

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUVVETLİ NONLİNEER DİNAMİK PROBLEMLERİNİ ÇÖZMEDE  
ALTERNATİF PERTURBASYON YÖNTEMLERİNİN  
GELİŞTİRİLMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Makina Yüksek Mühendisi Mustafa Mehmet Fatih KARAHAN**

**Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği**

**Programı : Makina Teorisi ve Dinamiği**

**MANİSA 2010**

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUVVETLİ NONLİNEER DİNAMİK PROBLEMLERİNİ ÇÖZMEDE  
ALTERNATİF PERTURBASYON YÖNTEMLERİNİN  
GELİŞTİRİLMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Makina Yüksek Mühendisi Mustafa Mehmet Fatih KARAHAN**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22.12.2010**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 06.01.2011**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ**

**Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ramazan KARAKUZU**

**Prof. Dr. Erdoğan ÖZKAYA**

**Prof. Dr. Hakan BOYACI**

**Doç. Dr. Gökhan ALTINTAŞ**

**MANİSA 2010**

## İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
SEMBOL LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÇİZELGELER LİSTESİ	vi
KISALTMALAR LİSTESİ	vii
TEŞEKKÜR	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Genel Bilgiler ve Yapılmış Çalışmalar	1
1.2. Bu Çalışmadaki Yaklaşım	2
2. MÜHENDİSLİKTE PERTURBASYON YÖNTEMLERİ	4
2.1. Giriş	4
2.2. Seküler Terim	5
2.3. Lindstedt Poincare Tekniği	7
2.4. Renormalizasyon Yöntemi	9
2.5. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	10
2.6. Ortalama Yöntemi	12
2.7. Asimptotik Açılımların Uyumu Yöntemi	12
3. TİTREŞİM HAREKETİ VE MATEMATİKSEL MODELLEME	14
3.1. Titreşim Hareketinin Tanımı ve Sınıflandırılması	14
3.2. Titreşim Hareketinin Matematiksel Modellenmesi	15
4. MULTIPLE SCALES LINDSTEDT POINCARE (MSLP) YÖNTEMİ	18
4.1. Yöntemin Uygulama Basamakları	18

4.2. Uygulama Problemi 1 – Sönümlü Lineer Salınım Denklemi	20
4.2.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	20
4.2.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	22
4.2.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması	24
4.3. Uygulama Problemi 2 – Duffing Denklemi	25
4.3.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	25
4.3.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	28
4.3.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması	31
4.4. Uygulama Problemi 3 – Sönümlü Kübik Nonlineer Sistem	33
4.4.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	33
4.4.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	36
4.4.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması	39
4.5. Uygulama Problemi 4 – Kuadratik ve Kübik Nonlineer Sistem	42
4.5.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	42
4.5.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	45
4.5.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması	48
4.6. Uygulama Problemi 5 – Sönümlü ve Zorlamalı Kübik Nonlineer Sistem	55
4.6.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	55
4.6.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	58
4.6.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması	62
5. MULTIPLE SCALES LINDSTEDT POINCARÉ (MSLP) YÖNTEMİNİN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI	67
5.1 Genel Operatör Notasyonu	67
5.2 Yöntemin Uygulama Basamakları	68
5.2.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	69
5.2.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	72
5.3. Uygulama – Kuadratik ve Kübik Nonlineer Kısmi Diferansiyel Denklem	76
5.3.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem	76
5.3.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi	78
5.3.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması	79
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	81
KAYNAKLAR	82

## SEMBOL LİSTESİ

$A_n, \overline{A_n}$	: $n$ . moda ait kompleks genlikler ve eşlenikleri
$a_n$	: $n$ . moda ait genlik
$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$	: Sınır şartlarını belirleyen lineer operatörler
$\mathbf{C}$	: Kübik nonlineer operatör
$\mathbf{Q}$	: Kuadratik nonlineer operatör
$T_0$	: Hızlı zaman ölçeği
$T_1, T_2$	: Yavaş zaman ölçekleri
$Y_n, \overline{Y_n}$	: $n$ . moda ait şekil fonksiyonu ve eşleniği
$\phi_1, \phi_2$	: Şekil fonksiyonları
$\varepsilon$	: Küçük boyutsuz parametre (Perturbasyon parametresi)
$\mu$	: Boyutsuz sönüm katsayısı
$\omega_0$	: Tabii frekans
$\omega$	: Dönüşüm frekansı
$\Omega$	: Zorlama kuvvetinin frekansı
$\sigma$	: Ayar parametresi
$\beta, \gamma$	: Fazlar

## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1. Zorlama kuvveti etkisinde kütle-sönüm- yay sistemi	16
Şekil 4.1. Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1 (a_0 = 1, \omega_0 = 1)$	32
Şekil 4.2. Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10 (a_0 = 1, \omega_0 = 1)$	32
Şekil 4.3. Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100 (a_0 = 1, \omega_0 = 1)$	33
Şekil 4.4. Sönümlü kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\alpha = 1 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$	40
Şekil 4.5. Sönümlü kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\alpha = 10 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$	41
Şekil 4.6. Sönümlü kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\alpha = 50 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$	41
Şekil 4.7. Sönümlü kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\alpha = 100 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$	42
Şekil 4.8. Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1 (a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$	50
Şekil 4.9. Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10 (a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$	50
Şekil 4.10. Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100 (a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$	51

Şekil 4.11. Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\alpha_2 = 10$ ( $\varepsilon = 1, a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1$ )	51
Şekil 4.12. Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\alpha_2 = 100$ ( $\varepsilon = 1, a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1$ )	52
Şekil 4.13. Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 100$ ( $\varepsilon = 1, a_0 = 1, \omega_0 = \pi$ )	52
Şekil 4.14. Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1, \alpha=1, f=5, \omega_0=2.5, \mu=0.5$ )	64
Şekil 4.15. Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1, \alpha=100, f=5, \omega_0=2.5, \mu=0.5$ )	64
Şekil 4.16. Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1, \alpha=1000, f=5, \omega_0=2.5, \mu=0.5$ )	65
Şekil 4.17. Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1, \alpha=1, f=10, \omega_0=2.5, \mu=0.2$ )	65
Şekil 4.18. Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler (noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1, \alpha=1, f=20, \omega_0=2.5, \mu=0.2$ )	66

## ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4.1. Tam periyot ile yaklaşık periyotların karşılaştırılması  
( $\omega_0 = \pi$ ,  $a_0 = 1$ )

55



## KISALTMALAR LİSTESİ

<i>k.e.</i>	: Kompleks (karmaşık) eşlenik
<i>S.O.T.</i>	: Seküler olmayan terimler
MSLP	: Multiple Scales Lindstedt Poincare
MS	: Çok zaman ölçekli yöntem ( Multiple Scales )

## TEŞEKKÜR YAZISI

Öncelikle bugünlere gelmemde maddi manevi hiç bir fedakarlıktan kaçınmayan anneme ve babama en içten sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ailemin diğer fertleri değerli ablam ve ağabeyime her zaman yanımda olup bana sevgi ve desteklerini verdikleri için sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, gerek insani, gerek bilim adamı vasıflarıyla her zaman örnek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ'nin yönlendirmeleri, çabaları ve destekleri ile meydana gelmiştir. Saygıdeğer Hocam'ın üzerimde emekleri büyüktür. Kendilerinin öğrencisi olmak benim için her zaman bir gurur vesilesi olacaktır. Sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimime başladığım günden itibaren her zaman ilgisini ve desteğini esirgemeyen yeri geldiğinde bir ağabey sıcaklığı veren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Erdoğan ÖZKAYA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimime başladığım günden itibaren sevgisini ve desteğini hiç bir zaman esirgemeyen, tez yazımında büyük emeği olan dostum Yrd. Doç. Dr. B. Burak ÖZHAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Hakan BOYACI'ya vermiş olduğu lisansüstü derslerinden, ilgilerinden ve desteklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme jürimde olan Doç. Dr. Gökhan ALTINTAŞ'a verdiği desteklerden dolayı içten teşekkürlerimi sunarım.

Adlarını yazamadığım diğer bütün hocalarıma, araştırma görevlisi arkadaşlarıma, Fen Bilimleri Enstitüsü ve Mühendislik Fakültesi personeline de teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar üzerimde emeği olan ve adlarını burada yazamadığım bütün öğretmenlerime, dostlarıma ve yakınlarıma içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma 108M490 no'lu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Mustafa Mehmet Fatih KARAHAN

## ÖZET

Bu çalışmada kuvvetli nonlinear sistemler için de geçerli çözümler verebilecek yeni bir perturbasyon tekniği (MSLP) geliştirilmiştir. Bu yeni yöntem çok zaman ölçekli yöntem (MS) ve Lindstedt Poincare (LP) tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır.

Öncelikle yeni yöntemin uygulama basamakları ele alınmıştır. Ardından sırasıyla, sönümlü lineer salınım denklemleri, Duffing Denklemleri, sönümlü kübik nonlinear sistem, kuadratik ve kübik nonlinear sistem uygulama problemleri ele alınmış ve bu uygulamalar için çok zaman ölçekli yöntem çözümleri, MSLP çözümleri ve sayısal çözümler karşılaştırılmıştır. Kuvvetli nonlinear sistemler için MSLP yöntem çözümlerinin sayısal çözümlerle uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

İkinci olarak zorlamalı titreşimler ele alınmıştır. Yeni yöntem, sönümlü ve zorlamalı kübik nonlinear sisteme uygulanmıştır. MSLP yöntem çözümleri, çok zaman ölçekli yöntem çözümleri ve sayısal çözümler ile karşılaştırılmıştır. Kuvvetli nonlinear sistemler için, MSLP yönteminin frekans tepki grafiğinin sayısal sonuçlar ile uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

Son olarak kısmi diferansiyel denklemlere uygulamalar üzerinde durulmuştur. Genel operatör notasyonu kullanılarak yeni yöntem kuadratik ve kübik nonlinear kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. MSLP ve çok zaman ölçekli yöntem çözümleri karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler** : Kuvvetli Nonlinear Sistemler, Perturbasyon Yöntemleri, Lindstedt Poincare Tekniği, Çok Zaman Ölçekli Yöntem, Sayısal Çözümler

## ABSTRACT

In this work, a new perturbation method, Multiple Scales Lindstedt Poincare method, (MSLP) producing valid solutions for strong nonlinear systems is developed. The new method is an integration of Method of Multiple Scales (MS) and Lindstedt-Poincare (LP) Method.

The outline of the new method and the guidelines are depicted first. Then new method is applied to linear damped vibration equation, Duffing equation, damped cubic nonlinear equation and an equation with quadratic and cubic nonlinearities. Solutions of multiple scales method and MSLP method are contrasted with the numerical solutions. MSLP method produced solutions with good agreement with the numerical solutions for strongly nonlinear systems.

Forced vibrations are considered next. The new method is applied to forced vibrations of cubic nonlinear equation with damping. MSLP solutions are contrasted with multiple scales method and numerical simulations. For strongly nonlinear systems, frequency response curves of MSLP method and numerical solutions are in good agreement.

Finally, partial differential equations are considered. Using the general operator notation, the new method is applied to quadratic and cubic nonlinear partial differential equation. Solutions of Multiple Scales method and MSLP method are contrasted.

**Keywords:** Strongly Nonlinear Systems, Perturbation methods, Lindstedt Poincare method, Multiple Scales method, Numerical Solutions

## 1. GİRİŞ

Bu bölümde perturbasyon yöntemleri ile ilgili olarak genel bilgiler verilecek, yapılmış çalışmalar ve bu çalışmadaki yaklaşım üzerinde durulacaktır.

### 1.1. Genel Bilgiler Ve Yapılmış Çalışmalar

Perturbasyon yöntemleri yaklaşık bir asırdır fiziksel problemlerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmakta yaygın olarak kullanılmaktadır. Cebirsel denklemler, integraller, diferansiyel denklemler, fark denklemleri, diferansiyel fark denklemleri ve integro- diferansiyel denklemler, Perturbasyon yöntemleri kullanılarak, yaklaşık olarak çözülmektedir. Isı transferinden, mekanik titreşimlere, katı cisimlerin mukavemetinden akışkanlar mekaniğine kadar birçok fiziksel probleme ait matematik model bu yöntemler kullanılarak başarılı olarak analiz edilmiştir. Perturbasyon yöntemi doğrusal ve/veya doğrusal olmayan (bundan sonra lineer ve/veya nonlineer olarak anılacaktır) sistemlere uygulanabilir. Perturbasyon yöntemlerinde çözüm, fiziksel küçük bir parametrenin seri açılımı şeklinde ifade edilir. "Doğrudan (Direkt) Açılım" olarak adlandırılan en basit perturbasyon tekniği birçok modelde sıkıntıya sebep olmakta, Bölüm 2'de anlatılacağı üzere zaman içerisinde artan (patlamalara yol açan) çözümler vermektedir. Bu yüzden gerçek çözümlerle daha uyumlu çözümler elde edebilmek için birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Lindstedt-Poincare Tekniği, Renormalizasyon Yöntemi, Çok Zaman Ölçekli Yöntem, Ortalama Yöntemi ve Asimptotik Açılımların Uyumu Yöntemi adları ile anılan çeşitli perturbasyon yöntemleri zaman içerisinde geliştirilmiştir.

Perturbasyon yöntemlerinin en önemli kısıtlaması denklemde küçük bir parametreye ihtiyaç duyulması ya da denkleme bu küçük parametrenin yapay olarak eklenmesidir. Bu fiziksel parametre genelde nonlineer terimlerin başında belirir ki bu da nonlineer terimlerin merteye olarak küçük olmasını sağlar. Bu durumda çözümler zayıf nonlineer sistemler için geçerli olmaktadır. Fiziksel parametrenin büyük olduğu kuvvetli nonlineer sistemler için bu çözümler geçerli olmamaktadır. Perturbasyon yöntemlerinin büyük parametreler için geçerli olabilmesi için son zamanlarda yeni yöntem geliştirme çalışmaları yapılmaya başlanmıştır.

Kuvvetli nonlineer sistemler için geçerli perturbasyon çözümleri elde etmek üzere son zamanlarda bazı çalışmalar yapılmıştır. Hu ve Xiong [1], Duffing denklemini kullanarak Lindstedt Poincare tekniğini iki farklı şekilde ele almış ve sonuçları karşılaştırmışlardır. Öncelikle denklemi klasik yöntem ile çözmüşlerdir. Daha sonra perturbasyon açılımında bazı değişiklikler (modifikasyonlar) yaparak (dönüşüm frekansı yerine doğal frekansı seriye açarak) çözümler elde etmişlerdir. Elde edilen çözümleri sayısal çözümle karşılaştırmış ve perturbasyon parametresinin çok büyük değerleri için de uygun çözümler elde etmişlerdir. Benzer bir

çalışmada Duffing denklemi için yaklaşık ve tam çözümlü frekanslar karşılaştırılmıştır [2]. Aynı denklem, lineer (doğrusal) frekansın sıfır olma durumu için de ele alınmıştır [3]. Elde edilen periyot (devir) tam çözüm periyotları ile büyük parametreler için karşılaştırılmış ve iyi bir yakınsama sağlanmıştır.

Perturbasyon çözümlerinin kuvvetli nonlinear sistemlerde de geçerli sonuçlar vermesi için alternatif birçok teknik geliştirilmeye çalışılmaktadır. Doğrusallaştırılmış (lineerize edilmiş) perturbasyon yöntemi [4-6], parametrelerin açılımı yöntemi [7-8], modifiye edilmiş Lindstedt Poincare yöntemi [9-11], iterasyon yöntemi [12-14] bunlara örnek olarak verilebilir.

Yakın zamanda Pakdemirli ve diğ. [15] kuvvetli nonliner sistemler için geçerli çözümler verebilecek yeni bir perturbasyon tekniği geliştirmişlerdir. Bu yeni teknik çok zaman ölçekli yöntem ve [1-2]'de önerilen frekans açılımı kullanılarak geliştirilen Lindstedt Poincare tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır. Bazı koşullar altında Lindstedt Poincare tekniği düzgün rejim çözümlerini belirlemede iyi sonuçlar verirken, çok zaman ölçekli yöntem geçiş çözümlerini belirlemede iyi sonuçlar vermektedir [17]. Bu iki yöntemin birleştirilmesi ile her birinin avantajları tek bir yöntemde toplanmaktadır. MSLP<sup>1</sup> olarak adlandırılan bu yeni yöntem lineer sönümlü salınım denkleminde, sönümlü ve sönümsüz Duffing denklemlerine uygulanmıştır. Lineer sönümlü salınım denkleminin tam çözümü MSLP yöntemi ile bulunmuştur. Böylelikle yarı analitik bir yöntem olan perturbasyon yöntemi kullanılarak tam çözüm elde edilmiştir. Bu yeni yöntem sönümlü ve sönümsüz Duffing denkleminde uygulanıp sayısal çözümler ile karşılaştırıldığında kuvvetli nonlinear sistemler için çok daha iyi sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.

Pakdemirli ve Karahan [16], MSLP yöntemini ikinci ve üçüncü dereceden doğrusal olmayan (bundan sonra kuadratik ve kübik nonlinear olarak adlandırılacaktır) denkleme uygulamışlardır. Yöntemin kuvvetli nonlinear sistemler için iyi sonuçlar verdiği bir kez daha doğrulanmıştır.

## 1.2. Bu Çalışmadaki Yaklaşım

Bu çalışmada öncelikle kuvvetli nonlinear sistemler için de geçerli çözümler verebilecek yeni bir perturbasyon tekniği geliştirilmiştir. Bu yeni yöntem çok zaman ölçekli yöntem ve Lindstedt Poincare tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır. Lindstedt Poincare tekniğinde bazı dönüşümler ve açılım tercihleri yapılarak kuvvetli nonlinear sistemlerde geçerli olan çözümler yapılmıştır. Ancak Lindstedt Poincare tekniği sabit genlikli çözümlerde işe yaramaktadır. Genliğin zamanla değiştiği problemlerde kuvvetli nonlinear sistemlere ait perturbasyon çözümleri elde edilememiştir. Bu çalışmada çok zaman ölçekli yöntemde bazı iyileştirmeler

---

<sup>1</sup> Çok Zaman Ölçekli Yöntem ile Lindstedt Poincare tekniğinin birleşimi olan bu yeni yöntem bundan sonra İngilizce karşılığı olan "Multiple Scales Lindstedt Poincare" isimlerinin baş harflerinden oluşan "MSLP yöntemi" adı ile anılacaktır.

yapılarak hem sabit genlik hem de değişken genlik durumlarında geçerli olabilecek fiziksel çözümler üretilmiştir.

Yukarıda bahsedildiği üzere geliştirilen yeni yöntem, çok zaman ölçekli yöntem (Multiple Scales) ve Lindstedt Poincare tekniğinin birleşiminden meydana gelmektedir. Bu sebeple yeni yöntem Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) yöntemi olarak adlandırılmıştır.

MSLP yöntemi, Bölüm 4'te aşağıda verilen ve her biri adi diferansiyel denklem yapısında olan modellere uygulanmıştır.

- Lineer sönümlü salınım modeli
- Duffing denklemi
- Sönümlü kübik nonlinear model
- Kuadratik ve kübik nonliner model
- Zorlamalı sönümlü kübik nonlinear model

Denklemler, büyük perturbasyon parametresi için çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yöntemi ile çözülmüş ve sayısal çözümler ile karşılaştırma yapılmıştır.

Ardından MSLP yöntemi, Bölüm 5'te genel operatör notasyonu [21-23] kullanılarak kuadratik ve kübik nonlinear kısmi türevli (kısmi diferansiyel) denkleme uygulanmıştır.

## 2. MÜHENDİSLİKTE PERTURBASYON YÖNTEMLERİ

Bu bölümde perturbasyon teorisi ile ilgili temel bilgiler verilecek ve seküler terim tanımlanacaktır. Ardından birer perturbasyon yöntemi olan, Lindstedt Poincare, renormalizasyon, çok zaman ölçekli, ortalama, asimptotik açılımların uyumu yöntemleri hakkında bilgiler verilecektir.

### 2.1. Giriş

Perturbasyon teorisi ilk olarak uygulamalı matematiğin en eski kullanım alanlarından olan gök mekaniği (gökbilim) çalışmalarında ortaya konulmuştur [24]. Poincare 1899 yılında bu yöntemi kullanarak gökmekaniği konusu içerisinde nonlineer dinamik çalışmaları yapmıştır. Günümüze gelindiğinde, çıkışındaki temel düşünceye bağlı kalınarak, perturbasyon teorisinin kullanım alanı oldukça genişlemiştir.

Nonlineer cebirsel veya diferansiyel denklemler kullanılarak modellenen sistemlere nonlineer sistemler denir [25]. Nonliner sistemler ile bir çok mühendislik disiplininde karşılaşılır. Nonlineer diferansiyel denklemler kullanılarak yapılan modellemelerde genelde ortaya çözülmesi güç mühendislik problemleri çıkar. Nonlineer diferansiyel denklemler yardımıyla modellenen denklemlerin tam çözümünü bulmak oldukça zordur ki bu problemlerin çoğu zaman tam çözümü bulunamayabilir. Bu durumda perturbasyon yöntemlerini de içeren yaklaşık çözüm yöntemleri (analitik veya yarıanalitik yöntemler) devreye girer. En genel anlamda tanımlamak gerekirse perturbasyon yöntemleri küçük  $\varepsilon$  parametresini içerir. Bu küçük parametre, örneğin, bir akışkanlar mekaniği problemi olan Navier-Stokes denklemlerinde Reynolds sayısı ile ilişkilidir. Bu parametre, denklem içerisinde, düşük Reynolds sayısı değerlerinde sayının kendisi, yüksek Reynolds sayısı değerlerinde ise  $1/Re$  olarak tanımlanabilir. Denklemin çözümü olan fonksiyon,  $\varepsilon$  parametresine bağlı olarak bir açılıma tabi tutulur. Denklemi sağlaması gereken çözüm denklemde yerine konur ve seriden elde edilen her bir mertebe ayrı bir eşitlik olarak değerlendirilip bu eşitliklerin çözümleri üzerinde durulur. Bunu genel bir matematiksel yapıda ifade etmek gerekirse,

$$L(x) + \varepsilon N(x) = 0 \quad (2.1)$$

denklemini ele alınabilir. Burada L ve N lineer ve nonlineer terimleri içeren operatörlerdir. Verilen denklemin

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots \quad (2.2)$$



şeklinde bir yaklaşık çözümü var ise ve bu çözüm denklem (2.1)'de yerine konulursa mertebe ayrıştırmasının ardından

$$O(1) : L(x_0) = 0 \quad (2.3)$$

$$O(\varepsilon) : L(x_1) = -N(x_0) \quad (2.4)$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki lineer homojen denklem (2.3) ve lineer homojen olmayan denklemlerin (2.4) çözümleri bulunabilir. Görüldüğü üzere perturbasyon yöntemi ile çözümü zor görünen nonlinear bir denklem, lineer denklemlere dönüştürülebilmiştir. Bu tanımlama en temel anlamda perturbasyon yönteminin amacını ve uygulandığını göstermektedir. Her zaman bu düzenlilikte bir çözüm algoritması yetmeyebilir. Problemin yapısına göre çözüm için kullanılabilecek bir çok perturbasyon yöntemi geliştirilmiştir. Çözümde Denklem (2.2) ile tanımlanan seri genelde yakınsak değildir. Çoğunlukla asimptotik serilerdir. Eğer bu seri çözümleri bir bölge boyunca geçerli ise buna düzenli (regular) perturbasyon denir. Eğer bahsedilen seri sadece sınırlı bir aralıkta tanımlı ise buna da tekil (singular) perturbasyon denir[26]. Bir başka deyişle,  $\varepsilon \rightarrow 0$  değerine giderken yakınsak çözüm serisini haiz ve yaya açılımının geçerli olduğu problemler düzenli (regular) perturbasyon, serinin yakınsak olmadığı dolayısıyla yaya açılımının geçerli sonuç vermediği durumlar için tekil (singular) perturbasyon tanımlamaları yapılmıştır.

Düzenli (Regular) perturbasyon yöntemleri sadece bazı kabuller altında özel problemlerde uygun çözümler veren yöntemlerdir. Çözümün bir kuvvet serisi olarak düşünülmesi, bu serinin (çözümün) denklemde ve başlangıç-sınır şartlarında yerine konulması ve gerekli ayrıştırmalar yapıldıktan sonra her mertebeye ait problemin çözülmesi şeklinde özetlenebilir. Cebirsel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerde uygulama alanları vardır. Tekil perturbasyonlar ise düzenli perturbasyonun geçerli olmadığı durumlarda tanımlanır. Aşağıda öncelikle perturbasyon yöntemlerinin uygulamalarında karşılaşılan seküler terim kavramı verilecek ardından değişik problem tiplerine göre ortaya konulmuş perturbasyon yöntemleri sıralanacaktır.

## 2.2. Seküler Terim

Aşağıdaki denklem ele alınırsa

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.5)$$

bu denkleme perturbasyon yöntemine göre

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (2.6)$$

açılımı önerilir. Denklemin lineer hali

$$\ddot{u} + u = 0 \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Lineer denklemin çözümü

$$u_0 = a \cos t \quad (2.8)$$

şeklindedir.  $\varepsilon$  mertebesindeki denklem,

$$\ddot{u}_1 + u_1 + a^3 \cos^3 t = 0 \quad (2.9)$$

halini alır. Trigonometrik ifade için

$$\cos^3 t = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t \quad (2.10)$$

açılımı yapılır.

$\frac{1}{4} \cos 3t$  terimine ait özel çözüm  $-\frac{1}{32} \cos 3t$  ifadesini getirirken,  $\frac{3}{4} \cos t$  terimi bazı sıkıntıları

beraberinde getirir. Bu terime ait özel çözüm

$$\frac{3}{4} (t \sin t + 2 \cos t) \quad (2.11)$$

şeklindedir. Bu terimde görüldüğü üzere  $t$  nin artışı ifadeyi sınırsız bir şekilde artıracaktır. Böylece çözümlerde uzun zaman geçtiğinde patlama ortaya çıkacaktır. İşte bu artışın kaynağı olan

$$\frac{3}{4}t \sin t \quad (2.12)$$

ifadesi seküler terim olarak tanımlanır.

### 2.3. Lindstedt Poincare Tekniği

Bu teknikte çözümün periyodik olduğu varsayımı ile hareket edilir. İlk olarak diferansiyel denklemdeki zaman değişkeninde bir dönüşüm yapılır ve bu dönüşümdeki keyfi parametre de seriye açılarak seküler terimler yok edilir. Örnek olarak Duffing denklemi ele alınabilir.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.13)$$

İlk olarak denkleme  $\tau = \omega t$  zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.14)$$

elde edilir. Burada ( )' gösterimi, yeni zaman değişkeni olan  $\tau$ 'ya göre türevi ifade eder.

Bağımlı değişken ve dönüşüm frekansı,

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \dots \quad (2.15)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (2.16)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılımlar denklem (2.13)'e yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılırsa

$$O(1) : \omega_0^2 u_0'' + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (2.17)$$

$$O(\varepsilon) : \omega_0^2 u_1'' + \omega_0^2 u_1 = -2\omega_0 \omega_1 u_0'' - u_0^3 \quad (2.18)$$

elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm ise

$$u_0 = a \cos(\tau + \beta) \quad (2.19)$$

şeklinde elde edilir. Birinci mertebe çözüm, denklem (2.18)'e yerleştirilirse

$$u_1'' + u_1 = (2a\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}a^3) \cos(\tau + \beta) - \frac{1}{4}a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad (2.20)$$

ifadesi elde edilir. Bölüm 2.2'de bahsedildiği üzere  $\cos(\tau + \beta)$  ifadesi yok edilmezse  $\tau \sin(\tau + \beta)$  patlamasına yol açacağından

$$2a\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}a^3 = 0 \quad (2.21)$$

seçilir. Buradan

$$\omega_1 = \frac{3}{8\omega_0} a^2 \quad (2.22)$$

elde edilir. Frekans ise

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3}{8\omega_0} a^2 \quad (2.23)$$

şeklinde elde edilir.  $\varepsilon$  mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad (2.24)$$

Yaklaşık çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} u &= u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) \\ &= a \cos(\tau + \beta) + \varepsilon \frac{1}{32} a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Orijinal zaman değişkeni açısından çözüm

$$u = a \cos\left[\left(\omega_0 + \varepsilon \frac{3}{8\omega_0} a^2\right)t + \beta\right] + \varepsilon \frac{1}{32} a^3 \cos\left[3\left(\omega_0 + \varepsilon \frac{3}{8\omega_0} a^2\right)t + 3\beta\right] \quad (2.26)$$

şeklinde elde edilir.

#### 2.4. Renormalizasyon Yöntemi (Üniformizasyon)

Bu yöntemde denklem yaya açılımına tabi tutulur. Seküler terimler zaman dönüşümü ile yok edilir. Lindstedt Poincare yönteminden farkı zaman dönüşümünün en son aşamada uygulanmasıdır. Örnek mühendislik model olarak aşağıdaki Duffing denklemi alınabilir.

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.27)$$

Denklemin yaya açılımı çözümü aşağıdaki gibidir.

$$u = a \cos(t + \beta) + \varepsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin(t + \beta) + \frac{1}{32} \cos(3t + 3\beta)\right] + \dots \quad (2.28)$$

Denklemden zaman terimi için

$$t = \omega^{-1} \tau = (1 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^{-1} \tau \cong \tau(1 - \varepsilon \omega_1 + \dots) = \tau - \varepsilon \omega_1 \tau \quad (2.29)$$

açılımı yapılır ve yaya açılımı çözümü aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u = a \cos(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) + \varepsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} (\tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) \sin(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) + \frac{1}{32} \cos(3\tau + 3\beta - 3\varepsilon \omega_1 \tau + \dots)\right] + \dots \quad (2.30)$$

Trigonometrik ifadeler, Taylor açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\cos(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) = \cos(\tau + \beta) + \varepsilon \omega_1 \tau \sin(\tau + \beta) + \dots \quad (2.31)$$

$$\sin(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) = \sin(\tau + \beta) - \varepsilon \omega_1 \tau \cos(\tau + \beta) + \dots \quad (2.32)$$

$$\cos(3\tau + 3\beta - 3\varepsilon\omega_1\tau + \dots) = \cos(3\tau + 3\beta) + 3\varepsilon\omega_1\tau \sin(3\tau + 3\beta) + \dots \quad (2.33)$$

Yukardaki açılımlar kullanılarak denklem (2.30),

$$u = a \cos(\tau + \beta) + \varepsilon[(\omega_1 a - \frac{3}{8}a^3)\tau \sin(\tau + \beta) + \frac{1}{32}a^3 \cos(3\tau + 3\beta)] + \dots \quad (2.34)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler terimin yok edilmesi için

$$\omega_1 a - \frac{3}{8}a^3 = 0 \quad (2.35)$$

seçilir. Buradan

$$\omega_1 = \frac{3}{8}a^2 \quad (2.36)$$

elde edilir. Yaklaşık çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u = a \cos(\tau + \beta) + \frac{1}{32}\varepsilon a^3 \cos(3\tau + 3\beta) + \dots \quad (2.37)$$

Orijinal zaman değişkeni açısından çözüm

$$u = a \cos[(1 + \varepsilon \frac{3}{8}a^2)t + \beta] + \varepsilon \frac{1}{32}a^3 \cos[3(1 + \varepsilon \frac{3}{8}a^2)t + 3\beta] \quad (2.38)$$

şeklinde elde edilir.

## 2.5. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Lindstedt Poincare tekniğinde elde edilen çözümlerin yapısı

$$u(t; \varepsilon) = u(t, \varepsilon t; \varepsilon) \quad (2.39)$$

şeklinde dir. Bu yöntemde ikinci mertebeden ileri terimler dikkate alınırsa çözüm fonksiyonu

$$u(t; \varepsilon) = u(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots; \varepsilon) \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilebilir. Çözüm içindeki değişkenler için

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \dots, T_n = \varepsilon^n t \quad (2.41)$$

tanımlamaları yapılırsa çözüm fonksiyonu

$$u(t; \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n; \varepsilon) \quad (2.42)$$

şeklinde gösterilir. Burada  $T_0$  hızlı zaman ölçeği,  $T_1$  yavaş zaman ölçeği,  $T_2$  daha yavaş zaman ölçeği adını alır. Görüldüğü üzere zaman değişkeninin önüne küçük perturbasyon parametresinin kuvvetleri gelerek zaman ölçeklendirilmektedir.

Zaman birimi açısından ele alınacak olursa  $\varepsilon = \frac{1}{60}$  kabulü ile,  $T_0$  saniye,  $T_1$  dakika,  $T_2$  saat

olarak tanımlanabilir. Denklemden bağımsız değişkene göre alınan türev ölçeklendirme sonrasında aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (2.43)$$

Burada

$$D_n \approx \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (2.44)$$

tanımlaması yapılırsa, türevler

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (2.45)$$

şeklinde ifade edilir. Bölüm 4'de yöntemin uygulamaları birçok model üzerinde gösterilmiştir.

## 2.6. Ortalama Yöntemi

Ortalama yöntemi içerisinde Van Der Pol Tekniği, Krylov-Bogoliubov Tekniği ve genelleştirilmiş ortalama yöntemi vardır. Bir örnek üzerinden genel anlamda ele alınırsa,

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.46)$$

diferansiyel denkleminde

$$\varepsilon = 0 \quad (2.47)$$

ise denklemin çözümü

$$u(t) = a \cos(t + \beta) \quad (2.48)$$

yapısındadır.  $a = a(t)$   $\beta = \beta(t)$  kabul edilir ve çözüm fonksiyonu bunlara göre türevlenip denkleme konulup gerekli matematiksel işlemler yapılırsa (polinom eşitlikleri vb. kullanılarak)  $a(t)$  ve  $\beta(t)$  fonksiyonları (veya türevleri) için iki eşitlik elde edilebilir. Burada bir adet nonlineer denklemden hareketle iki adet denklemden oluşan bir nonlineer denklem sistemi elde edilir. Bu durum daha karmaşık gibi görünse de öyle değildir çünkü  $a(t)$  ve  $\beta(t)$  fonksiyonları (veya türevleri),  $u(t)$  fonksiyonuna (veya türevine) göre daha yavaş değişim gösterdiğinden sayısal ve analitik anlamda bir çok avantaj getirir. Fonksiyonların (türevlerin) belirli bir periyot üzerinden ortalaması alınır. Yavaş değişen fonksiyon ve türevlerinin sabit davranış gösterdikleri kabul edilir ve çözüm fonksiyonu  $u(t)$  yazılır.

## 2.7. Asimptotik Açılımların Uyumu Yöntemi

Katı cisimler mekaniğinden akışkanlar mekaniğine, ısı transferinden elektrik problemlerine kadar geniş bir alanda kendini gösteren ve çözümlerin dar bir bölgede ani değişime uğraması olarak gözlemlenen sınır tabakası problemleri de perturbasyon yöntemleri kullanılarak çözülür. Fiziksel anlamda, sınır tabakası (boundary layer) tanımı akışkanlar mekaniği için kullanılırken, katı cisimler mekaniğinde kenar tabakası (edge layer), elektrodinamikte ise yüzey tabaka (skin layer) olarak adlandırılır. Burada ifade edilen biçimi en genel anlamda sınır tabakası şeklindedir. Matematiksel anlamda sınır tabakası denklemden yer alan en yüksek mertebeli türevin başında bir küçük fiziksel parametrenin olduğu durumdur.



Bu tarz problemlerde asimptotik açılımların uyumu yöntemi kullanılır. Bir sınır tabakası problemine yaya açılımı uygulanırsa, kabul edilen seri çözümünün sınır şartlarını sağlamasında sıkıntı yaşanır. Bunun yerine sınır tabakası bölgesinin içi ve dışı için iki ayrı açılım kullanılır. İç ve dış açılımın uyumlu olduğu küçük bölge (sınır tabakası bölgesi) için bulunan çözümler birleştirilerek tek bir karma (kompozit) açılım elde edilir. Kompozit açılımın yazılmasıyla analitik bir çözüme ulaşılabilir.

### 3. TİTREŞİM HAREKETİ VE MATEMATİKSEL MODELLEME

Bu bölüm, ileride uygulama problem olarak kullanılacak titreşim modellerin tanıtılması için bir giriş niteliğindedir. Titreşim hareketinin genel karakteristiği ele alınacak ve kesikli ve sürekli ortam titreşimlerinin matematiksel modellenmesi üzerinde durulacaktır.

#### 3.1. Titreşim Hareketinin Tanımı ve Sınıflandırılması

Titreşim, bir başka ifadeyle salınım, belirli bir zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket olarak tanımlanır (periyodik hareket). Diğer bir tanıma göre ise titreşimler, durum büyüklüklerinin zamanla dalgalanmalarıdır.

Titreşim hareketi, içerdiği birçok özelliğin ele alınmasına göre çeşitli sınıflama gruplarına ayrılabilir. Aşağıda temel bazı sınıflamalar sıralanmıştır [27].

Serbest titreşimler ve zorlanmış titreşimler: Sistem, verilen bir ilk deplasman ile titreşirse, başka bir deyişle bir dış kuvvetin etkisi olmazsa buna serbest titreşimli sistem denir. Ancak sistem eğer bir dış zorlama kuvveti ile titreşiyorsa bu sisteme zorlanmış titreşimli sistem adı verilir.

Sönümlü titreşimler ve sönümsüz titreşimler: Titreşim süresince sistemde herhangi bir enerji kaybı meydana gelmiyorsa bu tarz titreşime sahip sistemlere sönümsüz titreşimli sistemler denir. Eğer titreşim esnasında sürtünme vb. etkilerle bir enerji kaybı oluyorsa böyle sistemlere sönümlü titreşimli sistemler denir. Sönüm titreşim frekansını etkileyen bir parametredir. Ancak sönüm küçükse tabii frekansa etkisi çok azdır ve tabii frekans sönümsüz sistemlerdeki gibi değerlendirilebilir. Burada rezonans kavramından bahsetmekte fayda vardır. Rezonans, en genel tanımıyla, sistemin tabii frekansının sisteme etkileyen zorlama kuvvetinin frekansına çok yakın olmasıdır. Böylelikle sistemin salınım genlikleri teorik olarak sonsuza gider, yani fiziksel anlamıyla titreşen sistem çok büyük genliklerde salınımlar yaparak kararlılığını (stabilitesini) kaybeder. Bahsedilen rezonans genliklerini sınırlamada sönümün büyük önemi vardır.

Lineer titreşimler ve nonlinear titreşimler: Kütle, yay ve sönüm gibi titreşen sistemin temel bileşenleri lineer özelliğe sahipse sistem lineer titreşim sistemi adını alır. Bu bileşenlerden herhangi biri bile nonlinear özelliklere sahipse sistem nonlinear titreşim sistemi adını alır. Direngenlik veya sönüm, konumun veya hızın nonlinear fonksiyonları olabilir. Burada, diferansiyel denklemler ile gösterilen hareket denklemlerinin yapısına göre lineer veya nonlinear titreşim sınıflaması yapılır. Nonlineerlik yapısal, geometrik, ataletten, kuvvetten veya sürtünmeden kaynaklı olabilir. Bunlara örnek vermek gerekirse, yapısal nonlineerlik, gerilmelerin, şekil değiştirmelerin nonlinear fonksiyonu olması ile meydana gelebilir. Geometrik nonlineerlik, birim şekil değiştirme ile deplasman arasındaki nonlinear ilişkidir kaynaklanabilir.

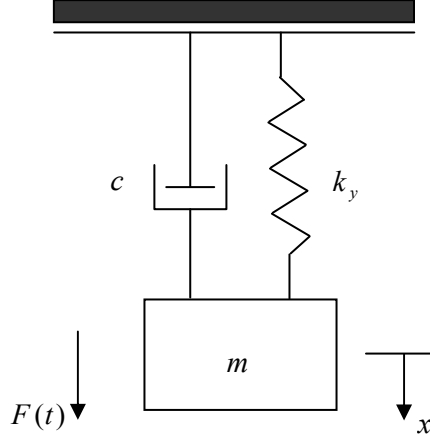
Ataletten kaynaklı nonlineerlik ise sistemde, örneğin konsantre veya yayılı kütle bulunması ile meydana gelir. Nonlineer kuvvetler, manyetik ve elektriksel kuvvetlerle meydana gelir. Sürtünme kuvvetinin deplasmanın nonlineer bir fonksiyonu olmasıyla da sürtünme kaynaklı nonlineerlik oluşur.

Deterministik titreşimler ve rastgele titreşimler: Titreşim sistemine ait tahriklerin herhangi bir andaki değerleri biliniyorsa bu tip titreşimlere deterministik titreşimler denir. Eğer bu değerler bilinmiyorsa bu tip titreşimlere rastgele titreşimler denir. Rastgele titreşimler deterministik olmayan (nondeterministik) titreşimlerdir. Bu tip titreşimlere örnek, rüzgar etkileriyle veya deprem dalgalarıyla oluşan titreşimler verilebilir. Bu titreşim tipinde stokastik analiz yöntemleri devreye girer.

### **3.2. Titreşim Hareketinin Matematiksel Modellenmesi**

Modelleme bir sisteme ait fiziksel özelliklerin matematik diliyle ifade edilmesidir. Titreşimler konusunu sınıflandırılırken ele alınan önemli başlıklardan biri sistemin lineer veya nonlineer olması idi. Lineer sistemlerin anlaşılması, modellenmesi ve analizi nonlineer sistemlere göre daha basittir. Çünkü bu tarz titreşimler süperpozisyon prensibine uygun, matematiksel olarak çözümü (analitik ve sayısal) mümkün sistemlerdir. Hâlbuki nonlineer bir titreşim modelinde süperpozisyon ilkesi uygulanamaz. Matematiksel olarak tam çözüm üretilmesi de çok zordur. Nonlineerlik yapısına göre sistem ya sayısal olarak çözülür ya da yaklaşık yöntemlerle ele alınır.

Titreşim konusunda lineer modellemeler genel anlamda titreşen sistem hakkında bilgi verse de tabiata en yakın modelleme biçimi nonlineer modellemelerdir. Herhangi bir titreşim sistemi, hakkında fikir sahibi olmak için, çeşitli kabuller altında lineerleştirilebilir. Hâlbuki bir sistemdeki bütün etkenleri göz önüne almak istersek modeli nonlineer hale getirmemiz gerekir. Lineerleştirme bir bakıma idealleştirmedir. Hâlbuki sistemlerin doğadaki davranışları büyük çoğunlukla nonlineerdir. Nonlineer titreşimlere ait matematiksel teoriyi ilk defa J.H.Poincare ve Lyapunov 19.Y.Y. sonlarında ortaya atmışlardır. Poincare 1892 yılında yaklaşık çözümler için Perturbasyon Metodunu geliştirmiştir. Lyapunov ise dinamik sistemlerin stabilitesi ile ilgili temelleri atmıştır. Duffing, van der Pol, Minorsky ve Stoker gibi bilim adamları nonlineer titreşimler üzerine önemli çalışmalar yapmışlar ve mühendislik problemlerini ele almışlardır. Nayfeh ise perturbasyon teorisine ait modern yöntemleri geliştirmiştir.



**Şekil 3.1.** Zorlama kuvveti etkisinde kütle-sönüm- yay sistemi

Titreşim hareketi en temel olarak kütle, yay ve sönüm elemanlarıyla modellenir (Şekil 3.1). Sistemde enerji, sürekli olarak, potansiyel enerjiden kinetik enerjiye, kinetik enerjiden potansiyel enerjiye dönüşüm halindedir. Sönüm elemanı ise sistemdeki enerjinin kaybolmasıyla (sönümlenmesiyle) alâkalıdır. Bu kayıp, zamanla, titreşim hareketini sonlandıracağından, titreşim hareketinin devamı ancak dışarıdan gelecek bir kuvvetle mümkün olacaktır.

Kütlenin bir denge noktasına göre salınım hareketi periyodik bir harekettir ve kendini tekrar eder. (Matematikçi J.B.J.Fourier (1768–1830), titreşim teorisinde önemli bir yeri olan periyodik hareketin sinüs ve kosinüs serileriyle ifade edilebileceğini göstermiştir.) Sistemdeki yay, denge noktasından uzaklaşan kütleyi geri çağırıcı kuvvet olarak; sönüm ise kütlenin her seferinde denge noktasına mesafesini daha da azaltıcı kuvvet olarak belirir. Kütle, ağırlık kuvvetini; yay, geri çağırıcı kuvveti; sönüm elemanı ise sönümlenme kuvvetini temsil eder. Kuvvetlerin dengesi yazıldığında titreşime ait temel hareket denklemi ortaya çıkar.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_y x = 0 \quad (3.1)$$

$m$ , kütle (kg),  $c$ , sönüm katsayısı (N.sn/m),  $k_y$ , yay sabitidir (N/m). Bu modele genel gösterimiyle zamana bağlı bir fonksiyon olan  $F(t)$  gibi dışarıdan bir kuvvet etki ettirilirse, bir serbestlik dereceli titreşimi modelleyen hareket denklemi en genel halini alır,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_y x = F(t) \quad (3.2)$$

Denklem (3.2) titreşim hareketinin en temel matematik modelidir.

Serbestlik derecesi kavramı, bir sistemin, bütün parçalarının herhangi bir andaki konumunu tanımlayabilecek en az (minimum) sayıdaki bağımsız koordinat sayısı olarak tanımlanır. Örnek vermek gerekirse, bir kütle ile bir yaydan oluşan sistem veya basit sarkaç bir serbestlik dereceli sistemlerdir. İki kütle ve iki yayın seri bağlandığı sistem veya sarkaç-kütle-yay sistemi iki serbestlik dereceli sistemler olarak adlandırılır. Üçlü sarkaç ve burulma sistemi üç serbestlik dereceli sistemlere örnek verilebilir.

Yukarıda bahsi geçen sonlu sayıda serbestlik derecesine sahip sistemler ayrık sistemler (discrete systems) olarak adlandırılır. Buna karşın sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahip sistemlere sürekli sistemler (continuous systems) denir. Sürekli ortamların serbestlik derecesi sonsuzdur. Çünkü parçalara bölündüğünde her parçanın kendine ait bir bağımsız koordinatı vardır ve sürekli sistemler sonsuz sayıda parçaya ayrılabilir. Örneğin kirişler ele alınacak olursa, bir kiriş yapısına yol açan modelleme, kütle, yay ve/veya sönüm elemanlarının seri bağlanmasıyla olur. Burada her bir kütle-yay-sönüm sisteminin hareketi bir  $x_i$  koordinatıyla belirlenebilir. Kirişin sonsuz sayıda elemandan oluştuğu düşünülürse ( $i = 1, 2, \dots, n; n = \infty$ ), kirişler sonsuz serbestlik dereceli olarak tanımlanır. Kiriş titreşimlerinde sonsuz tane mod (tabii frekans) vardır.

Denklem (3.1)'de görüldüğü üzere ayrık sistemdeki titreşimlere ait hareket denklemi adi diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilir. Ancak sürekli sistem titreşimlerinde kısmi diferansiyel denklemler kullanılır.

#### 4. MULTIPLE SCALES LINDSTEDT POINCARE (MSLP) YÖNTEMİ

Bu bölümde Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) yönteminin uygulama basamakları ile ilgili bilgiler verilecek ardından yöntem matematik modellere uygulanacaktır.

##### 4.1. Yöntemin Uygulama Basamakları

Yöntemi açıklamak için aşağıdaki nonlineer denklem ele alınabilir.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \mathcal{E}f(u) = 0 \quad (4.1)$$

Denklemden,  $u$  bağımlı değişken,  $\omega_0$  tabii frekans,  $f(u)$  ise nonlineer terimleri içeren fonksiyondur. Burada  $\mathcal{E}$  olarak adlandırılan parametre de pertürbasyon parametresidir.

Yöntemin basamakları aşağıdaki gibidir.

1) Lindstedt Poincare tekniğinde olduğu gibi zaman dönüşümü yapılır.

$$\tau = \omega t \quad (4.2)$$

Dönüşüm nonlineer denkleme uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + \mathcal{E}f(u) = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir.

2) Zaman ölçeklemesi yapılır. Burada  $T_0$  hızlı zaman ölçeği,  $T_1$  ve  $T_2$  ise yavaş zaman ölçekleridir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.4)$$

3) Zamana bağlı türevler, çok zaman ölçekli yöntemde olduğu gibi yapılır.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.5)$$

Bağımlı değişkenin aşağıdaki yapıda (formda) bir seri toplamından meydana geldiği düşünülür.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.6)$$

4)  $\omega^2$  parametresi, Lindstedt Poincare tekniğinde olduğu gibi seriye açılır.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (4.7)$$

5) Yeni yöntemde ise denklem (4.7)'den  $\omega_0^2$  çekilir.

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (4.8)$$

6) Denklemler (4.5), (4.6) ve (4.8) denklem (4.3)'e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \omega^2 (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2))(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) \\ & + (\omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \mathcal{E}f(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

ifadesi elde edilir.

7) Elde edilen denklemde aşağıdaki gibi mertebeye ayrıştırması yapılır,

$$O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (4.10)$$

$$O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - f(u_0) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = & -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 \\ & + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - f'(u_0) u_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Birinci mertebede, denkleme aşağıdaki gibi bir çözüm önerilir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + ke \quad (4.13)$$

burada k.e kısaltması kompleks eşlenikleri ifade eder.

8) İkinci ve üçüncü mertebelerdeki denklemlerde, seküler terimleri yok etmek için bazı seçimler yapılması gerekir. İkinci mertebede oluşan seküler terimde  $D_1 A = 0$  alındığında  $\omega_1$  sanal değil ise yapılan seçim uygundur. Ancak  $\omega_1$  sanal ise  $\omega_1 = 0$  seçilerek seküler terimler yok edilir. Çünkü  $\omega_1$  'in sanal olması Nayfeh [20]'de belirtildiği gibi fiziksel olmayan çözümler verecektir.

Aynı yöntem üçüncü mertebede de uygulanır. Eğer  $D_2A = 0$  alındığında  $\omega_2$  gerçel ise yapılan seçim uygundur. Sanal ise  $\omega_2 = 0$  seçilerek seküler terimler yok edilir.

#### 4.2. Uygulama Problemi 1 (Sönümlü Lineer Salınım Denklemi)

Sönümlü lineer salınımlara ait hareket denklemi (4.14), çok zaman ölçekli yöntem ve Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) yöntemi ile çözülecek, çözümler denklemin tam çözümü ile karşılaştırılacaktır.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon\mu\dot{u} = 0 \quad (4.14)$$

##### 4.2.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.15)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.16)$$

Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.17)$$

Bu açılım denklem (4.14)'e yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılır.

$$(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2))(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \omega_0^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + 2\varepsilon\mu(D_0 + \varepsilon D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) = 0 \quad (4.18)$$

$$O(1): D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (4.19)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 \quad (4.20)$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2)u_0 - 2\mu(D_0 u_1 + D_1 u_0) \quad (4.21)$$



Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + ke \quad (4.22)$$

Önerilen çözüm denklem (4.20)'ye yerleştirildiğinde

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = e^{i\omega_0 T_0} (-2\omega_0 i D_1 A - 2\mu\omega_0 i A) + ke \quad (4.23)$$

eşitliği bulunur ve seküler terimler yok edilir.

$$-2\omega_0 i D_1 A - 2\mu\omega_0 i A = 0 \quad (4.24)$$

Denklem (4.24)'den

$$A(T_1, T_2) = B(T_2)e^{-\mu T_1} \quad (4.25)$$

elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm aşağıdaki gibi olacaktır.

$$u_0 = B(T_2)e^{-\mu T_1} e^{i\omega_0 T_0} + ke \quad (4.26)$$

Burada

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\beta} \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlanır. Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm aşağıdaki gibi olacaktır.

$$u_0 = b(T_2)e^{-\mu T_1} \cos(\omega_0 T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.28)$$

Denklem (4.23)'ün sağ kısmı yok edildiği için

$$u_1 = 0 \quad (4.29)$$

olacaktır. Son mertebede , denklem (4.26) ve (4.29), denklem (4.21)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$-2i\omega_0 D_2 B + \mu^2 B = 0 \quad (4.30)$$

Denklem (4.27), denklem (4.30)'da yerine konularak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$b = a_0, \quad \beta = \frac{-\mu^2}{2\omega_0} T_2 + \beta_0 \quad (4.31)$$

Orjinal zaman değişkeni açısından çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(t) = a_0 e^{-\varepsilon \mu t} \cos\left(\omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \mu^2}{2\omega_0^2}\right) t + \beta_0\right) + O(\varepsilon^2) \quad (4.32)$$

#### 4.2.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.14)'e  $\tau = \omega t$  zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + 2\varepsilon \mu \omega u' = 0 \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada ( )' gösterimi, yeni zaman değişkeni olan  $\tau$ 'ya göre türevi ifade eder.

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden şu şekilde ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.34)$$

Yeni zaman türevleri,

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.35)$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken ve tabii frekans

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.36)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.37)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılımlar denklem (4.33)'e yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (4.38)$$

$$O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - 2\mu\omega D_0 u_0 \quad (4.39)$$

$$O(\varepsilon^2) : \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - 2\mu\omega (D_0 u_1 + D_1 u_0) \quad (4.40)$$

Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + ke \quad (4.41)$$

şeklinde yazılır. Denklem (4.41), denklem (4.39)'a yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2\omega^2 i D_1 A + \omega_1 A - 2\mu\omega i A = 0 \quad (4.42)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede,  $D_1 A = 0$  seçilir ise  $\omega_1 = 2i\mu\omega$  olur. Ancak  $\omega_1$  kompleks olacağından daha önce bahsedildiği gibi bu seçim uygun değildir. Uygun bir çözüm olarak  $\omega_1 = 0$  seçilir ve

$$D_1 A = -\frac{\mu}{\omega} A \quad (4.43)$$

bulunur. Kompleks genlik,

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.44)$$

alınarak denklem (4.43)'e yerleştirilir ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a(T_2) e^{-\frac{\mu}{\omega} T_1}, \quad \beta = \beta(T_2) \quad (4.45)$$

Denklem (4.39)'un sağ kısmı yok edildiği için

$$u_1 = 0 \quad (4.46)$$

olacaktır. Son mertebede , denklemler (4.41) ve (4.46), denklem (4.40)'da yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$2\omega^2 i D_2 A - \omega_2 A - \mu^2 A = 0 \quad (4.47)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede,  $D_2 A = 0$  seçilirse  $\omega_2$  sanal olmayacaktır. Bu da uygun bir seçimdir. Buradan,

$$\omega_2 = -\mu^2 \quad (4.48)$$

elde edilir.  $D_2 A = 0$  olduğundan denklem (4.45)'de genlik ve faz ifadelerinde  $T_2$  bağımlılığı ortadan kalkar.

$$a = a_0 e^{-\frac{\mu}{\omega} T_1}, \quad \beta = \beta_0 \quad (4.49)$$

Frekans açılımı,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon^2 \mu^2 \quad (4.50)$$

şeklinde dir. Orjinal zaman değişkeni açısından çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(t) = a_0 e^{-\varepsilon \mu t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2 \mu^2} t + \beta_0\right) + O(\varepsilon^2) \quad (4.51)$$

#### 4.2.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması

Denklem (4.51)'de bulunan MSLP çözümü aslında orijinal denklemin tam çözümüdür. Çok zaman ölçekli yöntem ile bulunan çözüm ifadesinde (4.32) frekans, tam çözüme ait (MSLP çözümü) frekansın Taylor Açılımıdır. Çözüm (4.32) sadece  $\varepsilon \mu \ll \omega_0$  olduğu durumlar için geçerlidir. Ancak MSLP yöntemi ile bulunan çözüm (4.51) için herhangi bir kısıtlama söz konusu değildir.

### 4.3. Uygulama Problemi 2 (Duffing Denklemi)

Duffing denklemi (4.52) çok bilinen bir kübik nonlineer denklemdir. Bu denklem çok zaman ölçekli yöntem ve Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) yöntemi ile çözülüp, çözümler sayısal sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (4.52)$$

Denklemi çözmek için aşağıdaki başlangıç şartları kullanılır.

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (4.53)$$

#### 4.3.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.54)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.55)$$

Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır,

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.56)$$

bu açılım denklem (4.52)'ye yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da mertebe ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$O(1): D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (4.57)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^3 \quad u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (4.58)$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - 3u_0^2 u_1 \quad (4.59)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + ke \quad (4.60)$$

şeklinde yazılır. Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta} \quad (4.61)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm

$$u_0 = a(T_1, T_2)\cos(\omega_0 t + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.62)$$

şeklinde elde edilir. Denklem başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.63)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.60), denklem (4.58)'e yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$2i\omega_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.64)$$

şeklinde ifade edilir. Kompleks genlik, denklem (4.64)' de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0(T_2), \quad \beta = \frac{3}{8\omega_0} a_0^2 T_1 + \beta_0(T_2) \quad \beta_0(0) = 0 \quad (4.65)$$

$\varepsilon$  mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = Be^{i\omega_0 T_0} + \frac{1}{8\omega_0^2} A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + ke \quad (4.66)$$

Gerçek genlik ve faz için  $u_1$  çözümü

$$u_1 = b \cos(\omega_0 T_0 + \gamma) + \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 \cos(3\omega_0 T_0 + 3\beta) \quad (4.67)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\gamma} \quad (4.68)$$

olarak alınır. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = -\frac{1}{32\omega_0^2} a_0^3, \quad \gamma(0) = \beta_0(0) = 0 \quad (4.69)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebede , denklemler (4.66) ve (4.60), denklem (4.59)'da yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$2i\omega_0 D_1 B + D_1^2 A + 2i\omega_0 D_2 A + 3A^2 \bar{B} + 6A \bar{A} B + \frac{3}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 = 0 \quad (4.70)$$

Denklemler (4.61), (4.65), (4.68) ve (4.69), denklem (4.70)' de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{1}{32\omega_0^2} a_0^3, \quad \beta = \gamma = \frac{3}{8\omega_0} a_0^2 T_1 - \frac{21}{256\omega_0^3} a_0^4 T_2 \quad (4.71)$$

Nihai sonuç aşağıdaki gibidir.

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon a_0^3}{32\omega_0^2} [\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.72)$$

Burada frekans

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3}{8\omega_0} a_0^2 - \varepsilon^2 \frac{21}{256\omega_0^3} a_0^4 \quad (4.73)$$

şeklinde ifade edilir.

Perturbasyon yakınsama kriterine göre düzeltme terimleri, başlangıç terimlerinden daima çok küçük olmalıdır. Bu yakınsama kriteri, matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\varepsilon a_0^2}{32\omega_0^2} \ll 1 \quad (4.74)$$

#### 4.3.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.52)'ye  $\tau = \omega t$  zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (4.75)$$

elde edilir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.76)$$

Yeni zaman türevleri

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.77)$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken ve tabii frekans

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.78)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.79)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılımlar denklem (4.75)'e yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da merteye ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$\begin{aligned} O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 &= 0 \\ u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 &= -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - u_0^3 \\ u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$



$$O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - 3u_0^2 u_1 \quad (4.82)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = Ae^{iT_0} + ke = a \cos(T_0 + \beta) \quad (4.83)$$

şeklinde yazılır. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.84)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.83), denklem (4.81)'e yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-2i\omega^2 D_1 A + \omega_1 A - 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.85)$$

Seküler ifadeye,  $D_1 A = 0$  seçildiğinde  $\omega_1$  kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur.  $a = a(T_2)$ ,  $\beta = \beta(T_2)$  şeklinde olacaktır.  $\omega_1$  ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\omega_1 = 3A\bar{A} = \frac{3}{4}a^2 \quad (4.86)$$

$\varepsilon$  mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = Be^{iT_0} + \frac{1}{8\omega^2} A^3 e^{3iT_0} + ke = b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{1}{32\omega^2} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (4.87)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = -\frac{1}{32\omega^2} a_0^3, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.88)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebede, denklemler (4.87) ve (4.83), denklem (4.82)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 B - 2i\omega^2 D_2 A + \omega_1 B + \omega_2 A - 3A^2 \bar{B} - 6A \bar{A} B - \frac{3}{8\omega^2} A^3 \bar{A}^2 = 0 \quad (4.89)$$

şeklinde ifade edilir. Cebirsel işlemler sonrasında denklem (4.89)'dan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{1}{32\omega^2} a_0^3, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \omega_2 = -\frac{3}{128\omega^2} a_0^4 \quad (4.90)$$

Frekans denklemi

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2 - \varepsilon^2 \frac{3}{128\omega^2} a_0^4 \quad (4.91)$$

şeklinde dir. İfade çözümlürse frekans

$$\omega = \frac{1}{4} \sqrt{8\omega_0^2 + 6\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\omega_0^2 + 96\varepsilon\omega_0^2 a_0^2 + 30\varepsilon^2 a_0^4}} \quad (4.92)$$

şeklinde elde edilir.

Elde edilen frekans Hu and Xiong [1] tarafından değiştirilmiş Lindstedt Poincare tekniği (Modified Lindstedt Poincare Method ) ile bulunan frekansın aynısıdır.

Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon a_0^3}{32\omega^2} [\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.93)$$

Daha önce de belirtildiği gibi geçerli çözümler için yakınsama kriteri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\varepsilon a_0^2}{32\omega^2} \ll 1 \quad (4.94)$$

### 4.3.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması

İki yöntem ile elde edilen yakınsama kriterleri,  $\varepsilon$  parametresinin büyük değerleri için karşılaştırılır ise çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilen yakınsama kriteri (4.74), sağlanmaz iken MSLP yöntemi ile elde edilen yakınsama kriteri (4.94) sağlanmaktadır. Bunu test etmek için limit almak yeterlidir.

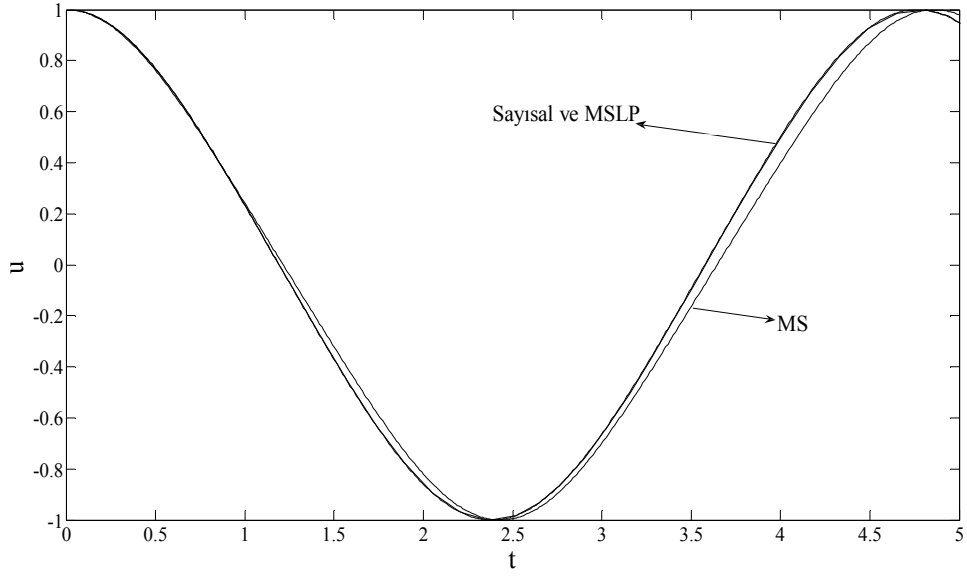
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon a_0^2}{32\omega^2} = \frac{\varepsilon a_0^2}{32 \frac{1}{16} (8\omega_0^2 + 6\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\omega_0^2 + 96\varepsilon\omega_0^2 a_0^2 + 30\varepsilon^2 a_0^4})} \cong 0.044 \ll 1 \quad (4.95)$$

Bu yüzden çözüm (4.93)'de düzeltme terimi her durumda başlangıç teriminden küçüktür. Ancak bu durum çözüm (4.72) için söylenemez.  $\omega_0$  paydada sabit olarak bulunmaktadır. Bu terim sebebiyle büyük  $\varepsilon$  değerleri için düzeltme terimi, başlangıç teriminden daima büyük olacaktır.

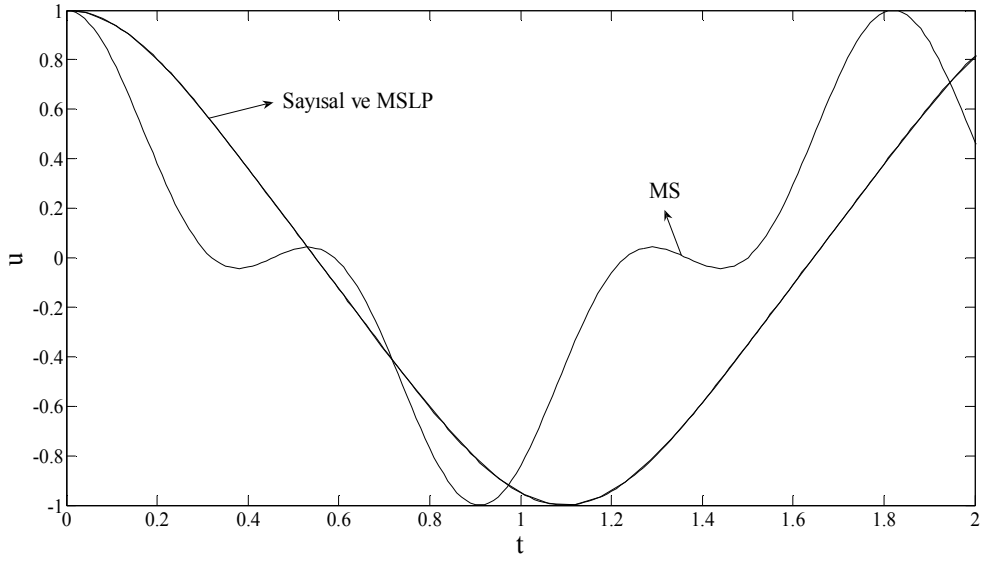
Sonuçların karşılaştırılması açısından, bulunan analitik çözümlerin genlik zaman grafikleri ve sayısal çözümler ele alınmıştır. Bütün işlemlerde  $\omega_0 = 1$  ve  $a_0 = 1$  olarak seçilmiştir. Şekil 4.1' de sonuçlar  $\varepsilon = 1$  için karşılaştırılmıştır. Sayısal çözüm ile MSLP çözümü çakışmaktadır. Çok zaman ölçekli yöntem çözümü de geçerli sonuç vermiştir. Bunun sebebi yakınsama kriteri (4.74)'ün aşağıda belirtildiği gibi  $\varepsilon = 1$  için geçerli değerler vermesidir.

$$\frac{\varepsilon a_0^2}{32\omega_0^2} = \frac{1}{32} \ll 1 \quad (4.96)$$

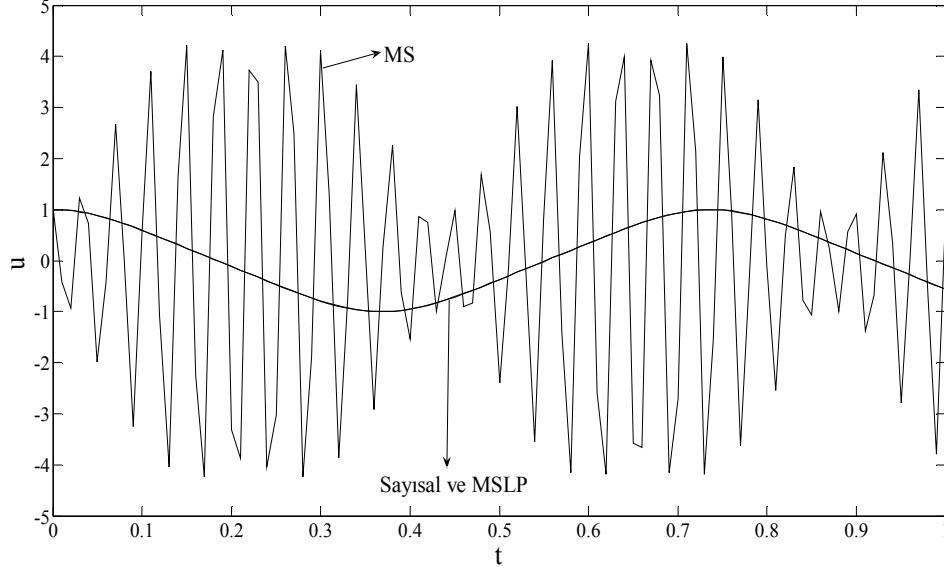
Şekil 4.2'de  $\varepsilon = 10$  alındığında kriter (4.74)'ün sağlanmadığı görülmektedir. Sayısal çözüm ile MSLP çözümü çakışmakta iken çok zaman ölçekli yöntemle elde edilen çözümün sayısal çözümden ayrıldığı kolaylıkla görülmektedir. Son olarak Şekil 4.3'de sonuçlar  $\varepsilon = 100$  için karşılaştırılmıştır. Aynı şekilde Sayısal çözüm ile MSLP çözümü mükemmel uyum göstermelerine karşılık çok zaman ölçekli yöntemle ait çözüm gerçekçi görünmemektedir.



**Şekil 4.1.** Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\varepsilon = 1$  ( $a_0 = 1, \omega_0 = 1$ )



**Şekil 4.2.** Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\varepsilon = 10$  ( $a_0 = 1, \omega_0 = 1$ )



**Şekil 4.3.** Duffing denklemi için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\varepsilon = 100$  ( $a_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ )

#### 4.4. Uygulama Problemi 3 (Sönümlü Kübik Nonlineer Sistem)

Bir önceki uygulamada sabit genlikli bir problem ele alınmıştı. Bu çeşit problemlerde değiştirilmiş Lindstedt Poincare (modified Lindstedt Poincare) tekniği -Hu ve Xiong [1]'in yaptığı gibi- kuvvetli nonlinear sistemler için de geçerli sonuçlar vermektedir. Değişken genlikli problemlerde Lindstedt Poincare tekniği geçerli sonuçlar verememektedir. Bu sayısal örnekte amaç kuvvetli nonlinear ve değişken genlikli problemlerde MSLP yönteminin geçerli sonuçlar verdiğini göstermektir.

Örnek model olarak aşağıdaki denklem ve başlangıç şartları kullanılacaktır.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon^2 \mu i + \varepsilon \alpha u^3 = 0 \quad (4.97)$$

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (4.98)$$

##### 4.4.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.99)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.100)$$

Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.101)$$

Bu açılım denklem (4.97)'ye yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da mertebe ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$O(1): D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (4.102)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \varepsilon u_0^3 \quad u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (4.103)$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - 2\mu D_0 u_0 - 3\varepsilon u_0^2 u_1 \quad (4.104)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + ke \quad (4.105)$$

şeklinde yazılır. Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.106)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm,

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(\omega_0 t + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.107)$$

şeklinde elde edilir. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.108)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.105), denklem (4.103)'e yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$2i\omega_0 D_1 A + 3\alpha A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.109)$$

şeklinde ifade edilir. Kompleks genlik, denklem (4.109)' da yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0(T_2), \quad \beta = \frac{3\alpha}{8\omega_0} a_0^2 T_1 + \beta_1(T_2) \quad (4.110)$$

$\varepsilon$  mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = B e^{i\omega_0 T_0} + \frac{\alpha}{8\omega_0^2} A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + k e \quad (4.111)$$

Gerçek genlik ve faz için  $u_1$  çözümü

$$u_1 = b \cos(\omega_0 T_0 + \gamma) + \frac{\alpha}{32\omega_0^2} a^3 \cos(3\omega_0 T_0 + 3\beta) \quad (4.112)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\gamma} \quad (4.113)$$

olarak alınır. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = -\frac{\alpha}{32\omega_0^2} a_0^3, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.114)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebede , denklemler (4.111) ve (4.105), denklem (4.104)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$2i\omega_0 D_1 B + D_1^2 A + 2i\omega_0 D_2 A + 2\mu i \omega_0 A + 3\alpha \left( \frac{\alpha}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 + A^2 \bar{B} + 2A \bar{A} B \right) = 0 \quad (4.115)$$

Denklemler (4.109), (4.110), (4.113) ve (4.114), denklem (4.115)' de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0 e^{-\mu T_2}, \quad b = -\frac{\alpha}{32\omega_0^2} a^3, \quad \beta = \gamma = \frac{21\alpha^2}{1024\mu\omega_0^3} a_0^4 (e^{-4\mu T_2} - 1) + \frac{3\alpha}{8\omega_0} a_0^2 e^{-2\mu T_2} T_1 \quad (4.116)$$

Nihai sonuç aşağıdaki gibidir.

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{\varepsilon \alpha}{32\omega_0^2} a^3 [\cos(3\omega_0 t + 3\beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.117)$$

Burada genlik ve faz,

$$a = a_0 e^{-\varepsilon^2 \mu t}, \quad \beta = \frac{21\alpha^2}{1024\mu\omega_0^3} a_0^4 (e^{-4\varepsilon^2 \mu t} - 1) + \varepsilon \frac{3\alpha}{8\omega_0} a_0^2 e^{-2\varepsilon^2 \mu t} t \quad (4.118)$$

şeklinde ifade edilir.

Geçerli çözümler için yakınsama kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon \alpha a^2}{32\omega_0^2} \ll 1 \quad (4.119)$$

#### 4.4.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.97)'ye  $\tau = \omega t$  zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + 2\varepsilon^2 \mu \omega u' + \varepsilon \alpha u^3 = 0 \quad (4.120)$$

elde edilir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden şu şekilde ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.121)$$



Yeni zaman türevleri

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.122)$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken ve tabii frekans

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.123)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.124)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılımlar denklem (4.120)'ye yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da merteye ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$\begin{aligned} O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 &= 0 \\ u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 &= -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - \alpha u_0^3 \\ u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 &= -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 \\ &+ \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - 2\mu \omega D_0 u_0 - 3\alpha u_0^2 u_1 \end{aligned} \quad (4.127)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A e^{iT_0} + ke = a \cos(T_0 + \beta) \quad (4.128)$$

şeklinde yazılır. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.129)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebeye çözüm, denklem (4.126)'ya yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 A + \omega_1 A - 3\alpha A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.130)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede,  $D_1 A = 0$  seçildiğinde  $\omega_1$  kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur.  $a = a(T_2)$ ,  $\beta = \beta(T_2)$  şeklinde olacaktır.  $\omega_1$  ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\omega_1 = 3\alpha A \bar{A} = \frac{3}{4} \alpha a^2 \quad (4.131)$$

$\varepsilon$  mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = B e^{iT_0} + \frac{\alpha}{8\omega^2} A^3 e^{3iT_0} + k e = b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{\alpha}{32\omega^2} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (4.132)$$

Denkleme başlangıç koşulları uygulanırsa

$$b(0) = -\frac{\alpha}{32\omega^2} a_0^3, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.133)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebede, denklemler (4.132) ve (4.128), denklem (4.127)' de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 B - 2i\omega^2 D_2 A + \omega_1 B + \omega_2 A - 2\mu i \omega A - 3\alpha \left( \frac{\alpha}{8\omega^2} A^3 \bar{A}^2 + A^2 \bar{B} + 2A \bar{A} B \right) = 0 \quad (4.134)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede,  $D_2 A = 0$  seçilir ise  $\omega_2$  kompleks olacaktır bu da uygun bir seçim değildir. Bu yüzden

$$\omega_2 = 0 \quad (4.135)$$

seçilir. Cebirsel işlemler sonrasında denklem (4.134)' den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0 e^{-\frac{\mu T_2}{\omega}}, \quad b = -\frac{\alpha}{32\omega^2} a^3, \quad \beta = \gamma = \frac{3\alpha^2 a_0^4}{1024\omega^3 \mu} \left( e^{-\frac{4\mu T_2}{\omega}} - 1 \right) \quad (4.136)$$

Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u = a \cos(\omega t + \beta) + \frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega^2} a^3 [\cos(3\omega t + 3\beta) - \cos(\omega t + \beta)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.137)$$

Burada

$$a = a_0 e^{-\varepsilon^2 \mu t}, \quad \beta = \frac{3\alpha^2 a_0^4}{1024 \omega^3 \mu} (e^{-4\varepsilon^2 \mu t} - 1), \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3\alpha}{4} a_0^2 e^{-2\varepsilon^2 \mu t} \quad (4.138)$$

olarak ifade edilir.

Geçerli çözümler için yakınsama kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega^2} a^2 \ll 1 \quad (4.139)$$

#### 4.4.3 Yöntemlerin Karşılaştırılması

Yakınsama kriterleri (4.119) ve (4.139)'da genlik zamana bağlı bir fonksiyondur. Yeteri derecede büyük  $t$  değerleri için yakınsama sağlanmaktadır. Çünkü genlik, zaman içinde sönümlenmektedir.  $\varepsilon$  parametresinin büyük değerleri için her iki yakınsama kriteri sağlanmaktadır ancak büyük  $\varepsilon$  değerleri, genliğin sönümlenme oranını artırmaktadır. Bu yüzden kuvvetli nonlineerlik için büyük  $\varepsilon$  değerleri yerine büyük  $\alpha$  değerleri kontrol edilecektir.  $\alpha$  değerini artırmak sistemde sönümü artırmadan nonlineerliği artıracaktır. Büyük  $\alpha$  ve küçük zamanlar için kriter (4.119) sağlanmamaktadır.

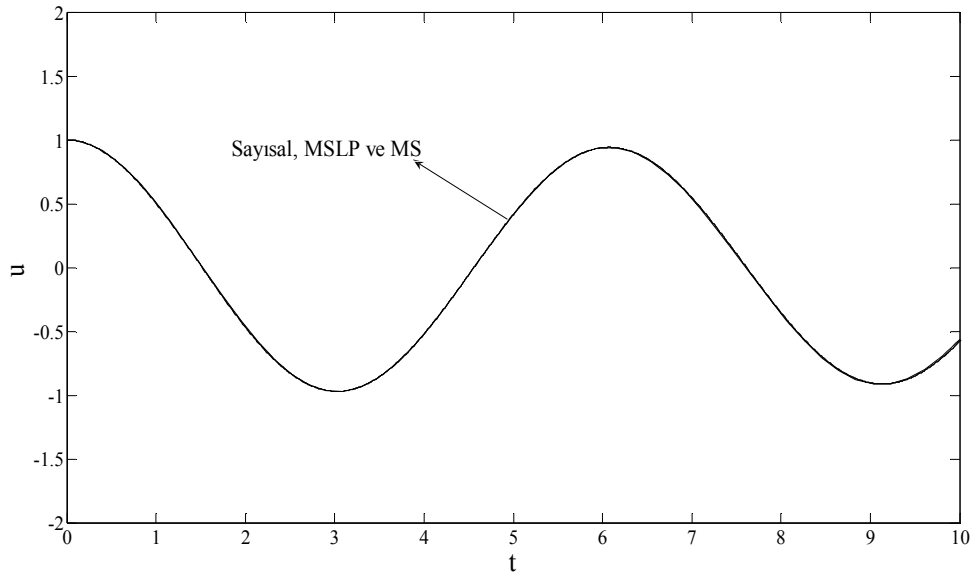
Çok zaman ölçekli yöntem ile bulunan yakınsama kriteri (4.119) yerine MSLP yöntemi ile bulunan yakınsama kriteri (4.139),  $t = 0$  bir başka deyişle  $a = a_0$  için incelendiğinde kriter (4.139)'un sağlandığı görülmektedir.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega^2} a_0^2 = \frac{\varepsilon \alpha a_0^2}{32 \left( \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3\alpha}{4} a_0^2 \right)} = \frac{1}{24} \ll 1 \quad (4.140)$$

Bulunan analitik çözümlerin genlik-zaman grafikleri ile sayısal çözümler karşılaştırılmıştır. Bütün işlemlerde  $\omega_0=1$ ,  $a_0=1$ ,  $\mu=1$  ve  $\varepsilon=0.1$  olarak seçilmiştir. Şekil 4.4' de sonuçlar  $\alpha = 1$  için karşılaştırılmıştır. Bu durumda kriterler (4.119) ve (4.139) geçerli sonuçlar vermektedir. Sayısal çözüm, analitik çözümler ile çakışmaktadır.

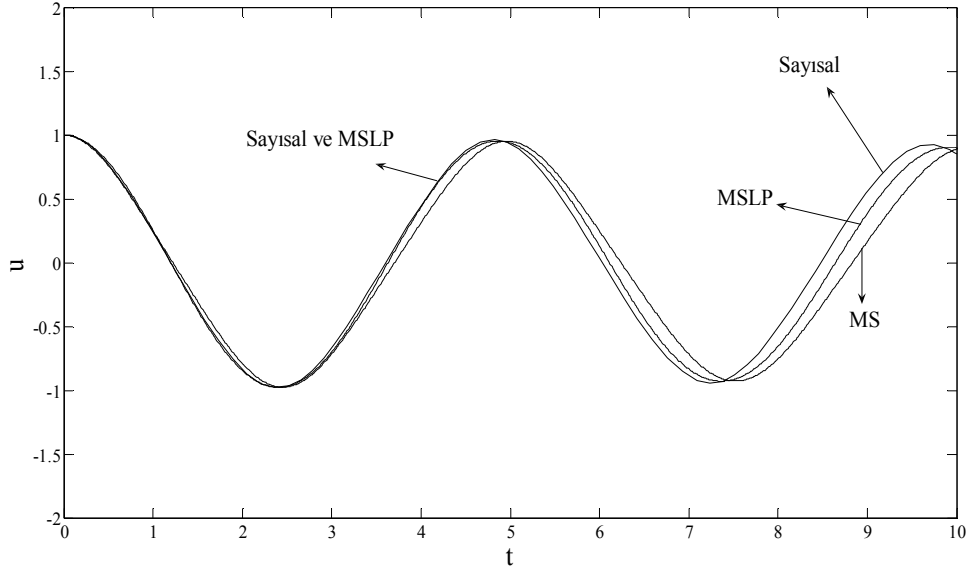
Şekil 4.5'de nonlineerlik artırılmaktadır. ( $\alpha = 10$ ) Görüldüğü gibi MSLP çözümü, sayısal çözüm ile çok zaman ölçekli yöntem çözümüne göre daha uyumlu sonuçlar vermektedir.

Şekil 4.6'da sonuçlar  $\alpha = 50$  için karşılaştırılmıştır. Çok zaman ölçekli yöntem çözümü niteliksel olarak dahi sayısal çözümden ayrılmıştır. Buna rağmen MSLP çözümü sayısal çözüm ile uyum içindedir. Aynı nitelik ve nicelik de davranışlar şekil 4.7'de  $\alpha = 100$  için gözlemlenmektedir.



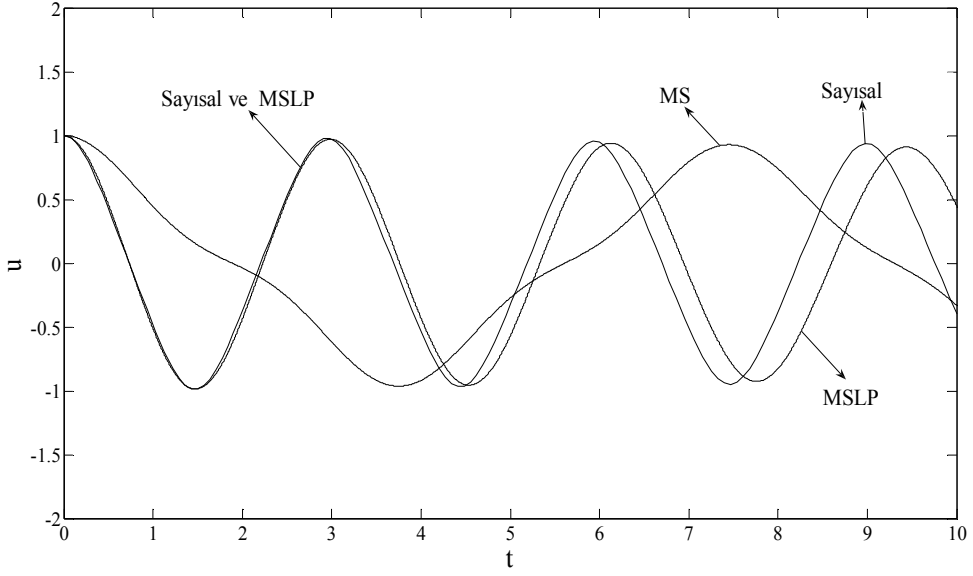
**Şekil 4.4.** Sönümlü kübik nonlineer sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması

$$\alpha = 1 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$$



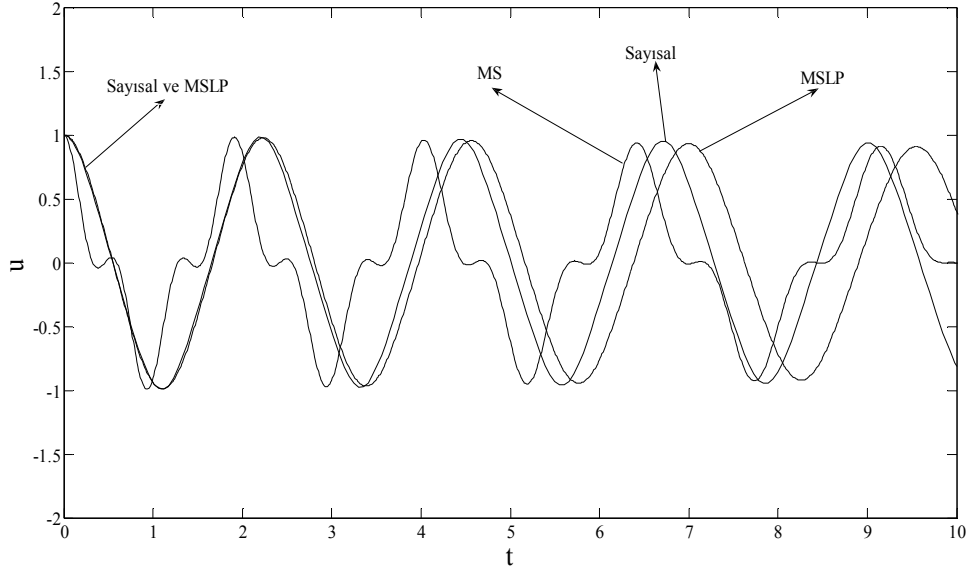
**Şekil 4.5.** Sönümlü kübik nonlineer sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması

$$\alpha = 10 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$$



**Şekil 4.6.** Sönümlü kübik nonlineer sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması

$$\alpha = 50 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$$



**Şekil 4.7.** Sönümlü kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\alpha = 100 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$

#### 4.5. Uygulama Problemi 4 (Kuadratik ve Kübik Nonlinear Sistem)

Burada uygulama olarak kuadratik ve kübik nonlinear model ele alınmıştır. Örnek model ve başlangıç şartları aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \alpha_1 u^2 + \varepsilon^2 \alpha_2 u^3 = 0 \quad (4.141)$$

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (4.142)$$

##### 4.5.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.143)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.144)$$

Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır,

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.145)$$

bu açılım denklem (4.141)'e yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da merteye ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$O(1): D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad u(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (4.146)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \alpha_1 u_0^2, \quad u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (4.147)$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - 2\alpha_1 u_0 u_1 - \alpha_2 u_0^3 \quad (4.148)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + ke \quad (4.149)$$

şeklinde yazılır. Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.150)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci merteye çözüm

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(\omega_0 t + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.151)$$

şeklinde elde edilir. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.152)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.149), denklem (4.147)'ye yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$2i\omega_0 D_1 A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = A(T_2) \quad (4.153)$$

$\varepsilon$  mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = B e^{i\omega_0 T_0} + k e + \frac{1}{3\omega_0^2} \alpha_1 (A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + k e - 6A\bar{A}) \quad (4.154)$$

Gerçek genlik ve faz için  $u_1$  çözümü

$$u_1 = b \cos(\omega_0 T_0 + \gamma) + \frac{1}{6\omega_0^2} \alpha_1 a^2 [\cos(2\omega_0 T_0 + 2\beta) - 3] \quad (4.155)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\gamma} \quad (4.156)$$

olarak alınır. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = \frac{1}{3\omega_0^2} \alpha_1 a_0^2, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.157)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebe, denklemler (4.154) ve (4.149), denklem (4.148)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega_0 D_1 B - 2i\omega_0 D_2 A + \left(\frac{10}{3\omega_0^2} \alpha_1^2 - 3\alpha_2\right) A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.158)$$

şeklinde elde edilir. Denklemler (4.150), (4.156) ve (4.157), denklem (4.158)'de yerine konursa

$$a = a_0, \quad b = \frac{1}{3\omega_0^2} \alpha_1 a_0^2, \quad \beta = \gamma = \left(\frac{3}{8\omega_0} \alpha_2 - \frac{5}{12\omega_0^3} \alpha_1^2\right) a_0^2 T_2 \quad (4.159)$$

ifadeleri elde edilir.



Nihai sonuç aşağıdaki gibidir.

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0^2}{6\omega_0^2} [2 \cos(\omega t) + \cos(2\omega t) - 3] + O(\varepsilon^2) \quad (4.160)$$

Burada frekans

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 a_0^2 \left( \frac{3}{8\omega_0} \alpha_2 - \frac{5}{12\omega_0^3} \alpha_1^2 \right) \quad (4.161)$$

şeklinde ifade edilir.

Geçerli çözümler için yakınsama kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega_0^2} \ll 1 \quad (4.162)$$

#### 4.5.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.141)'e  $\tau = \omega t$  zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + \varepsilon \alpha_1 u^2 + \varepsilon^2 \alpha_2 u^3 = 0 \quad (4.163)$$

elde edilir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden şu şekilde ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.164)$$

Yeni zaman türevleri

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.165)$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken ve tabii frekans

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.166)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.167)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılımlar denklem (4.163)'e yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da mertebe ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$\begin{aligned} O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 &= 0 \\ u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.168)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 &= -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - \alpha_1 u_0^2 \\ u_1(0) = 0, \quad (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.169)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 &= -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 \\ &+ \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - 2\alpha_1 u_0 u_1 - \alpha_2 u_0^3 \end{aligned} \quad (4.170)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A e^{i T_0} + k e = a \cos(T_0 + \beta) \quad (4.171)$$

şeklinde yazılır. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (4.172)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.171), denklem (4.169)'a yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 A + \omega_1 A = 0 \quad (4.173)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede  $D_1 A = 0$  seçilir,  $a = a(T_2)$ ,  $\beta = \beta(T_2)$  ve  $\omega_1 = 0$  ifadeleri elde edilir.

$\varepsilon$  mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = B e^{iT_0} + k e + \frac{1}{3\omega^2} \alpha_1 (A^2 e^{2iT_0} + k e - 6A\bar{A}) \quad (4.174)$$

Gerçek genlik ve faza göre çözüm

$$u_1 = b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{1}{6\omega^2} \alpha_1 a^2 [\cos(2T_0 + 2\beta) - 3] \quad (4.175)$$

olarak ifade edilir. Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = \frac{1}{32\omega^2} \alpha_1 a_0^2, \quad \gamma(0) = 0 \quad (4.176)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebede, denklemler (4.174) ve (4.171), denklem (4.170)' de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 B - 2i\omega^2 D_2 A + \omega_2 A + \left(\frac{10}{3\omega^2} \alpha_1^2 - 3\alpha_2\right) A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.177)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede,  $D_2 A = 0$  seçilir ve cebirsel işlemler sonrasında denklem (4.177)'den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = \frac{1}{3\omega^2} \alpha_1 a_0^2, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \omega_2 = \left(\frac{3}{4} \alpha_2 - \frac{5}{6\omega^2} \alpha_1^2\right) a_0^2 \quad (4.178)$$

Frekans denklemi

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon^2 a_0^2 \left(\frac{3}{4} \alpha_2 - \frac{5}{6\omega^2} \alpha_1^2\right) \quad (4.179)$$

şeklindedir. İfade çözümlürse frekans,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2}\right)^2 - \frac{10\varepsilon^2 \alpha_1^2 a_0^2}{3\omega_0^4}}} \quad (4.180)$$

şeklinde elde edilir.

Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0^2}{6\omega^2} [2 \cos(\omega t) + \cos(2\omega t) - 3] + O(\varepsilon^2) \quad (4.181)$$

Daha önce de belirtildiği gibi geçerli çözümler için yakınsama kriteri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega^2} \ll 1 \quad (4.182)$$

#### 4.5.3 Yöntemlerin Karşılaştırılması

İki yöntem ile elde edilen yakınsama kriterleri,  $\varepsilon$  parametresinin büyük değerleri için karşılaştırılır ise çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilen yakınsama kriteri (4.162), sağlanmaz iken MSLP yöntemi ile elde edilen yakınsama kriteri (4.182) sağlanmaktadır. Bunu test etmek için limit almak yeterlidir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega^2} = \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega_0^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( 1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2} \right)^2 - \frac{10\varepsilon^2 \alpha_1^2 a_0^2}{3\omega_0^4}} \right]} = 0 \ll 1 \quad (4.183)$$

Çözüm (4.181)'de düzeltme terimi her durumda başlangıç teriminden küçüktür. Ancak bu durum çözüm (4.160) için söylenemez. Çünkü  $\omega_0$  paydada sabit olarak bulunmaktadır bu yüzden büyük  $\varepsilon$  değerleri için düzeltme terimi başlangıç teriminden büyük olmaktadır.

İki metot ile elde edilen frekanslar karşılaştırılabilir. Bu durum Taylor açılımında

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x \quad (x \ll 1) \text{ yaklaşıklığı kullanılarak açıklanabilir. Çok zaman ölçekli yöntem ile}$$

elde edilen frekans denklemi (4.161), MSLP yöntemi ile elde edilen frekansın (4.180) Taylor açılımıdır. Sonuç olarak denklem (4.161), denklem (4.180)'nin yaklaşık değeridir.

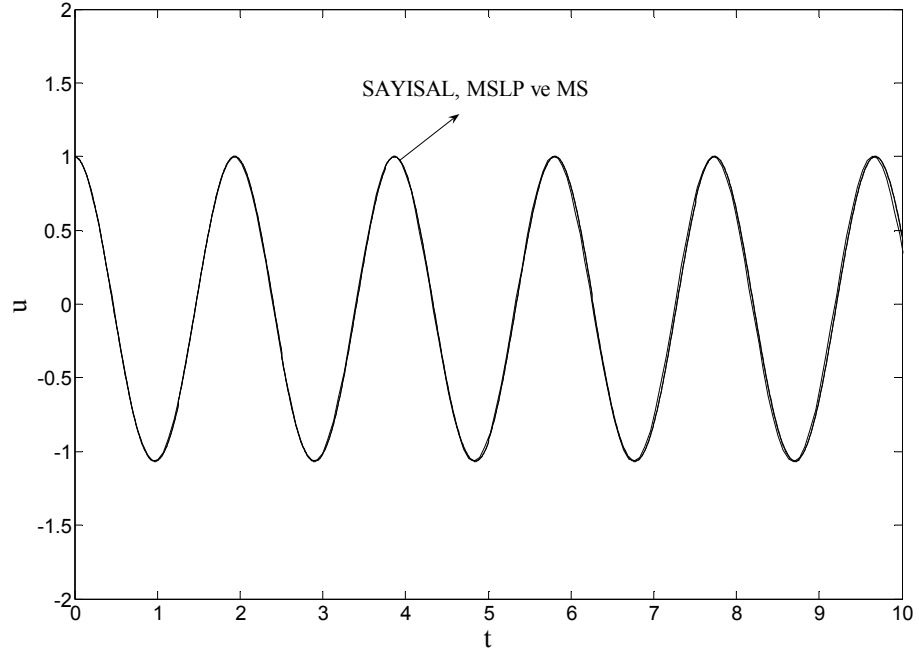
Sonuçların karşılaştırılması açısından, bulunan analitik çözümlerin genlik-zaman grafikleri ve sayısal çözümler ele alınmıştır. Şekiller 4.8-4.10' da  $\omega_0 = \pi$ ,  $a_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  olarak seçilmiştir. Şekil 4.8' de sonuçlar  $\varepsilon = 1$  için karşılaştırılmıştır. Sayısal çözüm ile bulunan analitik çözümler çakışmaktadır. Şekil 4.9'da nonlineerlik artırılmıştır ( $\varepsilon = 10$ ). MSLP çözümü, sayısal

çözüm ile uyum içinde olmasına rağmen çok zaman ölçekli yöntemle ait çözüm diğerlerinden ayrılmaktadır.

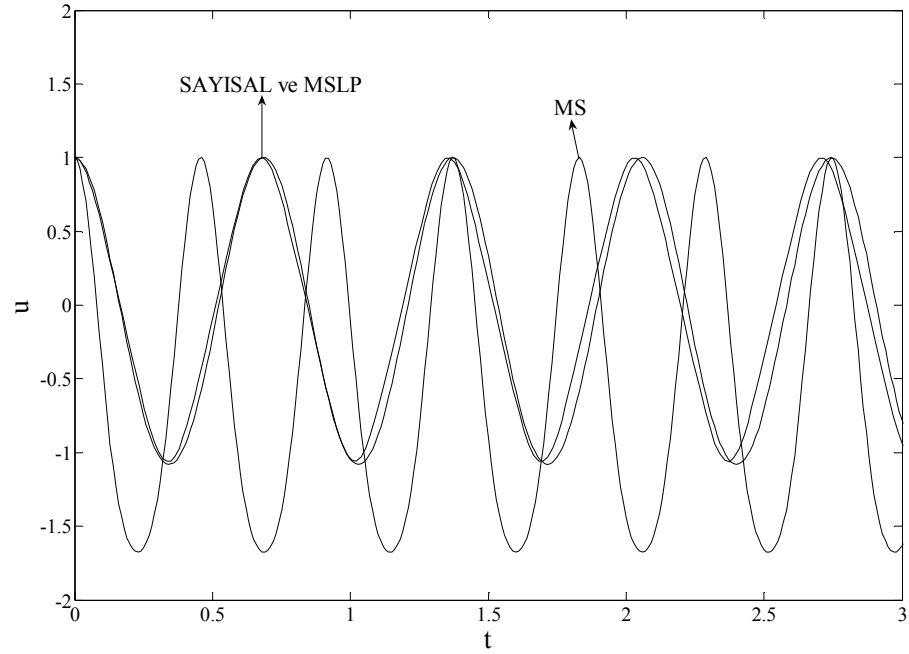
Şekil 4.10'da sonuçlar  $\varepsilon = 100$  için karşılaştırılmıştır. Sayısal çözüm ile MSLP çözüm uyum içinde olmasına rağmen çok zaman ölçekli yöntemle yapılan çözüm gerçekçi sonuçlar vermemektedir. Hem genlik hem de frekans olarak sayısal çözümden çok farklı bir hal almıştır.

Şekiller 4.11,4.12 ve 4.13' de,  $\varepsilon = 1$  alınmıştır. Kuadratik ve kübik nonlinear terimlerin katsayıları ise büyük alınarak her bir nonlinearliğin çözüme etkisi araştırılmıştır. Şekil 4.11'de  $\alpha_2 = 10$  alınmıştır. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yönteminin genlik değerlerinin sayısal çözüm ile uygun sonuçlar vermesine karşın çok zaman ölçekli yöntemin frekans değerlerinde sapmalar gözlemlenmiştir. Şekil 4.12'de  $\alpha_2 = 100$  alınmıştır. Çok zaman ölçekli yöntemin genlik değerlerinin sayısal çözüm ile uyum için de olmasına karşın frekans değerleri, MSLP yöntemi ve sayısal çözümden çok farklı bir hal almıştır. Son olarak şekil 4.12'deki bütün terimler aynı kalmış sadece  $\alpha_1 = 10$  alınarak şekil 4.13 oluşturulmuştur. Görüldüğü gibi çok zaman ölçekli yöntemin genlik ve frekans değerleri sayısal ve MSLP yöntem ile uyumlu değildir.

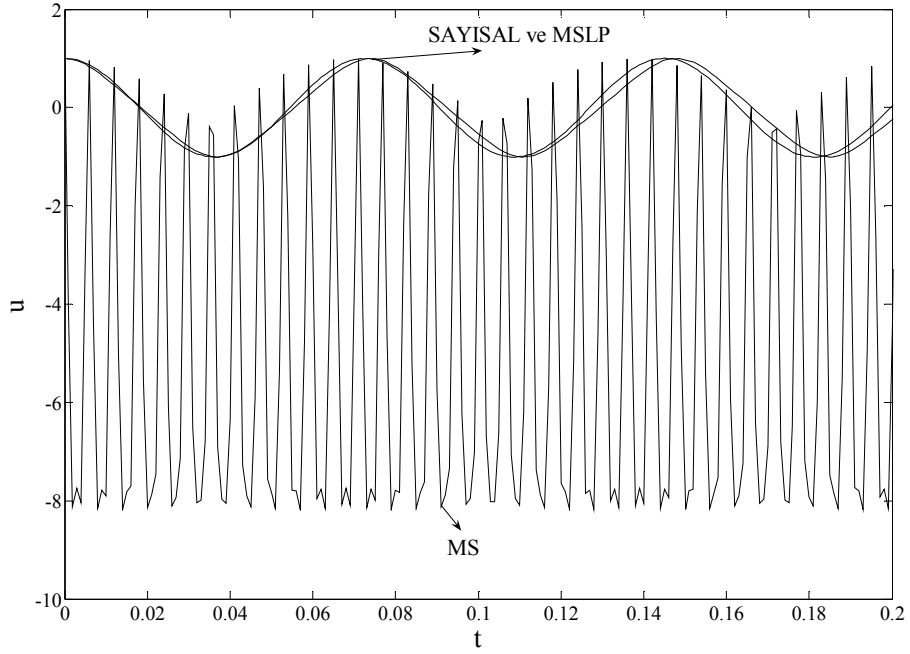
Şekillerden anlaşılacağı üzere kuvvetli nonlinear sistemlerde, MSLP çözümü sayısal çözüm ile uyum içinde olmasına karşın çok zaman ölçekli yöntem çözümü geçerli sonuçlar vermemektedir.



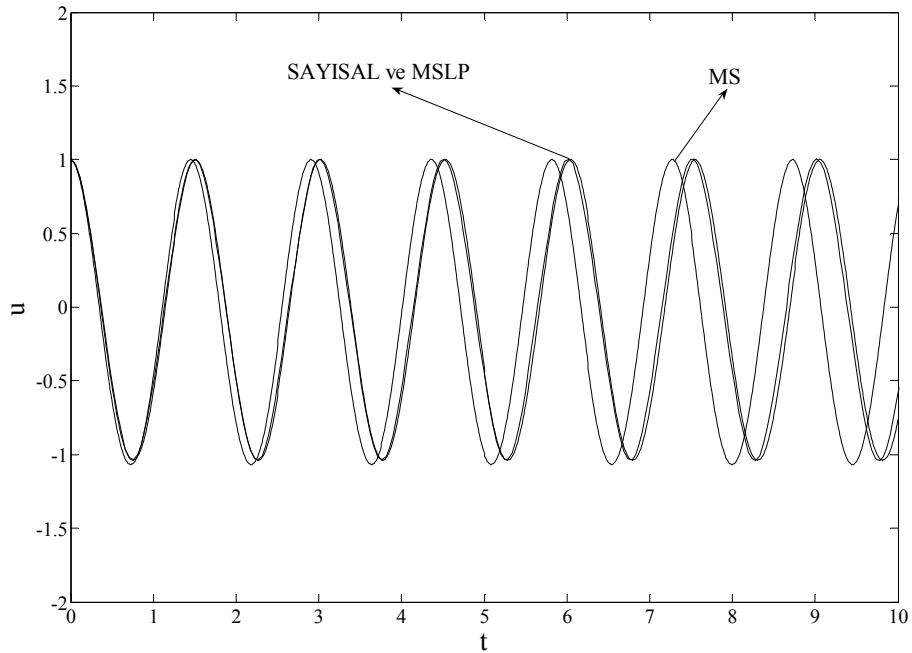
**Şekil 4.8.** Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\varepsilon = 1 (a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$



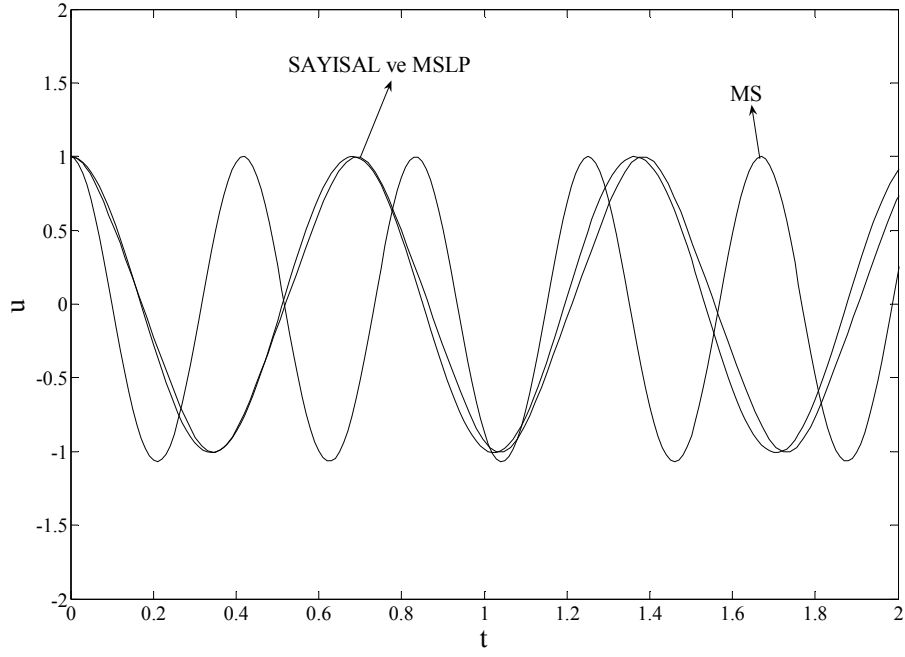
**Şekil 4.9.** Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\varepsilon = 10 (a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$



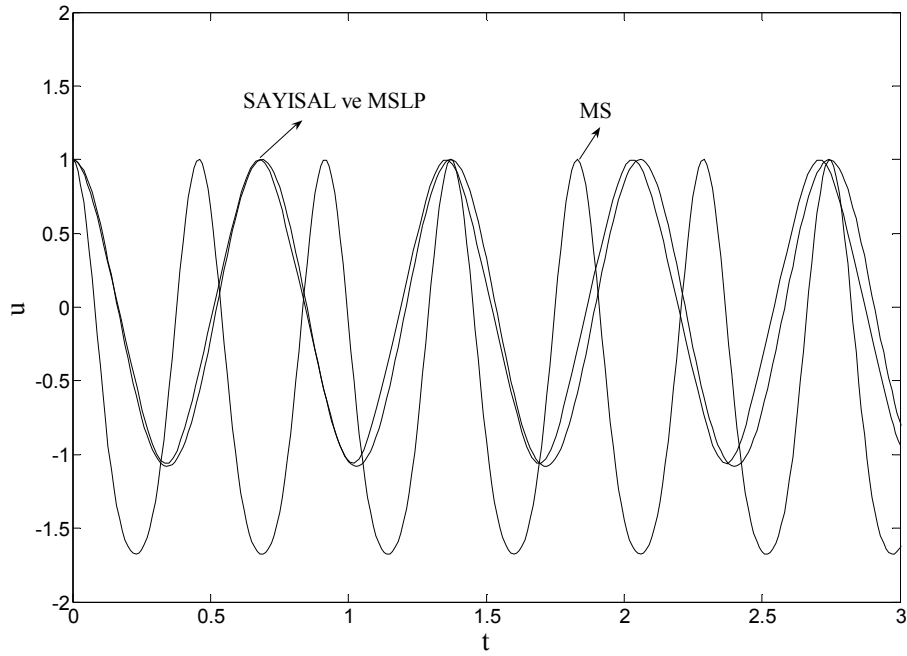
**Şekil 4.10.** Kuadratik ve kübik nonlineer sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\varepsilon = 100 (a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$



**Şekil 4.11.** Kuadratik ve kübik nonlineer sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\alpha_2 = 10 (\varepsilon = 1, a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1)$



**Şekil 4.12.** Kuadratik ve kübik nonlineer sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\alpha_2 = 100$  ( $\varepsilon = 1, a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1$ )



**Şekil 4.13.** Kuadratik ve kübik nonlineer sistem için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 100$  ( $\varepsilon = 1, a_0 = 1, \omega_0 = \pi$ )



Tam ve yaklaşık periyotların karşılaştırılması için Hu[18] yayınından yararlanarak tam periyot hesaplanır. Bunun için denklem (4.141),

$$\dot{u} \frac{du}{du} + \omega_0^2 u + \varepsilon \alpha_1 u^2 + \varepsilon^2 \alpha_2 u^3 = 0 \quad (4.184)$$

yada

$$u du = -(\omega_0^2 u + \varepsilon \alpha_1 u^2 + \varepsilon^2 \alpha_2 u^3) du \quad (4.185)$$

şeklinde ifade edilir. İki tarafın integralleri alınır

$$\frac{\dot{u}^2}{2} = c - (\omega_0^2 \frac{u^2}{2} + \varepsilon \alpha_1 \frac{u^3}{3} + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{u^4}{4}) \quad (4.186)$$

ifadesi elde edilir.  $u(0) = a_0$ ,  $\dot{u}(0) = 0$  başlangıç şartları kullanılarak  $c$  sabiti aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$c = \omega_0^2 \frac{a_0^2}{2} + \varepsilon \alpha_1 \frac{a_0^3}{3} + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{a_0^4}{4} \quad (4.187)$$

En büyük (Maksimum) ve en küçük (minumum) genliklerin simetrik olmayan davranışlar göstermesinden dolayı  $u(0) = -b_0$ ,  $\dot{u}(0) = 0$  başlangıç şartları kullanılarak  $c$  sabiti aşağıdaki gibi de ifade edilir.

$$c = \omega_0^2 \frac{b_0^2}{2} - \varepsilon \alpha_1 \frac{b_0^3}{3} + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{b_0^4}{4} \quad (4.188)$$

$c$  ifadeleri birbirlerine eşitlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\omega_0^2 \frac{a_0^2}{2} + \varepsilon \alpha_1 \frac{a_0^3}{3} + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{a_0^4}{4} = \omega_0^2 \frac{b_0^2}{2} - \varepsilon \alpha_1 \frac{b_0^3}{3} + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{b_0^4}{4} \quad (4.189)$$

$b_0$  sabiti,  $a_0$  cinsinden

$$b_0 = \frac{4\varepsilon\alpha_1 + 3\varepsilon^2 a_0 \alpha_2}{9\varepsilon^2 \alpha_2} + \frac{\sqrt[3]{2}(-16\varepsilon^2 \alpha_1^2 + 12\varepsilon^3 a_0 \alpha_1 \alpha_2 + 18\varepsilon^4 a_0^2 \alpha_2^2 + 54\varepsilon^2 \alpha_2 \omega_0^2)}{9\varepsilon^2 \alpha_2 \sqrt[3]{D}} - \frac{1}{9\sqrt[3]{2\varepsilon^2 \alpha_2}} \sqrt[3]{D} \quad (4.190)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$D = -128\varepsilon^3 \alpha_1^3 + 144\varepsilon^4 a_0 \alpha_1^2 \alpha_2 - 540\varepsilon^5 a_0^2 \alpha_1 \alpha_2^2 - 540\varepsilon^6 a_0^3 \alpha_2^3 + 648\varepsilon^3 \alpha_1 \alpha_2 \omega_0^2 - 972\varepsilon^4 a_0 \alpha_2^2 \omega_0^2 + (4(-16\varepsilon^2 \alpha_1^2 + 12\varepsilon^3 a_0 \alpha_1 \alpha_2 + 18\varepsilon^4 a_0^2 \alpha_2^2 + 54\varepsilon^2 \alpha_2 \omega_0^2)^3 + (-128\varepsilon^3 \alpha_1^3 + 144\varepsilon^4 a_0 \alpha_1^2 \alpha_2 - 540\varepsilon^5 a_0^2 \alpha_1 \alpha_2^2 - 540\varepsilon^6 a_0^3 \alpha_2^3 + 648\varepsilon^3 \alpha_1 \alpha_2 \omega_0^2 - 972\varepsilon^4 a_0 \alpha_2^2 \omega_0^2)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.191)$$

şeklinde alınır. Denklem (4.186), denklemler (4.187) ve (4.188) kullanılarak integre edilir ve tam periyot aşağıdaki gibi bulunur.

$$T_{Tam} = \int_0^{a_0} \frac{2du}{\sqrt{\omega_0^2(a_0^2 - u^2) + \varepsilon\alpha_1 \frac{2}{3}(a_0^3 - u^3) + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{1}{2}(a_0^4 - u^4)}} + \int_0^{b_0} \frac{2du}{\sqrt{\omega_0^2(b_0^2 - u^2) - \varepsilon\alpha_1 \frac{2}{3}(b_0^3 - u^3) + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{1}{2}(b_0^4 - u^4)}} \quad (4.192)$$

İki yöntem ile elde edilen frekanslar, (4.161) ve (4.180) kullanılarak  $\frac{2\pi}{\omega}$  ifadesi ile yaklaşık periyot hesaplanır. İki yöntem ile elde edilen yaklaşık periyotlar çizelge 4.1'de tam periyot ile karşılaştırılmıştır.

**Çizelge 4.1-** Tam periyot ile yaklaşık periyotların karşılaştırılması ( $\omega_0 = \pi$ ,  $a_0 = 1$ )

$\varepsilon$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$T_{Tam}$	$T_{MSLP}$	$T_{MS}$
0.1	1	1	1.99932	1.99933	1.99933
1	1	1	1.93064	1.9353	1.93476
10	1	1	0.676929	0.686058	0.457478
100	1	1	0.0738659	0.0725096	0.00591402
1	1	10	1.50381	1.50969	1.45383
1	1	100	0.691863	0.68207	0.417078
1	10	100	0.676929	0.686058	0.457478

Görüldüğü gibi, zayıf nonlinear sistemlerde, tam ve yaklaşık periyotlar uyum içindedir. Kuvvetli nonlinear sistemlerde ise tam periyot ile MSLP periyodu uyum içinde olmasına rağmen çok zaman ölçekli yöntem ile elde edilen periyot çok farklı bir hal almaktadır.

#### 4.6. Uygulama Problemi 5 (Sönümlü ve Zorlamalı Kübik Nonlinear Sistem)

Bu bölümde çok zaman ölçekli ve Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) yöntemleri sönümlü ve zorlamalı kübik nonlinear denkleme uygulanıp baskın rezonans durumu incelenecektir. Çok zaman ölçekli yöntem ve MSLP yöntemin frekans tepki grafikleri sayısal çözümler ile karşılaştırılacaktır.

Aşağıdaki sönümlü ve zorlamalı kübik nonlinear denklem ele alınır.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon^2 \mu \dot{u} + \varepsilon \alpha u^3 = \varepsilon^2 f \cos \Omega t \quad (4.193)$$

##### 4.6.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.194)$$

Zaman türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.195)$$

Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır,

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.196)$$

bu açılım denklem (4.193)'e yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1) : D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (4.197)$$

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \alpha u_0^3 \quad (4.198)$$

$$O(\varepsilon^2) : D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - 2\mu D_0 u_0 - 3u_0^2 u_1 + f \cos \Omega T_0 \quad (4.199)$$

Birinci mertebedeki çözüm,

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + ke \quad (4.200)$$

şeklinde yazılır. Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (4.201)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci merteye çözüm

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(\omega_0 t + \beta(T_1, T_2)) \quad (4.202)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (4.200), denklem (4.198)'e yerleştirilir ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$2i\omega_0 D_1 A = -3\alpha A^2 \bar{A} \quad (4.203)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (4.201), denklem (4.203)' de yerine konur ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a(T_2), \quad \beta = \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2 T_1 + \beta_0(T_2) \quad (4.204)$$

$\varepsilon$  mertebesindeki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = \frac{\alpha}{8\omega_0^2} A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + ke = \frac{\alpha}{32\omega_0^2} a^3 \cos(3\omega_0 T_0 + 3\beta) \quad (4.205)$$

Son mertebede, denklemler (4.205) ve (4.200), denklem (4.199)'da yerine konur ve zorlama frekansı da

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma \quad (4.206)$$

alınarak baskın rezonans durumu için seküler terimleri yok edecek denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$2i\omega_0 D_2 A + D_1^2 A + 2\mu i \omega_0 A + \frac{3\alpha^2}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 - \frac{f}{2} e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (4.207)$$

Yüksek mertebeden çözümlerde genlik ve faz modülasyon denklemlerini tanımlamak için reconstitution metot [19] kullanılır. Bu yüzden  $D_2 A$ 'yı tanımlamak için denklem (4.203)'den elde edilen  $D_1 A$  ifadesi denklem (4.207)'de yerine konur ve aşağıdaki ifade elde edilir.

$$2i\omega_0 D_2 A = \frac{15\alpha^2}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 - 2\mu i \omega_0 A + \frac{f}{2} e^{i\sigma T_2} \quad (4.208)$$

Kompleks genlik modülasyon denklemleri

$$2i\omega_0 \frac{dA}{dt} = 2i\omega_0 (\varepsilon D_1 A + \varepsilon^2 D_2 A) \quad (4.209)$$

yada

$$2i\omega_0 \frac{dA}{dt} = \varepsilon(-3\alpha A^2 \bar{A}) + \varepsilon^2 \left( \frac{15\alpha^2}{8\omega_0^2} A^3 \bar{A}^2 - 2\mu i \omega_0 A + \frac{f}{2} e^{i\sigma T_2} \right) \quad (4.210)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (4.210)'da kutupsal form kullanır, gerçel ve sanal kısımlar ayrılarak genlik faz modülasyon denklemleri elde edilir.

$$\dot{a} = \varepsilon^2 \left( -\mu a + \frac{f}{2\omega_0} \sin \gamma \right) \quad (4.211)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{3\varepsilon\alpha}{8\omega_0} a^2 + \varepsilon^2 \left( \sigma + \frac{15\alpha^2}{256\omega_0^3} a^4 + \frac{f}{2a\omega_0} \cos \gamma \right) \quad (4.212)$$

Faz

$$\gamma = \sigma T_2 - \beta \quad (4.213)$$

şeklinde tanımlanır. Düzgün rejim çözümü için  $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$  alınır. Buradan  $\sigma$  ayar parametresi bulunur, denklem (4.206)'da yerine konur ve aşağıdaki frekans tepki bağıntısı elde edilir.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \left( \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2 \right) + \varepsilon^2 \left( -\frac{15\alpha^2}{256\omega_0^3} a^4 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4a^2\omega_0^2} - \mu^2} \right) \quad (4.214)$$

Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u = a \cos(\Omega t - \gamma) + \varepsilon \frac{\alpha a^3}{32\omega_0^2} \cos[3(\Omega t - \gamma)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.215)$$

Genlik ve faz modülasyon denklemleri, (4.211) ve (4.212)'de belirtildiği gibidir.

#### 4.6.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklem (4.193)'e  $\tau = \omega t$  zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + 2\varepsilon^2 \mu \omega u' + \varepsilon \alpha u^3 = \varepsilon^2 f \cos \frac{\Omega}{\omega} T_0 \quad (4.216)$$

elde edilir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden şu şekilde ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4.217)$$

Yeni zaman türevleri

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (4.218)$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken ve tabii frekans

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (4.219)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (4.220)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılımlar denklem (4.216)'ya yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (4.221)$$

$$O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - \alpha u_0^3 \quad (4.222)$$

$$O(\varepsilon^2) : \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - 2\mu \omega D_0 u_0 - 3\alpha u_0^2 u_1 + f \cos \frac{\Omega}{\omega} T_0 \quad (4.223)$$

Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A e^{iT_0} + k e = a \cos(T_0 + \beta) \quad (4.224)$$

şeklinde yazılır. Birinci merteye çözüm denklem (4.222)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_1 A + \omega_1 A - 3\alpha A^2 \bar{A} = 0 \quad (4.225)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede

$$D_1 A = 0 \Rightarrow A = A(T_2) \quad (4.226)$$

seçildiğinde  $\omega_1$  sanal olmaz, bu yüzden yapılan seçim uygundur. Bu seçime göre

$$\omega_1 = 3\alpha A \bar{A} = \frac{3}{4} \alpha a^2 \quad (4.227)$$

elde edilir.  $\varepsilon$  mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = \frac{\alpha}{8\omega^2} A^3 e^{3iT_0} + ke = \frac{\alpha}{32\omega^2} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (4.228)$$

Son mertebede zorlama frekansı ile dönüşüm frekansı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Omega = \omega (1 + \varepsilon^2 \sigma) \quad (4.229)$$

Son mertebede denklemler (4.224), (4.228) ve (4.229); denklem (4.223)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$-2i\omega^2 D_2 A + \omega_2 A - 2\mu i \omega A - \frac{3\alpha^2}{8\omega^2} A^3 \bar{A}^2 + \frac{f}{2} e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (4.230)$$

şeklinde ifade edilir. Seküler ifadede  $D_2 A = 0$  seçilirse  $\omega_2$  sanal olacaktır bu da uygun bir seçim değildir. Bu yüzden

$$\omega_2 = 0 \quad (4.231)$$

seçilir ve aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-2i\omega^2 D_2 A - 2\mu i \omega A - \frac{3\alpha^2}{8\omega^2} A^3 \bar{A}^2 + \frac{f}{2} e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (4.232)$$



Denklem (4.232)'de kutupsal form kullanır, gerçel ve sanal kısımlar ayrılarak genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir.

$$D_2 a = -\frac{\mu}{\omega} a + \frac{f}{2\omega^2} \sin \gamma \quad (4.233)$$

$$D_2 \gamma = \sigma - \frac{3\alpha^2}{256\omega^4} a^4 + \frac{f}{2a\omega^2} \cos \gamma \quad (4.234)$$

Burada faz

$$\gamma = \sigma T_2 - \beta \quad (4.235)$$

şeklinde tanımlanır. Düzgün rejim çözümü için  $D_2 a = 0$  ve  $D_2 \gamma = 0$  olmalıdır. Denklemler (4.233) ve (4.234)'den

$$\sigma = \frac{3\alpha^2}{256\omega^4} a^4 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4a^2\omega^4} - \left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2} \quad (4.236)$$

elde edilir. Denklem (4.229)'dan frekans tepki bağıntısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Omega = \omega \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{3\alpha^2}{256\omega^4} a^4 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4a^2\omega^4} - \left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2} \right) \right] \quad (4.237)$$

Burada

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} \alpha a^2} \quad (4.238)$$

olarak tanımlanır.

Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u = a \cos(\Omega t - \gamma) + \varepsilon \frac{\alpha}{32\omega^2} a^3 \cos[3(\Omega t - \gamma)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.239)$$

Genlik ve faz modülasyon denklemleri

$$\dot{a} = \varepsilon^2 \left( -\mu a + \frac{f}{2\omega} \sin \gamma \right) \quad (4.240)$$

$$\dot{\gamma} = \varepsilon^2 \left( \omega\sigma - \frac{3\alpha^2}{256\omega^3} a^4 + \frac{f}{2a\omega} \cos \gamma \right) \quad (4.241)$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.6.3 Yöntemlerin Karşılaştırılması

Bilindiği üzere perturbasyon çözümlerinin geçerli olabilmesi için düzeltme teriminin başlangıç teriminden çok küçük olması gerekmektedir. İki yöntem için bu durumu sağlayan yakınsama kriterleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon\alpha a^2}{32\omega_0^2} \ll 1 \quad (\text{Çok zaman ölçekli yöntem}) \quad (4.242)$$

$$\frac{\varepsilon\alpha a^2}{32\omega^2} \ll 1 \quad (\text{MSLP yöntemi}) \quad (4.243)$$

Görüldüğü gibi kriterlerdeki tek fark MSLP metotta  $\omega_0$ 'ın yerini  $\omega$  almıştır. Kuvvetli nonlineerlik için  $\alpha$  büyük olmalıdır. Çok zaman ölçekli yöntem için kriterin limiti alınır.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon\alpha}{32\omega_0^2} a^2 = \infty \quad (4.244)$$

Beklendiği gibi limit sonsuz değerindedir. Bu yüzden çok zaman ölçekli yöntem çözümü, büyük  $\alpha$  değerleri için geçerli sonuçlar vermemektedir. MSLP yöntemi için limit alınır ise

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega^2} a^2 = \frac{\varepsilon \alpha a^2}{32 \left( \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3\alpha}{4} a^2 \right)} = \frac{1}{24} \ll 1 \quad (4.245)$$

görüldüğü üzere MSLP yöntemi,  $\alpha$ 'nın büyük değerleri için perturbasyon şartlarına uygun sonuç vermiştir.

İki yöntem için bulunan frekans tepki bağıntısı, sönümlü zorlamalı kübik nonlinear denklemin sayısal çözümü ile karşılaştırılır.

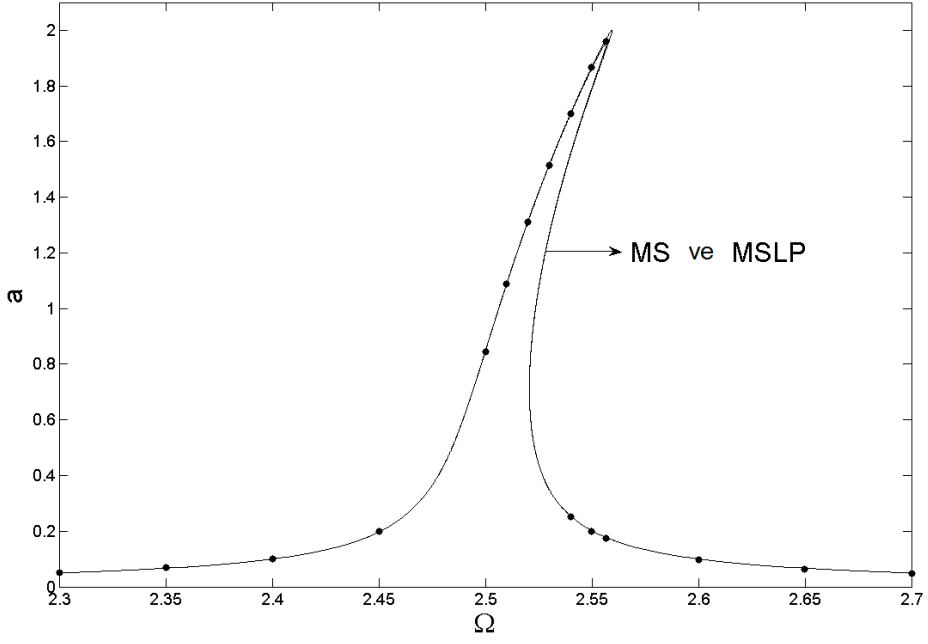
Şekil 4.14'de  $\alpha=1$  seçilmiştir yani zayıf nonlinearlik durumu ele alınmıştır. Beklendiği üzere iki yöntem için bulunan frekans tepki grafiği çakışmaktadır. Grafik üzerinde noktalar ile gösterilen sayısal çözümlerin iki yöntemin frekans tepki grafiği ile uyumlu sonuçlar verdiği görülmektedir.

Şekil 4.15'de kübik nonlinearlik büyük ölçüde artırılmıştır ( $\alpha=100$ ). Çok zaman ölçekli yöntem için fiziksel olmayan çözümler görülür iken MSLP yöntemi ve sayısal çözümler birbirleri ile uygun sonuçlar vermiştir.

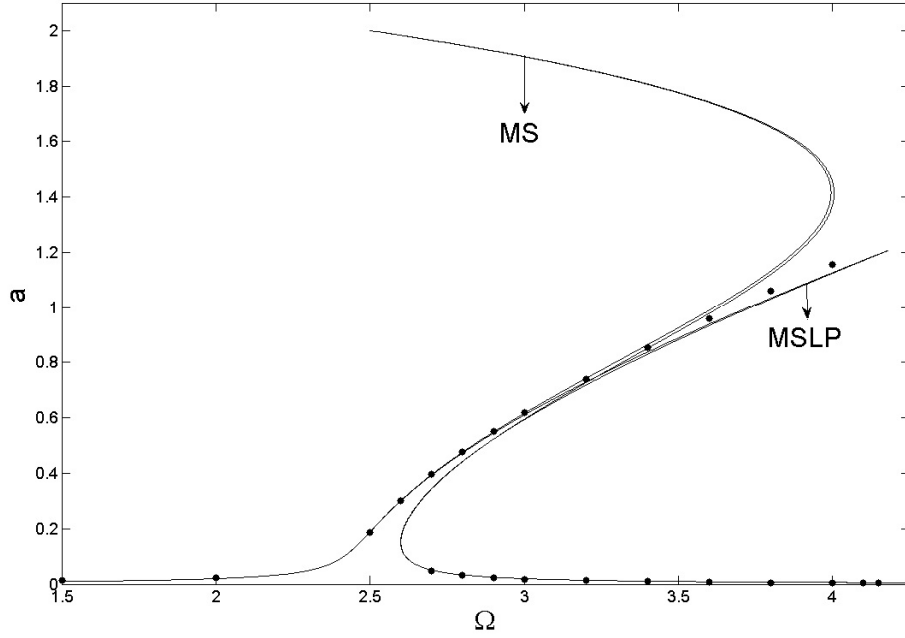
Şekil 4.16'de  $\alpha=1000$  alınmıştır. Görüldüğü gibi grafikler şekil 4.15 ile aynı eğilimdedir. MSLP ve sayısal çözümler uyumluluk gösterir iken çok zaman ölçekli yöntem çözümü fiziksel olmayan sonuçlar vermektedir.

Şekil 4.17'de çözümler; zayıf nonlinearlik ( $\alpha=1$ ), dış zorlama genliğinin artırılıp ( $f=10$ ) sönüm katsayısının azaltılması ( $\mu=0.2$ ) durumu için incelendiğinde çok zaman ölçekli yöntem çözümü, sayısal çözüm tarafından doğrulanmayan aralıkta sonuç verir iken MSLP çözümü sayısal çözüm ile uyum içindedir.

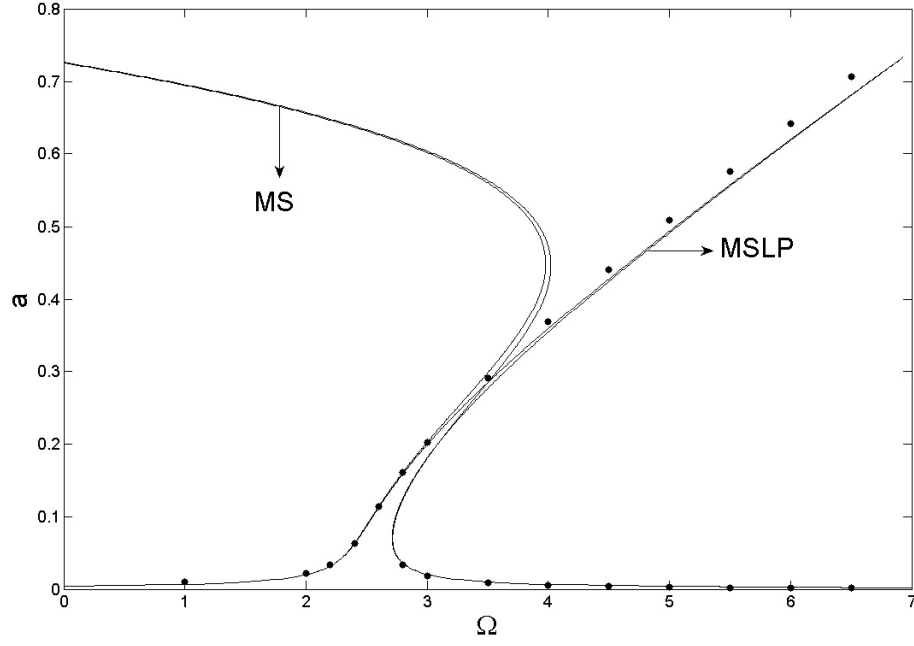
Son olarak şekil 4.18'de dış zorlama daha da artırıldığında ( $f=20$ ); çok zaman ölçekli yöntem fiziksel olmayan çözümler verir iken MSLP yöntemi sayısal çözümle uyumluluk göstermektedir.



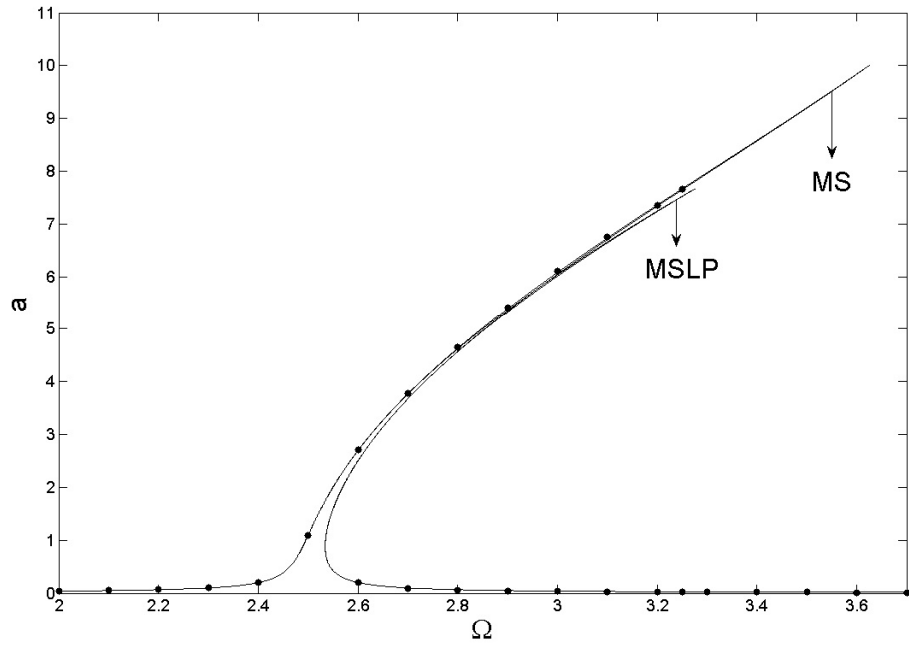
**Şekil 4.14.** Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler(noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1$ ,  $f=5$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.5$ )



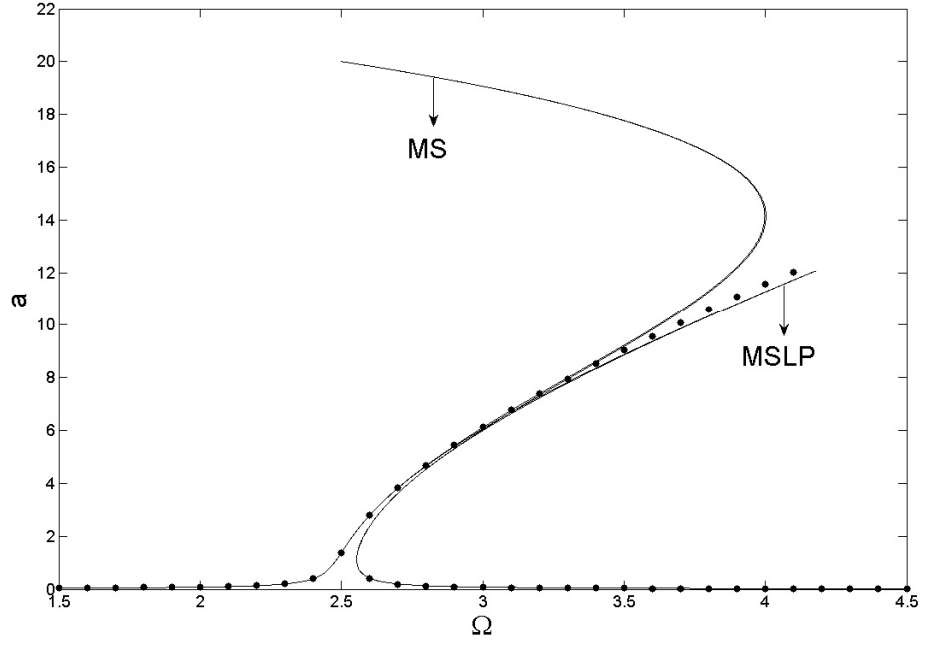
**Şekil 4.15.** Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler(noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=100$ ,  $f=5$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.5$ )



**Şekil 4.16.** Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler(noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1000$ ,  $f=5$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.5$ )



**Şekil 4.17.** Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler(noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1$ ,  $f=10$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.2$ )



**Şekil 4.18.** Çok zaman ölçekli ve MSLP yöntemlerinin frekans-tepki grafiklerinin sayısal çözümler(noktalar ile gösterilen) ile karşılaştırılması ( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1$ ,  $f=20$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.2$ )

## 5. MULTIPLE SCALES LINDSTEDT POINCARÉ (MSLP) YÖNTEMİNİN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Bu bölümde genel operatör notasyonu ile ilgili bilgiler verilecek ve yapılmış çalışmalar üzerinde durulacaktır. Ardından genel operatör notasyonu kullanılarak, yeni yöntem kuadratik ve kübik nonlinear kısmi diferansiyel denkleme uygulanacaktır.

### 5.1. Genel Operatör Notasyonu

Fiziksel sistemler, matematik modeli kurulduktan sonra analiz edilir. Matematik model ise çoğunlukla diferansiyel denklemler yardımıyla tanımlanır. Farklı mühendislik problemlerinde her bir problem için ayrı matematik model kurup ayrı bir çözüm üretmek yerine, birçok problemi kapsayan genel bir model önermek ve bu modele ait bir genel çözüm algoritması üretmek büyük kolaylıklar sağlar [27]. Mekanik titreşimler konusunda bir genel model ve genel çözüm algoritması ilk olarak Pakdemirli [21] tarafından ortaya atılmıştır. Pakdemirli kısmi diferansiyel bir modelde nonlineariteleri genel yapıda ele alan bir operatör geliştirmiştir. Bahsedilen çalışmada [21] kuadratik ve kübik nonlinearliğe sahip genel bir sistem için direkt perturbasyon yöntemi ile diskritizasyon perturbasyon yöntemleri karşılaştırılmıştır. Benzer bir karşılaştırma Nayfeh tarafından nonlinear valf problemi için yapılmıştır [28]. Pakdemirli ve Boyacı, zorlamalı bir sistemde perturbasyon yöntemlerini sonsuz mod için karşılaştırmışlardır [22]. Pakdemirli ve Boyacı, kuadratik ve kübik nonlinear, sönümlü ve zorlanmış titreşimleri genel notasyon kullanarak modellemiş ve bu modelde baskın, alt-üst harmonik rezonansları ve kombinasyon tip rezonansları incelemiştir [29]. Pakdemirli ve Boyacı diskritizasyon ve direkt perturbasyon yöntemlerini lineer bir genel model için karşılaştırmışlardır [30]. Boyacı ve Pakdemirli, kübik ve hem kuadratik hem kübik nonlinearlik içeren iki genel modeli incelemiştir. Uygulama problemleri olarak basit mesnetli, nonlinear elastik bir zemine oturmuş kiriş titreşimi ile nonlinear sicism titreşim problemlerini ele almışlardır [31]. Etkileşimli denklemler için bir genel model Pakdemirli tarafından ortaya atılmıştır [32]. Bahsedilen çalışmada uygulama problemi olarak nonlinear kablo titreşim problemi ele alınmıştır. Pakdemirli aynı genel hareket denkleminde iç rezonansları incelemiştir [23]. Pakdemirli yüksek mertebede tekil nonlinear modelde çok zaman ölçekli metodların karşılaştırmasını yapmıştır [33]. Pakdemirli ve Özkaya, kübik nonlinear bir genel model için 3:1 iç rezonansları incelemiştir. Uygulama problemi olarak nonlinear elastik temele oturmuş Euler-Bernoulli kirişinin titreşimlerini incelemiştir [34]. Ardından kuadratik nonlinear sistemlerde 2:1 iç rezonansları incelemiştir [35]. Özhan ve Pakdemirli, daha önce yapılmış çalışmalardan farklı olarak, sürekli ortamların nonlinear titreşimlerine ait kübik nonlinear sistemlerde uygulamak üzere, mekâna bağlı türevleri içeren keyfi lineer ve kübik nonlinear operatörlerin yanında hem zamana hem mekâna bağlı türevleri içeren keyfi lineer ve

kübik nonlinear operatörleri ilk defa kullanmışlardır. Bu şekilde hem zaman hem mekâna bağlı operatörlerin olması, diğer nonlinear titreşim problemlerinin yanısıra çok geniş bir uygulama alanı olan aksnel hareketli sürekli ortamlara ait nonlinear titreşimleri de genel operatör notasyonu ile incelemeyi mümkün kılmıştır. İlk olarak genel modelde baskın rezonans durumunu incelemişlerdir [36]. Bahsedilen çalışmada uygulama problemi olarak aksnel hareketli Euler Bernoulli kirişi ve aksnel hareketli viskoelastik kirişin nonlinear titreşimleri analiz edilmiştir. Ardından Özhan ve Pakdemirli genel modelde 3:1 iç rezonans durumunu ele almışlardır [37]. Uygulama problemi olarak yine aksnel hareketli Euler Bernoulli kirişi ve aksnel hareketli viskoelastik kirişin nonlinear titreşimlerini incelemişlerdir.

Genel operatör notasyonu başka araştırmacılar tarafından da kullanılmıştır. [38,39]

MSLP yönteminin çok zaman ölçekli yöntemle göre avantajlarını belirlemede önceki çalışmalara benzer şekilde genel matematik operatör yaklaşımı kullanılacaktır.

## 5.2. Yöntemin Uygulama Basamakları

Önerilen genel nonlinear kısmi diferansiyel denklem ve sınır şartları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\ddot{w} + \mathbf{L}(w) + \varepsilon \mathbf{Q}(w, w) + \varepsilon^2 \mathbf{C}(w, w, w) = 0 \quad (5.1)$$

$$\mathbf{B}_1(w) = 0 \quad x = 0, \quad \mathbf{B}_2(w) = 0 \quad x = 1 \quad (5.2)$$

$w(x, t)$  sürekli ortamın deplasmanını,  $x$  ve  $t$  mekanı ve zamanı temsil eden bağımsız değişkenlerdir.  $\mathbf{L}$  lineer diferansiyel operatörü (self adjoint operatör),  $\mathbf{Q}$  ve  $\mathbf{C}$  kuadratik ve kübik nonlinear operatörleri temsil etmektedir.  $\mathbf{B}_1$  ve  $\mathbf{B}_2$  sınır şartlarını belirleyen lineer operatörlerdir.  $\varepsilon$  küçük boyutsuz bir parametredir.  $(\dot{\phantom{w}})$  gösterimi, zamana göre türevi,  $(\phantom{w})'$  gösterimi ise mekâna bağlı türevi ifade eder. Kuadratik ve kübik operatörler genelde simetrik değildirler ve multilineer özelliğe sahiptirler.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(c_1 w_1 + c_2 w_2, c_3 w_3 + c_4 w_4, c_5 w_5 + c_6 w_6) = & c_1 c_3 c_5 \mathbf{C}(w_1, w_3, w_5) + c_1 c_3 c_6 \mathbf{C}(w_1, w_3, w_6) \\ & + c_1 c_4 c_5 \mathbf{C}(w_1, w_4, w_5) + c_1 c_4 c_6 \mathbf{C}(w_1, w_4, w_6) \\ & + c_2 c_3 c_5 \mathbf{C}(w_2, w_3, w_5) + c_2 c_3 c_6 \mathbf{C}(w_2, w_3, w_6) \\ & + c_2 c_4 c_5 \mathbf{C}(w_2, w_4, w_5) + c_2 c_4 c_6 \mathbf{C}(w_2, w_4, w_6) \end{aligned} \quad (5.3)$$



Kübik operatörler, diferansiyel veya integral yapıda olabilir. Sürekli ortamlarda sıkça karşılaşılan kübik operatörlere birkaç örnek aşağıdaki gibi verilebilir,

$$\begin{aligned} C(w, w, w) &= w^3, \quad C(w, w, w) = w'' \int_D w'^2 dx, \quad C(w, w, w) = w'' w'^2 \\ C(\dot{w}, w, w) &= \dot{w}' w' w'', \quad C(\dot{w}, w, w) = \dot{w}'' w'^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Genel olarak,

$$C(w_1, w_2, w_3) \neq C(w_1, w_3, w_2) \neq C(w_2, w_1, w_3) \neq C(w_2, w_3, w_1) \neq C(w_3, w_1, w_2) \neq C(w_3, w_2, w_1) \quad (5.5)$$

olduğu varsayılır.

Ortaya atılan genel modelin analitik çözümü bir perturbasyon yöntemi olan çok zaman ölçekli yöntem [20] ve MSLP yöntemi ile yapılacaktır.

### 5.2.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Bu bölümde denklem (5.1), çok zaman ölçekli yöntem ile çözülecektir. Genel modelde gösterilen sürekli ortam deplasmanı için aşağıdaki açılımı önerelim.

$$w(x, T_0, T_1; \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1) + \dots \quad (5.6)$$

Burada hızlı zaman ölçeği  $T_0 = t$ , yavaş zaman ölçekleri  $T_1 = \varepsilon t$  ve  $T_2 = \varepsilon^2 t$  olarak ifade edilmektedir. Zamana bağlı birinci ve ikinci türev ifadeleri ise,

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (5.7)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + \dots \quad (5.8)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Önerilen deplasman açılımı, gösterilen türev notasyonu kullanılarak denklem (5.1) ve (5.2)'ye yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1): D_0^2 w_0 + \mathbf{L}(w_0) = 0 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}_1(w_0) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_0) = 0 \quad x = 1 \quad (5.10)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 w_1 + \mathbf{L}(w_1) = -2D_0 D_1 w_0 - \mathbf{Q}(w_0, w_0) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (5.12)$$

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 w_2 + \mathbf{L}(w_2) = -2D_0 D_1 w_1 - 2D_0 D_2 w_0 - D_1^2 w_0 - \mathbf{Q}(w_0, w_1) - \mathbf{Q}(w_1, w_0) - \mathbf{C}(w_0, w_0, w_0) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{B}_2(w_2) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_2) = 0 \quad x = 1 \quad (5.14)$$

$O(1)$  mertebesindeki çözüm için aşağıdaki ifade önerilir.

$$w_0(x, T_0, T_1, T_2) = (A_n(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}_n(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0})Y_n(x) \quad (5.15)$$

Çözümde tanımlanan  $A_n$  ve  $\bar{A}_n$  terimleri kompleks genlik ve eşleniğidir.  $Y_n(x)$  fonksiyonu aşağıdaki denklemi ve sınır şartlarını sağlamaktadır.

$$\mathbf{L}(Y_n) - \omega_0^2 Y_n = 0 \quad (5.16)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_n) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(Y_n) = 0 \quad x = 1 \quad (5.17)$$

Denklem (5.15), denklem (5.11)'e yerleştirilirse,

$$D_0^2 w_1 + \mathbf{L}(w_1) = -2(i\omega_0 D_1 A_n e^{i\omega_0 T_0} + ke)Y_n - \mathbf{Q}(Y_n, Y_n) \{A_n^2 e^{2i\omega_0 T_0} + ke + 2A_n \bar{A}_n\} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (5.19)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (5.18)'in homojen halinin basit olmayan çözümü mevcutsa bu denklemin bir çözümünün olması, ancak çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır. Çözülebilirlik şartı ise aşağıdaki gibidir.

$$2i\omega_0 D_1 A_n \int_0^1 Y_n^2 dx = 0 \quad (5.20)$$

$$A_n = A_n(T_2) \quad (5.21)$$

$w_1$  çözümünün aşağıdaki formda olduğu düşünölsün.

$$w_1(x, T_0, T_2) = (A_n^2(T_2)e^{2i\omega_0 T_0} + ke)\phi_1(x) + 2A_n(T_2)\bar{A}_n(T_2)\phi_2(x) \quad (5.22)$$

$\phi_1(x)$  ve  $\phi_2(x)$  aşağıdaki denklemleri sağlamaktadır.

$$\mathbf{L}(\phi_1) - 4\omega_0^2 \phi_1 = -\mathbf{Q}(Y_n, Y_n) \quad , \quad \mathbf{L}(\phi_2) = -\mathbf{Q}(Y_n, Y_n) \quad (5.23)$$

Son mertebede, denklemler (5.15) ve (5.22), denklem (5.13)'e yerleştirilirse

$$D_0^2 w_2 + \mathbf{L}(w_2) = -2i\omega_0 D_2 A_n e^{i\omega_0 T_0} Y_n + A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_0 T_0} \{-\mathbf{Q}(Y_n, \phi_1) - \mathbf{Q}(\phi_1, Y_n) - 2\mathbf{Q}(Y_n, \phi_2) - 2\mathbf{Q}(\phi_2, Y_n) - 3\mathbf{C}(Y_n, Y_n, Y_n)\} + ke + SOT \quad (5.24)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (5.24)'ün homojen halinin basit olmayan çözümü mevcutsa bu denklemin bir çözümünün olması, ancak çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır. Çözülebilirlik şartı ise aşağıdaki gibidir.

$$2i\omega_0 D_2 A_n + \Gamma A_n^2 \bar{A}_n = 0 \quad (5.25)$$

$\Gamma$  katsayısı aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma = \int_0^1 Y_n \{\mathbf{Q}(Y_n, \phi_1) + \mathbf{Q}(\phi_1, Y_n) + 2\mathbf{Q}(Y_n, \phi_2) + 2\mathbf{Q}(\phi_2, Y_n) + 3\mathbf{C}(Y_n, Y_n, Y_n)\} dx \quad (5.26)$$

Genlik ve faz modölyasyon denklemlerini bulmak için kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_2) e^{i\beta_n(T_2)} \quad (5.27)$$

Denklem (5.27), denklem (5.25)'e yerleştirilir ve reel ve sanal kısımlarına ayrıştırılır ise

$$D_2 \beta_n = \frac{a_n^2 \Gamma}{8\omega_0} \quad \text{ve} \quad \omega_0 D_2 a_n = 0 \quad (5.28)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (5.28)'den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\beta_n = \frac{a_n^2 \Gamma}{8\omega_0} T_2 + \beta_0 \quad (5.29)$$

$$a_n = a_0 \quad (5.30)$$

Sistemin yaklaşık genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$w(x, t; \varepsilon) = a_0 \cos(\omega_0 t + \beta_n) Y_n + \varepsilon \frac{a_0^2}{2} \{\cos(2\omega_0 t + 2\beta_n) \phi_1 + \phi_2\} + O(\varepsilon^2) \quad (5.31)$$

### 5.2.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Genel matematik model bu bölümde yeni yöntem ile çözülecektir.

Denklem (5.1)' e

$$\tau = \omega t \quad (5.32)$$

zaman dönüşümü uygulanır ise

$$\omega^2 \ddot{w} + \mathbf{L}(w) + \varepsilon \mathbf{Q}(w, w) + \varepsilon^2 \mathbf{C}(w, w, w) = 0 \quad (5.33)$$

elde edilir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden şu şekilde ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (5.34)$$

Yeni zaman türevleri

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (5.35)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + \dots \quad (5.36)$$

şeklinde ifade edilir. Aşağıdaki seri açılımlarda

$$w(x, T_0, T_1, T_2; \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (5.37)$$

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 \quad (5.38)$$

denklem (5.33)'e yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır.

$$O(1): \omega^2 D_0^2 w_0 + \omega^2 \mathbf{L}(w_0) = 0 \quad (5.39)$$

$$\mathbf{B}_1(w_0) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_0) = 0 \quad x = 1 \quad (5.40)$$

$$O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 w_1 + \omega^2 \mathbf{L}(w_1) = -2\omega^2 D_0 D_1 w_0 + \omega_1 \mathbf{L}(w_0) - \mathbf{Q}(w_0, w_0) \quad (5.41)$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (5.42)$$

$$O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 w_2 + \omega^2 \mathbf{L}(w_2) = -2\omega^2 D_0 D_1 w_1 - \omega^2 (2D_0 D_2 w_0 + D_1^2 w_0) + \omega_1 \mathbf{L}(w_1) \\ + \omega_2 \mathbf{L}(w_0) - \mathbf{Q}(w_0, w_1) - \mathbf{Q}(w_1, w_0) - \mathbf{C}(w_0, w_0, w_0)$$

(5.43)

$$\mathbf{B}_1(w_2) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_2) = 0 \quad x = 1 \quad (5.44)$$

$O(1)$  mertebesindeki çözüm için aşağıdaki ifade önerilir.

$$w_0(x, T_0, T_1, T_2) = (A_n(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}_n(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0})Y_n(x) \quad (5.45)$$

Çözümde tanımlanan  $A_n$  ve  $\bar{A}_n$  terimleri kompleks genlik ve eşleniğidir.  $Y_n(x)$  fonksiyonu aşağıdaki denklemi ve sınır şartlarını sağlamaktadır.

$$\mathbf{L}(Y_n) - \omega_0^2 Y_n = 0 \quad (5.46)$$

$$\mathbf{B}_1(Y_n) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(Y_n) = 0 \quad x = 1 \quad (5.47)$$

Denklem (5.45), denklem (5.41)'e yerleştirilirse,

$$\omega^2 D_0^2 w_1 + \omega^2 \mathbf{L}(w_1) = -2\omega^2 (i\omega_0 D_1 A_n e^{i\omega_0 T_0} + ke) Y_n + \omega_1 (A_n e^{i\omega_0 T_0} + ke) \mathbf{L}(Y_n) - \mathbf{Q}(Y_n, Y_n) \{A_n^2 e^{2i\omega_0 T_0} + ke + 2A_n \bar{A}_n\} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{B}_1(w_1) = 0 \quad x = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_2(w_1) = 0 \quad x = 1 \quad (5.49)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (5.48)'in homojen halinin basit olmayan çözümü mevcutsa bu denklemin bir çözümünün olması, ancak çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır. Çözülebilirlik şartı ise aşağıdaki gibidir.

$$2i\omega^2 \omega_0 D_1 A_n \int_0^1 Y_n^2 dx + \omega_1 A \int_0^1 Y_n \mathbf{L}(Y_n) dx = 0 \quad (5.50)$$

$$\omega_1 = 0, \quad D_1 A = 0 \quad A_n = A_n(T_2) \quad (5.51)$$

$w_1$  çözümünün aşağıdaki formda olduğunu farz edelim

$$w_1(x, T_0, T_2) = (A_n^2(T_2) e^{2i\omega_0 T_0} + ke) \frac{\phi_1(x)}{\omega^2} + 2A_n(T_2) \bar{A}_n(T_2) \frac{\phi_2(x)}{\omega^2} \quad (5.52)$$

$\phi_1(x)$  ve  $\phi_2(x)$  aşağıdaki denklemleri sağlamaktadır.

$$\mathbf{L}(\phi_1) - 4\omega_0^2 \phi_1 = -\mathbf{Q}(Y_n, Y_n) \quad \text{ve} \quad \mathbf{L}(\phi_2) = -\mathbf{Q}(Y_n, Y_n) \quad (5.53)$$

Son mertebede, denklemler (5.45) ve (5.52), denklem (5.43)'e yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \omega^2 D_0^2 w_2 + \omega^2 \mathbf{L}(w_2) = & -2\omega^2 i\omega_0 D_2 A_n e^{i\omega_0 T_0} Y_n + \omega_2 A_n \mathbf{L}(Y_n) \\ & + \frac{1}{\omega^2} A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_0 T_0} \{-\mathbf{Q}(Y_n, \phi_1) - \mathbf{Q}(\phi_1, Y_n) - 2\mathbf{Q}(Y_n, \phi_2) \\ & - 2\mathbf{Q}(\phi_2, Y_n) - 3\mathbf{C}(Y_n, Y_n, Y_n)\} + ke + SOT \end{aligned} \quad (5.54)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (5.54)'ün homojen halinin basit olmayan çözümü mevcutsa bu denklemin bir çözümünün olması, ancak çözülebilirlik şartının sağlanmasına bağlıdır. Çözülebilirlik şartı ise aşağıdaki gibidir.

$$2i\omega^2\omega_0 D_2 A_n - \omega_2\omega_0^2 A_n + \frac{1}{\omega^2}\Gamma A_n^2 \bar{A}_n = 0 \quad (5.55)$$

$\Gamma$  katsayısı aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma = \int_0^1 Y_n \{ \mathbf{Q}(Y_n, \phi_1) + \mathbf{Q}(\phi_1, Y_n) + 2\mathbf{Q}(Y_n, \phi_2) + 2\mathbf{Q}(\phi_2, Y_n) + 3\omega^2 \mathbf{C}(Y_n, Y_n, Y_n) \} dx \quad (5.56)$$

$$D_2 A_n = 0 \quad \text{seçilir ise} \quad (5.57)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\omega_0^2 \omega^2} \Gamma A_n \bar{A}_n \quad (5.58)$$

elde edilir. Frekans denklemi

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon^2 \frac{\Gamma}{\omega_0^2 \omega^2} A_n \bar{A}_n \quad (5.59)$$

şeklinde. Kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A_n = \frac{1}{2} a_0(T_2) e^{i\beta_0(T_2)} \quad (5.60)$$

Kompleks genlik, frekans denkleminde yerleştirilirse

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon^2 \frac{\Gamma}{4\omega_0^2 \omega^2} a_0^2 \quad (5.61)$$

elde edilir. İfade çözümlerse,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 \Gamma a_0^2}{\omega_0^2}}} \quad (5.62)$$

elde edilir. Sistemin yaklaşık genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$w(x, t; \varepsilon) = a_0 \cos(\omega_0 \omega t + \beta_0) Y_n + \varepsilon \frac{a_0^2}{2\omega^2} \{\cos(2\omega_0 \omega t + 2\beta_0) \phi_1 + \phi_2\} + O(\varepsilon^2) \quad (5.63)$$

### 5.3. Uygulama (Kuadratik ve Kübik Nonlineer Kısmi Diferansiyel Denklem)

Bu bölümde genel çözüm algoritması, özel bir probleme uygulanacaktır. Boyutsuz hareket denklemi ve sınır şartları bu özel problem için aşağıda belirtilmiştir.

$$\ddot{w} - w'' + \varepsilon w'^2 + \varepsilon^2 w^3 = 0 \quad (5.64)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = 0 \quad (5.65)$$

Bu problem için operatörler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\mathbf{L}(w) = -w'' \quad (5.66)$$

$$\mathbf{Q}(w, w) = w'^2 \quad (5.67)$$

$$\mathbf{C}(w, w, w) = w^3 \quad (5.68)$$

#### 5.3.1. Çok Zaman Ölçekli Yöntem

Denklemler (5.16) ve (5.17)'de genel formda tanımlanan özdeğer-özfonksiyon probleminin bu uygulama için karşılığı,

$$Y_n'' - \omega_0^2 Y_n = 0 \quad (5.69)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = 0 \quad (5.70)$$

şeklindedir. Çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$Y_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (5.71)$$



Denklem (5.23), bu uygulama için aşağıdaki gibidir.

$$\phi_1'' + (2n\pi)^2 \phi_1 = Y_n'^2 \quad \phi_1(0) = \phi_1(1) = 0 \quad (5.72)$$

$$\phi_2'' = Y_n'^2 \quad \phi_2(0) = \phi_2(1) = 0 \quad (5.73)$$

Çözüm fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\phi_1(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2n\pi x + n\pi x \sin 2n\pi x) \quad (5.74)$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2n\pi x) + \frac{n^2 \pi^2}{2}(x^2 - x) \quad (5.75)$$

Çözülebilirlik şartındaki katsayı

$$\Gamma = \int_0^1 Y_n \{2Y_n' \phi_1' + 4Y_n' \phi_2' + 3 Y_n^3\} dx \quad (5.76)$$

yada

$$\Gamma = \frac{-3}{8} n^2 \pi^2 + \frac{9}{2} \quad (5.77)$$

şeklinde ifade edilir. Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$w(x, t; \varepsilon) = a_0 \cos(\omega_0 t + \beta_n) Y_n + \varepsilon \frac{a_0^2}{2} \{\cos(2\omega_0 t + 2\beta_n) \phi_1 + \phi_2\} + O(\varepsilon^2) \quad (5.78)$$

Burada

$$\omega_0 = n\pi \quad (5.79)$$

$$\beta_n = \frac{a_0^2}{8n\pi} \left( \frac{-3}{8} n^2 \pi^2 + \frac{9}{2} \right) \varepsilon^2 t + \beta_0 \quad (5.80)$$

şeklindedir.

$Y_n(x)$ ,  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  ifadeleri sırası ile (5.71), (5.74), (5.75) denklemlerinde mevcuttur.

### 5.3.2. Multiple Scales Lindstedt Poincare (MSLP) Yöntemi

Denklemler (5.46) ve (5.47)'de genel formda tanımlanan özdeğer-özfonksiyon probleminin bu uygulama için karşılığı,

$$Y_n'' - \omega_0^2 Y_n = 0 \quad (5.81)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = 0 \quad (5.82)$$

şeklinde dir.

Çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$Y_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (5.83)$$

Denkle m (5.53), bu uygulama problemi için aşağıdaki gibidir.

$$\phi_1'' + (2n\pi)^2 \phi_1 = Y_n'^2 \quad \phi_1(0) = \phi_1(1) = 0 \quad (5.84)$$

$$\phi_2'' = Y_n'^2 \quad \phi_2(0) = \phi_2(1) = 0 \quad (5.85)$$

Çözüm fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\phi_1(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2n\pi x + n\pi x \sin 2n\pi x) \quad (5.86)$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2n\pi x) + \frac{n^2 \pi^2}{2}(x^2 - x) \quad (5.87)$$

Çözülebilirlik şartındaki katsayı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Gamma = \int_0^1 Y_n \{2Y_n' \phi_1' + 4Y_n' \phi_2' + 3\omega^2 Y_n^3\} dx \quad (5.88)$$

Nihai çözüm aşağıdaki gibidir.

$$w(x, t; \varepsilon) = a_0 \cos(\omega_0 \omega t + \beta) Y_n + \varepsilon \frac{a_0^2}{2\omega^2} \{\cos(2\omega_0 \omega t + 2\beta) \phi_1 + \phi_2\} + O(\varepsilon^2) \quad (5.89)$$

Burada

$$\omega_0 = n\pi \quad (5.90)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{9\varepsilon^2 a_0^2}{8\omega_0^2}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{9\varepsilon^2 a_0^2}{8\omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{3}{8} \varepsilon^2 a_0^2}} \quad (5.91)$$

$Y_n(x)$ ,  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  ifadeleri sırası ile (5.83), (5.86), (5.87) denklemlerinde mevcuttur.

### 5.3.3. Yöntemlerin Karşılaştırılması

Bilindiği üzere perturbasyon çözümlerinin geçerli olabilmesi için düzeltme teriminin başlangıç teriminden çok küçük olması gerekmektedir. İki yöntem için bu durumu sağlayan yakınsama kriterleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\varepsilon a_0}{2} \ll 1 \quad (\text{Çok zaman ölçekli yöntem}) \quad (5.92)$$

$$\frac{\varepsilon a_0}{2\omega^2} \ll 1 \quad (\text{MSLP yöntemi}) \quad (5.93)$$

Görüldüğü gibi kriterlerdeki tek fark MSLP yönteminde paydada  $\omega^2$ 'nin yer almasıdır. Kuvvetli nonlineerlik için  $\varepsilon$  büyük olmalıdır. Çok zaman ölçekli yöntem için kriterin limiti alınır.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon a_0}{2} = \infty \quad (5.94)$$

Görüldüğü gibi limit sonsuz değerindedir. Bu yüzden çok zaman ölçekli yöntem çözümü büyük  $\varepsilon$  değerleri için geçerli sonuçlar vermemektedir. MSLP yöntemi için limit alınır ise

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon a_0}{2\omega^2} = \frac{\varepsilon a_0}{2\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{9\varepsilon^2 a_0^2}{8\omega_0^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{9\varepsilon^2 a_0^2}{8\omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^2 a_0^2}\right)} = 0 \ll 1 \quad (5.95)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere MSLP yöntemi  $\varepsilon$  parametresinin büyük değerleri için perturbasyon şartlarına uygun sonuç vermiştir.

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle kuvvetli nonlineer sistemler için de geçerli çözümler verebilecek yeni bir perturbasyon yöntemi geliştirilmiştir. Bu yeni yöntem çok zaman ölçekli yöntem ve Lindstedt Poincare tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır. Lindstedt Poincare tekniğinde bazı dönüşümler ve açılım tercihleri yapılarak kuvvetli nonlineer sistemlerde geçerli olan ümit vadeden çözümler yapılmıştır. Ancak önceki çalışmaların hemen hepsinde Duffing ve benzeri sabit genlikli denklemler ele alınmıştır. Değişken genlikli problemlere bu fikirlerin uygulaması yapılamamıştır. Bu çalışmada hem sabit hem de değişken genlikli problemlerde çözüm üretebilen yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Lindstedt Poincare tekniği ile çok zaman ölçekli yöntem birleştirilmiş ve her iki yöntemin avantajları ile çok daha geniş bir fiziksel problem yelpazesine uygulanabilecek yeni bir perturbasyon yöntemi ortaya konulmuştur.

Bu çalışma bir çok yönden geliştirilebilir:

1. Yöntemin, Mathieu ve benzeri denklemlere uygulaması yapılabilir.
2. Yöntemin, Kesirli türev içeren nonlineer denklemlere uygulaması yapılabilir.
3. Yöntemin, daha farklı yapıda genel operatör çözümleri yapılabilir.

**KAYNAKLAR**

1. H. Hu and Z. G. Xiong, Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods, *Journal of Sound and Vibration* 278: 437-444, 2004.
2. H. Hu, A classical perturbation technique which is valid for large parameters, *Journal of Sound and Vibration* 269: 409-412, 2004.
3. H. Hu, A classical perturbation technique that works even when the linear part of restoring force is zero, *Journal of Sound and Vibration* 271: 1175-1179, 2004.
4. J. H. He, Linearized perturbation technique and its applications to strongly nonlinear oscillators, *Computers and Mathematics with Applications* 45: 1-8, 2003.
5. H. Hu, A modified method of equivalent linearization that works even when the non-linearity is not small, *Journal of Sound and Vibration* 276: 1145-1149, 2004.
6. J. H. He, Modified straightforward expansion, *Meccanica* 34: 287-289, 1999.
7. J. H. He, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *International Journal of Modern Physics B* 20: 1141-1199, 2006.
8. L. Xu, Determination of limit cycle by He's parameter-expanding method for strongly nonlinear oscillators, *Journal of Sound and Vibration* 302: 178-184, 2007.
9. S. Q. Dai, On a generalized PLK method and its applications, *Acta Mechanica Sinica* 6: 111-118, 1990.
10. J. H. He, Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part I: expansion of a constant, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37: 309-314, 2002.
11. J. H. He, Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part II: a new transformation, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37: 315-320, 2002.
12. V. Marinca and N. Herisanu, A modified iteration perturbation method for some nonlinear oscillation problems, *Acta Mechanica* 184: 231-242, 2006.
13. H. Hu, Solutions of a quadratic nonlinear oscillator: Iteration procedure, *Journal of Sound and Vibration* 298: 1159-1165, 2006.

14. Yiğit Aksoy, Mehmet Pakdemirli, New perturbation iteration solutions for Bratu-type equations, *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 59, Issue 8, 2802-2808, 2010
15. M. Pakdemirli, M. M. F. Karahan and H. Boyacı, A new perturbation algorithm with better convergence properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare Method, *Mathematical and Computational Applications* 14 ,31-44, 2009.
16. M. Pakdemirli and M. M. F. Karahan, A New Perturbation Solution for Systems with Strong Quadratic and Cubic Nonlinearities, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 33, 704-712, 2010.
17. M. Pakdemirli, Comparison of higher order versions of the method of multiple scales for an odd nonlinearity problem, *Journal of Sound and Vibration* 262: 989-998, 2003
18. H. Hu, Solution of a mixed parity nonlinear oscillator: Harmonic balance, *Journal of Sound and Vibration* 299, 331-338, 2007
19. A. H. Nayfeh, Resolving controversies in the application of the method of Multiple Scales and the Generalized Method of Averaging, *Nonlinear Dynamics* 40: 61-102, 2005.
20. A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York 1981.
21. M. Pakdemirli, A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Mechanics Research Communications* 21 , 203-208, 1994
22. M. Pakdemirli and H. Boyaci, Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for nonlinear vibrations, *Journal of Sound and Vibration* 186, 837-845, 1995
23. M. Pakdemirli, Vibrations of continuous systems with a general operator notation suitable for perturbative calculations, *Journal of Sound and Vibration* 246(5), 841-851, 2001.
24. *Perturbations, Theory and Methods*, James A. Murdock, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991
25. *Applied Nonlinear Dynamics*, Ali H. Nayfeh and Balakumar Balachandran, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995
26. *Perturbation Methods, Instability, Catastrophe and Chaos*, C F Chan Man Fong and D D Kee, World Scientific Publishing, 1999

27. Özhan, B.B., Kübik Nonlinear Bir Sürekli Ortam Sisteminin Dış Zorlamalı ve Parametrik Titreşimlerine Genel Bir Yaklaşım, Doktora Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü 2009
28. Nayfeh, A.H., Nayfeh S.A. and Mook, D.T., On Methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Nonlinear Dynamics*, 3, 145-162, 1992
29. Pakdemirli, M., Boyacı, H., Vibrations of continuous systems having arbitrary quadratic and cubic nonlinearities, *Applied Mechanics and Engineering*, , 1, 3, 445-463, 1996.
30. Pakdemirli, M., Boyacı, H., The direct perturbation method versus the discretization perturbation method: Linear systems, *Journal of Sound and Vibration*, 199(5),825-832, 1997.
31. Boyacı, H., Pakdemirli, M., A comparison of different versions of the method of multiple scales for partial differential equations, *Journal of Sound and Vibration* , 204(4), 595-607, 1997.
32. Pakdemirli, M., A general solution procedure for coupled systems with arbitrary internal resonances, *Mechanics Research Communications*, Vol. 28. No. 6, pp. 617-522, 2001.
33. Pakdemirli , M., Comparison of higher order versions of the method of multiple scales for an odd non-linearity problem, *Journal of Sound and Vibration* 262, 989–998, 2003.
34. Pakdemirli, M., Özkaya, E. Three-to-one internal resonances in a general cubic non-linear continuous system, *Journal of Sound and Vibration* 268,543–553, 2003.
35. Pakdemirli,M., Özkaya, E., Two-to-one internal resonances in continuous systems with arbitrary quadratic nonlinearities, *Arabian Journal for Science and Engineering* 29 (1C), 99-112 (Mechanical Vibration and Noise Theme Issue), 2004.
36. B.B. Özhan and M. Pakdemirli, A general solution procedure for the forced vibrations of a continuous system with cubic nonlinearities: primary resonance case, *Journal of Sound and Vibration* 325, 894-906 2009
37. B.B. Özhan and M. Pakdemirli, A general solution procedure for the forced vibrations of a system with cubic nonlinearities: Three-to-one internal resonances with external excitation, *Journal of Sound and Vibration* 329, 2603-2615 2010
38. Nayfeh, A.H., 1998. Reduced order models of weakly nonlinear spatially continuous systems, *Nonlinear Dynamics* 16,105–125, 1998.



39. Lacarbonara, W, 1999. Direct treatment and discretizations of non-linear spatially continuous systems, Journal of Sound and Vibration 221, 849–866, 1999.

40. Prof. Dr. Mehmet Pakdemirli, Mühendislikte Perturbasyon Metodları I ve II Ders Notları

41. Türkçe Sözlük, 2005. Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu, Türk Dil Kurumu Yayınları, 549, 10. Baskı, Ankara 2005.

42. Matematik Terimleri Sözlüğü, 2000. Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu, Türk Dil Kurumu Yayınları, 739, 1. Baskı, Ankara 2000.