

Bu çalışmanın devamı olarak şu çalışmalar yapılabilir.

1- Mesnet tipi değiştirilebilir.
2- Tabii frekanslar arasında oluşabilecek 2:1 ve 3:1 iç rezonanslar incelenebilir.
3- Deneysel sonuçlar ile elde ettiğimiz sonuçlar ile yaklaşık analitik çözümler karşılaştırılabilir.
4- Kombinasyon rezonanslarının farklı durumları incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Nayfeh, A.H., Mook, D.T., Nonlinear Oscillations, Wiley, New York, 1979.

[2] Hou, J.W., Yuan J.Z., “Calculation of Eigen value and Eigen vector derivates for nonlinear beam vibrations”, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 26, 872-880, 1998.

[3] McDonald, P.H., “Nonlinear dynamics of abeam”, Computers and Structures, 40, 1315-1320, 1991.

[4] Pakdemirli, M., Nayfeh, A.H., “Journal of Vibration and Acoustics”, 166, 433-438, 1994.

[5] Öz, H.R., Pakdemirli, M., Özkaya, E., Yılmaz, M., “Nonlinear vibrations of slight curved beam resting on a nonlinear elastic foundation”, Journal of Sound and Vibration, 221(3), 1998.

[6] Qaisi, M.I., “A power series solution for the nonlinear vibration of beams”, Journal of Sound and Vibration, 199, 587-594, 1997.

[7] Qaisi, M.I., “Nonlinear normal modes of a continuous systems”, Journal of Sound and Vibration, 209, 561-569, 1998.

[8] Özkaya, E., Pakdemirli, M., Öz, H.R., “Nonlinear vibrations of a beam-mass system under different boundary conditions”, Journal of Sound and Vibration, 199, 679-696, 1997.

[9] Karlık, B., Özkaya, E., Aydın, S., Pakdemirli, M., “Vibrations of beam-mass system using artificial neural Networks”, 69, 339-347, 1998.

[10] Özkaya, E., Pakdemirli, M., “Nonlinear vibrations of a beam-mass system with both ends clamped”, 221, 491-503, 1999.

[11] Özkaya, E., “Non-linear transverse vibrations of a simply supported beam carrying concentrated masses,” Journal of Sound and Vibration, 257(3), 413-424, 2002.

[12] Ulsoy, A.G., Mote, C.D. Jr., and Syzmani, R., “Principal developments in band saw vibration and stability research”, Holz als Roh- und Werkstoff, 36, 273-280, 1978.

[13] Wickert, J.A., Mote, C.D. Jr., “Current research on the vibration and stability of axially moving materials”, Shock and Vibration Digest, 20(5), 3-13, 1988.

[14] Wickert, J.A., Mote, C.D. Jr., “Classical vibration analysis of axially moving continua”, Journal of Applied Mechanics, ASME 57, 738-744, 1990.

[15] Wickert, J.A., “Non-linear vibration of a traveling tensioned beam”, International Journal of Non-Linear Mechanics, 27, 503-517, 1992.

[16] Miranker, W.L., “The wave equation in a medium in motion”, IBM Journal of Research and Development 4, 36-42, 1960.

[17] Pellicano, F., Zirilli, F., “Boundary layers and nonlinear vibrations in an axially moving beam”, International Journal of Nonlinear Mechanics, 33, 691-711, 1998.

[18] Mockenstrum, E.M., Perkins, N.C. and Ulsoy, A.G., "Stability and limit cycles of parametrically excited axially moving strings", Journal of Vibration and Acoustics, ASME 118, 346-350, 1994.

[19] Pakdemirli, M., Ulsoy, A.G. and Ceranoğlu A., "Transverse vibration of an axially accelerating string", Journal of Sound and Vibration, 169, 179-196, 1994.

[20] Pakdemirli, M. and Batan, H., "Dynamic stability of a constantly accelerating strip", Journal of Sound and Vibration, 168, 371-378, 1993.

[21] Pakdemirli M. and Ulsoy, A.G., "Stability analysis of an axially accelerating string", Journal of Sound and Vibration 203(5), 815-832, 1997.

[22] Nayfeh, A.H., Nayfeh, J.F., Mook, D.T., "On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities", Nonlinear Dynamics, 3, 145-162, 1992.

[23] Pakdemirli, M., Nayfeh, S.A., Nayfeh, A. H., "Analysis of one-to-one autoparametric resonances in cables-discretization vs direct treatment", Nonlinear Dynamics 8, 65-83, 1995.

[24] Pakdemirli, M., "A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities", Mechanics Research Communications, 21, 203-208, 1994.

[25] Pakdemirli, M., Boyacı, H., "Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for nonlinear vibrations", Journal of Sound and Vibration, 186, 837-845, 1995.

[26] Pakdemirli, M., Boyacı, H., "The direct-perturbation method versus the discretization-perturbation method: Linear systems", Journal of Sound and Vibration, 199(5), 825-832, 1997.

[27] Öz, H.R., Pakdemirli, M. and Özkaya, E., "Transition behaviour from string to beam for an axially accelerating material", Journal of Sound and Vibration, 215(3), 571-576, 1998.

[28] Özkaya, E. and M. Pakdemirli, "Vibrations of an axially accelerating beam with small flexural stiffness," Journal of Sound and Vibration, 234(3), 521-535, 2000.

[29] Pakdemirli, M. and Özkaya, E., "Lie Group theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem", Journal of Sound and Vibration, 230(4), 729-742, 2000.

[30] Öz, H.R. and Pakdemirli, M. "Vibrations of an axially moving beam with time-dependent velocity", Journal of Sound and Vibration, 227(2), 239-257, 1999.

[31] Öz, H.R., "On the vibrations of an axially travelling beam on fixed supports with variable velocity" Journal of Sound and Vibration, 239(3), 556-564, 2001.

[32] Özkaya, E. and Öz, H.R., "Determination of stability regions of axially moving beams using artificial neural networks method," Journal of Sound and Vibration, 252(4), 782-789, 2002.

[33] Chung, J., Han, C.S., Yi, K., "Vibration of an axially moving string with geometric non-linearity and translating acceleration", Journal of Sound and Vibration, 240, 4, 733-746, 2001.

[34] Chen, L.-Q., Zhao, W.-J., "A numerical method for simulating transverse vibrations of an axially moving string", Applied Mathematics and Computation, 160, 2, 411-422, 2005.

[35] Pakdemirli, M., Öz, H.R., “Infinite mode analysis and truncation to resonant modes of axially accelerated beam vibrations”, Journal of sound and Vibration, 1052-1074, 311, 2008.

[36] Nayfeh, A.H. (1981): Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley, New York.

7. ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad	: Süleyman Murat BAĞDATLI
Doğum Tarihi	: 04.02.1978
Doğum yeri	: Bitlis
Uyruğu	: T.C.
Medeni Durum	: Evli

Eğitim

- Eylül 2004–Temmuz 2009, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, *Doktora*, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Teorisi ve Dinamiği.
- Ağustos 2002–Temmuz 2004, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, *Yüksek Lisans*, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Teorisi ve Dinamiği.
- Eylül 1997–Haziran 2002, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, *Lisans*, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü.
- Temmuz 1992–Haziran 1995, Karşıyaka Lisesi, İzmir.

İş Tecrübeleri

- Aralık 2005–Temmuz 2009, *Araştırma Görevlisi*, Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Manisa.
- Haziran 2003–Aralık 2004, *Makine Mühendisi*, Indesit Company A.Ş. (Indesit-Ariston Buzdolabı Fab.), Manisa.
- Temmuz 2002– Aralık 2002, *Makine Mühendisi*, Motar A.Ş., İzmir.
- Aralık 2002 – Mayıs 2003, *Bilgisayar Öğretmeni*, (Vekil Öğretmenlik), Selçuk Yaşar İlköğretim Okulu, İzmir.

Askerlik Hizmeti

- Kasım 2004 – Kasım 2005, *Yedek Subay*, 1. Hava İkmal Bakım Merkez Komutanlığı, İmalat Müdürlüğü, Eskişehir.