

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EKSENEL HAREKETLİ ÇOK MESNETLİ ŞERİTLERİN  
NONLİNEER TİTREŞİMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ahmet KESİMLİ**

**Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği**

**Programı : Makina Teorisi ve Dinamiği**

**MANİSA 2010**

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EKSENEL HAREKETLİ ÇOK MESNETLİ ŞERİTLERİN  
NONLİNEER TİTREŞİMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ahmet KESİMLİ**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19.07.2010**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 09.08.2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erdoğan ÖZKAYA**

**Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hakan BOYACI**

**Yrd. Doç. Dr. Muhittin BAĞCI**

**MANİSA 2010**

## İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

İÇİNDEKİLER .....	I
SEMBOL LİSTESİ .....	II
ŞEKİL LİSTESİ .....	IV
KISALTMALAR LİSTESİ .....	X
TEŞEKKÜR .....	XI
ÖZET .....	XII
ABSTRACT .....	XIII
1. GİRİŞ .....	1
2. HAREKET DENKLEMLERİ .....	3
2.1. Hamilton Prensipleriyle Hareket Denklemlerinin elde edilmesi .....	3
2.2. Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması .....	9
3. ANALİTİK ÇÖZÜMLER .....	12
3.1. Lineer Problem .....	14
3.1.1. Orta Bölümde İki Yay Mesnetli Durum İçin Analitik Çözümler .....	15
3.1.2. Orta Bölümde Üç Yay Mesnetli Durum İçin Analitik Çözümler .....	28
3.2. Nonlineer Problem .....	37
3.2.1. $\Omega'$ nın $2\omega'$ ya Yakın Olduğu Durum (Temel Parametrik Rezonans) .....	38
3.2.2. $\Omega'$ nın $0'$ dan ve $2\omega'$ dan Uzak Olduğu Durum .....	74
3.2.3. $\Omega'$ nın $0'$ a Yakın Olduğu Durum .....	106
4. SONUÇLAR VE YORUMLAR .....	108
5. KAYNAKLAR .....	110
6. ÖZGEÇMİŞ .....	112

## SEMBOL LİSTESİ

$A$	: Şeridin kesit alanı
$E$	: Elastisite modülü
$L$	: Şerit uzunluğu
$\mathcal{L}$	: Lagrangian
$\Omega$	: Hız değişim frekansı
$T$	: Kinetik enerji
$V$	: Elastik potansiyel enerji
$W$	: Yer değiştirme fonksiyonunun seküler olmayan terimleri ile ilgili kısmı
$D_0, D_1$	: Hızlı ve yavaş zaman ölçeklerine göre türevler
$\eta$	: Mesnedin boyutsuz konumu
$\phi_n$	: Yer değiştirme fonksiyonunun seküler terimleri ile ilgili kısmı
$T_0, T_1$	: Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri
$Y_{m+1}$	: Yer değiştirmenin mekana ait kısmı
$\frac{d}{dt}$	: Zamana göre türev
$\frac{d}{dx}$	: Mekâna göre türev
$dx^*$	: Şeritten alınan uzamamış parça
$ds^*$	: Şeritten alınan uzamış parça
$\delta$	: Varyasyon
$e_{m+1}$	: Şekil değiştirme
$\varepsilon$	: Küçük perturbasyon parametresi
$\rho$	: Şeridin yoğunluğu
$\sigma$	: Hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olduğunu gösteren ayar parametresi
$t^*$	: Boyutlu zaman değişkeni
$u_{m+1}^*$	: Boyutlu boyuna yer değiştirme
$v^*$	: Boyutlu aksenal hız
$w_{m+1}^*$	: Boyutlu enine yer değiştirme
$x^*, z^*$	: Boyutlu Kartezyen koordinatlar
$a$	: Genlik
$k_0, k_1, k_2, k_3$	: Şeritte çözülebilirlik şartındaki katsayılar
$\lambda$	: Kararlılığı belirleyen özdeğerler

### III

- $v_0$  : Şeridin ortalama hızı  
 $v_1$  : Şerit hızının değişim genliği  
 $v_b$  : Şeridin uzunlamasına esnekliği (boyuna direngenlik)

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa Numarası</u>
Şekil 2.1 Eksenel hareketli çok mesnetli şerit .....	3
Şekil 2.2 Hareketli şeritten alınan dx parçasındaki yer değiştirmeler .....	4
Şekil 3.1 Eksenel hareketli iki adet yay mesnetli şerit .....	15
Şekil 3.2 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ ) .....	19
Şekil 3.3 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ ) .....	19
Şekil 3.4 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ ) .....	20
Şekil 3.5 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ ) .....	20
Şekil 3.6 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ ) .....	21
Şekil 3.7 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ ) .....	21
Şekil 3.8 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ ) .....	22
Şekil 3.9 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ ) .....	22
Şekil 3.10 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ ) .....	23
Şekil 3.11 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ ) .....	23
Şekil 3.12 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ ) .....	24
Şekil 3.13 Değişik yay katsayıları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ ) .....	24
Şekil 3.14 Değişik mesnet konumları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $v_{k1}=v_{k2}=10$ ).....	25
Şekil 3.15 Değişik mesnet konumları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $v_{k1}=v_{k2}=10$ ).....	25
Şekil 3.16 Değişik mesnet konumları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $v_{k1}=v_{k2}=10$ ).....	26
Şekil 3.17 Değişik mesnet konumları için eksenel hızla bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $v_{k1}=v_{k2}=60$ ).....	26

Şekil 3.18 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $v_{k1}=v_{k2}=60$ ).....	27
Şekil 3.19 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $v_{k1}=v_{k2}=60$ ).....	27
Şekil 3.20 Eksenel hareketli üç adet yay mesnetli şerit.....	28
Şekil 3.21 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ ) .....	32
Şekil 3.22 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ ) .....	32
Şekil 3.23 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ ) .....	33
Şekil 3.24 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$ ) .....	33
Şekil 3.25 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$ ) .....	34
Şekil 3.26 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$ ) .....	34
Şekil 3.27 Değişik yay mesnet sayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 1. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ ) .....	35
Şekil 3.28 Değişik yay mesnet sayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 2. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ ) .....	35
Şekil 3.29 Değişik yay mesnet sayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi ( 3. mod, $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ ) .....	36
Şekil 3.30 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	47
Şekil 3.31 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	47
Şekil 3.32 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	48
Şekil 3.33 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	48
Şekil 3.34 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	49
Şekil 3.35 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	49
Şekil 3.36 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	50
Şekil 3.37 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	50
Şekil 3.38 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , $v_{k1}=v_{k2}=10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	51
Şekil 3.39 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	51
Şekil 3.40 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	52
Şekil 3.41 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ $v_{k1}=v_{k2}=10$ değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	52
Şekil 3.42 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	53

Şekil 3.43 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	53
Şekil 3.44 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	54
Şekil 3.45 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	54
Şekil 3.46 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	55
Şekil 3.47 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	55
Şekil 3.48 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	56
Şekil 3.49 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	56
Şekil 3.50 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	57
Şekil 3.51 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	57
Şekil 3.52 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	58
Şekil 3.53 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	58
Şekil 3.54 $v_{k1} = v_{k2} = 10$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $\eta$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod).....	59
Şekil 3.55 $v_{k1} = v_{k2} = 10$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $\eta$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod).....	59
Şekil 3.56 $v_{k1} = v_{k2} = 10$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $\eta$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod).....	60
Şekil 3.57 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	60
Şekil 3.58 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	61
Şekil 3.59 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	61
Şekil 3.60 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	62
Şekil 3.61 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	62
Şekil 3.62 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	63
Şekil 3.63 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	63
Şekil 3.64 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	64
Şekil 3.65 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	64
Şekil 3.66 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	65
Şekil 3.67 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	65



Şekil 3.68 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ ve değişik $v_0$ hız değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	66
Şekil 3.69 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	66
Şekil 3.70 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	67
Şekil 3.71 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	67
Şekil 3.72 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	68
Şekil 3.73 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	68
Şekil 3.74 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	69
Şekil 3.75 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	69
Şekil 3.76 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	70
Şekil 3.77 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	70
Şekil 3.78 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	71
Şekil 3.79 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	71
Şekil 3.80 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ , $v_0 = 0.5$ ve değişik $v_k$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	72
Şekil 3.81 $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ $v_0 = 0.5$ ve değişik $\eta$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (1. mod) .....	72
Şekil 3.82 $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ $v_0 = 0.5$ ve değişik $\eta$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (2. mod) .....	73
Şekil 3.83 $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ $v_0 = 0.5$ ve değişik $\eta$ değerleri için $\sigma$ -a grafiği (3. mod) .....	73
Şekil 3.84 $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	79
Şekil 3.85 $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	79
Şekil 3.86 $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	80
Şekil 3.87 $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	80
Şekil 3.88 $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	81
Şekil 3.89 $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	81
Şekil 3.90 $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	82
Şekil 3.91 $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	82
Şekil 3.92 $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	83
Şekil 3.93 $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	83
Şekil 3.94 $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	84
Şekil 3.95 $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ $v_{k1}=v_{k2} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	84
Şekil 3.96 $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	85
Şekil 3.97 $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	85
Şekil 3.98 $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	86
Şekil 3.99 $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	86
Şekil 3.100 $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	87
Şekil 3.101 $\eta_1=0.2 - \eta_2=0.8$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	87
Şekil 3.102 $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	88

Şekil 3.103 $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	88
Şekil 3.104 $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	89
Şekil 3.105 $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	89
Şekil 3.106 $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	90
Şekil 3.107 $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	90
Şekil 3.108 $v_0=0.5$ , $v_{k1} = v_{k2} = 10$ ve $(\eta_1-\eta_2)$ çiftinin değişik konumları için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	91
Şekil 3.109 $v_0=0.5$ , $v_{k1} = v_{k2} = 10$ ve $(\eta_1-\eta_2)$ çiftinin değişik konumları için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	91
Şekil 3.110 $v_0=0.5$ , $v_{k1} = v_{k2} = 10$ ve $(\eta_1-\eta_2)$ çiftinin değişik konumları için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	92
Şekil 3.111 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.9$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (1. mod) .....	92
Şekil 3.112 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.9$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (2. mod) .....	93
Şekil 3.113 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.9$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (3. mod) .....	93
Şekil 3.114 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.8$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (1. mod) .....	94
Şekil 3.115 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.8$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (2. mod) .....	94
Şekil 3.116 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.8$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (3. mod) .....	95
Şekil 3.117 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.7$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (1. mod) .....	95
Şekil 3.118 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.7$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (2. mod) .....	96
Şekil 3.119 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.7$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (3. mod) .....	96
Şekil 3.120 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.6$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (1. mod) .....	97
Şekil 3.121 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.6$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (2. mod) .....	97
Şekil 3.122 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.6$ $v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$ ve $v_0$ 'ın değişik değerleri için $\omega_{nl}$ -a grafiği (3. mod) .....	98

Şekil 3.123 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.9$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	98
Şekil 3.124 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.9$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	99
Şekil 3.125 $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.9$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	99
Şekil 3.126 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.8$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	100
Şekil 3.127 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.8$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	100
Şekil 3.128 $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.8$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	101
Şekil 3.129 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.7$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	101
Şekil 3.130 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.7$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	102
Şekil 3.131 $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.7$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	102
Şekil 3.132 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.6$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	103
Şekil 3.133 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.6$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	103
Şekil 3.134 $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5$ $\eta_3=0.6$ $v_0=0.5$ ve $v_k$ 'nin değişik değerleri için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	104
Şekil 3.135 $v_0=0.5$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ ve $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$ değişik konumları için $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod) .....	104
Şekil 3.136 $v_0=0.5$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ ve $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$ değişik konumları için $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod) .....	105
Şekil 3.137 $v_0=0.5$ , $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ ve $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$ değişik konumları için $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod) .....	105

**KISALTMALAR LİSTESİ**

- k.e. : Kompleks eşlenik  
S.O.T. : Seküler olmayan terimler

**TEŞEKKÜR**

Bu tezin hazırlanmasında desteğini, yardımını, sabrını, bilgisini ve tecrübesini başlangıcından sonuna kadar benden esirgemeyen kendisiyle tanışmaktan ve çalışmaktan büyük onur duyduğum saygıdeğer hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Erdoğan ÖZKAYA' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Çok saygıdeğer bölüm başkanım ve hocam Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ' ye, kendileriyle aynı ortamda bulunmaktan ve çalışmaktan büyük mutluluk duyduğum takıldığım yerlerde bana yol gösteren tezimin hazırlanmasında çok büyük yardımları dokunan sevgili dostlarım ve eski oda arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. S. Murat BAĞDATLI ve Arş. Gör. Ali YURDDAŞ' a, akademisyenliğe adım atmamda bana fikir ve destek veren Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÇİPİLOĞLU' na, Kendileriyle tanışmaktan gurur duyduğum hoş sohbetleriyle bana her zaman yol gösteren değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Ersel OBUZ ve Yrd. Doç. Dr. N. Sinan KÖKSAL 'a,

Gösterdiği sabır ve verdiği destekle tezimi bitirmemde büyük rol oynayan Hitit Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölüm Başkanı sayın Prof. Dr. Halil AYKUL' a

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim her zaman beni maddi manevi destekleyen sevgili anne, baba ve ablalarım, çok sevdiğim biricik eşim Esra'ya,

Gösterdikleri yardımlardan dolayı Celal Bayar Üniversitesi ve Hitit Üniversitesindeki Çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışma 107M302 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

## ÖZET

Bu çalışmada eksenel hareketli çok mesnetli şerit ele alınmıştır. Şeridin uçlarında yer alan mesnetler basit mesnettir. Orta bölümde bulunan mesnetler ise yay özelliğine sahiptir. Şerit hızının ortalama bir hız etrafında harmonik olarak değiştiği kabul edilmiştir. Hamilton prensibi kullanılarak nonlineer hareket denklemleri ve sınır şartları çıkarılmıştır. Bu denklemler ve sınır şartları boyutsuzlaştırılmıştır. Böylece denklemlerin geometrik yapıya ve malzeme özelliklerine olan bağımlılıkları ortadan kaldırılmıştır. Şerit uzamalarından kaynaklanan nonlineer etkiler dikkate alınarak çok mesnetli şerit için en genel nonlineer hareket denklemleri elde edilmiştir. Perturbasyon metotlarından biri olan çok zaman ölçekli metot kullanılarak yaklaşık çözümler bulunmuştur. Perturbasyon serisindeki ilk terim lineer problemi oluşturmaktadır. Lineer problemin çözümü ile orta kısımda yer alan mesnedin değişik konumları, değişik yay katsayısı ve eksenel hız değerleri için tabii frekanslar tam olarak hesaplanmıştır. İkinci mertebede ortaya çıkan nonlineer terimler, lineer probleme düzeltme terimleri getirmektedir. Nonlineer terimlerin tabii frekansa etkisi değişik parametreler için hesaplanmıştır. Hız değişim frekansının sıfır ve tabii frekansın iki katından uzak olduğu, hız değişim frekansının sıfıra yakın olduğu ve hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olması durumunda temel parametrik rezonans meydana gelmektedir. Temel parametrik rezonans durumu detaylı bir şekilde incelenmiştir. Her durum için kararlılık analizi yapılarak çözümlerinin kararlı ve kararsız olduğu bölgeler tespit edilmiştir. Eksenel hızın, yay katsayısının, mesnet konumlarının bifurkasyon noktalarına etkileri incelenmiştir. Faz modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Genliklerin artmaya başladığı bifurkasyon (dallanma) noktaları tespit edilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Eksenel hareket, çok mesnetli şerit titreşimleri, perturbasyon analizi, nonlineer titreşim

**ABSTRACT**

In this study, axially moving string system supported from both ends and in middle part simple was discussed. Supports at the end and middle of the beam were simple supports. Supports at the end and middle of the string were simple supports. It is suggested that string velocity is harmonically changed around the average speed. Nonlinear equations of motion and boundary conditions are derived using Hamilton's Principle. Equations of motion and boundary conditions are converted to nondimensional form. Thus equations become independent from geometry and material properties. The equations of motion were obtained using Hamilton's Principle. General Nonlinear equation of motion was obtained by considering nonlinear effect caused by beam stretching for multi-supported beam. Approximate solutions were obtained using the Method of Multiple Scales, a perturbation method. First term in perturbation series compose linear problem. Natural frequencies were calculated by solving the linear problem for different displacement of support in the middle. Correction terms are needed because of the nonlinear terms appears in the second order. The effect of nonlinear terms on natural frequency was calculated for different parameters. Base parametric resonance occurred where the velocity change frequency was equal to approximately two fold of natural frequency. Basic parametric resonance condition was examined in detail. By performing stability analysis of solutions, stable and unstable regions were identified. The effects of axial velocity on the bifurcation points of transverse flexibility coefficient, support number and position have been investigated. Phase modulation equations were obtained. The bifurcation (pitchfork) points where amplitude starts were determined.

**Keywords:** axially moving string, vibrations of multiple supported string, perturbation methods, and nonlinear vibration.

## 1. GİRİŞ

Eksenel hareketli sürekli ortam titreşimleri teknolojik önemlerinden dolayı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. İplikler, yüksek hızlı manyetik ve kağıt şeritler, kayışlar, motorlu testere bıçakları, cam elyaflar, zincirler, kirişler ve akışkan taşıyan borular, teknolojik kıymeti olan bazı örneklerdir. Titreşim analizinin en önemli kısmı sistemlerin tabii frekanslarının hesaplanmasıdır. Sistemlerin tabii frekansını hesaplarken sistemleri lineer kabul etmek hesaplamada büyük kolaylıklar sağlasa da sonuçlar sağlıklı olmaz. Çünkü hiçbir sistem lineer hareket etmez ve elde edilen lineer sonuçlar bizi yanıltabilir. Bu nedenle şeridin titreşimi sırasında uzamadan dolayı meydana gelen nonlineer etkilerinde hesaba katılması gerekmektedir.

Sürekli ortam titreşimleri ile ilgili lineer ve nonlineer olmak üzere birçok araştırma yapılmıştır. 1979' a kadar yapılan çalışmalar Nayfeh ve Mook [1] tarafından özetlenmiştir. Özellikle uçların hareket etmemesinden kaynaklanan nonlineer davranış birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir[2-5]. Quasi [6-7] basit ve ankastre mesnetlenmiş kirişlerin nonlineer titreşimlerini güçlü seri yaklaşımı kullanarak elde etmiş ve sonuçları mevcut sonuçlar ile kıyaslamıştır. Özkaya ve arkadaşları [8] değişik sınır şartları için kütle-kiriş sistemini ele almıştır. Uzamalardan kaynaklanan etkileri dikkate alarak elde ettikleri nonlineer denkleme, ayrıca sönüm ve zorlama etkilerini de eklemiştir. Bu denkleme çok zaman ölçekli metodu kullanarak çözmüşlerdir. Karlık ve arkadaşları [9], Özkaya ve arkadaşlarının [8] çalışmasından elde ettikleri sonuçları, yapay sinir ağı metodunu kullanarak elde ettiği sonuçlar ile karşılaştırmıştır. Özkaya ve Pakdemirli [10] ankastre mesnetli kütle kiriş problemini ele almıştır. Nonlineer analiz ve yapay sinir ağları uygulaması yapmışlardır. Özkaya [11] basit mesnetli kiriş üzerine yerleştirilmiş n tane kütle alarak, genel bir formülasyon ve bu formülasyona ait çözümleri elde etmiştir. n adet kütle konumunu değiştirilmesi ve farklı kütle oranları için çözümler kullanarak uygulamalar yapmıştır.

Eksenel hareket ile ilgili literatür çalışmalarında Ulsoy ve arkadaşları [12], Wickert ve arkadaşları [13] tarama makalelerinde yüzlerce makaleye atıf yapılmıştır. Wickert ve Mote [14] hareketli şerit ve kirişlerin enine titreşimlerini incelemiştir. Wickert [15] gergin kiriş problemini ele almıştır. Atıf yapılan çalışmaların hepsinde eksenel hız sabit alınmıştır. Hareketli sürekli ortamlarda değişken hıza ait ilk denklemleri Miranker [16] elde etmiştir. Pellicano ve Zirilli [17] eksenel hareketli kirişlerin nonlineer titreşimlerini ve sınır tabakalarını incelemiştir. Mockenstrum ve arkadaşları [18] sabit hızlı sistemler için gerilme kuvvetinin zamanla değişimini ele almış ve kararlılık durumunu incelemiştir. Pakdemirli ve arkadaşları [19] eksenel olarak ivmelenen şeridin hareket denklemlerini Hamilton prensibi kullanarak tekrar elde etmiş ve titreşimlerin kararlılığını sayısal olarak araştırmıştır. Pakdemirli ve Batan [20] sabit ivme ile

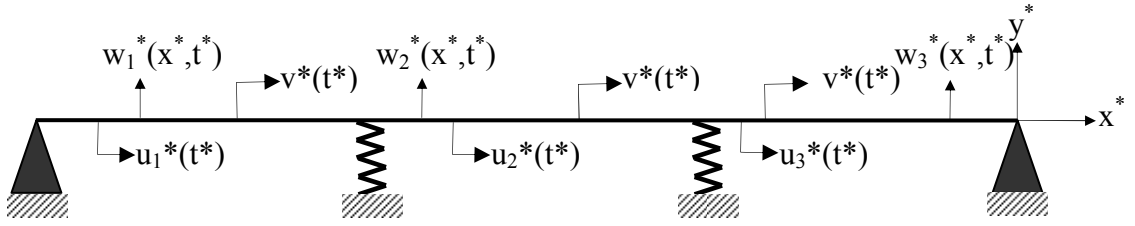


periyodik olarak hızlanıp yavaşlayan durum için bu analizi tekrar etmiştir. Pakdemirli ve Ulsoy [21] çok zaman ölçekli metot (perturbasyon tekniği) ile eksenel olarak ivmelenen şerit için yaklaşık analitik çözüm elde etmiş ve direkt-perturbasyon, diskritizasyon-perturbasyon metodlarını karşılaştırmıştır. Nayfeh ve arkadaşları [22] kuadratik ve kübik nonlineariteler için direkt-perturbasyon metodunun daha iyi sonuç verdiğini göstermiştir. Pakdemirli ve arkadaşları [23] nonlinear kablo titreşimi için iki metodun sonucunu karşılaştırmış ve her iki metod için dallanma ve kararlılık analizinin farklılaştığını ve gerçek sistemin davranışının direkt-perturbasyon metodu ile daha iyi temsil edildiğini gösterilmiştir. Pakdemirli [24] ve Pakdemirli ve Boyacı [25,26] keyfi kuadratik ve kübik nonlineariteli genel bir model kullanarak direkt perturbasyon metodunun daha hassas sonuç verdiğini göstermiştir. Öz ve arkadaşları [27], Özkaya ve Pakdemirli [28] perturbasyon metodu ile, Özkaya ve Pakdemirli [29] lie metodu ile çözümler yapmış iki metod arasındaki farklılıkların nonlinear denklemlere has bir durum olmadığını lineer denklemlerde de görülebileceğini göstermiştir. Öz ve Pakdemirli [30], Öz [31] ve Özkaya ve Öz [32] enine direngenliğin az olduğu şeritten kirişe geçiş durumunu farklı metodlarla incelemiştir. Bu çalışmalarda değişken hızlı eksenel hareketli kirişlerin temel parametrik ve kombinasyon rezonans durumları perturbasyon ve yapay sinir ağları yöntemi ile incelenmiş, toplam tipi kombinasyon rezonanslarının olduğu ancak fark tipi kombinasyon rezonanslarının olmadığı gösterilmiştir. Eksenel hareketli şeritin geometrik nonlinearite durumu için çözümleri de Chung ve arkadaşları [33] ve Chen ve arkadaşları [34] tarafından elde edilmiştir.

Bu çalışmada, eksenel hareketli çok mesnetli şeridin nonlinear titreşimleri incelenmiştir. Hamilton prensibi ile hareket denklemleri çıkartılmıştır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon tekniklerinden çok zaman ölçekli metot kullanılmıştır. Mesnetlerdeki yay katsayısına, şerit hızına, mesnet konumuna bağlı olarak tabii frekans analizi yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur. Daha sonra şerit uzamasından kaynaklanan nonlinear terimler dikkate alınmış ve oluşan nonlinear kısmi diferansiyel denklemin çözümü araştırılmıştır. Lineer probleme ilave olarak nonlinear etkilerin tabii frekansa ve çözümlere olan etkileri incelenmiştir. Nonlinear terimlerin tabii frekansa etkisi değişik parametreler için hesaplanmıştır. Hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olduğu, sıfırdan ve tabii frekansın iki katından uzak olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olması durumunda temel parametrik rezonans meydana gelmektedir. Temel parametrik rezonans durumu detaylı bir şekilde incelenmiştir. Her durum için kararlılık analizi yapılarak çözümlerinin kararlı ve kararsız olduğu bölgeler tespit edilmiştir. Eksenel hızın, yay katsayısının ve mesnet konumlarının bifurkasyon noktalarına etkileri incelenmiştir. Faz modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Genliklerin artmaya başladığı bifurkasyon (dallanma) noktaları tespit edilmiştir.

## 2. HAREKET DENKLEMLERİ

Bu bölümde Şekil 2.1' de gösterilen aksel hareketli çok mesnetli şerit için hareket denklemleri elde edilmiştir. Hareket denklemlerini elde ederken bazı kabuller yapılmıştır. Şeridin başlangıç ve bitiş noktalarında "korunumlu sistem" kabulünü bozmayacak hareket edemeyen basit mesnet mevcuttur. Ön gerilme kuvvetindeki değişme miktarı uzamanın değişimi ile ihmal edilebilir seviyededir. Kesit boyutları hareket esnasında değişmemektedir. Yerçekimi etkisi gerilme kuvvetine göre yeteri kadar küçüktür, böylece şerit denge konumunda düz durmaktadır.

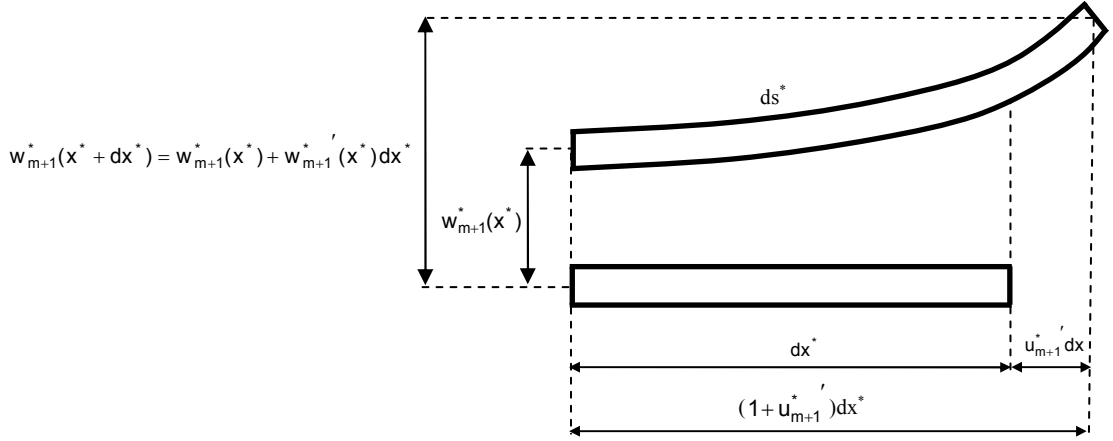


Şekil 2.1 Aksel hareketli çok mesnetli şerit.

Şekil 2.1' de görülen aksel hareketli şeritte  $u^*(x^*, t^*)$ ,  $x^*$  yönündeki boyuna değiştirmeyi,  $v^*(t^*)$ ,  $x^*$  yönündeki aksel hızı,  $w^*(x^*, t^*)$  ise  $z^*$  yönündeki yer değiştirmeyi göstermektedir.

### 2.1 Hamilton Prensibiyle Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Sistemin Langrangian'ını hesaplamaya geçmeden önce uzama etkilerini ve sistemin toplam hızları hesaplanacaktır. Uzama etkilerinin hesaplanması için Şekil 2.2' deki gibi  $dx^*$  uzunluğunda bir parça göz önüne alınmıştır. Titreşim esnasında uzunluk  $ds^*$ , aksel uzama miktarı  $u_{m+1}^* dx$ , sol uçtaki enine yer değiştirme  $w_{m+1}^*(x^*)$  ve sağ uçtaki enine yer değiştirme  $w_{m+1}^*(x^* + dx)$  olarak alınmıştır.



Şekil 2.2 Hareketli şeritten alınan  $dx^*$  parçasındaki yer değiştirmeler

Her iki uçtaki enine yer değiştirmeler arasındaki fark ise,

$$w_{m+1}^*(x^* + dx^*) - w_{m+1}^*(x^*) = w_{m+1}^{\prime} dx^* \quad (m=0,1,2,\dots,n) \quad (2.1)$$

şeklinde elde edilir.  $m$  orta kısımda bulunan mesnet sayısını ifade etmektedir.  $dx^*$  uzunluğu, yer değiştirme sonrası  $ds^*$  uzunluğu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$ds = \sqrt{\left(1 + u_{m+1}^{\prime}\right)^2 dx^{*2} + w_{m+1}^{\prime 2} dx^{*2}} = \sqrt{\left(1 + u_{m+1}^{\prime}\right)^2 + w_{m+1}^{\prime 2}} dx^* \quad (2.2)$$

Şekil değiştirme,

$$e_{m+1}^* = \frac{ds^* - dx^*}{dx^*} \quad (2.3)$$

olduğundan denklem (2.3)' e denklem (2.2)' yi yerleştirir, Taylor açılımı yapıp küçük terimleri ihmal edilirse şekil değiştirme,

$$e_{m+1}^* = u_{m+1}^{\prime} + \frac{1}{2} u_{m+1}^{\prime 2} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{\prime 2} \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. Boyuna yer değiştirme, enine yer değiştirmeye göre küçük kabul edilirse ve

$u^* = O(w^{*2})$  alınır bazı terimler diğer terimlere göre küçük olacaktır. Bu durumda şekil değiştirme şu şekilde elde edilir.

$$e_{m+1}^* = u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*'}{}^2 \quad (2.5)$$

Boyuna ve enine yönündeki hızlar ise sırasıyla şöyle yazılabilir.

$$\frac{du_{m+1}^*}{dt^*} = \frac{\partial u_{m+1}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_{m+1}^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*'} v^* \quad (2.6)$$

$$\frac{dw_{m+1}^*}{dt^*} = \frac{\partial w_{m+1}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial w_{m+1}^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*'} v^* \quad (2.7)$$

Toplam yatay hız ise  $x^*$  yönündeki hız ile şerit uzamalarından kaynaklanan (2.6)' da verilen hızın toplamıdır ( $v^* + \dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*'} v^*$ ). Kinetik enerji ve elastik potansiyel enerji sırasıyla şöyle yazılabilir.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left[ \int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} \rho A \left\{ \left( \dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*'} v^* \right)^2 + \left( v^* + \dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*'} v^* \right)^2 \right\} dx^* \right] \quad (2.8)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left[ \int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} EA \left( u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*'}{}^2 \right)^2 dx^* + \int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} P \left( u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*'}{}^2 \right) dx^* + k w_{m+1}^{*2} \right] \quad (2.9)$$

Denklemlerde  $x_{m+1}^*$  orta kısımda bulunan mesnedin başlangıç noktasından olan uzaklığını ifade etmektedir. Denklem (2.9) ' da birinci integral şekil değiştirme, ikinci integral ise aksenal gerilme ile ilgilidir. Denklem (2.8) ve (2.9)' da  $x_0=0$  ve  $x_{n+1}=L$ ,  $\rho$  şeridin yoğunluğu,  $A$  şeridin her bir parçasının kesit alanı,  $k$  mesnetlerdeki yayların katsayısı,  $w_{m+1}^*$  şeridin mesnetler arasındaki her bir parçasının enine deplasmanı,  $E$  elastisite modülü,  $u_{m+1}^*$  şeridin mesnetler arasındaki her bir parçasının aksenal yer değiştirmesi,  $(\dot{\quad})$  zamana göre türev,  $(\quad)'$   $x^*$  e göre türevi göstermektedir. Sistemin Lagrangian' ı kinetik ve potansiyel enerji farkıdır.

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.10)$$

Hamilton Prensipli ise Lagrangian' ın zaman üzerinden integralinin varyasyonununun sıfır olduğunu belirtmektedir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt^* = 0 \quad (2.11)$$

Denklem (2.8) ve (2.9) denklem (2.10)'a yerleştirilir ve elde edilen Lagrangian (2.11)' e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{m=0}^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} \rho A \left\{ \left( \dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*'} v^* \right)^2 + \left( v^* + \dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^{*'} v^* \right)^2 \right\} dx^* \right. \\ & \left. - \left[ \frac{1}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} EA \left( u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*'} \right)^2 dx^* - \int_{x_m}^{x_{m+1}} P \left( u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*'} \right) dx^* + k w_{m+1}^{*2} \right] \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir. Denklem (2.12)' nın varyasyonu alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{m=0}^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left\{ \rho A \left( \left( \dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*'} v^* \right) \left( \delta \dot{w}_{m+1}^* + v^* \delta w_{m+1}^{*'} + w_{m+1}^{*'} \delta v^* \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( u_{m+1}^{*'} + u_{m+1}^{*'} v^* + v^* \right) \left( \delta \dot{u}_{m+1}^* + v^* \delta u_{m+1}^{*'} + u_{m+1}^{*'} \delta v^* + \delta v^* \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - EA \left( u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*'} \right) \left( \delta u_{m+1}^{*'} + w_{m+1}^{*'} \delta w_{m+1}^{*'} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - P \left( \delta u_{m+1}^{*'} + w_{m+1}^{*'} \delta w_{m+1}^{*'} \right) \right\} dx^* - k w_{m+1}^{*2} \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir. Eksenel hızı belirli bir fonksiyon seçeceğimiz için  $\delta v=0$  olacaktır.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^n \left[ \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left\{ \rho A \left( \left( \dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*'} v^* \right) \left( \delta \dot{w}_{m+1}^* + v^* \delta w_{m+1}^{*'} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( u_{m+1}^{*'} + u_{m+1}^{*'} v^* + v^* \right) \left( \delta \dot{u}_{m+1}^* + v^* \delta u_{m+1}^{*'} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - EA \left( u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*'} \right) \left( \delta u_{m+1}^{*'} + w_{m+1}^{*'} \delta w_{m+1}^{*'} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - P \left( \delta u_{m+1}^{*'} + w_{m+1}^{*'} \delta w_{m+1}^{*'} \right) \right\} dx^* - k w_{m+1}^{*2} \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Parantezler tek tek açılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{m=0}^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left\{ \rho A \left( \left( \dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^* \dot{v}^* \right) \delta \dot{w}_1^* + \left( \dot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^* \dot{v}^* \right) v^* \delta w_{m+1}^* \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \left( \dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^* \dot{v}^* + v^* \right) \delta \dot{u}_{m+1}^* + \left( \dot{u}_{m+1}^* + u_{m+1}^* \dot{v}^* + v^* \right) v^* \delta u_{m+1}^* \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - EA \left( u_{m+1}^* \dot{v}^* + \frac{1}{2} w_{m+1}^* \dot{v}^2 \right) \delta u_{m+1}^* - EA \left( u_{m+1}^* \dot{v}^* + \frac{1}{2} w_{m+1}^* \dot{v}^2 \right) w_{m+1}^* \delta w_{m+1}^* \right. \right. \\
& \left. \left. - P \delta u_{m+1}^* - P w_{m+1}^* \delta w_{m+1}^* \right\} dx^* - k w_{m+1}^* \right] dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

İlk integrallerden başlayarak integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa, kısmi integrasyon işlemleri sonunda denklem (2.16) elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left\{ -\rho A \left( \ddot{w}_{m+1}^* + 2\dot{w}_{m+1}^* \dot{v}^* + w_{m+1}^* \dot{v}^2 + w_{m+1}^* \ddot{v}^2 \right) + P w_{m+1}^* \right. \\
& \left. + EA \left( u_{m+1}^* \ddot{w}_{m+1}^* + u_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^* \ddot{v}^* + \frac{3}{2} w_{m+1}^* \dot{v}^2 \ddot{w}_{m+1}^* \right) \right\} \delta w_{m+1}^* dx^* dt^* \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left\{ -\rho A \left( \ddot{u}_{m+1}^* + 2\dot{u}_{m+1}^* \dot{v}^* + u_{m+1}^* \dot{v}^2 + \dot{v}^* + u_{m+1}^* \ddot{v}^2 \right) \right. \\
& \left. + EA \left( u_{m+1}^* \ddot{u}_{m+1}^* + w_{m+1}^* \dot{u}_{m+1}^* \ddot{v}^* \right) \right\} \delta u_{m+1}^* dx^* dt^* \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^n \left\{ \rho A \left( \dot{w}_{m+1}^* \dot{v}^* + w_{m+1}^* \dot{v}^2 \right) - EA \left( u_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^* + \frac{1}{2} w_{m+1}^* \dot{v}^3 \right) \right. \\
& \left. - P w_{m+1}^* - k w_{m+1}^* \right\} \delta w_{m+1}^* \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} dt^* \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^n \left\{ \rho A \left( \dot{u}_{m+1}^* \dot{v}^* + u_{m+1}^* \dot{v}^2 + v^2 \right) - EA \left( u_{m+1}^* \dot{v}^* + \frac{1}{2} w_{m+1}^* \dot{v}^2 \right) - P \right\} \delta u_{m+1}^* \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} dt^* = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Yukarıda iki katlı integralin sıfır olabilmesi ancak ve ancak  $\delta w_{m+1}^*$  ve  $\delta u_{m+1}^*$  katsayılarının sıfıra eşit olması ile mümkündür. Buradan iki grup eşitlik elde edilir.

$\delta w^* dx^* dt^*$  'in katsayısı

$$\begin{aligned}
& -\rho A \left( \ddot{w}_{m+1}^* + 2\dot{w}_{m+1}^* \dot{v}^* + w_{m+1}^* \dot{v}^2 + w_{m+1}^* \ddot{v}^2 \right) + P w_{m+1}^* \\
& + EA \left( u_{m+1}^* \ddot{w}_{m+1}^* + u_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^* \ddot{v}^* + \frac{3}{2} w_{m+1}^* \dot{v}^2 \ddot{w}_{m+1}^* \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$\delta u^* dx^* dt^*$  'in katsayısı

$$-\rho A \left( \ddot{u}_{m+1}^* + 2\dot{u}_{m+1}^* \dot{v}^* + u_{m+1}^* \dot{v}^* + \dot{v}^* + u_{m+1}^* v^{*2} \right) + EA \left( u_{m+1}^{*''} + w_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^{*''} \right) = 0 \quad (2.18)$$

Bu iki denklem hareket denklemleridir. Sınır şartları ise geriye kalan terimlerin sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

İlk olarak,

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left( \dot{w}_{m+1}^* v^* + w_{m+1}^* \dot{v}^{*2} \right) - EA \left( u_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^* + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*3} \right) - P w_{m+1}^* - k w_{m+1}^* \right\} \delta w_{m+1}^* \Big|_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} dt^* = 0 \quad (2.19)$$

(m=0,1,2...n)

Denklem (2.19)' un sıfıra eşit olabilmesi için ya parantez içinin ya da  $\delta w_{m+1}^*$  katsayısının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

İkinci olarak,

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\{ \rho A \left( \dot{u}_{m+1}^* v^* + u_{m+1}^* \dot{v}^{*2} + v^{*2} \right) - EA \left( u_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^* + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*2} \right) - P \right\} \delta u_{m+1}^* \Big|_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} dt^* = 0 \quad (2.20)$$

(m=0,1,2...n)

Denklem (2.20)' nin sıfır olabilmesi için ya parantezin içi ya da  $\delta u_{m+1}^*$  in sıfır olması gerekmektedir. Başlangıç ve bitiş noktalarında boyuna uzama olmadığından dolayı,

$$\delta u_1^*(0,t) = 0, \quad \delta u_{n+1}^*(L,t) = 0 \quad (2.21)$$

yazılabilir. Böylece ele alınan fiziksel sisteme karşılık gelen hareket denklemi elde edilmiştir.

$$-\rho A \left( \ddot{w}_{m+1}^* + 2\dot{w}_{m+1}^* \dot{v}^* + w_{m+1}^* \dot{v}^* + w_{m+1}^* v^{*2} \right) + P w_{m+1}^{*''} + EA \left( u_{m+1}^{*''} w_{m+1}^* + u_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^{*''} + \frac{3}{2} w_{m+1}^{*2} w_{m+1}^{*''} \right) = 0 \quad (2.22)$$

$$-\rho A \left( \ddot{u}_{m+1}^* + 2\dot{u}_{m+1}^* \dot{v}^* + u_{m+1}^* \dot{v}^* + \dot{v}^* + u_{m+1}^* v^{*2} \right) + EA \left( u_{m+1}^{*''} + w_{m+1}^* \dot{w}_{m+1}^{*''} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Denklem (2.22) ve (2.23) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \left( \ddot{w}_{m+1}^* + 2\dot{w}_{m+1}^* \dot{v}^* + w_{m+1}^* \dot{v}^{*2} + w_{m+1}^{*2} v^{*2} \right) - \frac{P}{\rho A} w_{m+1}^{*''} \\ & - \frac{E}{\rho} \left( u_{m+1}^{*''} w_{m+1}^* + u_{m+1}^* w_{m+1}^{*''} + \frac{3}{2} w_{m+1}^{*2} w_{m+1}^{*''} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\left( \ddot{u}_{m+1}^* + 2\dot{u}_{m+1}^* \dot{v}^* + u_{m+1}^* \dot{v}^{*2} + \dot{v}^* + u_{m+1}^{*''} v^{*2} \right) - \frac{E}{\rho} \left( u_{m+1}^* + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*2} \right)' = 0 \quad (2.25)$$

## 2.2 Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Önceki bölümde elde ettiğimiz denklem (2.24) ve (2.25) sistemin genelleştirilmiş hareket denklemleridir. Denklemleri daha sade hale getirmek, çözümlerin kullanılan malzeme ve geometrik yapıdan bağımsız olabilmesi ve böylece sonuçların daha genel olabilmesi için denklemlerin boyutsuzlaştırılması gerekir. Bunun için aşağıdaki değişken parametreleri tanımlanmıştır.

$$w_{m+1} = \frac{w_{m+1}^*}{L}, \quad u_{m+1} = \frac{u_{m+1}^*}{L}, \quad \eta = \frac{x_{m+1}^*}{L}, \quad t = t^* \sqrt{\frac{P}{\rho A L^2}}, \quad v = \frac{v^*}{\sqrt{P/\rho A}}, \quad v_b^2 = \frac{EA}{P}, \quad v_k = \frac{kL}{P} \quad (2.26)$$

Yukarıda  $v_b$  boyuna direngenliği,  $v_k$  yay katsayısının etkisini göstermektedir ve sadece sınır şartlarında çözümlere etki edecektir.  $v^*$  eksenel hızı durgun şeritteki dalga hızı ile boyutsuzlaştırılmıştır. Denklem (2.26)' da tanımlanan boyutsuz ifadeler önceki bölümde elde ettiğimiz denklem (2.24) ve (2.25)' da ilgili yerlere yerleştirilirse boyutsuz hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left( \ddot{w}_{m+1} + 2\dot{w}_{m+1} v + w_{m+1}' \dot{v} + w_{m+1}'' v^2 \right) - \left( w_{m+1}' \left( 1 + v_b^2 \left( u_{m+1}' + \frac{1}{2} w_{m+1}'^2 \right) \right) \right)' = 0 \quad (2.27)$$

$$\left( \ddot{u}_{m+1} + 2\dot{u}_{m+1} v + u_{m+1}' \dot{v} + \dot{v} + u_{m+1}'' v^2 \right) - v_b^2 \left( u_{m+1}' + \frac{1}{2} w_{m+1}'^2 \right)' = 0 \quad (2.28)$$

Teknolojik kullanımı olan parametreler için hesap yapmak gerekirse, boyuna titreşimler enine titreşimlerden önemli ölçüde daha hızlı yayıldığı için  $v_b^2 \gg 1$  alınabilir. Bu durumda denklem (2.27)' in birinci kısmı ikinci kısımdan çok küçüktür. Öyleyse denklem (2.28)' yi aşağıdaki gibi



yazabiliriz. Gelecek denklemlerdeki indis problemini engellemek için m indisi yerine bu kısımda r indisi kullanılmıştır.

$$\left( u'_{r+1} + \frac{1}{2} w'_{r+1}{}^2 \right)' = 0 \quad (r=0,1,2,\dots,n) \quad (2.29)$$

Yukarıdaki denklemin x' e göre integrali aşağıdaki gibi alınır,

$$u'_{r+1} + \frac{1}{2} w'_{r+1}{}^2 = C_{r+1}(t) = e_{r+1} \quad (2.30)$$

elde edilir. Orta kısımda yer alan mesnedin bulunduğu noktada, yani  $x=x_p$ ' de  $u'_p = u'_{p+1}$  ve  $w'_p{}^2 = w'_{p+1}{}^2$  olduğundan  $C_{r+1}(t) = C_{r+2}(t) = C(t)$  yazılabilir. Her bir bölge için  $C_{r+1}(t)$  ifadesi integre edilirse,

$$\int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} u'_{r+1} dx + \frac{1}{2} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w'_{r+1}{}^2 dx = \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} C(t) dx \quad (2.31)$$

$r=0,1,2,\dots,n \quad (\eta_0=0, \eta_{n+1}=1)$

elde edilir. Denklem (2.31)' de elde edilen bütün denklemler alt alta toplanırsa aşağıdaki ifade,

$$C(t) = u'_{r+1} + \frac{1}{2} w'_{r+1}{}^2 = \frac{1}{2} \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w'_{r+1}{}^2 dx \quad (2.32)$$

elde edilir. Denklem (2.32)' yi, denklem (2.27)' ye yerleştirip gerekli düzenlemeleri yaparsak aksenal hareketli çok mesnetli şerit için nonlinear integro diferansiyel genel hareket denklemini elde edilir.

$$\left( \ddot{w}_{m+1} + 2\dot{w}'_{m+1}v + w'_{m+1}\dot{v} \right) + (v^2 - 1)w''_{m+1} = \frac{1}{2}v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w'_{r+1}{}^2 dx \right) w''_{m+1} \quad (2.33)$$

$m=0,1,2,\dots,n, \quad \eta_0=0, \quad \eta_{n+1}=1$

Sınır şartları şu şekilde yazılabilir.

$$w_1(0,t) = 0 \quad (2.34)$$

$$w_{p+1}(1,t) = 0 \quad (2.35)$$

$$w_p(\eta_p, t) = w_{p+1}(\eta_p, t) \quad (2.36)$$

$$v_{k_p} w_p(\eta_p, t) = \left[ 1 + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w_{r+1}'^2 dx \right) \right] (w_{p+1}'(\eta_p, t) - w_p'(\eta_p, t)) \quad (2.37)$$

$$(p=1,2,3,\dots,n)$$

n sürekli ortamın uçları dışında kalan, iki mesnet arasındaki toplam mesnet sayısıdır. Denklem (2.33)' de  $\ddot{w}_{m+1}$  yerel ivmeyi,  $2\dot{w}'_{m+1}v$  Coriolis ivmesini,  $v_b^2 w''_{m+1}$  merkezci ivmeyi göstermekte ve eşitliğin sağındaki boyuna direngenliğin çarpımı olan kübik nonlineerite ise titreşim esnasında asal eksenin sonlu uzamasından kaynaklanmaktadır.

### 3. ANALİTİK ÇÖZÜMLER

Eksenel hareketli şerit problemi için genelleştirilmiş nonlineer hareket denklemi aşağıdaki gibidir;

$$\ddot{w}_{m+1} + 2\dot{w}'_{m+1}v + w'_{m+1}\dot{v} + w''_{m+1}(v^2 - 1) = \frac{1}{2}v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w_{r+1}'^2 dx \right) w''_{m+1} \quad (3.1)$$

$$m=0,1,2,\dots,n \quad \eta_0 = 0, \eta_{r+1} = 1$$

Burada (m) ortadaki yay mesnetlerinin sayısını, ( $\eta_r$ ) ortadaki yay mesnetlerinin başlangıç noktasına olan uzaklığını ifade etmektedir. Yukarıdaki denklemde w enine yer değiştirme, v eksenel hızdır. Şerit hızının, bir ortalama  $v_0$  hızı etrafında  $\Omega$  frekansı ve  $\varepsilon v_1$  genliği ile değişen biçimde olduğunu varsayalım.

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 \sin \Omega t \quad (3.2)$$

$\varepsilon$  hız değişiminin küçüklüğünü ifade etmek için kullanılmış bir katsayıdır. Hız fonksiyonu denklem (3.1)'e yerleştirilirse hareket denklemi şu şekli alır;

$$\begin{aligned} &\ddot{w}_{m+1} + 2\dot{w}'_{m+1}v_0 + 2\varepsilon\dot{w}'_{m+1}v_1 \sin \Omega t + \varepsilon w'_{m+1}v_1 \Omega \cos \Omega t \\ &+ (v_0^2 + \varepsilon^2 v_1^2 \sin^2 \Omega t + 2\varepsilon v_0 v_1 \sin \Omega t - 1)w''_{m+1} = \frac{1}{2}v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w_{r+1}'^2 dx \right) w''_{m+1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sınır şartları ise şöyledir;

$$w_1(0,t) = 0 \quad w_{p+1}(1,t) = 0 \quad w_p(\eta_p,t) = w_{p+1}(\eta_p,t) \quad (3.4)$$

$$v_{k_p} w_p(\eta_p,t) = \left[ 1 + \frac{1}{2}v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w_{r+1}'^2 dx \right) \right] (w'_{p+1}(\eta_p,t) - w'_p(\eta_p,t)) \quad (3.5)$$

$$p = 0,1,2,\dots,n$$

Non-lineer terimlerin  $\varepsilon$  mertebesinde ortaya çıkabilmesi için  $w_{m,m+1} = \sqrt{\varepsilon} y_{m,m+1}$  dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm ile çözümlerin küçük deplasmanlar için geçerli olduğu varsayılmıştır. Bulunan çözümler yüksek genlikler için geçerli değildir. Fakat küçük genlikler için bulunan çözümler bize sistemin davranışı ve genliklerin kararlılığı hakkında önemli bilgiler vermektedir. Genliklerin arttığı bölgelerin tespiti, yüksek genlikler için çözümlerin tespitinden daha önemlidir. Bu çalışmada temel olarak, genliklerin artışının araştırılmasından ziyade genlikleri artmasına

neden olan kararsız bölgeleri tespit edilmesi hedeflenmiştir. Genlikler için yapılan bu küçük kabulü ile boyutsuz hareket denklemi ve sınır şartları şu şekilde elde edilir.

$$\ddot{y}_{m+1} + 2\dot{y}'_{m+1}v_0 + 2\varepsilon\dot{y}'_{m+1}v_1 \sin \Omega t + \varepsilon y'_{m+1}v_1 \Omega \cos \Omega t + (v_0^2 + \varepsilon^2 v_1^2 \sin^2 \Omega t + 2\varepsilon v_0 v_1 \sin \Omega t - 1)y''_{m+1} = \frac{1}{2}v_b^2 \varepsilon \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} y_{r+1}'^2 dx \right) y''_{m+1} \quad (3.6)$$

$$y_1(0, t) = 0 \quad y_{p+1}(1, t) = 0 \quad y_p(\eta_p, t) = y_{p+1}(\eta_p, t) \quad (3.7)$$

$$v_{k_p} y_p(\eta_p, t) = \left[ 1 + \frac{1}{2}v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} y_{r+1}'^2 dx \right) \right] (y'_{p+1}(\eta_p, t) - y'_p(\eta_p, t)) \quad (3.8)$$

Problemin çözümü için perturbasyon metotlarından çok zaman ölçekli metot kullanılmaktadır. Yer değiştirme fonksiyonu için aşağıdaki çözümü önerebiliriz.

$$y_{m+1}(x, t, \varepsilon) = y_{(m+1)1}(x, T_0, T_1) + \varepsilon y_{(m+1)2}(x, T_0, T_1) + \dots \quad (3.9)$$

Burada  $y_{(m+1)1}$  ilk mertebedeki titreşim fonksiyonunu  $y_{(m+1)2}$  ise  $\varepsilon$  mertebesindeki fonksiyonu ifade etmektedir.  $T_0=t$  hızlı zaman ölçeği ve  $T_1=\varepsilon t$  yavaş zaman ölçeğidir. Zamana göre türevler ise şu şekildedir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (3.10)$$

Denklemler (3.9) ve (3.10), denklem (3.6)'da ve sınır şartlarında yerine koyup mertebe düzenlemesi yapar ve yüksek mertebe terimleri ihmal edersek şu denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & D_0^2 y_{(m+1)1} + 2v_0 D_0 y'_{(m+1)1} + (v_0^2 - 1)y''_{(m+1)1} \\ & + \varepsilon(2D_0 D_1 y_{(m+1)1} + D_0^2 y_{(m+1)2} + 2v_0 D_0 y'_{(m+1)2} + 2v_0 D_1 y'_{(m+1)1} \\ & + (v_0^2 - 1)y''_{(m+1)2} + 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{(m+1)1} \\ & + 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{(m+1)1} + v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{(m+1)1}) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3) \\ & = \frac{1}{2}v_b^2 \varepsilon \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} y_{r+1}'^2 dx \right) y''_{(m+1)1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Denklem (3.11)'i 1 ve  $\varepsilon$  mertebesine göre ayrıştırılırsa, her mertebedeki genel hareket denklemleri ve genel sınır şartları şu şekilde elde edilir.

1 mertebesi:

$$D_0^2 y_{(m+1)1} + 2v_0 D_0 y'_{(m+1)1} + (v_0^2 - 1) y''_{(m+1)1} = 0 \quad (3.12)$$

$$y_{11}(0, t) = 0 \quad y_{(p+1)1}(1, t) = 0 \quad y_{p1}(\eta_p, t) = y_{(p+1)1}(\eta_p, t) \quad (3.13)$$

$$v_{k_p} y_{p1}(\eta_p, t) = (y'_{(p+1)1}(\eta_p, t) - y'_{p1}(\eta_p, t)) \quad (3.14)$$

$\varepsilon$  mertebesi:

$$D_0^2 y_{(m+1)2} + 2v_0 D_0 y'_{(m+1)2} + (v_0^2 - 1) y''_{(m+1)2} = -2D_0 D_1 y_{(m+1)1} - 2v_0 D_1 y'_{(m+1)1} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{(m+1)1} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{(m+1)1} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{(m+1)1} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} y_{(r+1)1}^2 dx \right) y''_{(m+1)1} \quad (3.15)$$

$$y_{12}(0, t) = 0 \quad y_{(p+1)2}(1, t) = 0 \quad y_{p2}(\eta_p, t) = y_{(p+1)2}(\eta_p, t) \quad (3.16)$$

$$y_{p2}(\eta_p, t) = \frac{1}{2} v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} y_{(r+1)1}^2 dx \right) y_{p1}(\eta_p, t) \quad (3.17)$$

### 3.1 Linear Problem

1 mertebesindeki denklemler lineer problemi oluşturmaktadır.

$$D_0^2 y_{(m+1)1} + 2v_0 D_0 y'_{(m+1)1} + (v_0^2 - 1) y''_{(m+1)1} = 0 \quad (3.18)$$

Lineer mertebeli denklemleri için şu şekilde bir çözüm fonksiyonu önerebiliriz.

$$y_{(m+1)1}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_{m+1}(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_{m+1}(x) \quad (3.19)$$

Denklemleri (3.19)'u, denklemleri (3.18)'e yerleştirirsek, genel denklem şu hale dönüşür.

$$(v_0^2 - 1) Y''_{(m+1)} + 2v_0 i\omega Y'_{(m+1)} - \omega^2 Y_{(m+1)} = 0 \quad (3.20)$$

Sınır şartları ise şu şekilde yazılabilir.

$$Y_1(0) = 0 \quad Y_{(p+1)}(1) = 0 \quad Y_p(\eta_p) = Y_{(p+1)}(\eta_p) \quad (3.21)$$

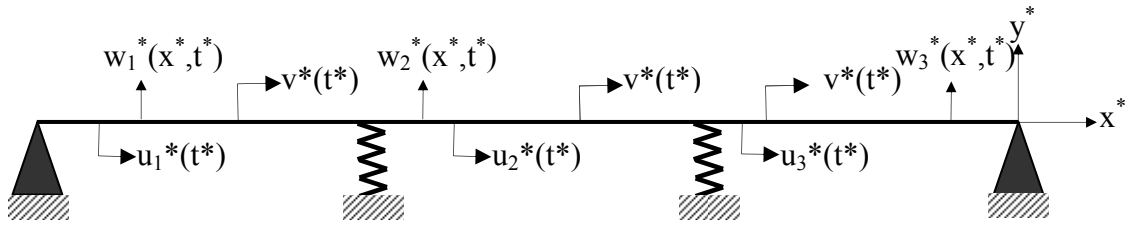
$$v_{k_p} Y_p(\eta_p) = (Y'_{(p+1)}(\eta_p) - Y'_p(\eta_p)) \quad (3.22)$$

Çözüm için aşağıdaki genel denklemi yazabiliriz.

$$Y_{m+1}(x) = c_{2m+1}e^{\beta_1 x} + c_{2m+2}e^{\beta_2 x} \quad (3.23)$$

Sınır şartları kullanılarak lineer mertebedeki hareket denklemleri çözülürse frekans denklemleri elde edilir.

### 3.1.1 Orta Bölümde iki Yay Mesnetli Durum için analitik çözümler



Şekil 3.1 Eksenel hareketli iki adet yay mesnetli şerit.

Orta bölümde iki adet yay mesnet olması durumunda 1 ve  $\varepsilon$  mertebesindeki denklemler şu şekilde yazılabilir.

**1 mertebesi:**

$$D_0^2 y_{11} + 2v_0 D_0 y'_{11} + (v_0^2 - 1)y''_{11} = 0 \quad (3.24)$$

$$D_0^2 y_{21} + 2v_0 D_0 y'_{21} + (v_0^2 - 1)y''_{21} = 0 \quad (3.25)$$

$$D_0^2 y_{31} + 2v_0 D_0 y'_{31} + (v_0^2 - 1)y''_{31} = 0 \quad (3.26)$$

**$\varepsilon$  mertebesi:**

$$D_0^2 y_{12} + 2v_0 D_0 y'_{12} + (v_0^2 - 1)y''_{12} = -2D_0 D_1 y_{11} - 2v_0 D_1 y'_{11} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{11} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{11} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{11} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} y_2'^2 dx + \int_{\eta_2}^1 y_3'^2 dx \right) y''_{11} \quad (3.27)$$

$$D_0^2 y_{22} + 2v_0 D_0 y'_{22} + (v_0^2 - 1)y''_{22} = -2D_0 D_1 y_{21} - 2v_0 D_1 y'_{21} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{21} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{21} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{21} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} y_2'^2 dx + \int_{\eta_2}^1 y_3'^2 dx \right) y''_{21} \quad (3.28)$$

$$D_0^2 y_{32} + 2v_0 D_0 y'_{32} + (v_0^2 - 1)y''_{32} = -2D_0 D_1 y_{31} - 2v_0 D_1 y'_{31} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{31} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{31} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{31} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} y_2'^2 dx + \int_{\eta_2}^1 y_3'^2 dx \right) y''_{31} \quad (3.29)$$

1 mertebesindeki denklemlerin çözümü lineer problemin çözümünü verecektir. Denklem (3.24–3.26) için şu çözüm fonksiyonlarını alabiliriz.

$$y_{11}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_1(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_1(x) \quad (3.30)$$

$$y_{21}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_2(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_2(x) \quad (3.31)$$

$$y_{31}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_3(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_3(x) \quad (3.32)$$

Bu durumda mekâna bağlı denklemler şu hali alır

$$(v_0^2 - 1)Y_1'' + 2v_0 i\omega Y_1' - \omega^2 Y_1 = 0 \quad (3.33)$$

$$(v_0^2 - 1)Y_2'' + 2v_0 i\omega Y_2' - \omega^2 Y_2 = 0 \quad (3.34)$$

$$(v_0^2 - 1)Y_3'' + 2v_0 i\omega Y_3' - \omega^2 Y_3 = 0 \quad (3.35)$$

Sınır şartları aşağıdaki gibi olur.

$$Y_1(0) = 0 \quad Y_3(1) = 0 \quad Y_1(\eta_1) = Y_2(\eta_1) \quad Y_2(\eta_2) = Y_3(\eta_2) \quad (3.36)$$

$$v_{k_1} Y_1(\eta_1) = (Y_2'(\eta_1) - Y_1'(\eta_1)) \quad (3.37)$$

$$v_{k_2} Y_2(\eta_2) = (Y_3'(\eta_2) - Y_2'(\eta_2)) \quad (3.38)$$

Denklem (3.33–3.35) için şu fonksiyonları çözüm olarak önerelim.

$$Y_1(x) = c_1 e^{\beta_1 x} + c_2 e^{\beta_2 x} \quad (3.39)$$

$$Y_2(x) = c_3 e^{\beta_1 x} + c_4 e^{\beta_2 x} \quad (3.40)$$

$$Y_3(x) = c_5 e^{\beta_1 x} + c_6 e^{\beta_2 x} \quad (3.41)$$

Bu çözümlerin sonucunda ortaya çıkan katsayı matrisinin determinantı bize frekans denklemini verir. Orta bölümde iki yay mesnedin olması durumunda frekans denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(-e^{\eta_1\beta_1} + e^{\eta_1\beta_2})v_{k_1} [(e^{\eta_2\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_2\beta_2})(e^{\eta_2\beta_1+\eta_1\beta_2} - e^{\eta_1\beta_1+\eta_2\beta_2})v_{k_2} + e^{\eta_2(\beta_1+\beta_2)}(e^{\eta_1\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_1\beta_2})(\beta_1 - \beta_2)] \\ - e^{\eta_1(\beta_1+\beta_2)} [(e^{\eta_2\beta_1} - e^{\eta_2\beta_2})(e^{\eta_2\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_2\beta_2})v_{k_2} + e^{\eta_2(\beta_1+\beta_2)}(-e^{\beta_1} + e^{\beta_2})(\beta_1 - \beta_2)](\beta_1 - \beta_2) \quad (3.42)$$

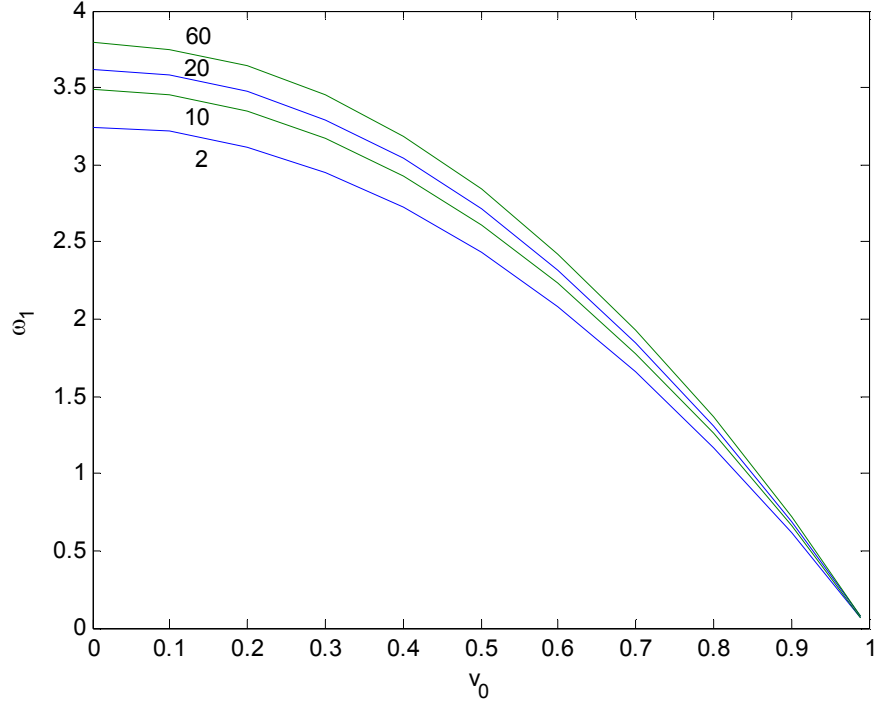
Şekil (3.2–3.19)'da iki yay mesnedine sahip aksel hareketli şerit problemi için tabii frekans grafikleri çizilmiştir. Aksel hareketli şeritte yay katsayısının artması ve mesnet konumlarının değişmesi ile ilk üç tabii frekans değerlerinin nasıl değiştiği araştırılmıştır. Değişik mesnet konumları ve yay katsayıları ele alınarak grafikler çizilmiştir. Şekil (3.2–3.4)' de  $\eta_1=0.1$  ve  $\eta_2=0.9$  konumları ve yay katsayısının 2,10,20,60 değerleri için ilk üç tabii frekans değerlerinin aksel hızla bağlı değişim grafikleri çizilmiştir. Her üç şekilde de yay katsayıları arttığında bütün tabii frekans değerlerinde artış olduğu görülmektedir. Aksel hızın artması ile tüm durumlar için tabii frekans değeri düşmektedir. Şekil (3.5–3.7)' de  $\eta_1=0.2$  ve  $\eta_2=0.8$  konumları için, Şekil (3.8–3.10)' da  $\eta_1=0.3$  ve  $\eta_2=0.7$  konumları için ve Şekil (3.11–3.13)' te  $\eta_1=0.4$  ve  $\eta_2=0.6$  konumları için yay katsayısının 2,10,20,60 değerleri ele alınarak ilk üç tabii frekans değerlerinin aksel hızla bağlı değişim grafikleri çizilmiştir. Bütün grafiklerde yay katsayıları arttığında tabii frekans değerlerinde artmaktadır. Eksel hızın artması ile tüm durumlar için tabii frekans değeri düşmektedir.

Şekil (3.14–3.19)' da iki yay mesnetli şerit için mesnet konumlarının ilk üç tabii frekans değerlerine etkileri araştırılmıştır. Boyutsuz yay katsayısı değerleri 10 ve 60 alınarak ilk üç tabii frekans değerlerinin aksel hızla bağlı değişimleri çizilmiştir. Şekil (3.14–3.16)' da boyutsuz yay katsayısı değerleri  $v_{k1}=v_{k2}=10$  alınarak değişik  $\eta_1$  ve  $\eta_2$  değerleri için ilk üç tabii frekans grafikleri gösterilmiştir. Şekil (3.14)'de aksel hızla bağlı 1. tabii frekans değerleri çizilmiştir. Mesnetlerinin konumları birbirine yaklaştığında 1. tabii frekans değerlerinin arttığı görülmüştür. Şekil (3.15)'de aksel hızla bağlı 2. tabii frekans değerleri çizilmiştir.  $(\eta_1, \eta_2)$  çiftinin (0.1,0.9) ile (0.4,0.6) değerleri ve (0.2,0.8) ile (0.3,0.7) değerleri çakışmaktadır. Bu çakışma, bu mesnet konumlarında 2.mod yapılarının birbirine benzemesinden kaynaklanmaktadır. Şekil (3.16)'da aksel hızla bağlı 3. tabii frekans değerleri çizilmiştir. En yüksek tabii frekans değerleri  $(\eta_1, \eta_2)$  çiftinin (0.2,0.8) değerinde, en düşük tabii frekans değerleri ise  $(\eta_1, \eta_2)$  çiftinin (0.3,0.7) değerinde olmaktadır.

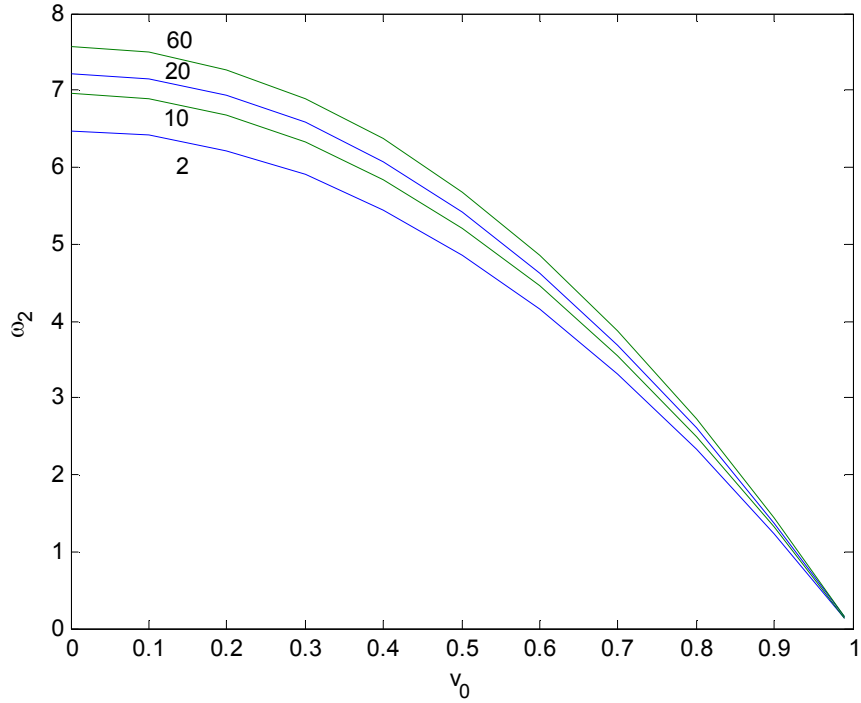
Şekil (3.17–3.19)' da boyutsuz yay katsayısı değerleri  $v_{k1}=v_{k2}=60$  alınarak değişik  $\eta_1$  ve  $\eta_2$  değerleri için ilk üç tabii frekans grafikleri gösterilmiştir. Şekil (3.17)'de aksel hızla bağlı 1. tabii frekans grafiği çizilmiştir. Mesnetlerinin konumları birbirine yaklaştığında 1. tabii frekans değerlerinin arttığı görülmüştür. Şekil (3.18)'de aksel hızla bağlı 2. tabii frekans grafiği çizilmiştir.  $(\eta_1, \eta_2)$  çiftinin (0.1,0.9) ile (0.4,0.6) değerleri ve (0.2,0.8) ile (0.3,0.7) değerleri çakışmaktadır. Bu çakışma, bu mesnet konumlarında 2.mod yapılarının birbirine



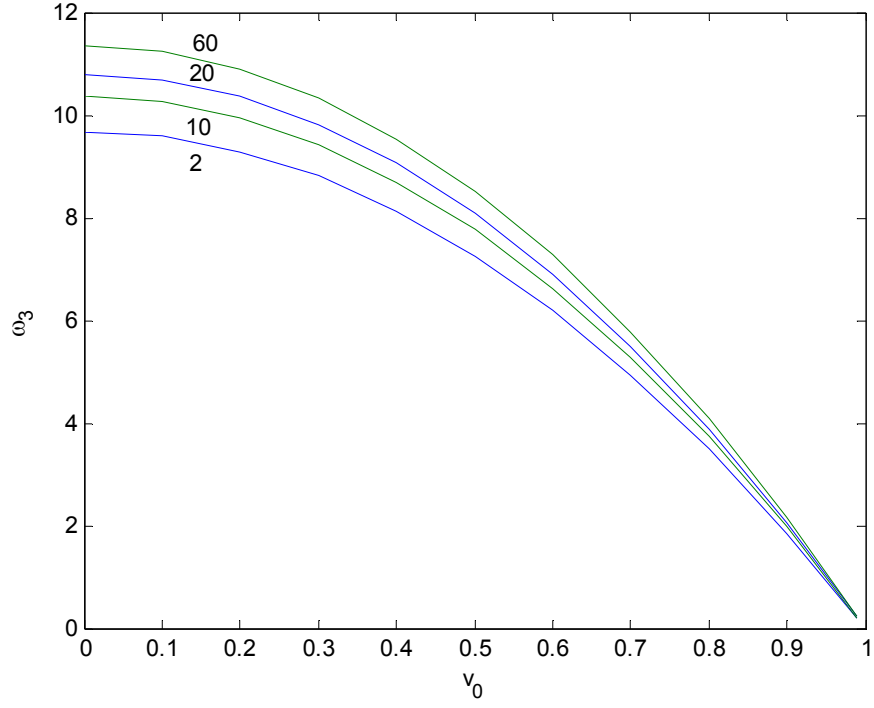
benzemesinden kaynaklanmaktadır. Şekil (3.19)' da aksel hızına bağlı 3. tabii frekans değerleri çizilmiştir. En yüksek tabii frekans değerleri  $(\eta_1, \eta_2)$  çiftinin (0.2,0.8) değerinde, en düşük tabii frekans değerleri ise  $(\eta_1, \eta_2)$  çiftinin (0.3,0.7) değerinde olmaktadır.



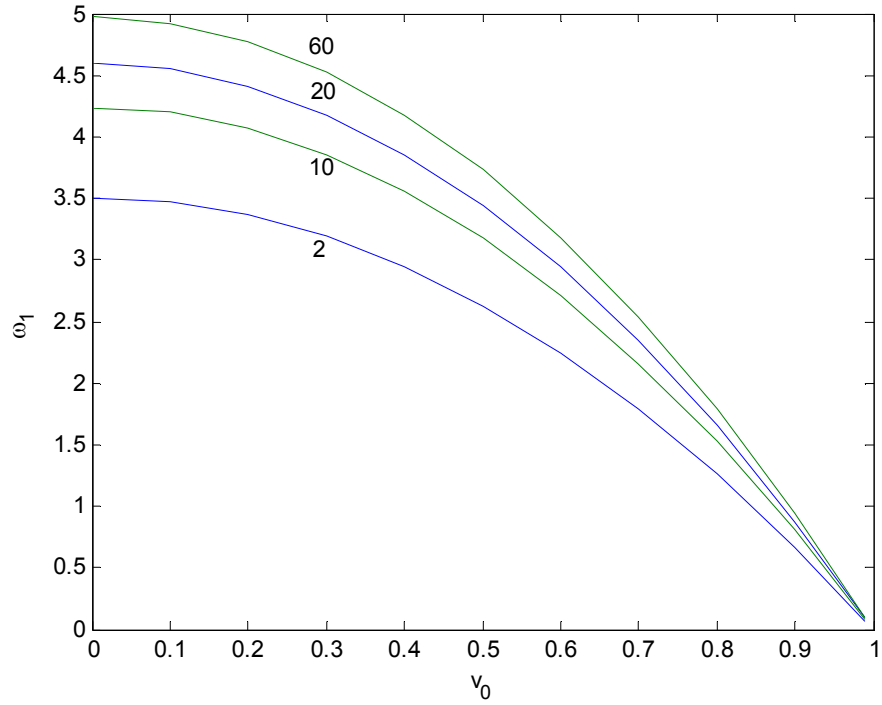
Şekil 3.2 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ )



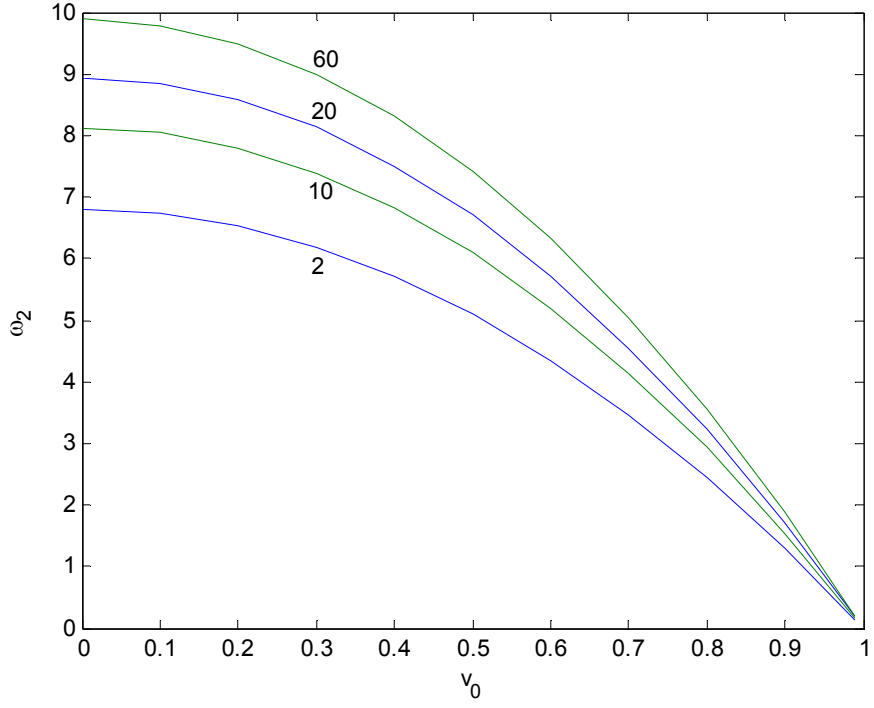
Şekil 3.3 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $\eta_1=0.1 - \eta_2=0.9$ )



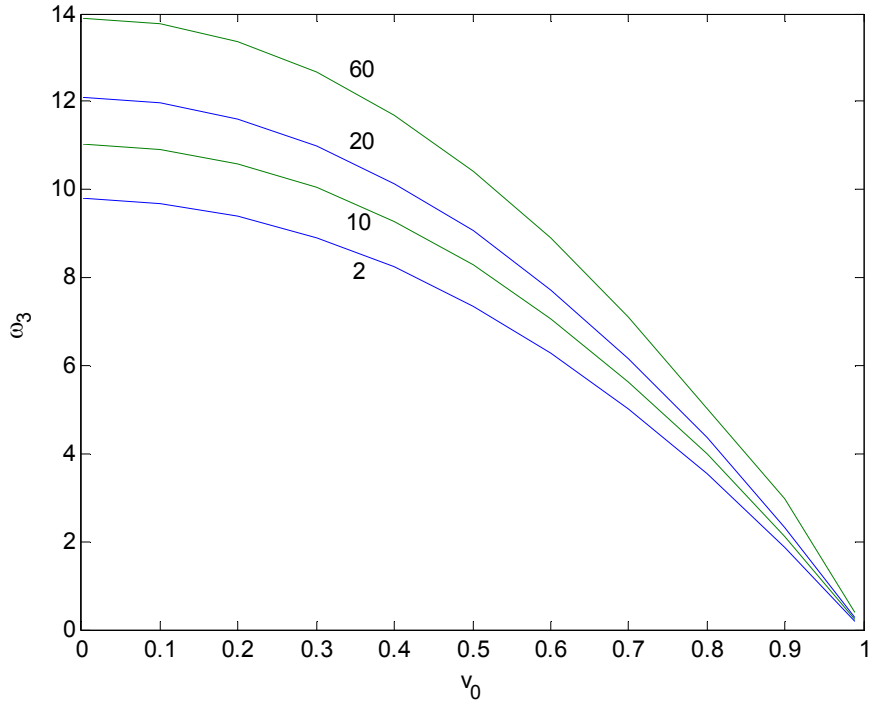
Şekil 3.4 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $\eta_1=0.1$  -  $\eta_2=0.9$ )



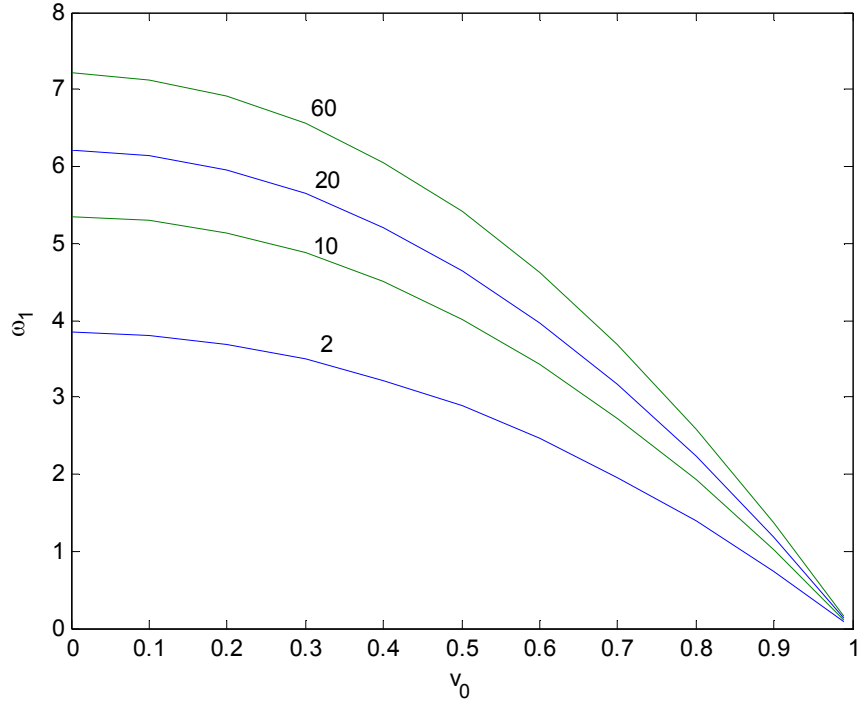
Şekil 3.5 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$ )



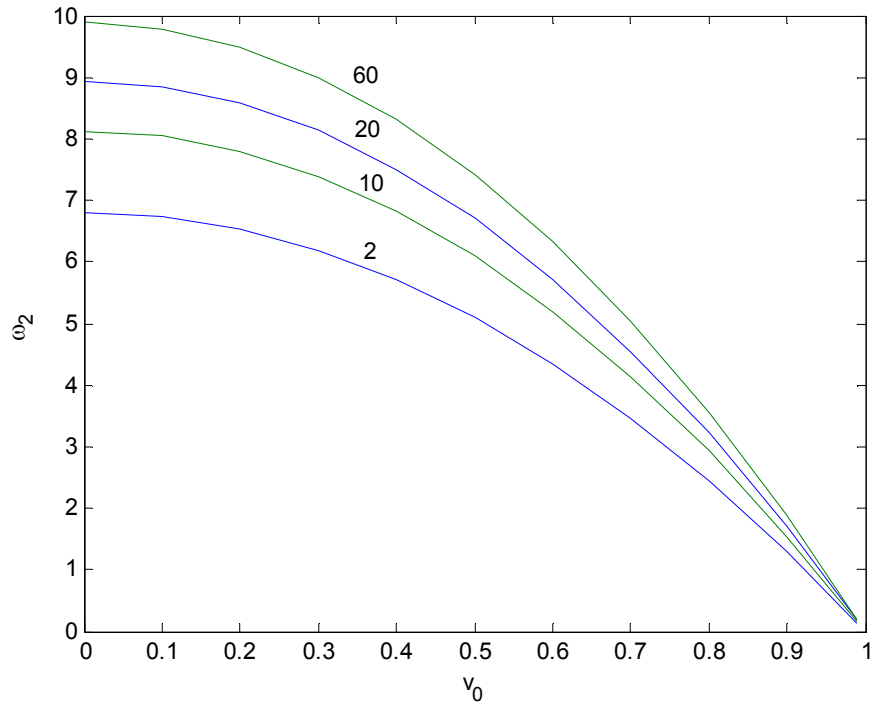
Şekil 3.6 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$ )



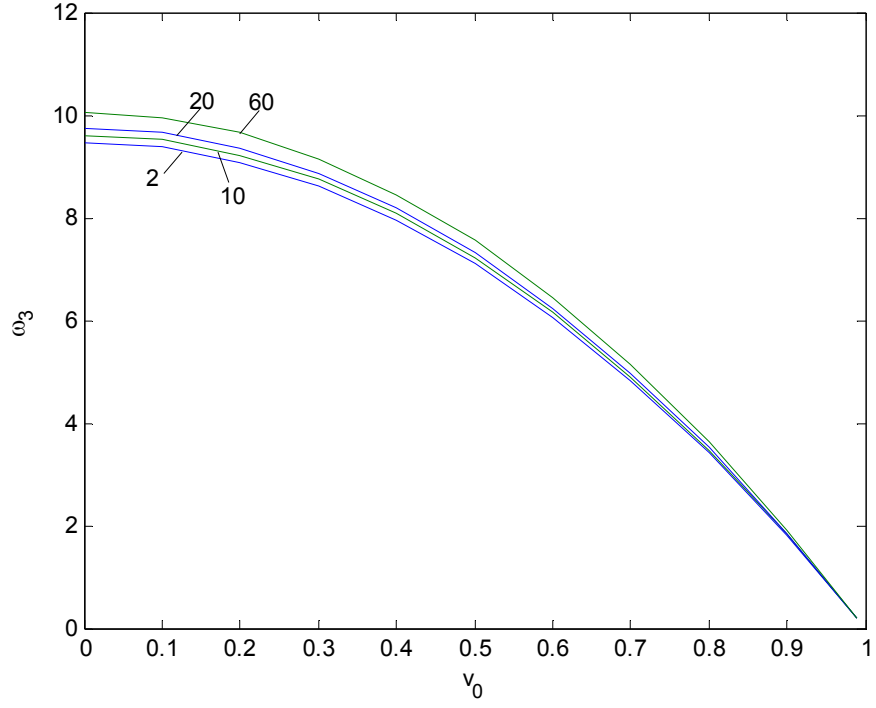
Şekil 3.7 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$ )



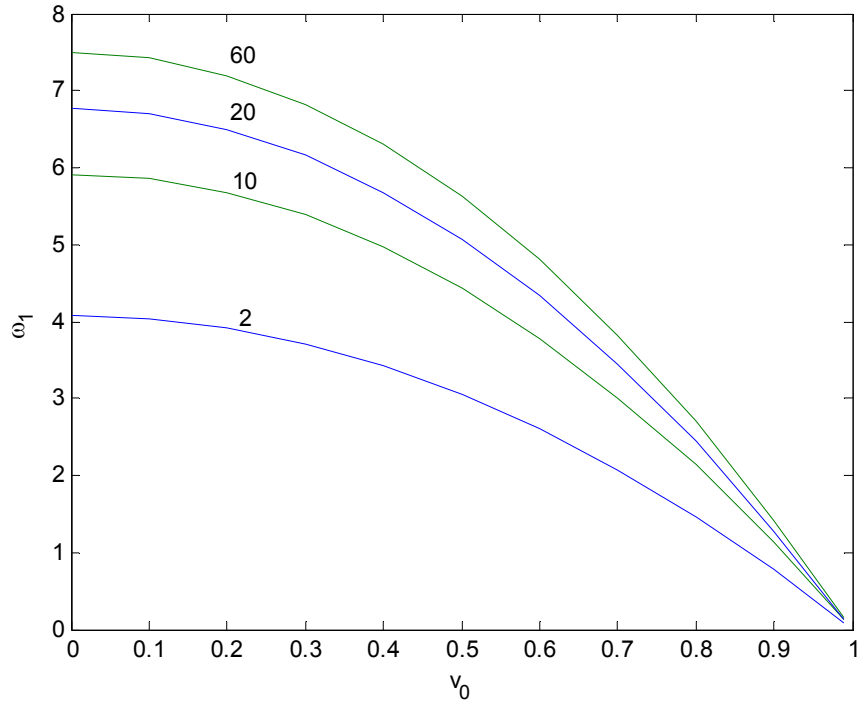
Şekil 3.8 Değişik yay katsayıları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$ )



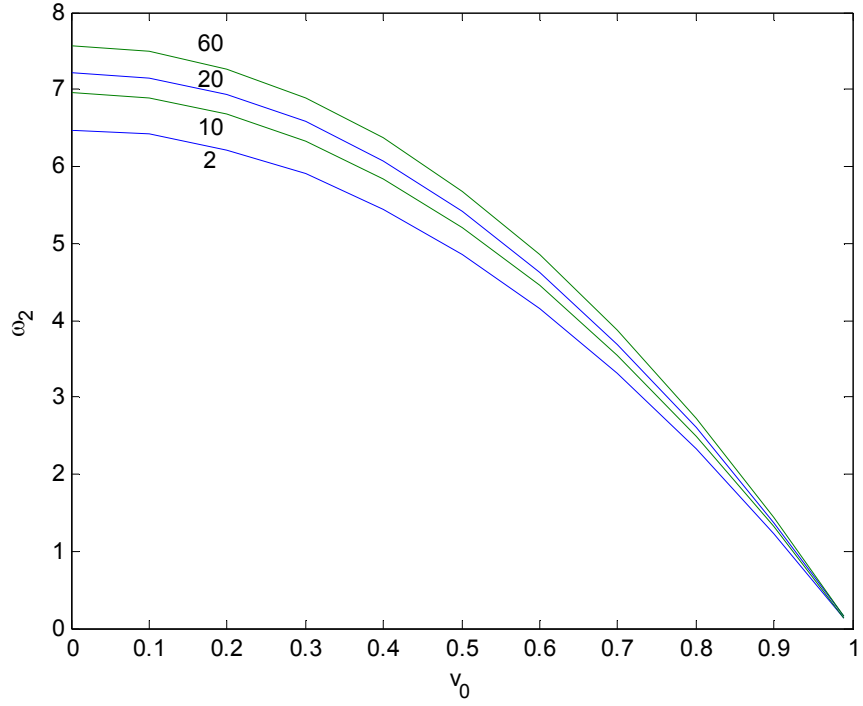
Şekil 3.9 Değişik yay katsayıları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$ )



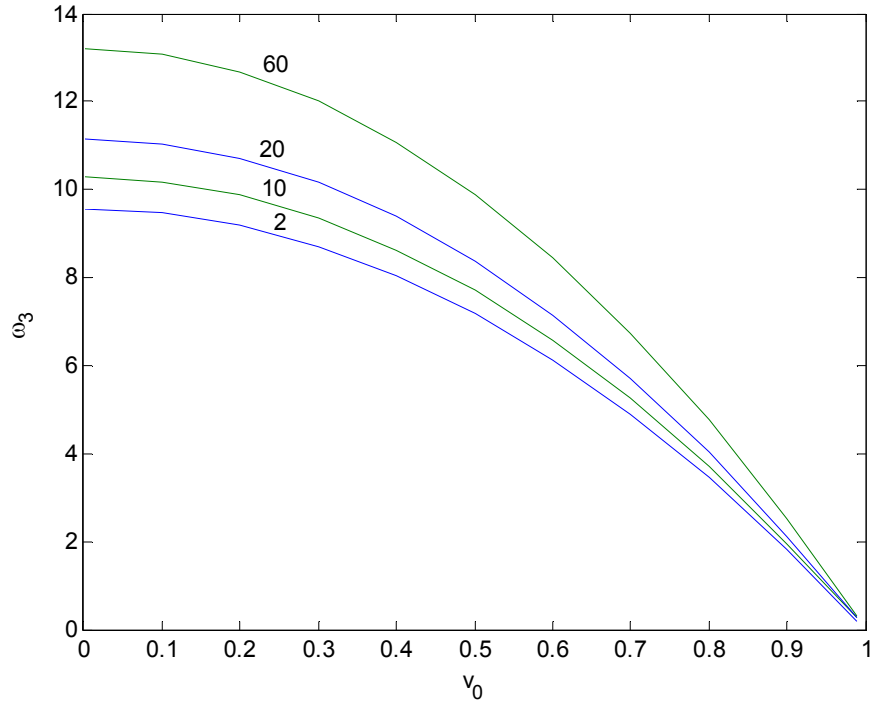
Şekil 3.10 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $\eta_1=0.3 - \eta_2=0.7$ )



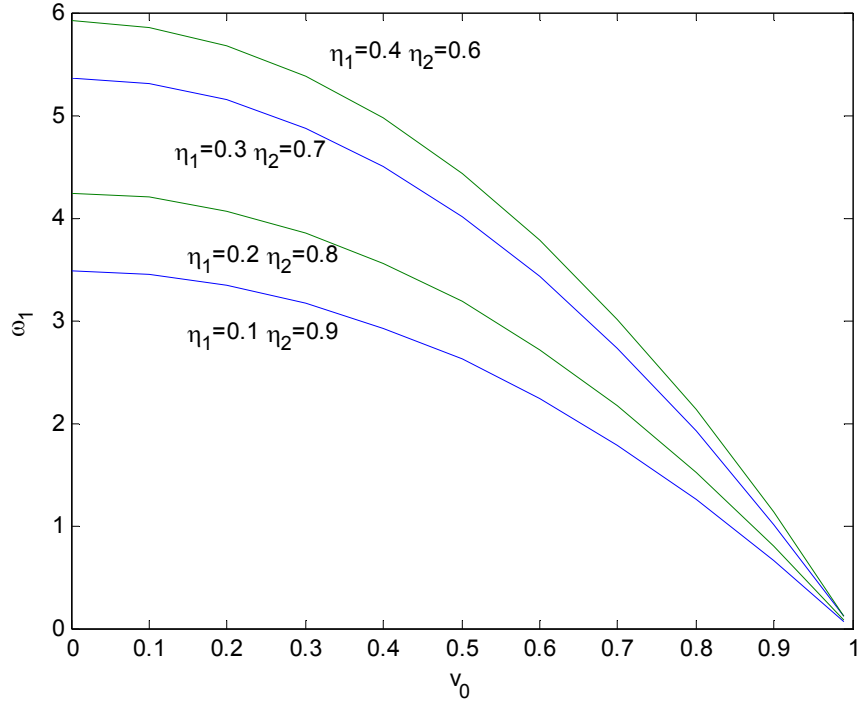
Şekil 3.11 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $\eta_1=0.4 - \eta_2=0.6$ )



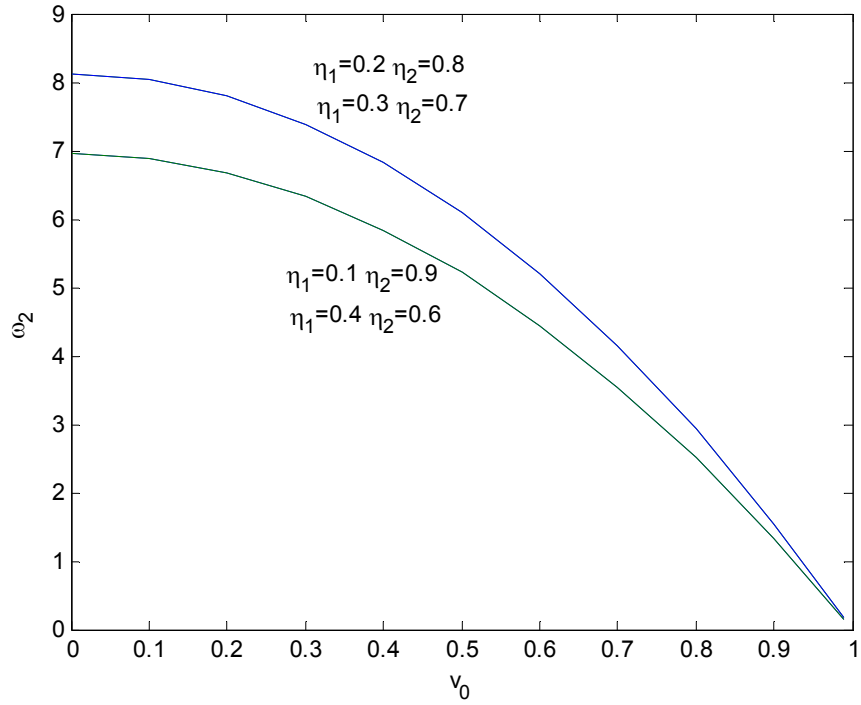
Şekil 3.12 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$ )



Şekil 3.13 Değişik yay katsayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$ )

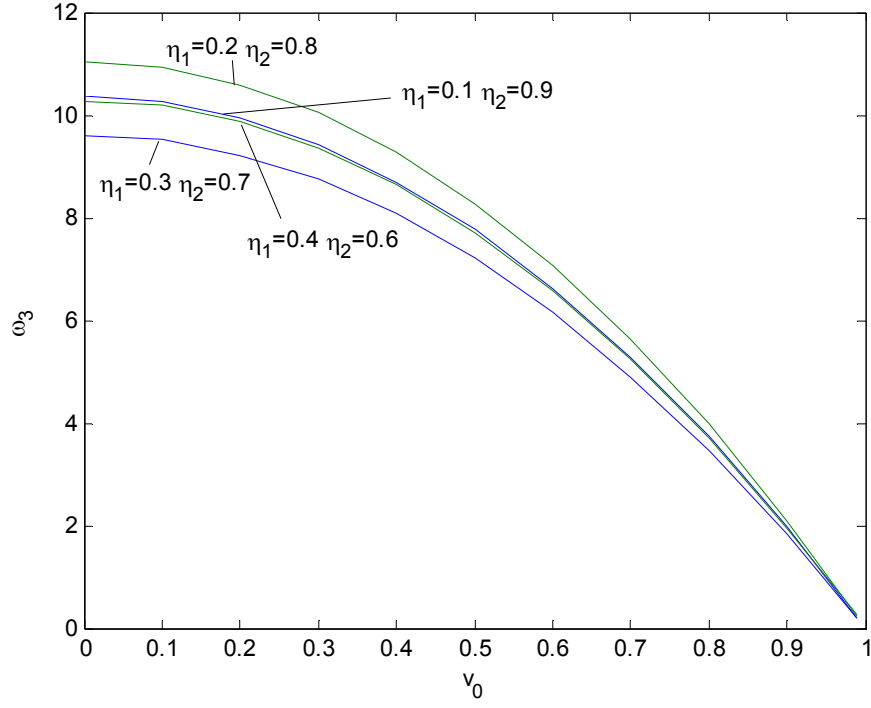


Şekil 3.14 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi (1. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=10$ )

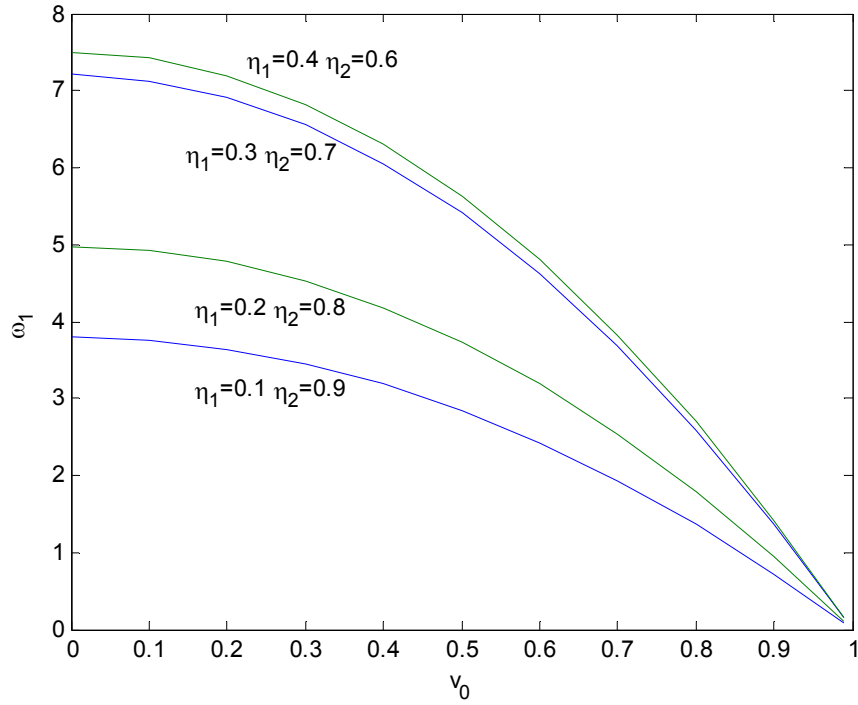


Şekil 3.15 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi (2. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=10$ )

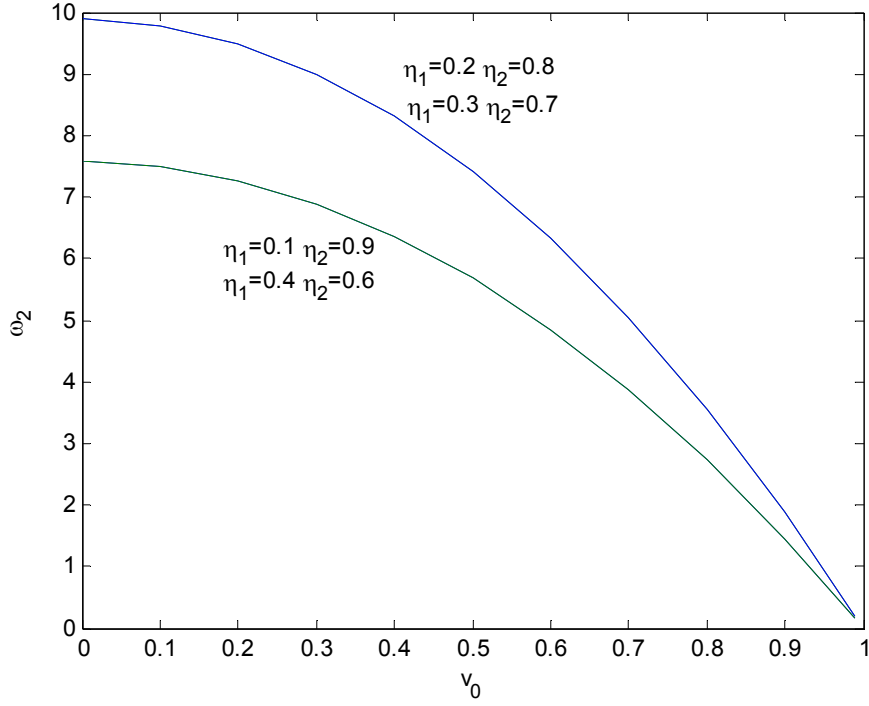




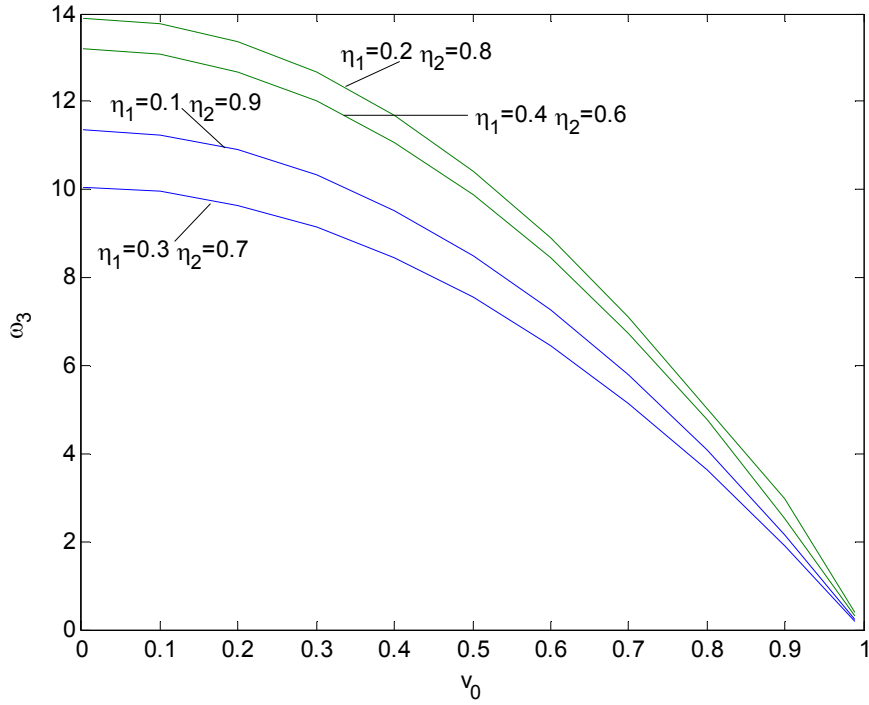
Şekil 3.16 Değişik mesnet konumları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=10$ )



Şekil 3.17 Değişik mesnet konumları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=60$ )

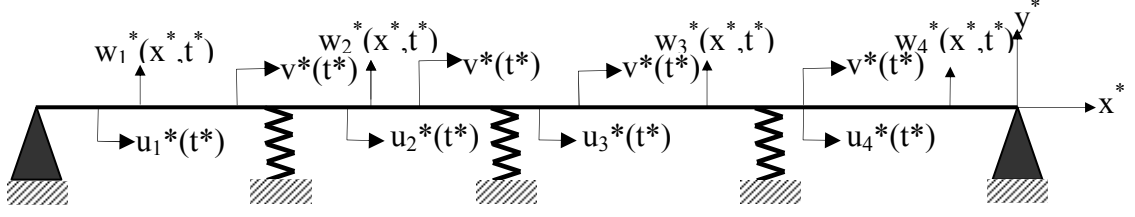


Şekil 3.18 Değişik mesnet konumları için aksel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=60$ )



Şekil 3.19 Değişik mesnet konumları için aksel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=60$ )

### 3.1.2 Orta Bölümde Üç Yay Mesnetli Durum için analitik çözümler



Şekil 3.20 Eksenel hareketli üç adet yay mesnetli şerit.

Benzer şekilde orta bölümde üç adet yay mesnet olması durumunda 1 ve  $\varepsilon$  mertebesindeki denklemler şu şekilde yazılır.

**1 mertebesi:**

$$D_0^2 y_{11} + 2v_0 D_0 y'_{11} + (v_0^2 - 1)y''_{11} = 0 \quad (3.43)$$

$$D_0^2 y_{21} + 2v_0 D_0 y'_{21} + (v_0^2 - 1)y''_{21} = 0 \quad (3.44)$$

$$D_0^2 y_{31} + 2v_0 D_0 y'_{31} + (v_0^2 - 1)y''_{31} = 0 \quad (3.45)$$

$$D_0^2 y_{41} + 2v_0 D_0 y'_{41} + (v_0^2 - 1)y''_{41} = 0 \quad (3.46)$$

**$\varepsilon$  mertebesi:**

$$D_0^2 y_{12} + 2v_0 D_0 y'_{12} + (v_0^2 - 1)y''_{12} = -2D_0 D_1 y_{11} - 2v_0 D_1 y'_{11} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{11} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{11} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{11} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} y_2'^2 dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} y_3'^2 dx + \int_{\eta_3}^1 y_4'^2 dx \right) y''_{11} \quad (3.47)$$

$$D_0^2 y_{22} + 2v_0 D_0 y'_{22} + (v_0^2 - 1)y''_{22} = -2D_0 D_1 y_{21} - 2v_0 D_1 y'_{21} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{21} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{21} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{21} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} y_2'^2 dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} y_3'^2 dx + \int_{\eta_3}^1 y_4'^2 dx \right) y''_{21} \quad (3.48)$$

$$D_0^2 y_{32} + 2v_0 D_0 y'_{32} + (v_0^2 - 1)y''_{32} = -2D_0 D_1 y_{31} - 2v_0 D_1 y'_{31} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{31} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{31} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{31} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} y_2'^2 dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} y_3'^2 dx + \int_{\eta_3}^1 y_4'^2 dx \right) y''_{31} \quad (3.49)$$

$$D_0^2 y_{42} + 2v_0 D_0 y'_{42} + (v_0^2 - 1)y''_{42} = -2D_0 D_1 y_{41} - 2v_0 D_1 y'_{41} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{41} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{41} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{41} + \frac{1}{2} v_0^2 \left( \int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} y_2'^2 dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} y_3'^2 dx + \int_{\eta_3}^1 y_4'^2 dx \right) y''_{41} \quad (3.50)$$

1 mertebesindeki denklemlerin çözümü lineer problemin çözümünü verecektir. Denklem (3.43–3.46) için şu çözüm fonksiyonlarını yazabiliriz.

$$y_{11}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_1(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_1(x) \quad (3.51)$$

$$y_{21}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_2(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_2(x) \quad (3.52)$$

$$y_{31}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_3(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_3(x) \quad (3.53)$$

$$y_{41}(x, T_0, T_1; \varepsilon) = A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_4(x) + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0} \bar{Y}_4(x) \quad (3.54)$$

Bu durumda mekâna bağlı denklemler şu hali alır

$$(v_0^2 - 1)Y_1'' + 2v_0 j\omega Y_1' - \omega^2 Y_1 = 0 \quad (3.55)$$

$$(v_0^2 - 1)Y_2'' + 2v_0 j\omega Y_2' - \omega^2 Y_2 = 0 \quad (3.56)$$

$$(v_0^2 - 1)Y_3'' + 2v_0 j\omega Y_3' - \omega^2 Y_3 = 0 \quad (3.57)$$

$$(v_0^2 - 1)Y_4'' + 2v_0 j\omega Y_4' - \omega^2 Y_4 = 0 \quad (3.58)$$

Sınır şartları aşağıdaki gibi olur.

$$Y_1(0) = 0 \quad Y_4(1) = 0 \quad Y_1(\eta_1) = Y_2(\eta_1) \quad Y_2(\eta_2) = Y_3(\eta_2) \quad Y_3(\eta_3) = Y_4(\eta_3) \quad (3.59)$$

$$v_{k_1} Y_1(\eta_1) = (Y_2'(\eta_1) - Y_1'(\eta_1)) \quad (3.60)$$

$$v_{k_2} Y_2(\eta_2) = (Y_3'(\eta_2) - Y_2'(\eta_2)) \quad (3.61)$$

$$v_{k_3} Y_3(\eta_3) = (Y_4'(\eta_3) - Y_3'(\eta_3)) \quad (3.62)$$

Denklem (3.55–3.58) için şu fonksiyonları çözüm olarak önerelim.

$$Y_1(x) = c_1 e^{\beta_1 x} + c_2 e^{\beta_2 x} \quad (3.63)$$

$$Y_2(x) = c_3 e^{\beta_1 x} + c_4 e^{\beta_2 x} \quad (3.64)$$

$$Y_3(x) = c_5 e^{\beta_1 x} + c_6 e^{\beta_2 x} \quad (3.65)$$

$$Y_4(x) = c_7 e^{\beta_1 x} + c_8 e^{\beta_2 x} \quad (3.66)$$

Bu çözümlerin sonucunda ortaya çıkan katsayı matrisinin determinantı bize frekans denklemini verir. Orta bölümde üç adet yay mesnedin olması durumunda frekans denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& v_{k_1} (v_{k_2} [v_{k_3} (e^{(\eta_1+\eta_2+2\eta_3)\beta_1+(1+\eta_1+\eta_2)\beta_2} - e^{(\eta_2+2\eta_3)\beta_1+(1+2\eta_1+\eta_2)\beta_2} - e^{2(\eta_1+\eta_3)\beta_1+(1+2\eta_2)\beta_2} + e^{(\eta_1+2\eta_3)\beta_1+(1+\eta_1+2\eta_2)\beta_2} - \\
& e^{(1+2\eta_2)\beta_1+2(\eta_1+\eta_3)\beta_2} - e^{(\eta_1+2\eta_2+\eta_3)\beta_1+(1+\eta_1+\eta_3)\beta_2} + e^{(2\eta_2+\eta_3)\beta_1+(1+2\eta_1+\eta_3)\beta_2} - e^{(1+\eta_1+\eta_2+\eta_3)\beta_1+(\eta_1+\eta_2+\eta_3)\beta_2} + \\
& e^{(1+\eta_2+\eta_3)\beta_1+(2\eta_1+\eta_2+\eta_3)\beta_2} + e^{(1+2\eta_1+\eta_3)\beta_1+(2\eta_2+\eta_3)\beta_2} - e^{(1+\eta_1+\eta_3)\beta_1+(\eta_1+2\eta_2+\eta_3)\beta_2} + e^{(1+\eta_1+2\eta_2)\beta_1+(\eta_1+2\eta_3)\beta_2} - \\
& e^{(1+2\eta_1+\eta_2)\beta_1+(\eta_2+2\eta_3)\beta_2} + e^{(1+\eta_1+\eta_2)\beta_1+(\eta_1+\eta_2+2\eta_3)\beta_2} + e^{2\eta_1\beta_1+\beta_2+(\eta_2+\eta_3)(\beta_1+\beta_2)} - e^{\beta_2+(\eta_1+\eta_2+\eta_3)(\beta_1+\beta_2)}) - \\
& e^{\eta_3(\beta_1+\beta_2)} (e^{\eta_1\beta_1} - e^{\eta_2\beta_1}) (e^{\eta_2\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_2\beta_2}) (-e^{\eta_2\beta_1+\eta_3\beta_2} + e^{\eta_1\beta_1+\eta_2\beta_2}) (\beta_1 - \beta_2)] + \quad (3.67) \\
& e^{\eta_2(\beta_1+\beta_2)} (e^{\eta_1\beta_1} - e^{\eta_2\beta_1}) (e^{\eta_2\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_2\beta_2}) (e^{\eta_3\beta_1+\eta_3\beta_2} - e^{\eta_1\beta_1+\eta_2\beta_2}) \mathcal{N}_{k_3} + e^{\eta_3(\beta_1+\beta_2)} (e^{\eta_1\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_1\beta_2}) (\beta_1 - \beta_2) (\beta_1 - \beta_2)) + \\
& (e^{\eta_1(\beta_1+\beta_2)} (e^{\eta_2\beta_1} - e^{\eta_3\beta_1}) \mathcal{N}_{k_2} ((e^{\eta_2\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_2\beta_2}) (e^{\eta_3\beta_1+\eta_3\beta_2} - e^{\eta_1\beta_1+\eta_2\beta_2}) \mathcal{N}_{k_3} + e^{\eta_3(\beta_1+\beta_2)} (e^{\eta_2\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_2\beta_2}) (\beta_1 - \beta_2)) + \\
& e^{(\eta_1+\eta_2)(\beta_1+\beta_2)} ((e^{\eta_2\beta_1} - e^{\eta_3\beta_1}) (e^{\eta_3\beta_1+\beta_2} - e^{\beta_1+\eta_3\beta_2}) \mathcal{N}_{k_3} + e^{\eta_3(\beta_1+\beta_2)} (-e^{\beta_1} + e^{\beta_2}) (\beta_1 - \beta_2) (\beta_1 - \beta_2)) (\beta_1 - \beta_2))
\end{aligned}$$

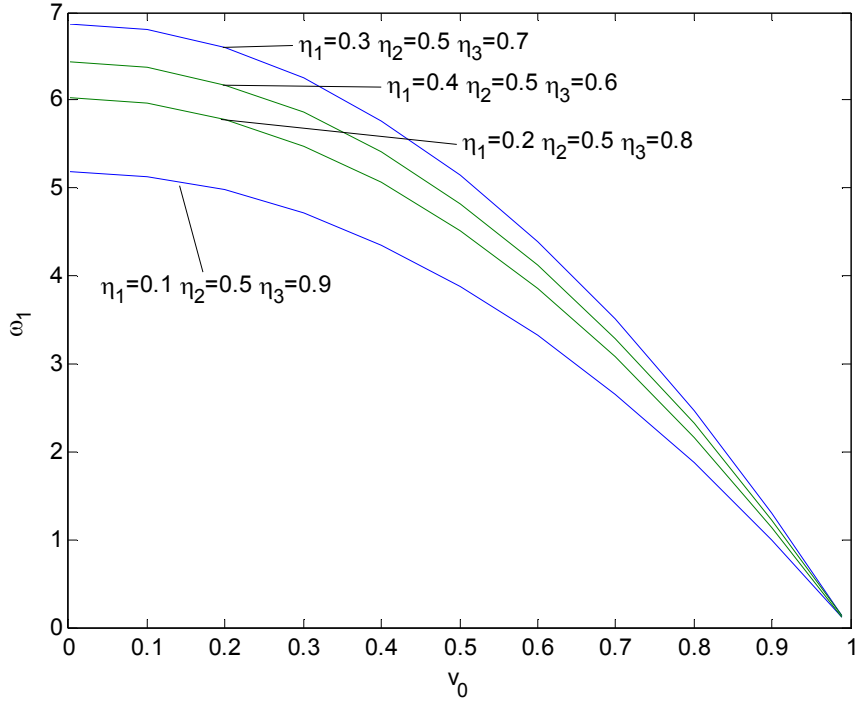
Şekil (3.21–3.29)'da orta kısımda üç yay mesnedine sahip aksel hareketli şerit problemi ele alınmıştır. Aksel hareketli şeritte yay katsayısının artması ve mesnet konumlarının değişmesi ile ilk üç tabii frekans değerlerinin nasıl değiştiği araştırılmıştır. Değişik mesnet konumları ve yay katsayıları ele alınarak grafikler çizilmiştir. Her üç konumda ele alınan yayların eşdeğer olduğu ve yay katsayılarının eşit olduğu kabul edilmiştir. Üç mesnetten bir tanesinin sürekli orta noktada olduğu kabul edilmiştir.

Şekil (3.21–3.26)' da ortada üç adet yay mesnedi bulunması durumunda yay katsayılarının artması ile tabii frekansların nasıl değiştiği araştırılmıştır. Şekil (3.21–3.23)'de yay katsayısı değerleri  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  alınarak değişik  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  değerleri için ilk üç tabii frekans grafikleri çizilmiştir. Şekil (3.21)'de yay mesnetlerinin konumu birbirine yaklaştığında 1. tabii frekans değerlerinin arttığı görülmüştür. Şekil (3.22)'de 2. tabii frekans değerlerinin mesnet konumları ile değişimi incelenmiştir.  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  ifadelerinin  $(0.1, 0.5, 0.9)$  ile  $(0.4, 0.5, 0.6)$  değerleri ve  $(0.2, 0.5, 0.8)$  ile  $(0.3, 0.5, 0.7)$  değerleri çakışmaktadır. Bu çakışma, bu mesnet konumlarında 2.mod yapılarının birbirine benzemesinden kaynaklanmaktadır. Şekil (3.23)'de ise 3. tabii frekans değerlerinin mesnet konumları ile değişimi incelenmiştir. En yüksek tabii frekans değerleri  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  ifadelerinin  $(0.2, 0.5, 0.8)$  değerinde, en düşük tabii frekans değerleri ise  $(0.3, 0.5, 0.7)$  değerinde olmaktadır.

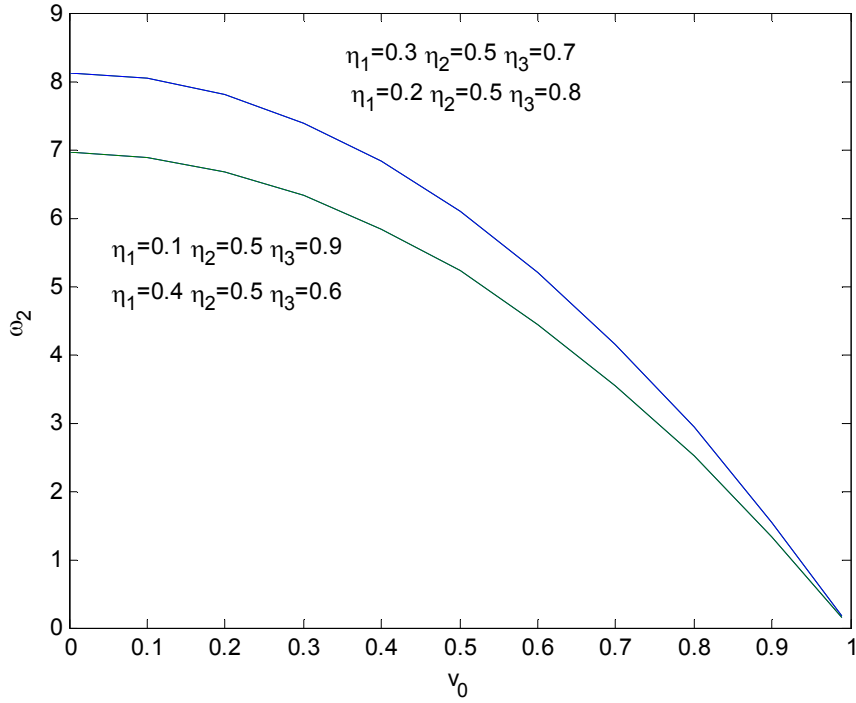
Şekil (3.24–3.26)' da ise yay katsayısı değerleri  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$  alınarak değişik  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  değerleri için ilk üç tabii frekans grafikleri çizilmiştir. Şekil (3.21–3.23)' e benzer olarak

mesnetlerinin konumu birbirine yaklaştığında 1. tabii frekans değerlerinin artmaktadır. 2. tabii frekans değerlerinde de  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  çiftinin  $(0.1, 0.5, 0.9)$  ile  $(0.4, 0.5, 0.6)$  değerleri ve  $(0.2, 0.5, 0.8)$  ile  $(0.3, 0.5, 0.7)$  değerleri çakışmaktadır. 3. tabii frekans değerleri için en yüksek tabii frekans değerleri  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  ifadelerinin  $(0.2, 0.5, 0.8)$  değerinde, en düşük tabii frekans değerleri ise  $(0.3, 0.5, 0.7)$  değerinde olmaktadır.

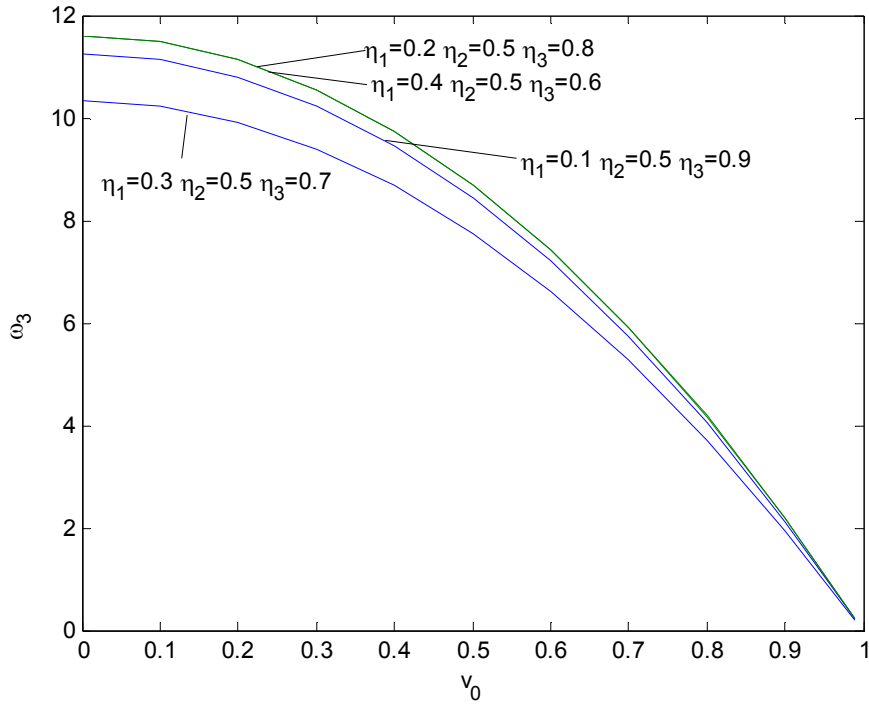
Şekil (3.27–3.29)' da ise ortadaki yay mesnetlerinin sayısının artması ile ilk üç tabii frekanstaki değişim incelenmiştir. Boyutsuz yay katsayısı değerleri  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  alınarak ilk 3 tabii frekans değerinin ortada iki mesnet  $(\eta_1=0.3, \eta_2=0.7)$  ve üç mesnet  $(\eta_1=0.3, \eta_2=0.5, \eta_3=0.7)$  durumları için çizilmiştir. Şekil (3.27) 'de mesnet sayısı arttığında 1. tabii frekans değerlerinin arttığı görülmüştür. Şekil (3.28) 'de ortada iki ve üç mesnet olması durumunda 2. mod frekans değerleri aynı olmaktadır. Bunun sebebi 2. mod yapısında orta noktanın düğüm noktası olmasıdır. Şekil (3.29)'da 3. mod için tabii frekanstaki değişim verilmiştir. 1. tabii frekans değişiminde olduğu gibi mesnet sayısının artması 3. tabii frekans değerini arttırmaktadır. Fakat artış oranı 1. tabii frekans değerlerindeki artıştan daha azdır.



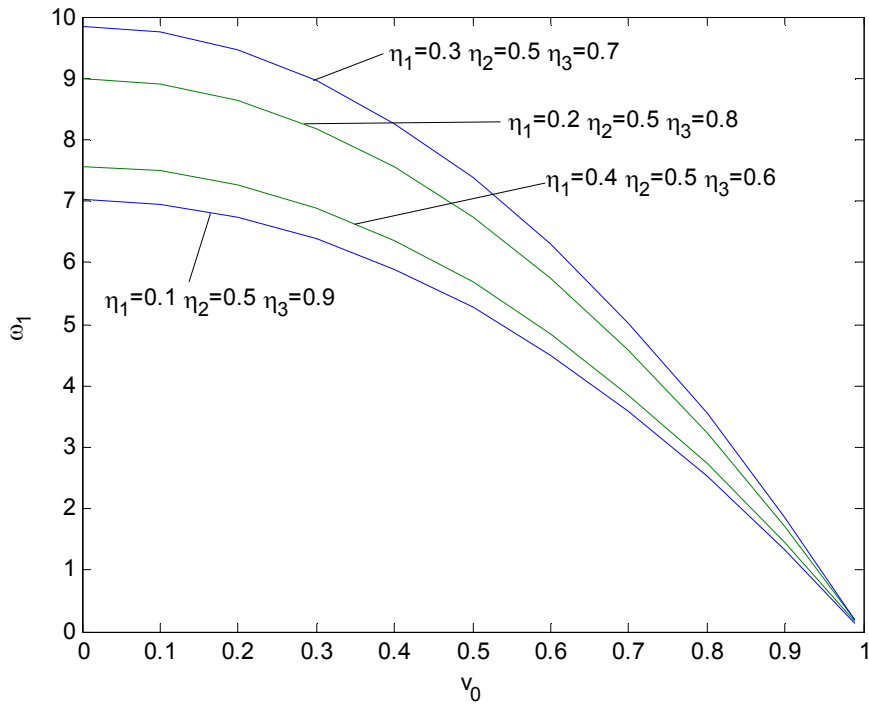
Şekil 3.21 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ )



Şekil 3.22 Değişik mesnet konumları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ )

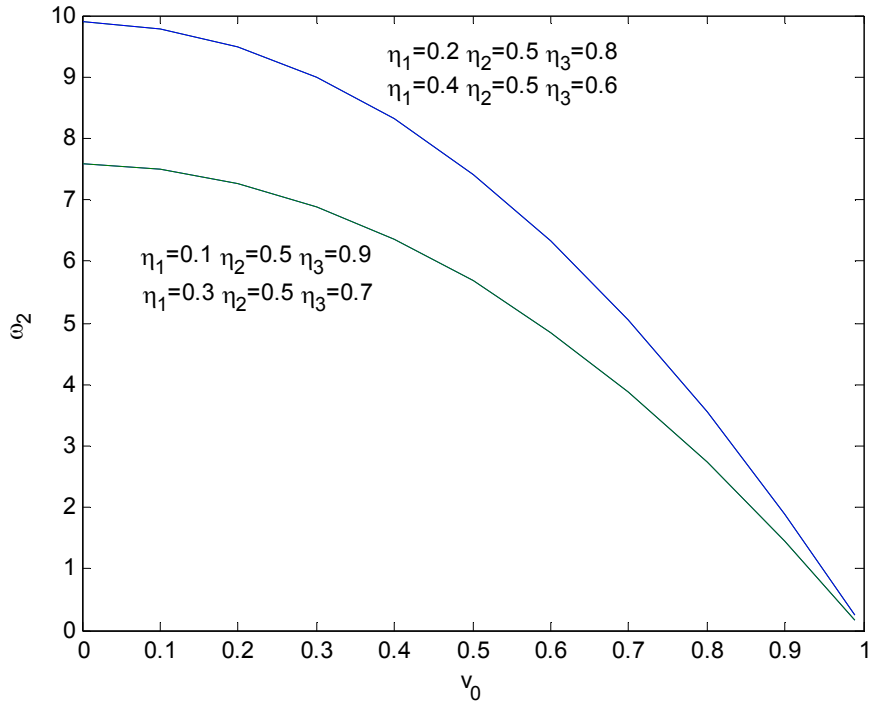


Şekil 3.23 Değişik mesnet konumları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ )

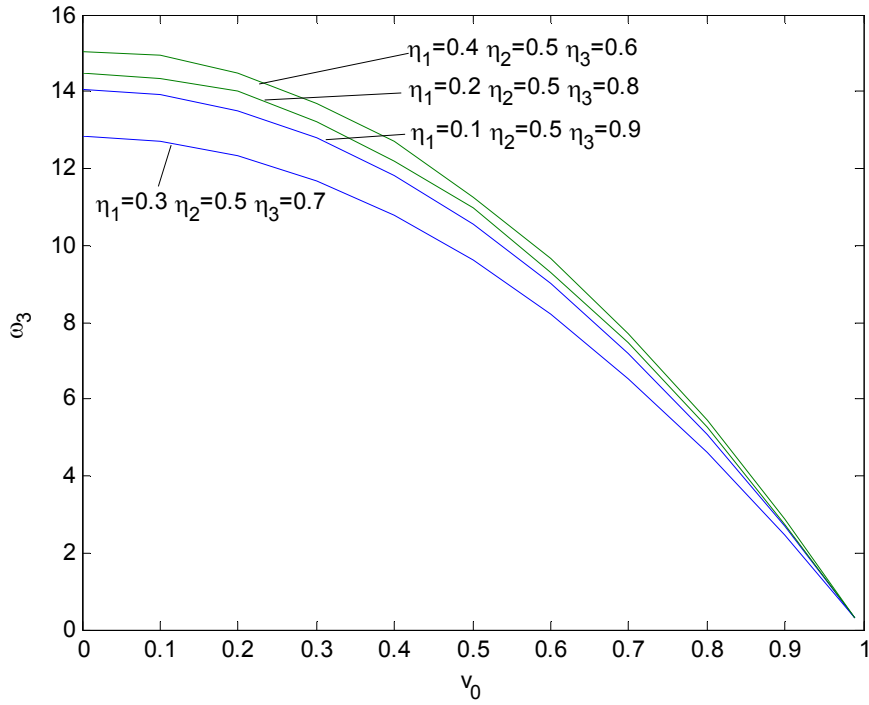


Şekil 3.24 Değişik mesnet konumları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$ )

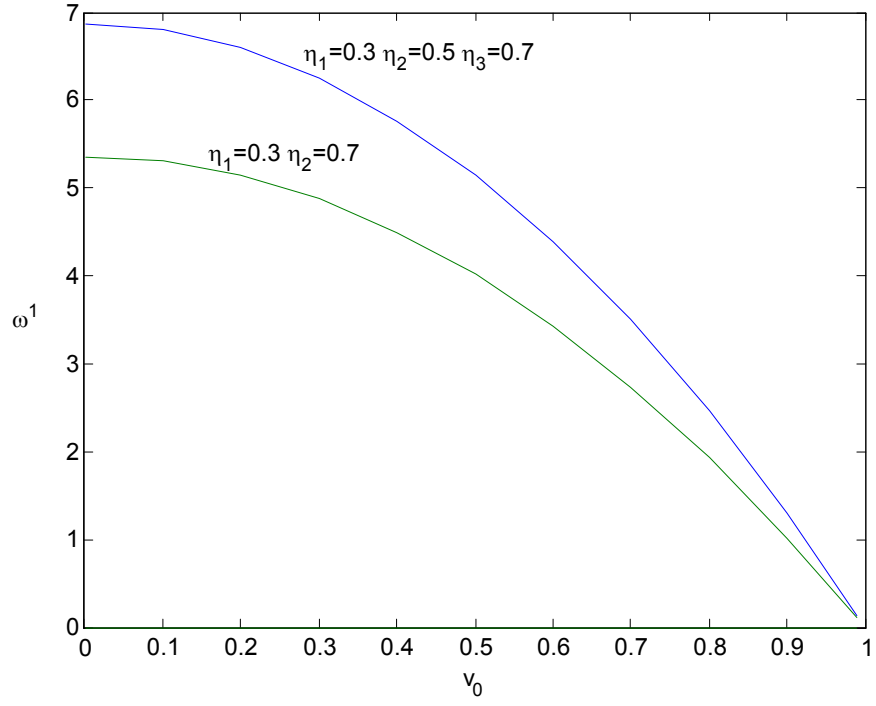




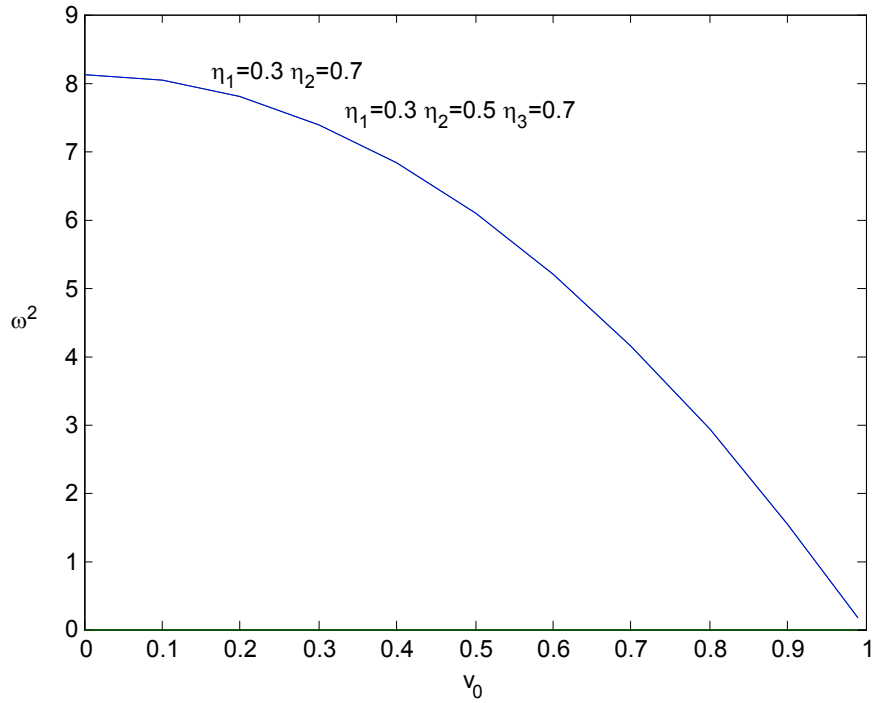
Şekil 3.25 Değişik mesnet konumları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$ )



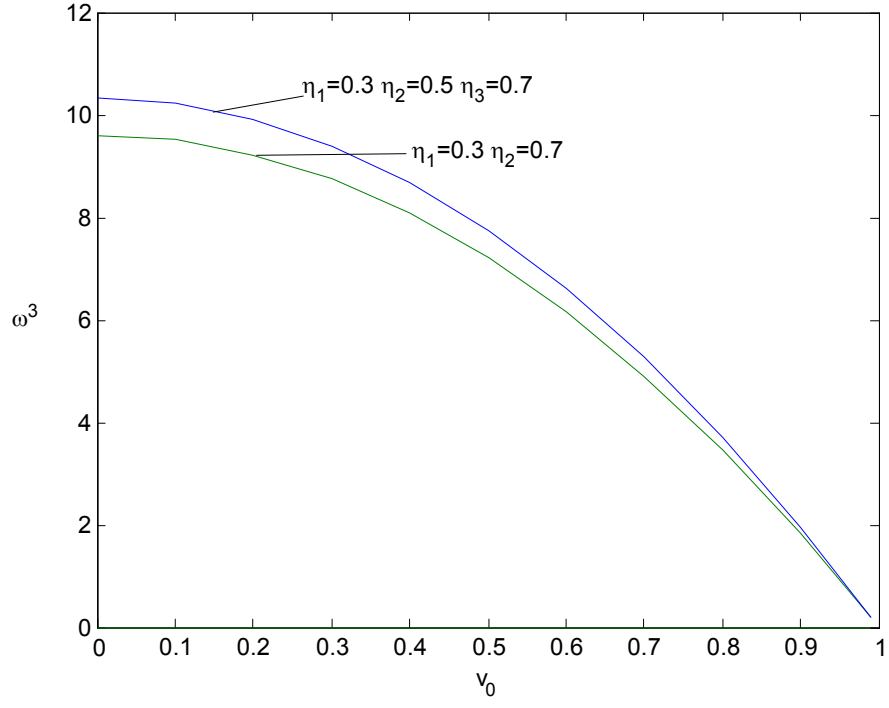
Şekil 3.26 Değişik mesnet konumları için aksenal hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$ )



Şekil 3.27 Değişik yay mesnet sayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 1. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ )



Şekil 3.28 Değişik yay mesnet sayıları için eksenel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 2. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ )



Şekil 3.29 Değişik yay mesnet sayıları için aksel hıza bağlı tabii frekans değişimi  
( 3. mod,  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$ )

### 3.2 Nonlinear Problem

Ele aldığımız problem için nonlinear terimler  $\varepsilon$  mertebesinde ortaya çıkmaktadır

$$D_0^2 y_{(m+1)2} + 2v_0 D_0 y'_{(m+1)2} + (v_0^2 - 1) y''_{(m+1)2} = -2D_0 D_1 y_{(m+1)1} - 2v_0 D_1 y'_{(m+1)1} - 2v_1 \sin \Omega T_0 D_0 y'_{(m+1)1} - 2v_0 v_1 \sin \Omega T_0 y''_{(m+1)1} - v_1 \Omega \cos \Omega T_0 y'_{(m+1)1} + \frac{1}{2} v_b^2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} y_{(r+1)1}^2 dx \right) y''_{(m+1)1} \quad (3.68)$$

Non-linear mertebeye olan  $\varepsilon$  mertebesi için aşağıdaki genel çözümleri önerebiliriz;

$$y_{(m+1)2}(x, T_0, T_1) = \phi_{m+1}(x, T_1) e^{i\omega T_0} + W_{m+1}(x, T_0, T_1) + k.e \quad (3.69)$$

Denklem (3.69)'da ilk terim ( $\phi$ ) fonksiyonun seküler terimleri ile ilgili, ikinci terim ( $W$ ) ise fonksiyonun seküler olmayan terimleri ile ilgilidir.

$$\cos \Omega T_0 = \frac{e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}}{2}, \sin \Omega T_0 = \frac{e^{i\Omega T_0} - e^{-i\Omega T_0}}{2i} \quad (3.70)$$

Önerdiğimiz bu çözümleri ve sin ile cos açılımlarını, denklem (3.68) ve  $\varepsilon$  mertebesi sınır şartlarında yerlerine yazdığımızda;

$$e^{i\omega T_0} \left[ -\omega^2 \phi_{m+1} + 2iv_0 \omega \phi'_{m+1} + (v_0^2 - 1) \phi''_{m+1} \right] = -2(i\omega Y_{m+1} + v_0 Y'_{m+1}) D_1 A e^{i\omega T_0} + v_1 \left( -\omega Y'_{m+1} - \frac{\Omega}{2} Y_{m+1} + iv_0 Y''_{m+1} \right) A e^{i(\Omega+\omega)T_0} + v_1 \left( \omega \bar{Y}'_{m+1} - \frac{\Omega}{2} \bar{Y}_{m+1} + iv_0 \bar{Y}''_{m+1} \right) \bar{A} e^{i(\Omega-\omega)T_0} + \frac{1}{2} v_b^2 \left[ 2Y''_{m+1} \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}'_{m+1} dx \right) + \bar{Y}''_{m+1} \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1}^2 dx \right) \right] A^2 \bar{A} e^{i\omega T_0} + \text{S.O.T.} + k.e. \quad (3.71)$$

$$\phi_1(0) = 0 \quad \phi_{p+1}(1) = 0 \quad \phi_p(\eta_p) = \phi_{p+1}(\eta_p) \quad (3.72)$$

$$\phi_p(\eta_p) e^{i\omega T_0} = \frac{1}{2} v_b^2 \left[ 2Y''_{m+1} \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}'_{m+1} dx \right) + \bar{Y}''_{m+1} \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1}^2 dx \right) \right] A^2 \bar{A} e^{i\omega T_0} \quad (3.73)$$

İfadeleri elde edilir. Burada (k.e.) kompleks eşlenik terimlerini, (S.O.T.) ise seküler olmayan terimleri ifade etmektedir. Bu denklem 1 mertebesindeki denklem (3.18) in homojen olmayan halidir. Homojen denklemin basit olmayan bir çözümü olduğuna göre, homojen olmayan denklemin de çözülebilmesi ancak ve ancak çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır. Hız değişim frekansı  $\Omega$ 'nın değişik durumları için çözülebilirlik şartları ayrı ayrı incelenmiştir.

### 3.2.1 $\Omega$ 'nın $2\omega'$ ya Yakın Olduğu Durum (Temel Parametrik Rezonans ( $\Omega=2\omega+\varepsilon\sigma$ ))

Bu kısımda Temel Parametrik rezonans incelenecektir, parametrik rezonans hız değişim frekansının tabii frekansın 2 katına yakın olduğu durumdur. Bunun için hız değişim frekansını şu şekilde ele alalım.

$$\Omega = 2\omega + \varepsilon\sigma \quad (3.74)$$

Denklem (3.74)' deki  $\sigma$  ayar parametresi olup 1 mertebesinde bir terimdir. Denklemlerde  $\varepsilon=0.01$  alınmıştır. Denklem (3.74), denklem (3.71)' e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} -\omega^2\phi_{m+1} + 2iv_0\omega\phi'_{m+1} + (v_0^2 - 1)\phi''_{m+1} &= -2(i\omega Y_{m+1} + v_0 Y'_{m+1})D_1 A \\ + v_1(\omega \bar{Y}'_{m+1} - \frac{\Omega}{2} \bar{Y}_{m+1} + iv_0 \bar{Y}''_{m+1})\bar{A}e^{i\sigma T_1} & \quad (3.75) \\ + \frac{1}{2}v_b^2[2Y''_{m+1}(\sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}'_{m+1} dx) + \bar{Y}''_{m+1}(\sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1}'^2 dx)]A^2 \bar{A} & + \text{S.O.T.} + \text{k.e.} \end{aligned}$$

elde edilir. Sınır şartları ise,

$$\phi_1(0) = 0 \quad \phi_{p+1}(1) = 0 \quad \phi_p(\eta_p) = \phi_{p+1}(\eta_p) \quad (3.76)$$

$$\phi_p(\eta_p) = \frac{1}{2}v_b^2[2Y_{m+1}(\sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}'_{m+1} dx) + \bar{Y}_{m+1}(\sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1}'^2 dx)]A^2 \bar{A} \quad (3.77)$$

olarak bulunur. Denklem (3.75)' in sol tarafını şöyle tanımlayalım,

$$L_{m+1}(\phi_{m+1}) = (v_0^2 - 1)\phi''_{m+1} + 2iv_0\omega\phi'_{m+1} - \omega^2\phi_{m+1} \quad (3.78)$$

Denklem (3.78) keyfi bir  $g_{m+1}$  fonksiyonu ile çarpıp tanım kümesi üzerinden integre edilirse,

$$\sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} g_{m+1} L_{m+1} dx = \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} g_{m+1} \{\text{Sağ taraf}\} dx \quad (3.79)$$

elde edilir.  $g_{m+1}$  başlangıçta keyfi bir fonksiyon idi. Bu fonksiyonu sol taraftaki integrali sıfır yapacak şekilde seçilirse ve sol taraftaki denklem (3.79)' daki kısmi integrasyon işlemi çözümlenirse,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^n \left[ \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \left( (v_0^2 - 1) g_{m+1}'' + 2iv_0 \omega g_{m+1}' - \omega^2 g_{m+1} \right) \phi_{m+1} dx \right. \\
& \left. + 2iv_0 \omega (g_{m+1} \phi_{m+1}) \Big|_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} + (v_0^2 - 1) [g_{m+1} \phi_{m+1}' - g_{m+1}' \phi_{m+1}] \Big|_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \right] = 0 \\
& m=0,1,2,\dots,n, \quad \eta_0=0, \quad \eta_{n+1}=1
\end{aligned} \tag{3.80}$$

elde edebiliriz. Çözülebilirlik şartını bulmak için denklem (3.79)' un sağ tarafı sıfırlarsak sol tarafın sıfıra eşit olabilmesi ancak ve ancak integral içinin sıfır olması ve sınır şartlarının sıfır olması ile mümkündür. Böylece,

$$(v_0^2 - 1) g_{m+1}'' + 2iv_0 \omega g_{m+1}' - \omega^2 g_{m+1} = 0 \tag{3.81}$$

yazılabilir. Sınır şartları açık olarak yazılırsa  $g_{m+1}$  fonksiyonu  $O(1)$  mertebesi çözümü için kullandığımız  $Y_{m+1}$  fonksiyonun kompleks eşleniği olduğu anlaşılmaktadır.

$$g_{m+1}(x) = \bar{Y}_{m+1}(x) \tag{3.82}$$

Bulduğumuz  $g_{m+1}$  fonksiyonunu denklem (3.79)' un sağ tarafına yerleştirirse çözülebilirlik şartı elde edilir.

$$D_1 A + k_0 \bar{A} e^{i\sigma T_1} - k_3 A^2 \bar{A} = 0 \tag{3.83}$$

$k_0$  ve  $k_3$  katsayılarının en genel hali şu şekilde yazılabilir.

$$k_0 = \frac{1}{4} v_1 \frac{(\Omega - 2\omega) \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \bar{Y}'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) - 2iv_0 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \bar{Y}''_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)}{i\omega \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + v_0 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)} \tag{3.84}$$

$$k_3 = \frac{1}{4} v_b^2 \frac{2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1}^2 dx \right) \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \bar{Y}''_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)}{i\omega \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + v_0 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)} \tag{3.85}$$

Burada yer alan şerit hızının değişim genliği  $v_1=0.1$ , boyuna direngelik  $v_b=5$  alınmıştır. Basit olmayan çözüm için kompleks genlik şu şekilde tanımlanabilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\theta} \quad (3.86)$$

Denklem (3.86), denklem (3.83)' e yerleştirip, denklemler gerçel ve sanal kısımlarına ayrıldığında genlik faz modülasyon denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_1 a = a(k_{0I} \sin \gamma - k_{0R} \cos \gamma) \quad (3.87)$$

$$a D_1 \gamma = a \sigma + 2a(k_{0I} \cos \gamma + k_{0R} \sin \gamma) - \frac{1}{2} k_{3I} a^3 \quad (3.88)$$

Denklemlerde yer alan faz ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\gamma = \sigma T_1 - 2\theta \quad (3.89)$$

Faz modülasyon denklemlerinde basit çözüm ( $a=0$ ) ve basit olmayan çözüm ( $a \neq 0$ ) mevcuttur. Basit olmayan çözümde, düzgün rejim bölgesi için  $D_1 a = 0$ ,  $D_1 \gamma = 0$ ' dir. Bu durumda faz modülasyon denklemleri şu hali alır.

$$F_1(a, \gamma) = (k_{0I} \sin \gamma - k_{0R} \cos \gamma) \quad (3.90)$$

$$F_2(a, \gamma) = \sigma + 2(k_{0I} \cos \gamma + k_{0R} \sin \gamma) - \frac{1}{2} k_{3I} a^2 \quad (3.91)$$

Buradan hız değişim frekansı ve genlik arasındaki ilişki şu şekilde elde edilir.

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} a^2 k_{3I} \mp 2 \sqrt{k_{0I}^2 + k_{0R}^2} \quad (3.92)$$

Denklem (3.90–3.91) Jacobian matrisini elde etmek için kullanılırsa,

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = 0 \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = a \left( \frac{1}{4} k_{3I} a^2 - \frac{\sigma}{2} \right) \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial a} = -k_{3_1} a \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = 0 \quad (3.96)$$

elde edilebilir. Jacobian matrisinde sırasıyla terimler yerlerine yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \end{bmatrix}_{\substack{a=a_0 \\ \gamma=\gamma_0}} \quad (3.97)$$

elde edilir. Buradan özdeğerler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 - \lambda & a\left(\frac{1}{4}k_{3_1}a^2 - \frac{\sigma}{2}\right) \\ -k_{3_1}a & 0 - \lambda \end{bmatrix}_{\substack{a=a_0 \\ \gamma=\gamma_0}} \quad (3.98)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \mp \sqrt{2a^2\sigma k_{3_1} - a^4 k_{3_1}^2} \right) \quad (3.99)$$

denklem (3.92)' de elde ettiğimiz  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  eğrilerinin kararlılığı için denklem (3.99) kullanılmaktadır. Bu eğrilerden  $\sigma_1$  için her zaman kararlı,  $\sigma_2$ 'nin ise kararsız olduğu sonucuna varılmıştır.

Faz modülasyon denklemlerinde  $a=0$  durumu basit çözümdür. Basit çözümün kararlılık analizi için, kompleks genlik kutupsal formda şu şekilde yazabiliriz,

$$A = \frac{1}{2} (p + iq) e^{i\frac{\sigma}{2}T_1} \quad (3.100)$$

denklem (3.100), denklem (3.83) de yerleştirilirse kompleks genlikleri gerçel ve sanal kısımlarına ayırdığımızda genlik faz modülasyon denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_1 p = -(k_{0_r}) p + \left(\frac{\sigma}{2} - k_{0_i}\right) q - \frac{1}{4} k_{3_1} q (p^2 - q^2) \quad (3.101)$$



$$D_1 q = (k_{0R}) q + \left(\frac{\sigma}{2} + k_{0i}\right) p + \frac{1}{4} k_{3i} p \quad (p^2 + q^2) \quad (3.102)$$

Benzer şekilde özdeğerler hesaplanırsa,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \mp \sqrt{4(k_{0i}^2 + k_{0R}^2) - \sigma^2} \right) \quad (3.103)$$

elde edilir. Kararlılık sınırlarını bulmak için  $\lambda=0$  kabulü yapılırsa,

$$\sigma_{1,2} = \mp 2 \sqrt{k_{0i}^2 + k_{0R}^2} \quad (3.104)$$

elde edilebilir.

Temel parametrik rezonans durumu için orta bölümde iki ve üç yay mesnetli duruma ait hız değişim frekansına bağlı genliklerin değişimi gösteren grafikler elde edilmiştir. Orta kısımda bulunan mesnet sayısının, farklı yay katsayısının ve değişik mesnet konumlarının hız değişimine bağlı genlikleri nasıl değiştirdiği incelenmiştir. Basit çözümün kararsız olduğu ve basit olmayan çözümlerin ortaya çıktığı kararsızlık bölgesine mesnet sayısının, farklı yay katsayısının ve değişik mesnet konumlarının nasıl etkilediği araştırılmıştır.

Şekil (3.30–3.83)'de bazı parametreler için  $(\sigma-a)$  grafikleri verilmiştir. Bu grafikler çizilirken  $\varepsilon=0.01$ ,  $v_1=0.1$ ,  $v_b=5$  ve  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}$  değerleri alınmıştır. Grafiklerin kararlı ve kararsız olduğu bölgeler gösterilmiştir. Sürekli çizgiler kararlı bölgeleri, kesik çizgiler ise kararsız bölgeleri göstermektedir. Basit olmayan çözüm için  $(\sigma_1)$  her zaman kararlı,  $(\sigma_2)$  ise her zaman kararsızdır. Basit çözüm için ise  $(\sigma_1)$  ve  $(\sigma_2)$  grafiklerinin başlangıç noktalar arası kararsız, bunların dışındaki bölgeler ise kararlıdır. Grafiklerin daha iyi anlaşılması ve grafiklerin bir arada olabilmesi amacıyla  $v_0$ ' ın ve  $v_k$ ' nın farklı değerleri için eğriler bir şekilde gösterilmiştir. Değişik  $v_0$  ve  $v_k$  değerleri için bir eksen de gösterilen grafiklerde, kararlı ve kararsızlık bölgeleri grafiklerin üst üste gelmesi nedeniyle kararsız bölgelerin bir bölümü kararlı gibi gözükse de bu bölgelerin kararsız bölgelerin çatallanma noktaları arasındaki bölgeler olduğu unutulmamalıdır.

Orta bölümde iki yay mesnetli duruma ait Şekil (3.30–3.32)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ , Şekil (3.33–3.35)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ , Şekil (3.36–3.38)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , Şekil (3.39–3.41)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için ilk üç mod  $\sigma$ -a grafiği gösterilmiştir.

Şekil (3.30)'da  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1'e yaklaştığında genliklerin arttığı kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. Bu durum 2. mod da değişmekte kararsızlık bölgeleri birbirine çok yakın çıkmaktadır (Şekil 3.31). 3. mod durumunda ise en geniş aralık  $v_0 = 0.5$  için oluşmaktadır (Şekil 3.32).

Şekil (3.33)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1'e yaklaştığında genliklerin arttığı kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. Bu durum 2. mod da değişmemekte fakat kararsızlık bölgeleri birbirine çok yakın çıkmaktadır (Şekil 3.34). 3. mod durumunda ise en geniş aralık  $v_0 = 0.5$  için oluşmaktadır (Şekil 3.35).

Şekil (3.36) da  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1'e yaklaştığında kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. Bu durum 2. mod 3. mod durumunda da devam etmektedir (Şekil 3.37–3.38).

Şekil (3.39)'da  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1'e yaklaştığında kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. 2. modda aynı şekilde oluşmakta fakat kararsızlık bölgeleri birbirine çok yakın çıkmaktadır (Şekil 3.40). 3. mod durumunda ise en geniş aralık  $v_0 = 0.1$  için oluşmaktadır (Şekil 3.41).

Orta bölümde iki yay mesnetli durumda Şekil (3.42–3.44)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ , Şekil (3.45–3.47)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ , Şekil (3.48–3.50)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , Şekil (3.51–3.53)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_0=0.5$  ve değişik  $v_k$  ( $v_{k1} = v_{k2} = 2, 10, 20, 60$ ) yay katsayısı değerleri için ilk üç mod  $\sigma$ -a grafiği gösterilmiştir.

Şekil (3.42) de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir. Mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında kararsız bölgeler birbirine çok yakın olmakta ve  $v_{k1} = v_{k2} = 60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmaktadır. Şekil (3.44) de 3. mod için durum değişmemekte kararsız bölgeler birbirine yakın olmakta ve yay katsayısı arttığında büyümektedir. Şekil (3.43) de 2. mod için en geniş bölge  $v_{k1} = v_{k2} = 60$  için olmakta ve kararsız bölge en geniş olmaktadır.

Şekil (3.45)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir. Mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında kararsız bölgeler büyümektedir.  $v_{k1} = v_{k2} = 60$  değeri için

en geniş bölgeye ulaşmaktadır. Şekil (3.46) ve Şekil (3.47)'de de 2. mod ve 3. mod için durum değişmemekte kararsız bölgeler yay katsayısı arttığında büyümektedir.

Şekil (3.48)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir. mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında kararsız bölgeler büyümektedir.  $v_{k1} = v_{k2} =60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmaktadır. Şekil (3.49) ve Şekil (3.50)'de de 2. mod ve 3. mod için durum değişmemekte kararsız bölgeler yay katsayısı arttığında büyümektedir.

Şekil (3.51)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir. Bu durumda kararsızlık bölgesi  $v_{k1} = v_{k2} =10$  olduğunda en dar,  $v_{k1} = v_{k2} =60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmaktadır. Şekil (3.52)'de mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında kararsız bölgeler büyümektedir. Şekil (3.53)'de de kararsızlık bölgesi  $v_{k1} = v_{k2} =10$  olduğunda en dar,  $v_{k1} = v_{k2} =60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmaktadır.

Şekil (3.54) de  $v_{k1}= v_{k2}=10$ ,  $v_0 =0.5$  ve değişik ( $\eta_1-\eta_2$ ) değerleri için  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir. 1. mod için mesnet konumları birbirine yaklaştığında kararsız bölgeler genişlemektedir. Şekil(3.55) ve Şeki (3.56) da 2. mod ve 3. mod için en geniş aralık ( $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ) konumundayken olmakta en dar aralık ise Şekil (3.55) de ( $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ) ve Şekil (3.56) da ( $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ) konumunda iken meydana gelmektedir.

Orta bölümde üç adet yay mesnet olması durumuna ait Şekil (3.57–3.59)'da  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , Şekil (3.60–3.62)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , Şekil (3.63–3.65)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , Şekil (3.66–3.68)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$  ve değişik  $v_0$  aksenal hız değerleri için ilk üç mod  $\sigma$ -a grafiği gösterilmiştir.

Şekil (3.57)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_{k1}= v_{k2}= v_{k3} =10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. Bu durum 2. modda da aynı olmaktadır (Şekil 3.58). 3. mod durumunda ise değişmektedir. Şekil 3.59'da en dar aralık  $v_0=0.5$  değerinde, en geniş aralık da  $v_0=0.1$  değerinde olmaktadır.

Şekil (3.60)'da  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ ,  $v_{k1}= v_{k2}= v_{k3} =10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. Bu durum 2. modda farklılaşmakta en dar aralık  $v_0=0.9$  değerinde, en geniş aralık da  $v_0=0.1$  değerinde olmaktadır (Şekil 3.61). 3. modda ise  $v_0$  arttıkça kararsızlık bölgesi genişlemektedir (Şekil 3.62).

Şekil (3.63)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında genliklerin artış gösterdiği kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. Bu durum 2. mod ve 3. mod durumunda değişmektedir. Şekil 3.64–3.65'de en dar aralık  $v_0=0.9$  değerinde olmaktadır.

Şekil (3.66)'da  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında kararsızlık bölgeleri genişlemektedir. Bu durum 2. modda da değişmemekte aksinel hız kritik hıza yaklaştığında kararsızlık bölgeleri genişlemektedir (Şekil 3.67). Fakat 3. modda durum değişmektedir. Şekil 3.68'de en dar aralık  $v_0=0.9$  değerinde, en geniş aralık da  $v_0=0.1$  değerinde olmaktadır.

Orta bölümde üç adet yay mesnet olması durumuna ait Şekil (3.69–3.71)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ , Şekil (3.72–3.74)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ , Şekil (3.75–3.77)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ , Şekil (3.78–3.80)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  ( $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 2, 10, 20, 60$ ) yay katsayısı değerleri için ilk üç mod  $\sigma$ -a grafiği gösterilmiştir.

Şekil (3.69)'da  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında kararsız bölgeler büyümektedir.

$v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmaktadır. Şekil (3.70)'de 2. mod için durum değişmemekte kararsız bölgeler yay katsayısı arttığında büyümektedir. Şekil (3.71)'de ise 3. mod için en geniş aralık  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 60$  değeri için olurken en dar aralık  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 20$  değerinde olmaktadır.

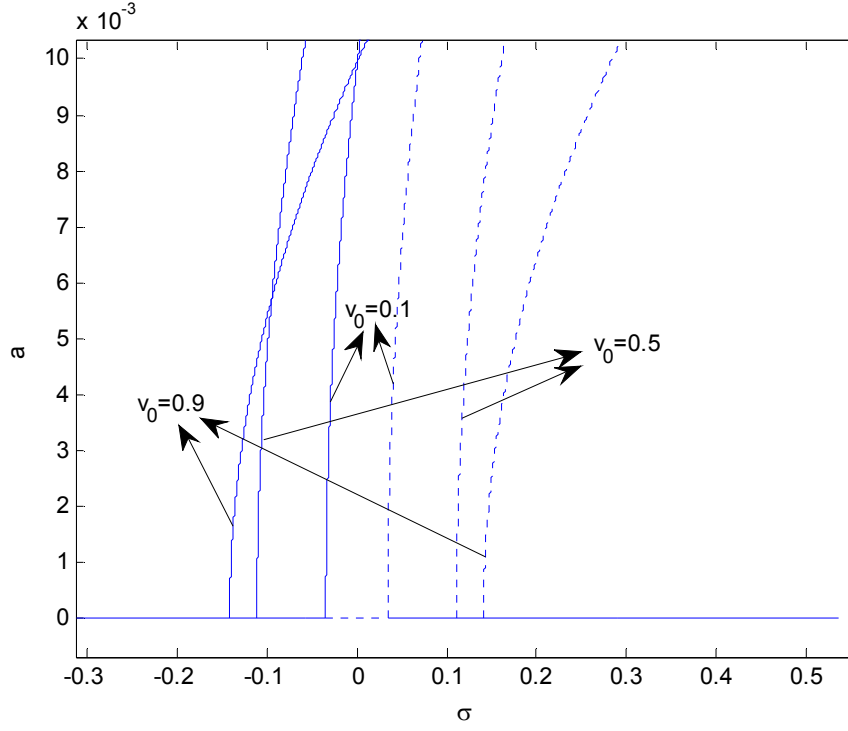
Şekil (3.72) de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında kararsız bölgeler büyümektedir.  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmaktadır. 2. ve 3. mod için durum değişmekte kararsız bölgeler yay katsayısı arttığında farklılık göstermektedir. 2. modda en dar aralık  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$  değerinde 3. modda ise  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 20$  değerinde olmaktadır. 2. modda en geniş aralık  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  değerinde 3. modda ise  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 60$  değerinde olmaktadır (Şekil 3.73-74).

Şekil (3.75)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında kararsız bölgeler büyümektedir.  $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmaktadır. Şekil (3.76)'da 2. mod için durum değişmemekte kararsız bölgeler yay katsayısı arttığında büyümektedir. Şekil (3.77)'de ise 3. mod için en geniş aralık  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 2$  değeri için olurken en dar aralık  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 60$  değerinde olmaktadır.

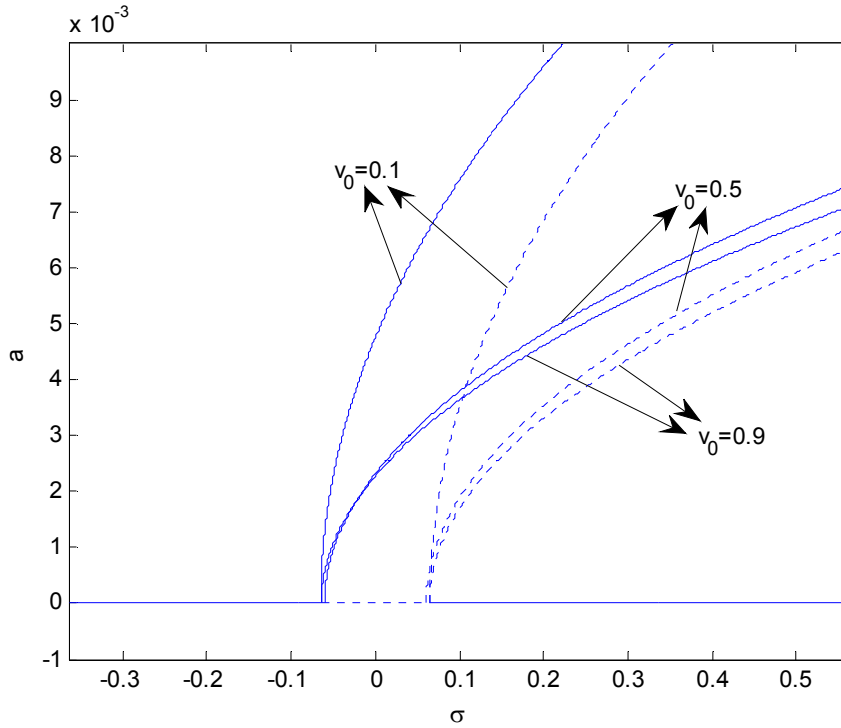
Şekil (3.78) de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları  $v_{k1} = v_{k2}=v_{k3}=60$  değeri için en geniş bölgeye ulaşmakta,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =20$  değeri için en dar bölge oluşmaktadır. Şekil (3.79) te 2. mod için durum değişmekte kararsız bölgeler yay katsayısı arttığında büyümektedir. Şekil (3.80) de ise 3. mod için en geniş aralık  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =20$  değeri için olurken en dar aralık  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =60$  değerinde olmaktadır.

Şekil (3.81)'de  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} =10$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği verilmiştir. 1. mod için mesnet konumları birbirine yaklaştığında kararsız bölgeler  $(\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9)$  ve  $(\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8)$  ile  $(\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7)$  ve  $(\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6)$  hemen hemen aynı olmaktadır. Şekil (3.82) de 2. mod için en geniş aralık  $(\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7)$  konumundayken olmakta en dar aralık ise  $(\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9)$  konumunda olmaktadır. Şekil (3.83) de 3.mod için en geniş aralık  $(\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6)$  konumundayken olmakta en dar aralık ise  $(\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9)$  konumunda olmaktadır.

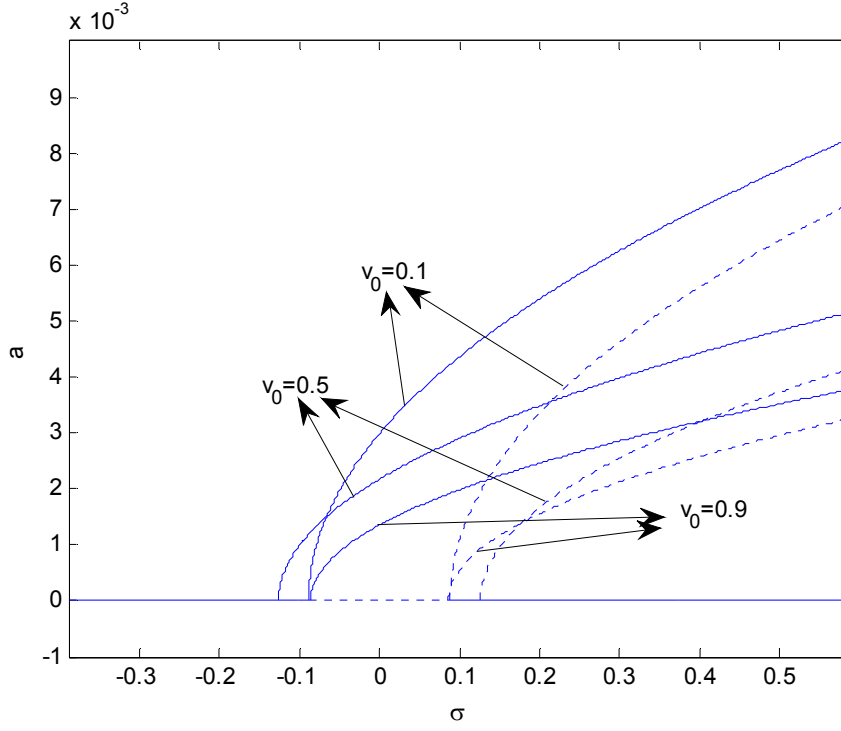
Basit çözümün kararlı olduğu bölgede genlikler sıfıra yakın iken basit çözümün kararsız bölgelerde ise genlikler hız değişim frekansının aksel hızın iki katına yakın olması durumuna göre artmaktadır. Basit çözümün kararsız olduğu bölgelerde basit olmayan çözüm ortaya çıkmaktadır. Basit olmayan çözümün var olduğu noktalarda genlikler artmaktadır. Bu nedenle bu bölgede çalışmak sakıncalıdır. Bu bölgenin dışında ise basit çözüm vardır ve genlikler sıfırdır. Sistem tasarımlarında parametrik rezonanstan kaynaklanan genlik artış probleminin önüne geçmek için basit olmayan çözümün ortaya çıktığı bölgelerden uzak durmak gerekmektedir. Bu bölgeden uzak durmak için ise sistemin tabii frekanslarını ve basit çözümün kararlı olduğu bölgeleri bilmek gerekmektedir.



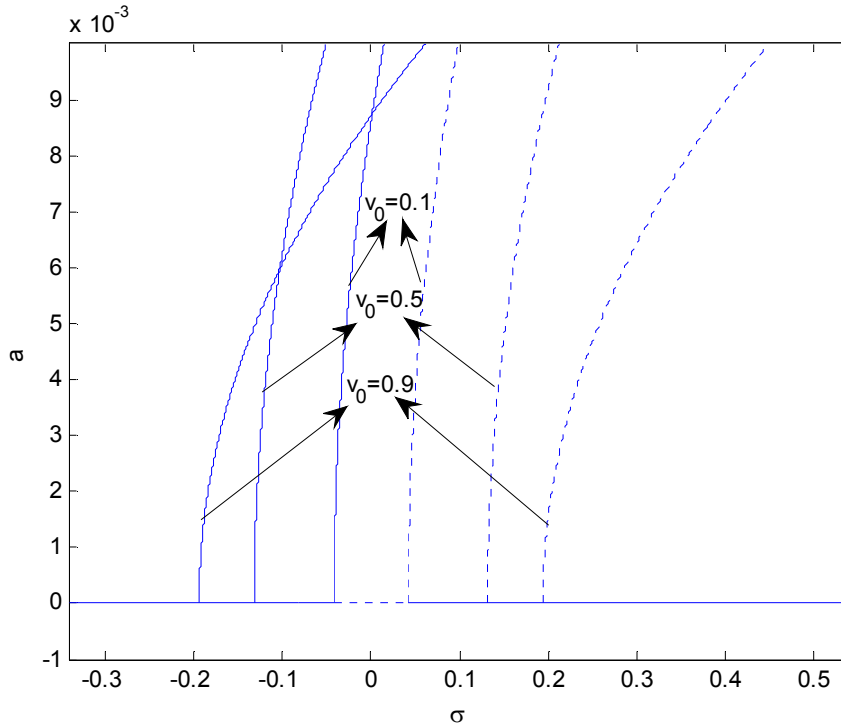
Şekil 3.30  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)



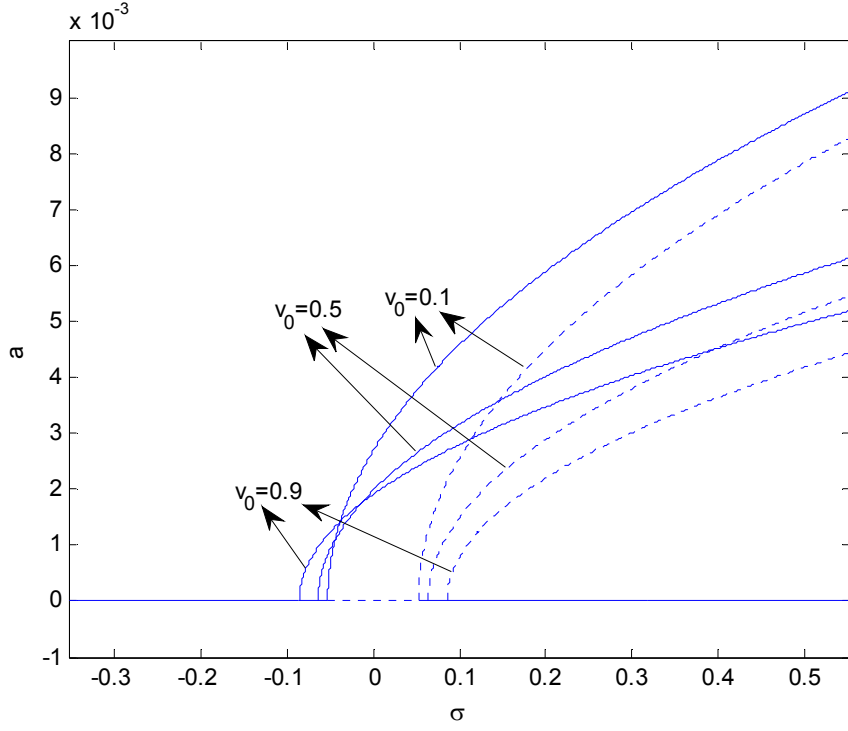
Şekil 3.31  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (2. mod)



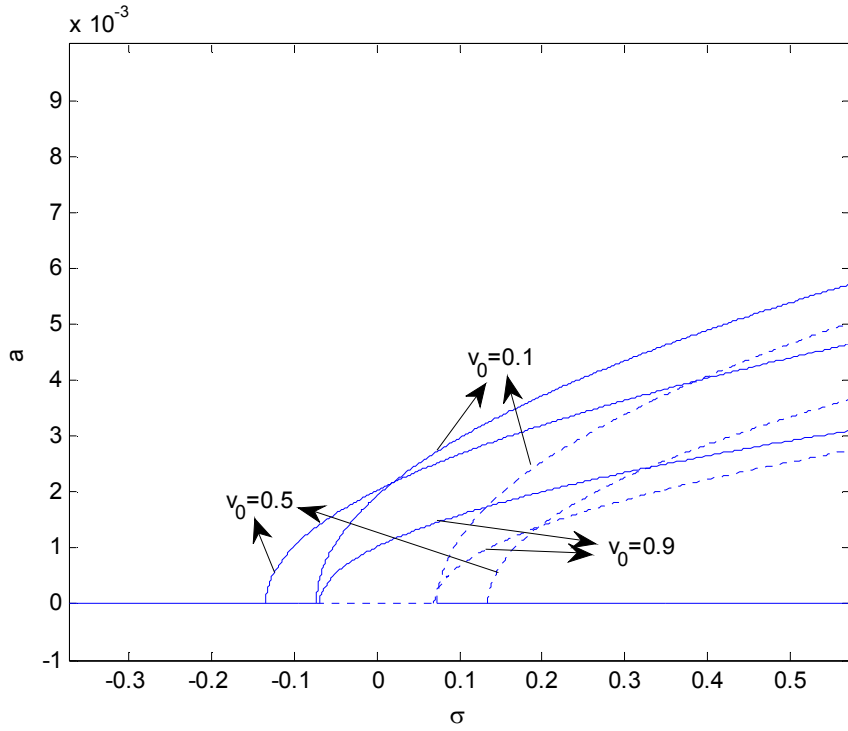
Şekil 3.32  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (3. mod)



Şekil 3.33  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (1. mod)

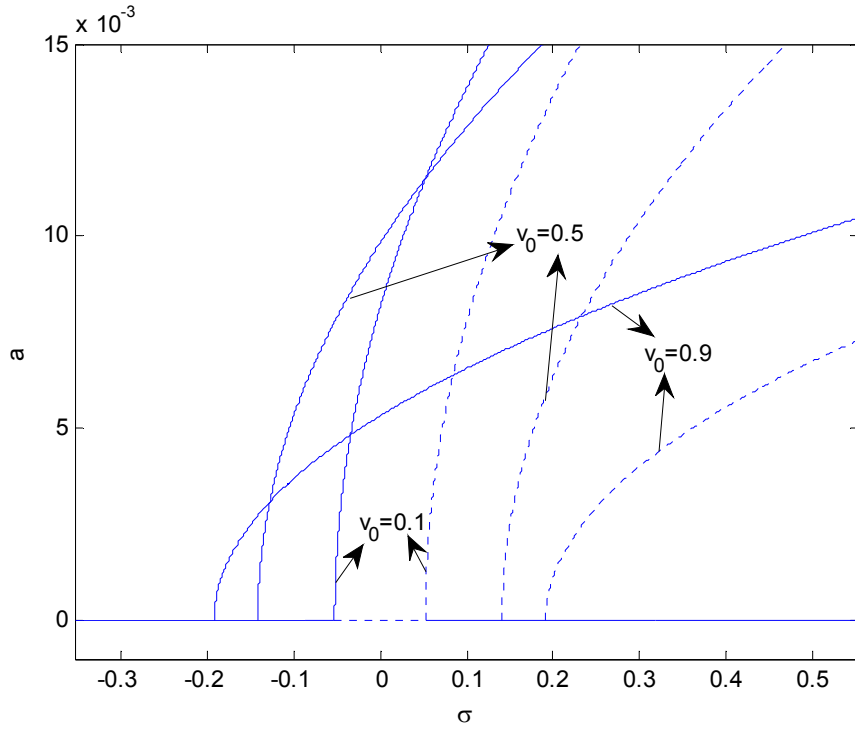


Şekil 3.34  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (2. mod)

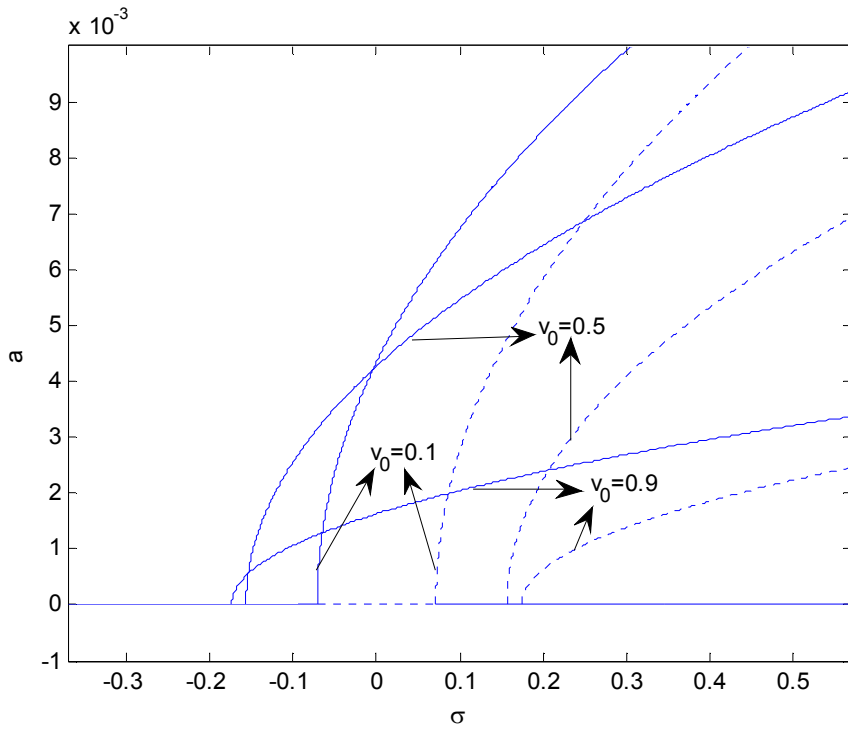


Şekil 3.35  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (3. mod)

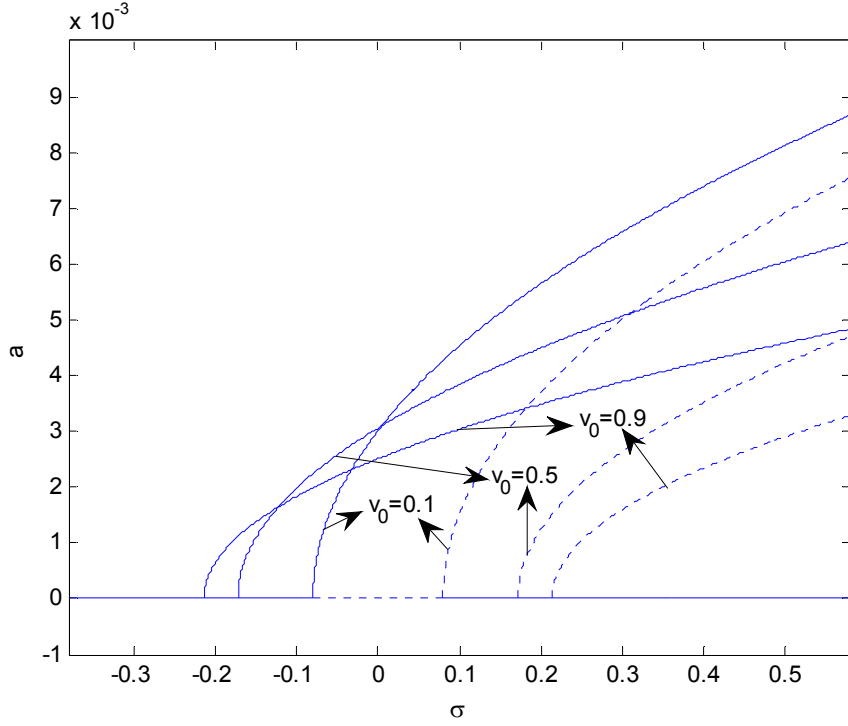




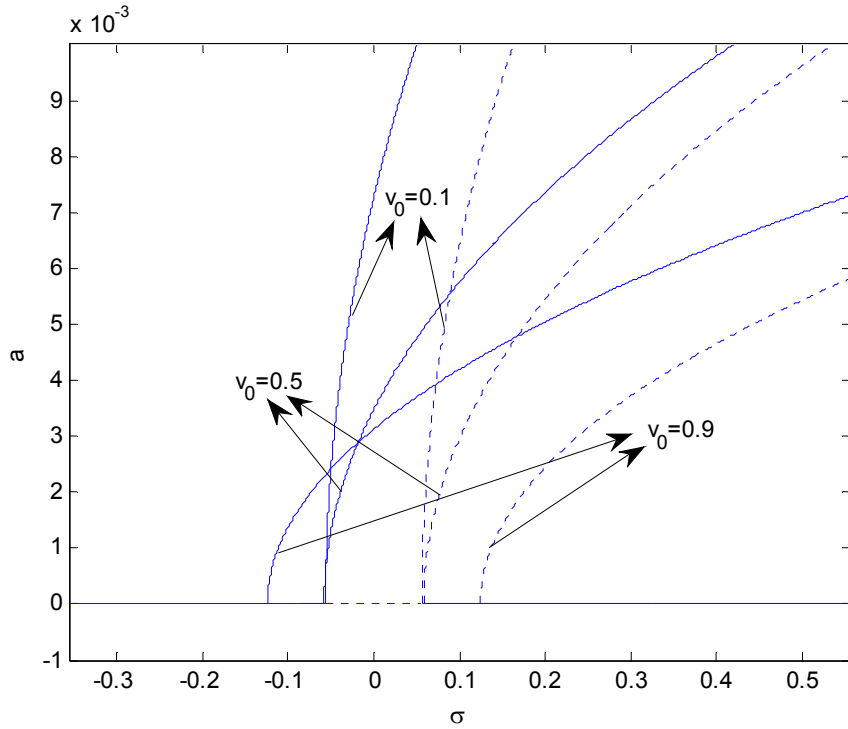
Şekil 3.36  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (1. mod)



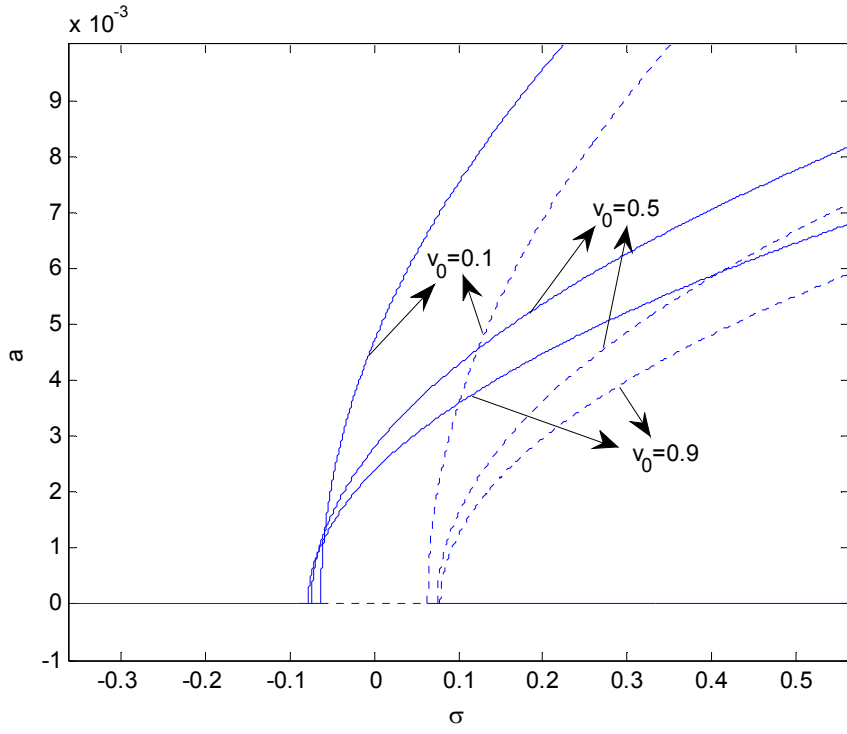
Şekil 3.37  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (2. mod)



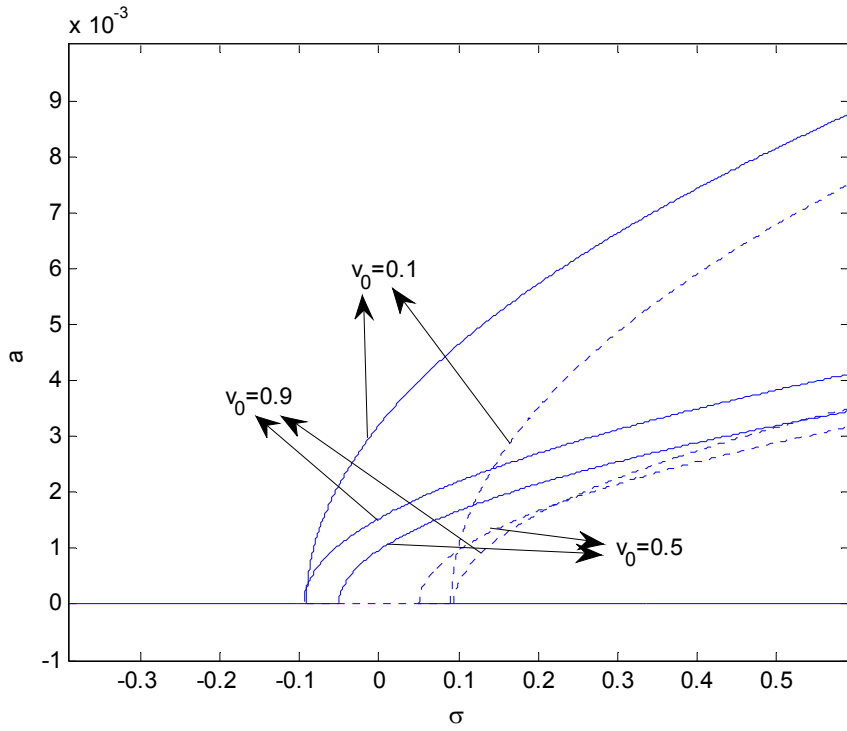
Şekil 3.38  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği(3. mod)



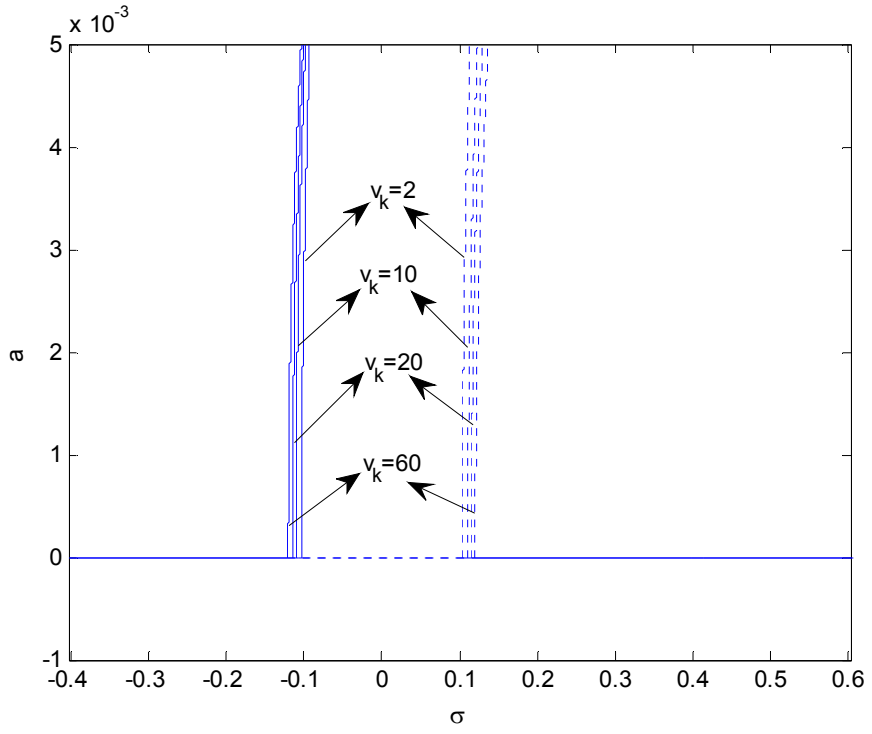
Şekil 3.39  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)



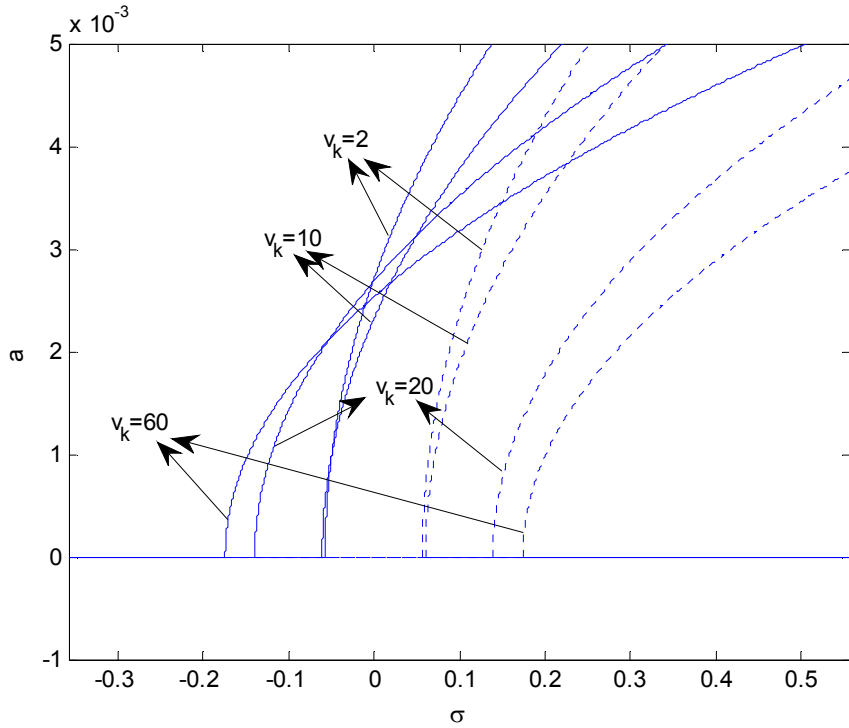
Şekil 3.40  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (2. mod)



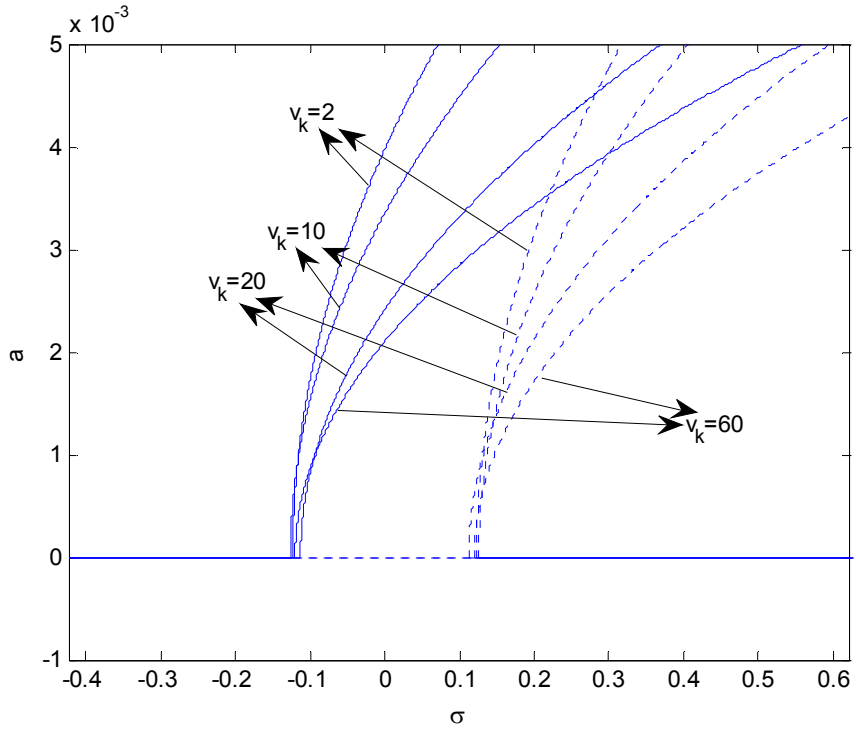
Şekil 3.41  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$   $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ - $a$  grafiği (3. mod)



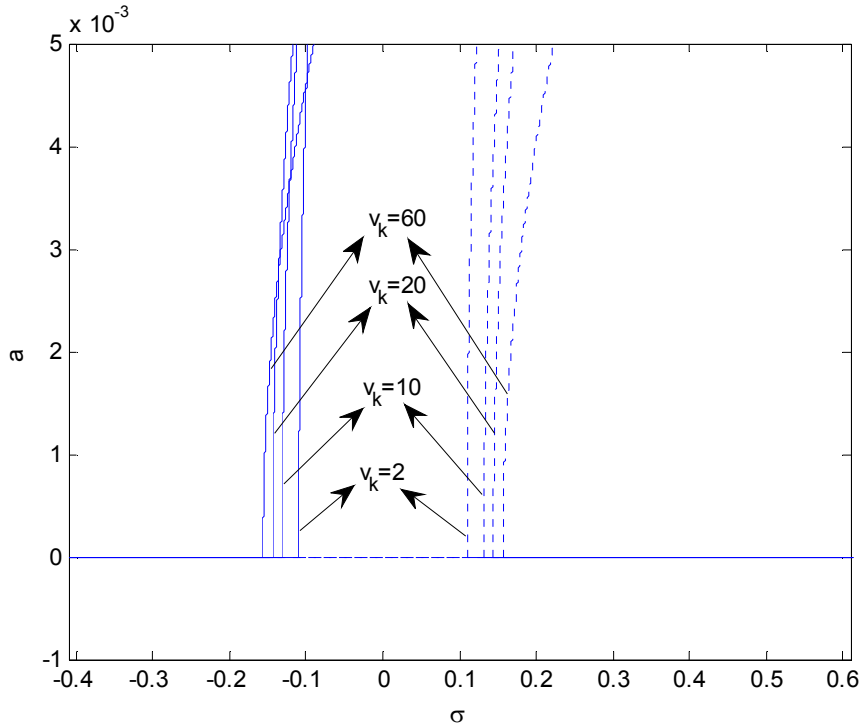
Şekil 3.42  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)



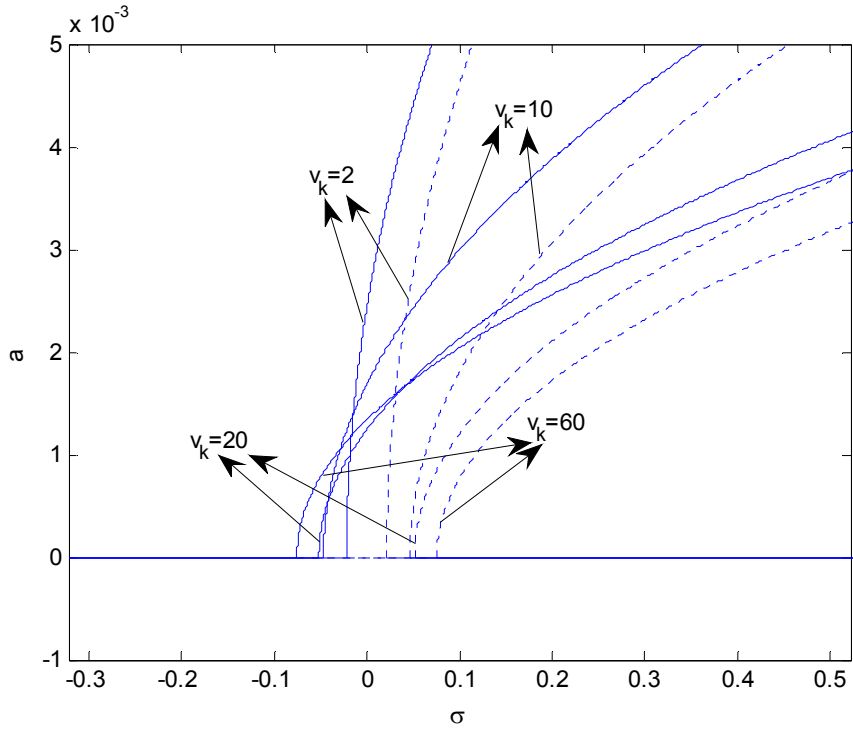
Şekil 3.43  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (2. mod)



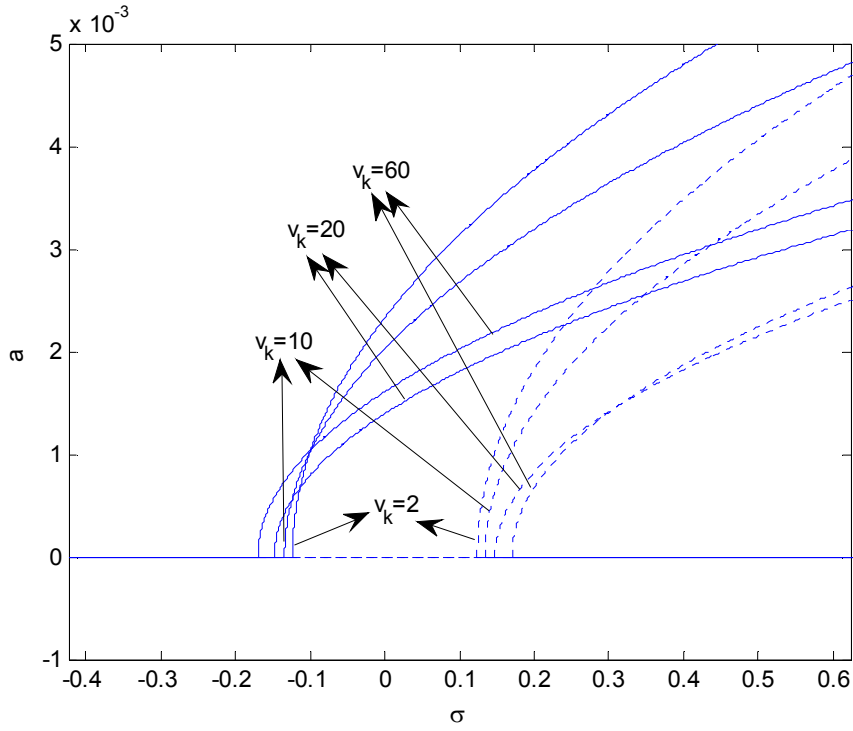
Şekil 3.44  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (3. mod)



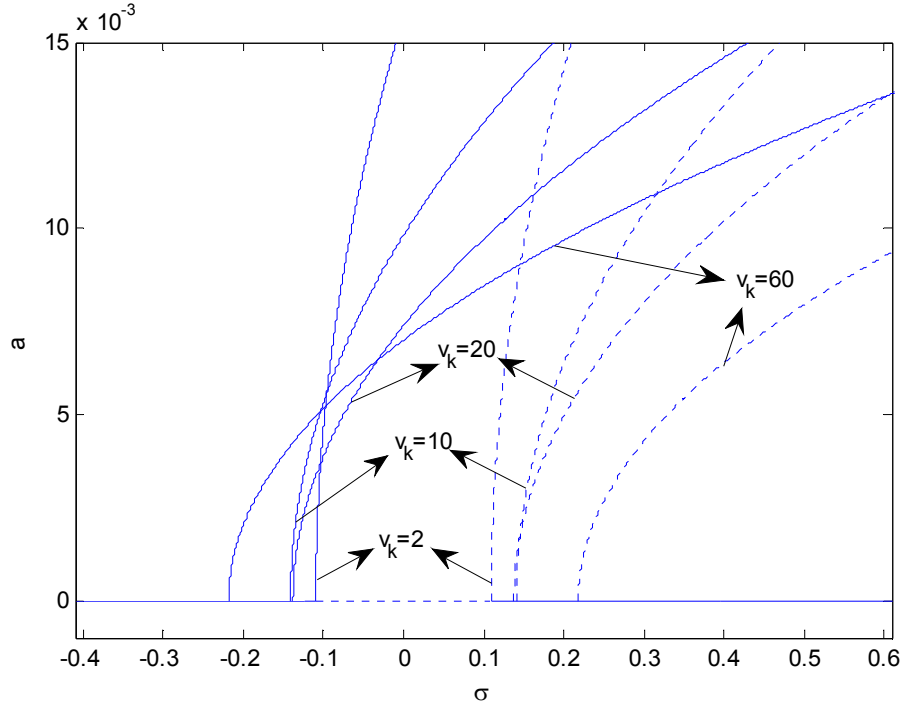
Şekil 3.45  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)



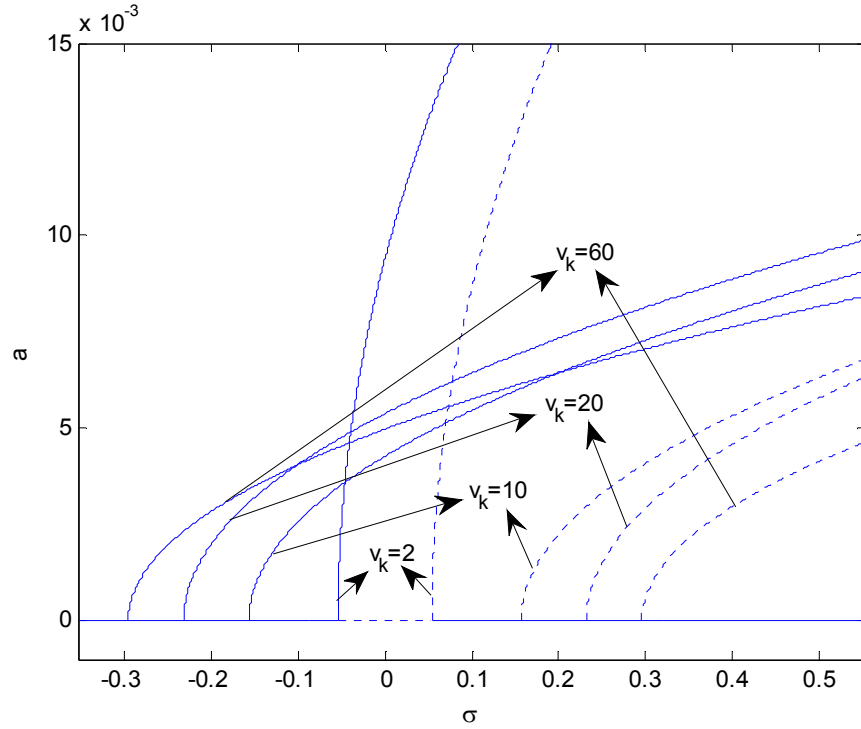
Şekil 3.46  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (2. mod)



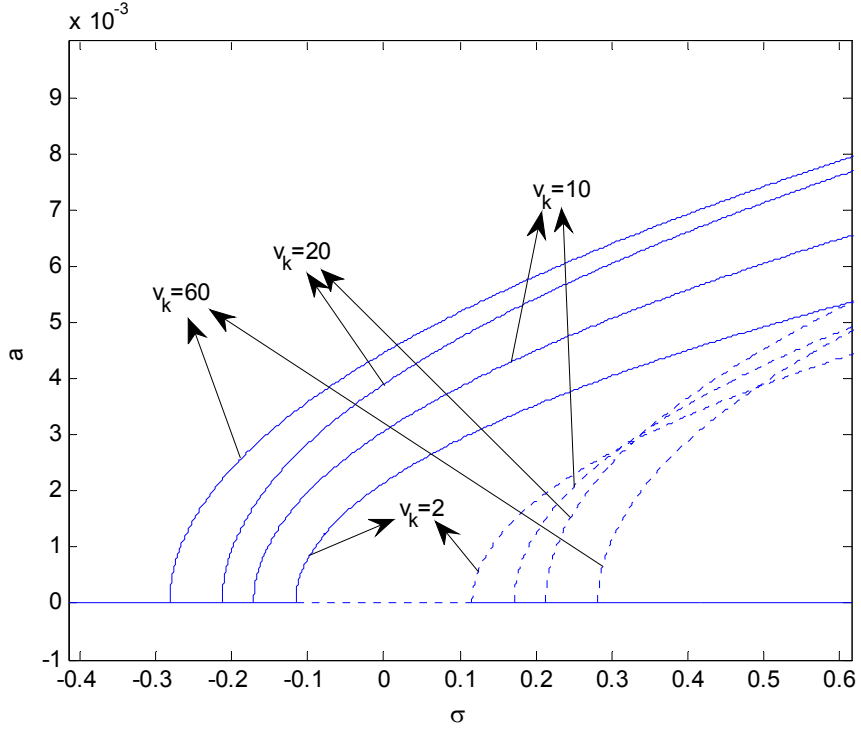
Şekil 3.47  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (3. mod)



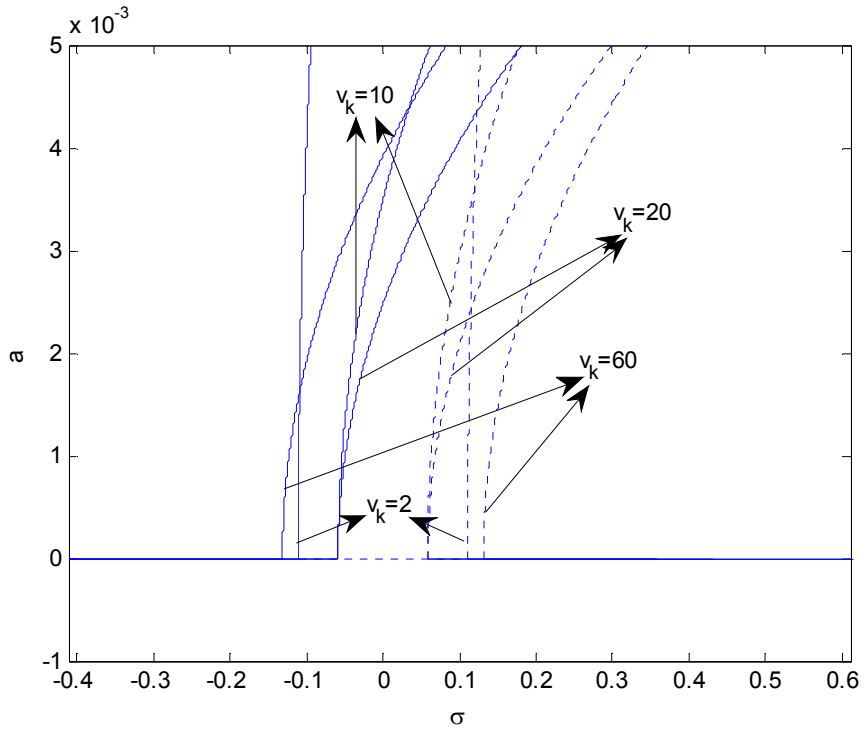
Şekil 3.48  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\nu_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)



Şekil 3.49  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\nu_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (2. mod)

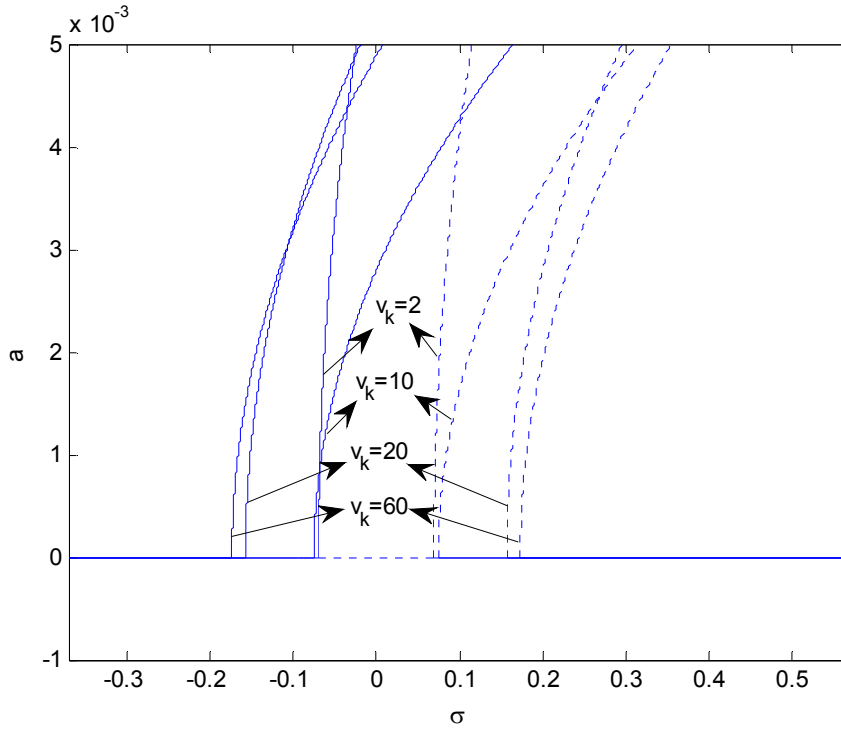


Şekil 3.50  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (3. mod)

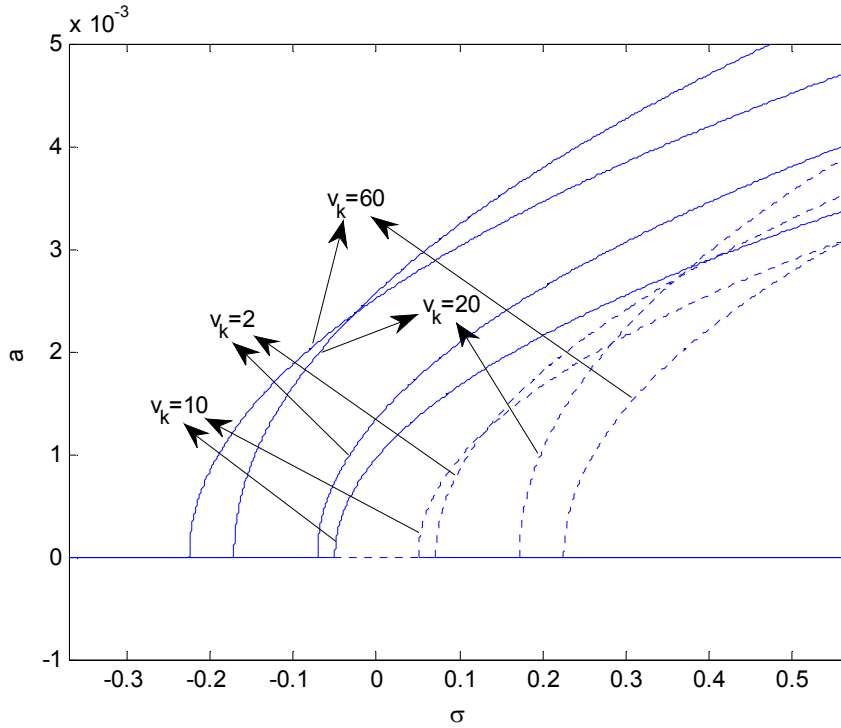


Şekil 3.51  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)

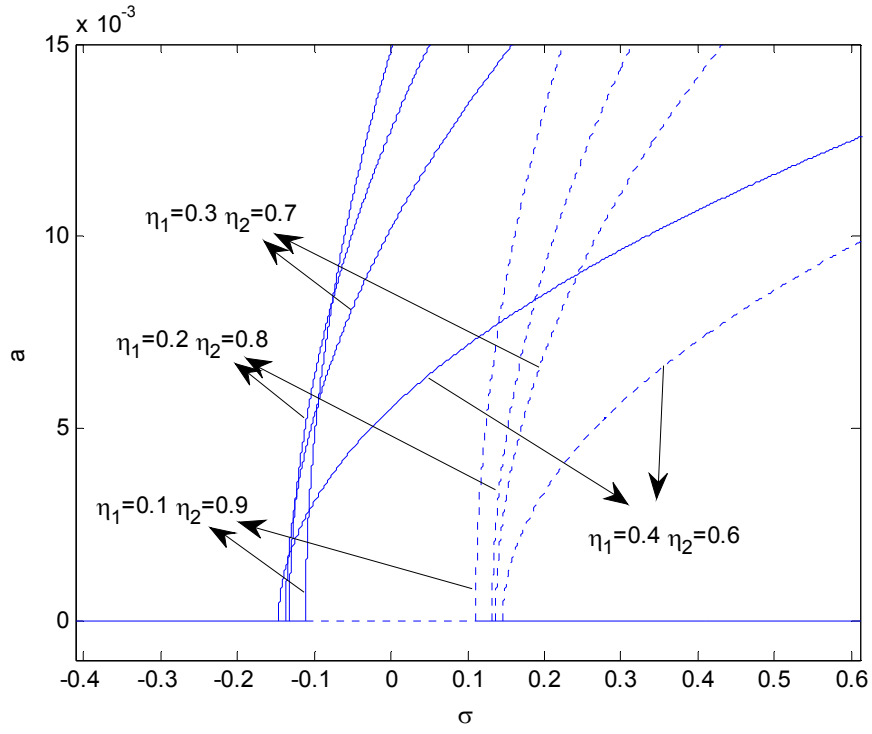




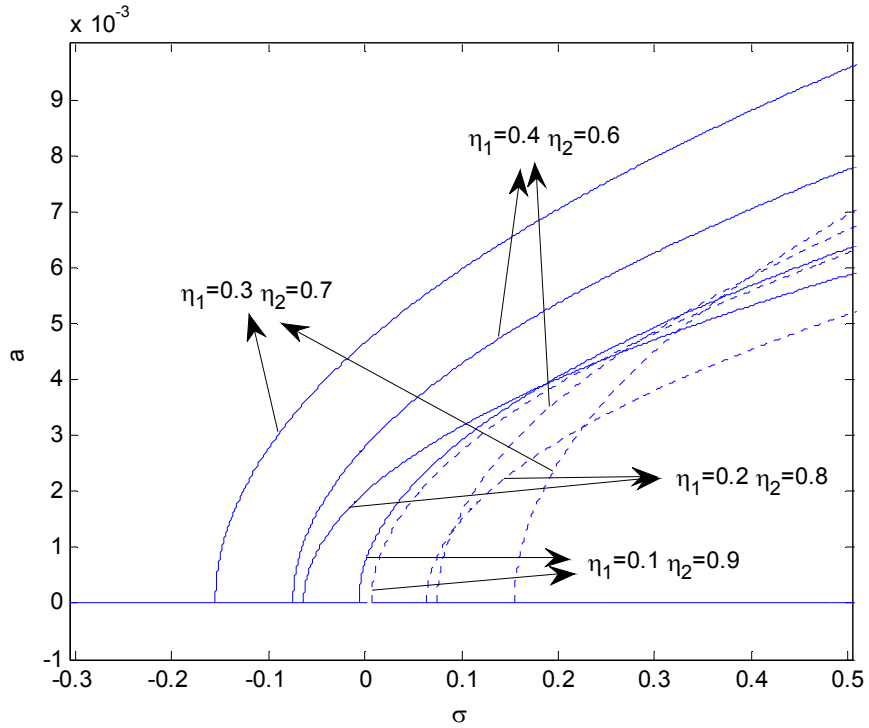
Şekil 3.52  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (2. mod)



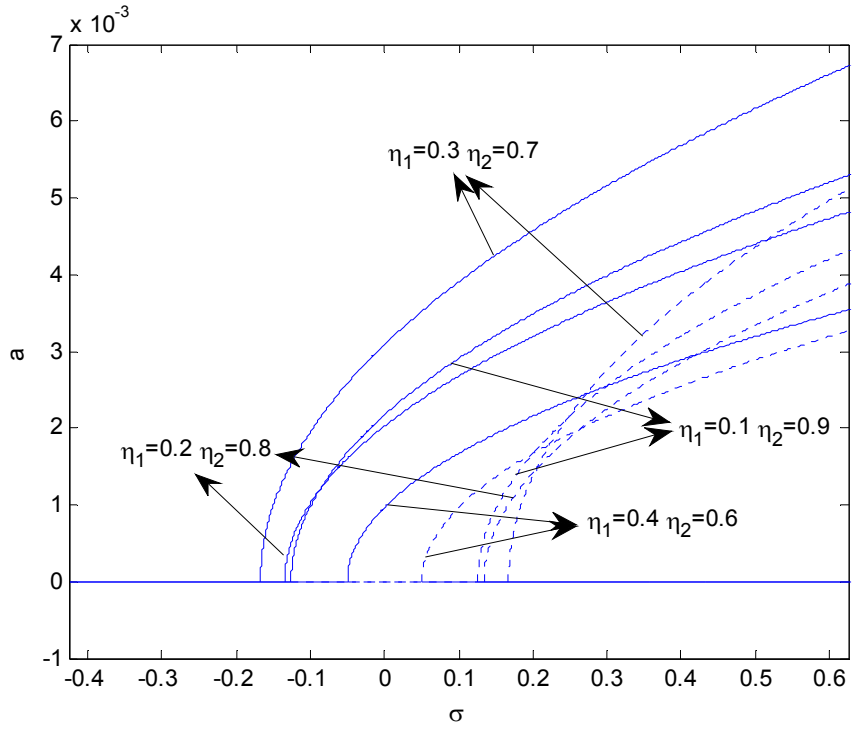
Şekil 3.53  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (3. mod)



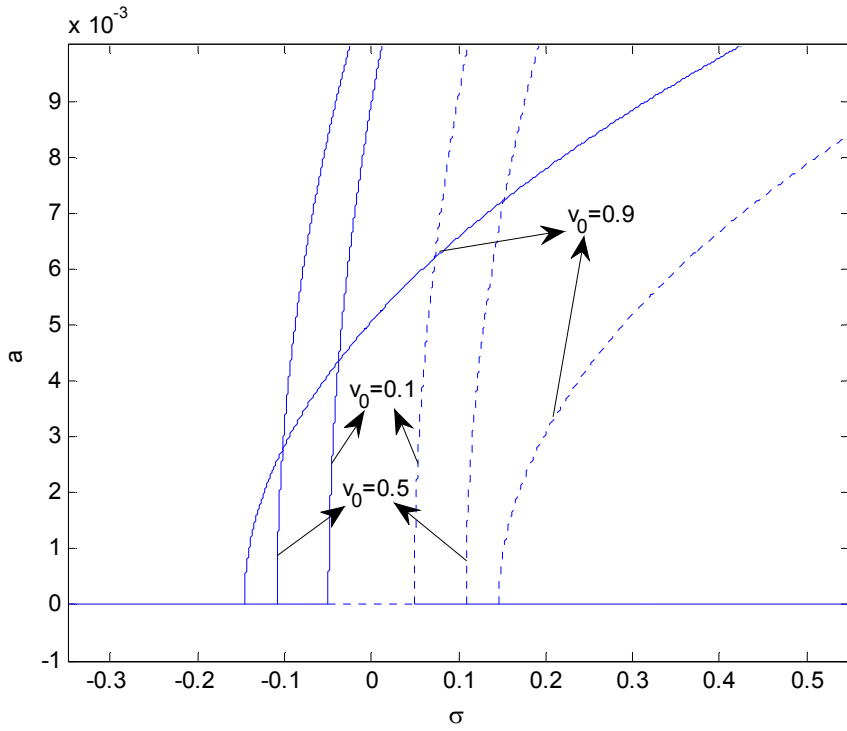
Şekil 3.54  $v_{k1} = v_{k2} = 10$   $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\eta$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)



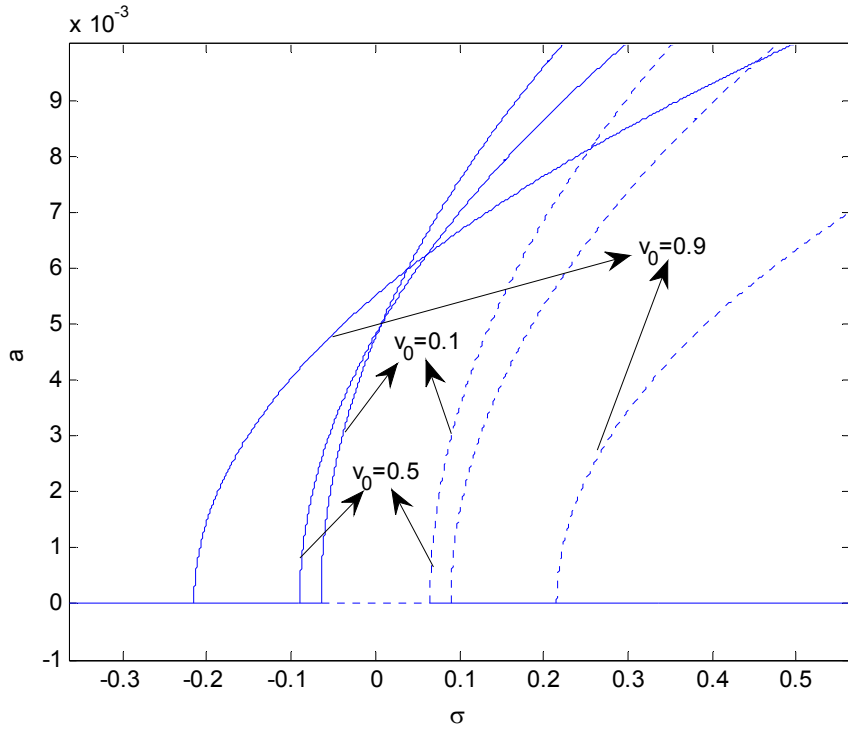
Şekil 3.55  $v_{k1} = v_{k2} = 10$   $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\eta$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (2. mod)



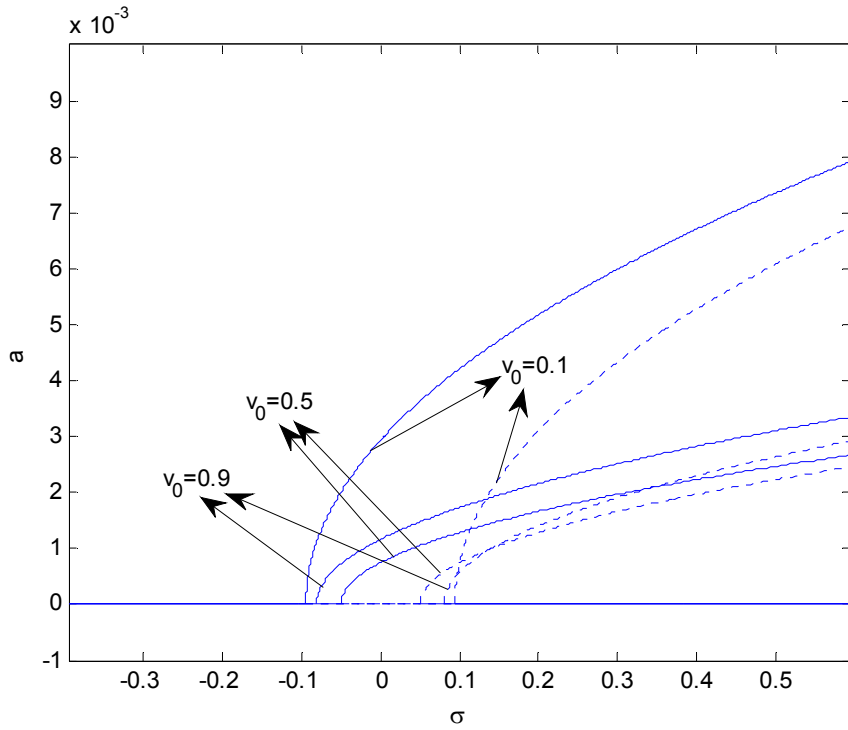
Şekil 3.56  $v_{k1} = v_{k2} = 10$   $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\eta$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (3. mod)



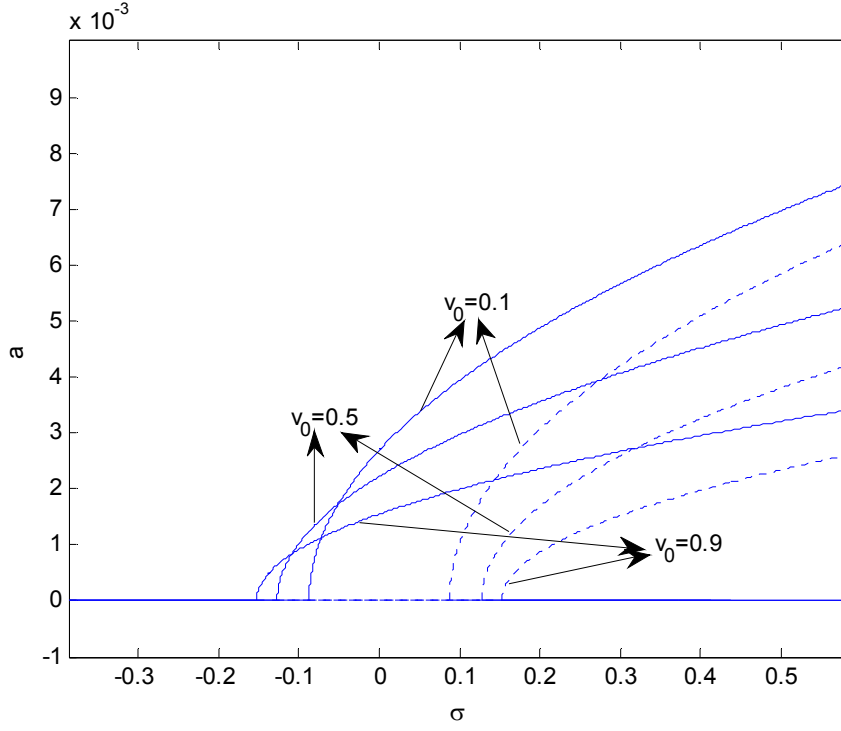
Şekil 3.57  $\eta_1=0.1$ - $\eta_2=0.5$ - $\eta_3=0.9$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği (1. mod)



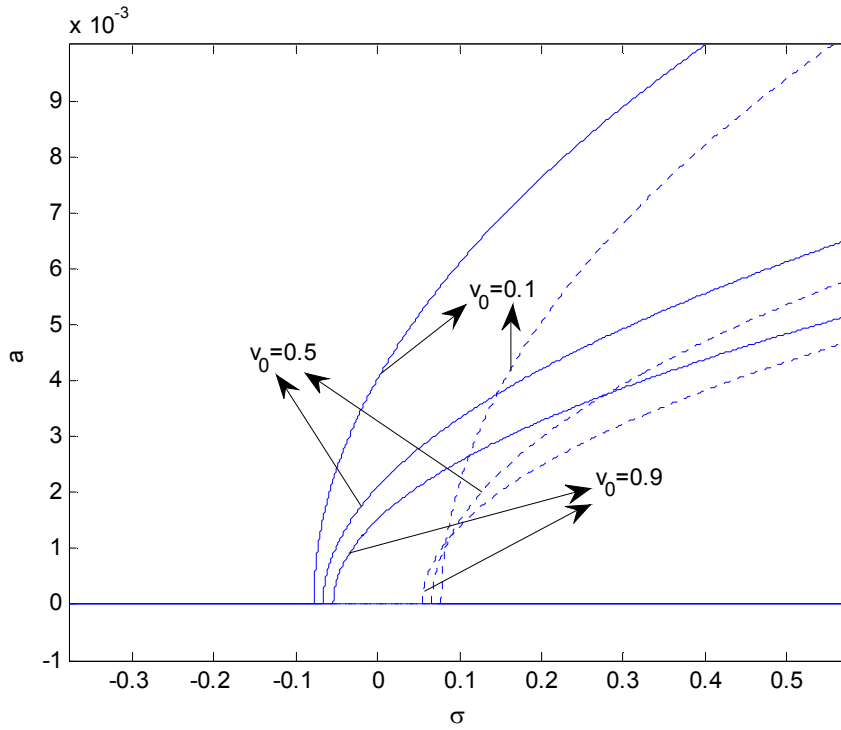
Şekil 3.58  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)



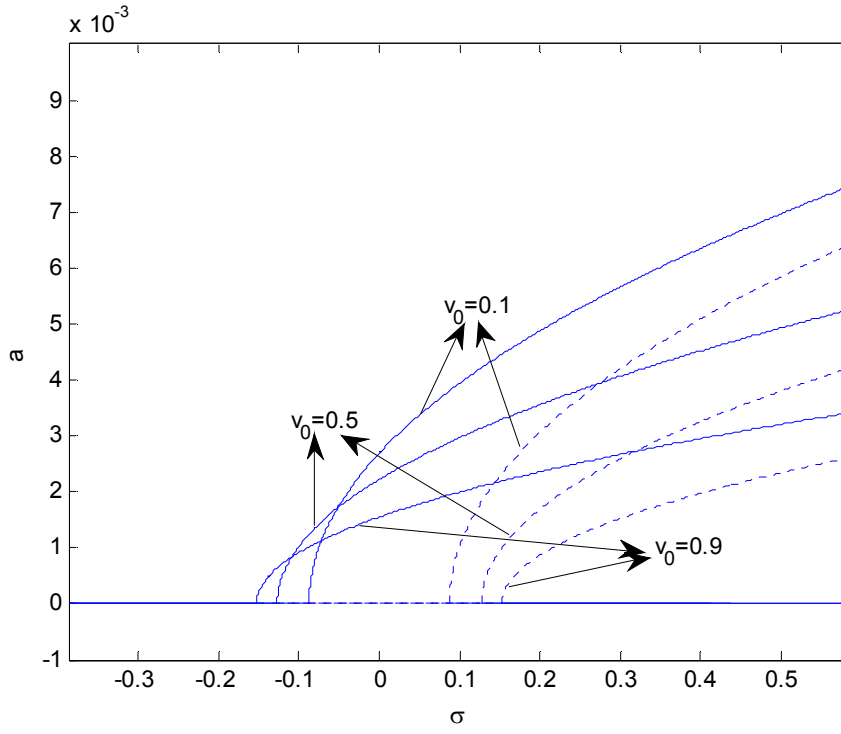
Şekil 3.59  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)



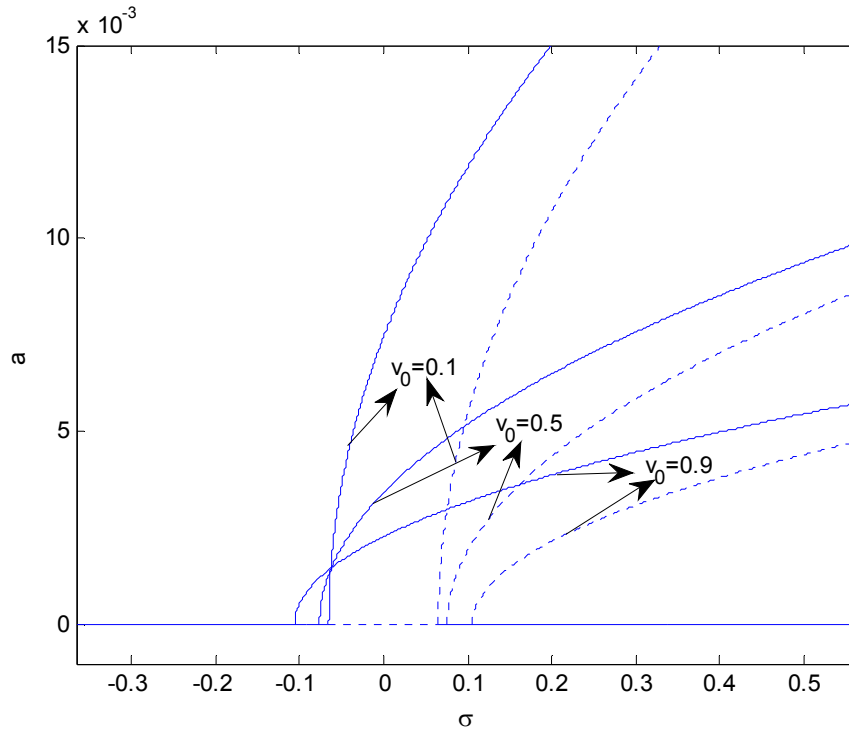
Şekil 3.60  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(1. mod)



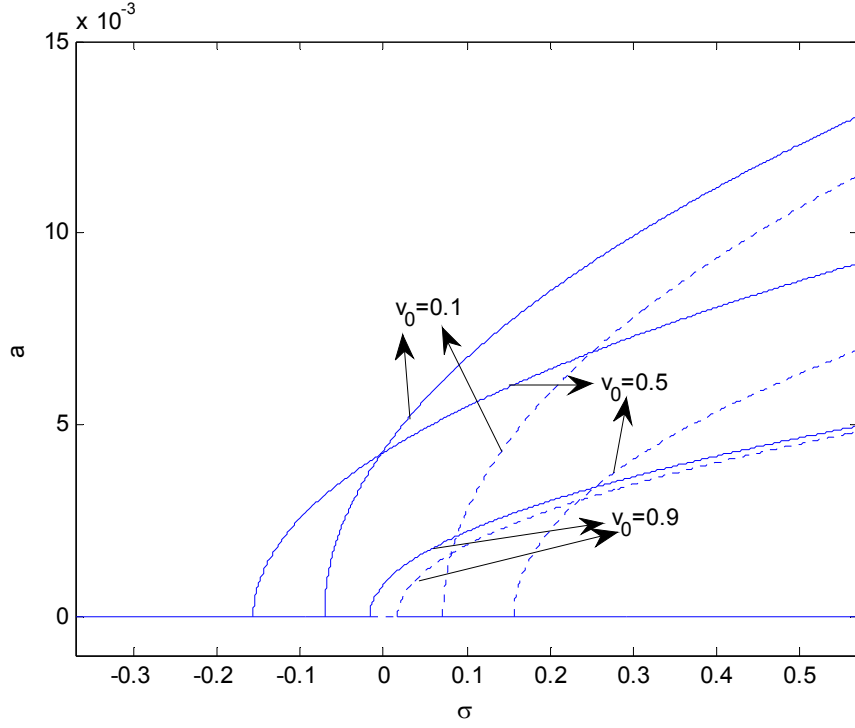
Şekil 3.61  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)



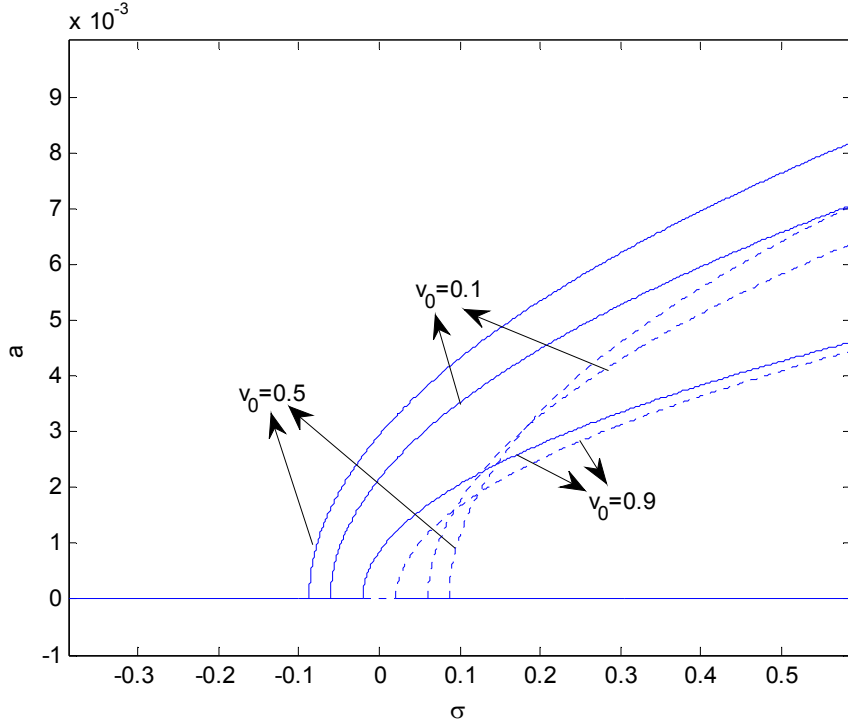
Şekil 3.62  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$  ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)



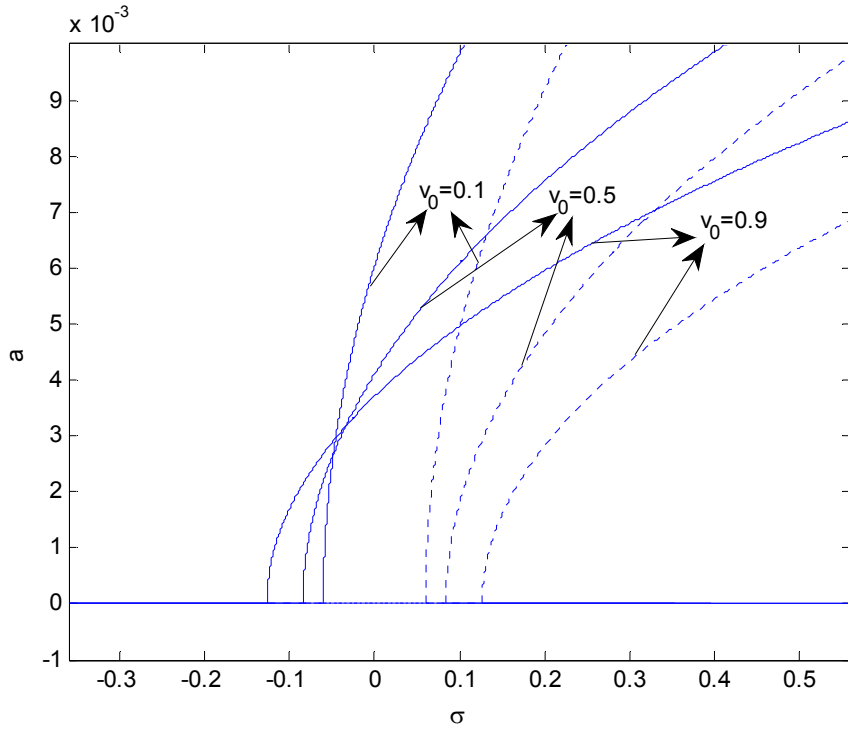
Şekil 3.63  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$  ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(1. mod)



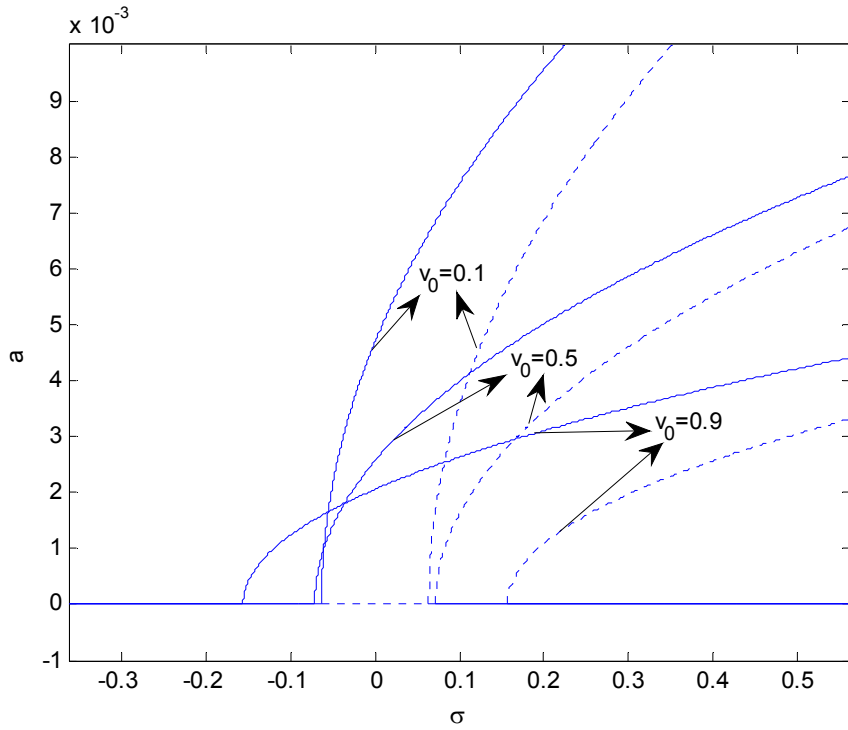
Şekil 3.64  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)



Şekil 3.65  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)

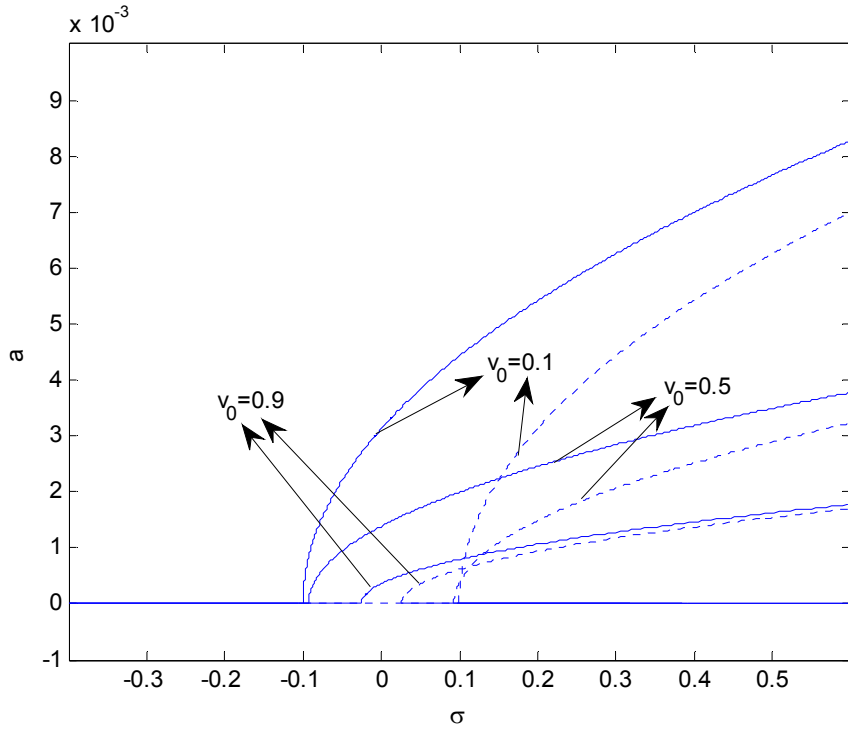


Şekil 3.66  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$  ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(1. mod)

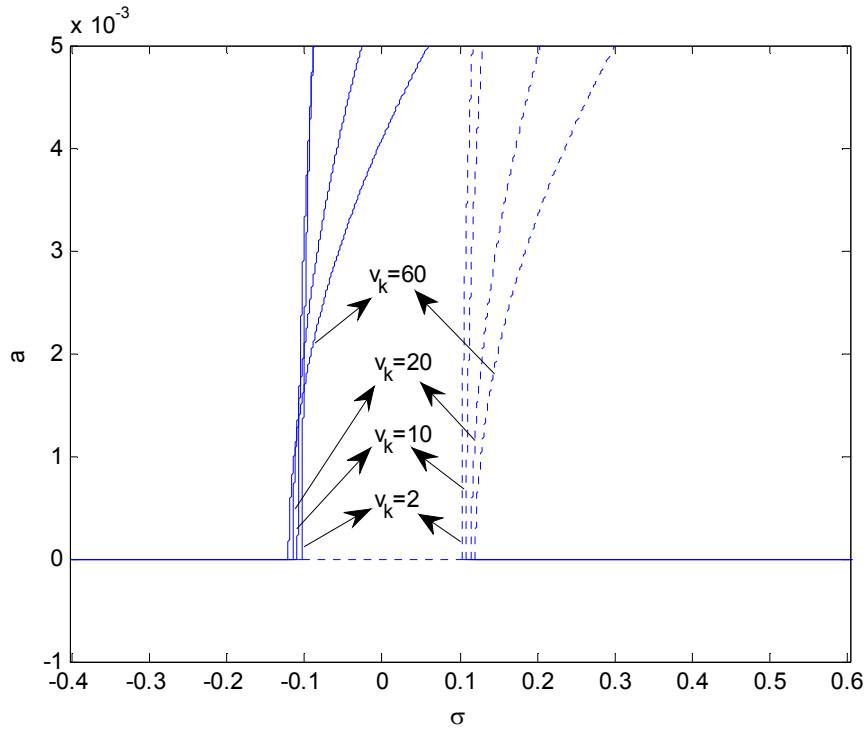


Şekil 3.67  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$  ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)

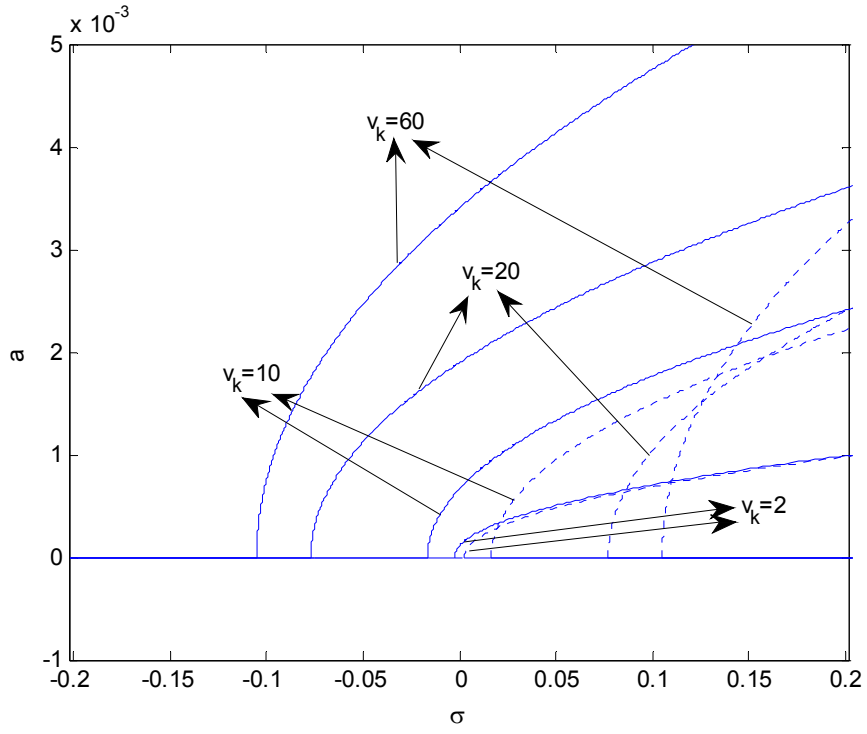




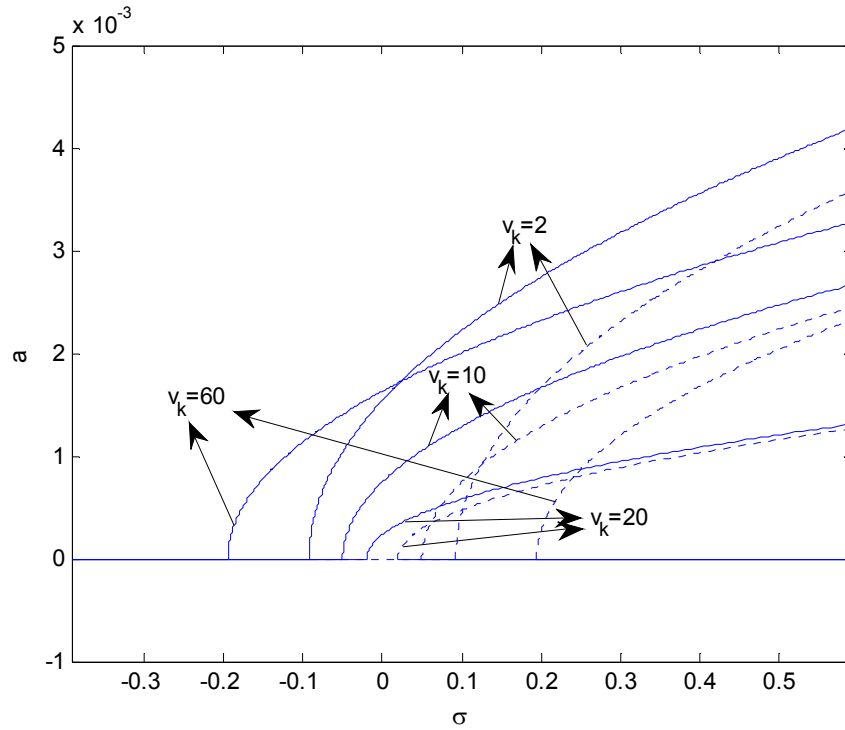
Şekil 3.68  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$  ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)



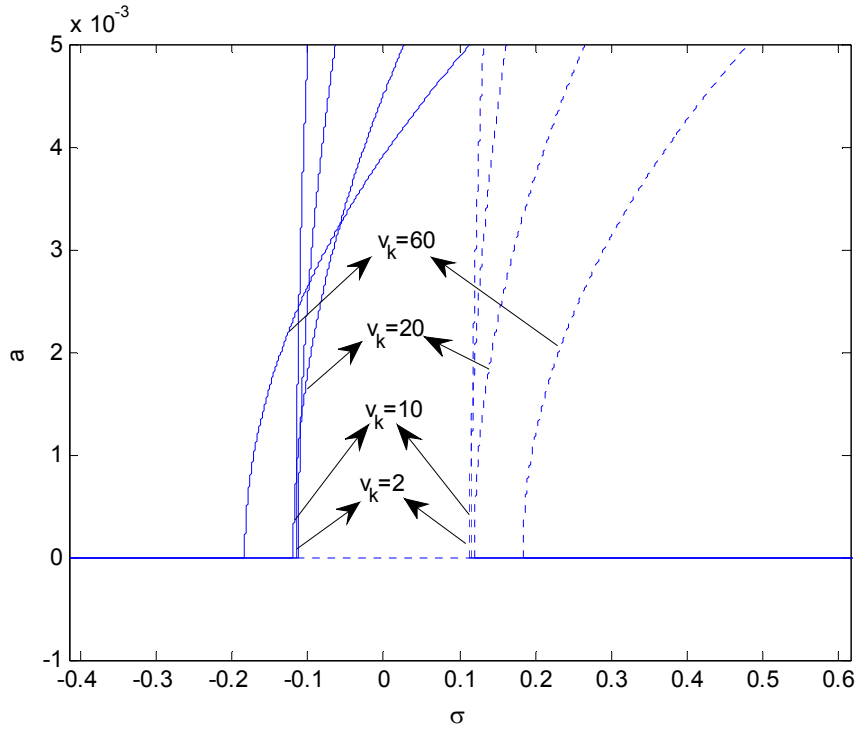
Şekil 3.69  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$  ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(1. mod)



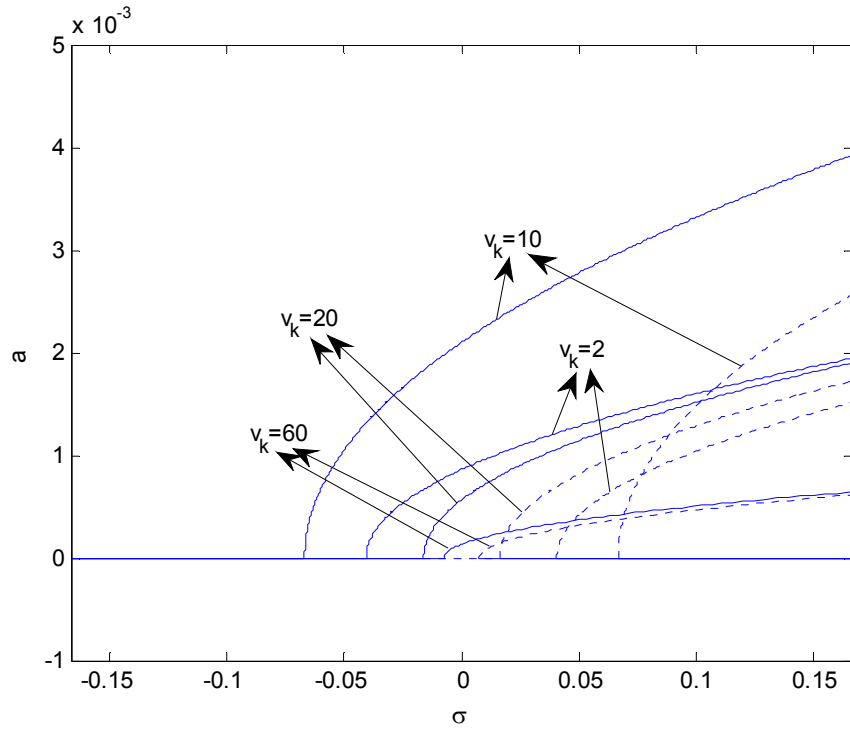
Şekil 3.70  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)



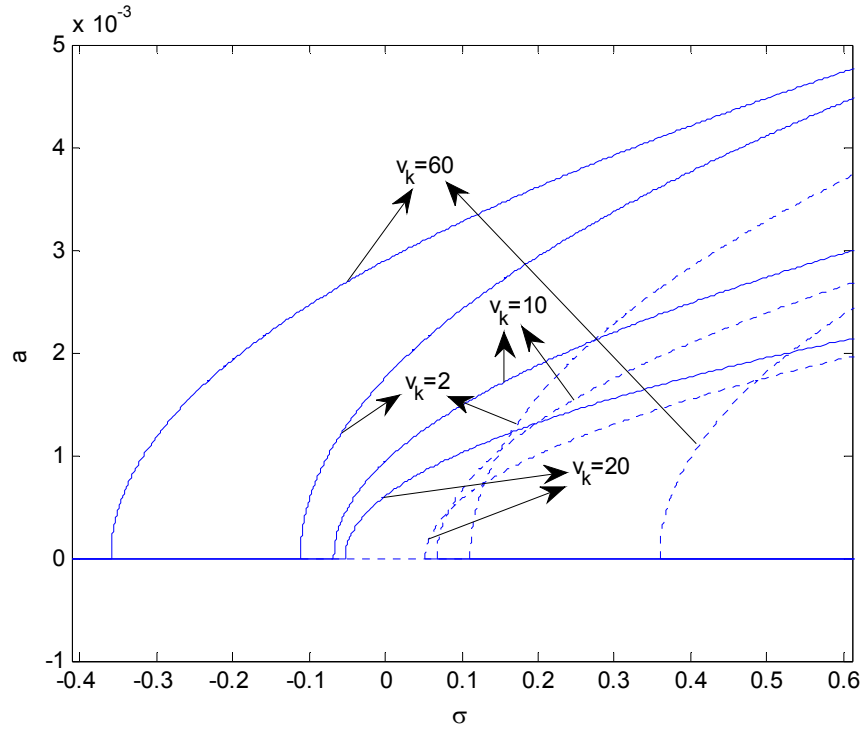
Şekil 3.71  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)



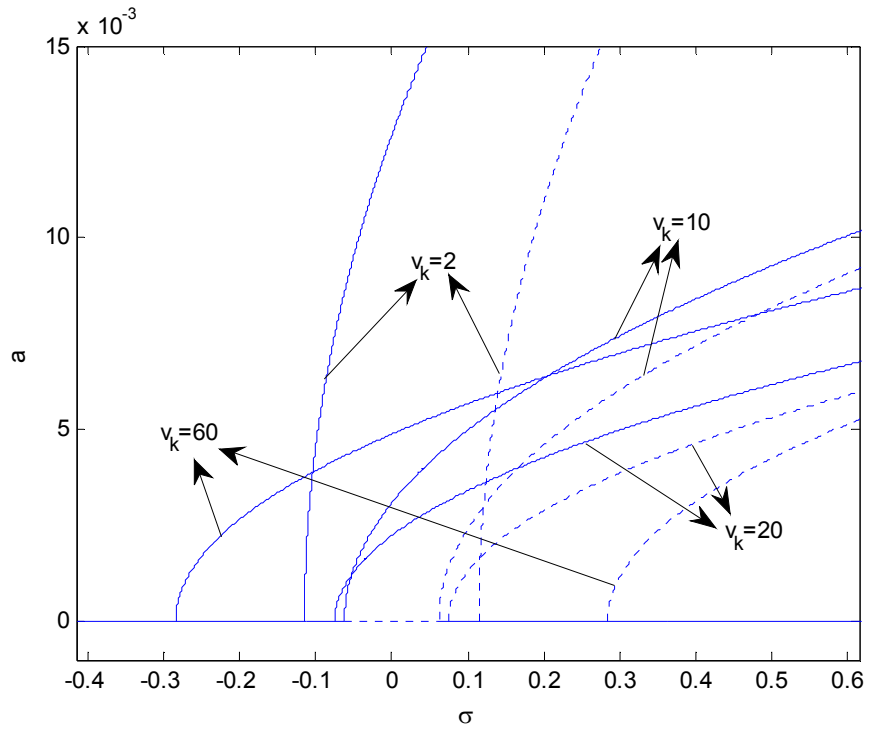
Şekil 3.72  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(1. mod)



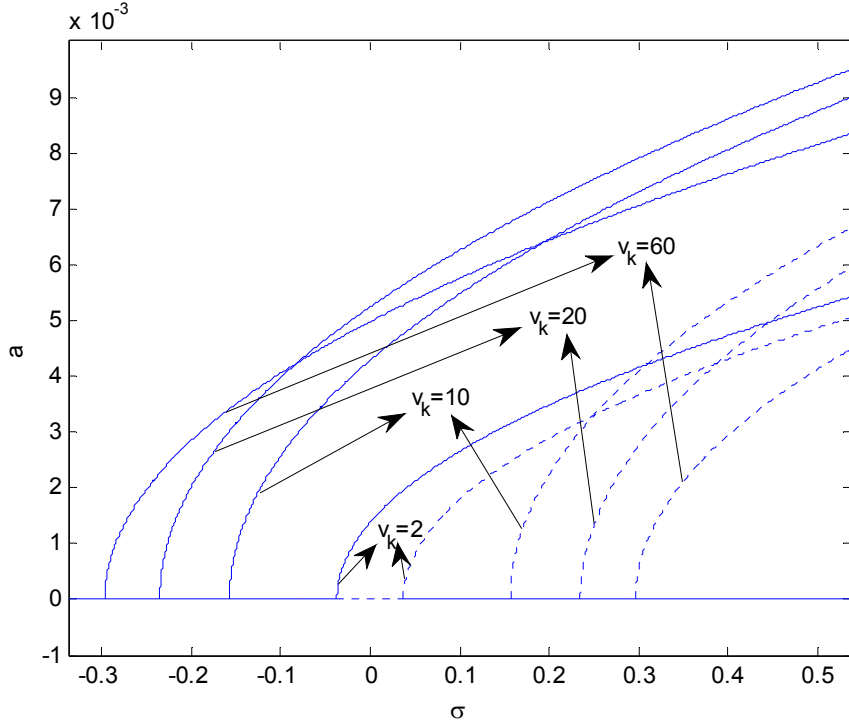
Şekil 3.73  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)



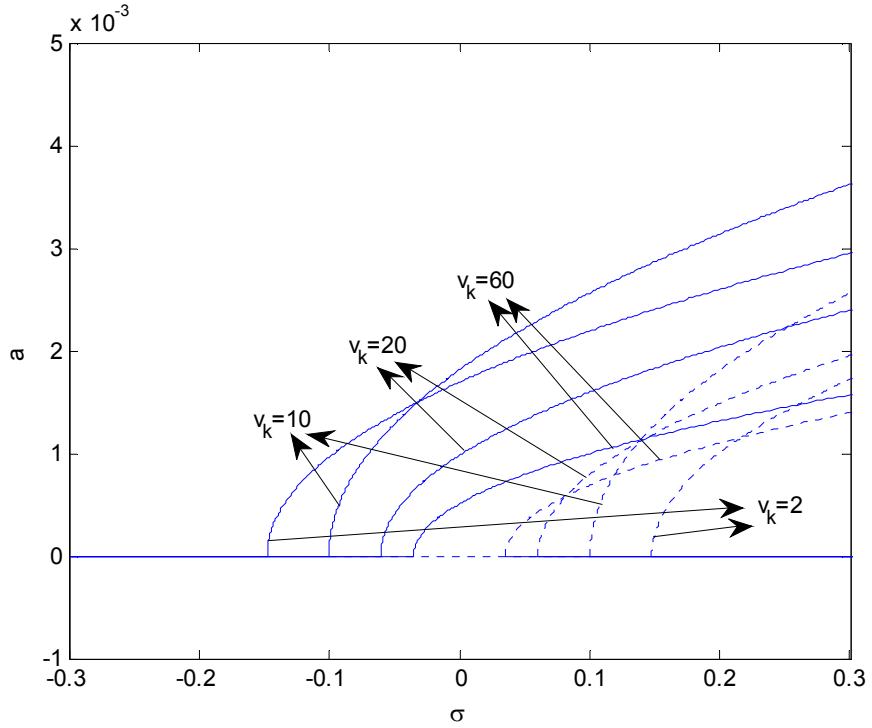
Şekil 3.74  $\eta_1=0.2$ - $\eta_2=0.5$ - $\eta_3=0.8$ ,  $v_0=0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ - $\alpha$  grafiği (3. mod)



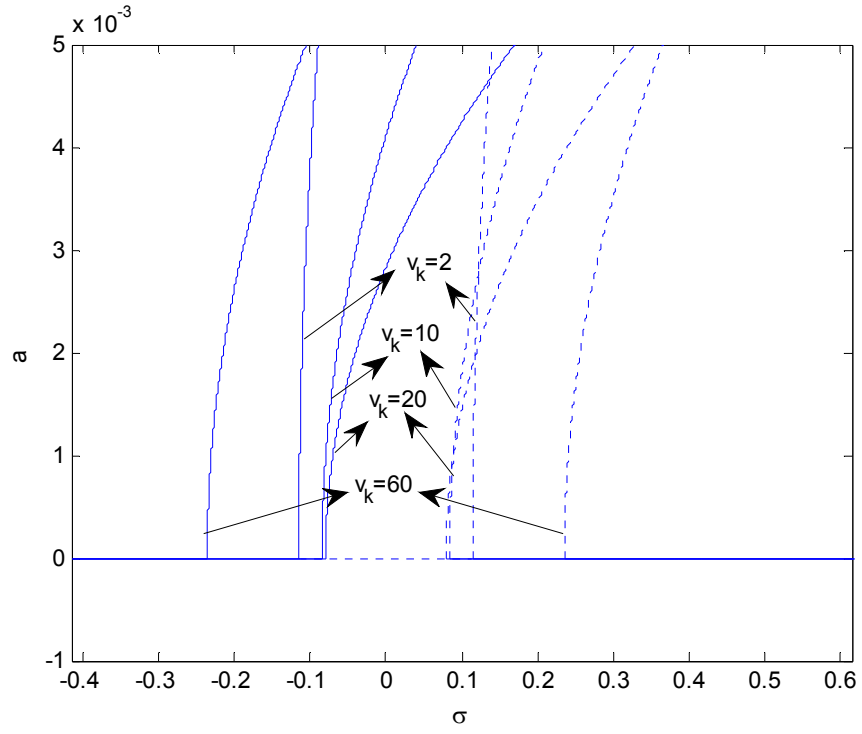
Şekil 3.75  $\eta_1=0.3$ - $\eta_2=0.5$ - $\eta_3=0.7$ ,  $v_0=0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ - $\alpha$  grafiği (1. mod)



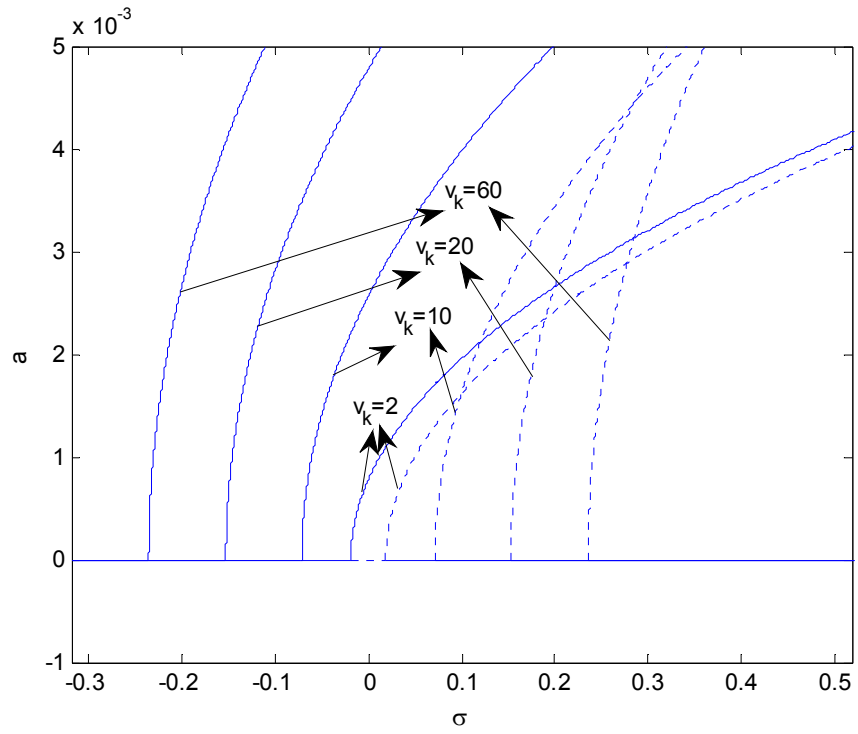
Şekil 3.76  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)



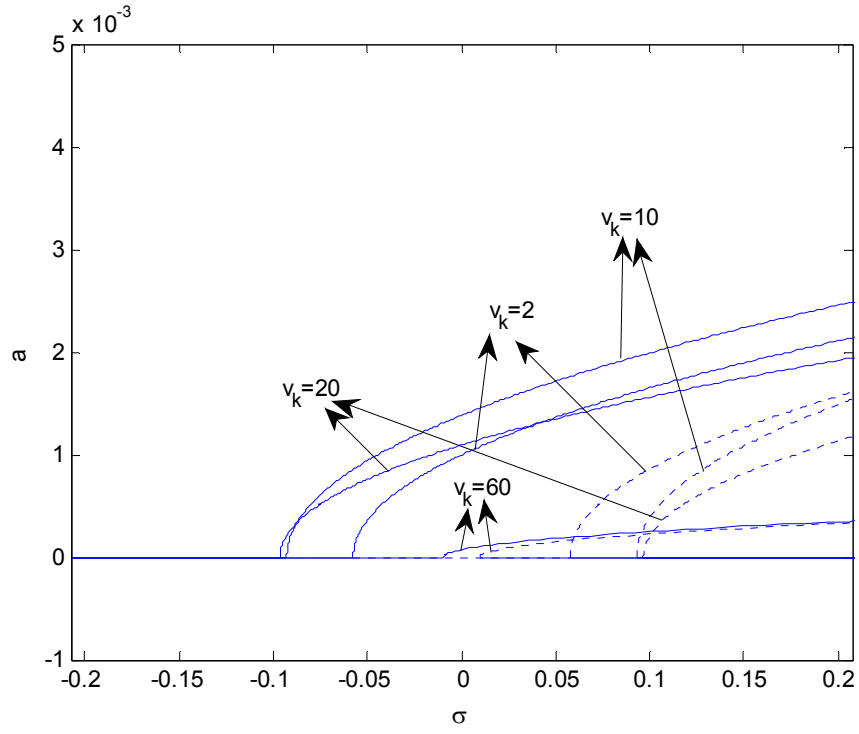
Şekil 3.77  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)



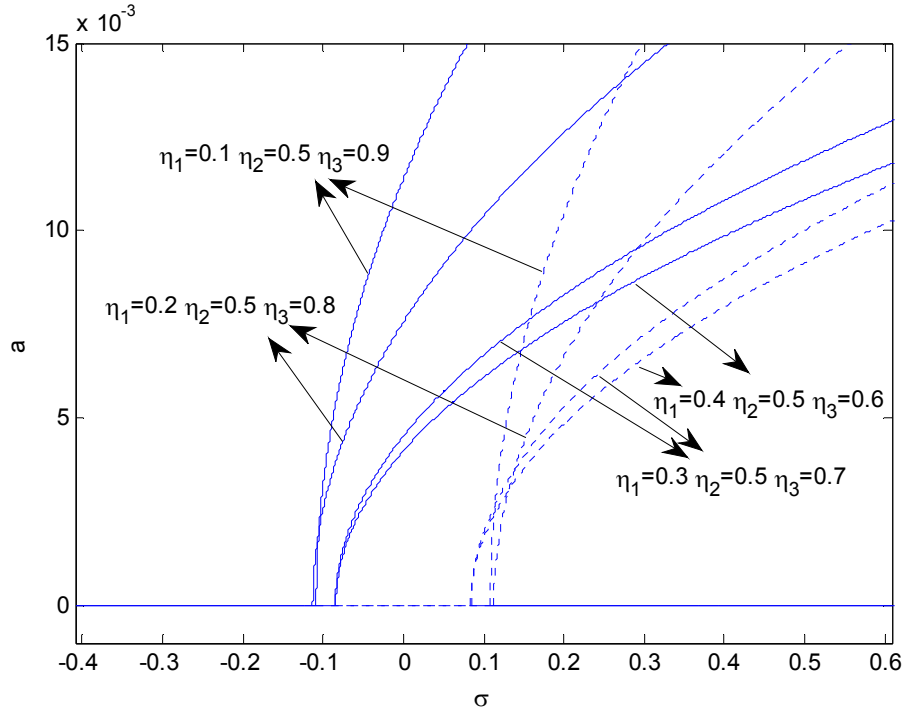
Şekil 3.78  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ - $\alpha$  grafiği  
(1. mod)



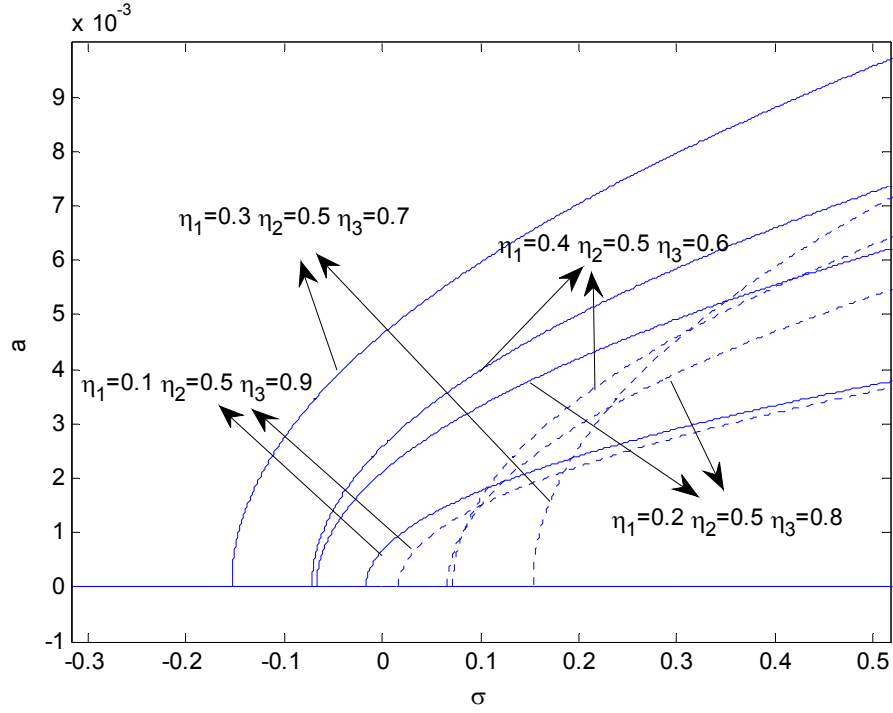
Şekil 3.79  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ - $\alpha$  grafiği  
(2. mod)



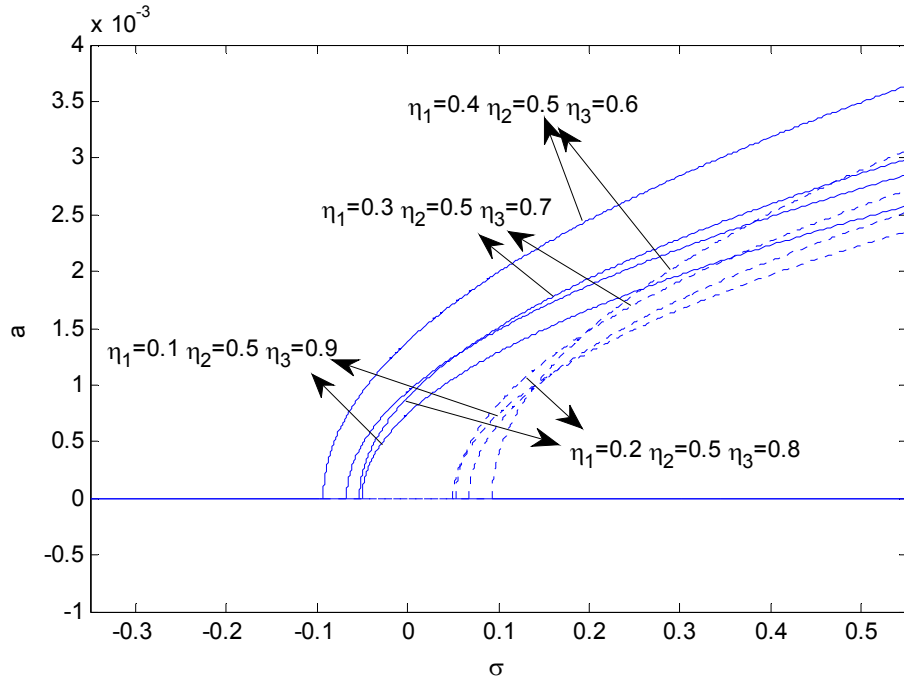
Şekil 3.80  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)



Şekil 3.81  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\eta$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(1. mod)



Şekil 3.82  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$   $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\eta$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(2. mod)



Şekil 3.83  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$   $v_0 = 0.5$  ve değişik  $\eta$  değerleri için  $\sigma$ -a grafiği  
(3. mod)



### 3.2.2 $\Omega$ 'nın; $2\omega_n$ ve $0$ 'dan Uzak Olduğu Durum:

Bu bölümde eksenal hızın değişim frekansı  $\Omega$ ,  $0$ 'dan ve  $2\omega_n$  'den uzak alınmıştır. Bunun sonucunda titreşim genliği ile nonlinear frekans arasındaki ilişkiyi gösteren grafikler elde edilecektir. Bu durumda çözülebilirlik şartı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_1 A - k_3 A^2 \bar{A} = 0 \quad (3.105)$$

$k_3$ 'ü en genel hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k_3 = \frac{1}{4} v_b^2 \frac{2 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}'_{m+1} dx \right) \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'^2_{m+1} dx \right) \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} \bar{Y}''_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)}{i\omega \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + v_0 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)} \quad (3.106)$$

genlikler şu şekilde yazılabilir.

$$A_n = \frac{1}{2} a_n (T_1) e^{i\theta(T_1)} \quad (3.107)$$

Denklem (3.107) denklem (3.105)'de yerine yazıp, denklem reel ve sanal kısımlarına ayrıldığında, faz modülasyon denklemleri şu şekilde elde edilir;

$$D_1 a = 0 \quad (3.108)$$

$$a D_1 \theta = \frac{1}{4} k_{3i} a^3 \quad (3.109)$$

Bu ifadeleri integre ettiğimizde

$$a_n = a_{0n} \quad (\text{genlik sabittir}) \quad (3.110)$$

$$\theta = \frac{1}{4} k_{3i} a_{0n}^2 T_1 + \theta_0 \quad (3.111)$$

$k_3$  her zaman sanaldır. Reel kısmı "0" alınabilir. Bu nedenle  $k_3$  şu şekilde yazılabilir.

$$k_3 = ik_{3l} \quad (3.112)$$

Buradan nonlinear frekans denklemi şu şekilde elde edilir.

$$\omega_{nl} = \omega_n + \varepsilon \frac{1}{4} k_{3l} a_{0n}^2 \quad (3.113)$$

$\Omega'$  nın  $0'$  dan ve  $2\omega'$  dan uzak olduğu durum için orta bölümde iki ve üç yay mesnetli şeride ait titreşim genliği ile nonlinear frekans arasındaki ilişkiyi gösteren grafikler elde edilmiştir.

(Şekil 3.84 – 3.137).

Nonlinear eğrilerin sağa doğru yatması sertleşme tip (hardening type) davranışın göstergesidir. İki ve üç yay mesnetli durum için  $v_0$  değerinin artmasıyla, kritik hıza yaklaştıkça nonlinear terimlerin tabii frekansa olan katkısı daha belirgin şekilde görülmektedir. Bununla beraber mesnetlerdeki yayların katsayısı büyüdüğünde de nonlinear terimlerin tabii frekansa katkısı belirgin bir şekilde artmaktadır. Bazı yüksek modlarda durum değişmekte nonlinear terimlerin tabii frekansa olan katkısı düşük yay katsayılarında daha çok olmaktadır.

Orta bölümde iki yay mesnetli duruma ait Şekil (3.84–3.86)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ , Şekil (3.87–3.89)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ , Şekil (3.90–3.92)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , Şekil (3.93–3.95)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için ilk üç mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği gösterilmiştir.

Şekil (3.84)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan  $1'$ e yaklaştığında nonlinear terimlerin tabii frekansa olan katkısı daha belirgindir. Bu durum 2. modda da değişmemekte eğrilerin sağa doğru yatmaları yani tabii frekansa olan katkı daha belirginleşmektedir. (Şekil 3.85). 3. mod durumunda ise genliklerdeki artış maksimum olmaktadır (Şekil 3.86).

Şekil (3.87)' de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan  $1'$ e yaklaştığında nonlinear terimlerin tabii frekansa olan katkısı artmaktadır. Şekil (3.88)' de 2. mod için frekansa olan katkı daha belirginleşmektedir. 3. mod durumunda ise genliklerdeki artış ilk iki moda göre en fazla olmaktadır (Şekil 3.89).

Şekil (3.90)' de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan  $1'$ e yaklaştığında nonlinear terimlerin tabii frekansa olan katkısının arttığı görülmektedir. Şekil (3.91)' de 2. mod için tabii frekansa olan

katkı daha belirginleşmektedir. 3. mod durumunda ise genliklerdeki artış en fazla olmaktadır (Şekil 3.92).

Şekil (3.93)' de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_{k1} = v_{k2} =10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir.  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1'e yaklaştığında nonlinear terimlerin tabii frekansa olan katkısı daha belirgin olduğu görülmektedir. Bu durum 2. ve 3. modda da değişmemekte eğrilerin sağa doğru yatmaları yani tabii frekansa olan katkı daha belirginleşmektedir. (Şekil 3.94–3.95).

Orta bölümde iki yay mesnetli durumda Şekil (3.96–3.98)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ , Şekil (3.99–3.101)'de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ , Şekil (3.102–3.104)'de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ , Şekil (3.105–3.107)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_0=0.5$  ve değişik  $v_k$  ( $v_{k1} = v_{k2} = 2, 10, 20, 60$ ) yay katsayısı değerleri için ilk üç mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği gösterilmiştir.

Şekil (3.96) de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir. Mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında nonlinear terimlerin tabii frekansa katkısı belirgin bir şekilde artmaktadır  $v_{k1} = v_{k2} =60$  değeri için en büyük etkiler ortaya çıkmaktadır. Şekil (3.97) de 2. mod için durum değişmemekte tabii frekansa olan etki yay katsayısı arttığında artmaktadır. Şekil (3.98)' de 3. mod için ise bu durum iyice belirginleşmektedir.

Şekil (3.99) de  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir. Mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında nonlinear terimlerin tabii frekansa katkısı büyümektedir.. Şekil (3.100) de 2. mod için durum değişmemekte tabii frekansa olan etki yay katsayısı arttığında daha da artmaktadır. Şekil (3.101)' de ise  $v_{k1} = v_{k2} =20$  değeri için en sert etki görülmektedir.

Şekil (3.102)' de  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.7$ ,  $v_0=0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir. Mesnetlerdeki yay katsayıları değerleri  $v_{k1} = v_{k2} =2$  olduğunda nonlinear terimlerin tabii frekansa katkısı en az,  $v_{k1} = v_{k2} =60$  olduğunda bu katkı en fazla olmaktadır. Şekil (3.103)' de 2. mod için durum değişmemekte tabii frekansa olan etki yay katsayısı arttığında artmaktadır. Şekil (3.104)' de ise  $v_{k1} = v_{k2} =2$  değeri için en sert etki görülmektedir.

Şekil (3.105)' de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.6$ ,  $v_0=0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir. Mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında nonlinear terimlerin tabii frekansa olan katkısı artmaktadır. Şekil (3.106)' de 2. mod için durum değişmemekte tabii frekansa olan etki yay

katsayısı  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  olduğunda maksimum,  $v_{k1} = v_{k2} = 2$  olduğunda ise minimum olmaktadır. Şekil (3.107)' de durum değişmemekte  $v_{k1} = v_{k2} = 10$  değeri için en sert etki görülmektedir.

Şekil (3.108)' de  $v_{k1} = v_{k2} = 10$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $(\eta_1 - \eta_2)$  değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir. 1. mod için mesnet konumları birbirine yaklaştığında grafikler sağa doğru yatmakta tabi frekansa olan etkiler artmaktadır. Şekil (3.109)' da 2. mod için bir çakışma söz konusudur ( $\eta_1 = 0.3 - \eta_2 = 0.7$ ) ( $\eta_1 = 0.2 - \eta_2 = 0.8$ ) ve ( $\eta_1 = 0.1 - \eta_2 = 0.9$ ) ( $\eta_1 = 0.4 - \eta_2 = 0.6$ ) konumları için lineer frekanslar aynı olmakta fakat ( $\eta_1 = 0.1 - \eta_2 = 0.9$ ) konumu için en sert etki ortaya çıkmaktadır. 3. mod için en fazla etki ( $\eta_1 = 0.4 - \eta_2 = 0.6$ ) konumundayken olmakta en az etki ise ( $\eta_1 = 0.3 - \eta_2 = 0.7$ ) konumunda oluşmaktadır (Şekil (3.110)).

Orta bölümde üç adet yay mesnet olması durumuna ait Şekil (3.111–3.113)' de  $\eta_1 = 0.1 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.9$ , Şekil (3.114–3.116)' da  $\eta_1 = 0.2 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.8$ , Şekil (3.117–3.119)' da  $\eta_1 = 0.3 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.7$ , Şekil (3.120–3.122)' de  $\eta_1 = 0.4 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.6$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  eksenel hız değerleri için ilk üç mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği gösterilmiştir.

Şekil (3.111–3.113)'de  $\eta_1 = 0.1 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.9$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için ilk 3 mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında nonlineer terimlerin tabi frekansa etkisi artmaktadır.

Şekil (3.114–3.116)'da  $\eta_1 = 0.2 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.8$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için ilk 3 mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında nonlineer terimlerin tabi frekansa olan etkisi her modda daha da belirli hale gelmektedir.

Şekil (3.117–3.119)'da  $\eta_1 = 0.3 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.7$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için ilk 3 mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında nonlineer terimlerin tabi frekansa olan etkisi büyümekte ve sertleştirici etki artmaktadır.

Şekil (3.120–3.122)'da  $\eta_1 = 0.4 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.6$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve değişik  $v_0$  hız değerleri için ilk 3 mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir  $v_0$  hız değeri arttığında ve kritik hız olan 1 e yaklaştığında nonlineer terimlerin tabi frekansa olan etkisi büyümekte ve 3. modda grafikler sağa daha belirgin şekilde yatmaktadır.

Orta bölümde üç adet yay mesnet olması durumuna ait Şekil (3.123–3.125)'de  $\eta_1 = 0.1 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.9$ , Şekil (3.126–3.128)'de  $\eta_1 = 0.2 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.8$ , Şekil (3.129–3.131)'de  $\eta_1 = 0.3 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.7$ , Şekil (3.132–3.134)'de  $\eta_1 = 0.4 - \eta_2 = 0.5 - \eta_3 = 0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  ( $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 2, 10, 20, 60$ ) yay katsayısı değerleri için ilk üç mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği gösterilmiştir.

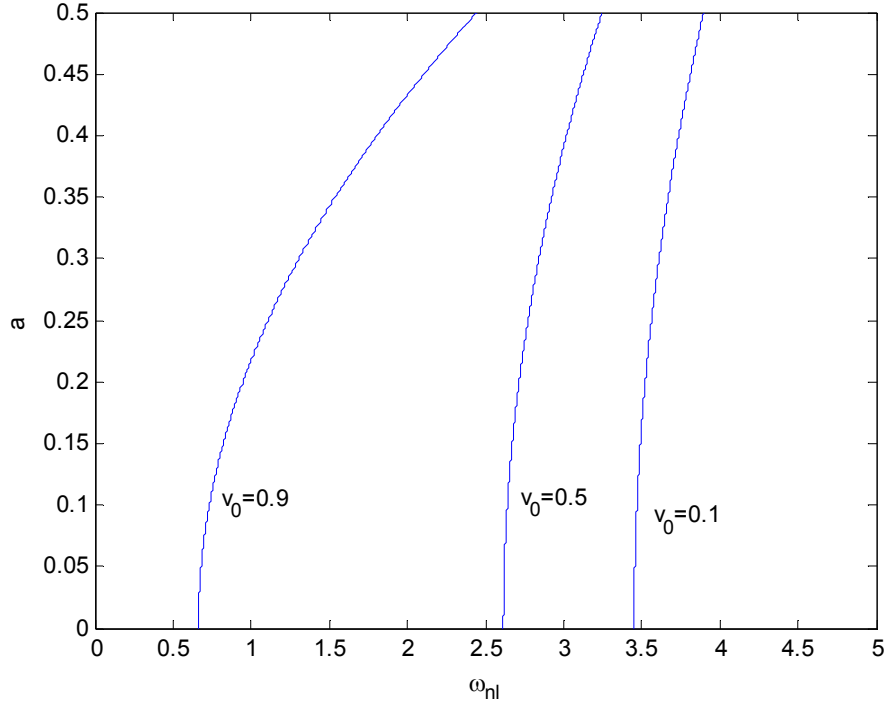
Şekil (3.123)'de  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında tabi frekansa olan etkiler artmaktadır. Şekil (3.124)'de 2. mod için en sert etki  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 2$  değerinde en yumuşak etki ise  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 60$  değerinde olmaktadır. Şekil (3.125)'de ise 3. mod için  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 20$  değerinde en sert etki görülmektedir.

Şekil (3.126)'da  $\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında tabi frekansa olan etkiler artmaktadır. Şekil (3.127)'de 2. mod için en sert etki  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 60$  değerinde en yumuşak etki ise  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 20$  değerinde olmaktadır. Şekil (3.128)'de ise 3. mod için  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 20$  değerinde en sert etki görülmektedir.

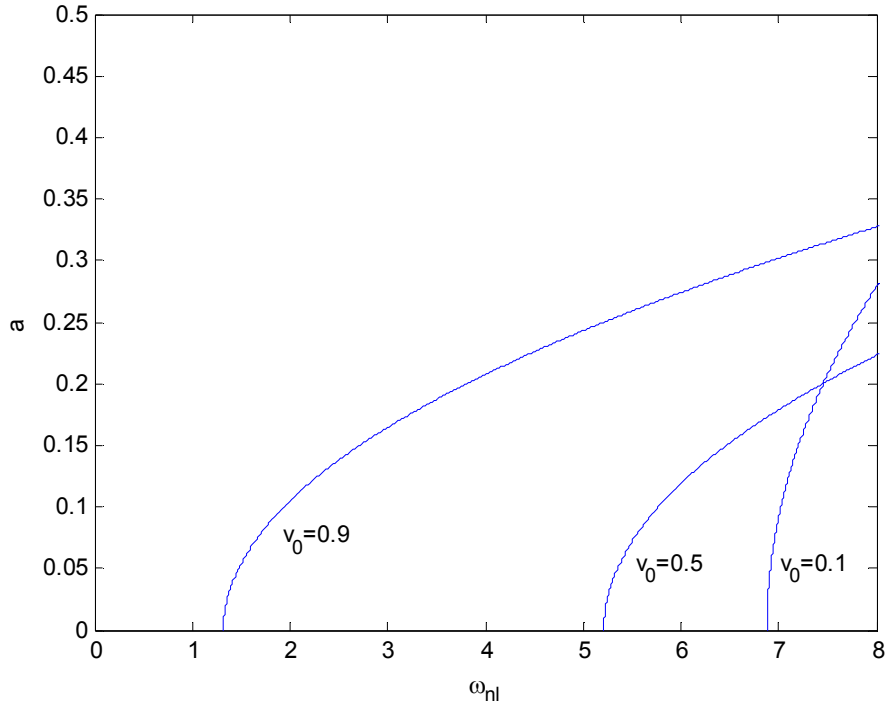
Şekil (3.129)'da  $\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında tabi frekansa olan etkiler artmaktadır. Şekil (3.130)'da 2. mod için en sert etki  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 2$  değerinde, en yumuşak etki ise  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  değerinde olmaktadır. Şekil (3.131)'de ise 3. mod için  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 20$  değerinde en sert etki ortaya çıkmaktadır.

Şekil (3.132)'de  $\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $v_k$  değerleri için 1. mod  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir mesnetlerdeki yay katsayıları arttığında tabi frekansa olan etkiler artmaktadır. Şekil (3.133)'de 2. mod için en sert etki  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 2$  değerinde, en yumuşak etki ise  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 20$  değerinde olmaktadır. Şekil (3.134)'de ise 3. mod için  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 60$  değerinde en sert etki ortaya çıkmaktadır.

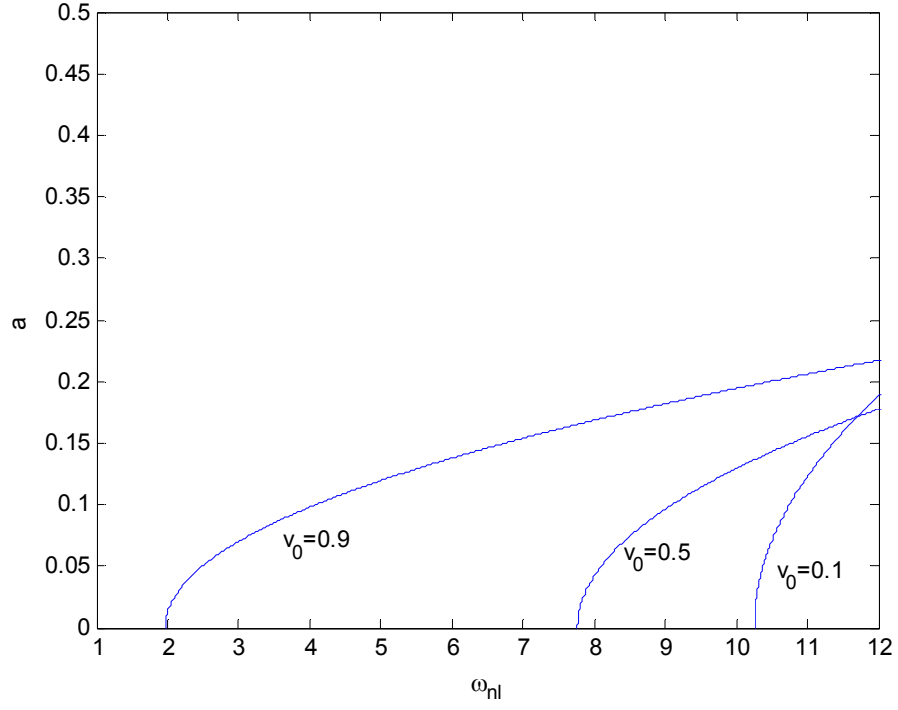
Şekil (3.135) de  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$ ,  $v_0 = 0.5$  ve değişik  $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$  değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği verilmiştir. 1. mod için mesnet konumları birbirine yaklaştığında nonlinear terimlerin tabi frekansa olan etki artmakta  $(\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7)$  konumunda en fazla olmaktadır. Şekil (3.136)' da 2. mod için orta nokta düğüm noktası olduğu için grafikler aynı lineer frekans değerinden başlamaktadır.  $(\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9)$  ve  $(\eta_1=0.4-\eta_2=0.5-\eta_3=0.6)$  ile  $(\eta_1=0.2-\eta_2=0.5-\eta_3=0.8)$  ve  $(\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7)$  konumlarından en sert etki  $(\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9)$  konumunda ortaya çıkmaktadır. Şekil (3.137)' de 3. mod için en sert durum  $(\eta_1=0.1-\eta_2=0.5-\eta_3=0.9)$  en yumuşak durum ise  $(\eta_1=0.3-\eta_2=0.5-\eta_3=0.7)$  konumundayken olmaktadır.



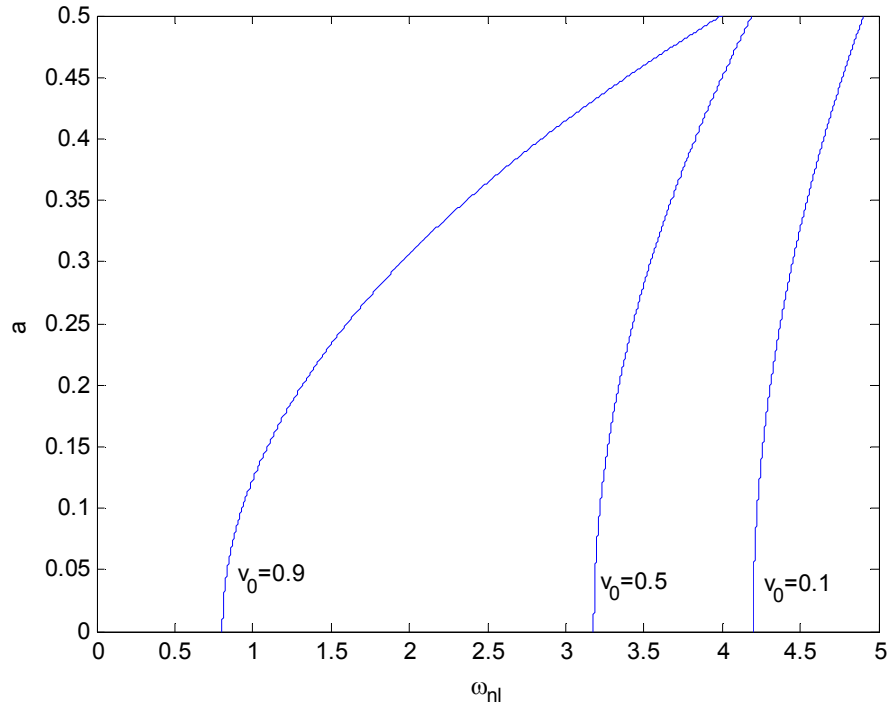
Şekil 3.84  $\eta_1=0.1$  -  $\eta_2=0.9$   $v_{k1}=v_{k2}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)



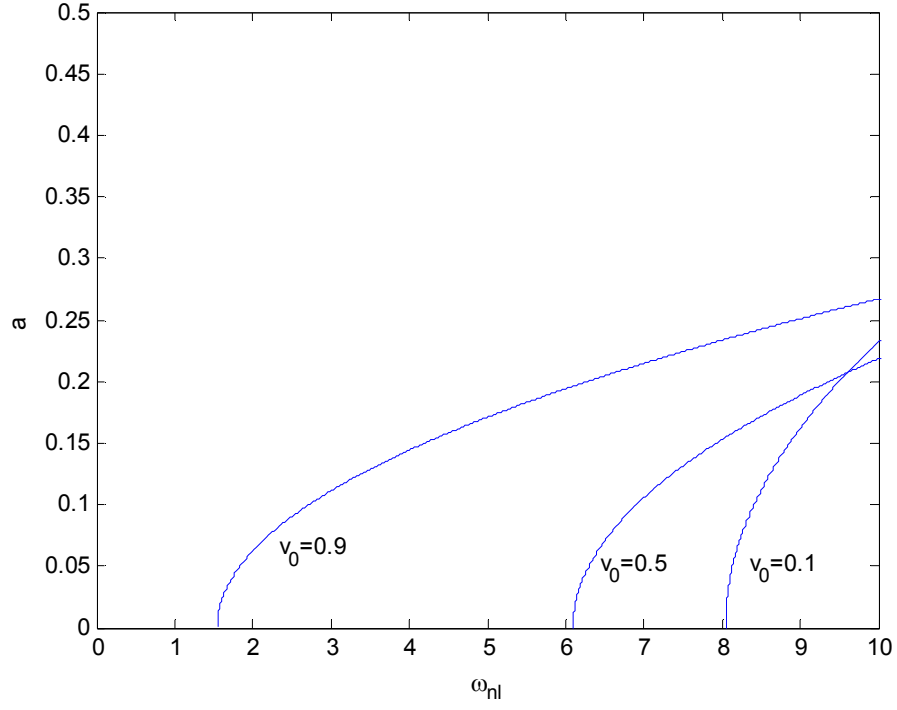
Şekil 3.85  $\eta_1=0.1$  -  $\eta_2=0.9$   $v_{k1}=v_{k2}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



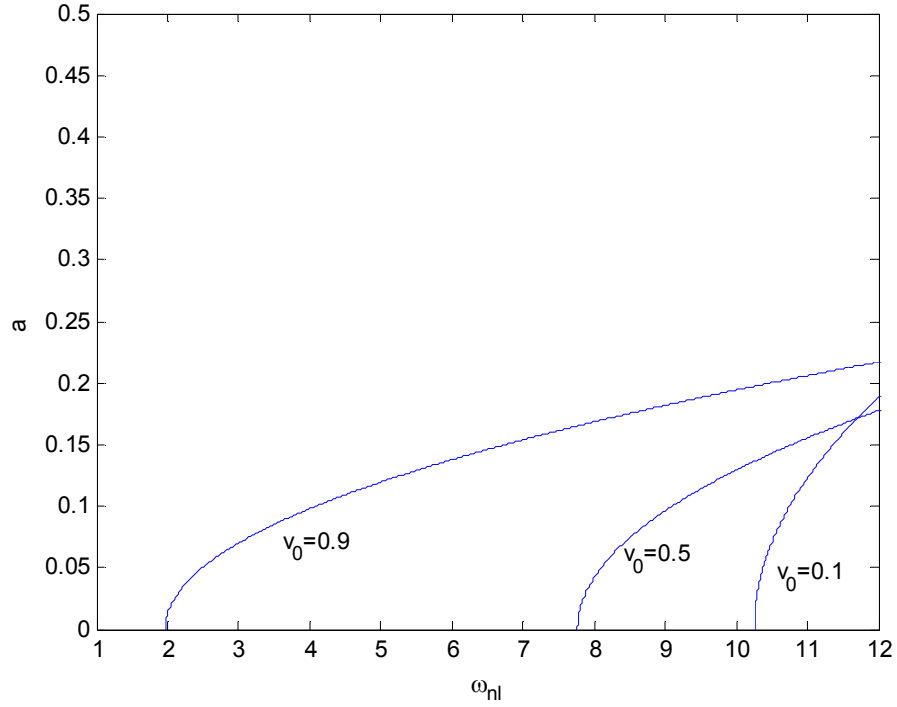
Şekil 3.86  $\eta_1=0.1$  -  $\eta_2=0.9$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod)



Şekil 3.87  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)

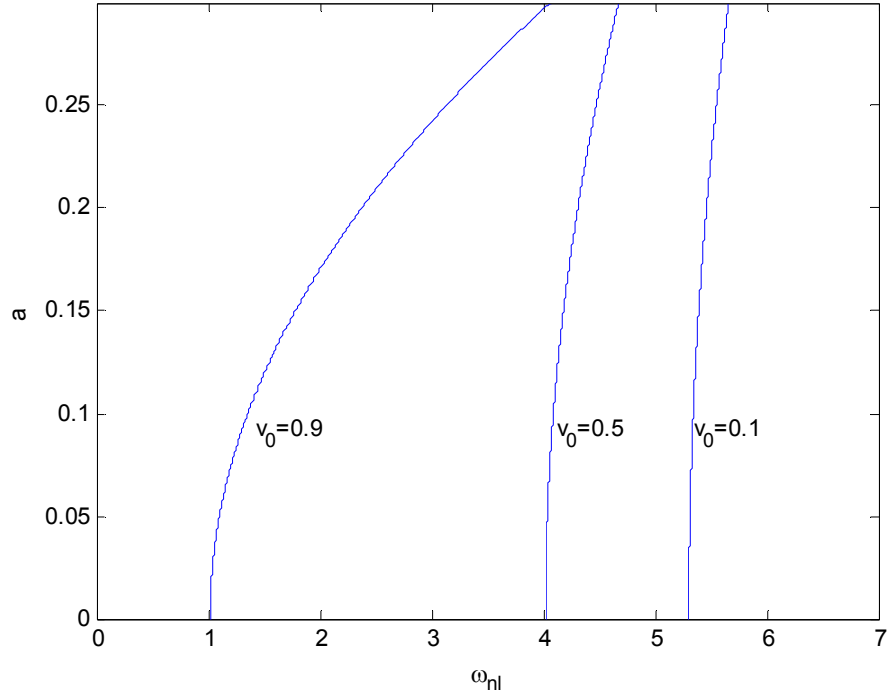


Şekil 3.88  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$   $v_{k1}=v_{k2}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)

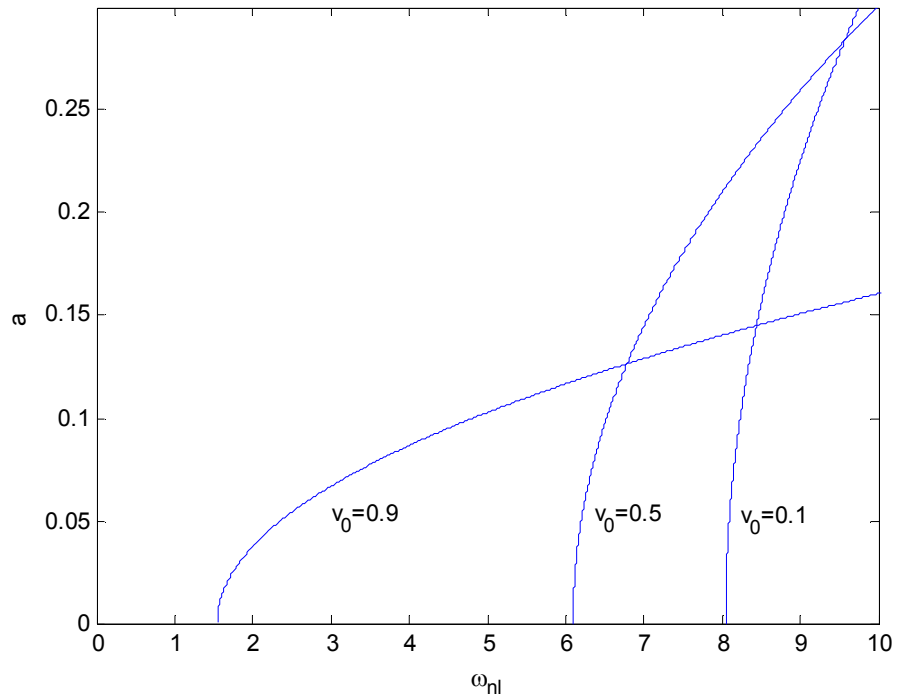


Şekil 3.89  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$   $v_{k1}=v_{k2}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod)

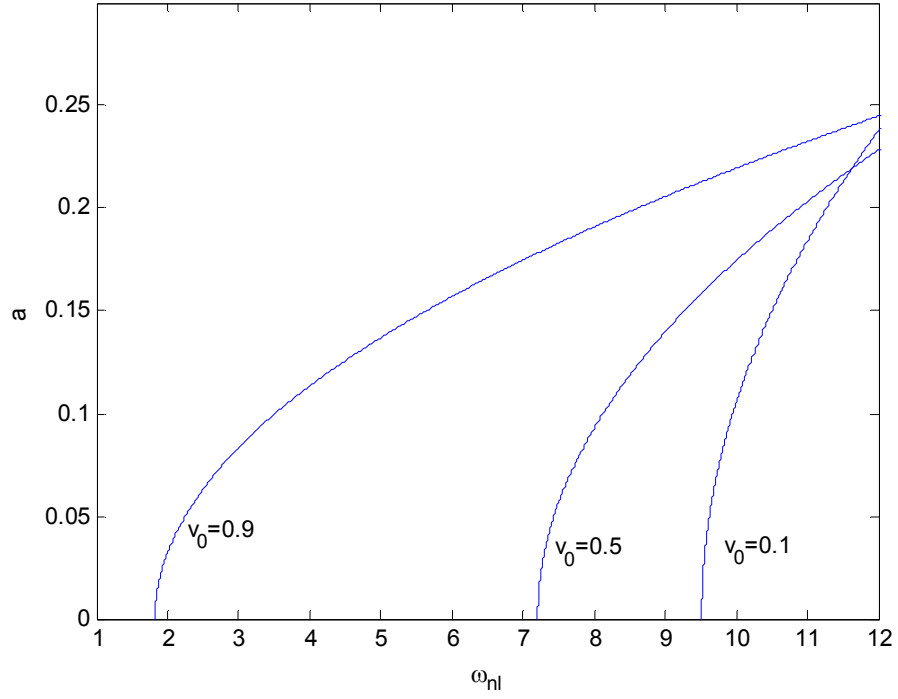




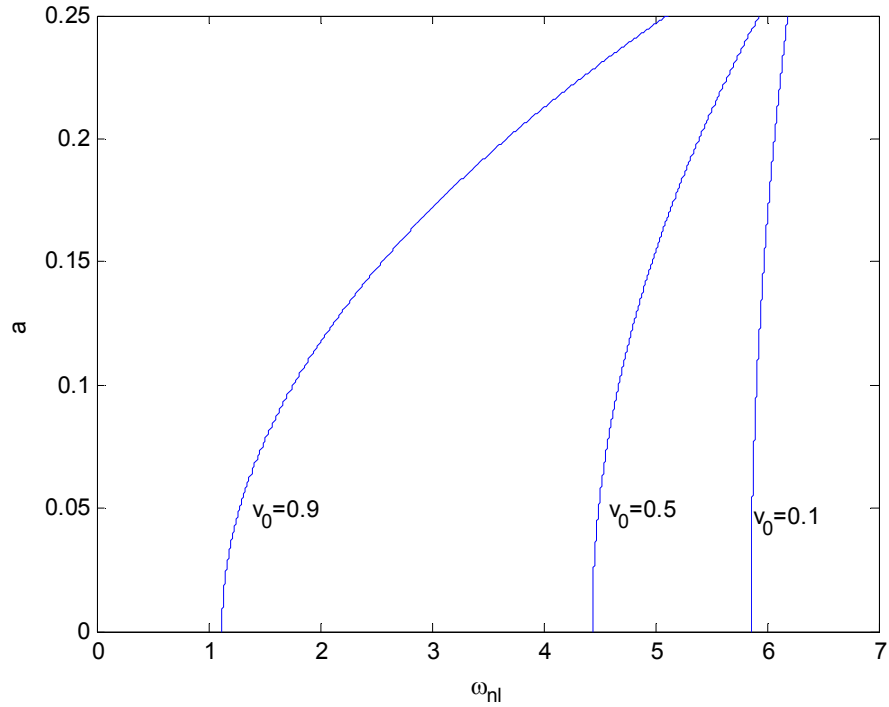
Şekil 3.90  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)



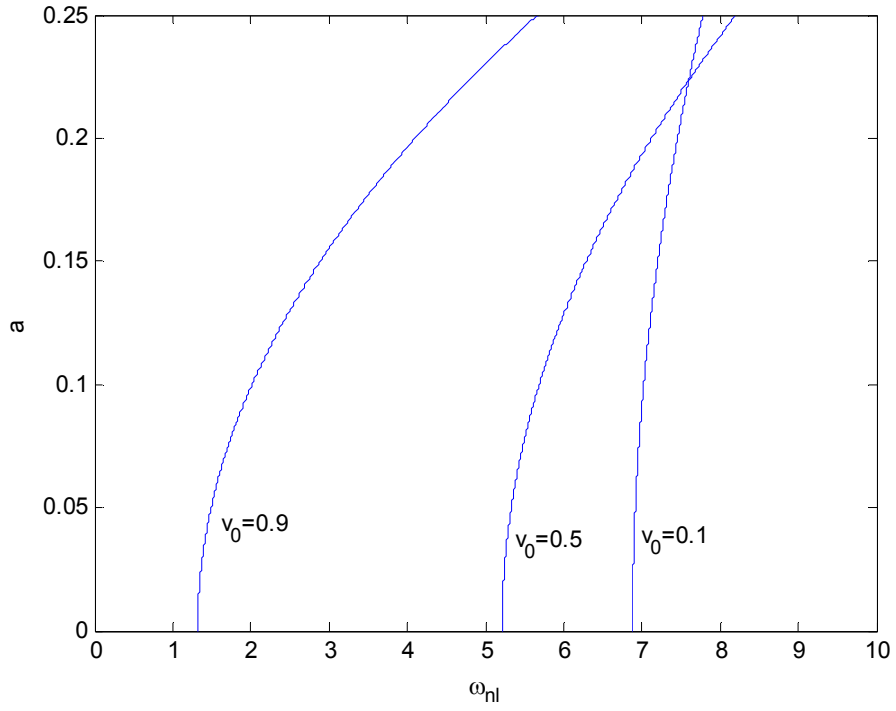
Şekil 3.91  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



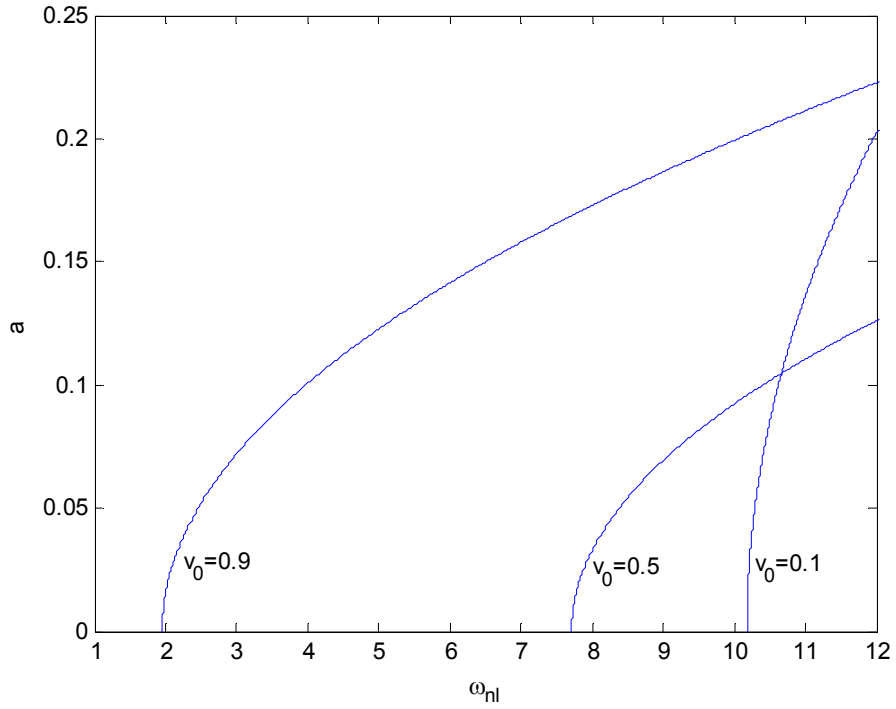
Şekil 3.92  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod)



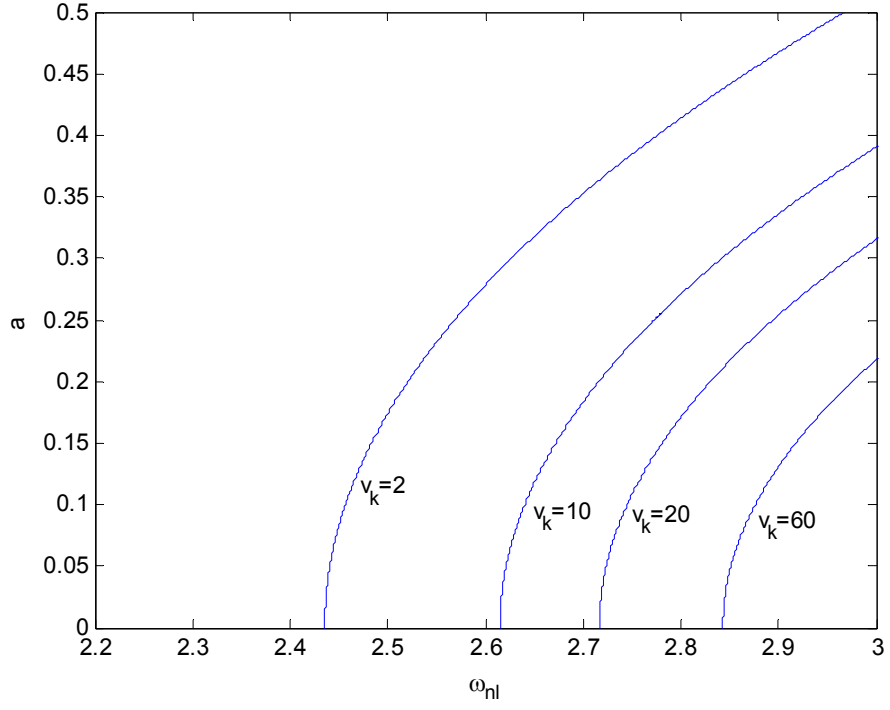
Şekil 3.93  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)



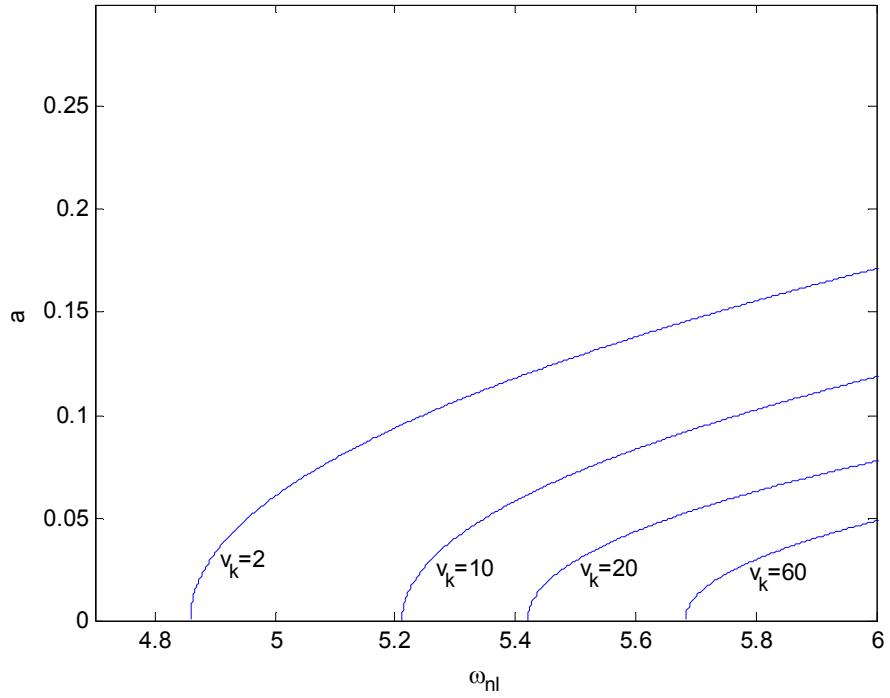
Şekil 3.94  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



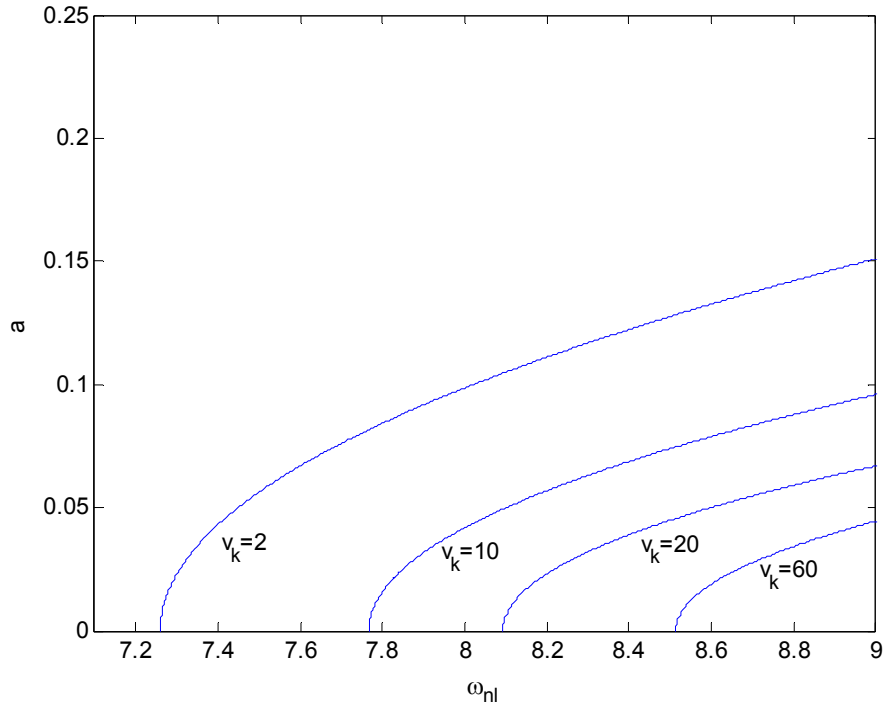
Şekil 3.95  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$   $v_{k1}=v_{k2} =10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod)



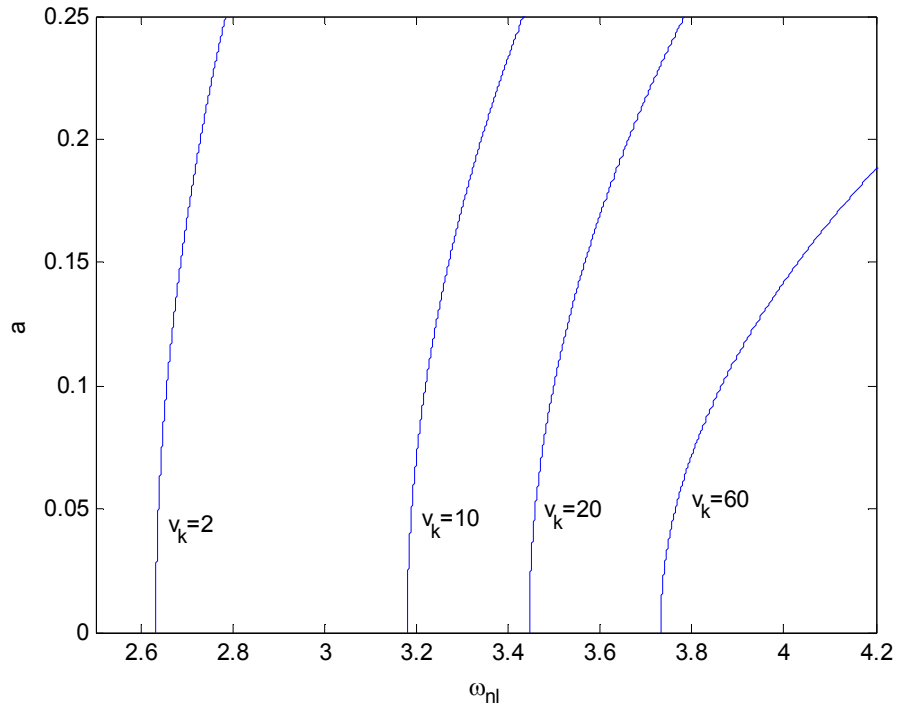
Şekil 3.96  $\eta_1=0.1$  -  $\eta_2=0.9$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)



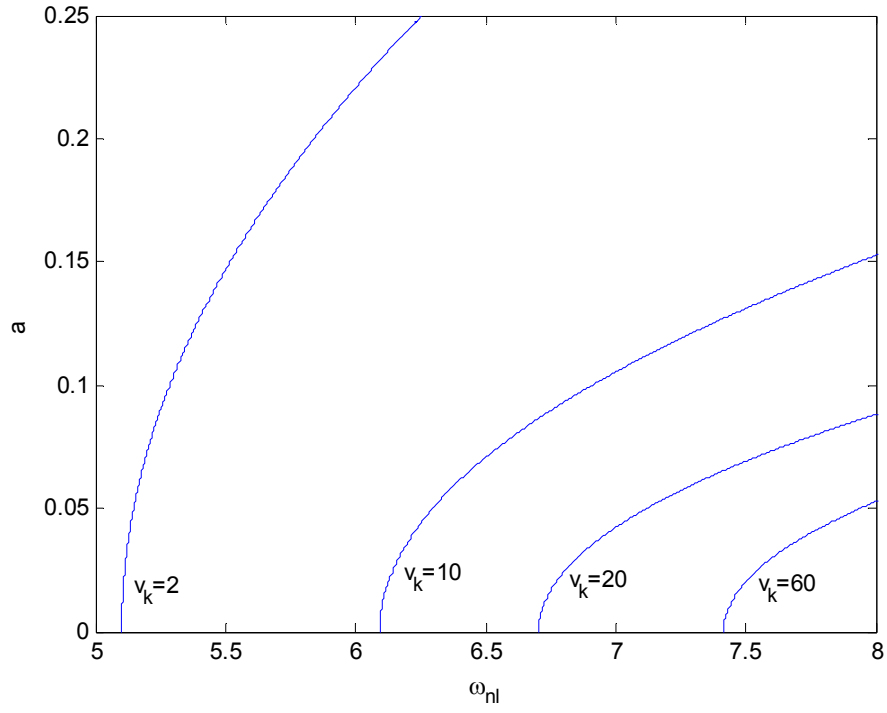
Şekil 3.97  $\eta_1=0.1$  -  $\eta_2=0.9$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



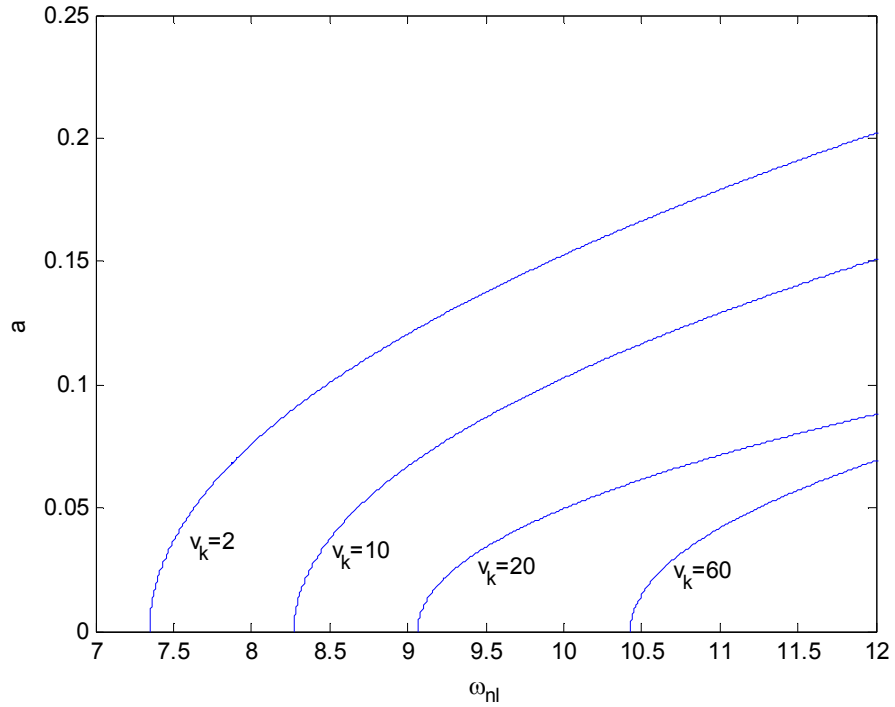
Şekil 3.98  $\eta_1=0.1$  -  $\eta_2=0.9$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (3. mod)



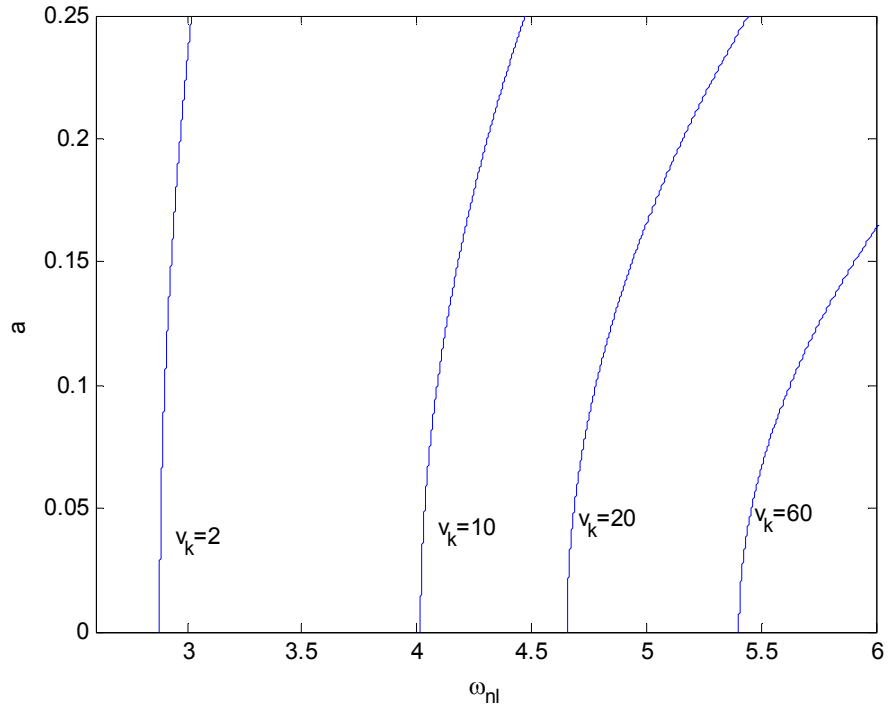
Şekil 3.99  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (1. mod)



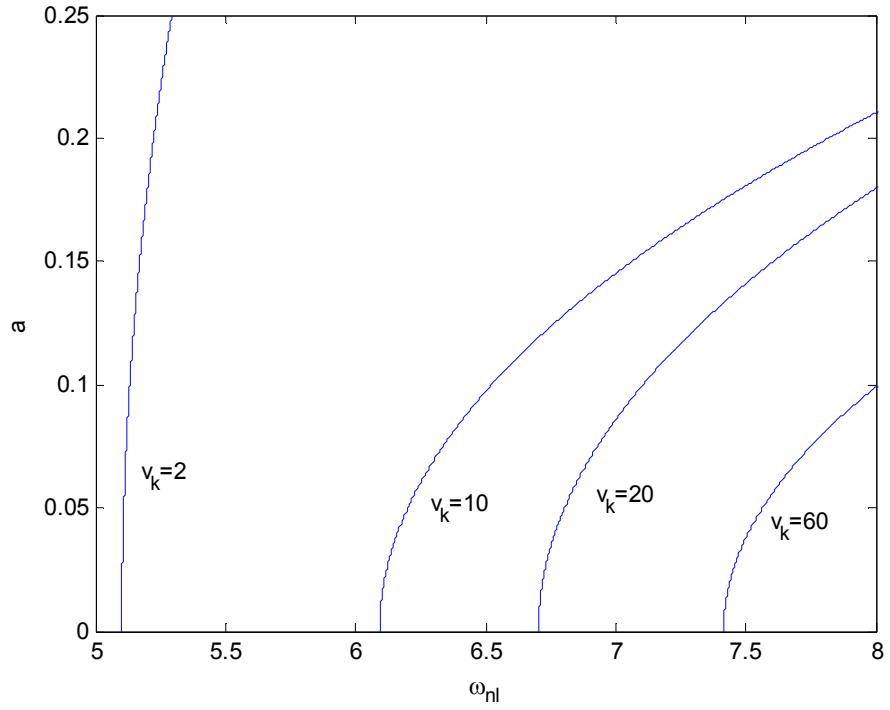
Şekil 3.100  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



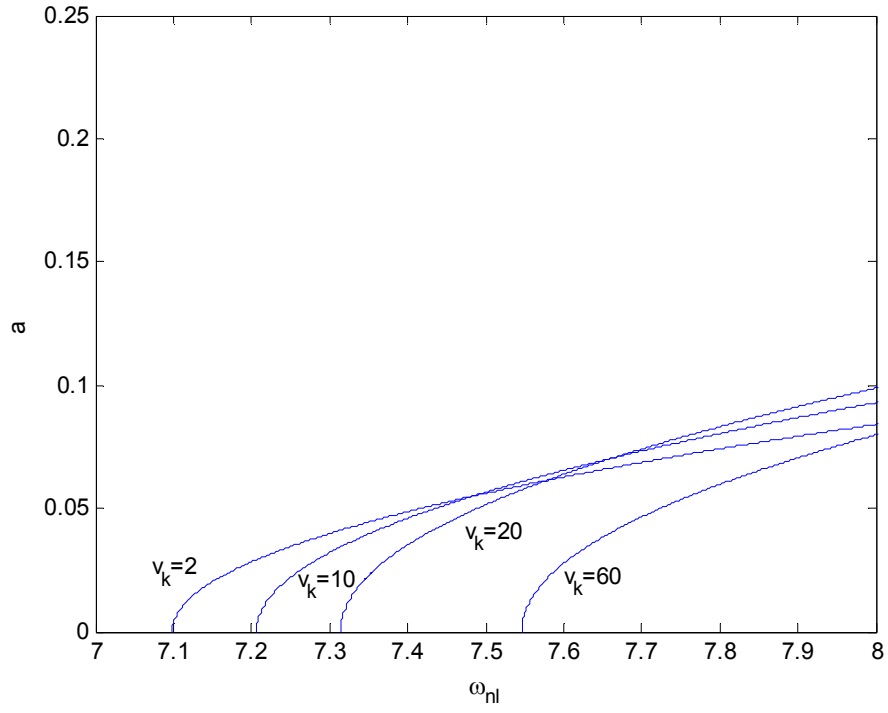
Şekil 3.101  $\eta_1=0.2$  -  $\eta_2=0.8$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod)



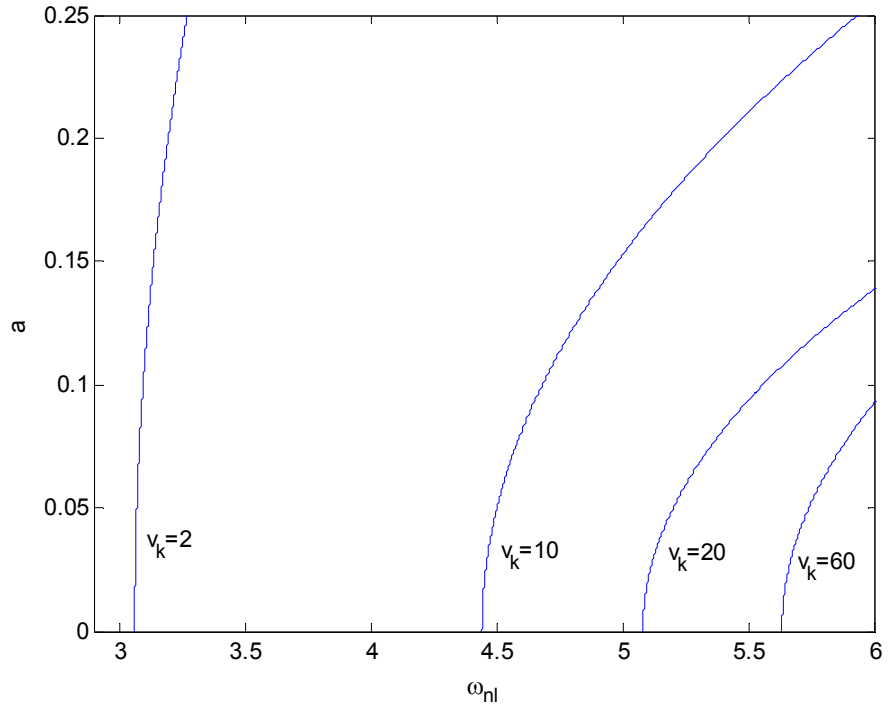
Şekil 3.102  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)



Şekil 3.103  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)

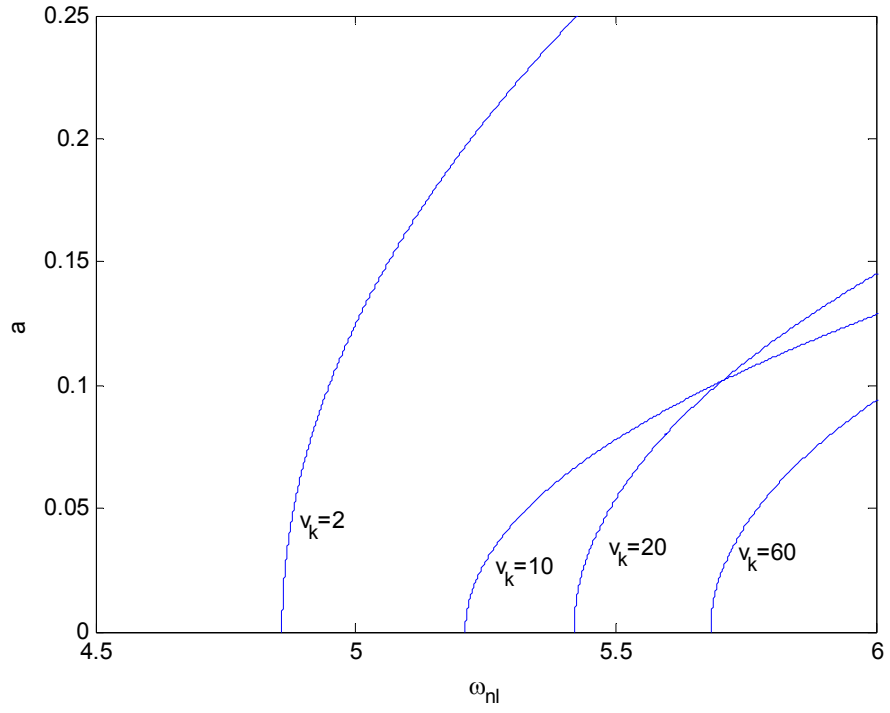


Şekil 3.104  $\eta_1=0.3$  -  $\eta_2=0.7$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (3. mod)

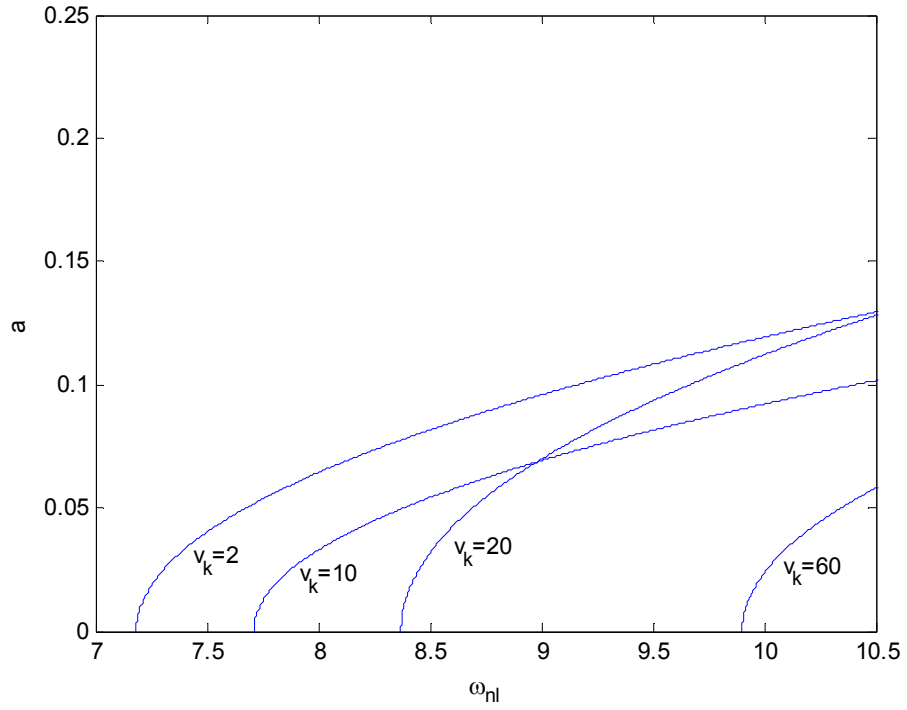


Şekil 3.105  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (1. mod)

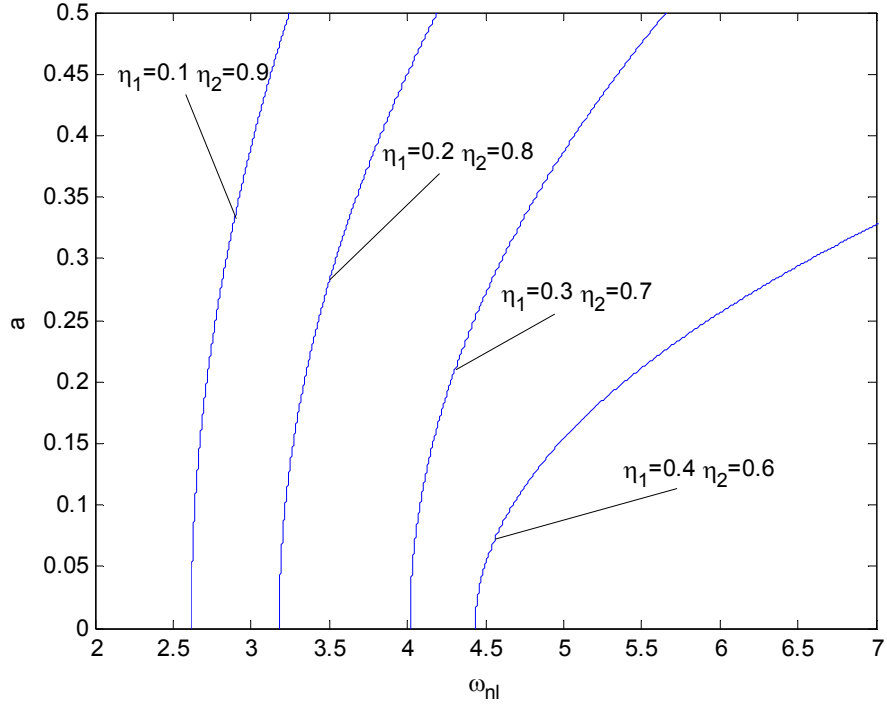




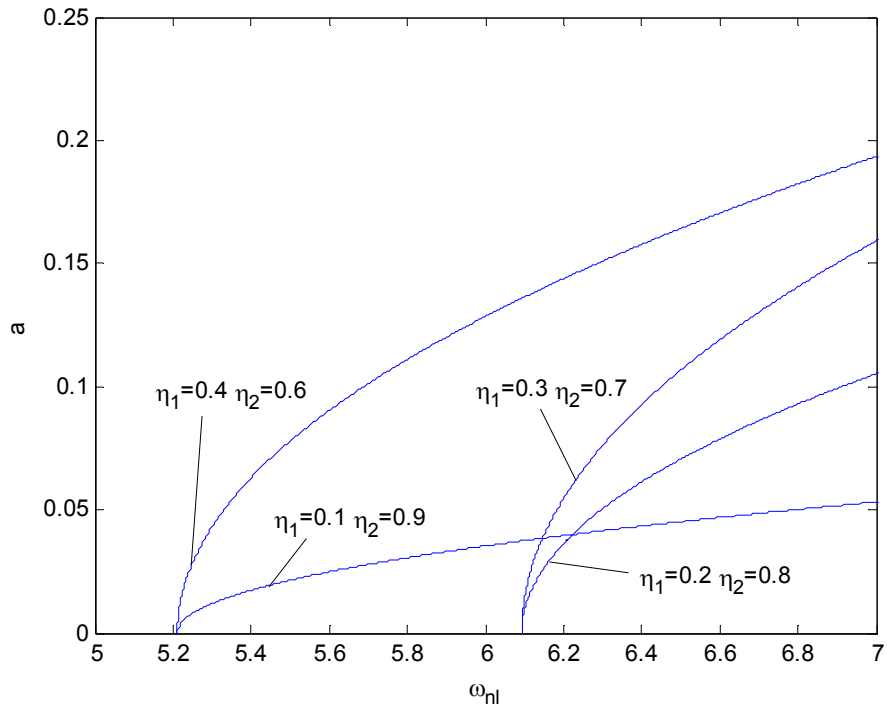
Şekil 3.106  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



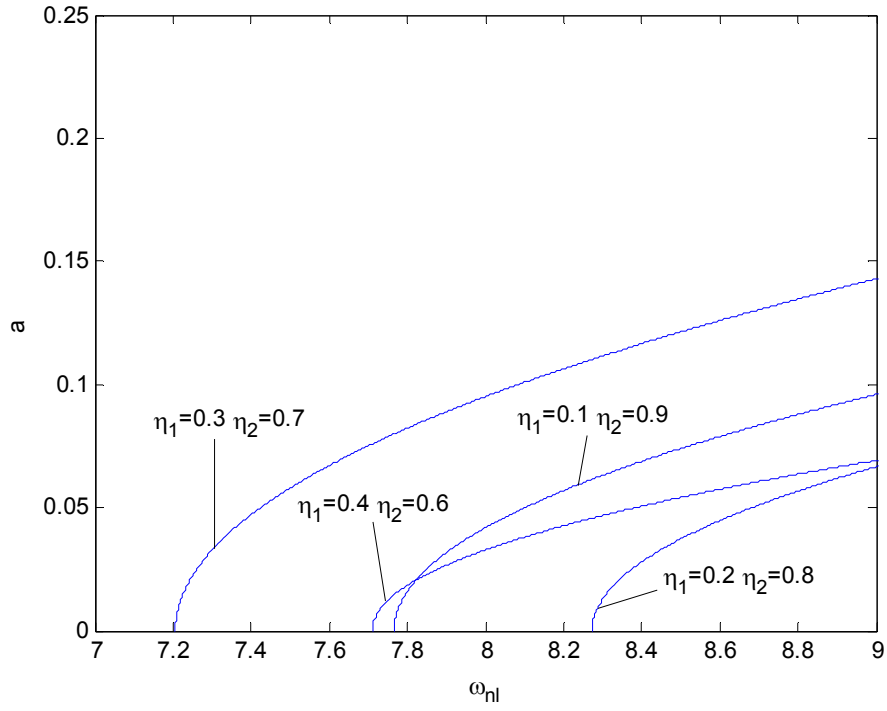
Şekil 3.107  $\eta_1=0.4$  -  $\eta_2=0.6$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$  'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod)



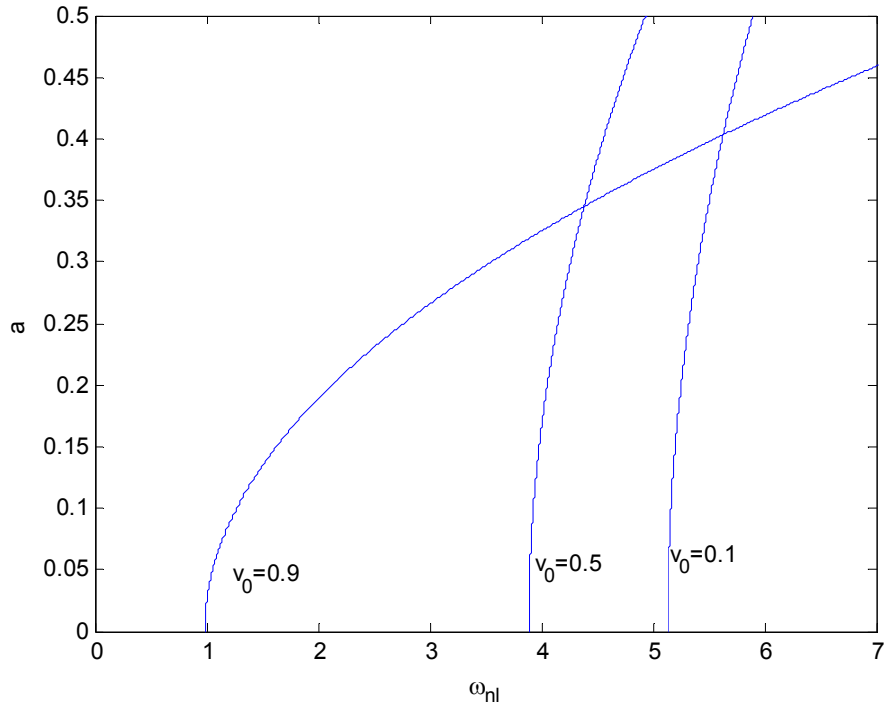
Şekil 3.108  $v_0=0.5, v_{k1} = v_{k2} =10$  ve  $(\eta_1-\eta_2)$  çiftinin değişik konumları için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)



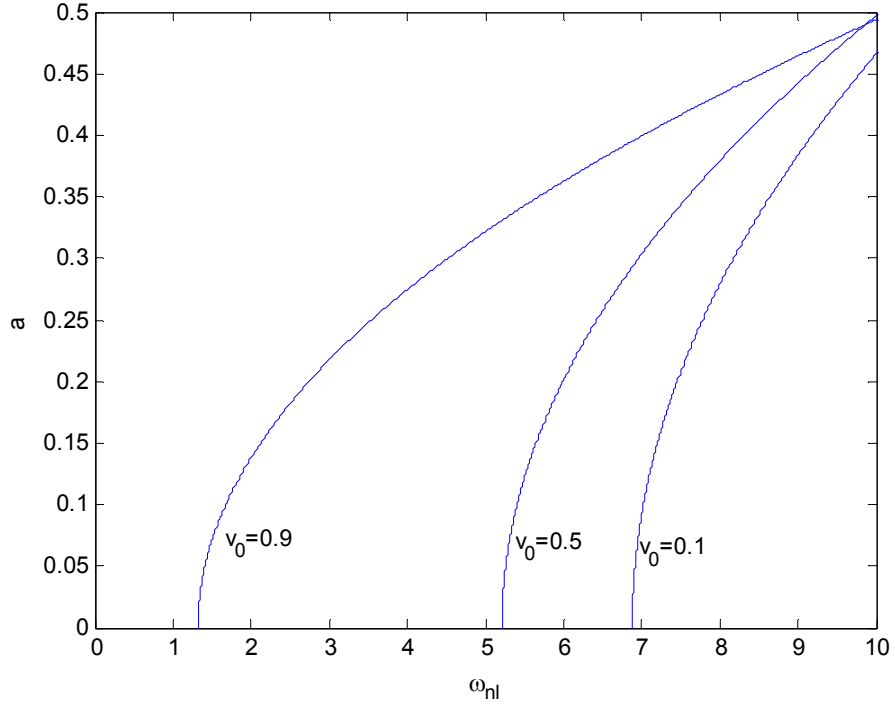
Şekil 3.109  $v_0=0.5, v_{k1} = v_{k2} =10$  ve  $(\eta_1-\eta_2)$  çiftinin değişik konumları için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



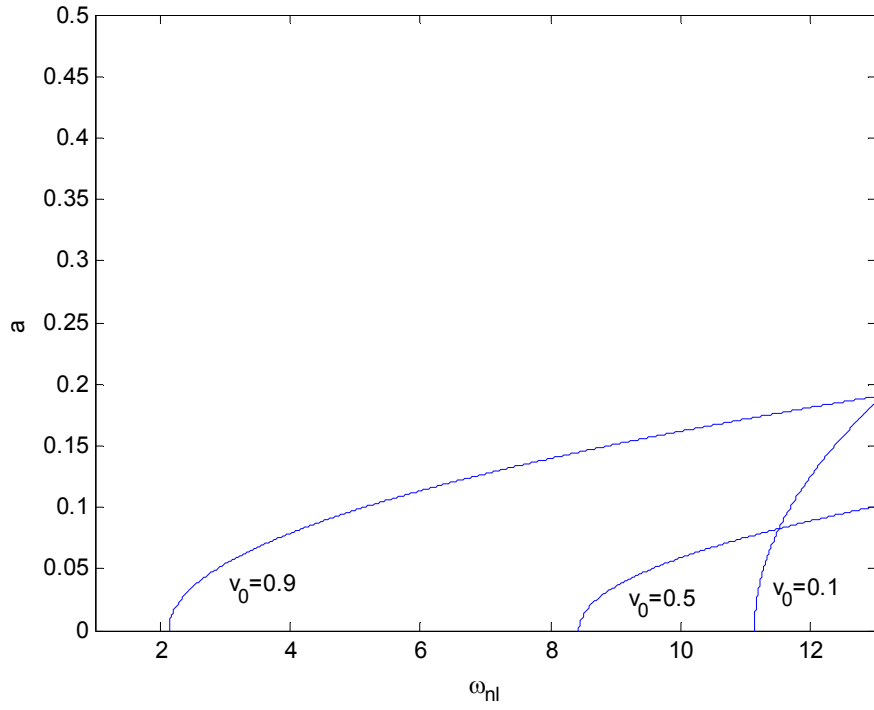
Şekil 3.110  $v_0=0.5, v_{k1} = v_{k2} =10$  ve  $(\eta_1-\eta_2)$  çiftinin değişik konumları için  $\omega_{nl}$ -a grafiği (3. mod)



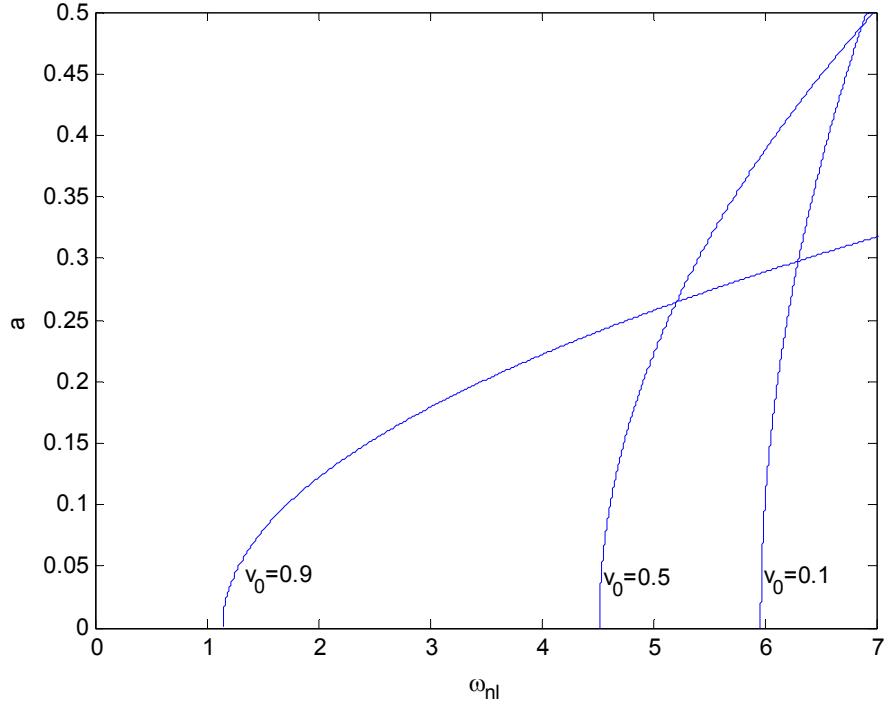
Şekil 3.111  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5, \eta_3=0.9, v_{k1}=v_{k2} =v_{k3} =10$  ve  $v_0$ 'ün değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği (1. mod)



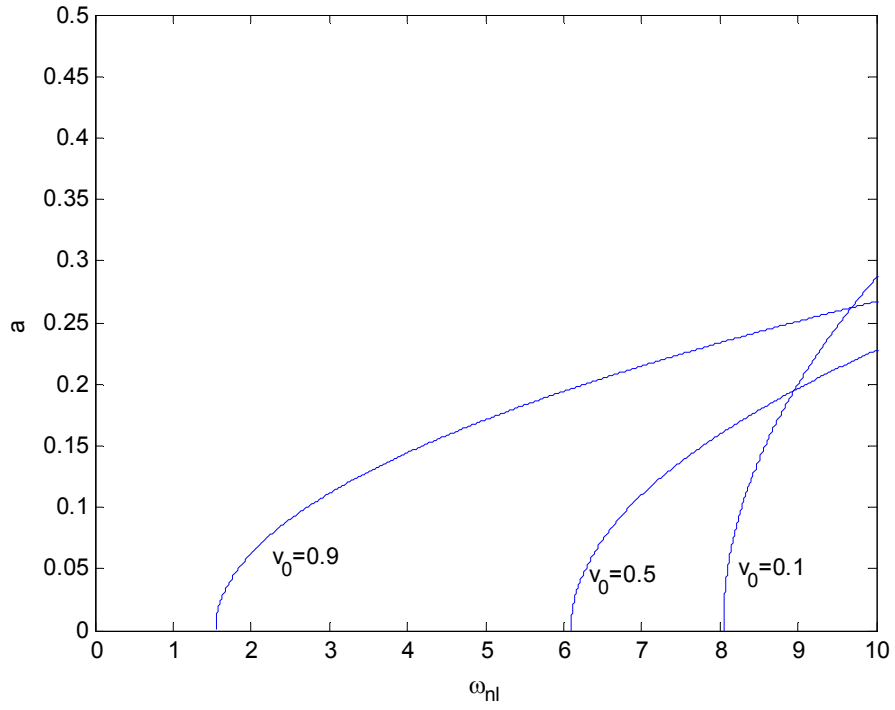
Şekil 3.112  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5 \eta_3=0.9 v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(2. mod)



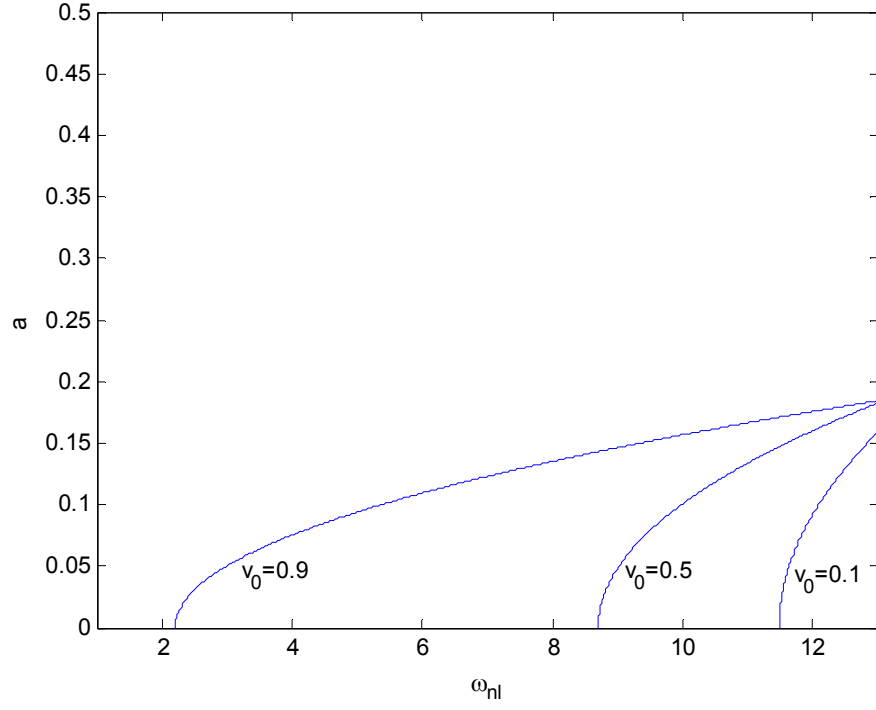
Şekil 3.113  $\eta_1=0.1-\eta_2=0.5 \eta_3=0.9 v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(3. mod)



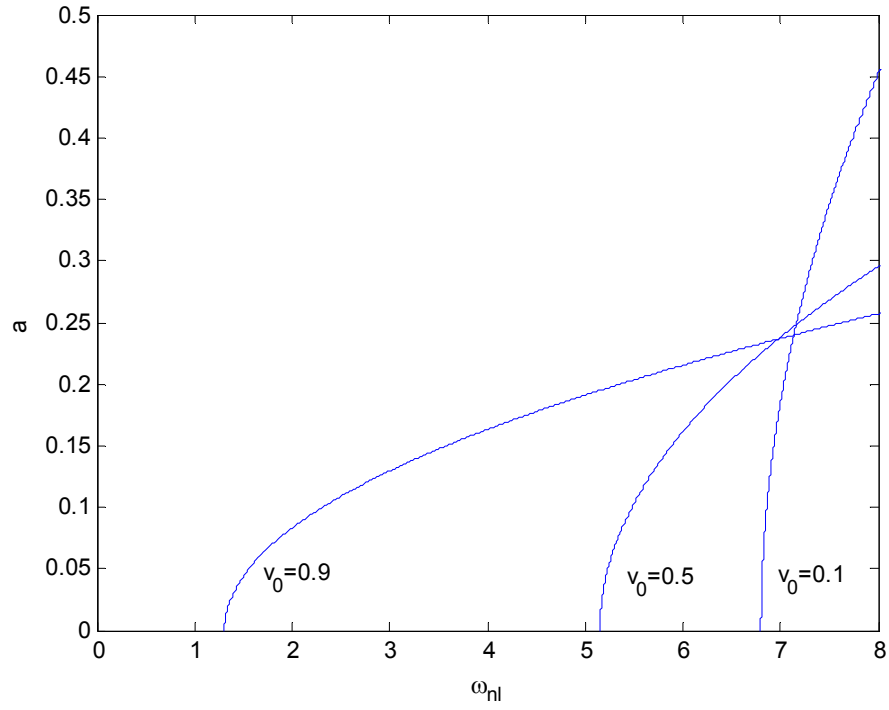
Şekil 3.114  $\eta_1=0.2$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.8$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(1. mod)



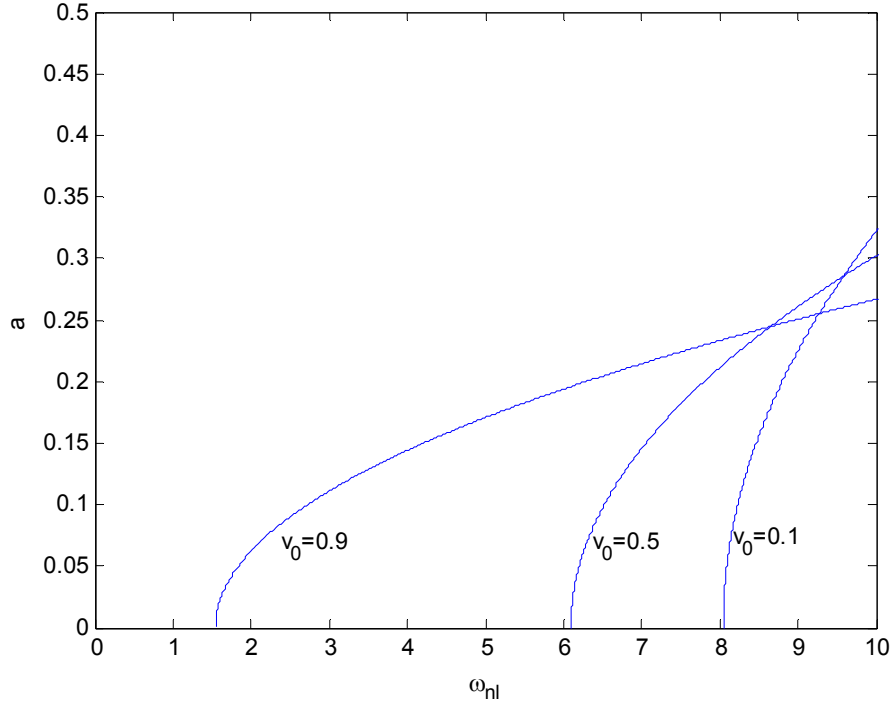
Şekil 3.115  $\eta_1=0.2$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.8$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(2. mod)



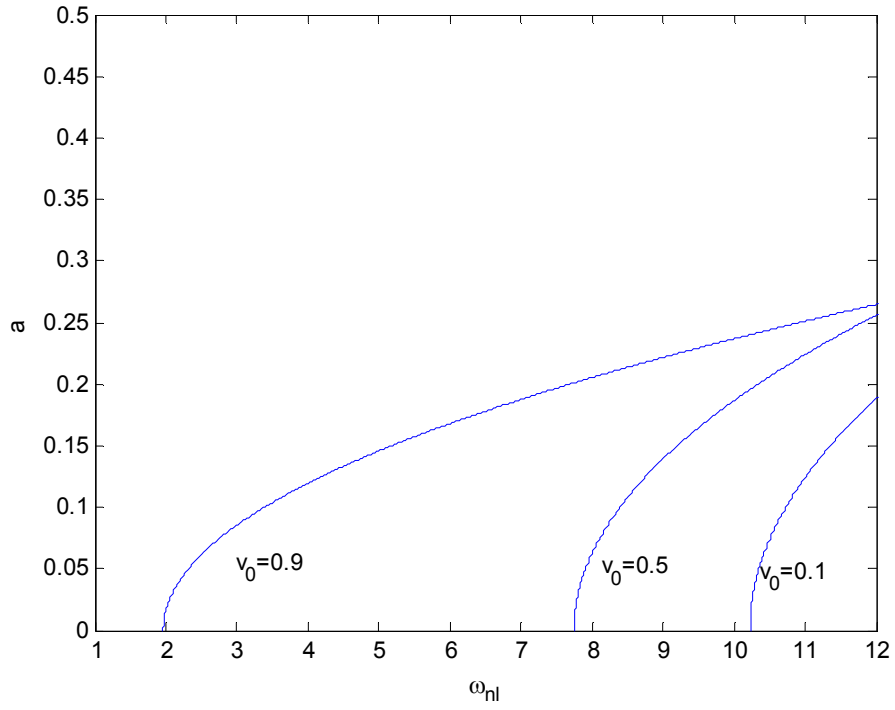
Şekil 3.116  $\eta_1=0.2$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.8$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(3. mod)



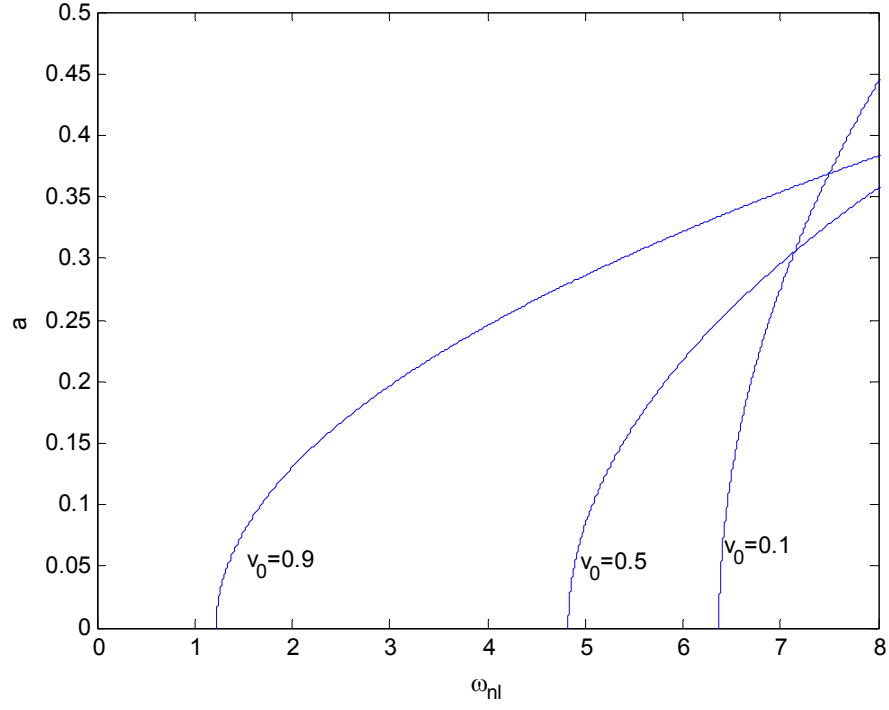
Şekil 3.117  $\eta_1=0.3$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.7$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(1. mod)



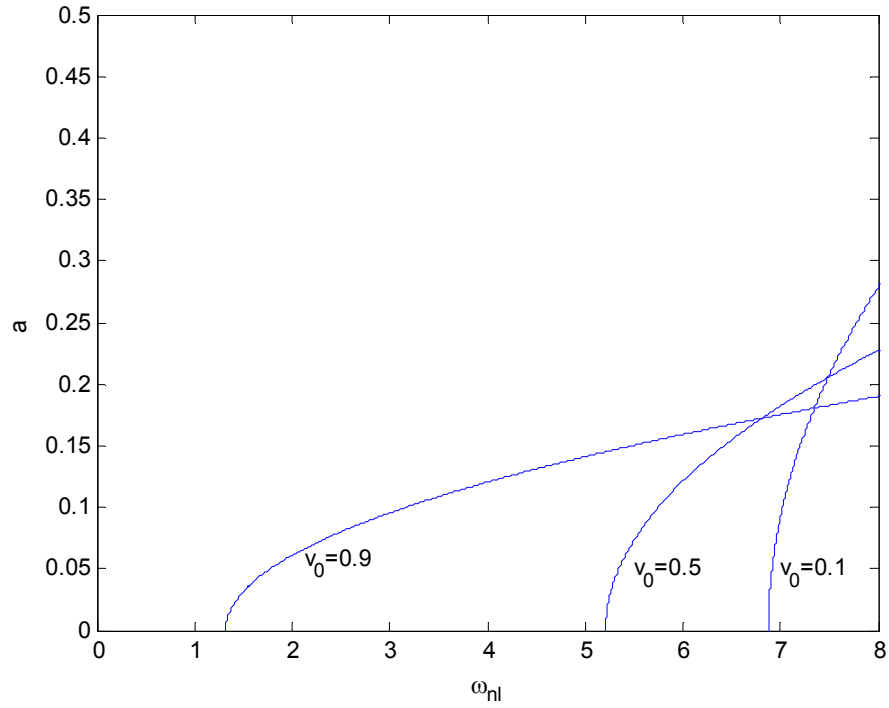
Şekil 3.118  $\eta_1=0.3$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.7$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği (2. mod)



Şekil 3.119  $\eta_1=0.3$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.7$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği (3. mod)

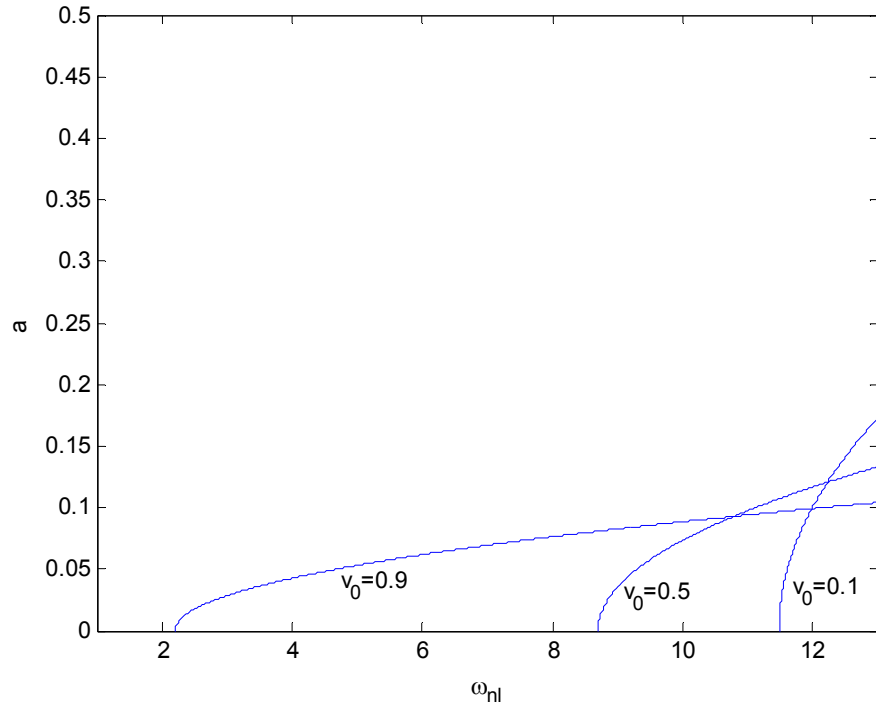


Şekil 3.120  $\eta_1=0.4$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.6$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(1. mod)

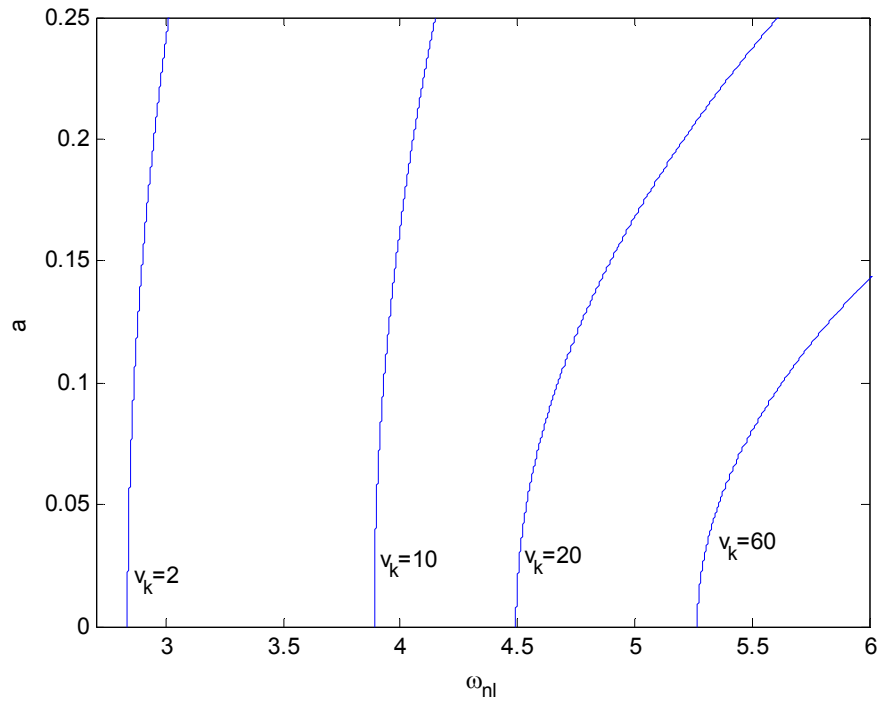


Şekil 3.121  $\eta_1=0.4$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.6$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'in değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği  
(2. mod)

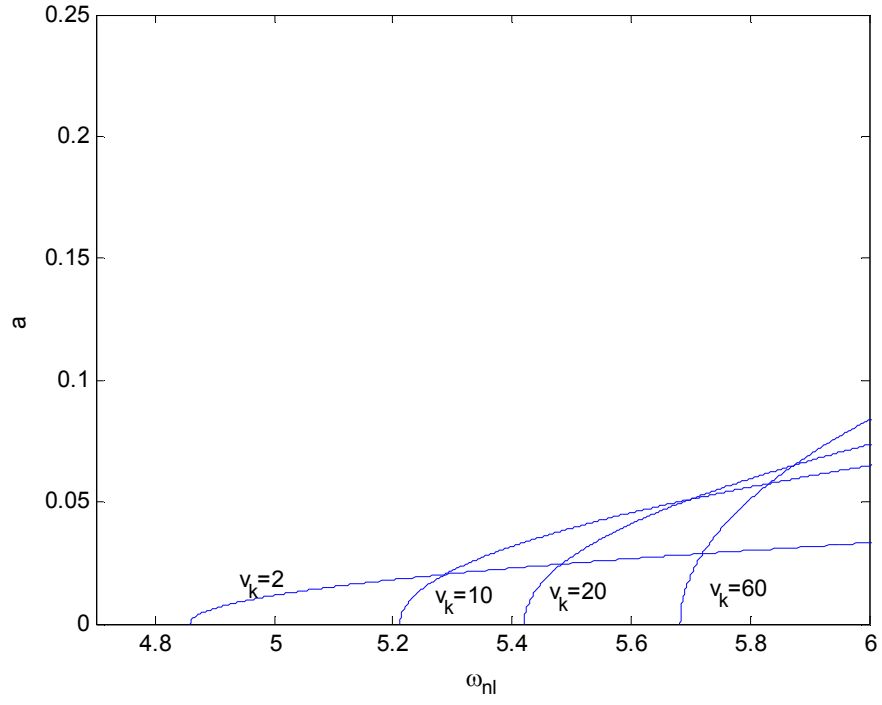




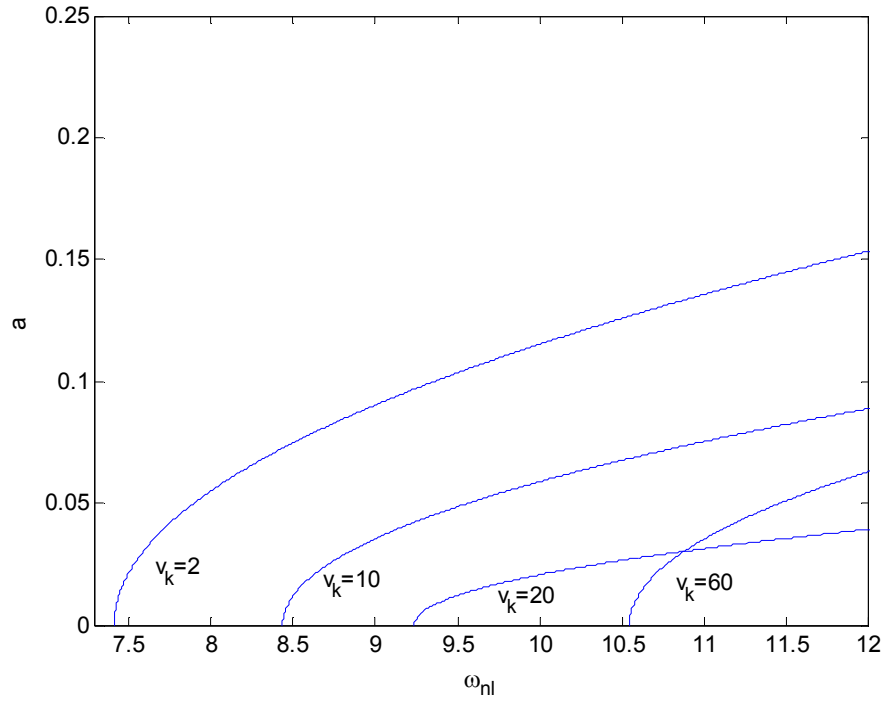
Şekil 3.122  $\eta_1=0.4$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.6$   $v_{k1}=v_{k2}=v_{k3}=10$  ve  $v_0$ 'ın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -a grafiği (3. mod)



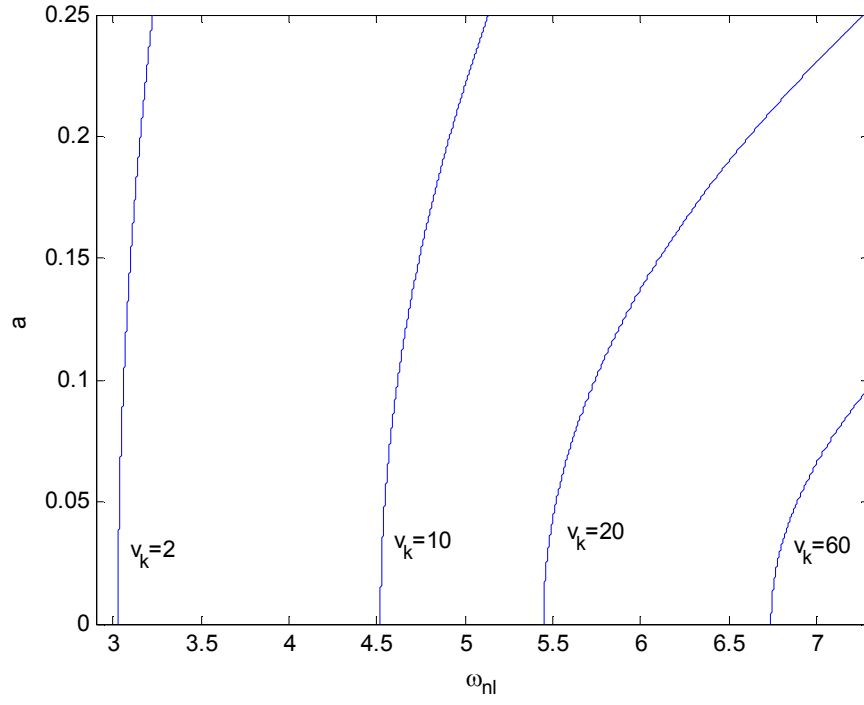
Şekil 3.123  $\eta_1=0.1$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.9$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nın değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (1. mod)



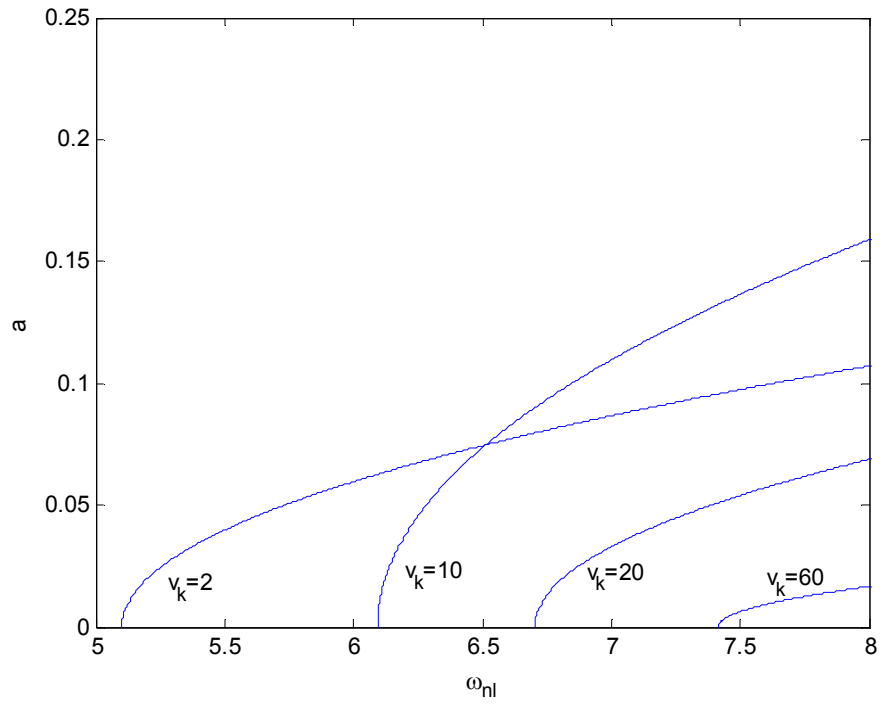
Şekil 3.124  $\eta_1=0.1$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.9$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (2. mod)



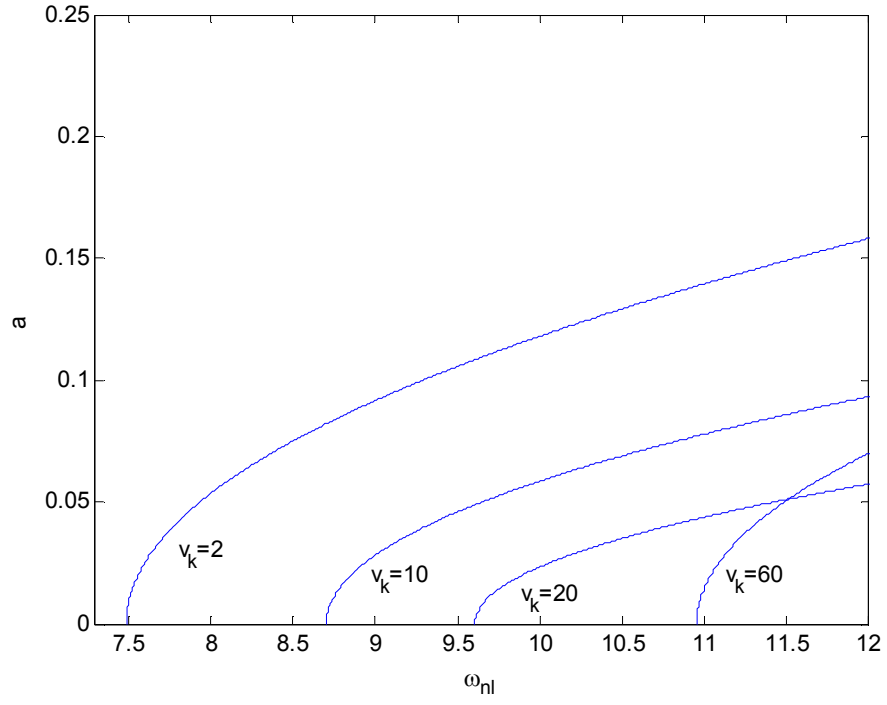
Şekil 3.125  $\eta_1=0.1$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.9$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (3. mod)



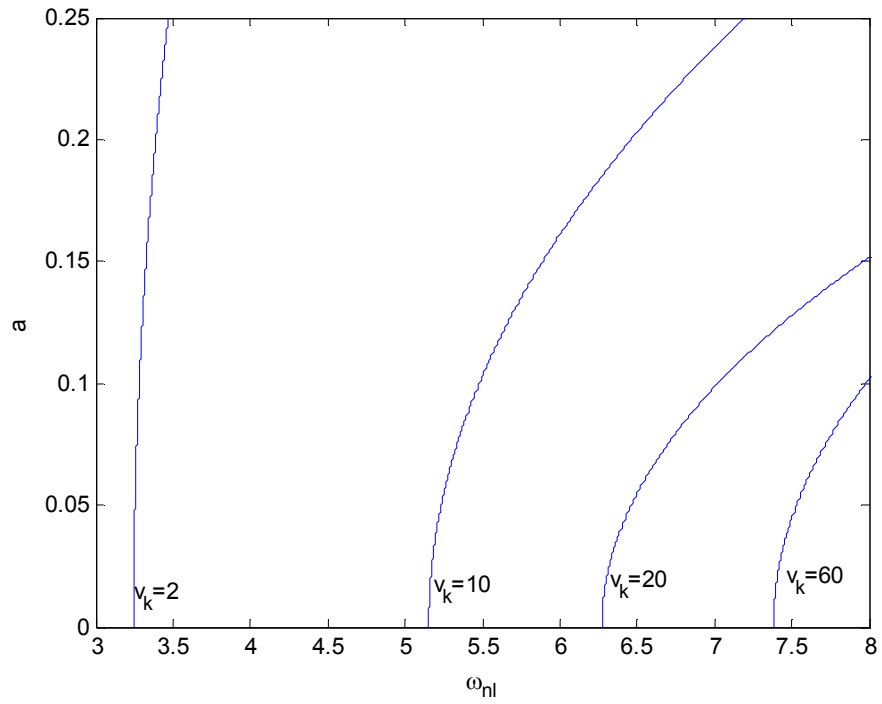
Şekil 3.126  $\eta_1=0.2$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.8$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (1. mod)



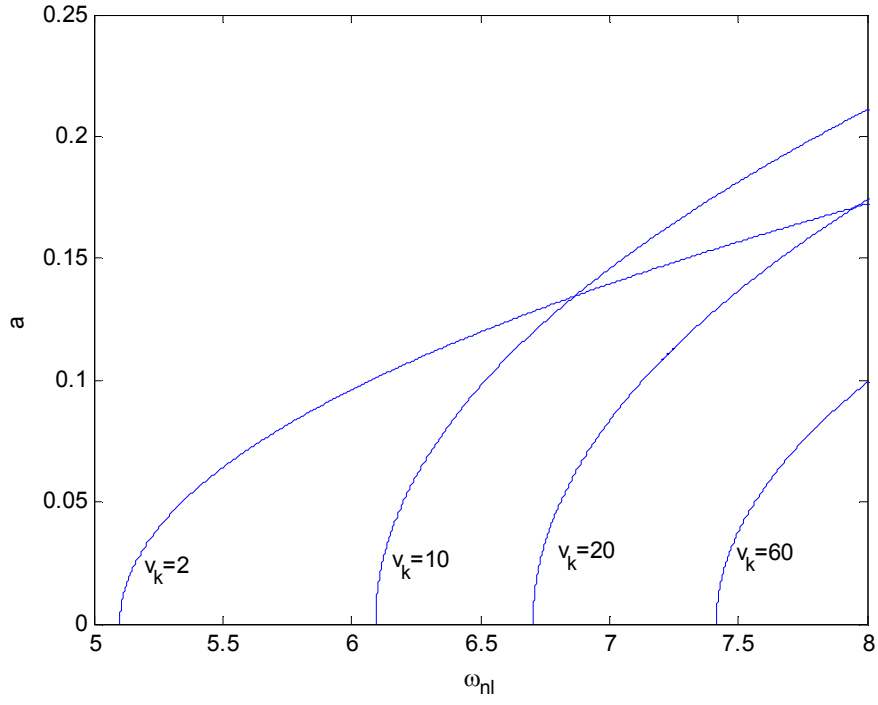
Şekil 3.127  $\eta_1=0.2$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.8$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (2. mod)



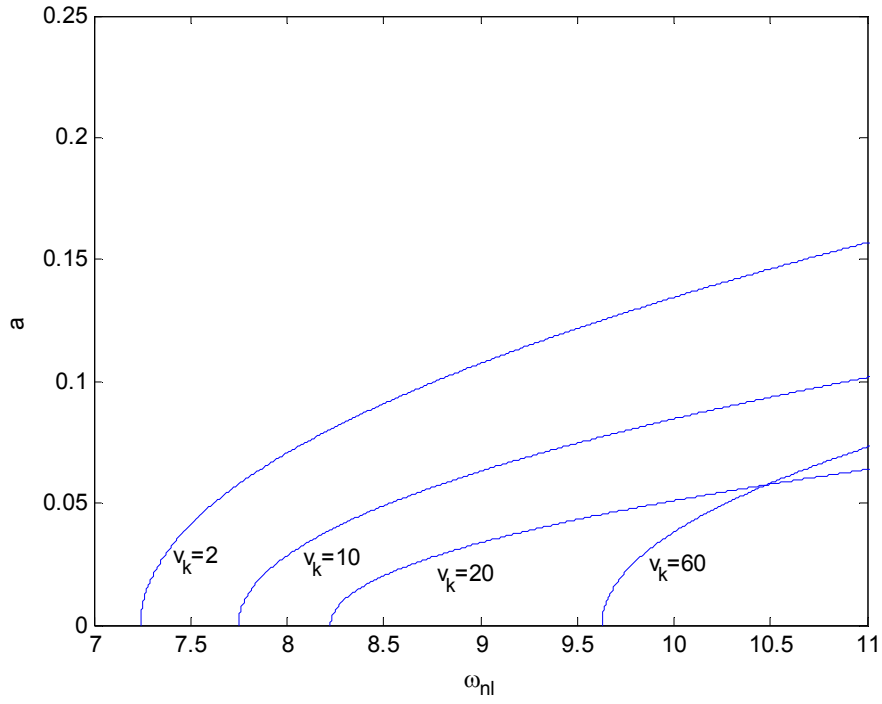
Şekil 3.128  $\eta_1=0.2$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.8$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (3. mod)



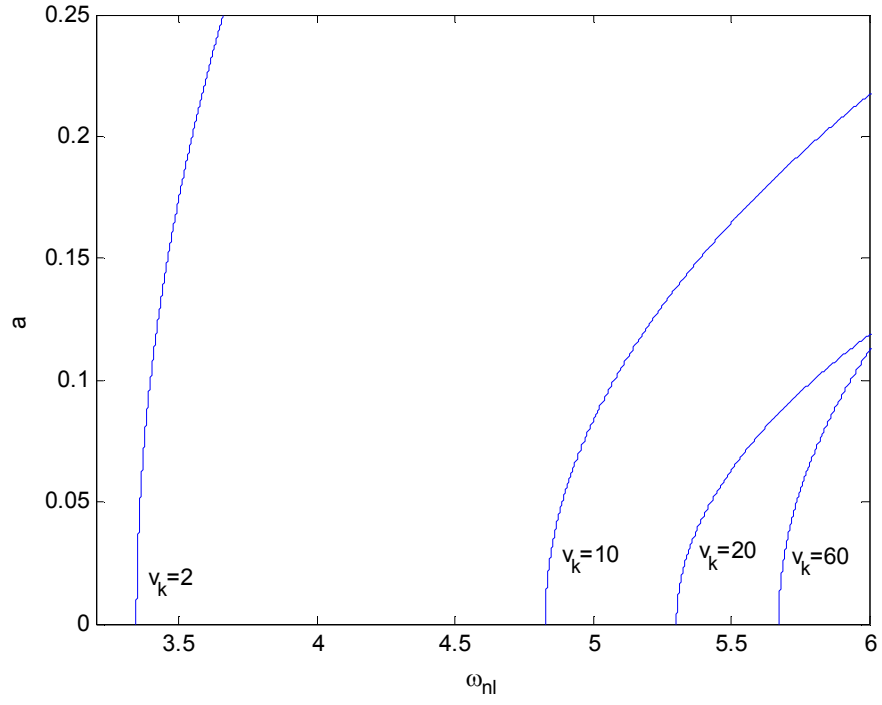
Şekil 3.129  $\eta_1=0.3$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.7$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (1. mod)



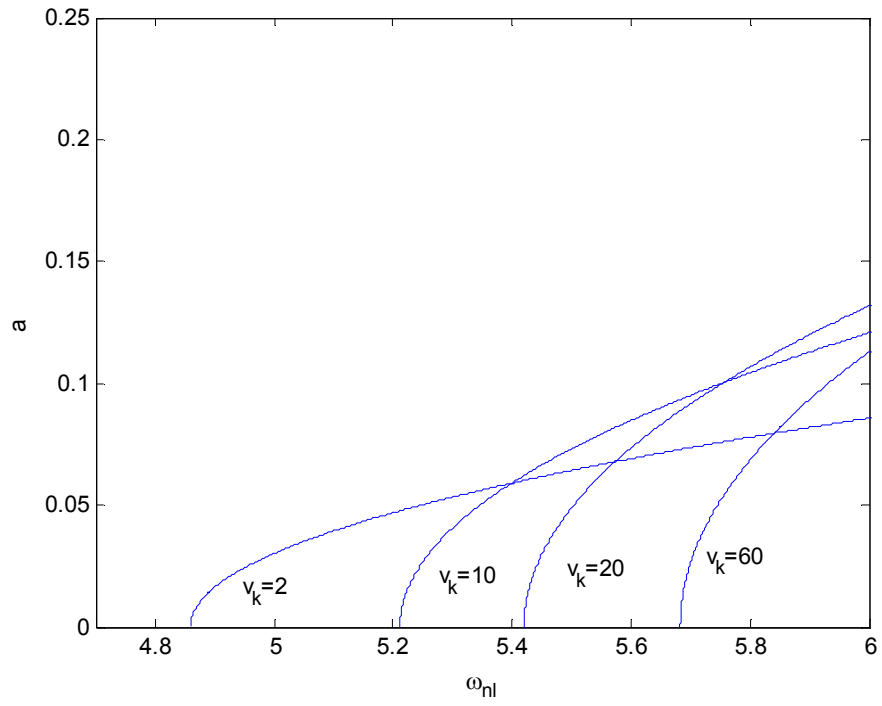
Şekil 3.130  $\eta_1=0.3$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.7$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (2. mod)



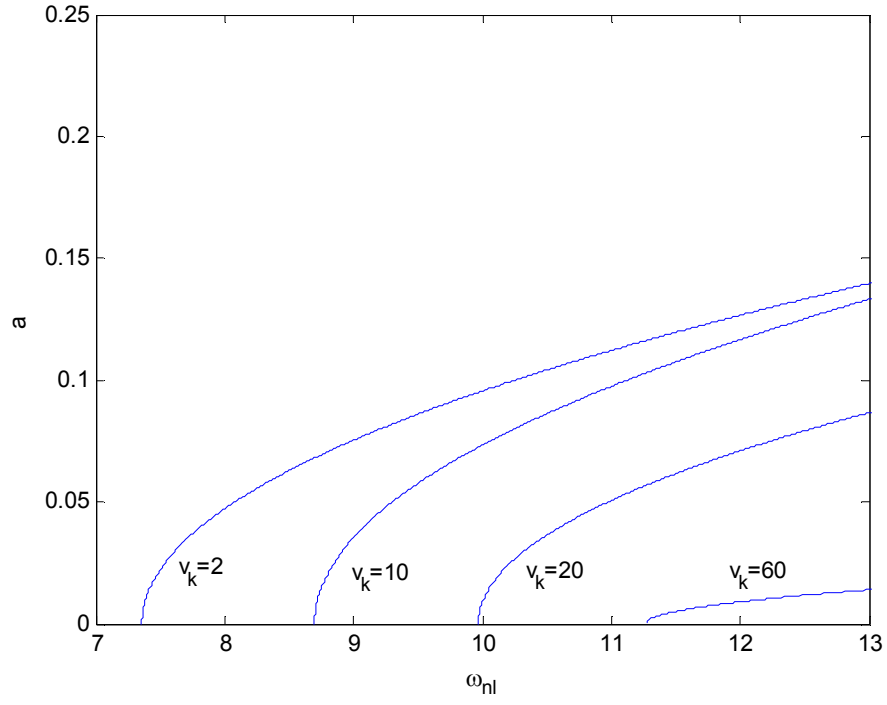
Şekil 3.131  $\eta_1=0.3$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.7$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{nl}$ -  $a$  grafiği (3. mod)



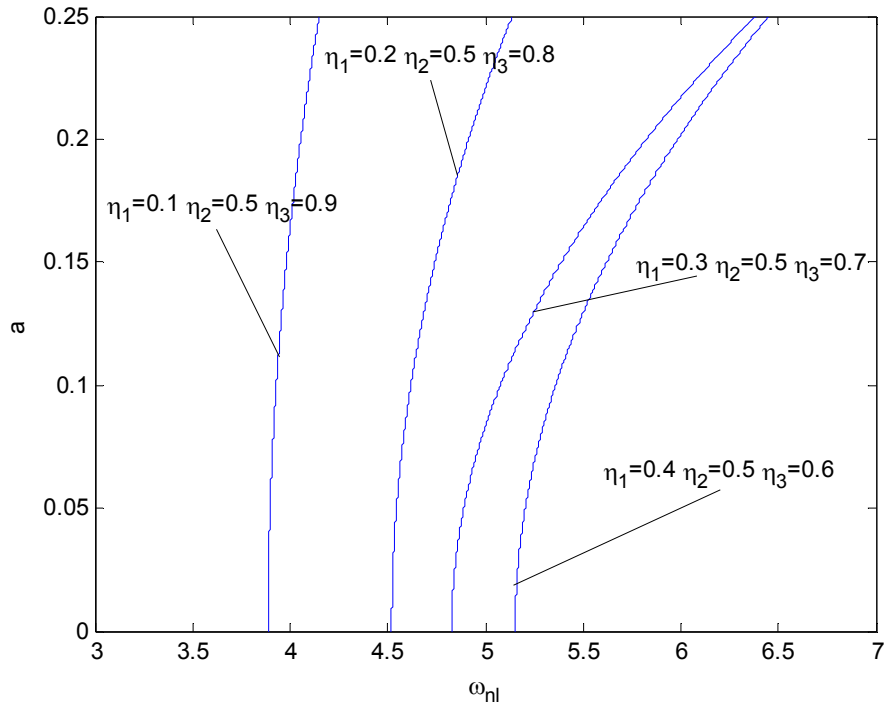
Şekil 3.132  $\eta_1=0.4$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.6$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{n1}$ -  $a$  grafiği (1. mod)



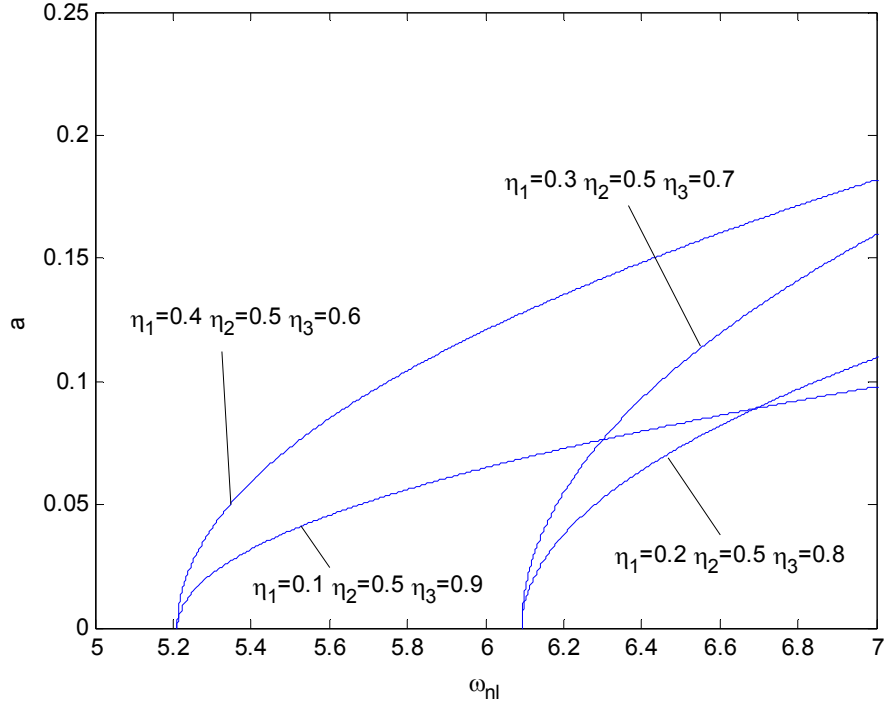
Şekil 3.133  $\eta_1=0.4$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.6$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{n1}$ -  $a$  grafiği (2. mod)



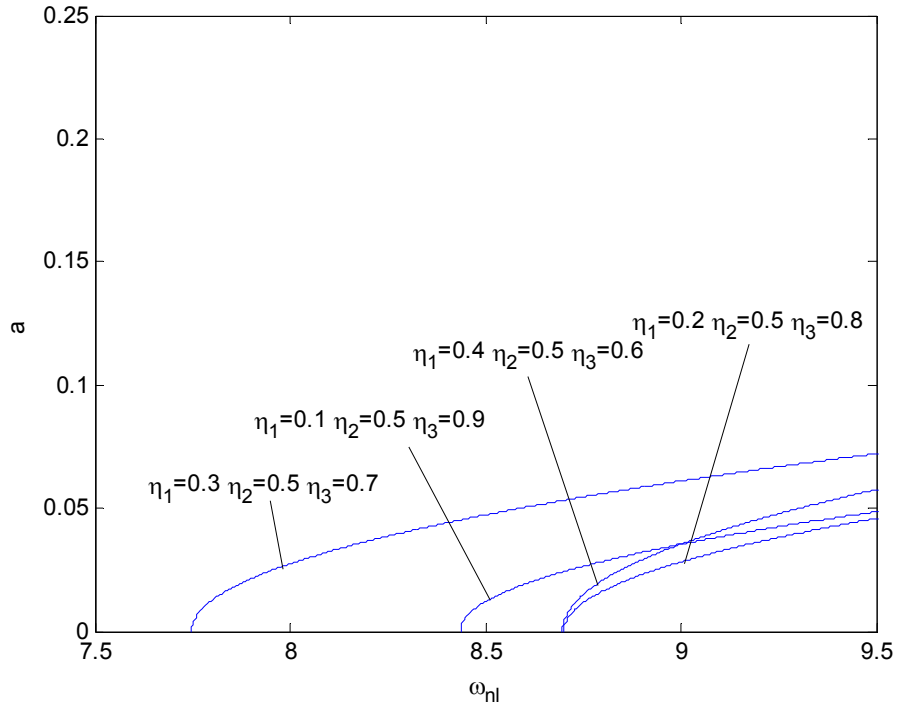
Şekil 3.134  $\eta_1=0.4$ - $\eta_2=0.5$   $\eta_3=0.6$   $v_0=0.5$  ve  $v_k$ 'nin değişik değerleri için  $\omega_{n1}$ -  $a$  grafiği (3. mod)



Şekil 3.135  $v_0=0.5$ ,  $v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve  $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$  değişik konumları için  $\omega_{n1}$ -  $a$  grafiği (1. mod)



Şekil 3.136  $v_0=0.5, v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve  $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$  değişik konumları için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (2. mod)



Şekil 3.137  $v_0=0.5, v_{k1} = v_{k2} = v_{k3} = 10$  ve  $(\eta_1-\eta_2-\eta_3)$  değişik konumları için  $\omega_{nl}$ - a grafiği (3. mod)



### 3.2.3 $\Omega$ 'nın 0'a Yakın Olduğu Durum:

Bu bölümde hız değişim frekansı  $\Omega$ 'nın sifıra yakınlığı araştırılmıştır;

$$\Omega = \varepsilon\sigma \quad (3.114)$$

olarak gösterilmiştir. Burada  $\sigma$  bir ayar parametresidir. Hız değişim frekansının sifıra yakınlığını gösterir. Bu durumda çözülebilirlik şartı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_1 A + (k_1 \cos \sigma T_1 + k_2 \sin \sigma T_1) - k_3 A^2 \bar{A} = 0 \quad (3.115)$$

$k_1$  ve  $k_2$  en genel halde şu şekilde tanımlanabilir.

$$k_1 = \frac{v_1 \Omega \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)}{2[i\omega \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + v_0 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)]} \quad (3.116)$$

$$k_2 = \frac{v_0 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y''_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + i\omega \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)}{i\omega \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right) + v_0 \left( \sum_{r=0}^n \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y'_{m+1} \bar{Y}_{m+1} dx \right)} \quad (3.117)$$

Bu durum için faz modülasyon denklemleri şu şekilde elde edilir.

$$D_1 a = -a(k_{1R} \cos \sigma T_1 + k_{2R} \sin \sigma T_1) \quad (3.118)$$

$$a D_1 \theta = -a(k_{1I} \cos \sigma T_1 + k_{2I} \sin \sigma T_1) + \frac{1}{4} k_{3I} a^2 \quad (3.119)$$

$$k_1 = k_{1R} + ik_{1I}, \quad k_2 = k_{2R} + ik_{2I} \quad (3.120)$$

Genlik katsayısını gösteren  $a$  şu şekilde elde edilir.

$$a = a_0 e^{(-k_{1R} \sin \sigma T_1 + k_{2R} \cos \sigma T_1) / \sigma} \quad (3.121)$$

Burada,  $k_{1R}$  ve  $k_{2R}$  parametreleri  $k_1$  ve  $k_2$  parametrelerinin reel kısımlarıdır. Bu durumda titreşimin genliklerinde zamanla büyük artışlar olmamakta ve genlikler sınırlı kalmaktadır. Sistem her zaman kararlıdır.

#### 4. SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu çalışmada, eksenel hareketli çok mesnetli şeridin nonlinear titreşimleri incelenmiştir. Hamilton prensibi ile hareket denklemleri çıkartılmıştır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon tekniklerinden çok zaman ölçekli metot kullanılmıştır. Perturbasyon analizinde 1 mertebesi lineer problemin çözümünü,  $\varepsilon$  mertebesi çözümü ise nonlinear problemin çözümünü vermektedir.

Lineer problemin çözümünden orta bölümde iki ve üç adet yay mesnetli duruma ait farklı mesnet durumları için birinci, ikinci ve üçüncü tabii frekanslar elde edilmiştir. Buna göre, aynı mesnet konumları ve aynı yay katsayısı için, eksenel hız ( $v_0$ ) değerinin artmasıyla frekans değerleri azalmaktadır. Kritik  $v_0$  hız değerinde ise tabii frekanslar '0' (sıfır)'a yakın olmaktadır.

Perturbasyon analizinde  $\varepsilon$  mertebesindeki denklemler nonlinear problemi oluşturmaktadır. Nonlinear problem hız değişim frekansının ( $\Omega$ ), sıfır ve tabii frekansın iki katından uzak olduğu, hız değişim frekansının sıfıra yakın olduğu ve hız değişim frekansının tabii frekansın iki katına yakın olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Hız değişim frekansı tabii frekansın iki katına yakın olması durumunda temel parametrik rezonansı oluşturmaktadır. Temel parametrik rezonans durumunda problemin basit ve basit olmayan iki çözümü mevcuttur. Basit çözümün geçerli olduğu bölgelerde genlik sıfırdır. Basit olmayan çözümün olduğu bölgelerde ise genlikler hız değişim frekansına bağlı olarak artmaktadır. Bu ise istenmeyen bir durumdur.

Nonlinear çözümde elde edilen sonuçlara göre aynı yay katsayısı için  $v_0$  artması ile basit olmayan çözümün ortaya çıktığı ve genliklerin arttığı bölgeleri genişlemektedir. Bu bölge  $v_0$ 'ın sıfıra yakın değerleri için çok küçük, kritik hızda ise en büyüktür. Gerçek problemlerde basit çözümün ortaya çıktığı ve genliklerin sınırlı olduğu kararlı bölgelerde çalışmak oldukça önemlidir. Çünkü basit olmayan çözümün aktif olduğu bölgelerde, şekillerde de gösterildiği gibi, titreşim genlikleri artmaktadır. Bu ise istenmeyen bir durumdur. Titreşim genliklerinin en yüksek olduğu durum birinci tabii frekans ile ilgili parametrik rezonans durumudur. Yüksek tabii frekanslar için de parametrik rezonans durumu oluşması mümkündür. Fakat bu durumlarda titreşim tabiatı gereği genlikler daha düşük olmaktadır. Tasarım için en tehlikeli bölgeler ise kritik hıza yakın olan bölgelerdir. Bu bölgelerde çalışıldığında hemen hemen bütün eksenel hız değerleri için çözümler kararsız hale gelmektedir. Mesnet sayısının artması basit olmayan çözümün ortaya çıktığı bölgeyi daraltmakta basit çözümün aktif olduğu bölgeyi genişletmektedir.

Perturbasyon analizinde  $\varepsilon$  mertebesindeki denklemlerin oluşturduğu nonlinear problemde, hız değişim frekansının ( $\Omega$ ) sıfırdan ve  $2\omega'$  dan uzak olduğu durumunda, nonlinear terimlerin tabii

frekansa katkılarını gösteren nonlineer frekans değerleri elde edilmiştir. Nonlineer frekans eğrilerinin sağa doğru yatması sertleşme tip (hardening type) davranışın göstergesidir.

Nonlineer terimler tabii frekans değerlerine etki etmekte ve bu frekans değerlerini arttırmaktadır. Bu artış yay katsayısına, eksenel hıza ve mesnedin sayısına bağlı olarak değişmektedir. Yay katsayısının, eksenel hızın ve ortadaki mesnet sayısının artması tabii frekansa gelen nonlineer etkileri arttırmaktadır.

Bu çalışmanın devamı olarak şu çalışmalar yapılabilir.

- 1- Mesnet tipi değiştirilebilir.
- 2- Tabii frekanslar arasında oluşabilecek 2:1 ve 3:1 iç rezonanslar incelenebilir.
- 3- Deneysel sonuçlar ile elde ettiğimiz sonuçlar ile yaklaşık analitik çözümler karşılaştırılabilir.
- 4- Toplam ve fark tipi kombinasyon rezonansları incelenebilir.

## 5. KAYNAKLAR

- [1] Nayfeh, A.H., Mook, D.T., Nonlinear Oscillations, Wiley, New York, 1979.
- [2] Hou, J.W., Yuan J.Z., "Calculation of Eigen value and Eigen vector derivates for nonlinear beam vibrations", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 26, 872-880, 1998.
- [3] McDonald, P.H., "Nonlinear dynamics of abeam", Computers and Structures, 40, 1315-1320, 1991.
- [4] Pakdemirli, M., Nayfeh, A.H., "Journal of Vibration and Acoustics", 166, 433-438, 1994.
- [5] Öz, H.R., Pakdemirli, M., Özkaya, E., Yılmaz, M., "Nonlinear vibrations of slight curved beam resting on a nonlinear elastic foundation", Journal of Sound and Vibration, 221(3), 1998.
- [6] Qaisi, M.I., "A power series solution for the nonlinear vibration of beams", Journal of Sound and Vibration, 199, 587-594, 1997.
- [7] Qaisi, M.I., "Nonlinear normal modes of a continuous systems", Journal of Sound and Vibration, 209, 561-569, 1998.
- [8] Özkaya, E., Pakdemirli, M., Öz, H.R., "Nonlinear vibrations of a beam-mass system under different boundary conditions", Journal of Sound and Vibration, 199, 679-696, 1997.
- [9] Karlık, B., Özkaya, E., Aydın, S., Pakdemirli, M., "Vibrations of beam-mass system using artificial neural Networks", 69, 339-347, 1998.
- [10] Özkaya, E., Pakdemirli, M., "Nonlinear vibrations of a beam-mass system with both ends clamped", 221, 491-503, 1999.
- [11] Özkaya, E., "Non-linear transverse vibrations of a simply supported beam carrying concentrated masses," Journal of Sound and Vibration, 257(3), 413-424, 2002.
- [12] Ulsoy, A.G., Mote, C.D. Jr., and Syzmani, R., "Principal developments in band saw vibration and stability research", Holz als Roh- und Werkstoff, 36, 273-280, 1978.
- [13] Wickert, J.A., Mote, C.D. Jr., "Current research on the vibration and stability of axially moving materials", Shock and Vibration Digest, 20(5), 3-13, 1988.
- [14] Wickert, J.A., Mote, C.D. Jr., "Classical vibration analysis of axially moving continua", Journal of Applied Mechanics, ASME 57, 738-744, 1990.
- [15] Wickert, J.A., "Non-linear vibration of a traveling tensioned beam", International Journal of Non-Linear Mechanics, 27, 503-517, 1992.
- [16] Miranker, W.L., "The wave equation in a medium in motion", IBM Journal of Research and Development 4, 36-42, 1960.
- [17] Pellicano, F., Zirilli, F., "Boundary layers and nonlinear vibrations in an axially moving beam", International Journal of Nonlinear Mechanics, 33, 691-711, 1998.
- [18] Mockenstrum, E.M., Perkins, N.C. and Ulsoy, A.G., "Stability and limit cycles of parametrically excited axially moving strings", Journal of Vibration and Acoustics, ASME 118, 346-350, 1994.

- [19] Pakdemirli, M., Ulsoy, A.G. and Ceranoğlu A., "Transverse vibration of an axially accelerating string", *Journal of Sound and Vibration*, 169, 179-196, 1994.
- [20] Pakdemirli, M. and Batan, H., "Dynamic stability of a constantly accelerating strip", *Journal of Sound and Vibration*, 168, 371-378, 1993.
- [21] Pakdemirli M. and Ulsoy, A.G., "Stability analysis of an axially accelerating string", *Journal of Sound and Vibration* 203(5), 815-832, 1997.
- [22] Nayfeh, A.H., Nayfeh, J.F., Mook, D.T., "On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities", *Nonlinear Dynamics*, 3, 145-162, 1992.
- [23] Pakdemirli, M., Nayfeh, S.A., Nayfeh, A. H., "Analysis of one-to-one autoparametric resonances in cables-discretization vs direct treatment", *Nonlinear Dynamics* 8, 65-83, 1995.
- [24] Pakdemirli, M., "A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities", *Mechanics Research Communications*, 21, 203-208, 1994.
- [25] Pakdemirli, M., Boyacı, H., "Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for nonlinear vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, 186, 837-845, 1995.
- [26] Pakdemirli, M., Boyacı, H., "The direct-perturbation method versus the discretization-perturbation method: Linear systems", *Journal of Sound and Vibration*, 199(5), 825-832, 1997.
- [27] Öz, H.R., Pakdemirli, M. and Özkaya, E., "Transition behaviour from string to beam for an axially accelerating material", *Journal of Sound and Vibration*, 215(3), 571-576, 1998.
- [28] Özkaya, E. and M. Pakdemirli, "Vibrations of an axially accelerating beam with small flexural stiffness," *Journal of Sound and Vibration*, 234(3), 521-535, 2000.
- [29] Pakdemirli, M. and Özkaya, E., "Lie Group theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem", *Journal of Sound and Vibration*, 230(4), 729-742, 2000.
- [30] Öz, H.R. and Pakdemirli, M. "Vibrations of an axially moving beam with time-dependent velocity", *Journal of Sound and Vibration*, 227(2), 239-257, 1999.
- [31] Öz, H.R., "On the vibrations of an axially travelling beam on fixed supports with variable velocity" *Journal of Sound and Vibration*, 239(3), 556-564, 2001.
- [32] Özkaya, E. and Öz, H.R., "Determination of stability regions of axially moving beams using artificial neural networks method," *Journal of Sound and Vibration*, 252(4), 782-789, 2002.
- [33] Chung, J., Han, C.S., Yi, K., "Vibration of an axially moving string with geometric non-linearity and translating acceleration", *Journal of Sound and Vibration*, 240, 4, 733-746, 2001.
- [34] Chen, L.-Q., Zhao, W.-J., "A numerical method for simulating transverse vibrations of an axially moving string", *Applied Mathematics and Computation*, 160, 2, 411-422, 2005.
- [35] Pakdemirli, M., Öz, H.R., "Infinite mode analysis and truncation to resonant modes of axially accelerated beam vibrations", *Journal of sound and Vibration*, 1052-1074, 311, 2008.
- [36] Nayfeh, A.H. (1981): *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley, New York.

## 6. ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ahmet KESİMLİ  
 Doğum Tarihi : 09.09.1983  
 Doğum yeri : Manisa  
 Uyuşu : T.C.  
 Medeni Durum : Evli

### Eğitim

- Eylül 2007–Ağustos 2010, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, *Yüksek Lisans*, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Teorisi ve Dinamiği.
- Eylül 2001–Eylül 2006, Afyon Kocatepe Üniversitesi, *Lisans*, Uşak Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü.
- Eylül 1997–Haziran 2001, Cumhuriyet Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı), Manisa.

### İş Tecrübeleri

- Şubat 2010 – ... , *Araştırma Görevlisi*, Hitit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Çorum.
- Ağustos 2008–Kasım 2009, *Proje Araştırma Görevlisi (TÜBİTAK 107M302)*, Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Manisa.
- Eylül 2007 – Haziran 2008, *Proje Araştırma Görevlisi (TÜBİTAK 104M427)*, Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Manisa.
- Mart 2007 – Ağustos 2007, Yetkili Makine Mühendisi, Çağlar Yapı Malzemeleri ve Doğalgaz, Manisa.
- Temmuz 2006 – Şubat 2007, Yetkili Makine Mühendisi, Mekanik Mühendislik ve Doğalgaz, Manisa.