**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYLARINDA MANNHEİM $D$-EĞRİLERİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TANJU KAHRAMAN**

**Anabilim Dalı : Matematik**

**Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi**

**MANİSA 2010**

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYLARINDA MANNHEİM $D$-EĞRİLERİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TANJU KAHRAMAN**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19.07.2010**
**Tezin Savunulduğu Tarih : 16.08.2010**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ**

**Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU**

**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**

**MANİSA 2010**

# İÇİNDEKİLER

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip özenle çalışmalarımı takip eden, bilgi ve tecrübesiyle destek veren ve her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU ve sayın Araştırma Görevlisi Mehmet ÖNDER'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarıma ve yakın desteklerini gördüğüm mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteklerini daima hissettiğim babam Orhan KAHRAMAN'a, annem Emine KAHRAMAN'a ve kardeşim İbrahim KAHRAMAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**Tanju KAHRAMAN**

# SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $E^3$ | : 3-boyutlu Öklid Uzayı |
| $E_1^3$ | : 3-Boyutlu Minkowski Uzayı |
| $\mathbb{R}$ | : Reel Sayılar |
| $\dot{T}$ | : $T$ Teğet vektörünün $s_1$ parametresine göre türevi |
| $S_1^2$ | : Lorentz birim küresi |
| $H_0^2$ | : Hiperbolik birim küre |
| $\times$ | : Vektörel çarpım |
| $\langle\, , \rangle$ | : İç çarpım |
| $S$ | : Yönlendirilmiş yüzey |
| $\kappa$ | : $E^3$ Öklid uzayındaki $x$ eğrisi üzerindeki eğrilik |
| $\tau$ | : $E^3$ Öklid uzayındaki $x$ eğrisi üzerindeki burulma |
| $k_g$ | : $S$ yüzeyi üzerindeki geodezik eğrilik |
| $k_n$ | : $S$ yüzeyi üzerindeki normal eğrilik |
| $\tau_g$ | : $S$ yüzeyi üzerindeki geodezik burulma |

# ŞEKİLLER LİSTESİ

# ÖZET


Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, $E^3$ Öklid 3-uzayı ve $E_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümler bu tezin orjinal kısımlarıdır.

İkinci bölümde, öncelikle $E^3$ Öklid 3-uzayında Mannheim partner $D$-eğrilerinin tanımı verilmiştir. Ayrıca, $E^3$ Öklid uzayında yönlendirilmiş $S$ ve $S_1$ yüzeyleri üzerinde tamamen yatan Mannheim partner $D$-eğrilerini karakterize eden teoremler ve şartlar takdim edilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle $E_1^3$ Minkowski 3-uzayında Mannheim partner $D$-eğrilerinin tanımı verilmiştir. Buna ek olarak, $E_1^3$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş $S$ ve $S_1$ yüzeyleri üzerinde tamamen yatan Mannheim partner $D$-eğrilerini karakterize eden teoremler ve şartlar takdim edilmiştir.

## ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.
In the first chapter, basic definitions and elementary theorems are given in Euclidean 3-space $E^3$ and in Minkowski 3-space $E_1^3$.

The second and third chapters are original parts of this thesis.

In the second chapter, firstly the definition of the Mannheim partner D-curves is given in the Euclidean 3-space $E^3$. Furthermore, the theorems and the conditions which characterize the Mannheim partner D-curves lying fully on the oriented surface $S$ and $S_1$ in Euclidean space $E^3$ are introduced.

In the third chapter, firstly the definition of the Mannheim partner D-curves is given in the Minkowski 3-space $E_1^3$. Furthermore, the theorems and the conditions which characterize the Mannheim partner D-curves lying fully on the oriented surface $S$ and $S_1$ in Minkowski space $E_1^3$ are introduced.

# GİRİŞ

İki uzay eğrisinin Frenet çatılarının karşılık gelen noktalarındaki vektörleri dikkate alındığında, birinci çatının bir elemanı diğer çatının bir elemanı ile lineer bağımlı oluyorsa, bu durum Diferansiyel Geometride oldukça ilginç teorileri ortaya çıkarır. Böyle eğriler genellikle bağlantılı eğriler olarak adlandırılır. Bu eğri çiftlerinden en iyi bilinenleri Bertrand eğrileridir. Bertrand eğrileri, karşılık gelen noktalarda ortak asli normale sahip olan uzay eğrileridir. Bu ilginç eğriler, birçok matematikçi tarafından farklı uzaylarda ele alınarak incelenmiş ve bu eğriler ile ilgili önemli karakterizasyonlar elde edilmiştir [6,7,10,12,13]. Bertrand eğrilerinin bu ilginç yapısı, Ravani ve Ku [23] tarafından regle yüzeylerin boğaz çizgileri üzerinde tanımlı Frenet çatıları dikkate alınarak yüzeyler teorisine aktarılmış ve bu özellikteki regle yüzeyler Bertrand ofsetler olarak tanımlanmıştır. Ravani ve Ku tarafından bulunan sonuçların Minkowski 3-uzayındaki timelike regle yüzeyler için karşılıkları, Kurnaz [17] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Son yıllarda bağlantılı eğrilerin yeni bir tanımı Liu ve Wang tarafından verildi[19,32]. Onlar, bu yeni eğrileri Mannheim partner eğrileri olarak adlandırdılar ve şu şekilde tanımladılar: $x$ ve $x_1$, $E^3$ 3-boyutlu öklidyen uzayında iki eğri olsun. Bu eğrilerin karşılık gelen noktalarında, $x$ eğrisinin asli normal doğrusu $x_1$ eğrisinin binormal doğrusu ile lineer bağımlı oluyorsa, $x$ eğrisine bir Mannheim eğrisi, $x_1$ eğrisine de $x$ eğrisinin bir Mannheim partner eğrisi adı verilir. $\{x, x_1\}$ çifti de bir Mannheim çifti olarak adlandırılır. Bu eğri çiftleri için önemli bir karakterizasyon şu şekilde verilmiştir: $x_1(s_1)$ eğrisinin $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner eğrisi olması için gerek ve yeter şart $x(s)$ eğrisinin burulması $\tau$, $x_1(s_1)$ eğrisinin eğriliği $\kappa_1$ ve burulması $\tau_1$ olmak üzere sıfırdan farklı bir $\lambda$ sabiti için aşağıdaki denklemin sağlanmasıdır:

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda}(1 + \lambda^2 \tau_1^2)$$

Liu ve Wang, aynı zamanda, Minkowski 3-uzayında Mannheim eğrilerini çalıştılar[19,32]. Bertrand offsetlerine benzer şekilde, Orbay ve diğerleri Regle yüzeylerin Mannheim offsetlerini tanımladılar [13]. Minkowski 3-uzayındaki timelike ve spacelike Regle yüzeylerin Mannheim offsetlerinin karakterizasyonları da Kazaz, Uğurlu ve Önder tarafından verildi[14,15].

Bu çalışmada, yüzeyler üzerinde yatan dif.bilir iki eğrinin Darboux çatıları göz önüne alındı ve Mannheim partner $D$-eğrileri olarak isimlendirdiğimiz yeni bağlantılı eğri çifti tanımlandı. Liu ve Wang tarafından verilen karakterizasyonların, Mannheim partner $D$-eğrileri için karşılıkları ifade ve ispat edildi. Yüzeyler üzerindeki eğrilerin asimptotik eğriler olması durumunda, Liu ve Wang'ın elde ettiği sonuçlar özel durumlar olarak elde edilmiştir.

Öklid uzayında tanımlanan Mannheim partner $D$-eğrileri için bulunan sonuçların, Minkowski 3-uzayındaki spacelike ve timelike yüzeyler üzerinde yatan eğriler için karşılıkları ifade ve ispat edilmiştir.

# I. BÖLÜM
# TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sırasıyla, Öklid 3-uzayındaki ve Minkowski 3-uzayındaki temel kavramlar ve teoremlere yer verilecektir.

## 1.1. Öklid 3-Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, Öklid uzayı, eğri, birim hızlı eğri, regüler eğri, eğrilik, burulma, Frenet çatısı, Darboux çatısı, normal eğrilik, geodezik eğrilik, geodezik burulma gibi, eğriler ve yüzeyler teorisindeki temel ifadelerin tanımlarını ve bazı denklemlerin bulunuşlarını vereceğiz. Burada verilen tanım ve ifadeler için [4,11,18,25] no'lu referanslara bakılabilir.

**Tanım 1.1.1.** Bir reel afin uzay $A$ ve $A$ ile birlesen vektör uzayı da $V$ olsun. $V$ de

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, $A$ afin uzayına 3-boyutlu <u>Öklid uzayı</u> denir ve $E^3$ ile gösterilir.

**Tanım 1.1.2.** Bir $\vec{a}$ vektörünün kendisiyle iç çarpımının kare köküne bu vektörün <u>normu</u> denir ve $\|\vec{a}\|$ ile gösterilir. Bu tanıma göre

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

dır.

**Tanım 1.1.3.** Bir vektör uzayından alınan iki vektörün vektörel çarpımı bu iki vektöre dik olacak şekilde üçüncü bir vektöre karşılık geliyorsa bu çarpıma vektörel çarpım adı verilir ve şu şartları sağlar:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad , \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |a||b|\sin\theta$$

**Tanım 1.1.4.** Bir $M$ eğrisi $(\mathrm{I}, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in \mathrm{I}$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise $M$ eğrisine $(\mathrm{I}, \alpha)$ ya göre <u>birim hızlı eğridir</u> denir.

**Tanım 1.1.5.** Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı, yani $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ olan eğriye *regüler eğri* denir.

**Tanım 1.1.6.** $\alpha$ bir uzay eğrisi olsun. $\alpha$ eğrisi bir uzay eğrisi olduğundan her bir noktasında; $T$ teğet, $N$ asli normal ve $B$ binormal vektörlerden oluşan bir $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ortonormal koordinat sisteminin var olduğunu biliyoruz. Bu $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ üçlüsüne *hareketli üçlü* ya da *Frenet Çatısı* denir.

**Tanım 1.1.7.** $\vec{T}$ teğet vektör olmak üzere bir eğri boyunca ilerlediğimiz zaman teğetin değişim oranını ifade eden $\vec{k} = \dfrac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$ vektörüne <u>eğrilik vektörü</u> denir ve $\kappa$ çarpanına *birinci eğrilik* veya *eğrilik* adı verilir.

**Tanım 1.1.8.** $x = x(s)$ bir eğri ve $\vec{B}$ eğrinin bir noktasındaki binormal vektör olmak üzere $\dfrac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$ eşitliğini sağlayan $\tau$ fonksiyonuna $x$ eğrisinin *ikinci eğriliği* veya *burulması* denir. $\tau$ fonksiyonu

$$\tau = \frac{(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})}{\ddot{x} \cdot \ddot{x}}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{ds}$$

eşitliği ile verilir. Burada $\dot{\vec{x}}$, $x$ eğrisinin yay parametresine göre türevidir.

$\kappa$ *eğrilik* ve $\tau$ *burulma* olmak üzere, Frenet türev formülleri şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}} &= \kappa\vec{N} \\ \dot{\vec{N}} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \dot{\vec{B}} &= -\tau\vec{N} \end{aligned} \qquad (1.1)$$

**Tanım 1.1.9.** $E^3$, $\langle\, ,\rangle$ standart iç çarpımı ile verilen 3 boyutlu Öklidyen uzay olsun. $x(s)$, yay uzunluğu ile parametrelenmiş $E^3$ de bir eğri ve $x_1(s_1)$ $s_1$ yay uzunluğu parametresiyle parametrelenmiş $E^3$ de bir eğri olsun. Eğer, karşılık gelen noktalarda $x$ eğrisinin binormali ile $x_1$ eğrisinin asli normali lineer bağımlı ise bu taktirde $x$ eğrisine bir Mannheim eğrisi, $x_1$ eğrisine de $x$ eğrisinin Mannheim partner eğrisidir denir [19].

**Teorem 1.1.1.** $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ $E^3$ Öklid uzayında yay uzunluğu parametresiyle verilmiş iki eğri olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner eğrisidir $\Leftrightarrow$ $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $x_1(s_1)$ eğrisinin $\kappa_1$ eğriliği ve $\tau_1$ burulması aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\dot{\tau}_1 = \frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda}(1+\lambda^2\tau_1^2)$$

(Bakınız [19]).

**Önerme 1.1.1.** $x(s)$**,** $E^3$ Öklid uzayında $s$ yay uzunluğu parametresi ile verilmiş Mannheim eğrisi ve $x_1(s_1)$ eğrisi de $x(s)$ eğrisinin $s_1$ yay uzunluğu parametresi ile verilmiş Mannheim partner eğrisi olsun. Eğer $x(s)$ eğrisi bir genelleştirilmiş helis ise bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi bir doğrudur [19].

**Önerme 1.1.2.** Eğer bir genelleştirilmiş helis eğrisi $E^3$ Öklid uzayında bir $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner eğrisi oluyorsa, bu taktirde $c_1$, $c_2$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $x(s)$ eğrisinin eğrilikleri arasında

$$\frac{\tau}{\kappa}=\frac{c_2}{2}e^{c_1 s}-\frac{1}{2c_2}e^{-c_1 s}$$

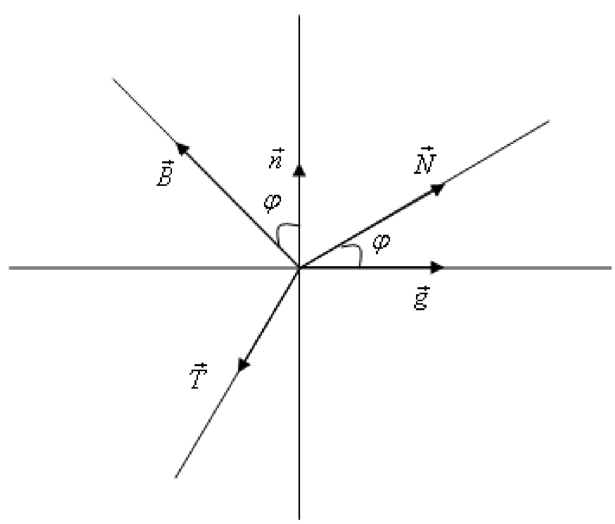
bağıntısı vardır.

Eğer özel olarak $c_1=c_2=1$ alınırsa

$$\frac{\tau}{\kappa}=\frac{e^{s}-e^{-s}}{2}=\sinh s$$

elde edilir [19].

**Tanım 1.1.10.** Diferansiyellenebilir bir $S$ yüzeyi üzerinde bir $\alpha$ eğrisi verilsin. $\alpha$ eğrisi $S$ yüzeyi üzerinde olduğundan, her bir noktasında *Darboux çatısı* olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Darboux çatısı, $\vec{T}$ teğet, $\vec{g}$ geodezik normal ve $\vec{n}$ yüzey normali olmak üzere $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır. Burada birinci vektör, eğrinin bir P noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan $\vec{T}$ birim teğet vektör alanıdır. $\vec{n}$, yüzeyin P noktasındaki birim normal vektör alanı ve çatının ikinci vektörü olan birim geodezik normal vektör alanı da $\vec{g}=\vec{n}\times\vec{T}$ eşitliği ile tanımlanır. $\vec{T}$ vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan, diğer $\vec{N}$, $\vec{B}$, $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. ( Şekil 1)




**Şekil 1: Frenet ve Darboux çatılarının elemanları**

Frenet çatısı, $\vec{T}$ etrafında pozitif yönde $\varphi = \varphi(s)$ açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise, $\vec{g}$ ile $\vec{N}$ ve $\vec{n}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açının $\varphi$ olması demektir. Buradan

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla

$$\vec{g} = \cos\varphi\,\vec{N} + \sin\varphi\,\vec{B}, \qquad \vec{n} = -\sin\varphi\,\vec{N} + \cos\varphi\,\vec{B} \tag{1.2 }$$

yazılabilir. Yani (1.2) eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

matris formunda yazılabilir. (1.3) eşitliğindeki

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

matrisi düzlemin dönme matrisi, yani ortogonal matristir. O halde Frenet çatısının elemanları olan $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ vektörlerini elde etmek istersek, (1.2) eşitliklerinden $\vec{N}$ ve $\vec{B}$'yi bulmamız gerekir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

yani

$$\vec{N} = \cos\varphi\,\vec{g} - \sin\varphi\,\vec{n}, \qquad \vec{B} = \sin\varphi\,\vec{g} + \cos\varphi\,\vec{n} \tag{1.6}$$

bulunur.

Şimdi, (1.1) eşitliği ile verilen Frenet türev formülleri yardımıyla, eğrinin yay parametresine göre Darboux türev formüllerini hesaplayalım:

$$\dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N}$$

$$\dot{\vec{T}} = \kappa(\cos\varphi\,\vec{g} - \sin\varphi\,\vec{n})$$

$$\dot{\vec{T}} = \kappa\cos\varphi\,\vec{g} - \kappa\sin\varphi\,\vec{n} \tag{1.7}$$

yazılabilir. Aynı şekilde

$$\vec{g} = \cos\varphi\,\vec{N} + \sin\varphi\,\vec{B}$$

$$\dot{\vec{g}} = -\sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{N} + \cos\varphi \, \dot{\vec{N}} + \cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{B} + \sin\varphi \, \dot{\vec{B}}$$

$$\dot{\vec{g}} = -\sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{N} + \cos\varphi \; (-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) + \cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{B} - \tau\sin\varphi \, \vec{N}$$

$$\dot{\vec{g}} = -\kappa\cos\varphi \, \vec{T} + (-\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} - \tau\sin\varphi)\vec{N} + (\tau\cos\varphi + \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds})\vec{B}$$

$$\dot{\vec{g}} = -\kappa\cos\varphi \;\; \vec{T} + (-\sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} - \sin\varphi \; \tau)(\cos\varphi \, \vec{g} - \sin\varphi \, \vec{n})$$
$$+ (\tau\cos\varphi + \cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds})(\sin\varphi \, \vec{g} + \cos\varphi \, \vec{n})$$

$$\dot{\vec{g}} = -\kappa\cos\varphi \, \vec{T} + (-\sin\varphi\cos\varphi \; (\frac{d\varphi}{ds} + \tau) + \cos\varphi\sin\varphi \; (\frac{d\varphi}{ds} + \tau)\vec{g}$$
$$+ (\sin^2\varphi(\frac{d\varphi}{ds} + \tau) + \cos^2\varphi \; (\frac{d\varphi}{ds} + \tau))\vec{n}$$

$$\dot{\vec{g}} = -\kappa\cos\varphi \, \vec{T} + (\frac{d\varphi}{ds} + \tau)\,\vec{n} \tag{1.8}$$

denklemi elde edilir. (1.8) denkleminde

$$k_g = \kappa\cos\varphi, \qquad \tau_g = \tau + \frac{d\varphi}{ds} \tag{1.9}$$

sembolleri ithal edilir. Benzer şekilde

$$\vec{n} = -\sin\varphi \, \vec{N} + \cos\varphi \, \vec{B}$$

$$\dot{\vec{n}} = -\cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{N} - \sin\varphi \, \dot{\vec{N}} - \sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{B} + \cos\varphi \, \dot{\vec{B}}$$

$$\dot{\vec{n}} = -\cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{N} - \sin\varphi(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) - \sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{B} - \tau\cos\varphi \; \vec{N}$$

$$\dot{\vec{n}} = -\cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{N} + \kappa\sin\varphi\vec{T} - \tau\sin\varphi\vec{B} - \sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} \vec{B} - \tau\cos\varphi\vec{N}$$

$$\dot{\vec{n}} = \kappa\sin\varphi \, \vec{T} + (-\cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} - \tau\cos\varphi)\vec{N} + (-\tau\sin\varphi - \sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds})\vec{B}$$

$$\dot{\vec{n}} = \kappa\sin\varphi \, \vec{T} + (-\cos\varphi \, \frac{d\varphi}{ds} - \tau\cos\varphi)(\cos\varphi \, \vec{g} - \sin\varphi \; \vec{n})$$
$$+ (-\tau\sin\varphi - \sin\varphi \, \frac{d\varphi}{ds})(\sin\varphi \; \vec{g} + \cos\varphi \; \vec{n})$$

$$\dot{\vec{n}} = \kappa \sin\varphi\, \vec{T} + \left( -\cos^2\varphi (\frac{d\varphi}{ds} + \tau) - \sin^2\varphi (\frac{d\varphi}{ds} + \tau) \right) \vec{g} + \left( \sin\varphi \cos\varphi\, (\frac{d\varphi}{ds} + \tau) - \sin\varphi \cos\varphi\, (\frac{d\varphi}{ds} + \tau) \right) \vec{n}$$

$$\dot{\vec{n}} = \kappa \sin\varphi\, \vec{T} - (\frac{d\varphi}{ds} + \tau)\ \vec{g} \tag{1.10}$$

elde edilir. (1.10) denkleminde de

$$k_n = \kappa \sin\varphi, \quad \tau_g = \tau + \frac{d\varphi}{ds} \tag{1.11}$$

sembollerini ithal ederiz. Şimdi, (1.9) ve (1.11) eşitliklerindeki birinci ifadeler (1.7) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}} = k_g\, \vec{g} - k_n\, \vec{n}\,, \tag{1.12}$$

bulunur. Böylece (1.7), (1.8) ve (1.10) denklemleri birleştirilirse Darboux türev formülleri

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}} &= k_g\, \vec{g} - k_n\, \vec{n} \\ \dot{\vec{g}} &= -\kappa \cos\varphi\, \vec{T} + (\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{ds}} + \tau) \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= \kappa \sin\varphi\, \vec{T} - (\frac{d\varphi}{ds} + \tau) \vec{g} \end{aligned} \tag{1.13}$$

biçiminde yazılabilir. Bu formüllerin matris formu

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

ile verilir[4]. (1.14) eşitliğindeki matris anti-simetriktir. Bu matristeki $k_g$ ye geodezik eğrilik, $k_n$ ifadesine normal eğrilik ve $\tau_g$ ye de geodezik burulma adı verilir.

Özel olarak ;

**i)** $k_g = 0$ ise $\alpha$ bir geodezik eğri,

**ii)** $k_n = 0$ ise $\alpha$ bir asimptotik eğri,

**iii)** $\tau_g = 0$ ise $\alpha$ bir eğrilik çizgisi

olarak adlandırılır[21]. Yüzey üzerinde her noktadaki her doğrultudan bir geodezik geçer. Geodezik, bir başlangıç noktası ve bu noktadaki teğet ile tek olarak belirtilir. Bir yüzey üzerindeki bütün doğrular geodeziklerdir. Bütün eğrisel geodezikler boyunca eğrilerin asli normali yüzey normali ile çakışır. Asimptotik doğrular boyunca oskülatör düzlemler ve teğet düzlemler çakışır, geodezikler boyunca bu düzlemler diktirler[25].

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

eşitliğindeki matris, üç bileşeni ile tek olarak belirlidir. Burada, matrisin $a_{23}$, $a_{31}$ ve $a_{12}$ bileşenleri göz önüne alınırsa, çatının Darboux ani dönme vektörü

$$\vec{\omega} = \tau_g \vec{T} + k_n \vec{g} + k_g \vec{n} \tag{1.15}$$

biçiminde yazılabilir. Darboux çatısı, her anda, bu vektör etrafında $\varphi$ açılık bir dönme yapar. Buna göre, Darboux türev formülleri, bu vektör yardımıyla

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}} &= \vec{\omega} \times \vec{T} \\ \dot{\vec{g}} &= \vec{\omega} \times \vec{g} \\ \dot{\vec{n}} &= \vec{\omega} \times \vec{n} \end{aligned} \tag{1.16}$$

biçiminde tek türlü olarak ifade edilebilir.

Eğer, yüzey üzerindeki eğri birim hızlı değil ise bu durumda Darboux türev formülleri

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}} &= \gamma k_g \, \vec{g} - \gamma k_n \, \vec{n} \\ \dot{\vec{g}} &= \gamma k_g \vec{T} + \gamma \tau_g \, \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= \gamma k_n \vec{T} - \gamma \tau_g \, \vec{g} \end{aligned}$$

biçiminde verilir. Burada $\gamma$ eğrinin hızını tanımlar.

**Tanım 1.1.11. (Normal kesit)** Yüzey üzerindeki bir eğrinin bir noktasındaki teğet ve normal vektörlerinin gerdiği düzlem boyunca yüzeyi kestiğimizde oluşan eğriye *normal kesit* veya *normal kesit eğrisi* adı verilir.

**Teorem 1.1.12. (Meusnier Teoremi)** Yüzey üzerindeki bir noktadan geçen aynı teğet vektöre sahip bütün eğrilerin normal eğrilikleri aynıdır.

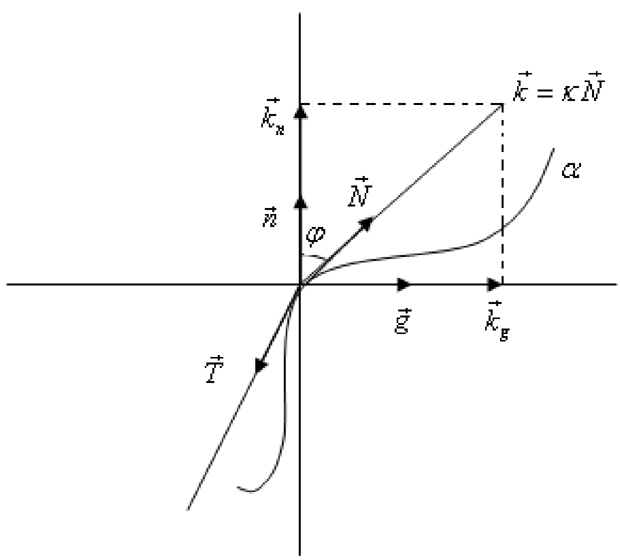
**Tanım 1.1.13. (Geodezik ve Normal Eğrilikler)** Yüzey üzerindeki bir $\alpha$ eğrisinin bir $P$ noktasında tanımlı

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{ds}} = \kappa\vec{N} = \vec{k} \tag{1.17}$$

vektörüne eğrilik vektörü denir. Bu vektör $P$den geçen ve $\vec{T}$ ye dik olan normal düzlemde yatar. Bu düzlem, daha önce de ifade ettiğimiz gibi, $\vec{n}$ yüzey normalini kapsar. $\vec{k}$ eğrilik vektörünün $\vec{n}$ yüzey normali üzerine izdüşümü, Meusnier teoremine göre, normal kesitin $\vec{T}$ yönündeki eğrilik vektörüdür. Şimdi, *normal* ve *teğetsel eğrilik vektörleri* olarak isimlendirilen ve sırasıyla, $\vec{k}_n$ ve $\vec{k}_g$ ile gösterilen iki vektör vardır. $\vec{k}$ ile, $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ doğrultularına izdüşümleri olan bu vektörler arasında

$$\vec{k} = \vec{k}_n + \vec{k}_g \tag{1.18}$$

bağıntısı vardır. Yani, eğrilik vektörü, normal ve teğetsel eğrilik vektörlerinin toplamıdır. (Şekil 2)




**Şekil 2: Geodezik ve normal eğrilik vektörleri**

Teğetsel eğrilik vektörüne, *geodezik eğrilik vektörü* denir. $k_g$ nin bir ifadesini bulmak için, eğrinin teğet düzleminde kalan ve $\vec{T}$ ye dik olan bir $\vec{g}$ birim vektörü tanımlayalım. Bu, $\vec{T} \to \vec{g}$ olması ile $x_u \to x_v$ olması aynı anlama gelir. Buna göre, $\alpha$ nın $k_g$ *teğetsel eğriliği* ya da *geodezik eğriliği*

$$\vec{k}_g = k_g\,\vec{g} \tag{1.19}$$

denklemiyle tanımlanır. Meusnier teoreminden, $\vec{k}_n$ normal eğrilik vektörünün büyüklüğü

$$k_n = |\kappa \cos\varphi| \tag{1.20}$$

normal eğriliği ve $\vec{k}_g$ geodezik eğrilik vektörünün büyüklüğü de

$$k_g = |\kappa \sin\varphi| \tag{1.21}$$

geodezik eğriliği verir [4].

## 1.2. Minkowski 3-Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen temel tanım ve kavramların Minkowski 3-uzayındaki karşılıklarını vereceğiz.

**Tanım 1.2.1.** $IR^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle\, ,\rangle : IR^3 \times IR^3 \to IR$$
$$(\vec{a},\vec{b}) \to \langle \vec{a},\vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$$

Lorentz iç çarpımı alınırsa, $IR^3$ afin uzayı, *Minkowski 3-uzayı* olarak adlandırılır ve $E_1^3$ ile gösterilir[26, 27].

**Tanım 1.2.2.** $E_1^3$ uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

**i)** $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise $\vec{a}$ ya *spacelike vektör*,

**ii)** $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle < 0$ ise $\vec{a}$ ya *timelike vektör*,

**iii)** $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle = 0$ ve $\vec{a} \neq 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne *lightlike (veya null) vektör*

denir[14, 15].

**Tanım 1.2.3.** $E_1^3$ uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

**i)** $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle = 1$ ise $\vec{a}$ ya birim *spacelike vektör*,

**ii)** $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1$ ise $\vec{a}$ ya birim *timelike vektör*

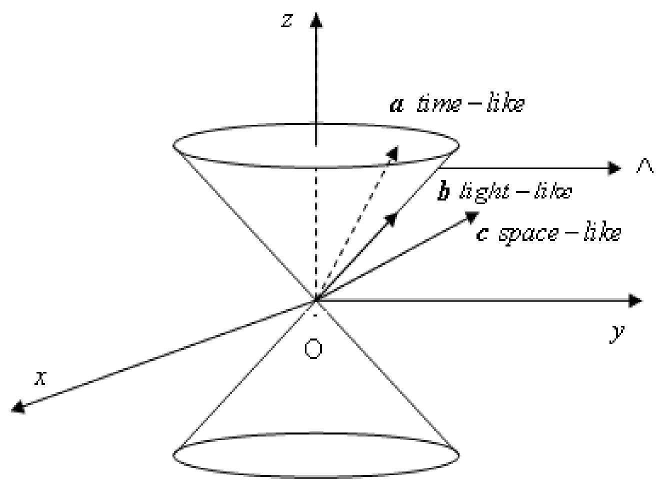
denir[14, 15].

**Tanım 1.2.4. (Işık konisi)** $E_1^3$ uzayında

$$\Lambda = \left\{ \vec{a} \in E_1^3 : \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0,\ \vec{a} \neq 0 \right\}$$

cümlesine *Işık konisi* adı verilir.

$E_1^3$ uzayındaki timelike vektörler $\Lambda$ nın içinde, lightlike (veya null) vektörler $\Lambda$ nın üzerinde ve spacelike vektörlerde $\Lambda$ nın dışında bulunurlar (Şekil 3).




**Şekil 3: Minkowski 3-uzayında vektörler**

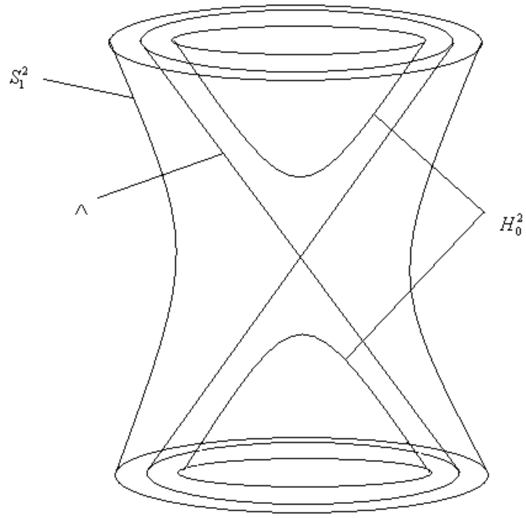
**Tanım 1.2.5.** $E_1^3$ uzayındaki Lorentz ve hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \left\{ \vec{a} \in E_1^3 \middle| \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \vec{a} \in E_1^3 \middle| \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \right\}$$

biçiminde tanımlanırlar (Şekil 4).




**Şekil 4: Minkowski 3-uzayında birim küreler**

**Tanım 1.2.6.** $y = y(u,v)$, $E_1^3$ uzayında bir yüzey olsun. Eğer $P \in y(u,v)$ için $\langle \, , \rangle\big|_p : y(u,v)\big|_p \times y(u,v)\big|_p \to R$, bir Lorentz iç çarpımı ise $y(u,v)$ ye timelike yüzey denir[28].

Yani, bir yüzeyin normal vektör alanı timelike (spacelike) ise yüzey bir *spacelike* (timelike) bir yüzeydir.

**Tanım 1.2.7.** $E_1^3$ uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_3 b_2 - a_2 b_3,\ a_1 b_3 - a_3 b_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin *vektörel çarpımı* denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \ \ ise \\ 0 & i \neq j \ \ ise \end{cases} \quad \text{ve} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada,

$$e_1 \times e_2 = e_3 \ , \ e_2 \times e_3 = -e_1 \ , \ e_3 \times e_1 = -e_2$$

dir[29].

**Teorem 1.2.1.** $E_1^3$ uzayında üç vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ , $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ *ve* $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ olsun. Bu durumda,

**i)** $\left\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right\rangle=-\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

**ii)** $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-\langle\vec{a},\vec{c}\rangle\vec{b}+\left\langle\vec{b},\vec{c}\right\rangle\vec{a}$

**iii)** $\left\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\right\rangle=0$ *ve* $\left\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\right\rangle=0$

**iv)** $\left\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\right\rangle=-\langle\vec{a},\vec{a}\rangle\left\langle\vec{b},\vec{b}\right\rangle+\left(\left\langle\vec{a}\times\vec{b}\right\rangle\right)^2$

dir[16].

**Tanım 1.2.8.** $\vec{a}\in E_1^3$ bir timelike vektör olsun. $\vec{e}_3=(0,0,1)$ olmak üzere,

**i)** $\langle\vec{a},\vec{e}_3\rangle<0$ ise $\vec{a}$ ya *future-pointing timelike vektör*,

**ii)** $\langle\vec{a},\vec{e}_3\rangle>0$ ise $\vec{a}$ ya *past-pointing timelike vektör*

denir.[28]

**Tanım 1.2.9. i) Hiperbolik Açı:** $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ , $E_1^3$ uzayında iki future pointing (veya past pointing) timelike vektör olsun. Bu taktirde

$$<x,y>=-|x||y|\cosh\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta\geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta\geq 0$ reel sayısına $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *hiperbolik açı* denir.

**ii) Merkez Açı:** $E_1^3$ uzayının bir timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. Bu taktirde,

$$<x,y>=|x||y|\cosh\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta\geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta\geq 0$ reel sayısına, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *merkez açı* denir.

**iii) Spacelike Açı:** $E_1^3$ uzayının bir spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. Bu taktirde,

$$<x,y>=|x||y|\cos\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta$ $\left(0 \leq \theta < 2\pi\right)$ reel sayısına, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *spacelike açı* denir.

**iv) Lorentziyen Timelike Açı:** $E_1^3$ uzayında $\vec{x}$ bir spacelike vektör ve $\vec{y}$ bir timelike vektör olsun. Bu taktirde,

$$< x, y > = |x||y| \sinh \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *Lorentziyen timelike açı* denir[14, 15, 20].

Bir $x = x(u,v)$ spacelike yüzeyini göz önüne alalım. $x(u,v)$ üzerindeki bir $(c)$ spacelike eğrisinin her noktasında $\left\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right\}$ Frenet üçyüzlüsü vardır. Frenet üçyüzlüsünden başka, $(c)$ eğrisi $x(u,v)$ üzerinde olduğundan, ikinci bir üç yüzlüden bahsetmek mümkündür. $(c)$ eğrisinin bir $P$ noktasındaki birim teğet vektörü $\vec{T}$ ve yüzeyin $P$ deki birim normal vektörünü $\vec{n}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \vec{T} \times \vec{g} &= \vec{n} \\ \vec{g} \times \vec{n} &= -\vec{T} \\ \vec{n} \times \vec{T} &= -\vec{g} \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\vec{g}$ spacelike vektörünü alırsak $\left\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\right\}$ gibi yeni bir üçyüzlü elde ederiz. Bu üçyüzlüyü, Frenet üçyüzlüsü ile karşılaştırmak için $\vec{B}$ ve $\vec{n}$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açıyı $\theta$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\vec{g} = \cosh\theta\,\vec{N} + \sinh\theta\,\vec{B}, \quad \vec{n} = \sinh\theta\,\vec{N} + \cosh\theta\,\vec{B} \tag{1.22}$$

yazılabilir. $\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}$ vektörlerinin, $(c)$ eğrisinin $s$ yayına göre türevleri bu vektörler cinsinden ifade edilerek, Frenet formüllerine benzer formüller bulunur. (1.22) denklemlerinde $\vec{g}$ vektörünü $\cosh\theta$ ile, $\vec{n}$ vektörünü $\sinh\theta$ ile çarpıp birincisinden ikincisini çıkarırsak

$$(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta)\vec{N} = \cosh\theta\ \vec{g} - \sinh\theta\ \vec{n}$$

$$\vec{N} = \cosh\theta\ \vec{g} - \sinh\theta\ \vec{n}$$

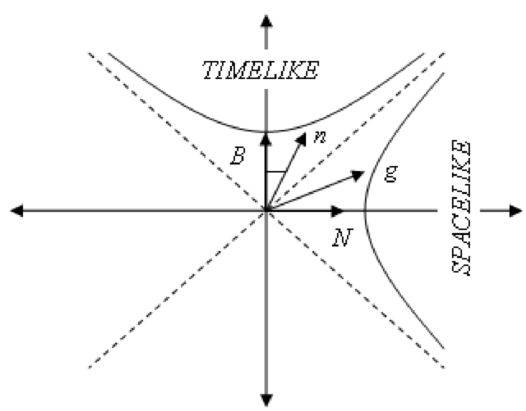
bulunur. Bu ifade $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa(\cosh\theta\ \vec{g} - \sinh\theta\ \vec{n}),$$
$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\cosh\theta\ \vec{g} - \kappa\sinh\theta\ \vec{n}$$

elde edilir. (1.22) denklemindeki $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ nin türevleri alınır ve $P$ noktasındaki eğrilik yarıçapı $r$ ve burulma yarıçapı $t$ ise

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{N}\\ \vec{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1/r & 0\\ -1/r & 0 & 1/t\\ 0 & 1/t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{N}\\ \vec{B}\end{bmatrix}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa




**Şekil 5: Timelike ve Spacelike vektörler**

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = \cosh\theta\ \frac{d\vec{N}}{ds} + \sinh\theta\ \frac{d\theta}{ds}\ \vec{N} + \sinh\theta\ \frac{d\vec{B}}{ds} + \cosh\theta\ \frac{d\theta}{ds}\vec{B}$$
$$= \cosh\theta\ (-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) + \sinh\theta\ \frac{d\theta}{ds}\vec{N} + \tau\sinh\theta\,\vec{N} + \cosh\theta\ \frac{d\theta}{ds}\vec{B}$$
$$= -\kappa\cosh\theta\ \vec{T} + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)(\sinh\theta\,\vec{N} + \cosh\theta\,\vec{B})$$
$$\frac{d\vec{g}}{ds} = -\kappa\cosh\theta\ \vec{T} + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \sinh\theta\,\frac{d\vec{N}}{ds} + \cosh\theta\,\frac{d\theta}{ds}\vec{N} + \cosh\theta\,\frac{d\vec{B}}{ds} + \sinh\theta\,\frac{d\theta}{ds}\vec{B}$$

$$= \sinh\theta\,(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) + \cosh\theta\,\frac{d\theta}{ds}\vec{N} + \tau\cosh\theta\,\vec{N} + \sinh\theta\,\frac{d\theta}{ds}\vec{B}$$

$$= -\kappa\sinh\theta\,\vec{T} + (\cosh\theta\,\vec{N} + \sinh\theta\,\vec{B})\left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\sinh\theta\,\vec{T} + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{g}$$

bulunur. Buna göre, Darboux üçyüzlüsünün türev formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\cosh\theta\,\vec{g} - \kappa\sinh\theta\,\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = -\kappa\cosh\theta\vec{T} + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\sinh\theta\vec{T} + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{g}$$

biçiminde verilir. Bu formüllerde

$$\kappa\cosh\theta = \frac{\cosh\theta}{r} = \frac{1}{r_g} = k_g$$

$$-\kappa\sinh\theta = \frac{-\sinh\theta}{r} = \frac{1}{r_n} = k_n$$

$$\tau + \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{t} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{t_g} = \tau_g$$

denirse, space like yüzey üzerindeki spacelike eğrinin Darboux türev formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k_g\,\vec{g} + k_n\,\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = -k_g\,\vec{T} + \tau_g\,\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = k_n\,\vec{T} + \tau_g\,\vec{g}$$

biçimindedir. Burada; $k_g$ *geodezik eğrilik*, $k_n$ *normal eğrilik* ve $\tau_g$ de *geodezik burulma* olarak adlandırılır.

Eğer yüzeyimiz bir timelike yüzey ve üzerindeki eğri bir timelike eğri ise Darboux türev denklemleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k_g \, \vec{g} + k_n \, \vec{n}$$
$$\frac{d\vec{g}}{ds} = k_g \, \vec{T} - \tau_g \, \vec{n}$$
$$\frac{d\vec{n}}{ds} = k_n \, \vec{T} + \tau_g \, \vec{g}$$

ile verilir.

Yüzeyimiz timelike ve üzerindeki eğri de bir spacelike eğri ise bu taktirde Darboux türev formülleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k_g \, \vec{g} - k_n \, \vec{n}$$
$$\frac{d\vec{g}}{ds} = k_g \, \vec{T} + \tau_g \, \vec{n}$$
$$\frac{d\vec{n}}{ds} = k_n \, \vec{T} + \tau_g \, \vec{g}$$

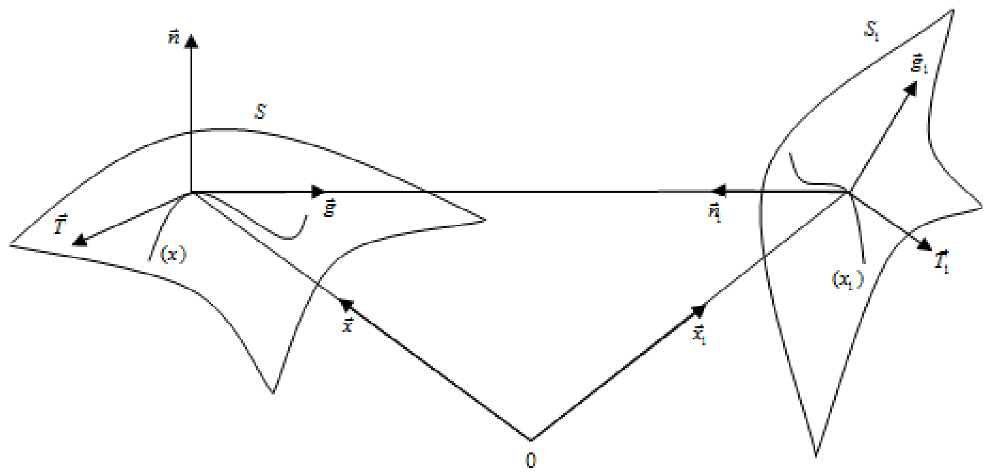
ile verilir. Bu iki durumun ispatı da Tanım 1.2.6 ile verilen açılar kullanılarak yukarıda yapılan ispatla aynı yolla kolayca gösterilebilir (Bakınız [16, 27, 28, 29]).

# II. BÖLÜM

## $E^3$ ÖKLİD UZAYINDA MANNHEIM PARTNER $D$-EĞRİLERİ

Bu bölümde Öklidyen 3-uzayda yönlendirilmiş $S$ ve $S_1$ yüzeyleri üzerinde yatan $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ eğrileri için Mannheim partner D-eğrilerinin tanımını ve bunlarla ilgili karakterizasyonları vereceğiz.

**Tanım 2.1.** 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş iki yüzey $S$ ve $S_1$ olsun. $S$ ve $S_1$ üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de, sırasıyla, $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ olsun. $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ ve $\{\vec{T}_1,\vec{g}_1,\vec{n}_1\}$ ile gösterilsin. Eğer $x$ ve $x_1$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, $x$ eğrisinin $\vec{g}$ Darboux çatı elemanı ile $x_1$ eğrisinin $\vec{n}_1$ Darboux çatı elemanı çakışıyorsa, bu taktirde $x$ e bir *Mannheim* $D$*-eğrisi* ve $x_1$ eğrisine de $x$ eğrisinin bir *Mannheim partner* $D$*-eğrisidir* denir. Bu durumda $\{x,x_1\}$ eğri çiftine bir *Mannheim* $D$*-çifti* adı verilir. Eğer yönlendirilmiş $S$ ve $S_1$ yüzeyleri üzerinde yatan böyle eğriler varsa $\{S,S_1\}$ yüzey çiftine *Mannheim yüzey çifti* denir.(Şekil 6)




**Şekil 6: Mannheim partner D-eğrileri**

$x(s)$, $E^3$ de $s$ yay parametresiyle verilen bir Mannheim $D$-eğrisi ve $s_1$ yay parametresiyle verilen $x_1(s_1)$ eğrisi de $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. $x$ eğrisi üzerindeki Darboux çatısı $\left\{\vec{T}(s), \vec{g}(s), \vec{n}(s)\right\}$ ile belirtilsin. Buna göre, Darboux türev formülleri

$$\dot{\vec{T}} = k_g \, \vec{g} + k_n \, \vec{n}$$
$$\dot{\vec{g}} = -k_g \, \vec{T} + \tau_g \, \vec{n}$$
$$\dot{\vec{n}} = -k_n \, \vec{T} - \tau_g \, \vec{g}$$

ile verilir. Burada " $\cdot$ " sembolü, eğrinin yay parametresine göre türevini gösterir.

**Teorem 2.1.** $x(s)$, $E^3$ de $s$ yay parametresi ile verilen bir Mannheim D-eğrisi olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ $\Gamma$ nın Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1$ eğrisinin $k_{n_1}$ normal eğriliği, $k_{g_1}$ geodezik eğriliği, $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $k_n$ normal eğriliği arasında, $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{-1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1-\lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2 \tau_{g_1}^2}{(1-\lambda k_{n_1})}\right)\left(-k_n \frac{1-\lambda k_{n_1}}{\cos\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1-\lambda k_{n_1}}\right]$$

bağıntısı vardır.

**İspat.** Kabul edelim ki $x(s)$ bir Mannheim $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde tanım 2.1 den bir $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\vec{x}(s_1)=\vec{x}_1(s_1)+\lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{2.1}$$

denklemi yazılabilir. Şimdi bu denklemin $s_1$ parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}+\dot{\lambda}(s_1)\,\vec{n}_1(s_1)+\lambda(s_1)\,\dot{\vec{n}}_1(s_1)$$

$$\vec{T}\,\frac{ds}{ds_1}=\vec{T}_1+\dot{\lambda}\,\vec{n}_1+\lambda(-k_{n_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{g}_1)$$

$$\vec{T}\,\frac{ds}{ds_1}=(1-\lambda k_{n_1})\vec{T}_1-\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1+\dot{\lambda}\,\vec{n}_1$$

elde edilir. Bu eşitlik $\vec{n}_1=\vec{g}$ ile iç çarpılırsa

$$\frac{ds}{ds_1}\left\langle\vec{T},\vec{g}\right\rangle=(1-\lambda k_{n_1})\left\langle\vec{T}_1,\vec{n}_1\right\rangle-\lambda\tau_{g_1}\left\langle\vec{g}_1,\vec{n}_1\right\rangle+\dot{\lambda}\left\langle\vec{n}_1,\vec{n}_1\right\rangle$$

bulunur. Buradan $\dot{\lambda}=0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece $\lambda$ bir sabittir. Dolayısıyla

$$\vec{T}\,\frac{ds}{ds_1}=\vec{T}_1+\lambda\,\dot{\vec{n}}_1=\vec{T}_1+\lambda\,(-k_{n_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{g}_1) \tag{2.2}$$

$$\vec{T}\,\frac{ds}{ds_1}=(1-\lambda k_{n_1})\vec{T}_1-\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{2.3}$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}=\cos\theta\vec{T}_1+\sin\theta\,\vec{g}_1 \tag{2.4}$$

denkleminin sağlandığı biliniyor. (2.4) denkleminin $s_1$ parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=(k_{g_1}\vec{g}_1+k_{n_1}\vec{n}_1)\cos\theta+\dot{\theta}(-\sin\theta)\vec{T}_1+(-k_{g_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{n}_1)\sin\theta+\dot{\theta}\cos\theta\;\vec{g}_1$$

$$\frac{ds}{ds_1}(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})=(-\dot{\theta}-k_{g_1})\sin\theta\;\vec{T}_1+(\dot{\theta}+k_{g_1})\cos\theta\;\vec{g}_1+(k_{n_1}\cos\theta+\tau_{g_1}\sin\theta)\vec{n}_1$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\vec{n}=\sin\theta\;\vec{T}_1-\cos\theta\;\vec{g}_1$$

eşitliğinin son ifadede yerine yazılmasıyla

$$(k_g\vec{g}+k_n\sin\theta\;\vec{T}_1-k_n\cos\theta\;\vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1}=(-\dot{\theta}-k_{g_1})\sin\theta\;\vec{T}_1+(\dot{\theta}+k_{g_1})\cos\theta\;\vec{g}_1$$
$$+(k_{n_1}\cos\theta+\tau_{g_1}\sin\theta)\;\vec{n}_1$$

denklemi elde edilir. $x$ ve $x_1$ eğrileri Mannheim partner $D$-eğriler oldukları için $\vec{n}$ ile $\vec{g}_1$ lineer bağımlı olacağından eşitliğin her iki tarafındaki $\vec{T}_1$ ve $\vec{n}_1$ lerin katsayıları eşittir. Dolayısıyla

$$-\dot{\theta} - k_{g_1} - k_n \frac{ds}{ds_1} = 0$$

$$\dot{\theta} + k_{g_1} + k_n \frac{ds}{ds_1} = 0$$

bulunur. Böylece,

$$\dot{\theta} = -k_n \frac{ds}{ds_1} - k_{g_1} \tag{2.5}$$

eşitliği elde edilir. (2.4) denkleminin (2.3) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$(\cos\theta\, \vec{T}_1 + \sin\theta\, \vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (1 - \lambda k_{n_1})\vec{T}_1 - \lambda \tau_{g_1} \vec{g}_1$$

elde edilir. Burada

$$\cos\theta \frac{ds}{ds_1} = (1 - \lambda k_{n_1}), \quad \sin\theta \frac{ds}{ds_1} = -\lambda \tau_{g_1}$$

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1 - \lambda k_{n_1}}{\cos\theta} = \frac{-\lambda \tau_{g_1}}{\sin\theta}, \quad \tan\theta = \frac{-\lambda \tau_{g_1}}{1 - \lambda k_{n_1}} \tag{2.6}$$

eşitliklerinden $-\lambda \tau_{g_1} = \tan\theta\,(1 - \lambda k_{n_1})$ denklemi bulunur. Bu denklemin $s_1$ parametresine göre türevi alınırsa

$$-\lambda \dot{\tau}_{g_1} = \left(1 + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1}^2}{(1 - \lambda k_{n_1})^2}\right)\dot{\theta}(1 - \lambda k_{n_1}) - \left(\frac{-\lambda \tau_{g_1}}{1 - \lambda k_{n_1}}\right)\lambda \dot{k}_{n_1}$$

elde edilir ve $\dot{\theta}$ nün (2.5) deki değeri yerine yazılırsa

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{-1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1 - \lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2 \tau_{g_1}^2}{(1 - \lambda k_{n_1})}\right)\left(-k_n \frac{1 - \lambda k_{n_1}}{\cos\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1 - \lambda k_{n_1}}\right] \tag{2.7}$$

denklemi bulunur. (2.6) denklemindeki değerler (2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\lambda \dot{\tau}_{g_1}(1 - \lambda k_{n_1}) - \lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1} + \left((1 - \lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2 \tau_{g_1}^2\right) k_{g_1} = -k_n \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \tag{2.8}$$

denklemi elde edilir.

Tersine olarak (2.8) sağlansın. Tanım 2.1 den, $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $x$ eğrisi

$$\vec{x}(s_1)=\vec{x}_1(s_1)+\lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{2.9}$$

olarak verilir. Bu eşitliğin $s_1$ e göre türevi alınıp, Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=\vec{T}_1+\lambda\dot{\vec{n}}_1=\vec{T}_1+\lambda\left(-k_{n_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{g}_1\right)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=(1-\lambda k_{n_1})\vec{T}_1-\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{2.10}$$

bulunur. $s_1$ e göre tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\vec{T}\frac{d^2s}{ds_1^2}&=-\lambda\dot{k}_{n_1}\vec{T}_1+(1-\lambda k_{n_1})(k_{g_1}\vec{g}_1+k_{n_1}\vec{n}_1)\\&\quad-\lambda\dot{\tau}_{g_1}\vec{g}_1-\lambda\tau_{g_1}(-k_{g_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{n}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{T}\frac{d^2s}{ds_1^2}+(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2&=(-\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})\vec{T}_1+\left((1-\lambda k_{n_1})k_{g_1}-\lambda\dot{\tau}_{g_1}\right)\vec{g}_1\\&\quad+\left((1-\lambda k_{n_1})k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2\right)\vec{n}_1\end{aligned} \tag{2.11}$$

denklemi elde edilir. (2.10) denklemi ile (2.11) denklemi vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[k_g(\vec{T}\times\vec{g})+k_n(\vec{T}\times\vec{n})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=(1-\lambda k_{n_1})\left[(1-\lambda k_{n_1})k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2\right](\vec{T}_1\times\vec{n}_1)\\&\quad-\lambda\tau_{g_1}(-\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})(\vec{g}_1\times\vec{T}_1)\\&\quad+\left((1-\lambda k_{n_1})^2k_{g_1}-\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1-\lambda k_{n_1})\right)(\vec{T}_1\times\vec{g}_1)\\&\quad+\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)(\vec{g}_1\times\vec{n}_1)\end{aligned}$$

bunur. Buradan

$$\begin{aligned}\left[k_g\vec{n}-k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1\\&\quad-\left[(1-\lambda k_{n_1})^2k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})\right]\vec{g}_1\\&\quad+\left[k_{g_1}(1-\lambda k_{n_1})^2-\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1-\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}+\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{g_1}\right]\vec{n}_1\end{aligned} \tag{2.12}$$

eşitliği elde edilir. (2.12) denkleminde (2.8) denklemi yerine yazılırsa

$$\left[k_g\vec{n}-k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3=\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1$$
$$-\left(k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})\right)\vec{g}_1 \qquad (2.13)$$
$$-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{n}_1$$

denklemi bulunur. (2.13)denklemi ile (2.10) denklemi vektörel çarpılırsa

$$\left[k_g(\vec{T}\times\vec{n})-k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(-\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^3\tau_{g_1}^4\right)\vec{n}_1$$
$$-\left(k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^3-\lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1-\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

$$\left[k_g(\vec{T}\times\vec{n})-k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(-\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^3\tau_{g_1}^4-k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1-\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

bulunur. Buradan da

$$\left[-k_g\vec{g}-k_n\vec{n}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1-\lambda k_{n_1})\vec{g}_1 \qquad (2.14)$$
$$+\left((1-\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1$$

elde edilir. Şimdi (2.13) ve (2.14) denklemleri düzenlenirse

$$-k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}+k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{T}_1$$
$$-\left(k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{g}_1 \qquad (2.15)$$
$$-k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}_1$$

ve

$$-k_n k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}-k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{T}_1+k_n^2(1-\lambda k_{n_1})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{g}_1 \\ +k_n\left((1-\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1 \tag{2.16}$$

denklemleri elde edilir. Burada (2.15) denkleminden (2.16) denklemi çıkarılırsa

$$\begin{aligned}\left(k_g^2+k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=&\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1\\&-\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})\right)+(1-\lambda k_{n_1})k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1\\&-\left[k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4+k_n\left((1-\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})\right)\right]\vec{n}_1\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Bu denklemde, (2.10) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$\left((1-\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)=\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

denklemi ve (2.13) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})=0$$

denklemi yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(k_g^2+k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=&\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1\\&-\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})\right)+(1-\lambda k_{n_1})k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada $\vec{n}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalır. (2.10) denkleminde de $\vec{T}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalır. Dolayısıyla $\vec{g}$ vektörü $\vec{n}_1$ vektörü ile aynı doğrultudadır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi, bazı özel durumlar için, Mannheim partner $D$-eğrilerinin karekterizasyonlarını verelim: Kabul edelimki $x(s)$ bir asimptotik Mannheim $D$-eğri olsun. Bu taktirde (2.7) denkleminden aşağıdaki özel durumlar elde edilir:

**i)** $x_1(s_1)$ eğrisi bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ aşağıdaki denklem sağlanır,

$$\dot{\tau}_{g_1} = -\frac{\lambda \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1-\lambda k_{n_1}}.$$

**ii)** Kabul edelim ki $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri olsun. Bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisinin $k_{g_1}$ geodezik eğriliği ve $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\lambda \dot{\tau}_{g_1} = (1+\lambda^2 \tau_{g_1}^2) k_{g_1}$$

bağıntısı vardır. Bu durumda, $x_1(s_1)$ eğrisinin Frenet çatısı onun Darboux çatısıyla çakışır. Böylece $k_{g_1} = \kappa_1$ ve $\tau_{g_1} = \tau_1$ olur. Yani, $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ eğrileri asimptotik eğriler ise bu taktirde, Liu ve Wang'ın çalışması özel halde kalır.

**iii)** Eğer $x_1(s_1)$ eğrisi bir eğrilik çizgisi ise bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisi için eğrilikleri

$$k_{g_1} = 0 \;\; veya \;\; k_{n_1} = 1/\lambda$$

dır.

**Teorem 2.2.** $\{x, x_1\}$ çifti $E^3$ de Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde $\lambda \neq 0$ bir sabit olmak üzere, $x_1(s_1)$ eğrisinin geodezik eğriliği

$$k_{g_1} = -k_n\left[(1+\lambda k_g)^2 + \lambda^2 \tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + \left[\lambda \dot{\tau}_g (1+\lambda k_g) - \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

olur.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E^3$ de Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde tanım 2.1 den

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ parametresine göre türevi alınıp Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda \dot{\vec{g}} = \left[\vec{T} + \lambda k_g \vec{T} - \lambda \tau_g \vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}=\left[(1+\lambda k_g)\vec{T}-\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin $s_1$ e göre ikinci türevi alınıp Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}\right)=\frac{d}{ds_1}\left(\left[(1+\lambda k_g)\vec{T}-\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\left[\lambda\dot{k}_g\vec{T}+(1+\lambda k_g)(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1}-\lambda\dot{\tau}_g\vec{n}-\lambda\tau_g(-k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}\right]\frac{ds}{ds_1}$$
$$+\left[(1+\lambda k_g)\vec{T}-\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{d^2s}{ds_1^2}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)T+\left(k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\tau_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\right)g$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)n$$

elde edilir. $\vec{g}=\vec{n}_1$ olduğundan $k_{g_1}=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1\right\rangle=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}\right\rangle$ geodezik eğriliğini bulaım:

$$\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1=\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}=\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{T}\times\vec{g})$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{n}\times\vec{g})$$
$$=-\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}$$
$$+\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$

ve böylece

$$k_{g_1}=\Bigg\langle(1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T}-\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},$$
$$\left(-k_n(1+\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}+\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}\Bigg\rangle$$

$$k_{g_1} = -k_n \left[ (1+\lambda k_g)^2 + \lambda^2 \tau_g^2 \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 + \left[ \lambda \dot{\tau}_g (1+\lambda k_g) - \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 \qquad (2.16)$$

elde edilir. Buna bağlı olarak aşağıdaki özel durumlar verilebilir:

**i)** $x$ bir geodezik eğri, yani $k_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = -k_n \left(1+\lambda^2 \tau_g^2\right) \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 + \lambda \dot{\tau}_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 , \qquad (2.16')$$

**ii)** $x$ bir asimptotik eğri, yani $k_n = 0$ ise

$$k_{g_1} = \left[ \lambda \dot{\tau}_g (1+\lambda k_g) - \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 , \qquad (2.16'')$$

**iii)** $x$ bir eğrilik çizgisi, yani $\tau_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = -k_n (1+\lambda k_g)^2 \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 \qquad (2.17)$$

bulunur.

**Teorem 2.3.** $\{x, x_1\}$ çifti $E^3$ de Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$\tau_{g_1} = \tau_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2$$

dir.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E^3$ de Mannheim $D$-çifti olsun.

$$\tau_{g_1} = \left( \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right)$$

olduğu bilinir. Buna göre

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \dot{\vec{x}} \frac{ds}{ds_1} - \lambda \dot{\vec{n}}_1 = \left[ \dot{\vec{x}} - \lambda \dot{\vec{g}} \right] \frac{ds}{ds_1} = \left[ \vec{T} - \lambda(-k_g \vec{T} + \tau_g \vec{n}) \right] \frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{T}_1 = \left[ (1+\lambda k_g)\vec{T} - \lambda \tau_g \vec{n}) \right] \frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = (1+\lambda k_g) \frac{ds}{ds_1} \vec{T} - \lambda \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n}$$

eşitliği sağlanır. $\vec{g} = \vec{n}_1$ olduğundan

$$\frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \left[-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir. Bu son eşitliği $\vec{n}_1$ ile vektörel anlamda çarpalım:

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \vec{g} \times \left[-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \left[k_g\vec{n} + \tau_g\vec{T}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

Böylece $\tau_{g_1} = \left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1}\right)$ denkleminden

$$\tau_{g_1} = \left\langle \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right\rangle = \left\langle (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}, \tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T} + k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \right\rangle$$

$$\tau_{g_1} = (1+\lambda k_g)\tau_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle - \lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle$$

$$\tau_{g_1} = \tau_g(1+\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

$$\tau_{g_1} = \tau_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \tag{2.18}$$

bulunur. Dahası (2.6) denklemi (2.18) denkleminde yazılırsa

$$\tau_g\tau_{g_1} = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

elde edilir. Bu taktirde, (2.6) ve (2.18) eşitliklerinden şu sonuçları verebiliriz:

**Sonuç 2.1.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x(s)$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması arasındaki ilişki

$$\tau_g\tau_{g_1} = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

eşitliği ile verilir. Böylece $x$ Mannheim $D$-eğrisi bir eğrilik çizgisi iken $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrisi de bir eğrilik çizgisidir.

Benzer şekilde (2.6) ve (2.18) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_g}{\tau_{g_1}} = \frac{\cos^2\theta}{(1-\lambda k_{n_1})^2}$$

olduğunu bulabiliriz. Bu taktirde, eğer $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri, yani, $k_{n_1} = 0$ ise

$$\tau_g = \cos^2\theta\tau_{g_1} \tag{2.19}$$

olur.

**Sonuç 2.2.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Eğer $\theta$, $x$ ve $x_1$ eğrilerinin noktalarına karşılık gelen $\vec{T}$ ve $\vec{T}_1$ tanjant vektörleri olmak üzere, $x_1(s_1)$ bir asimtotik eğri ise bu taktirde $x(s)$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması ve $x_1(s_1)$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasındaki ilişki aşağıdaki

$$\tau_g = \cos^2\theta\tau_{g_1}$$

denklemiyle verilir.

**Teorem 2.4.** $\{x, x_1\}$ çifti $E^3$ de Mannheim partner $D$-eğri çifti olsun. Bu taktirde $\lambda \neq 0$ bir sabit olmak üzere

$$k_g - k_{n_1} = \lambda(k_g k_{n_1} + \tau_g \tau_{g_1})$$

dir.

**İspat.** $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için Tanım 2.1 den

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{2.20}$$

dir. (2.20) denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda(-k_{n_1}\vec{T}_1 - \tau_{g_1}\vec{g}_1) + \dot{\lambda}\vec{n}_1 \tag{2.21}$$

eşitliği elde edilir. $\lambda$ sıfırdan farklı olduğundan

$$\vec{T} = (1-\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}\vec{T}_1 - \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds}\vec{g}_1 \tag{2.22}$$

olur. $\theta$, $\vec{T}$ ve $\vec{T}_1$ arasındaki açı olmak üzere

$$\vec{T} = \cos\theta\,\vec{T}_1 + \sin\theta\,\vec{g}_1 \tag{2.23}$$

eşitliği vardır. (2.22) ve (2.23) denklemlerinden

$$\cos\theta = (1-\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}, \quad \sin\theta = -\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} \tag{2.24}$$

yazılabilir. $\vec{n}_1$ ve $\vec{g}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

olur. Bu denklemin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\vec{\dot{g}} = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \tag{2.25}$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = \cos\theta\,\vec{T} + \sin\theta\,\vec{n} \tag{2.26}$$

olduğunu biliyoruz, (2.25) ve (2.26) denklemlerinden

$$\cos\theta = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}, \quad \sin\theta = -\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1} \tag{2.27}$$

yazılabilir. (2.24) ve (2.27) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}(1-\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds} = 1 + \lambda(k_g - k_{n_1}) - \lambda^2 k_g k_{n_1}, \\ \sin^2\theta &= \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} = \lambda^2\tau_g\tau_{g_1} \end{aligned} \tag{2.28}$$

(2.28) deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$k_g - k_{n_1} = \lambda(k_g k_{n_1} - \tau_g\tau_{g_1}) \tag{2.29}$$

bulunur.

Teorem 2.4 den aşağıdaki özel durumları verebiliriz: $\{x, x_1\}$ çifti bir Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde,

**i)** Eğer $x_1$ bir asimtotik eğri ise, bu taktirde

$$k_g = -\lambda\tau_g\tau_{g_1},$$

**ii)** Eğer $x$ ve $x_1$ eğrileri eğrilik çizgisi ise, bu taktirde

$$k_g - k_{n_1} = \lambda k_g k_{n_1},$$

**iii)** Eğer $x$ bir geodezik eğrilik ise, bu taktirde

$$k_{n_1} = \lambda\tau_g\tau_{g_1}$$

elde edilir.

**Teorem 2.5.** $\{x, x_1\}$ çifti $E^3$ de Mannheim partner $D$-eğriler olsun. Bu taktirde aşağıdaki denklemler sağlanır:

**i)** $k_{g_1} = -k_n \dfrac{ds}{ds_1} - \dfrac{d\theta}{ds_1}$,

**ii)** $\tau_g \dfrac{ds}{ds_1} = -k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta$,

**iii)** $k_g \dfrac{ds}{ds_1} = k_{n_1} \cos\theta + \tau_{g_1} \sin\theta$,

**iv)** $\tau_{g_1} = \left(k_g \sin\theta + \tau_g \cos\theta\right) \dfrac{ds}{ds_1}$.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E^3$ de Mannheim partner $D$-eğriler olsun.

**i)** $\langle \vec{T}, \vec{T}_1 \rangle = \cos\theta$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınıp, Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{T}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} \vec{g}_1 + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = \cos\theta\, \vec{T} + \sin\theta\, \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \sin\theta\, \vec{T} - \cos\theta\, \vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ in lineer bağımlı olmasını kullanarak

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \cos\theta \vec{T} + \sin\theta\, \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} (\sin\theta\, \vec{T} - \cos\theta\, \vec{n}) + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle k_g \frac{ds}{ds_1} \vec{g} + k_n \frac{ds}{ds_1} \vec{n}, \cos\theta \vec{T} + \sin\theta \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} \sin\theta \vec{T} - k_{g_1} \cos\theta \vec{n} + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_n \sin\theta \frac{ds}{ds_1} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle + k_{g_1} \sin\theta \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_{g_1} = -k_n \frac{ds}{ds_1} - \frac{d\theta}{ds_1}$$

bulunur.

**ii)** $\langle \vec{n}, \vec{n}_1 \rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınıp, Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (-k_n\vec{T}-\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{n},-k_{n_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{g}_1\right\rangle=0$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1=\cos\theta\,\vec{T}+\sin\theta\,\vec{n},\quad \vec{g}_1=\sin\theta\,\vec{T}-\cos\theta\,\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ in lineer bağımlı olması dikkate alınırsa

$$\left\langle (-k_n\vec{T}-\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{n},-k_{n_1}(\cos\theta\,\vec{T}+\sin\theta\,\vec{n})-\tau_{g_1}(\sin\theta\,\vec{T}-\cos\theta\,\vec{n})\right\rangle=0$$

$$\left\langle -k_n\frac{ds}{ds_1}\vec{T}-\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{g},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{n},(-\cos\theta\,k_{n_1}-\tau_{g_1}\sin\theta)\vec{T}+(-k_{n_1}\sin\theta+\tau_{g_1}\cos\theta)\vec{n}\right\rangle=0$$

$$-\tau_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle+(-k_{n_1}\sin\theta+\tau_{g_1}\cos\theta)\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle=0$$

$$\tau_g\frac{ds}{ds_1}=-k_{n_1}\sin\theta+\tau_{g_1}\cos\theta$$

elde edilir.

**iii)** $\left\langle \vec{T},\vec{n}_1\right\rangle=0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınıp, Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},-k_{n_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{g}_1\right\rangle=0$$

yazılabilir.

$$\vec{T}_1=\cos\theta\,\vec{T}+\sin\theta\,\vec{n},\quad \vec{g}_1=\sin\theta\,\vec{T}-\cos\theta\,\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ in lineer bağımlı olmasını kullanarak

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},-k_{n_1}\left(\cos\theta\,\vec{T}+\sin\theta\,\vec{n}\right)-\tau_{g_1}\left(\sin\theta\,\vec{T}-\cos\theta\,\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{T},-k_{n_1}\left(\cos\theta\,\vec{T}+\sin\theta\,\vec{n}\right)-\tau_{g_1}\left(\sin\theta\,\vec{T}-\cos\theta\,\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle+(-k_{n_1}\cos\theta-\tau_{g_1}\sin\theta)\left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}=k_{n_1}\cos\theta+\tau_{g_1}\sin\theta$$

denklemi elde edilir.

**iv)** $\langle \vec{g}, \vec{g}_1 \rangle = 0$ denkleminin $s_1$ parametresine göre türevi alınıp, Darboux türev formülleri kulanılırsa

$$\left\langle (-k_g \vec{T} + \tau_g \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{g}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{g}, -k_{g_1} \vec{T}_1 + \tau_{g_1} \vec{n}_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = \cos\theta \vec{T} + \sin\theta \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \sin\theta \vec{T} - \cos\theta \vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı olması dikkate alınırsa

$$\left\langle (-k_g \vec{T} + \tau_g \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \sin\theta\, \vec{T} - \cos\theta\, \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{g}, -k_{g_1} \left( \cos\theta\, \vec{T} + \sin\theta\, \vec{n} \right) + \tau_{g_1} \vec{n}_1 \right\rangle = 0$$

$$\left\langle -k_g \frac{ds}{ds_1} \vec{T} + \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n}, \sin\theta\, \vec{T} - \cos\theta\, \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{g}, -k_{g_1} \cos\theta\, \vec{T} - k_{g_1} \sin\theta\, \vec{n} + \tau_{g_1} \vec{g} \right\rangle = 0$$

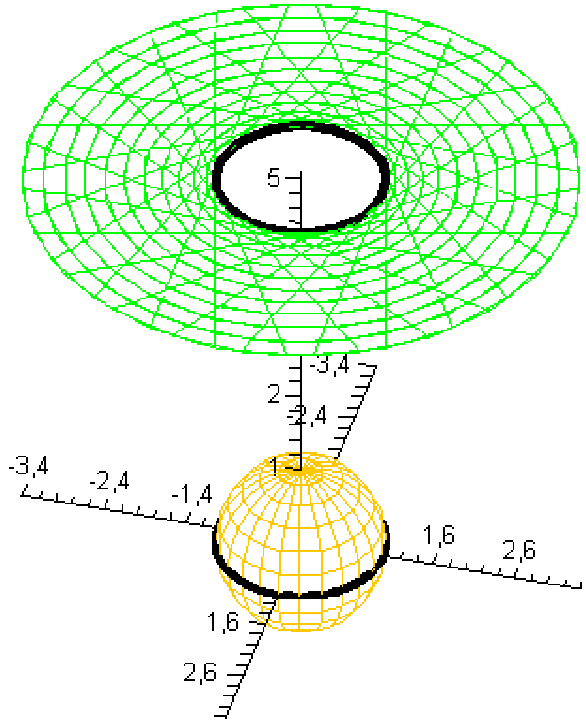
$$-k_g \sin\theta \frac{ds}{ds_1} \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle - \tau_g \cos\theta \frac{ds}{ds_1} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle + \tau_{g_1} \langle \vec{g}, \vec{g} \rangle = 0$$

$$\tau_{g_1} = \left( k_g \sin\theta + \tau_g \cos\theta \right) \frac{ds}{ds_1}$$

bulunur.

Bulduğumuz bu eşitliklerde $x$ ve $x_1$ eğrileri özel olarak asimptotik eğriler alındığında [22] de bulunan sonuçlar özel hal olarak elde edilmiştir.

**Örnek 1.** $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ eğrisi $S(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$ birim küresi üzerinde büyük çemberdir. $x(\theta)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisi $x_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \lambda)$ eğrisidir ve $x_1(\theta)$ eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu $S_1(\theta, v) = (\cos\theta, \sin\theta, \lambda) + v(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ regle yüzeyi üzerinde yatar. Bu taktirde $\{x, x_1\}$ çifti Mannheim $D$-çiftidir (Şekil 7).




**Şekil 7**

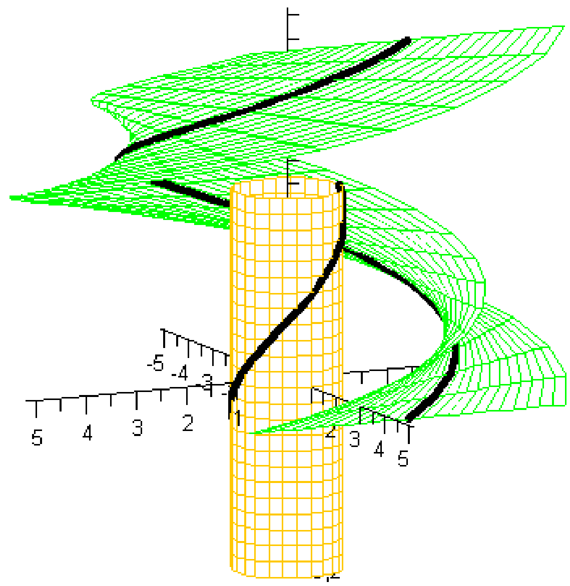
**Örnek 2.** $S(\theta,\varphi)=(\cos\theta,\sin\theta,\ \varphi)$ dik dairesel silindiri üzerinde $x(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,\theta)$ helis eğrisi verilsin. $a$ ve $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x(\theta)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisi,

$$S_1(\theta,v)=\left(\cos\theta+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sin\theta+av\cos\theta,\ \sin\theta-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\cos\theta+av\sin\theta,\ \theta+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

helikoid yüzeyi üzerinde yatan

$$x_1(\theta)=\left(\cos\theta+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sin\theta,\ \sin\theta-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\cos\theta,\theta+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

eğrisidir. Bu taktirde $\{x,x_1\}$ çifti Mannheim $D$-çiftidir (Şekil 8).




**Şekil 8**

# III. BÖLÜM
# $E_1^3$ MINKOWSKI UZAYINDA MANNHEIM PARTNER $D$-EĞRİLERİ

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayındaki yönlendirilmiş $S$ ve $S_1$ yüzeyleri üzerindeki $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ Mannheim partner $D$-eğrilerinin tanımını ve karakterizasyonlarını vereceğiz.

**Tanım 3.1.** $S$ ve $S_1$, Minkowski 3-uzayında yönlendirilmiş yüzeyler olsun. $S$ ve $S_1$ üzerinde yatan yay uzunluğu ile verilmiş parametre eğrileri, sırasıyla, $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ olsun. Sırasıyla $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ ve $\{\vec{T}_1,\vec{g}_1,\vec{n}_1\}$ ile gösterilsin. Eğer, $x$ ve $x_1$ eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki $x$ eğrisinin $\vec{g}$ geodezik normali ile $x_1$ eğrisinin $\vec{n}_1$ yüzey normali çakışırsa, bu taktirde $x$ bir Mannheim $D$-eğrisi ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisidir. Bu taktirde, $\{x,x_1\}$ çiftine Minkowski 3-uzayında bir Mannheim $D$-çifti denir.

Bu tanıma göre 5 durum söz konusudur.

**1. Durum.** $\{x,x_1\}$, Minkowski 3-uzayında Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $S$ yüzeyi spacelike, $x$ eğrisi spacelike iken $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1$ eğrisi spacelike olur. Bu durumda, $x$ ve $x_1$ spacelike eğrilerine karşılık gelen Darboux türev formülleri, sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix}\dot{\vec{T}}\\ \dot{\vec{g}}\\ \dot{\vec{n}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_g & k_n\\ -k_g & 0 & \tau_g\\ k_n & \tau_g & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{T}\\ \vec{g}\\ \vec{n}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\dot{\vec{T}}_1\\ \dot{\vec{g}}_1\\ \dot{\vec{n}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_{g_1} & -k_{n_1}\\ k_{g_1} & 0 & \tau_{g_1}\\ k_{n_1} & \tau_{g_1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{T}_1\\ \vec{g}_1\\ \vec{n}_1\end{pmatrix}.$$

Çatı elemanlarının vektörel çarpımları da, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\vec{T}\times\vec{g}&=\vec{n} & \vec{T}_1\times\vec{g}_1&=-\vec{n}_1\\ \vec{g}\times\vec{n}&=-\vec{T}\ , & \vec{g}_1\times\vec{n}_1&=-\vec{T}_1\\ \vec{n}\times\vec{T}&=-\vec{g} & \vec{n}_1\times\vec{T}_1&=\vec{g}_1\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

**Teorem 3.1.1.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi spacelike, $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ eğrileri Mannheim partner $D$-eğrileridir. $\Leftrightarrow$ $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x_1$ eğrisinin $k_{n_1}$, $k_{g_1}$ ve $\tau_{g_1}$ eğrilikleri ile $x$ eğrisinin $k_n$ normal eğriliği arasında

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n \frac{1+\lambda k_{n_1}}{\cosh\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right]$$

bağıntısı vardır.

**İspat.** Kabul edelim ki $x(s)$ bir spacelike Mannheim $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde, tanımdan $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.1.1}$$

yazılabilir. Şimdi, bu denklemin $s_1$ yay parametresine göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kulanılırsa

$$\frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\vec{x}_1}{ds_1} + \dot{\lambda}(s_1)\vec{n}_1(s_1) + \lambda(s_1)\dot{\vec{n}}_1(s_1)$$

$$T\frac{ds}{ds_1} = T_1 + \dot{\lambda}\,\vec{n}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 + \dot{\lambda}\,\vec{n}_1$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı $\vec{n}_1 = \vec{g}$ ile iç çarpılırsa

$$\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{T}, \vec{g}\right\rangle = (1+\lambda k_{n_1})\left\langle \vec{T}_1, \vec{n}_1\right\rangle + \dot{\lambda}\left\langle \vec{n}_1, \vec{n}_1\right\rangle + \lambda\tau_{g_1}\left\langle \vec{g}_1, \vec{n}_1\right\rangle$$

bulunur. Buradan $\dot{\lambda} = 0$, yani $\lambda$ bir sabittir. Dolayısıyla

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda\dot{\vec{n}}_1 = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) \tag{3.1.2}$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.1.3}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\vec{T} = \cosh\theta\,\vec{T}_1 + \sinh\theta\,\vec{g}_1 \tag{3.1.4}$$

denkleminin sağlandığı biliniyor, (3.1.4) denkleminin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{ds}{ds_1}\frac{d\vec{T}}{ds}=(k_{g_1}\vec{g}_1-k_{n_1}\vec{n}_1)\cosh\theta+\dot{\theta}\sinh\theta\vec{T}_1+(k_{g_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{n}_1)\sinh\theta+\dot{\theta}\cosh\theta\ \vec{g}_1$$

$$(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1}=(\dot{\theta}+k_{g_1})\sinh\theta\vec{T}_1+(\dot{\theta}+k_{g_1})\cosh\theta\,\vec{g}_1+(-k_{n_1}\cosh\theta+\tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{n}_1$$

elde edilir.

$$\vec{n}=\sinh\theta\ \vec{T}_1+\cosh\theta\,\vec{g}_1$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$(k_g\vec{g}+k_n\sinh\theta\vec{T}_1+k_n\cosh\theta\vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1}=(\dot{\theta}+k_{g_1})\sinh\theta\vec{T}_1+(\dot{\theta}+k_{g_1})\cosh\theta\vec{g}_1$$
$$+(-k_{n_1}\cosh\theta+\tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{n}_1$$

olur. $x$ ve $x_1$, Mannheim partner $D$-eğrileri olduklarından $\vec{n}$ ile $\vec{g}_1$ lineer bağımlıdır. Yani, eşitliğin her iki tarafındaki $\vec{T}_1$ ve $\vec{n}_1$ in katsayıları eşittir:

$$\dot{\theta}+k_{g_1}=k_n\frac{ds}{ds_1}$$

eşitliği sağlandığından

$$\dot{\theta}=k_n\frac{ds}{ds_1}-k_{g_1} \tag{3.1.5}$$

olur. (3.1.4) , (3.1.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\cosh\theta\vec{T}_1+\sinh\theta\,\vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1}=(1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1+\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

veya

$$\cosh\theta\frac{ds}{ds_1}=(1+\lambda k_{n_1}),\quad \sinh\theta\frac{ds}{ds_1}=\lambda\tau_{g_1}$$

$$\frac{ds}{ds_1}=\frac{1+\lambda k_{n_1}}{\cosh\theta}=\frac{\lambda\tau_{g_1}}{\sinh\theta},\quad \tanh\theta=\frac{\lambda\tau_{g_1}}{1+\lambda k_{n_1}} \tag{3.1.6}$$

elde edilir. (3.1.6) eşitliklerinden bulunan

$$\lambda\tau_{g_1}=\tanh\theta\ (1+\lambda k_{n_1})$$

denkleminin $s_1$ parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1}=\left(1-\frac{\lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})^2}\right)\dot{\theta}(1+\lambda k_{n_1})+\left(\frac{\lambda\tau_{g_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right)\lambda\dot{k}_{n_1}$$

veya

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n \frac{1+\lambda k_{n_1}}{\cosh\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right] \tag{3.1.7}$$

bulunur. (3.1.6) denklemindeki değerler (3.1.7) denkleminde kullanılırsa,

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1} + \left((1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2\right)k_{g_1} = k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \tag{3.1.8}$$

halini alır.

Tersine, $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.1.9}$$

bir eğri olsun. Bu denklemin iki kere türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda\,\dot{\vec{n}}_1 = \vec{T}_1 + \lambda\left(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1\right)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.1.10}$$

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T} &= \lambda\dot{k}_{n_1}\vec{T}_1 + (1+\lambda k_{n_1})(k_{g_1}\vec{g}_1 - k_{n_1}\vec{n}_1)\\ &\quad + \lambda\dot{\tau}_{g_1}\vec{g}_1 + \lambda\tau_{g_1}(k_{g_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{n}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T} + (k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 &= (\lambda\dot{k}_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}k_{g_1})\vec{T}_1 + \left((1+\lambda k_{n_1})k_{g_1} + \lambda\dot{\tau}_{g_1}\right)\vec{g}_1\\ &\quad + \left(-(1+\lambda k_{n_1})k_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}^2\right)\vec{n}_1\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

elde edilir. (3.1.10) ile (3.1.11) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[k_g(\vec{T}\times\vec{g}) + k_n(\vec{T}\times\vec{n})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 &= (1+\lambda k_{n_1})\left[-(1+\lambda k_{n_1})k_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}^2\right](\vec{T}_1\times\vec{n}_1)\\ &\quad + \lambda\tau_{g_1}(+\lambda\dot{k}_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}k_{g_1})(\vec{g}_1\times\vec{T}_1)\\ &\quad + \left((1+\lambda k_{n_1})^2 k_{g_1} + \lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)(\vec{T}_1\times\vec{g}_1)\\ &\quad + \left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) + \lambda^2\tau_{g_1}^3\right)(\vec{g}_1\times\vec{n}_1)\end{aligned}$$

$$\left[k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1$$
$$-\left[-(1+\lambda k_{n_1})^2k_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right]\vec{g}_1 \quad (3.1.12)$$
$$+\left[-k_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}+\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{g_1}\right]\vec{n}_1$$

bulunur. (3.1.8) (3.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1$$
$$-\left(-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{g}_1 \quad (3.1.13)$$
$$-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{n}_1$$

olur. Ayrıca, (3.1.13) ve (3.1.10) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\left[k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4\right)\vec{n}_1$$
$$+\left(-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

$$=k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1$$
$$+\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$

$$\left[k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1 \quad (3.1.14)$$
$$+\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1$$

bulunur. . Şimdi (3.1.13) ve (3.1.14) denklemleri düzenlenirse

$$k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}+k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{T}_1$$
$$-\left(-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{g}_1 \quad (3.1.15)$$
$$-k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}_1$$

ve

$$
\begin{aligned}
k_n k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{g} + k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n} = \lambda \tau_{g_1} k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \vec{T}_1 + k_n^2 (1+\lambda k_{n_1}) \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \vec{g}_1 \\
+ k_n \left((1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2 \tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda \tau_{g_1}^2 - k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right) \vec{n}_1
\end{aligned} \tag{3.1.16}
$$

bulunur. Burada, (3.1.15) denkleminden (3.1.16) denklemi çıkarılırsa

$$
\begin{aligned}
\left(k_g^2 - k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n} = & \left[ k_g \frac{ds}{ds_1}\left(\lambda \tau_{g_1} k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2 \tau_{g_1}^3\right) - \lambda \tau_{g_1} k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \right] \vec{T}_1 \\
& - \left[ k_g \frac{ds}{ds_1}\left(-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2 + \lambda \tau_{g_1}^2 (1+\lambda k_{n_1})\right) + (1+\lambda k_{n_1}) k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \right] \vec{g}_1 \\
& - \left[ k_n k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 + k_n \left((1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2 \tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda \tau_{g_1}^2 - k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right) \right] \vec{n}_1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklemde, (3.1.10) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$
\left(\lambda^2 \tau_{g_1}^2 - (1+\lambda k_{n_1})^2\right) = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2
$$

ve (3.1.13) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$
k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda \tau_{g_1}^2 + k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) = 0
$$

eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(k_g^2 - k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n} = & \left[ k_g \frac{ds}{ds_1}\left(\lambda \tau_{g_1} k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2 \tau_{g_1}^3\right) - \lambda \tau_{g_1} k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \right] \vec{T}_1 \\
& - \left[ k_g \frac{ds}{ds_1}\left(-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2 + \lambda \tau_{g_1}^2 (1+\lambda k_{n_1})\right) + (1+\lambda k_{n_1}) k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \right] \vec{g}_1
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $\vec{n}$ vektörü, $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde ve (2.10) denkleminde de $\vec{T}$ vektörü, $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalır. Dolayısıyla, $\vec{g}$ vektörü $\vec{n}_1$ vektörü ile aynı doğrultuda olur. Bu, $x$ ve $x_1$ in Mannheim partner $D$-eğrileri olduklarını gösterir. ■

Şimdi bazı özel durumlar için Mannheim partner $D$-eğrilerinin karekterizasyonlarını verelim: Kabul edelim ki $x(s)$, bir asimptotik Mannheim $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde, (3.1.7) denkleminin özel durumları şu şekilde verilir:

**i)** $x_1(s_1)$, bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{\lambda \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}$$

eşitliği gerçeklenir.

**ii)** Kabul edelim ki $x_1(s_1)$, bir asimptotik eğri olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisinin $k_{g_1}$ geodezik eğriliği ve $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\lambda \dot{\tau}_{g_1} = -k_{g_1}(1-\lambda^2 \tau_{g_1}^2)$$

bağıntısı vardır. Bu, Liu ve Wang [19] 'ın bulduğu eşitliktir.

**iii)** Eğer, $x_1(s_1)$ eğrisi bir eğrilik çizgisi olsun. Bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisi için

$$k_{g_1} = 0 \ \ veya \ \ k_{n_1} = -1/\lambda$$

dir.

**Teorem 3.1.2.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği, geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik eğriliği arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$k_{g_1} = k_n\left[(1+\lambda k_g)^2 - \lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + \left[-\lambda\dot{\tau}_g(1+\lambda k_g) + \lambda^2\tau_g \dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $R_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

denkleminin $s_1$ parametresine göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\dot{\vec{g}} = \left[\vec{T} + \lambda k_g \vec{T} - \lambda\tau_g \vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \left[(1+\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir. Bu denklemin türevi alınıp, Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}\right)=\frac{d}{ds_1}\left(\left[(1+\lambda k_g)\vec{T}-\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\left[\lambda\dot{k}_g\vec{T}+(1+\lambda k_g)(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1}-\lambda\dot{\tau}_g\vec{n}-\lambda\tau_g(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}\right]\frac{ds}{ds_1}$$
$$+\left[(1+\lambda k_g)\vec{T}-\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{d^2s}{ds_1^2}$$
$$=\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}+\left(k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\tau_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\right)\vec{g}$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$

bulunur. $\vec{g}=\vec{n}_1$ ve $k_{g_1}=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1\right\rangle$ eşitliği sağlandığından

$$k_{g_1}=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1\right\rangle=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}\right\rangle$$

yazılabilir.

$$\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1=\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}=\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{T}\times\vec{g})$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{n}\times\vec{g})$$

$$\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1=\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}=\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}$$
$$+\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$k_{g_1}=\Bigg\langle(1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T}-\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},$$
$$\left(k_n(1+\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}+\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1+\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}\Bigg\rangle$$

ve $\langle\vec{n},\vec{n}\rangle=-1$ olduğu dikkate alınırsa

$$k_{g_1}=k_n\left[(1+\lambda k_g)^2-\lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3+\left[-\lambda\dot{\tau}_g(1+\lambda k_g)+\lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \quad (3.1.16)$$

elde edilir. Buna göre, aşağıdaki özel durumlar verilebilir:

**i)** $x$ bir geodezik eğri, yani $k_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = k_n\left(1-\lambda^2\tau_g^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 - \lambda\dot{\tau}_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \quad (3.1.16')$$

**ii)** $x$ bir asimptotik çizgi, yani $k_n = 0$ ise

$$k_{g_1} = \left[-\lambda\dot{\tau}_g(1+\lambda k_g) + \lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \quad (3.1.16'')$$

**iii)** $x$ bir eğrilik çizgisi, yani $\tau_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = k_n(1+\lambda k_g)^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \quad (3.1.17)$$

bulunur.

**Teorem 3.1.3.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik burulması, geodezik eğriliği ve $x_1$ eğrisinin geodezik burulmaları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\tau_{g_1} = -\tau_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

denkleminin $s_1$ parametresine göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1}\dot{\vec{x}} - \lambda\dot{\vec{n}}_1 = \left[\dot{\vec{x}} - \lambda\dot{\vec{g}}\right]\frac{ds}{ds_1} = \left[\vec{T} - \lambda(-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{T}_1 = \left[(1+\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}$$

elde edilir. Buradan $\vec{g} = \vec{n}_1$ olduğundan

$$\frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \left[-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

eşitliği de sağlanır. Bu eşitlik $\vec{n}_1$ ile vektörel çarpılırsa

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \vec{g} \times \left[ -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{n} \right] \frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \left[ k_g \vec{n} - \tau_g \vec{T} \right] \frac{ds}{ds_1}$$

bulunur. Bu değerler, $\tau_{g_1} = \left\langle \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right\rangle$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\tau_{g_1} = \left\langle \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right\rangle = \left\langle (1+\lambda k_g) \frac{ds}{ds_1} \vec{T} - \lambda \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n}, -\tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{T} + k_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n} \right\rangle$$

$$\tau_{g_1} = -(1+\lambda k_g)\tau_g \left( \frac{ds_1}{ds} \right)^2 \left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle - \lambda \tau_g k_g \left( \frac{ds_1}{ds} \right)^2 \left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle$$

elde edilir. $\left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle = -1$ olduğundan

$$\tau_{g_1} = -\tau_g (1+\lambda k_g) \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 + \lambda \tau_g k_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2$$

$$\tau_{g_1} = -\tau_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 \qquad (3.1.18)$$

bulunur. Ayrıca (3.1.6) denklemi (3.1.18) denkleminde yazılırsa

$$\tau_g \tau_{g_1} = -\frac{\sinh^2 \theta}{\lambda^2}.$$

elde edilir. Buna gore aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

**Sonuç 3.1.1.** $x$ bir Mannheim $D$-eğrisi ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde, $x_1$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g \tau_{g_1} = -\frac{\sinh^2 \theta}{\lambda^2}$$

bağıntısı vardır. Böylece $x$ Mannheim $D$-eğrisi eğrilik çizgisi iken $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrisi de bir eğrilik çizgisidir.

Benzer şekilde, (3.1.6) ve (3.1.18) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_{g_1}}{\tau_g} = -\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2}{\cosh^2\theta}$$

yazabiliriz. Bu taktirde, eğer $x_1(s_1)$ bir asimptotik eğri, yani, $k_{n_1} = 0$ ise

$$\tau_g = -\cosh^2\theta\tau_{g_1} \tag{3.1.19}$$

olur.

**Sonuç 3.1.2.** $x$ bir Mannheim $D$-eğrisi ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Eğer $\theta$, $x$ ve $x_1$ eğrilerinin noktalarına karşılık gelen noktalarındaki $\vec{T}$ ve $\vec{T}_1$ teğet vektörleri arasındaki açı olmak üzere, $x_1(s_1)$ bir asimtotik eğri ise bu taktirde $x(s)$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması ve $x_1(s_1)$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasındaki

$$\tau_g = -\cosh^2\theta\tau_{g_1}.$$

bağıntısı geçerlidir.

**Teorem 3.1.4.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, geodezik burulması ile $x_1$ eğrisinin normal eğriliği, geodezik burulması arasında

$$k_g - k_{n_1} = \lambda(-k_g k_{n_1} + \tau_g \tau_{g_1})$$

bağıntısı geçerlidir.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti, $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun. $\lambda(s_1)$ belli bir fonksiyon olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.1.20}$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ yayına göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) + \dot{\lambda}\vec{n}_1 \tag{3.1.21}$$

elde edilir. $\lambda$, sıfırdan farklı bir sabit düşünülürse

$$\vec{T} = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds}\vec{g}_1 \tag{3.1.22}$$

olur. Buna göre

$$\vec{T} = \cosh\theta\vec{T}_1 + \sinh\theta\vec{g}_1 \tag{3.1.23}$$

yazılabilir. (3.1.22) ve (3.1.23) denklemlerinden

$$\cosh\theta = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}, \quad \sinh\theta = \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} \tag{3.1.24}$$

elde edilir. $\vec{n}_1$ ve $\vec{g}$ lineer bağımlı olduklarından

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\dot{\vec{g}} = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \tag{3.1.25}$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n} \tag{3.1.26}$$

olduğundan, (3.1.25) ve (3.1.26) denklemlerinden

$$\cosh\theta = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}, \quad \sinh\theta = \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1} \tag{3.1.27}$$

elde edilir. (3.1.24) ve (3.1.27) denklemlerinden

$$\cos^2 h\theta = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}(1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds} = 1 + \lambda(k_g + k_{n_1}) + \lambda^2 k_g k_{n_1}$$

$$\sin^2 h\theta = \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} = \lambda^2\tau_g\tau_{g_1}$$

ve

$$\cos^2 h\theta - \sin^2 h\theta = 1 = 1 + \lambda(k_g + k_{n_1}) + \lambda^2(k_g k_{n_1} - \tau_g\tau_{g_1})$$

$$k_g - k_{n_1} = \lambda(-k_g k_{n_1} + \tau_g\tau_{g_1}) \tag{3.1.28}$$

bulunur. Teorem (3.1.4) den aşağıdaki özel durumları verebiliriz, $\{x, x_1\}$ çifti bir Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde,

**i)** Eğer, $x_1$ bir asimtotik eğri ise, bu taktirde

$$k_g = \lambda\tau_g\tau_{g_1},$$

**ii)** Eğer, $x$ ve $x_1$ bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde

$$k_g - k_{n_1} = -\lambda k_g k_{n_1},$$

**iii)** Eğer, $x$ bir geodezik eğrilik ise, bu taktirde

$$k_{n_1} = -\lambda \tau_g \tau_{g_1}$$

bulunur.

**Teorem 3.1.5.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike, $S_1$ yüzeyi timelike ve $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere; $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ ve $x_1$ eğrilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları için aşağıdaki denklemler gerçeklenir:

**i)** $k_{g_1} = k_n \dfrac{ds}{ds_1} - \dfrac{d\theta}{ds_1}$

**ii)** $\tau_g \dfrac{ds}{ds_1} = -k_{n_1} \sinh\theta + \tau_{g_1} \cosh\theta$

**iii)** $k_g \dfrac{ds}{ds_1} = -k_{n_1} \cosh\theta + \tau_{g_1} \sinh\theta$

**iv)** $\tau_{g_1} = \left(-k_g \sin\theta + \tau_g \cos\theta\right) \dfrac{ds}{ds_1}$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

**i)** $\left\langle \vec{T}, \vec{T}_1 \right\rangle = \cosh\theta$ eşitliğinin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{T}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} \vec{g}_1 - k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \sinh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\vec{T}_1 = \cosh\theta \vec{T} - \sinh\theta \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = -\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n}$$

denklemi ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \cosh\theta \vec{T} - \sinh\theta \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} (-\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n}) + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \sinh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle k_g \frac{ds}{ds_1}\vec{g} + k_n \frac{ds}{ds_1}\vec{n}, \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}\right\rangle + \left\langle \vec{T}, -k_{g_1}\sinh\theta\vec{T} + k_{g_1}\cosh\theta\vec{n} + k_{n_1}\vec{n}_1\right\rangle = \sinh\theta\frac{d\theta}{ds_1}$$

$$-k_n \sinh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle - k_{g_1}\sinh\theta\left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle = \sinh\theta\frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. $\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle = -1$ olduğundan

$$k_{g_1} = k_n \frac{ds}{ds_1} - \frac{d\theta}{ds_1}$$

olur.

**ii)** $\left\langle \vec{n},\vec{n}_1\right\rangle = 0$ eşitliğinin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_n\vec{T} + \tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1\right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1\right\rangle = 0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_n\vec{T} + \tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1\right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1}(\cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}) + \tau_{g_1}(-\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n})\right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_n\frac{ds}{ds_1}\vec{T} + \tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{g}, \vec{g}\right\rangle + \left\langle \vec{n}, (k_{n_1}\cosh\theta - \tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{T} + (-k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{n}\right\rangle = 0$$

$$\tau_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle + (-k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta)\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle = 0$$

bulunur. $\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle = -1$ olduğundan

$$\tau_g\frac{ds}{ds_1} = -k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta$$

olur.

**iii)** $\left\langle \vec{T},\vec{n}_1\right\rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{g}_1\right\rangle=0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1=\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n},\quad \vec{g}_1=-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}$$

eşitliklerini ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sin\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle+(k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta)\left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}=-k_{n_1}\cosh\theta+\tau_{g_1}\sinh\theta$$

bulunur.

**iv)** $\left\langle \vec{g},\vec{g}_1\right\rangle=0$ denkleminin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}_1\right\rangle+\left\langle \vec{g},k_{g_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle=0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1=\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n},\quad \vec{g}_1=-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1},-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right\rangle+\left\langle \vec{g},k_{g_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle=0$$

$$\left\langle -k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right\rangle+\left\langle \vec{g},k_{g_1}\cosh\theta\vec{T}-k_{g_1}\sinh\theta\vec{n}+\tau_{g_1}\vec{g}\right\rangle=0$$

$$k_g\sinh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle+\tau_g\cosh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle+\tau_{g_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle=0$$

bulunur. $\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle=-1$ olduğundan

$$\tau_{g_1} = \left(-k_g \sin\theta + \tau_g \cos\theta\right)\frac{ds}{ds_1}$$

olur.

**2. Durum.** $\{x, x_1\}$ çifti Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $S$ yüzeyi ile $x$ eğrisi spacelike iken $S_1$ yüzeyi ile $x_1$ eğrisi timelike olabilir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\vec{T}}_1 \\ \dot{\vec{g}}_1 \\ \dot{\vec{n}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_{g_1} & k_{n_1} \\ k_{g_1} & 0 & -\tau_{g_1} \\ k_{n_1} & \tau_{g_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{T}_1 \\ \vec{g}_1 \\ \vec{n}_1 \end{pmatrix}$$

ve çatı elemanlarının vektörel çarpımları da sırasıyla

$$\begin{array}{ll} \vec{T}\times\vec{g} = \vec{n} & \vec{T}_1\times\vec{g}_1 = -\vec{n}_1 \\ \vec{g}\times\vec{n} = -\vec{T}\ , & \vec{g}_1\times\vec{n}_1 = \vec{T}_1 \\ \vec{n}\times\vec{T} = -\vec{g} & \vec{n}_1\times\vec{T}_1 = -\vec{g}_1 \end{array}$$

biçiminde verilir.

**Teorem 3.2.1.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun $\Leftrightarrow$ $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x_1$ eğrisinin $k_{n_1}$ normal eğriliği, $k_{g_1}$ geodezik eğriliği, $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $k_n$ normal eğriliği arasında aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n\frac{1+\lambda k_{n_1}}{\sinh\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right]$$

**İspat.** Kabul edelim ki $x(s)$ bir Mannheim $D$-eğrisidir. Bu taktirde, tanımdan bir $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.2.1}$$

yazılabilir. Şimdi bu denklemin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\vec{x}_1}{ds_1} + \dot{\lambda}(s_1)\vec{n}_1(s_1) + \lambda(s_1)\dot{\vec{n}}_1(s_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \dot{\lambda}\vec{n}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \dot{\lambda}\vec{n}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

elde edilir. Bu denklem $\vec{n}_1 = \vec{g}$ ile iç çarpılırsa

$$\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{T},\vec{g}\right\rangle = (1+\lambda k_{n_1})\left\langle \vec{T}_1,\vec{n}_1\right\rangle + \dot{\lambda}\left\langle \vec{n}_1,\vec{n}_1\right\rangle + \lambda\tau_{g_1}\left\langle \vec{g}_1,\vec{n}_1\right\rangle$$

ve buradan $\dot{\lambda}=0$, yani $\lambda$ bir sabittir. O halde

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda\vec{n}_1 = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) \tag{3.2.2}$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.2.3}$$

yazılır.

$$\vec{T} = \sinh\theta\,\vec{T}_1 + \cosh\theta\,\vec{g}_1 \tag{3.2.4}$$

denkleminin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = (k_{g_1}\vec{g}_1 + k_{n_1}\vec{n}_1)\sinh\theta + \dot{\theta}\cosh\theta\vec{T}_1 + (k_{g_1}\vec{T}_1 - \tau_{g_1}\vec{n}_1)\cosh\theta + \dot{\theta}\sinh\theta\,\vec{g}_1$$

$$(k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1} = (\dot{\theta}+k_{g_1})\cosh\theta\vec{T}_1 + (\dot{\theta}+k_{g_1})\sinh\theta\vec{g}_1 + (k_{n_1}\sinh\theta - \tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{n}_1$$

elde edilir. Şimdi bu denklemde

$$\vec{n} = \cosh\theta\,\vec{T}_1 + \sinh\theta\,\vec{g}_1$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g} + k_n\cosh\theta\vec{T}_1 + k_n\sinh\theta\vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} &= (\dot{\theta}+k_{g_1})\cosh\theta\vec{T}_1 + (\dot{\theta}+k_{g_1})\sinh\theta\vec{g}_1 \\ &+ (k_{n_1}\sinh\theta - \tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{n}_1\end{aligned}$$

olur. $x$ ve $x_1$ eğrileri Mannheim partner $D$-eğrileri olduğu için $\vec{n}$ ile $\vec{g}_1$ lineer bağımlı olacağından, eşitliğin her iki tarafındaki $\vec{T}_1$ ve $\vec{n}_1$ in katsayıları eşittir. Dolayısıyla

$$\dot{\theta} + k_{g_1} = k_n\frac{ds}{ds_1}$$

veya

$$\dot{\theta} = k_n \frac{ds}{ds_1} - k_{g_1} \tag{3.2.5}$$

bulunur. (3.2.4) denklemi (3.2.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\sinh\theta \vec{T}_1 + \cosh\theta\, \vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

ve buradan

$$\sinh\theta \frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1}), \quad \cosh\theta \frac{ds}{ds_1} = \lambda\tau_{g_1}$$

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1+\lambda k_{n_1}}{\sinh\theta} = \frac{\lambda\tau_{g_1}}{\cosh\theta}, \quad \coth\theta = \frac{\lambda\tau_{g_1}}{1+\lambda k_{n_1}} \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden bulunan $\lambda\tau_{g_1} = \coth\theta\ (1+\lambda k_{n_1})$ denkleminin $s_1$ yayına göre türevi alınırsa

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1} = \left(1 - \frac{\lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})^2}\right)\dot{\theta}(1+\lambda k_{n_1}) + \left(\frac{\lambda\tau_{g_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right)\lambda\dot{k}_{n_1}$$

bulunur ve (3.2.5) dikkate alınırsa

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n \frac{1+\lambda k_{n_1}}{\sinh\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right] \tag{3.2.7}$$

bulunur. (3.2.6) denklemindeki değerler (3.2.7) de yazılırsa

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1} + \left((1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2\right)k_{g_1} = k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \tag{3.2.8}$$

elde edilir.

Tersine, $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.2.9}$$

bir eğrisini alalım. Bu denklemin iki kere türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda\dot{\vec{n}}_1 = \vec{T}_1 + \lambda\left(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1\right)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.2.10}$$

$$(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T}=\lambda\dot{k}_{n_1}\vec{T}_1+(1+\lambda k_{n_1})(k_{g_1}\vec{g}_1+k_{n_1}\vec{n}_1)$$
$$+\lambda\dot{\tau}_{g_1}\vec{g}_1+\lambda\tau_{g_1}(k_{g_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{n}_1)$$

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T}&=(\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})\vec{T}_1+\left((1+\lambda k_{n_1})k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2\right)\vec{n}_1\\&+\left((1+\lambda k_{n_1})k_{g_1}+\lambda\dot{\tau}_{g_1}\right)\vec{g}_1\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

bulunur. (3.2.10) ile (3.2.11) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[k_g(\vec{T}\times\vec{g})+k_n(\vec{T}\times\vec{n})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=(1+\lambda k_{n_1})\left[(1+\lambda k_{n_1})k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2\right](\vec{T}_1\times\vec{n}_1)\\&+\lambda\tau_{g_1}(\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})(\vec{g}_1\times\vec{T}_1)\\&+\left((1+\lambda k_{n_1})^2k_{g_1}+\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)(\vec{T}_1\times\vec{g}_1)\\&+\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)(\vec{g}_1\times\vec{n}_1)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\left[k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1\\&+\left[-k_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}+\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{g_1}\right]\vec{n}_1\\&+\left[(1+\lambda k_{n_1})^2k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right]\vec{g}_1\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

elde edilir. (3.2.8), (3.2.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left[k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1\\&+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{g}_1\\&-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{n}_1\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

bulunur. Ayrıca, (3.2.13) ile (3.2.10) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4&=\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4\right)\vec{n}_1\\&+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1\\&-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1\end{aligned}$$

$$\left[k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

$$\left[k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$
$$+\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1 \qquad (3.2.14)$$

elde edilir. Şimdi (3.2.13) ve (3.2.14) denklemleri düzenlenirse

$$k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}+k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{T}_1$$
$$+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{g}_1 \qquad (3.2.15)$$
$$-k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}_1$$

ve

$$k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}+k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{T}_1-k_n^2(1+\lambda k_{n_1})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{g}_1$$
$$+k_n\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1 \qquad (3.2.16)$$

bulunur. Burada (3.2.15) denkleminden (3.2.16) denklemi çıkarılırsa

$$\left(k_g^2-k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)+\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1$$
$$+\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)+(1+\lambda k_{n_1})k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1$$
$$-\left[k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4+k_n\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\right]\vec{n}_1$$

olur. (3.2.10) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2-(1+\lambda k_{n_1})^2\right)=\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

denklemi ve (3.2.13) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\tau_{g_1}^2+k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})=0$$

denklemi son eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\left(k_g^2-k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)+\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1$$
$$+\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)+(1+\lambda k_{n_1})k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1$$

bulunur. Burada $\vec{n}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde ve (3.2.10) denkleminde de $\vec{T}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalır. Dolayısıyla, $\vec{g}$ ve $\vec{n}_1$ vektörleri aynı doğrultudadır. Sonuç olarak $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrilerdir. ■

Şimdi bazı özel durumlar için Mannheim partner $D$-eğrilerinin karekterizasyonlarını verelim. Kabul edelim ki $x(s)$ bir asimptotik Mannheim $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde (3.2.7) denkleminin özel durumlarını verebiliriz:

**i)** $x_1(s_1)$ bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ aşağıdaki denklem sağlanır,

$$\dot{\tau}_{g_1}=\frac{\lambda\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}$$

denklemi sağlanır.

**ii)** Kabul edelim ki, $x_1(s_1)$ bir asimptotik eğri olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisinin $k_{g_1}$ geodezik eğriliği ve $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1}=-k_{g_1}(1-\lambda^2\tau_{g_1}^2)$$

bağıntısı vardır. Bu, Liu ve Wang [19] ‘ın bulduğu eşitliktir.

**iii)** Eğer, $x_1(s_1)$ bir eğrilik çizgisi ise bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisi için

$$k_{g_1}=0 \;\; veya \;\; k_{n_1}=-1/\lambda$$

dır.

**Teorem 3.2.2.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği, geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik eğriliği arasında

$$k_{g_1} = k_n\left[(1+\lambda k_g)^2 + \lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + \left[-\lambda\dot{\tau}_g(1+\lambda k_g) + \lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

bağıntısı geçerlidir.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

denkleminin türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\vec{g} = \left[\vec{T} + \lambda k_g\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \left[(1+\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

bulunur. Bu denkleminde türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}\right) = \frac{d}{ds_1}\left(\left[(1+\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2} = \left[\lambda\dot{k}_g\vec{T} + (1+\lambda k_g)(k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1} - \lambda\dot{\tau}_g\vec{n} - \lambda\tau_g(k_n\vec{T} + \tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}\right]\frac{ds}{ds_1}$$
$$+\left[(1+\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{d^2 s}{ds_1^2}$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2} = \left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1} - \lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + (1+\lambda k_g)\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right)\vec{T} + \left(k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \lambda k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda\tau_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\right)\vec{g}$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1} - \lambda\tau_g\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g} = \vec{n}_1$ ve

$$k_{g_1} = \left\langle \dot{\vec{x}}_1, \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{n}_1 \right\rangle = \left\langle \dot{\vec{x}}_1, \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{g} \right\rangle$$

olduğundan

$$\ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{n}_1 = \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{g} = \left( \lambda \dot{k}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 + (1+\lambda k_g) \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) (\vec{T} \times \vec{g})$$

$$+ \left( k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 + \lambda k_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 - \lambda \dot{\tau}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) (\vec{n} \times \vec{g})$$

$$\ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{n}_1 = \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{g} = \left( \lambda \dot{k}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 + (1+\lambda k_g) \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{n}$$

$$+ \left( k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 + \lambda k_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 - \lambda \dot{\tau}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{T}$$

bulunur. Bu değerler yerlerine yazılırsa

$$k_{g_1} = \Bigg\langle (1+\lambda k_g) \frac{ds}{ds_1} \vec{T} - \lambda \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n},$$

$$\left( \lambda \dot{k}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 + (1+\lambda k_g) \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{n} + \left( k_n (1+\lambda k_g) \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 - \lambda \dot{\tau}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{T} \Bigg\rangle$$

elde edilir. $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = -1$ olduğundan

$$k_{g_1} = k_n \left[ (1+\lambda k_g)^2 - \lambda^2 \tau_g^2 \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 + \left[ -\lambda \dot{\tau}_g (1+\lambda k_g) + \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 \qquad (3.2.16)$$

bulunur. Buna bağlı olarak aşağıdaki özel durumlar verilebilir:

**i)** $x$ bir geodezik eğri, yani $k_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = k_n \left( 1 - \lambda^2 \tau_g^2 \right) \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 - \lambda \dot{\tau}_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2,$$

**ii)** $x$ bir asimptotik çizgi, yani $k_n = 0$ ise

$$k_{g_1} = \left[ -\lambda \dot{\tau}_g (1+\lambda k_g) + \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2,$$

**iii)** $x$ bir eğrilik çizgisi, yani $\tau_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = k_n (1+\lambda k_g)^2 \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 \qquad (3.2.17)$$

bulunur.

**Teorem 3.2.3.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ eğrileri Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik burulması arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\tau_{g_1} = -\tau_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 .$$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

eşitliğinin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \dot{\vec{x}}\frac{ds}{ds_1} - \lambda\vec{n}_1 = \left[\dot{\vec{x}} - \lambda\dot{\vec{g}}\right]\frac{ds}{ds_1} = \left[\vec{T} - \lambda(-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{T}_1 = \left[(1+\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g} = \vec{n}_1$ olduğundan

$$\frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \left[-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

olur. Bu denklem $\vec{n}_1$ ile vektörel çarpılırsa

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \vec{g} \times \left[-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \left[k_g\vec{n} - \tau_g\vec{T}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir ve $\tau_{g_1} = \left( \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right)$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\tau_{g_1} = \left\langle \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right\rangle = \left\langle (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}, -\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T} + k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \right\rangle$$

$$\tau_{g_1} = -(1+\lambda k_g)\tau_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle - \lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle = -1$ olduğundan

$$\tau_{g_1} = -\tau_g(1+\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

$$\tau_{g_1} = -\tau_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \tag{3.2.18}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.2.6), (3.2.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tau_g\tau_{g_1} = -\frac{\cosh^2\theta}{\lambda^2}$$

elde edilir. Bu taktirde, (3.2.6) ve (3.2.18) eşitliklerinden şu sonuçları verebiliriz:

**Sonuç 3.2.1.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde $x_1$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g\tau_{g_1} = -\frac{\cosh^2\theta}{\lambda^2}$$

bağıntısı vardır. Böylece $x$ Mannheim $D$-eğrisi eğrilik çizgisi iken $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrisi de bir eğrilik çizgisidir.

Benzer şekilde (3.2.6) ve (3.2.18) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_g}{\tau_{g_1}} = \frac{\sinh^2\theta}{(1+\lambda k_{n_1})^2}$$

yazabiliriz. Bu taktirde, eğer $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri ise, yani, $k_{n_1} = 0$ ise

$$\tau_g = \sinh^2\theta\tau_{g_1} \tag{3.2.19}$$

olur.

**Sonuç 3.2.2.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Eğer $\theta$, $x$ ve $x_1$ eğrilerinin noktalarına karşılık gelen noktalarındaki $T$ ve $T_1$ teğet vektörleri arasındaki açı olmak üzere, $x_1(s_1)$ bir asimtotik eğri ise bu taktirde $x(s)$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması ve $x_1(s_1)$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g = \sinh^2\theta\tau_{g_1}$$

bağıntısı geçerlidir.

**Teorem 3.2.4.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, geodezik burulması ile $x_1$ eğrisinin normal eğriliği, geodezik burulması arasında

$$k_g + k_{n_1} = \lambda(-k_g k_{n_1} + \tau_g \tau_{g_1})$$

bağıntısı geçerlidir.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti, $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun. $\lambda(s_1)$ belli bir fonksiyon olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.2.20}$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ yayına göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) + \dot{\lambda}\vec{n}_1 \tag{3.2.21}$$

elde edilir. $\lambda$, sıfırdan farklı bir sabit düşünülürse

$$\vec{T} = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds}\vec{g}_1 \tag{3.2.22}$$

olur. Buna göre

$$\vec{T} = \sinh\theta\vec{T}_1 + \cosh\theta\vec{g}_1 \tag{3.2.23}$$

yazılabilir. (3.2.22) ve (3.2.23) denklemlerinden

$$\sinh\theta = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}, \quad \cosh\theta = \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} \tag{3.2.24}$$

elde edilir. $\vec{n}_1$ ve $\vec{g}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\dot{\vec{g}} = (1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \tag{3.2.25}$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n} \tag{3.2.26}$$

olduğundan, (3.2.25) ve (3.2.26) denklemlerinden

$$-\sinh\theta=(1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1},\quad \cosh\theta=-\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1} \tag{3.2.27}$$

elde edilir. (3.2.24) ve (3.2.27) denklemlerinden

$$-\sin^2 h\theta=(1+\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}(1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}=1+\lambda(k_g+k_{n_1})+\lambda^2 k_g k_{n_1}$$

$$\cos^2 h\theta=-\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds}=-\lambda^2\tau_g\tau_{g_1}$$

ve

$$\cos^2 h\theta-\sin^2 h\theta=1=1+\lambda(k_g+k_{n_1})+\lambda^2(k_g k_{n_1}-\tau_g\tau_{g_1})$$

$$k_g+k_{n_1}=\lambda(-k_g k_{n_1}+\tau_g\tau_{g_1}) \tag{3.2.28}$$

bulunur. Teorem (3.2.4) den aşağıdaki özel durumları verebiliriz, $\{x,x_1\}$ çifti bir Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde,

**i)** Eğer, $x_1$ bir asimtotik eğri ise, bu taktirde

$$k_g=\lambda\tau_g\tau_{g_1},$$

**ii)** Eğer, $x$ ve $x_1$ bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde

$$k_g+k_{n_1}=-\lambda k_g k_{n_1},$$

**iii)** Eğer $x$ bir geodezik eğrilik ise, bu taktirde

$$k_{n_1}=\lambda\tau_g\tau_{g_1}$$

bulunur.

**Teorem 3.2.5.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$- eğrileri olsun. $x$ ve $x_1$ eğrilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları için aşağıdaki denklemler sağlanır:

**i)** $k_{g_1}=k_n\dfrac{ds}{ds_1}+\dfrac{d\theta}{ds_1}$

**ii)** $\tau_g\dfrac{ds}{ds_1}=k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta$

**iii)** $k_g \dfrac{ds}{ds_1} = k_{n_1} \sinh\theta - \tau_{g_1} \cosh\theta$

**iv)** $\tau_{g_1} = \left(-k_g \cosh\theta + \tau_g \sinh\theta\right)\dfrac{ds}{ds_1}$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

**i)** $\langle \vec{T}, \vec{T}_1 \rangle = \sinh\theta$ eşitliğinin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \vec{T}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} \vec{g}_1 - k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\vec{T}_1 = -\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \cosh\theta \vec{T} - \sinh\theta \vec{n}$$

denklemleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n})\frac{ds}{ds_1}, -\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} (\cosh\theta \vec{T} - \sinh\theta \vec{n}) + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle k_g \frac{ds}{ds_1} \vec{g} + k_n \frac{ds}{ds_1} \vec{n}, -\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} \cosh\theta \vec{T} - k_{g_1} \sinh\theta \vec{n} + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_n \cosh\theta \frac{ds}{ds_1} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle + k_{g_1} \cosh\theta \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = -1$ olduğundan

$$k_{g_1} = k_n \frac{ds}{ds_1} + \frac{d\theta}{ds_1}$$

olur.

**ii)** $\langle \vec{n}, \vec{n}_1 \rangle = 0$ eşitliğinin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_n \vec{T} + \tau_g \vec{g})\frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1} \vec{T}_1 + \tau_{g_1} \vec{g}_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1 = -\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \cosh\theta \vec{T} - \sinh\theta \vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ in lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{n},k_{n_1}(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n})+\tau_{g_1}(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n})\right\rangle=0$$

$$\left\langle k_n\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{g},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{n},(-k_{n_1}\sinh\theta+\tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{T}+(k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{n}\right\rangle=0$$

$$\tau_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle+(k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta)\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle=0$$

bulunur. $\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle=-1$ olduğundan

$$\tau_g\frac{ds}{ds_1}=k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta$$

olur.

**iii)** $\left\langle \vec{T},\vec{n}_1\right\rangle=0$ denkleminin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{g}_1\right\rangle=0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1=-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n},\quad \vec{g}_1=\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}$$

eşitliklerini ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle+(-k_{n_1}\sinh\theta+\tau_{g_1}\cosh\theta)\left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}=k_{n_1}\sinh\theta-\tau_{g_1}\cosh\theta$$

bulunur.

**iv)** $\left\langle \vec{g},\vec{g}_1\right\rangle=0$ denkleminin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}_1\right\rangle+\left\langle \vec{g},k_{g_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle=0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1=-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n},\quad \vec{g}_1=\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right\rangle+\left\langle \vec{g},k_{g_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)-\tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle=0$$

$$\left\langle -k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right\rangle+\left\langle \vec{g},-k_{g_1}\sinh\theta\vec{T}+k_{g_1}\cosh\theta\vec{n}-\tau_{g_1}\vec{g}\right\rangle=0$$

$$-k_g\cosh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle-\tau_g\sinh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle\vec{n},\vec{n}\right\rangle-\tau_{g_1}\left\langle\vec{g},\vec{g}\right\rangle=0$$

bulunur. $\left\langle\vec{n},\vec{n}\right\rangle=-1$ olduğundan

$$\tau_{g_1}=\left(-k_g\cosh\theta+\tau_g\sinh\theta\right)\frac{ds}{ds_1}$$

olur.

**3. Durum.** $\{x,x_1\}$ çifti Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $S$ yüzeyi ile $x$ eğrisi timelike iken $S_1$ yüzeyi ile $x_1$ eğrisi timelike olabilir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix}\dot{\vec{T}}\\ \dot{\vec{g}}\\ \dot{\vec{n}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_g & k_n\\ k_g & 0 & -\tau_g\\ k_n & \tau_g & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{T}\\ \vec{g}\\ \vec{n}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\dot{\vec{T}}_1\\ \dot{\vec{g}}_1\\ \dot{\vec{n}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_{g_1} & k_{n_1}\\ k_{g_1} & 0 & -\tau_{g_1}\\ k_{n_1} & \tau_{g_1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{T}_1\\ \vec{g}_1\\ \vec{n}_1\end{pmatrix}$$

ve çatı elemanlarının vektörel çarpımları da sırasıyla

$$\begin{array}{lcl}\vec{T}\times\vec{g}=-\vec{n} & & \vec{T}_1\times\vec{g}_1=-\vec{n}_1\\ \vec{g}\times\vec{n}=\vec{T} & , & \vec{g}_1\times\vec{n}_1=\vec{T}_1\\ \vec{n}\times\vec{T}=-\vec{g} & & \vec{n}_1\times\vec{T}_1=-\vec{g}_1\end{array}$$

şeklinde verilir.

**Teorem 3.3.1.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun $\Leftrightarrow$ $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x_1$ eğrisinin $k_{n_1}$ normal eğriliği, $k_{g_1}$ geodezik eğriliği, $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $k_n$ normal eğriliği arasında aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n\frac{1+\lambda k_{n_1}}{\cosh\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right]$$

**İspat.** Kabul edelim ki $x(s)$ bir Mannheim $D$-eğrisidir. Bu taktirde, tanımdan bir $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \qquad (3.3.1)$$

yazılabilir. Şimdi bu denklemin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\vec{x}_1}{ds_1} + \dot{\lambda}(s_1)\vec{n}_1(s_1) + \lambda(s_1)\dot{\vec{n}}_1(s_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \dot{\lambda}\vec{n}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \dot{\lambda}\vec{n}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

elde edilir. Bu denklem $\vec{n}_1 = \vec{g}$ ile iç çarpılırsa

$$\frac{ds}{ds_1}\left\langle\vec{T},\vec{g}\right\rangle = (1+\lambda k_{n_1})\left\langle\vec{T}_1,\vec{n}_1\right\rangle + \dot{\lambda}\left\langle\vec{n}_1,\vec{n}_1\right\rangle + \lambda\tau_{g_1}\left\langle\vec{g}_1,\vec{n}_1\right\rangle$$

ve buradan $\dot{\lambda} = 0$, yani $\lambda$ bir sabittir. O halde

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda\dot{\vec{n}}_1 = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) \qquad (3.3.2)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \qquad (3.3.3)$$

yazılır.

$$\vec{T} = \cosh\theta\vec{T}_1 + \sinh\theta\,\vec{g}_1 \qquad (3.3.4)$$

denkleminin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = (k_{g_1}\vec{g}_1 + k_{n_1}\vec{n}_1)\cosh\theta + \dot{\theta}\sinh\theta\vec{T}_1 + (k_{g_1}\vec{T}_1 - \tau_{g_1}\vec{n}_1)\sinh\theta + \dot{\theta}\cosh\theta\,\vec{g}_1$$

$$(k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1} = (\dot{\theta} + k_{g_1})\sinh\theta\vec{T}_1 + (\dot{\theta} + k_{g_1})\cosh\theta\vec{g}_1 + (k_{n_1}\cosh\theta - \tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{n}_1$$

elde edilir. Şimdi bu denklemde

$$\vec{n} = \sinh\theta \vec{T}_1 + \cosh\theta\, \vec{g}_1$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$(k_g \vec{g} + k_n \sinh\theta \vec{T}_1 + k_n \cosh\theta \vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (\dot{\theta} + k_{g_1})\sinh\theta \vec{T}_1 + (\dot{\theta} + k_{g_1})\cosh\theta \vec{g}_1$$
$$+ (k_{n_1}\cosh\theta - \tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{n}_1$$

olur. $x$ ve $x_1$ eğrileri Mannheim partner $D$-eğrileri olduğu için $\vec{n}$ ile $\vec{g}_1$ lineer bağımlı olacağından, eşitliğin her iki tarafındaki $\vec{T}_1$ ve $\vec{n}_1$ in katsayıları eşittir.

$$\dot{\theta} = k_n \frac{ds}{ds_1} - k_{g_1} \tag{3.3.5}$$

bulunur. (3.3.4) denklemi (3.3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\cosh\theta \vec{T}_1 + \sinh\theta\, \vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (1 + \lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

ve buradan

$$\cosh\theta \frac{ds}{ds_1} = (1 + \lambda k_{n_1}), \quad \sinh\theta \frac{ds}{ds_1} = \lambda\tau_{g_1}$$
$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1 + \lambda k_{n_1}}{\cosh\theta} = \frac{\lambda\tau_{g_1}}{\sinh\theta}, \quad \tanh\theta = \frac{\lambda\tau_{g_1}}{1 + \lambda k_{n_1}} \tag{3.3.6}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden bulunan $\lambda\tau_{g_1} = \tanh\theta\ (1 + \lambda k_{n_1})$ denkleminin $s_1$ yayına göre türevi alınırsa

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1} = \left(1 - \frac{\lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1 + \lambda k_{n_1})^2}\right)\dot{\theta}(1 + \lambda k_{n_1}) + \left(\frac{\lambda\tau_{g_1}}{1 + \lambda k_{n_1}}\right)\lambda\dot{k}_{n_1}$$

bulunur ve (3.3.5) dikkate alınırsa

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1 + \lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1 + \lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n \frac{1 + \lambda k_{n_1}}{\cosh\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1 + \lambda k_{n_1}}\right] \tag{3.3.7}$$

bulunur. (3.3.6) denklemindeki değerler (3.3.7) de yazılırsa

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1 + \lambda k_{n_1}) - \lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1} + \left((1 + \lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2\tau_{g_1}^2\right)k_{g_1} = k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \tag{3.3.8}$$

elde edilir.

Tersine, $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\vec{x}(s_1)=\vec{x}_1(s_1)+\lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.3.9}$$

bir eğrisini alalım. Bu denklemin iki kere türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=\vec{T}_1+\lambda\dot{\vec{n}}_1=\vec{T}_1+\lambda\left(k_{n_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{g}_1\right)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=(1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1+\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.3.10}$$

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T}&=\lambda\dot{k}_{n_1}\vec{T}_1+(1+\lambda k_{n_1})(k_{g_1}\vec{g}_1+k_{n_1}\vec{n}_1)\\&\quad+\lambda\dot{\tau}_{g_1}\vec{g}_1+\lambda\tau_{g_1}(k_{g_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{n}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k_g g+k_n n)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+T\frac{d^2s}{ds_1^2}&=(\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})T_1+\left((1+\lambda k_{n_1})k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2\right)n_1\\&\quad+\left((1+\lambda k_{n_1})k_{g_1}+\lambda\dot{\tau}_{g_1}\right)g_1\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

bulunur. (3.3.10) ile (3.3.11) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[k_g(\vec{T}\times\vec{g})+k_n(\vec{T}\times\vec{n})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=(1+\lambda k_{n_1})\left[(1+\lambda k_{n_1})k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2\right](\vec{T}_1\times\vec{n}_1)\\&\quad+\lambda\tau_{g_1}(\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})(\vec{g}_1\times\vec{T}_1)\\&\quad+\left((1+\lambda k_{n_1})^2k_{g_1}+\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)(\vec{T}_1\times\vec{g}_1)\\&\quad+\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)(\vec{g}_1\times\vec{n}_1)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\left[-k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1\\&\quad+\left[-k_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}+\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{g_1}\right]\vec{n}_1\\&\quad+\left[(1+\lambda k_{n_1})^2k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right]\vec{g}_1\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

elde edilir. (3.3.8), (3.3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left[-k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3&=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1\\&\quad+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{g}_1\\&\quad-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{n}_1\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

bulunur. Ayrıca, (3.3.13) ile (3.3.10) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[-k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 &= \left(\lambda^2\tau_{g_1}^2 k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4\right)\vec{n}_1\\ &+\left(-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1\\ &-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[-k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 &= \left(\lambda^2\tau_{g_1}^2 k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1\\ &-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[-k_g\vec{g}-k_n\vec{n}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 &= -k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1\\ &+\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1\end{aligned} \quad (3.3.14)$$

elde edilir. Şimdi (3.3.13) ve (3.3.14) denklemleri düzenlenirse

$$\begin{aligned}k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}-k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n} &= \left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{T}_1\\ &+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{g}_1 \quad (3.3.15)\\ &-k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}_1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}-k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}-k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n} &= -\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{T}_1-k_n^2(1+\lambda k_{n_1})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{g}_1\\ &+k_n\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1\end{aligned} \quad (3.3.16)$$

bulunur. Burada (3.3.15) denklemi ile (3.3.16) denklemi toplanırsa

$$-\left(k_g^2+k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1$$
$$+\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)-(1+\lambda k_{n_1})k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1$$
$$-\left[k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4-k_n\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\right]\vec{n}_1$$

olur. (3.3.10) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)=\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

denklemi ve (3.3.13) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\tau_{g_1}^2+k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})=0$$

denklemi son eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$-\left(k_g^2+k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1$$
$$+\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)-k_n^2(1+\lambda k_{n_1})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1$$

bulunur. Burada $\vec{n}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde ve (3.3.10) denkleminde de $\vec{T}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalır. Dolayısıyla $\vec{g}$ ve $\vec{n}_1$ vektörleri aynı doğrultudadır. Sonuç olarak $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrilerdir. ■

Şimdi bazı özel durumlar için Mannheim partner $D$-eğrilerinin karekterizasyonlarını verelim. Kabul edelim ki $x(s)$ bir asimptotik Mannheim $D$-eğri olsun. Bu taktirde (3.3.7) denkleminin özel durumlarını verebiliriz:

**i)** $x_1(s_1)$ bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ aşağıdaki denklem sağlanır,

$$\dot{\tau}_{g_1}=\frac{\lambda\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}.$$

**ii)** Kabul edelim ki, $x_1(s_1)$ bir asimptotik eğri olsun. Bu taktirde, $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisinin $k_{g_1}$ geodezik eğriliği ve $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1} = -k_{g_1}(1-\lambda^2\tau_{g_1}^2)$$

bağıntısı vardır. Bu, Liu ve Wang [19] ‘ın bulduğu eşitliktir.

**iii)** Eğer, $x_1(s_1)$ bir eğrilik çizgisi ise bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisi için

$$k_{g_1} = 0 \ \ veya \ \ k_{n_1} = -1/\lambda$$

dır.

**Teorem 3.3.2.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği, geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik eğriliği arasında

$$k_{g_1} = -k_n\left[(1-\lambda k_g)^2+\lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3+\left[-\lambda\dot{\tau}_g(1-\lambda k_g)-\lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

bağıntısı vardır.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\vec{x}_1(s_1)=\vec{x}(s_1)-\lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1)=\vec{x}(s_1)-\lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

denkleminin türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1=\vec{T}\frac{ds}{ds_1}-\lambda\vec{g}=\left[\vec{T}-\lambda k_g\vec{T}+\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}=\left[(1-\lambda k_g)\vec{T}+\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir. Bu denklemin de türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}\right)=\frac{d}{ds_1}\left(\left[(1-\lambda k_g)\vec{T}+\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\left[-\lambda\dot{k}_g\vec{T}+(1-\lambda k_g)(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1}+\lambda\dot{\tau}_g\vec{n}+\lambda\tau_g(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}\right]\frac{ds}{ds_1}$$
$$+\left[(1-\lambda k_g)\vec{T}+\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{d^2s}{ds_1^2}$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\left(-\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}+\left(k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\tau_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\right)\vec{g}$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g}=\vec{n}_1$ ve

$$k_{g_1}=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1\right\rangle=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}\right\rangle$$

olduğundan

$$\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1=\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}=\left(-\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{T}\times\vec{g})$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{n}\times\vec{g})$$

$$\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1=\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}=\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$
$$+\left(-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}$$

bulunur. Bu değerler yerlerine yazılırsa

$$k_{g_1}=\Bigg\langle(1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},$$
$$\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}+\left(-k_n(1-\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}\Bigg\rangle$$

elde edilir. $\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle=-1$ olduğundan

$$k_{g_1}=-k_n\left[(1-\lambda k_g)^2+\lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3+\left[-\lambda\dot{\tau}_g(1-\lambda k_g)-\lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \qquad (3.3.16)$$

bulunur. Buna bağlı olarak aşağıdaki özel durumlar verilebilir:

**i)** $x$ bir geodezik eğri, yani $k_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = -k_n \left(1+\lambda^2\tau_g^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 - \lambda\dot{\tau}_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2,$$

**ii)** $x$ bir asimptotik çizgi, yani $k_n = 0$ ise

$$k_{g_1} = \left[-\lambda\dot{\tau}_g(1-\lambda k_g) - \lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2,$$

**iii)** $x$ bir eğrilik çizgisi, yani $\tau_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = -k_n(1-\lambda k_g)^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \qquad (3.3.17)$$

bulunur.

**Teorem 3.3.3.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik burulması arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\tau_{g_1} = \tau_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2.$$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun.

$$\tau_{g_1} = \left\langle \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right\rangle$$

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

eşitliğinin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \dot{\vec{x}}\frac{ds}{ds_1} - \lambda\vec{n}_1 = \left[\dot{\vec{x}} - \lambda\dot{\vec{g}}\right]\frac{ds}{ds_1} = \left[\vec{T} - \lambda(k_g\vec{T} - \tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{T}_1 = \left[(1-\lambda k_g)\vec{T} + \lambda\tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} + \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g} = \vec{n}_1$ olduğundan

$$\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}=\frac{d\vec{g}}{ds_1}=\frac{d\vec{g}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\left[k_g\vec{T}-\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

olur. Bu denklem $\vec{n}_1$ ile vektörel çarpılırsa

$$\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}=\vec{g}\times\left[k_g\vec{T}-\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}=\left[k_g\vec{n}-\tau_g\vec{T}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir ve $\tau_{g_1}=\left\langle\frac{d\vec{x}_1}{ds_1},\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}\right\rangle$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\tau_{g_1}=\left\langle\frac{d\vec{x}_1}{ds_1},\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}\right\rangle=\left\langle(1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},-\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}\right\rangle$$

$$\tau_{g_1}=-(1-\lambda k_g)\tau_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle+\lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle\vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

bulunur. $\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle=-1$ olduğundan

$$\tau_{g_1}=\tau_g(1-\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

$$\tau_{g_1}=\tau_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \tag{3.3.18}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.3.6), (3.3.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tau_g\tau_{g_1}=-\frac{\cosh^2\theta}{\lambda^2}$$

elde edilir. Bu taktirde, (3.3.6) ve (3.3.18) eşitliklerinden şu sonuçları verebiliriz.

**Sonuç 3.3.1.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde $x_1$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g\tau_{g_1}=-\frac{\cosh^2\theta}{\lambda^2}$$

bağıntısı vardır. Böylece $x$ Mannheim $D$-eğrisi eğrilik çizgisi iken $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrisi de bir eğrilik çizgisidir.

Benzer şekilde (3.3.6) ve (3.3.18) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_g}{\tau_{g_1}} = -\frac{\sinh^2\theta}{(1+\lambda k_{n_1})^2}$$

yazabiliriz. Bu taktirde, eğer $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri ise, yani, $k_{n_1} = 0$ ise

$$\tau_g = -\sinh^2\theta\tau_{g_1} \tag{3.3.19}$$

olur.

**Sonuç 3.3.2.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Eğer $\theta$, $x$ ve $x_1$ eğrilerinin noktalarına karşılık gelen noktalarındaki $T$ ve $T_1$ teğet vektörleri arasındaki açı olmak üzere, $x_1(s_1)$ bir asimtotik eğri ise bu taktirde $x(s)$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması ve $x_1(s_1)$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g = -\sinh^2\theta\tau_{g_1}$$

bağıntısı geçerlidir.

**Teorem 3.3.4.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, geodezik burulması ile $x_1$ eğrisinin normal eğriliği, geodezik burulması arasında

$$k_{n_1} - k_g = \lambda(k_g k_{n_1} - \tau_g\tau_{g_1})$$

bağıntısı geçerlidir.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun. $\lambda(s_1)$ belli bir fonksiyon olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.3.20}$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ yayına göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) + \dot{\lambda}\vec{n}_1 \tag{3.3.21}$$

elde edilir. $\lambda$, sıfırdan farklı bir sabit olarak düşünülürse

$$\vec{T} = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds}\vec{g}_1 \tag{3.3.22}$$

olur. Buna göre

$$\vec{T} = \cosh\theta\vec{T}_1 + \sinh\theta\vec{g}_1 \tag{3.3.23}$$

yazılabilir. (3.3.22) ve (3.3.23) denklemlerinden

$$\cosh\theta = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}, \quad \sinh\theta = \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} \tag{3.3.24}$$

elde edilir. $\vec{n}_1$ ve $\vec{g}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\vec{\dot{g}} = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} + \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \tag{3.3.25}$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n} \tag{3.3.26}$$

olduğundan, (3.3.25) ve (3.3.26) denklemlerinden

$$\cosh\theta = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}, \quad -\sinh\theta = \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1} \tag{3.3.27}$$

elde edilir. (3.3.24) ve (3.3.27) denklemlerinden

$$\cos^2 h\theta = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}(1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds} = 1+\lambda(-k_g+k_{n_1}) - \lambda^2 k_g k_{n_1}$$

$$-\sin^2 h\theta = \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} = \lambda^2\tau_g\tau_{g_1}$$

$$\cos^2 h\theta - \sin^2 h\theta = 1 = 1+\lambda(-k_g+k_{n_1}) + \lambda^2(-k_g k_{n_1} + \tau_g\tau_{g_1})$$

$$k_{n_1} - k_g = \lambda(k_g k_{n_1} - \tau_g\tau_{g_1}) \tag{3.3.28}$$

bulunur. Teorem (3.3.4) den aşağıdaki özel durumları verebiliriz, $\{x, x_1\}$ çifti bir Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde,

**i)** Eğer, $x_1$ bir asimtotik eğri ise, bu taktirde

$k_g = \lambda\tau_g\tau_{g_1}$,

**ii)** Eğer, $x$ ve $x_1$ bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde

$$k_{n_1} - k_g = \lambda k_g k_{n_1},$$

**iii)** Eğer, $x$ bir geodezik eğrilik ise, bu taktirde

$$k_{n_1} = -\lambda \tau_g \tau_{g_1}$$

bulunur.

**Teorem 3.3.5.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi timelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ ve $x_1$ eğrilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları için aşağıdaki denklemler vardır:

**i)** $k_{g_1} = k_n \dfrac{ds}{ds_1} + \dfrac{d\theta}{ds_1}$

**ii)** $\tau_g \dfrac{ds}{ds_1} = k_{n_1} \sinh\theta - \tau_{g_1} \cosh\theta$

**iii)** $k_g \dfrac{ds}{ds_1} = k_{n_1} \cosh\theta - \tau_{g_1} \sinh\theta$

**iv)** $\tau_{g_1} = \left(k_g \sinh\theta - \tau_g \cosh\theta\right)\dfrac{ds}{ds_1}$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun.

**i)** $\langle \vec{T}, \vec{T}_1 \rangle = \cosh\theta$ eşitliğinin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \vec{T}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1} \vec{g}_1 - k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \sinh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$\vec{T}_1 = \cosh\theta \vec{T} - \sinh\theta \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = -\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n}$$

denklemleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g g + k_n n)\frac{ds}{ds_1}, \cosh\theta T - \sinh\theta n \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1}(-\sinh\theta \vec{T} + \cosh\theta \vec{n}) + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \sinh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle k_g \frac{ds}{ds_1} \vec{g} + k_n \frac{ds}{ds_1} \vec{n}, \cosh\theta \vec{T} - \sinh\theta \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, -k_{g_1} \sinh\theta \vec{T} + k_{g_1} \cosh\theta \vec{n} + k_{n_1} \vec{n}_1 \right\rangle = \sinh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$-k_n \sinh\theta \frac{ds}{ds_1}\langle \vec{n},\vec{n}\rangle - k_{g_1} \sinh\theta \langle \vec{T},\vec{T}\rangle = \sinh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. $\langle \vec{T},\vec{T}\rangle = -1$ olduğundan

$$k_{g_1} = k_n \frac{ds}{ds_1} + \frac{d\theta}{ds_1}$$

bulunur.

**ii)** $\langle \vec{n},\vec{n}_1\rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_n\vec{T} + \tau_g \vec{g})\frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\vec{T}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_n\vec{T} + \tau_g \vec{g})\frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1}(\cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}) + \tau_{g_1}(-\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_n \frac{ds}{ds_1}\vec{T} + \tau_g \frac{ds}{ds_1}\vec{g}, \vec{g} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, (k_{n_1}\cosh\theta - \tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{T} + (-k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{n} \right\rangle = 0$$

$$\tau_g \frac{ds}{ds_1}\langle \vec{g},\vec{g}\rangle + (-k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta)\langle \vec{n},\vec{n}\rangle = 0$$

$$\tau_g \frac{ds}{ds_1} = k_{n_1}\sinh\theta - \tau_{g_1}\cosh\theta$$

elde edilir.

**iii)** $\langle \vec{T},\vec{n}_1\rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\vec{T}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $n_1$ ile $g$ in lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}\langle\vec{g},\vec{g}\rangle+(k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta)\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}=k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta$$

elde edilir.

**iv)** $\langle\vec{g},\vec{g}_1\rangle=0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{T}-\tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}_1\right\rangle+\left\langle\vec{g},k_{g_1}\vec{T}_1-\tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle=0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1=\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n},\quad \vec{g}_1=-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g\vec{T}-\tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1},-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right\rangle+\left\langle\vec{g},k_{g_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)-\tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle=0$$

$$\left\langle k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T}-\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right\rangle+\left\langle\vec{g},k_{g_1}\cosh\theta\vec{T}-k_{g_1}\sinh\theta\vec{n}-\tau_{g_1}\vec{g}\right\rangle=0$$

$$-k_g\sinh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle-\tau_g\cosh\theta\frac{ds}{ds_1}\langle\vec{n},\vec{n}\rangle-\tau_{g_1}\langle\vec{g},\vec{g}\rangle=0$$

elde edilir. $\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle=-1$ olduğundan

$$\tau_{g_1}=\left(k_g\sinh\theta-\tau_g\cosh\theta\right)\frac{ds}{ds_1}$$

olur.

**4. Durum.** $\{x, x_1\}$ çifti Mannheim partner D-eğrileri olsun. $S$ yüzeyi ile $x$ eğrisi timelike iken $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1$ eğrisi spacelike olabilir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ k_g & 0 & -\tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\vec{T}}_1 \\ \dot{\vec{g}}_1 \\ \dot{\vec{n}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_{g_1} & -k_{n_1} \\ k_{g_1} & 0 & \tau_{g_1} \\ k_{n_1} & \tau_{g_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T}_1 \\ \vec{g}_1 \\ \vec{n}_1 \end{pmatrix}$$

ve çatı elemanlarının vektörel çarpımları da sırasıyla

$$\begin{array}{lcl} \vec{T} \times \vec{g} = -\vec{n} & & \vec{T}_1 \times \vec{g}_1 = -\vec{n}_1 \\ \vec{g} \times \vec{n} = \vec{T} & , & \vec{g}_1 \times \vec{n}_1 = -\vec{T}_1 \\ \vec{n} \times \vec{T} = -\vec{g} & & \vec{n}_1 \times \vec{T}_1 = \vec{g}_1 \end{array}$$

biçiminde verilir.

**Teorem 3.4.1.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun $\Leftrightarrow \lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x_1$ eğrisinin $k_{n_1}$ normal eğriliği, $k_{g_1}$ geodezik eğriliği, $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $k_n$ normal eğriliği arasında aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2 \tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n \frac{1+\lambda k_{n_1}}{\sinh\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right]$$

**İspat.** Kabul edelimki $x(s)$ bir Mannheim $D$-eğrisidir. Bu taktirde tanımdan bir $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.4.1}$$

yazılabilir. Şimdi bu denklemin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\vec{x}_1}{ds_1} + \dot{\lambda}(s_1)\vec{n}_1(s_1) + \lambda(s_1)\dot{\vec{n}}_1(s_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \dot{\lambda}\vec{n}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \dot{\lambda}\vec{n}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

elde edilir. Bu denklem $\vec{n}_1 = \vec{g}$ ile iç çarpılırsa

$$\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{T},\vec{g}\right\rangle = (1+\lambda k_{n_1})\left\langle \vec{T}_1,\vec{n}_1\right\rangle + \dot{\lambda}\left\langle \vec{n}_1,\vec{n}_1\right\rangle + \lambda\tau_{g_1}\left\langle \vec{g}_1,\vec{n}_1\right\rangle$$

ve buradan $\dot{\lambda}=0$, yani $\lambda$ bir sabittir. O halde

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda\dot{\vec{n}}_1 = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) \tag{3.4.2}$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.4.3}$$

yazılır.

$$\vec{T} = \sinh\theta\,\vec{T}_1 + \cosh\theta\,\vec{g}_1 \tag{3.4.4}$$

denkleminin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = (k_{g_1}\vec{g}_1 - k_{n_1}\vec{n}_1)\sinh\theta + \dot{\theta}\cosh\theta\vec{T}_1 + (k_{g_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{n}_1)\cosh\theta + \dot{\theta}\sinh\theta\,\vec{g}_1$$

$$(k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1} = (\dot{\theta}+k_{g_1})\cosh\theta\vec{T}_1 + (\dot{\theta}+k_{g_1})\sinh\theta\vec{g}_1 + (-k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{n}_1$$

elde edilir. Şimdi bu denklemde

$$\vec{n} = \cosh\theta\vec{T}_1 + \sinh\theta\,\vec{g}_1$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$(k_g\vec{g} + k_n\cosh\theta\vec{T}_1 + k_n\sinh\theta\vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (\dot{\theta}+k_{g_1})\cosh\theta\vec{T}_1 + (\dot{\theta}+k_{g_1})\sinh\theta\vec{g}_1$$
$$+(-k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{n}_1$$

olur. $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olduğu için $\vec{n}$ ile $\vec{g}_1$ lineer bağımlı olacağından eşitliğin her iki tarafındaki $\vec{T}_1$ ve $\vec{n}_1$ in katsayıları eşittir.

$$\dot{\theta} = k_n\frac{ds}{ds_1} - k_{g_1} \tag{3.4.5}$$

bulunur. (3.4.4) denklemi (3.4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\sinh\theta\vec{T}_1 + \cosh\theta\,\vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

ve buradan

$$\sinh\theta\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1}),\quad \cosh\theta\frac{ds}{ds_1} = \lambda\tau_{g_1}$$

$$\frac{ds}{ds_1}=\frac{1+\lambda k_{n_1}}{\sinh\theta}=\frac{\lambda\tau_{g_1}}{\cosh\theta},\quad \coth\theta=\frac{\lambda\tau_{g_1}}{1+\lambda k_{n_1}} \tag{3.4.6}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden bulunan $\lambda\tau_{g_1}=\coth\theta\ (1+\lambda k_{n_1})$ denkleminin $s_1$ yayına göre türevi alınırsa

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1}=\left(1-\frac{\lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})^2}\right)\dot{\theta}(1+\lambda k_{n_1})+\left(\frac{\lambda\tau_{g_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right)\lambda\dot{k}_{n_1}$$

bulunur ve (3.4.5) dikkate alınırsa

$$\dot{\tau}_{g_1}=\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(k_n\frac{1+\lambda k_{n_1}}{\sinh\theta}-k_{g_1}\right)+\frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right] \tag{3.4.7}$$

bulunur. (3.4.6) denklemindeki değerler (3.4.7) de yazılırsa

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}+\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)k_{g_1}=k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \tag{3.4.8}$$

elde edilir.

Tersine, $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\vec{x}(s_1)=\vec{x}_1(s_1)+\lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.4.9}$$

bir eğrisini alalım. Bu denklemin iki kere türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=\vec{T}_1+\lambda\vec{n}_1=\vec{T}_1+\lambda\left(k_{n_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{g}_1\right)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=(1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1+\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T}&=\lambda\dot{k}_{n_1}\vec{T}_1+(1+\lambda k_{n_1})(k_{g_1}\vec{g}_1-k_{n_1}\vec{n}_1)\\&\quad+\lambda\dot{\tau}_{g_1}\vec{g}_1+\lambda\tau_{g_1}(k_{g_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{n}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T}&=(\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})\vec{T}_1+\left(-(1+\lambda k_{n_1})k_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}^2\right)\vec{n}_1\\&\quad+\left((1+\lambda k_{n_1})k_{g_1}+\lambda\dot{\tau}_{g_1}\right)\vec{g}_1\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

elde edilir. (3.4.10) ile (3.4.11) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\left[k_g(\vec{T}\times\vec{g})+k_n(\vec{T}\times\vec{n})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3=(1+\lambda k_{n_1})\left[-(1+\lambda k_{n_1})k_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}^2\right](\vec{T}_1\times\vec{n}_1)$$
$$+\lambda\tau_{g_1}(\lambda\dot{k}_{n_1}+\lambda\tau_{g_1}k_{g_1})(\vec{g}_1\times\vec{T}_1)$$
$$+\left((1+\lambda k_{n_1})^2k_{g_1}+\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)(\vec{T}_1\times\vec{g}_1)$$
$$+\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)(\vec{g}_1\times\vec{n}_1)$$

veya

$$\left[-k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1$$
$$+\left[-k_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})+\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}+\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{g_1}\right]\vec{n}_1 \quad (3.4.12)$$
$$+\left[(1+\lambda k_{n_1})^2k_{n_1}-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right]\vec{g}_1$$

elde edilir. (3.4.8), (3.4.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[-k_g\vec{n}+k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3=\left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1$$
$$+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{g}_1 \quad (3.4.13)$$
$$-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{n}_1$$

bulunur. Ayrıca, (3.4.13) ile (3.4.10) denklemi vektörel çarpılırsa

$$\left[-k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4\right)\vec{n}_1$$
$$-\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3-\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

$$\left[-k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^3\tau_{g_1}^4-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

$$\left[k_g\vec{g}-k_n\vec{n}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1 \quad (3.4.14)$$
$$+\left((1+\lambda k_{n_1})^2-\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2-k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1$$

elde edilir. Şimdi (3.4.13) ve (3.4.14) denklemleri düzenlenirse

$$\begin{aligned} k_n k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{g} - k_g^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n} = &\left(\lambda \tau_{g_1} k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2 \tau_{g_1}^3\right) k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right) \vec{T}_1 \\ &+ \left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda \tau_{g_1}^2 (1+\lambda k_{n_1})\right) k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right) \vec{g}_1 \\ &- k_n k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n}_1 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

ve

$$\begin{aligned} k_n k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{g} - k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n} = &\lambda \tau_{g_1} k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \vec{T}_1 + k_n^2 (1+\lambda k_{n_1}) \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \vec{g}_1 \\ &+ k_n \left((1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2 \tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda \tau_{g_1}^2 - k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right) \vec{n}_1 \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

bulunur. Burada (3.4.15) denkleminden (3.4.16) denklemi çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \left(-k_g^2 + k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n} = &\left[k_g \frac{ds}{ds_1}\left(\lambda \tau_{g_1} k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2 \tau_{g_1}^3\right) - \lambda \tau_{g_1} k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right] \vec{T}_1 \\ &+ \left[k_g \frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda \tau_{g_1}^2 (1+\lambda k_{n_1})\right) - (1+\lambda k_{n_1}) k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right] \vec{g}_1 \\ &- \left[k_n k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 + k_n \left((1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda^2 \tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda \tau_{g_1}^2 - k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\right] \vec{n}_1 \end{aligned}$$

olur. (3.4.10) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$\left(\lambda^2 \tau_{g_1}^2 - (1+\lambda k_{n_1})^2\right) = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

denklemi ve (3.4.13) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda \tau_{g_1}^2 + k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) = 0$$

denklemi son eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(-k_g^2 + k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \vec{n} = &\left[k_g \frac{ds}{ds_1}\left(\lambda \tau_{g_1} k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2 \tau_{g_1}^3\right) - \lambda \tau_{g_1} k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right] \vec{T}_1 \\ &- \left[k_g \frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2 - \lambda \tau_{g_1}^2 (1+\lambda k_{n_1})\right) - (1+\lambda k_{n_1}) k_n^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right] \vec{g}_1 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\vec{n}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde ve (3.4.10) denkleminde de $\vec{T}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalır. Dolayısıyla $\vec{g}$ ve $\vec{n}_1$ vektörleri aynı doğrultudadır. Sonuç olarak $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrilerdir. ■

Şimdi bazı özel durumlar için Mannheim partner $D$-eğrilerinin karekterizasyonlarını verelim. Kabul edelimki $x(s)$ bir asimptotik Mannheim $D$-eğri olsun. Bu taktirde (3.4.7) denkleminin özel durumlarını verebiliriz:

**i)** $x_1(s_1)$ eğrisi bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ aşağıdaki denklem sağlanır,

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{\lambda \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1 + \lambda k_{n_1}}.$$

**ii)** Kabul edelim ki $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri olsun. Bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisinin $k_{g_1}$ geodezik eğriliği ve $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\lambda \dot{\tau}_{g_1} = -k_{g_1}(1 - \lambda^2 \tau_{g_1}^2)$$

bağıntısı vardır. Bu, Liu ve Wang [19] 'ın bulduğu eşitliktir.

**iii)** Eğer $x_1(s_1)$ bir eğrilik çizgisi ise bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisi için

$$k_{g_1} = 0 \ \ veya \ \ k_{n_1} = -1/\lambda$$

dır.

**Teorem 3.4.2.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği, geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik eğriliği arasında

$$k_{g_1} = k_n\left[(1-\lambda k_g)^2 - \lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + \left[\lambda \dot{\tau}_g(1-\lambda k_g) + \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

bağıntısı vardır.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

denkleminin türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\dot{\vec{g}} = \left[\vec{T} - \lambda k_g \vec{T} + \lambda\tau_g \vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \left[(1-\lambda k_g)\vec{T} + \lambda\tau_g \vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir. Bu denklemin de türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}\right) = \frac{d}{ds_1}\left(\left[(1-\lambda k_g)\vec{T} + \lambda\tau_g \vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2} = \left[-\lambda\dot{k}_g\vec{T} + (1-\lambda k_g)(k_g\vec{g} + k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1} + \lambda\dot{\tau}_g\vec{n} + \lambda\tau_g(k_n\vec{T} + \tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}\right]\frac{ds}{ds_1}$$
$$+\left[(1-\lambda k_g)\vec{T} + \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{d^2 s}{ds_1^2}$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2} = \left(-\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + (1-\lambda k_g)\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right)\vec{T} + \left(k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \lambda\tau_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\right)\vec{g}$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_g\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g} = \vec{n}_1$ ve

$$k_{g_1} = \left\langle \dot{\vec{x}}_1, \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{n}_1 \right\rangle = \left\langle \dot{\vec{x}}_1, \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{g} \right\rangle$$

olduğundan

$$\ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{n}_1 = \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{g} = \left(-\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + (1-\lambda k_g)\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right)(\vec{T}\times\vec{g})$$
$$+\left(k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - \lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_g\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right)(\vec{n}\times\vec{g})$$

$$\ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{n}_1 = \ddot{\vec{x}}_1 \times \vec{g} = \left( \lambda \dot{k}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 - (1-\lambda k_g) \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{n}$$
$$+ \left( -k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 + \lambda k_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 - \lambda \dot{\tau}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{T}$$

bulunur. Bu değer yerlerine yazılırsa

$$k_{g_1} = \Big\langle (1-\lambda k_g) \frac{ds}{ds_1} \vec{T} + \lambda \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n},$$
$$\left( \lambda \dot{k}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g k_n \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 - (1-\lambda k_g) \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{n} + \left( -k_n (1-\lambda k_g) \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 - \lambda \dot{\tau}_g \frac{ds}{ds_1} - \lambda \tau_g \frac{d^2 s}{ds_1^2} \right) \vec{T} \Big\rangle$$

elde edilir. $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = -1$ olduğundan

$$k_{g_1} = k_n \left[ (1-\lambda k_g)^2 - \lambda^2 \tau_g^2 \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 + \left[ \lambda \dot{\tau}_g (1-\lambda k_g) + \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 \qquad (3.4.16)$$

bulunur. Buna bağlı olarak aşağıdaki özel durumlar verilebilir:

**i)** $x$ bir geodezik eğri, yani $k_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = k_n \left( 1 - \lambda^2 \tau_g^2 \right) \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 - \lambda \dot{\tau}_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2,$$

**ii)** $x$ bir asimptotik çizgi, yani $k_n = 0$ ise

$$k_{g_1} = \left[ \lambda \dot{\tau}_g (1-\lambda k_g) + \lambda^2 \tau_g \dot{k}_g \right] \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2,$$

**iii)** $x$ bir eğrilik çizgisi, yani $\tau_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = k_n (1-\lambda k_g)^2 \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^3 \qquad (3.4.17)$$

bulunur.

**Teorem 3.4.3.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik burulması arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\tau_{g_1} = \tau_g \left( \frac{ds}{ds_1} \right)^2 .$$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\tau_{g_1} = \left( \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1, \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right)$$

eşitliğinin sağlandığı biliniyor. Öncelikle eşitlikteki değerleri bulalım,

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

eşitliğinin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \dot{\vec{x}} \frac{ds}{ds_1} - \lambda \dot{\vec{n}}_1 = \left[ \dot{\vec{x}} - \lambda \dot{\vec{g}} \right] \frac{ds}{ds_1} = \left[ \vec{T} - \lambda (k_g \vec{T} - \tau_g \vec{n}) \right] \frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{T}_1 = \left[ (1 - \lambda k_g)\vec{T} + \lambda \tau_g \vec{n}) \right] \frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = (1 - \lambda k_g) \frac{ds}{ds_1} \vec{T} + \lambda \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g} = \vec{n}_1$ olduğundan

$$\frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds_1} = \frac{d\vec{g}}{ds} \frac{ds}{ds_1} = \left[ k_g \vec{T} - \tau_g \vec{n} \right] \frac{ds}{ds_1}$$

olur. Bu eşitlik $\vec{n}_1$ ile vektörel çarpılırsa

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \vec{g} \times \left[ k_g \vec{T} - \tau_g \vec{n} \right] \frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} = \left[ k_g \vec{n} - \tau_g \vec{T} \right] \frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir ve $\tau_{g_1} = \left( \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1, \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right) = \left\langle \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right\rangle$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\tau_{g_1} = \left\langle \frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1 \times \frac{d\vec{n}_1}{ds_1} \right\rangle = \left\langle (1 - \lambda k_g) \frac{ds}{ds_1} \vec{T} + \lambda \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n}, -\tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{T} + k_g \frac{ds}{ds_1} \vec{n} \right\rangle$$

$$\tau_{g_1} = -(1 - \lambda k_g)\tau_g \left( \frac{ds_1}{ds} \right)^2 \left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle + \lambda \tau_g k_g \left( \frac{ds_1}{ds} \right)^2 \left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle = -1$ olduğundan

$$\tau_{g_1} = \tau_g (1-\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \lambda \tau_g k_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

$$\tau_{g_1} = \tau_g \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \tag{3.4.18}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.4.6), (3.4.18) de yerine yazılırsa

$$\tau_g \tau_{g_1} = \frac{\cosh^2\theta}{\lambda^2}$$

elde edilir. Bu taktirde, (3.4.6) ve (3.4.18) eşitliklerinden şu sonuçları verebiliriz.

**Sonuç 3.4.1.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde $x_1$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g \tau_{g_1} = \frac{\cosh^2\theta}{\lambda^2}$$

bağıntısı vardır. Böylece $x$ Mannheim $D$-eğrisi eğrilik çizgisi iken $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrisi de bir eğrilik çizgisidir.

Benzer şekilde (3.4.6) ve (3.4.18) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_g}{\tau_{g_1}} = \frac{\sinh^2\theta}{(1+\lambda k_{n_1})^2}$$

yazabiliriz. Bu taktirde, eğer $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri ise, yani, $k_{n_1} = 0$ ise

$$\tau_g = \sinh^2\theta\, \tau_{g_1} \tag{3.4.19}$$

olur.

**Sonuç 3.4.2.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Eğer $\theta$, $x$ ve $x_1$ eğrilerinin noktalarına karşılık gelen noktalarındaki $T$ ve $T_1$ teğet vektörleri arasındaki açı olmak üzere, $x_1(s_1)$ bir asimtotik eğri ise bu taktirde $x(s)$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması ve $x_1(s_1)$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g = \sinh^2\theta\tau_{g_1}$$

bağıntısı vardır.

**Teorem 3.4.4.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, geodezik burulması ile $x_1$ eğrisinin normal eğriliği, geodezik burulması arasında

$$k_{n_1} - k_g = \lambda(k_g k_{n_1} - \tau_g \tau_{g_1})$$

bağıntısı sağlanır.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun. $\lambda(s_1)$ belli bir fonksiyon olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.4.20}$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ yayına göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) + \dot{\lambda}\vec{n}_1 \tag{3.4.21}$$

elde edilir. $\lambda$, sıfırdan farklı bir sabit olarak düşünülürse

$$\vec{T} = (1 + \lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds}\vec{g}_1 \tag{3.4.22}$$

olur. Buna göre

$$\vec{T} = \sinh\theta\,\vec{T}_1 + \cosh\theta\,\vec{g}_1 \tag{3.4.23}$$

yazılabilir. (3.4.22) ve (3.4.23) denklemlerinden

$$\sinh\theta = (1 + \lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}, \quad \cosh\theta = \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} \tag{3.4.24}$$

elde edilir. $\vec{n}_1$ ve $\vec{g}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\dot{\vec{g}} = (1 - \lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} + \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \tag{3.4.25}$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = -\sinh\theta\,\vec{T} + \cosh\theta\,\vec{n} \tag{3.4.26}$$

olduğundan, (3.4.25) ve (3.4.26) denklemlerinden

$$-\sinh\theta = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}, \quad \cosh\theta = \lambda\tau_g \frac{ds}{ds_1} \tag{3.4.27}$$

elde edilir. (3.4.24) ve (3.4.27) denklemlerinden

$$-\sin^2 h\theta = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}(1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds} = 1+\lambda(-k_g+k_{n_1})-\lambda^2 k_g k_{n_1}$$

$$\cos^2 h\theta = \lambda\tau_g \frac{ds}{ds_1}\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} = \lambda^2\tau_g\tau_{g_1}$$

$$\cos^2 h\theta - \sin^2 h\theta = 1 = 1+\lambda(-k_g+k_{n_1})-\lambda^2(k_g k_{n_1}-\tau_g\tau_{g_1})$$

$$k_{n_1}-k_g = \lambda(k_g k_{n_1}-\tau_g\tau_{g_1}) \tag{3.4.28}$$

bulunur. Teorem (3.4.4) den aşağıdaki özel durumları verebiliriz, $\{x, x_1\}$ çifti bir Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde,

**i)** Eğer, $x_1$ bir asimtotik eğri ise, bu taktirde

$$k_g = \lambda\tau_g\tau_{g_1},$$

**ii)** Eğer, $x$ ve $x_1$ bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde

$$k_{n_1}-k_g = \lambda k_g k_{n_1},$$

**iii)** Eğer, $x$ bir geodezik eğrilik ise, bu taktirde

$$k_{n_1} = -\lambda\tau_g\tau_{g_1}$$

bulunur.

**Teorem 3.4.5.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi ile $x(s)$ eğrisi timelike ve $S_1$ yüzeyi timelike, $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ ve $x_1$ eğrilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları için aşağıdaki denklemler vardır:

**i)** $k_{g_1} = k_n \dfrac{ds}{ds_1} + \dfrac{d\theta}{ds_1}$

**ii)** $\tau_g \dfrac{ds}{ds_1} = -k_{n_1}\cosh\theta + \tau_{g_1}\sinh\theta$

**iii)** $k_g \dfrac{ds}{ds_1} = -k_{n_1}\sinh\theta + \tau_{g_1}\cosh\theta$

**iv)** $\tau_{g_1} = \left(k_g \cosh\theta - \tau_g \sinh\theta\right)\dfrac{ds}{ds_1}$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun.

**i)** $\left\langle \vec{T}, \vec{T}_1 \right\rangle = \sinh\theta$ eşitliğinin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \vec{T}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1}\vec{g}_1 - k_{n_1}\vec{n}_1 \right\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$\vec{T}_1 = -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n})\frac{ds}{ds_1}, -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1}(\cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}) - k_{n_1}\vec{n}_1 \right\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle k_g \frac{ds}{ds_1}\vec{g} + k_n \frac{ds}{ds_1}\vec{n}, -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1}\cosh\theta\vec{T} - k_{g_1}\sinh\theta\vec{n} - k_{n_1}\vec{n}_1 \right\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_n \cosh\theta \frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle + k_{g_1}\cosh\theta \left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. $\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle = -1$ olduğundan

$$k_{g_1} = k_n \frac{ds}{ds_1} - \frac{d\theta}{ds_1}$$

bulunur.

**ii)** $\left\langle \vec{n}, \vec{n}_1 \right\rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_n \vec{T} + \tau_g \vec{g})\frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\vec{T}_1 = -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{n},k_{n_1}(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n})+\tau_{g_1}(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n})\right\rangle=0$$

$$\left\langle k_n\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{g},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{n},(-k_{n_1}\sinh\theta+\tau_{g_1}\cosh\theta)\vec{T}+(k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta)\vec{n}\right\rangle=0$$

$$\tau_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle+(k_{n_1}\cosh\theta-\tau_{g_1}\sinh\theta)\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle=0$$

$$\tau_g\frac{ds}{ds_1}=-k_{n_1}\cosh\theta+\tau_{g_1}\sinh\theta$$

elde edilir.

**iii)** $\left\langle \vec{T},\vec{n}_1\right\rangle=0$ denkleminin $s_1$ e göre türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{g}_1\right\rangle=0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\vec{T}_1=-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n},\quad \vec{g}_1=\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{n}_1\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$\left\langle (k_g\vec{g}+k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{T},k_{n_1}\left(-\sinh\theta\vec{T}+\cosh\theta\vec{n}\right)+\tau_{g_1}\left(\cosh\theta\vec{T}-\sinh\theta\vec{n}\right)\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{g},\vec{g}\right\rangle+(-k_{n_1}\sinh\theta+\tau_{g_1}\cosh\theta)\left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle=0$$

$$k_g\frac{ds}{ds_1}=-k_{n_1}\sinh\theta+\tau_{g_1}\cosh\theta$$

elde edilir.

**iv)** $\left\langle \vec{g},\vec{g}_1\right\rangle=0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{T}-\tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1},\vec{g}_1\right\rangle+\left\langle \vec{g},k_{g_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle=0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1 = -\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g\vec{T} - \tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{g}, k_{g_1}\left(-\sinh\theta\vec{T} + \cosh\theta\vec{n}\right) + \tau_{g_1}\vec{n}_1 \right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}, \cosh\theta\vec{T} - \sinh\theta\vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{g}, -k_{g_1}\sinh\theta\vec{T} + k_{g_1}\cosh\theta\vec{n} + \tau_{g_1}\vec{g} \right\rangle = 0$$

$$k_g\cosh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle + \tau_g\sinh\theta\frac{ds}{ds_1}\left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle + \tau_{g_1}\left\langle \vec{g}, \vec{g} \right\rangle = 0$$

elde edilir. $\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle = -1$ olduğundan

$$\tau_{g_1} = \left(k_g\cosh\theta - \tau_g\sinh\theta\right)\frac{ds}{ds_1}$$

olur.

**5. Durum.** $\{x, x_1\}$ çifti Mannheim partner $D$-eğriler olsun. $S$ yüzeyi timelike, $x$ eğrisi spacelike iken $S_1$ yüzeyi ile $x_1$ eğrisi spacelike olabilir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\vec{T}}_1 \\ \dot{\vec{g}}_1 \\ \dot{\vec{n}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_{g_1} & k_{n_1} \\ -k_{g_1} & 0 & \tau_{g_1} \\ k_{n_1} & \tau_{g_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{T}_1 \\ \vec{g}_1 \\ \vec{n}_1 \end{pmatrix}$$

ve çatı elemanlarının vektörel çarpımları da sırasıyla

$$\begin{array}{ll} \vec{T} \times \vec{g} = -\vec{n} & \vec{T}_1 \times \vec{g}_1 = \vec{n}_1 \\ \vec{g} \times \vec{n} = -\vec{T}\ , & \vec{g}_1 \times \vec{n}_1 = -\vec{T}_1 \\ \vec{n} \times \vec{T} = \vec{g} & \vec{n}_1 \times \vec{T}_1 = -\vec{g}_1 \end{array}$$

biçiminde verilir.

**Teorem 3.5.1.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi timelike, $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun $\Leftrightarrow \lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x_1$ eğrisinin $k_{n_1}$ normal eğriliği, $k_{g_1}$ geodezik eğriliği, $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $k_n$ normal eğriliği arasında aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2}{(1+\lambda k_{n_1})}\right)\left(-k_n\frac{1+\lambda k_{n_1}}{\cos\theta}-k_{g_1}\right)+\frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}\right]$$

**İspat.** Kabul edelimki $x(s)$ bir Mannheim $D$-eğrisidir. Bu taktirde tanımdan bir $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\vec{x}(s_1)=\vec{x}_1(s_1)+\lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.5.1}$$

yazılabilir. Şimdi bu denklemin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}+\dot{\lambda}(s_1)\vec{n}_1(s_1)+\lambda(s_1)\dot{\vec{n}}_1(s_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=\vec{T}_1+\dot{\lambda}\vec{n}_1+\lambda(k_{n_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{g}_1)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1}=(1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1+\dot{\lambda}\vec{n}_1+\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1$$

elde edilir. Bu denklem $\vec{n}_1=\vec{g}$ ile iç çarpılırsa

$$\frac{ds}{ds_1}\left\langle\vec{T},\vec{g}\right\rangle=(1+\lambda k_{n_1})\left\langle\vec{T}_1,\vec{n}_1\right\rangle+\dot{\lambda}\left\langle\vec{n}_1,\vec{n}_1\right\rangle+\lambda\tau_{g_1}\left\langle\vec{g}_1,\vec{n}_1\right\rangle$$

ve buradan $\dot{\lambda}=0$, yani $\lambda$ bir sabittir. O halde

$$\frac{ds}{ds_1}\vec{T}=\vec{T}_1+\lambda\dot{\vec{n}}_1=\vec{T}_1+\lambda(k_{n_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{g}_1) \tag{3.5.2}$$

$$\frac{ds}{ds_1}\vec{T}=(1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1+\lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.5.3}$$

yazılır.

$$\vec{T}=\cos\theta\vec{T}_1+\sin\theta\,\vec{g}_1 \tag{3.5.4}$$

denkleminin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=(k_{g_1}\vec{g}_1+k_{n_1}\vec{n}_1)\cosh\theta+\dot{\theta}(-\sin\theta)\vec{T}_1+(-k_{g_1}\vec{T}_1+\tau_{g_1}\vec{n}_1)\sin\theta+\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{g}_1$$

$$(k_g\vec{g}-k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1}=(-\dot{\theta}-k_{g_1})\sin\theta\vec{T}_1+(\dot{\theta}+k_{g_1})\cos\theta\vec{g}_1+(k_{n_1}\cos\theta+\tau_{g_1}\sin\theta)\vec{n}_1$$

elde edilir. Şimdi bu denklemde

$$\vec{n} = -\sin\theta \vec{T}_1 + \cos\theta\, \vec{g}_1$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$(k_g \vec{g} + k_n \sin\theta \vec{T}_1 - k_n \cos\theta \vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (-\dot{\theta} - k_{g_1})\sin\theta \vec{T}_1 + (\dot{\theta} + k_{g_1})\cos\theta \vec{g}_1$$
$$+ (k_{n_1}\cos\theta + \tau_{g_1}\sin\theta)\vec{n}_1$$

olur. $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olduğu için $\vec{n}$ ile $\vec{g}_1$ lineer bağımlı olacağından eşitliğin her iki tarafındaki $\vec{T}_1$ ve $\vec{n}_1$ in katsayıları eşittir.

$$\dot{\theta} = -k_n \frac{ds}{ds_1} - k_{g_1} \tag{3.5.5}$$

bulunur. (4.5.4) denklemi (4.5.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\cos\theta \vec{T}_1 + \sin\theta\, \vec{g}_1)\frac{ds}{ds_1} = (1 + \lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda \tau_{g_1} \vec{g}_1$$

ve buradan

$$\cos\theta \frac{ds}{ds_1} = (1 + \lambda k_{n_1}), \quad \sin\theta \frac{ds}{ds_1} = \lambda \tau_{g_1}$$

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1 + \lambda k_{n_1}}{\cos\theta} = \frac{\lambda \tau_{g_1}}{\sin\theta}, \quad \tan\theta = \frac{\lambda \tau_{g_1}}{1 + \lambda k_{n_1}} \tag{3.5.6}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden bulunan $\lambda \tau_{g_1} = \tan\theta\ (1 + \lambda k_{n_1})$ denkleminin $s_1$ yayına göre türevi alınırsa

$$\lambda \dot{\tau}_{g_1} = \left(1 + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1}^2}{(1 + \lambda k_{n_1})^2}\right)\dot{\theta}(1 + \lambda k_{n_1}) + \left(\frac{\lambda \tau_{g_1}}{1 + \lambda k_{n_1}}\right)\lambda \dot{k}_{n_1}$$

bulunur ve (3.5.5) dikkate alınırsa

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{(1 + \lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2 \tau_{g_1}^2}{(1 + \lambda k_{n_1})}\right)\left(-k_n \frac{1 + \lambda k_{n_1}}{\cos\theta} - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1}}{1 + \lambda k_{n_1}}\right] \tag{3.5.7}$$

bulunur. (3.5.6) denklemindeki değerler (3.5.7) de yazılırsa

$$\lambda \dot{\tau}_{g_1}(1 + \lambda k_{n_1}) - \lambda^2 \tau_{g_1} \dot{k}_{n_1} + \left((1 + \lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2 \tau_{g_1}^2\right) k_{g_1} = -k_n \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \tag{3.5.8}$$

elde edilir.

Tersine, $\lambda$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.5.9}$$

bir eğrisini alalım. Bu denklemin iki kere türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda\vec{n}_1 = \vec{T}_1 + \lambda\left(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1\right)$$

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_{n_1})\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\vec{g}_1 \tag{3.5.10}$$

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g} - k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T} &= \lambda\dot{k}_{n_1}\vec{T}_1 + (1+\lambda k_{n_1})(k_{g_1}\vec{g}_1 + k_{n_1}\vec{n}_1)\\ &+ \lambda\dot{\tau}_{g_1}\vec{g}_1 + \lambda\tau_{g_1}(-k_{g_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{n}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k_g\vec{g} - k_n\vec{n})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \frac{d^2s}{ds_1^2}\vec{T} &= (\lambda\dot{k}_{n_1} - \lambda\tau_{g_1}k_{g_1})\vec{T}_1 + \left((1+\lambda k_{n_1})k_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}^2\right)\vec{n}_1\\ &+ \left((1+\lambda k_{n_1})k_{g_1} + \lambda\dot{\tau}_{g_1}\right)\vec{g}_1\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

elde edilir. (3.5.10) ile (3.5.11) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[k_g(\vec{T}\times\vec{g}) - k_n(\vec{T}\times\vec{n})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 &= (1+\lambda k_{n_1})\left[(1+\lambda k_{n_1})k_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}^2\right](\vec{T}_1\times\vec{n}_1)\\ &+ \lambda\tau_{g_1}(\lambda\dot{k}_{n_1} - \lambda\tau_{g_1}k_{g_1})(\vec{g}_1\times\vec{T}_1)\\ &+ \left((1+\lambda k_{n_1})^2 k_{g_1} + \lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)(\vec{T}_1\times\vec{g}_1)\\ &+ \left(\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) + \lambda^2\tau_{g_1}^3\right)(\vec{g}_1\times\vec{n}_1)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\left[-k_g\vec{n} + k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 &= \left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1\\ &+ \left[k_{g_1}(1+\lambda k_{n_1})^2 + \lambda\dot{\tau}_{g_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1} + \lambda^2\tau_{g_1}^2 k_{g_1}\right]\vec{n}_1\\ &+ \left[(1+\lambda k_{n_1})^2 k_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right]\vec{g}_1\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

elde edilir. (3.5.8), (3.5.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left[-k_g\vec{n} + k_n\vec{g}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 &= \left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1}) - \lambda^2\tau_{g_1}^3\right)\vec{T}_1\\ &+ \left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2 + \lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{g}_1\\ &- k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{n}_1\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

bulunur. Ayrıca (3.5.13) ile (3.5.10) denklemi vektörel çarpılırsa

$$\left[-k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})+\lambda^3\tau_{g_1}^4\right)\vec{n}_1$$
$$+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

$$\left[-k_g(\vec{T}\times\vec{n})+k_n(\vec{T}\times\vec{g})\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=\left(\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})+\lambda^3\tau_{g_1}^4+k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^3+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})^2\right)\vec{n}_1$$
$$-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1$$

$$\left[k_g\vec{g}-k_n\vec{n}\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3(1+\lambda k_{n_1})\vec{g}_1+k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}\vec{T}_1 \qquad (3.5.14)$$
$$+\left((1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2+k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1$$

denklemi bulunur. . Şimdi (3.5.13) ve (3.5.14) denklemleri düzenlenirse

$$k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}-k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{T}_1$$
$$+\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)\vec{g}_1 \qquad (3.5.15)$$
$$-k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}_1$$

ve

$$k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{g}-k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{T}_1-k_n^2(1+\lambda k_{n_1})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\vec{g}_1 \qquad (3.5.16)$$
$$+k_n\left((1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2+k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\vec{n}_1$$

bulunur. Burada (3.5.15) denkleminden (3.5.16) denklemi çıkarılırsa

$$\left(-k_g^2+k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1$$
$$+\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)+(1+\lambda k_{n_1})k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1$$
$$-\left[k_nk_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4+k_n\left((1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2+k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})\right)\right]\vec{n}_1$$

olur. (3.5.10) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$\left((1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)=\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

denklemi ve (3.5.13) denkleminin kendisiyle iç çarpımından elde edilen

$$k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda\tau_{g_1}^2+k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})=0$$

denklemi son eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\left(-k_g^2+k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4\vec{n}=\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})-\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{T}_1$$
$$+\left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1+\lambda k_{n_1})^2+\lambda\tau_{g_1}^2(1+\lambda k_{n_1})\right)+(1+\lambda k_{n_1})k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]\vec{g}_1$$

bulunur. Burada $\vec{n}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde ve (3.5.10) denkleminde de $\vec{T}$ vektörü $\vec{T}_1$ ve $\vec{g}_1$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalır. Dolayısıyla $\vec{g}$ ve $\vec{n}_1$ vektörü ile aynı doğrultudadır. Sonuç olarak $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrilerdir. ■

Şimdi bazı özel durumlar için Mannheim partner $D$-eğrilerinin karekterizasyonlarını verelim. Kabul edelimki $x(s)$ bir asimptotik Mannheim $D$-eğri olsun. Bu taktirde (3.5.7) denkleminin özel durumlarını verebiliriz:

**i)** $x_1(s_1)$ eğrisi bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ aşağıdaki denklem sağlanır,

$$\dot{\tau}_{g_1}=\frac{\lambda\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1+\lambda k_{n_1}}.$$

**ii)** Kabul edelim ki $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri olsun. Bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisinin $k_{g_1}$ geodezik eğriliği ve $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1} = -k_{g_1}(1+\lambda^2\tau_{g_1}^2)$$

bağıntısı vardır. Bu, Liu ve Wang [19] 'ın bulduğu eşitliktir.

**iii)** Eğer $x_1(s_1)$ eğrisi bir eğrilik çizgisi ise bu taktirde $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner $D$-eğrisidir $\Leftrightarrow$ $x_1(s_1)$ eğrisi için

$$k_{g_1} = 0 \ \ veya \ \ k_{n_1} = -1/\lambda$$

olur.

**Teorem 3.5.2.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi timelike, $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği, geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik eğriliği arasında

$$k_{g_1} = -k_n\left[(1-\lambda k_g)^2 + \lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 + \left[-\lambda\dot{\tau}_g(1-\lambda k_g) - \lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

bağıntısı gerçeklenir.

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun.

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

denkleminin türevini alır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\vec{g} = \left[\vec{T} - \lambda k_g\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \left[(1-\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir. Bu denklemin de türevini alır ve Darboux türev formülleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}\right) = \frac{d}{ds_1}\left(\left[(1-\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\left[-\lambda\dot{k}_g\vec{T}+(1-\lambda k_g)(k_g\vec{g}-k_n\vec{n})\frac{ds}{ds_1}-\lambda\dot{\tau}_g\vec{n}-\lambda\tau_g(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g})\frac{ds}{ds_1}\right]\frac{ds}{ds_1}$$
$$+\left[(1-\lambda k_g)\vec{T}-\lambda\tau_g\vec{n}\right]\frac{d^2s}{ds_1^2}$$

$$\frac{d^2\vec{x}_1}{ds_1^2}=\left(-\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}+\left(k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\tau_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\right)\vec{g}$$
$$+\left(-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g}=\vec{n}_1$ ve

$$k_{g_1}=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1\right\rangle=\left\langle\dot{\vec{x}}_1,\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}\right\rangle$$

olduğundan

$$\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1=\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}=\left(-\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{T}\times\vec{g})$$
$$+\left(-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)(\vec{n}\times\vec{g})$$

$$\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{n}_1=\ddot{\vec{x}}_1\times\vec{g}=\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}$$
$$+\left(-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\lambda k_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}$$

bulunur. Bu değerler yerlerine yazılırsa

$$k_{g_1}=\Bigg\langle(1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T}-\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},$$
$$\left(\lambda\dot{k}_g\frac{ds}{ds_1}+\lambda\tau_g k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-(1-\lambda k_g)\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{n}+\left(-k_n(1-\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\dot{\tau}_g\frac{ds}{ds_1}-\lambda\tau_g\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\vec{T}\Bigg\rangle$$

$$k_{g_1}=-k_n\left[(1-\lambda k_g)^2+\lambda^2\tau_g^2\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3+\left[-\lambda\dot{\tau}_g(1-\lambda k_g)-\lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \qquad (3.5.16)$$

bulunur. Buna bağlı olarak aşağıdaki özel durumlar verilebilir:

**i)** $x$ bir geodezik eğri, yani $k_g=0$ ise

$$k_{g_1} = -k_n\left(1+\lambda^2\tau_g^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 - \lambda\dot{\tau}_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2,$$

**ii)** $x$ bir asimptotik çizgi, yani $k_n = 0$ ise

$$k_{g_1} = \left[-\lambda\dot{\tau}_g(1-\lambda k_g) - \lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2,$$

**iii)** $x$ bir eğrilik çizgisi, yani $\tau_g = 0$ ise

$$k_{g_1} = -k_n(1-\lambda k_g)^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \tag{3.5.17}$$

bulunur.

**Teorem 3.5.3.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi timelike, $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik burulması ve $x_1$ eğrisinin geodezik burulması arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\tau_{g_1} = -\tau_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2.$$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğrileri olsun.

$$\tau_{g_1} = \left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1}, \vec{n}_1, \frac{d\vec{n}_1}{ds_1}\right)$$

eşitliğinin sağlandığı biliniyor. Burada

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

eşitliğinin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = \dot{\vec{x}}\frac{ds}{ds_1} - \lambda\vec{n}_1 = \left[\dot{\vec{x}} - \lambda\dot{\vec{g}}\right]\frac{ds}{ds_1} = \left[\vec{T} - \lambda(k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{T}_1 = \left[(1-\lambda k_g)\vec{T} - \lambda\tau_g\vec{n})\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{ds_1} = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}$$

elde edilir. $\vec{g} = \vec{n}_1$ olduğundan

$$\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}=\frac{d\vec{g}}{ds_1}=\frac{d\vec{g}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\left[k_g\vec{T}-\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

olur. Bu denklem $\vec{n}_1$ ile vektörel çarpılırsa

$$\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}=\vec{g}\times\left[k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

$$\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}=\left[k_g\vec{n}-\tau_g\vec{T}\right]\frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir ve $\tau_{g_1}=\left(\frac{d\vec{x}_1}{ds_1},\vec{n}_1,\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}\right)=\left\langle\frac{d\vec{x}_1}{ds_1},\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}\right\rangle$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\tau_{g_1}=\left\langle\frac{d\vec{x}_1}{ds_1},\vec{n}_1\times\frac{d\vec{n}_1}{ds_1}\right\rangle=\left\langle(1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T}-\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n},-\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T}+k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}\right\rangle$$

$$\tau_{g_1}=-(1-\lambda k_g)\tau_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle\vec{T},\vec{T}\right\rangle-\lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left\langle\vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

$$\tau_{g_1}=-\tau_g(1-\lambda k_g)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2-\lambda\tau_g k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2$$

$$\tau_{g_1}=-\tau_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \qquad (3.5.18)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.5.6), (3.5.18) de yerine yazılırsa

$$\tau_g\tau_{g_1}=-\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

elde edilir. Bu taktirde, (3.5.6) ve (3.5.18) eşitliklerinden şu sonuçları verebiliriz.

**Sonuç 3.5.1.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Bu taktirde $x_1$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması ve $x$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g\tau_{g_1}=-\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

bağıntısı vardır. Böylece $x$ Mannheim $D$-eğrisi eğrilik çizgisi iken $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrisi de bir eğrilik çizgisidir.

Benzer şekilde (3.5.6) ve (3.5.18) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_g}{\tau_{g_1}} = -\frac{\cos^2\theta}{(1+\lambda k_{n_1})^2}$$

yazabiliriz. Bu taktirde, eğer $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri ise, yani, $k_{n_1} = 0$ ise

$$\tau_g = -\cos^2\theta\ \tau_{g_1} \tag{3.5.19}$$

olur.

**Sonuç 3.5.2.** $x$ bir Mannheim $D$-eğri ve $x_1$, $x$ eğrisinin bir Mannheim partner $D$-eğrisi olsun. Eğer $\theta$, $x$ ve $x_1$ eğrilerinin noktalarına karşılık gelen noktalarındaki $T$ ve $T_1$ teğet vektörleri arasındaki açı olmak üzere, $x_1(s_1)$ bir asimtotik eğri ise bu taktirde $x(s)$ eğrisinin $\tau_g$ geodezik burulması ve $x_1(s_1)$ eğrisinin $\tau_{g_1}$ geodezik burulması arasında

$$\tau_g = -\cos^2\theta\tau_{g_1}$$

bağıntısı vardır.

**Teorem 3.5.4.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi timelike, $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ eğrisinin geodezik eğriliği, geodezik burulması ile $x_1$ eğrisinin normal eğriliği, geodezik burulması arasında şöyle bir ilişki vardır:

$$k_{n_1} - k_g = \lambda(k_g k_{n_1} - \tau_g \tau_{g_1}).$$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun. $\lambda(s_1)$ belli bir fonksiyon olmak üzere

$$\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1(s_1) + \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) \tag{3.5.20}$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ yayına göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}\frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 + \lambda(k_{n_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{g}_1) + \dot{\lambda}\vec{n}_1 \tag{3.5.21}$$

elde edilir. $\lambda$, sıfırdan farklı bir sabit olarak düşünülürse

$$\vec{T} = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}\vec{T}_1 + \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds}\vec{g}_1 \tag{3.5.22}$$

olur. Buna göre

$$\vec{T} = \cos\theta \vec{T}_1 + \sin\theta \vec{g}_1 \qquad (3.5.23)$$

yazılabilir. (4.5.22) ve (4.5.23) denklemlerinden

$$\cos\theta = (1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds}, \quad \sin\theta = \lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} \qquad (3.5.24)$$

elde edilir. $\vec{n}_1$ ve $\vec{g}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{n}_1(s_1) = \vec{x}(s_1) - \lambda(s_1)\vec{g}(s_1)$$

yazılabilir. Bu denklemin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{T}_1 = \frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\dot{\vec{g}} = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\vec{T} - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n} \qquad (3.5.25)$$

elde edilir.

$$\vec{T}_1 = \cos\theta\vec{T} - \sin\theta\vec{n} \qquad (3.5.26)$$

olduğundan, (3.5.25) ve (3.5.26) denklemlerinden

$$\cos\theta = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}, \quad \sin\theta = \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1} \qquad (3.5.27)$$

elde edilir. (3.5.24) ve (3.5.27) denklemlerinden

$$\cos^2\theta = (1-\lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}(1+\lambda k_{n_1})\frac{ds_1}{ds} = 1+\lambda(-k_g+k_{n_1}) - \lambda^2 k_g k_{n_1}$$

$$\sin^2\theta = \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} = \lambda^2\tau_g\tau_{g_1}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 = 1+\lambda(-k_g+k_{n_1}) - \lambda^2(k_g k_{n_1} - \tau_g\tau_{g_1})$$

$$k_{n_1} - k_g = \lambda(k_g k_{n_1} - \tau_g\tau_{g_1}) \qquad (3.5.28)$$

bulunur. Teorem (3.5.4) den aşağıdaki özel durumları verebiliriz, $\{x, x_1\}$ çifti bir Mannheim $D$-çifti olsun. Bu taktirde,

**i)** Eğer, $x_1$ bir asimtotik eğri ise, bu taktirde

$k_g = \lambda\tau_g\tau_{g_1}$,

**ii)** Eğer, $x$ ve $x_1$ bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde

$k_{n_1} - k_g = \lambda k_g k_{n_1}$,

**iii)** Eğer, $x$ bir geodezik eğrilik ise, bu taktirde

$k_{n_1} = -\lambda\tau_g\tau_{g_1}$

bulunur.

**Teorem 3.5.5.** $E_1^3$ de $S$ yüzeyi timelike, $x(s)$ eğrisi spacelike ve $S_1$ yüzeyi ile $x_1(s_1)$ eğrisi spacelike olmak üzere, $x$ ve $x_1$ Mannheim partner $D$-eğrileri olsun. $x$ ve $x_1$ eğrilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları için aşağıdaki denklemler vardır:

**i)** $k_{g_1} = -k_n \dfrac{ds}{ds_1} - \dfrac{d\theta}{ds_1}$

**ii)** $\tau_g \dfrac{ds}{ds_1} = -k_{n_1} \cos\theta + \tau_{g_1} \sin\theta$

**iii)** $k_g \dfrac{ds}{ds_1} = k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta$

**iv)** $\tau_{g_1} = \left(k_g \cos\theta + \tau_g \sin\theta\right)\dfrac{ds}{ds_1}$

**İspat.** $\{x, x_1\}$ çifti $E_1^3$ de Mannheim partner D-eğriler olsun.

**i)** $\langle \vec{T}, \vec{T}_1 \rangle = \cos\theta$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} + k_n \vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \vec{T}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1}\vec{g}_1 + k_{n_1}\vec{n}_1 \right\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\vec{T}_1 = \cos\theta\vec{T} - \sin\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \sin\theta\vec{T} + \cos\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ in lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} - k_n \vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \cos\theta\vec{T} - \sin\theta\vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1}(\sin\theta\vec{T} + \cos\theta\vec{n}) + k_{n_1}\vec{n}_1 \right\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle k_g \frac{ds}{ds_1}\vec{g} - k_n \frac{ds}{ds_1}\vec{n}, \cos\theta\vec{T} - \sin\theta\vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{g_1}\sin\theta\vec{T} + k_{g_1}\cos\theta\vec{n} + k_{n_1}\vec{n}_1 \right\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_n \sin\theta \frac{ds}{ds_1}\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle + k_{g_1}\sin\theta \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_{g_1} = -k_n \frac{ds}{ds_1} - \frac{d\theta}{ds_1}$$

bulunur.

**ii)** $\langle \vec{n}, \vec{n}_1 \rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_n \vec{T} + \tau_g \vec{g}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1} \vec{T}_1 + \tau_{g_1} \vec{g}_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\vec{T}_1 = \cos\theta \vec{T} - \sin\theta \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \sin\theta \vec{T} + \cos\theta \vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_n \vec{T} + \tau_g \vec{g}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{n}, k_{n_1} (\cos\theta \vec{T} - \sin\theta \vec{n}) + \tau_{g_1} (\sin\theta \vec{T} + \cos\theta \vec{n}) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_n \frac{ds}{ds_1} \vec{T} + \tau_g \frac{ds}{ds_1} \vec{g}, \vec{g} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, (k_{n_1} \cos\theta + \tau_{g_1} \sin\theta) \vec{T} + (-k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta) \vec{n} \right\rangle = 0$$

$$\tau_g \frac{ds}{ds_1} \langle \vec{g}, \vec{g} \rangle + (-k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta) \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$\tau_g \frac{ds}{ds_1} = -k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta$$

elde edilir.

**iii)** $\langle \vec{T}, \vec{n}_1 \rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} - k_n \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{n_1} \vec{T}_1 + \tau_{g_1} \vec{g}_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_1 = \cos\theta \vec{T} - \sin\theta \vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \sin\theta \vec{T} + \cos\theta \vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları dikkate alınırsa

$$\left\langle (k_g \vec{g} - k_n \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{n}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{n_1} \left(\cos\theta \vec{T} - \sin\theta \vec{n}\right) + \tau_{g_1} \left(\sin\theta \vec{T} + \cos\theta \vec{n}\right) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle (k_g \vec{g} - k_n \vec{n}) \frac{ds}{ds_1}, \vec{g} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, k_{n_1} \left(\cos\theta \vec{T} - \sin\theta \vec{n}\right) + \tau_{g_1} \left(\sin\theta \vec{T} + \cos\theta \vec{n}\right) \right\rangle = 0$$

$$k_g \frac{ds}{ds_1}\langle \vec{g},\vec{g}\rangle + (k_{n_1}\cos\theta + \tau_{g_1}\sin\theta)\langle \vec{T},\vec{T}\rangle = 0$$

$$k_g \frac{ds}{ds_1} = k_{n_1}\cos\theta + \tau_{g_1}\sin\theta$$

elde edilir.

**iv)** $\langle \vec{g},\vec{g}_1\rangle = 0$ denkleminin $s_1$ e göre türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle (k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \vec{g}_1\right\rangle + \left\langle \vec{g}, -k_{g_1}\vec{T}_1 + \tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle = 0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\vec{T}_1 = \cos\theta\vec{T} - \sin\theta\vec{n}, \quad \vec{g}_1 = \sin\theta\vec{T} + \cos\theta\vec{n}$$

eşitlikleri ve $\vec{n}_1$ ile $\vec{g}$ nin lineer bağımlı oldukları göz önüne alınırsa

$$\left\langle (k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n})\frac{ds}{ds_1}, \sin\theta\vec{T} + \cos\theta\vec{n}\right\rangle + \left\langle \vec{g}, -k_{g_1}\left(\cos\theta\vec{T} - \sin\theta\vec{n}\right) + \tau_{g_1}\vec{n}_1\right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_g\frac{ds}{ds_1}\vec{T} + \tau_g\frac{ds}{ds_1}\vec{n}, \sin\theta\vec{T} + \cos\theta\vec{n}\right\rangle + \left\langle \vec{g}, -k_{g_1}\cos\theta\vec{T} + k_{g_1}\sin\theta\vec{n} + \tau_{g_1}\vec{g}\right\rangle = 0$$

$$k_g\sin\theta\frac{ds}{ds_1}\langle \vec{T},\vec{T}\rangle + \tau_g\cos\theta\frac{ds}{ds_1}\langle \vec{n},\vec{n}\rangle + \tau_{g_1}\langle \vec{g},\vec{g}\rangle = 0$$

$$\tau_{g_1} = \left(k_g\sin\theta + \tau_g\cos\theta\right)\frac{ds}{ds_1}$$

bulunur.

## KAYNAKLAR

[1] Akbulut, F. *“ Vektörel Analiz ”* Ege Üniversitesi Matbaası, No.25, Bornova, İzmir.

[2] Akbulut, F., *“ Bir yüzey üzerindeki eğrilerin Darboux vektörleri ”* Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, İzmir (1983).

[3] Beem, J. K., Ehrlich, P. E., *“ Global Lorentzian geometry ”* Marcel Deccer, Inc. New York, (1981).

[4] Biran, L., *“Diferensiyel Geometri”* İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, 1970.

[5] Birman, G. S., Nomizu, K., *“ Trigonometry in Lorentzian Geometry ”*, Ann. Math. Mont. 91(9), (1984), 534-549.

[6] Blaschke, W., *“Differential Geometrie and Geometrischke Grundlagen ven Einsteins Relativitasttheorie Dover”*, New York, (1945).

[7] Burke J. F., *“Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves”,* Mathematics Magazine, Vol. 34, No. 1. (Sep. - Oct., 1960), pp. 60-62.

[8] Ergin A. A., *“ Lorentz düzleminde Kinematik geometri ”* Doktora Tezi, A. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü (1989).

[9] Ferrandez, A., Lucas, P., *“ On surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space”* Pasific J. of Math. Vol.152, No.1, (1992).

[10] Görgülü, E., Ozdamar, E., *“A generalizations of the Bertrand curves as general inclined curves in* $E^n$ *”,* Communications de la Fac. Sci. Uni. Ankara, Series A1, 35 (1986), 53-60.

[11] Hacisalihoğlu, H. H., *“Diferansiyel Geometri”*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları No:2, (1983).

[12] Izumiya, S., Takeuchi, N., *“Special Curves and Ruled surfaces”*, Beitr¨age zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry, Vo. 44, No. 1, 203-212, 2003.

[13] Izumiya, S., Takeuchi, N., *“Generic properties of helices and Bertrand curves*”, Journal of Geometry 74 (2002) 97–109.

[14] Kazaz, M., Onder, M., *“Mannheim offsets of timelike ruled surfaces in Minkowski 3-space”*, arXiv:0906.2077v3 [math.DG].

[15] Kazaz M., Uğurlu H. H., Onder M., *"Mannheim offsets of spacelike ruled surfaces in Minkowski 3-space"*, arXiv:0906.4660v2 [math.DG].

[16] Kocayiğit, H., *"Minkowski 3-Uzayında Time-like Asal Normalli Space-like Eğrilerin Frenet ve Darboux vektörleri",* C.B.Ü. Fen Bilimleri Enstisüsü Yüksek Lisans Tezi, 2004.

[17] Kurnaz, M., *"Timelike Regle Yüzeylerin Bertrand Ofsetleri",* C.B.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 2004.

[18] Lipschutz, M. M., *"Differential Geometry",* McGraw-Hıll Book Company. 1969.

[19] Liu, H., Wang, F., *"Mannheim partner curves in 3-space",* Journal of Geometry, vol. 88, no. 1-2, pp. 120-126, 2008.

[20] O'Neill, B., *" Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity "*, Academic Press, London (1983).

[21] O'Neill, B., *"Elemantery Differential Geometry"* Academic Press Inc. New York, 1966.

[22] Orbay, K., Kasap, E., *"On Mannheim partner curves in* $E^3$ *",* International Journal of Physical Sciences Vol. 4 (5), pp. 261-264, May, 2009

[23] Ravani, B., Ku, T. S., *"Bertrand Offsets of ruled and developable surfaces",* Comp. Aided Geom. Design, (23), No. 2, (1991).

[24] Sabuncuoğlu, A., *"Diferensiyel Geometri",* Nobel Yayın Dağıtım, 2006.

[25] Struik, D. J., *"Lectures on Classical Differential Geometry"*, 2nd ed. Addison Wesley, Dover, (1988).

[26] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., *" Timelike regle yüzey üzerindeki bir timelike eğrinin Frenet ve Darboux vektörleri "* I. Spil Fen Bilimleri Kongresi, 04-05 Eylül, 1995, Manisa.

[27] Uğurlu, H. H., " *On the geometry of timelike surfaces "* Communications, Faculty of Sciences, Univercity of Ankara, All Series, Vol. 46, (1997).

[28] Uğurlu, H. H., Kocayiğit, H., *"The Frenet and Darboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on Time-Like Surface",* Mathematical & Computational Applications, Vol. 1, No.2, pp.133-141 (1996).

[29] Uğurlu, H. H., Topal, A., *"Relation Between Daboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on a Time-Like Surfaces",* Mathematical & Computational Applications, Vol. 1, No.2, pp.149-157 (1996).

[30] Yaglom, I. M., *" A simple non-Euclidean geometry and its Physical basis "* Springer-Verlag, New York, (1979).

[31] Yaylı, Y., Çalışkan, A., Uğurlu, H. H. *" The E. Study Maps of Circles on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres* $H_0^2$ *and* $S_1^2$ *"*, Math. Proc. R. Ir. Acad., 102 A, No.1, 37-47, 2000.

[32] Wang, F., Liu, H., *"Mannheim partner curves in 3-Euclidean space",* Mathematics in Practice and Theory, vol. 37, no. 1, pp. 141-143, 2007.

[33] Whittemore, J. K., *"Bertrand curves and helices"*, Duke Math. J. Volume 6, Number 1 (1940), 235-245.

**ÖZGEÇMİŞ**

**Adı :** Tanju

**Soyadı :** Kahraman

**Doğum Yeri ve Tarihi :** Salihli – 10.11.1986

İlkokulu Salihli Cumhuriyet İlkokulunda, orta okulu 50. Yıl orta okulu ve lise öğrenimini Türk Birliği Lisesi'nde tamamlamıştır. 2003 yılında kazandığı Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2008 yılında bitirmiştir. 2010 yılında Celal Bayar Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır. Halen 2008 yılında Celal Bayar Üniversitesinde başlamış olduğu yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.