

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ \*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LİNEER OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN GEÇERLİ ÇÖZÜMLER VEREBİLECEK YENİ BİR  
PERTURBASYON TEKNİĞİNİN GELİŞTİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

NEDRET ELMAS

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Mekanik

MANİSA 2013

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ \*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LİNEER OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN GEÇERLİ ÇÖZÜMLER VEREBİLECEK YENİ BİR  
PERTURBASYON TEKNİĞİNİN GELİŞTİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

NEDRET ELMAS

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31.07.2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 29.08.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hakan BOYACI

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Mehmet ÇEVİK

Doç. Dr. Gökhan ALTINTAŞ

Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Doç. Dr. Fadime DAL

MANİSA 2013

## İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER .....	I
SEMBOL LİSTESİ.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
KISALTMALAR LİSTESİ.....	VI
TEŞEKKÜR YAZISI.....	VII
ÖZET .....	VIII
ABSTRACT .....	IX
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Genel Bilgiler .....	1
2. LİNEER OLMAYAN MEKANİK SİSTEMLER .....	3
2.1. Titreşim Hareketinin Tanımı ve Sınıflandırılması .....	3
2.2. Serbest Titreşim .....	3
2.3. Zorlanmış Titreşim .....	3
2.4. Sönüm.....	4
2.5. Lineer Titreşimler ve Nonlinear Titreşimler.....	4
2.6. Mekanik Titreşimler.....	4
3. PERTÜRBASYON HAKKINDA GENEL BİLGİ.....	7
3.1. Seküler Terim.....	8
3.2. Direkt Açılım Tekniği.....	9
3.2.1. Duffing Denkleminin Direkt Açılım Tekniği ile Çözümü.....	9
3.2.2. Van Der Pol Denklemi Direkt Açılım Tekniği ile Çözümü.....	11
3.3. Lindstedt Poincaré Tekniği.....	17
3.3.1. Duffing Denkleminin Lindstedt Poincaré Tekniği ile Çözümü .....	17
3.4 . Çok Zaman Ölçekli Metot.....	20
3.4.1. Duffing Denkleminin Çok Zaman Ölçekli Metodu ile Çözümü .....	20
3.5. Asimptotik Açılımların Uyumu .....	24
3.5.1. Asimptotik Açılımın Uyumu ile Tekil Pertürbasyon Problemi.....	24
3.5.1.1. Dış Açılım.....	24
3.5.1.2. İç Açılım.....	26
3.5.1.3. Uyum Şartı.....	30
4. LİNEER OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN ÇÖZÜM VERECEK OLAN YENİ BİR PERTÜRBASYON TEKİNİĞİ .....	31

4.1. Duffing Denkleminin Yeni Pertürbasyon Tekniği ile Çözümü .....	32
4.1.1. Yöntemlerin Karşılaştırılması .....	41
4.2. Yeni Dönüşüm ile Van der Pol Denkleminin Çözümü.....	46
4.3. Yeni Dönüşüm ile Tekil Pertürbasyon Problemi .....	50
5. SONUÇLAR .....	57
6. KAYNAKLAR .....	58

## SEMBOL LİSTESİ

$A_n, \bar{A}_n$  :  $n$ . moda ait kompleks genlikler ve eşlenikleri

$T_0, T_1, \dots, T_n$  : Zaman ölçekleri

$T_e$  : Zaman Parametresinin dönüşümü

$X_e$  : Konum Parametresinin dönüşümü

$\varepsilon$  : Pertürbasyon parametresi (Boyutsuz)

$\mu$  : Sönüm katsayısı (Boyutsuz)

$W$  : Dönüşüm frekansı

$W_0$  : Tabii frekans

## ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 1.** Duffing denklemi için Yeni yöntem ile Sayısal çözümün ve klasik yöntemlerin karşılaştırılması .  $\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 1$  .....42
- Şekil 2.** Duffing denklemi için Yeni yöntem ile Sayısal çözümün ve klasik yöntemlerin karşılaştırılması .  $\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.1$  .....42
- Şekil 3.** Duffing denklemi için Çok zaman ölçekli ile Yeni yöntemin karşılaştırılması  $\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, f_0 = 1$  .....43
- Şekil 4.** Duffing denklemi için Çok zaman ölçekli ile Yeni yöntemin karşılaştırılması  $\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, f_0 = 2$  .....43
- Şekil 5.** Duffing denklemi için Çok zaman ölçekli ile Yeni yöntemin karşılaştırılması  $\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, f_0 = 3$  .....43
- Şekil 6.** Duffing denklemi için LP ile Yeni yöntemin karşılaştırılması  $\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 2$  .....44
- Şekil 7.** Duffing denklemi için LP ile Yeni yöntemin karşılaştırılması  $\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 1$  .....44

<b>Şekil 8.</b> Duffing denklemi için LP ile Yeni yöntemin karşılaştırılması	
$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.1$ .....	<b>44</b>
<b>Şekil 9.</b> Duffing denklemi için Sayısal Çözüm ile Yeni yöntemin karşılaştırılması	
$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 1$ .....	<b>45</b>
<b>Şekil 10.</b> Duffing denklemi için Sayısal Çözüm ile Yeni yöntemin karşılaştırılması	
$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.1$ .....	<b>45</b>
<b>Şekil 11.</b> Duffing denklemi için Sayısal Çözüm ile Yeni yöntemin karşılaştırılması	
$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.12$ .....	<b>45</b>

## KISALTMALAR LİSTESİ

- k.e. : Kompleks (karmaşık) eşlenik
- S.O.T. : Seküler olmayan terim
- E.K.T. : Üstel küçük terim (Hızla küçülen terim)
- MS : Çok Zaman Ölçekli yöntem (Multiple Scales)
- LP : Lindstedtpoint yöntemi
- MSLP : Multiple Scales Lindstedt Poincare yöntemi



## **TEŞEKKÜR YAZISI**

İçtenlikle aileme sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Bana makine mühendisliği bölümünde yer açan ve bilimsel katkılarda bulunan sayın hocam Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ'ye her zaman yanımda bulunan sayın hocam Prof. Dr. Hakan BOYACI'ya ve samimi, içten kişiliği ile yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Mehmet Çevik'e teőekkürlerimi sunarım.

Bana tezimin çalışmalarında yardımcı olan yön gösteren sayın hocam Prof. Dr. Allaberen Ashyralyev'e ve bu teze başlamamı sağlayan Turgutlu Meslek Yüksek Okulu Öğretim elemanlarına ve beni destekleyip yüreklendiren tüm arkadaşlarıma candan teőekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar bana destekte bulunanlara teőekkürü borç bilirim.

Nedret ELMAS

## ÖZET

Perturbasyon yöntemleri fiziksel problemlerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmakta kullanılmaktadır. Perturbasyon yöntemlerinde çözüm, fiziksel küçük bir parametrenin seri açılımı şeklinde ifade edilir.

“Doğrudan Açılım” olarak adlandırılan temel Perturbasyon tekniği birçok hesaplamada yeterli olamamakta ve zaman içerisinde artan çözümler vermektedir. Lindstedt-Poincare Tekniği, Renormalizasyon yöntemi, Çok Zaman Ölçekli yöntem, Ortalama yöntemi ve Asimptotik Açılımların Uyumlu yöntemi adları ile anılan çeşitli perturbasyon yöntemleri doğrudan açılımda karşılaşılan sorunları çözmek için zaman içerisinde geliştirilmiştir.

Bu metotlardaki fikirler geliştirilerek ihtiyaca uygun bir dönüşüm ortaya koyulmuştur. Bu zaman dönüşümü diferansiyel denklemlerde zaman parametresini hızlandırarak veya yavaşlatarak zaman parametresinin kontrolünü sağlamaktadır yada bu dönüşümü problem tipine göre belirlenmektedir.

Çalışmada uygulama olarak Duffing, Van der Pol, sınır değer problemi ele alınmıştır.

Sunulan zaman dönüşümünün avantajı lineer olmayan diferansiyel denklemlerde yeni bir bakış açısı, istenen parametrenin kontrolünde ve problemin çözümünde basitlik sağlayacaktır.

**Anahtar Kelimeler:** Nonlineer sistemler, Duffing Denklemi, Van der Pol Denklemi, Sınır değer problemleri, Perturbasyon yöntemleri, Lindstedt Poincare tekniği, Çok Zaman Ölçekli yöntem, Zaman dönüşümü

## ABSTRACT

Perturbation method is mathematical methods that are used to find an approximate solution to a problem which cannot be solved exactly. Perturbation theory can be applied if the problem can be formulated by adding a "small" term to the mathematical description of the exactly solvable problem. Perturbation method leads to an expression for the desired solution in terms of a formal power series in some "small" parameter -known as a perturbation series- that quantifies the deviation from the exactly solvable problem. The leading term in this power series is the solution of the exactly solvable problem, while further terms describe the deviation in the solution, due to the deviation from the initial problem.

Algebraic equations, integrals, differential equations, difference equations and integro-differential equations can be solved approximately with Perturbation techniques. The direct expansion method (pedestrian expansion) does not produce physically valid solutions for most of the cases and depending on the nature of the equation, many different perturbation techniques such as Lindstedt-Poincare technique, Renormalization method, Method of Multiple Scales, Averaging methods, Method of Matched Asymptotic Expansions etc. are developed within time.

A time transformation has been put forward by developing these ideas. This time transformation provides control over the time at differential equations, by accelerating (larger steps advancing) or slowing down (smaller intervals advancing) the time parameter. In the application, Duffing, Van der Pol, in practice commonly used boundary-value problems were discussed.

The advantage of the time transformation presented will be a new perspective for nonlinear problems and control of the chosed parameters.

**Keywords :** Nonlinear systems, Duffing equation, Van der Pol equation, Perturbation methods, Lindstedt Poincare method, Multiple scales method, Numerical solutions, Time parameter, numerical solution

## 1. GİRİŞ

### 1.1. GENEL BİLGİLER

Perturbasyon yöntemleri fiziksel problemlerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmakta kullanılmaktadır. Cebirsel denklemler, integraller, diferansiyel denklemler, fark denklemleri, diferansiyel fark denklemleri perturbasyon yöntemleri kullanılarak, yaklaşık olarak çözülmektedir.

Perturbasyon yöntemi doğrusal ve/veya doğrusal olmayan sistemlere uygulanabilir. Perturbasyon yöntemlerinde çözüm, fiziksel küçük bir parametrenin seri açılımı şeklinde ifade edilir. "Doğrudan Açılım" olarak adlandırılan temel perturbasyon tekniği birçok hesaplamada yeterli olmamakta ve zaman içerisinde artan çözümler vermektedir. Lindstedt-Poincaré tekniği, Renormalizasyon yöntemi, Çok Zaman Ölçekli yöntem, Ortalama yöntemi ve Asimptotik Açılımların Uyumunu yöntemi adları ile anılan çeşitli perturbasyon yöntemleri doğrudan açılımda karşılaşılan sorunları çözmek için zaman içerisinde geliştirilmiştir.

Perturbasyon yöntemlerinin en önemli kısıtlaması, denklemde küçük bir parametreye ihtiyaç duyulması ya da denklemde bu küçük parametrenin yapay olarak eklenmesidir. Bu fiziksel parametre genelde en yüksek mertebenin katsayısı olarak ortaya çıkar. Bu da en yüksek mertebedeki terimlerin mertebeye küçük olmasını sağlar. Bu durumda çözümler zayıf doğrusal olmayan sistemler için geçerli olmaktadır. Fiziksel parametrenin büyük olduğu kuvvetli doğrusal olmayan sistemler için bu çözümler geçerli olmamaktadır.

Doğrusal olmayan sistemler için geçerli perturbasyon çözümleri elde etmek üzere son zamanlarda bazı çalışmalar yapılmıştır. Hu ve Xiong [1], Duffing denklemini kullanarak Lindstedt Poincaré tekniğini iki farklı şekilde ele almış ve sonuçları karşılaştırmışlardır. Öncelikle denklemi klasik yöntem ile çözmüşlerdir. Daha sonra perturbasyon açılımında bazı değişiklikler yaparak çözümler elde etmişlerdir.

Elde edilen çözümleri sayısal çözümle karşılaştırmış ve perturbasyon parametresinin çok büyük değerleri için de uygun çözümler elde etmişlerdir. H. Hu [2] tarafından yapılan benzer bir çalışmada da Duffing denklemi için yaklaşık ve tam çözümlü frekanslar karşılaştırılmıştır. Aynı denklem, lineer frekansın sıfır olma durumu için de ele alınmıştır H. Hu [3]. Elde edilen periyot tam çözüm periyotları ile büyük parametreler için karşılaştırılmış ve iyi bir yakınsama sağlanmıştır.

Perturbasyon çözümlerinin kuvvetli doğrusal olmayan sistemlerde geçerli sonuçlar vermesi için alternatif birçok teknik geliştirmeye çalışılmaktadır. Doğrusallaştırılmış perturbasyon yöntemi J. H. He [4-6], parametrelerin açılımı yöntemi J. H. He [12-13] bunlara örnek olarak verilebilir. Yakın zamanda Pakdemirli, M. M. F. Karahan ve H. Boyacı [14] kuvvetli nonlineer sistemler için geçerli

çözümler verebilecek yeni bir perturbasyon tekniği geliştirmişlerdir. Bu yeni teknik çok zaman ölçekli yöntem ve H. Hu ve Z. G. Xiong [1-2] de önerilen frekans açılımı kullanılarak geliştirilen Lindstedt Poincare tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanmaktadır. Bazı koşullar altında Lindstedt Poincare tekniği düzgün rejim çözümlerini belirlemede iyi sonuçlar vermektedir M. Pakdemirli [16]. Bu iki yöntemin birleştirilmesi ile her birinin avantajları tek bir yöntemde toplanmaktadır. MSLP olarak adlandırılan bu yeni yöntemde, lineer sönümlü salınım denklemine, sönümlü ve sönümsüz Duffing denklemleri uygulanmıştır. Lineer sönümlü salınım denkleminin tam çözümü MSLP yöntemi ile bulunmuştur. Böylelikle yarı analitik bir yöntem olan perturbasyon yöntemi kullanılarak tam çözüm elde edilmiştir. Bu yeni yöntemin sönümlü ve sönümsüz Duffing denklemine uygulanarak sayısal çözümler ile karşılaştırıldığında kuvvetli doğrusal olmayan sistemler için çok daha iyi sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Pakdemirli ve Karahan [15], MSLP yöntemini ikinci ve üçüncü dereceden doğrusal olmayan denkleme uygulamışlardır. Yöntemin kuvvetli doğrusal olmayan sistemler için iyi sonuçlar verdiği bir kez daha doğrulanmıştır.

Ji-Huan He [29-30] de homotopi tekniğine göre  $p$  eleman  $[0,1]$  olacak şekilde parametrelili bir homotopi geliştirilmiştir. Geleneksel perturbasyon ve homotopi tekniğinin birleştirilmesi olan bu metot homotopi-perturbasyon metodu olarak adlandırılmıştır.

## **2. LİNEER OLMAYAN MEKANİK SİSTEMLER**

Lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulabilmek için perturbasyon metotları kullanılır. Bu metotların tanıtımı Nayfeh [19], Jordan ve Smith [42] tarafından yapılmıştır. Perturbasyon metotları, genel anlamda tam olarak çözülmeyen denklemler için, bu denklemlere bağlı lineerleştirilmiş denklemin çözümünden yola çıkarak yaklaşık bir periyodik çözüm elde etmeyi amaçlar. Fakat bu metotlar, nonlinearlik zayıf olduğunda kullanılmaktadırlar. Bu nedenle perturbasyon metotlarının oluşturduğu dezavantajları gidermek için farklı metotlar kullanılır.

Lineer diferansiyel denklemler mekanik sistemlerin matematiksel modellemesinde kullanılır. İleride uygulama problemi olarak kullanılacak titreşim modellerin tanıtılması için titreşim hareketinin genel karakteristiği ele alınacak ve kesikli ve sürekli ortam titreşimlerinin matematiksel modellenmesi üzerinde durulacaktır.

### **2.1. TİTREŞİM HAREKETİNİN TANIMI VE SINIFLANDIRILMASI**

Titreşim, belirli bir zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket olarak tanımlanır.

### **2.2. SERBEST TİTREŞİM**

Sistemin statik denge konumundan uzaklaştırılıp bırakılması halinde yaptığı periyodik harekettir. Tatbik edilen kuvvetler; yay kuvveti, sürtünme kuvveti ve kütlelerin ağırlığıdır. Sürtünme olması halinde titreşim zamanla azalır. Bu serbest titreşim, kısa süreli geçici hareket olarak adlandırılır.

### **2.3. ZORLANMIŞ TİTREŞİM**

Dış kuvvetlerin sisteme etkimesi halinde, titreşim hareketi zorlanmış titreşim olarak tarif edilir. Zorlanmış titreşim hareketinde, sistem kendi tabii frekansı ile olduğu kadar, tatbik edilen dış kuvvetin frekansı ile de titreşime zorlanır. Sürtünme olması halinde hareketin tatbik edilen dış kuvvetin ihtiva etmediği bölümü zamanla söner. Neticede sistem, ilk şartlardan ve kendi tabii frekansından bağımsız olarak, tatbik edilen dış kuvvetin frekansı ile titreşir. Dış kuvvetin tesirinde

meydana gelen titreşime, düzgün titreşim hali veya tepki denir. Genellikle titreşimin devamlı tesirleri dolayısıyla, düzgün titreşim hali veya tepki meydana gelir.

#### 2.4. SÖNÜM

Gerçekte, mühendislik sistemlerinin çoğu, titreşim hareketleri esnasında sürtünme ve dirençler dolayısı ile sönüm olayı ile karşı karşıyadır. Hava tesiri ile sönüm, akışkanların sürtünmesi, Coulomb kuru sürtünmesi, magnetik sönüm ve benzeri şekillerde olan sönüm olayı, daima hareketi yavaşlatacak ve salınımı durduracaktır. Eğer şiddetli bir sönüm varsa, salınım hareketi olmayacaktır ve bu haldeki sistem, fazla sönümlü olarak tarif edilir. Eğer hafif bir sönüm varsa, salınım olacaktır bu şekildeki sisteme de, az sönümlü sistem denir. Bu iki halin sınırlarında bulunan durumlara da kritik sönüm halindeki sistem denir. Serbest bırakılan kütle, basitçe statik denge konumuna dönecektir. Titreşim yapan hareketlerin çoğunda, hava tesiri ile olan sönüm, çok küçüktür ve özel haller dışında ihmal edilir.

#### 2.5. LINEER TİTREŞİMLER VE NONLINEER TİTREŞİMLER

Kütle- yay sisteminde bileşenler lineer özelliğe sahip ise sistem lineer titreşim adını alır. Aksi halde nonlinear titreşim denir.

#### 2.6. MEKANİK TİTREŞİMLER

Kütle-yay sistemi gibi basit mekanik sistemin analizinde  $m$  uygun bir birim sistemde kütle,  $x(t)$  ise  $t$  zamanda bu kütlenin denge konumundan yer değişimini gösterecek (kuvvet uygulanmadığı durumda).  $F_s$  Kuvveti uygulanan bir yaya,  $F_r$  kuvveti ile etki eden bir şok emiciye bağlansın. Yayın  $F_s$  tepki kuvvetinin, denge konumundan itibaren kütlenin yer değiştirmesi ile orantılı olduğunu ve amortisörün uyguladığı  $F_r$  kuvvetinin, kütlenin  $v = dx/dt$  hızı ile orantılı olduğunu varsayalım.  $m$  kütleli bir cisme etki eden

$$F(x) = -kx \quad (\text{Hook kanunu}) \quad (1)$$

ve

$$F_r = -cv \quad (k, c > 0) \quad (2)$$

formunda  $x$  in lineer bir fonksiyonu olarak alabiliriz. Negatif işaretler doğrudur. Çünkü  $x$  pozitif iken  $F_s(x)$  negatif ve  $v$  pozitif iken  $F_r$  negatiftir. Newton'un yasası

$$mx'' = F_s + F_r \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Yani aşağıda gösterilen ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi verir.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4)$$

Böylece,  $m$  kütleinin  $x(t)$  konum fonksiyonu tarafından sağlanan bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem, kütleinin serbest titreşim hareketini temsil eden matematiksel modeldir.

$F_s$  ve  $F_r$  ye ilaveten, eğer  $m$  kütleisine bir  $F(t)$  dış kuvveti etki ederse, bu dış kuvvet (4) denklemindeki eşitliğin sağ tarafına eklenmelidir. Bu durumda,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (5)$$

şeklinde ikinci mertebeden homojen olmayan bir lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu homojen olmayan lineer diferansiyel denklem bir  $F(t)$  dış kuvveti etkisindeki bir kütleinin zorlanmış titreşimini temsil eder.

Normal koşullar altında yay lineer değildir. O halde  $F(x)$  kuvvet fonksiyonu lineer olmadığında,  $F(x)$  kuvveti,

$$F(x) = -kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots \quad (6)$$

şeklinde alınır.

Kuvvet serisi açılımına sahip olduğunu kabul edelim.  $x$  yeterince küçük olduğunda, yayın tepkisinin yer değiştirmesinin tersine olması için  $k > 0$  alalım. Eğer yaya uygulanan bu kuvvetin etkisi altında yay aynı uzunlukta pozitif ve negatif yer değiştirmelere göre simetrik olduğunu varsayarsak, bunun sonucunda



$$F(-x) = F(x)$$

elde edilir.

$F$  fonksiyonu üzerindeki yorum;  $F$  fonksiyonunun  $x$  eksenine göre simetrik ve tek fonksiyon olmasıdır. (1) denklemi tekrar incelendiğinde  $x$ 'in çift kuvvetlerinin katsayılarının sıfır olduğu kabul edilir. Lineer olmayan ilk terim  $x^3$ 'ü içeren terimdir.

Lineer olmayan bir yayın basit matematiksel modeli olarak denklem (6)'da derecesi 3'den büyük olan terimlerin ihmal edilmesi ile elde edilen

$$F(x) = -kx + \beta x^3 \quad (7)$$

denklemini ele alalım. Elde edilen  $m$  kütle sine ait hareket denklemini

$$mx'' + cx' = -kx - \beta x^3 \quad (8)$$

olur.  $\beta > 0$  İse yaya yumuşak yay,  $\beta < 0$  ise yaya sert yay denir. Sert yay için faz düzlem yörüngelerinin hepsi sınırlı iken, yumuşak yay sınırsız faz düzlem yörüngesine de sahiptir. Bununla birlikte sınırsız yumuşak yay yörüngelerinin kırılma olmaksızın yayın esneme kapasitelerini aştıklarında fiziksel olarak gerçeğe uygun hareketleri görülmeyecektir.

Lineer olmayan bir yay üzerindeki bir kütle sine serbest hız ve sönümlü titreşimlerini modellemek için ikinci mertebeden

$$mx'' + cx' + kx + \beta x^3 = 0 \quad (9)$$

diferansiyel denklemini alalım. Denkleminde bulunan  $kx$  terimi, bir lineer yay tarafından kütle sine uygulanan kuvveti,  $\beta x^3$  terimi ise gerçek yayın lineer olmadığını göstermektedir.

### 3. PERTÜRBASYON HAKKINDA GENEL BİLGİ

Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözümlenemeyen bir denklemin, bu denkleme bağlı başka denklemlerden yola çıkılarak yaklaşık bir çözüm elde etmek için geliştirilen matematiksel metotları içeren teoridir. Kesin olarak çözümlenemeyen denklemin matematiksel tanımına "küçük" bir terim eklenerek elde edilen denklem formüle edilebiliyorsa, perturbasyon teorisi uygulanabilir.

Nonlinear diferansiyel denklemler kullanılarak yapılan modellemelerde, modellenen denklemin tam çözümünü bulmak mümkün olmayabilir. Bu durumda analitik veya yarı analitik yöntemlerle yaklaşık çözümler elde edilir.

Pertürbasyon teorisi, istenilen çözümün, kesin çözümlü problemden sapmanın miktarını belirleyen "küçük" parametre kullanılarak kuvvet serisi terimleri ile ifade edilmesine öncülük eder. Kuvvet serisinin ana terimi, kesin çözümlü problemin çözümü; diğer terimler ise ilk problemden sapma miktarına göre belirlenen çözümdeki sapmayı tanımlar.

$\varepsilon$  : küçük parametre

$u$  : tam çözüm

Tam çözüme yaklaşımlı çözüm:

$$u = \varepsilon^0 u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (10)$$

$u_0$  : kesin çözümlü problemin çözümü

$u_1, u_2$  : yüksek mertebeden sistematik prosedürde tekrarlanarak bulunan terimler

Pertürbasyon çözümü, yaklaşım serilerini belli bir noktada kesmekle yapılır. Genellikle çözüm, ilk iki terim  $u_0 + \varepsilon u_1$ 'de kesilebilir. Bu birinci dereceden perturbasyon düzeltmesidir ve ilk çözümdür.

Eğer seri çözümleri belirli bir aralıkta geçerli ise buna düzenli perturbasyon, seri sadece sınırlı bir aralıkta geçerli ise buna da tekil perturbasyon denir.

$\varepsilon \rightarrow 0$  ise yakınsak çözüm serisine direkt açılımın geçerli olduğu problemler düzenli perturbasyon, serinin yakınsak olmadığı, dolayısıyla yaya açılımının geçerli sonuç vermediği durumlar için tekil perturbasyon tanımlamaları yapılmıştır.

### **3.1. SEKÜLER TERİM**

Bir diferansiyel denklemin perturbasyon metotları ile çözümünde, çözüm olarak (10) denkleminde gösterilen açılım ele alınır. Bu çözümde elde edilen parametrik terimlerde ortaya çıkan  $t$  zaman değişkeninin artması ile sınırsız büyümeye sebep olan parametrik terimler Seküler terim olarak adlandırılır.

Seküler terim aynı zamanda iraklık terimi olarak da adlandırılır.

### 3.2. DİREKT AÇILIM TEKNİĞİ

#### 3.2.1. DUFFİNG DENKLEMİNİN DİREKT AÇILIM TEKNİĞİ İLE ÇÖZÜMÜ

Duffing denklemini ele alalım

$$\ddot{u} + w_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (11)$$

Çözüm fonksiyonu  $u$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (12)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılım denklemleri Duffing denkleminde yerine yazılır ve mertebelere ayrılırsa

$$\begin{aligned} O(1) : u_0'' + w_0^2 u_0 &= 0 \\ O(\varepsilon) : u_1'' + w_0^2 u_1 &= -u_0^3 \end{aligned} \quad (13)$$

elde edilir.

Eğer  $O(1)$  mertebesinden elde edilen çözüm aşağıdaki şekildedir

$$u_0 = a \cos(w_0 t) \quad (14)$$

Bu çözümü  $O(\varepsilon)$  da yerine yerleştirilirse

$$u_1'' + u_1 = a^3 \cos^3(w_0 t) \quad (15)$$

elde edilir.

Diferansiyel denkleminin çözümü

$$u_1 = \left( -\frac{3}{8} a^3 t \sin(w_0(t + \beta)) + \frac{1}{32} a^3 \cos(w_0(3t + 3\beta)) \right) \quad (16)$$

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) = a \cos(w_0 t) + \varepsilon \left( -\frac{3}{8} a^3 t \sin(w_0(t + \beta)) + \frac{1}{32} a^3 \cos(w_0(3t + 3\beta)) \right) \quad (17)$$

şeklindedir.

$t \rightarrow \infty$  açılım geçersizdir. Yaya açılımı yerine farklı teknikler uygulanmalıdır. Sorun yaratan parametre zaman parametresidir. Zaman parametresi öyle bir düzenlenmelidir ki bu düzenleme sorunu giderebilmelidir.

### 3.2.2. VAN DER POL DENKLEMİ DİREKT AÇILIM TEKNİĞİ İLE ÇÖZÜMÜ

Ali Hasan Nayfeh' nin "Introduction to Perturbation Techniques" adlı kitabında [19] gösterdiği üzere Van der Pol Denklemine yaklaşık çözümü diferansiyel denklem olarak

$$m \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + ku^* = \mu f^*(u^*, \frac{du^*}{dt^*}) \frac{du^*}{dt^*} \quad (18)$$

denklemini ile verilir.

Burada  $\mu$  pozitif parametredir ve  $u^*$  nun küçük değerleri için  $f^*$  pozitif alınır. Basit bir aritmetik işlem ile eşitliği aşağıdaki şekilde verilir:

$$m \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + ku^* = \mu \left[ 1 - \alpha \left( \frac{du^*}{dt^*} \right)^2 \right] \frac{du^*}{dt^*} \quad (19)$$

$\alpha$  pozitif olmak üzere elde edilen denklem Rayleigh denklemi olarak bilinir. Bu denklemin boyutsuzlaştırılması için tabii frekansı kullanarak aşağıdaki denklemler yazılır:

$$u = \frac{u^*}{u_0^*} \quad t = t^* \sqrt{k/m} \quad (20)$$

(19) denkleminde

$$\ddot{u} + u = \varepsilon \left( 1 - \frac{\alpha u_0^{*2} k}{m} \dot{u}^2 \right) \dot{u} \quad (21)$$

Burada  $\varepsilon = \frac{\mu}{\sqrt{km}}$  ve bunun yanında  $u_0^*$  ve çarpanlarını denklemin basitleştirmesi için  $\alpha u_0^{*2} k = \frac{1}{3} m$  alınır ve (19) yerine yazıldığında

$$\ddot{u} + u = \varepsilon \left( \dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) \quad (22)$$

şeklini alır. (22) diferansiyel denkleminin zamana göre türevi alınırsa denklem

$$\ddot{u} + \dot{u} = \varepsilon (\ddot{u} - \dot{u} \dot{u}^2) \quad (23)$$

Formunda bulunan denklemde  $\dot{u} = v$  dönüşümünü uygulanır ve bulunan denklem aşağıdaki formu alır ;

$$\ddot{v} + v = \varepsilon (1 - \dot{v}^2) \dot{v} \quad (24)$$

Elde edilen denklem bilinen Van der Pol denklemidir. Burada yorum (20) eşitliği kullanılarak boyutsuzlaştırılan Rayleigh denkleminin çözümünün zamana göre türevlenmiş hali olan Van der Pol denkleminin çözümü olur.

Perturbasyonda kullanılan ve direkt açılım olarak adlandırılan basit bir teknik ile denklem (22) yaklaşık çözümünü bulmak üzere, çözüm olarak görülen  $u(t; \varepsilon)$  ifadesinin açılımı aşağıdaki gibi alır:

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (25)$$

açılımı ve türevleri (24) denkleminde yerine yazılır.

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \dots + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots = \varepsilon (\dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \dots) - \frac{1}{3} \varepsilon (\dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \dots)^3 \quad (26)$$

Denklem epsilon terimlerinin kuvvetleri cinsinden düzenlenirse;

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \dots + \varepsilon (\ddot{u}_1 + u_1) + \dots = \varepsilon (\dot{u}_0 - \frac{1}{3} \dot{u}_0^3) + \dots \quad (27)$$

eşitliği elde edilir. Direkt Pertürbasyon tekniğine uygun olarak mertebelere ayrılırsa ilk olarak bir mertebesine ait olan denklem

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0 \quad (28)$$

şeklindedir.

Adi diferansiyel denklemi bulunur. İkinci olarak epsilon mertebesine ait olan denklem ise

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \dot{u}_0 - \frac{1}{3} \dot{u}_0^3 \quad (29)$$

şeklindedir.

Homojen olmayan adi diferansiyel denklemi bulunur. Yukarıdaki iki diferansiyel denklemden (28)'ün çözümü olan  $u_0$  ;

$$u_0 = a \cos(t + \beta) \quad (30)$$

şeklinde bulunur.

$a$  ve  $\beta$  sabitlerdir. Bulunan  $u_0$  çözümü (29) denkleminde yerine yazılır ve

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a \sin(t + \beta) + \frac{1}{3} a^3 \sin^3(t + \beta) \quad (31)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Diferansiyel denklemi çözümlendiğinde çözüm olarak  $u_1$  bulunur. Çözüm için

$$\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin(3\theta) \quad (32)$$

Trigonometrik özdeşliği kullanılır. (31) denklemini tekrar ele alınıp özdeşlik yerine yazıldığında

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \left(\frac{1}{4} a^2 - 1\right) a \sin(t + \beta) - \frac{1}{12} a^3 \sin(3t + 3\beta) \quad (33)$$

denklemini elde edilir. (33) denkleminde sağ taraf iki farklı denklem olarak alınır. Birinci adi diferansiyel denklem

$$\ddot{u}_1^{(1)} + u_1^{(1)} = \left(\frac{1}{4} a^2 - 1\right) a \sin(t + \beta) \quad (34)$$

şeklindedir. İkinci diferansiyel denklem ise

$$\ddot{u}_1^{(2)} + u_1^{(2)} = -\frac{1}{12} a^3 \sin(3t + 3\beta) \quad (35)$$

biçimindedir. (34), (35) diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edildiğinde,

$$u_{1p}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) a t \cos(t + \beta) \quad (36)$$

ve

$$u_{1p}^{(2)} = \frac{1}{96} a^3 \sin(3t + 3\beta) \quad (37)$$

bulunur. (36), (37) çözümlerinin birleştirilmesi ile elde edilen



$$u_{1p} = u_{1p}^{(1)} + u_{1p}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) a t \cos(t + \beta) + \frac{1}{96} a^3 \sin(3t + 3\beta) \quad (38)$$

Elde edilen  $u_0$  ve  $u_1$  çözümleri (25)' da yerine yazıldığında elde edilen denklem

$$u = a \cos(t + \beta) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) a t \cos(t + \beta) + \frac{1}{96} a^3 \sin(3t + 3\beta) \right] \quad (39)$$

Çözümde bulunan  $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) a t \cos(t + \beta)$  terimde çarpan olarak bulunan  $t$  parametresinin

$(t \rightarrow \infty)$  zamanın büyümesi ile oluşturacağı büyümeyi engellemek üzere çarpan olarak bulunan  $\left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) a$  terimi sıfırlayarak büyümeyi engelleyebiliriz. Terimin sıfıra eşitlendiğinde  $a = \pm 2$   $a = 0$  sonuçları elde edilir. Sunulan çözüm  $a = 2$  için

$$u = 2 \cos(t + \beta) + \varepsilon \left[ \frac{1}{12} \sin(3t + 3\beta) \right] \quad (40)$$

şeklindedir.

Renormalization metodunu (40) denkleminde uygulayalım

$$\tau = \omega t = (1 + \varepsilon \omega_1 + \dots) t \quad (41)$$

ise

$$t = (1 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^{-1} \tau = \tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots \quad (42)$$

biçimindedir. Direk açılımdan elde edilen sonuç üzerinde aldığı dönüşüm ile düzeltme yapılır.

$$u = a_0 \cos(t + \beta) - \varepsilon a_0 \left[ -\omega_1 \tau \sin(\tau + \beta) + \frac{1}{8} (a_0^2 - 4) \tau \cos(\tau + \beta) + \frac{1}{32} a_0^2 \sin(3\tau + 3\beta) \right] + \dots \quad (43)$$

(43) denkleminde bulunan ve sorun yaratan patlamalara yol açan çözümü engelleyen terimleri yok etmek için bu terimlerin katsayıları sıfır değerli seçilir. Sorun yaratan bu terimler aynı zamanda seküler terimler olarak kabul edilir.

$$w_1 = 0 \quad (44)$$

ve

$$a(a^2 - 4) = 0 \quad (45)$$

sonuç olarak

$$u = 2 \cos(t + \beta) + \dots \quad (46)$$

bulunur. Nayfeh'nin kitabında [19] bulunan Çok Ölçekli Metot kullandığında ise,

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (47)$$

Zamanı ölçekliyor  $T_0 = t$ ,  $T = \varepsilon$  pertürbasyondaki mertebeleri belirliyor.

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (48)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u \quad (49)$$

ve bir mertebesinin çözümünde bulunan aşağıdaki çözümü

$$u_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0} \quad (50)$$

epsilon mertebesinde bulunan diferansiyel denklemde yerine yerleştirdiğinde,

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2iA'(T_1) e^{iT_0} + cc + \left[ 1 - (A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0})^2 \right] \cdot i(A(T_1) e^{iT_0} - \bar{A}(T_1) e^{-iT_0}) \quad (51)$$

yada

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -i(2A' - A + A^2 \bar{A}_1) e^{iT_0} - iA^3 e^{3iT_0} + cc \quad (52)$$

şeklinindedir. Gerçek ve sanal kısımlar ile diferansiyel denklemdeki sekular terimler ayıkladığında sonuç olarak bulunan ifade,

$$u = 2 \left[ 1 + \left( \frac{4}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-\varepsilon t) \right]^{\frac{1}{2}} \cos t + \dots \quad (53)$$

şeklindedir. Bulunan yaklaşık sonuç (54)' da belirtildiği gibidir.

$$u \rightarrow 2 \cos(t + \beta) + O(\varepsilon) \quad (54)$$

### 3.3. LINDSTEDT POINCARÉ TEKNIĞİ

#### 3.3.1. DUFFING DENKLEMİNİN LINDSTEDT POINCARÉ TEKNIĞİ İLE ÇÖZÜMÜ

Linstedt Poincaré tekniği zaman içerisinde fiziksel olmayan büyümeleri engellemek için kullanılan bir tekniktir. Çözümün periyodik olduğu varsayılır. Önce zaman değişkeninde bir dönüşüm yapılır. Bu dönüşüm sayesinde perturbasyon açılımı, bu dönüşümdeki keyfi parametreye de uygulanır ve çözümdeki patlamalar giderilir.

Duffing denkleminin Lindstedt Poincaré tekniği ile çözümünde diferansiyel denklemin zaman değişkeninde dönüşüm yapılır ve bu dönüşümdeki keyfi parametreye seriye açılarak seküler terimler yok edilir.

Duffing denkleminin Lindstedt Poincaré tekniği ile çözümündeki işlem basamakları ise aşağıda verilmiştir. (11) denkleminin başlangıç koşulları olarak

$$u(0) = a_0 \text{ ve } \dot{u}(0) = 0 \quad (55)$$

şeklinde verilmiştir.

Burada aldığımız Duffing denklemini kübik nonlineer diferansiyel denklemdir. Çözüm için

$$\tau = \omega t \quad (56)$$

zaman dönüşümü uygulanırsa

$$\omega_0^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (57)$$

elde edilir. Bağımlı değişken ve dönüşüm frekansı,

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \dots \quad (58)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (59)$$

şeklinde seriye açılır. Bu seri açılımlar denklemin Duffing denkleminde yerine yazılır ve mertebelere ayrılırsa

$$O(1): w_0^2 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} + w_0^2 u_0 = 0 \quad (60)$$

$$O(\varepsilon): w_0^2 \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + w_0^2 u_1 = -2w_0 w_1 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} - u_0^3 \quad (61)$$

elde edilir.

Eğer  $O(1)$  den çözüm fonksiyonu

$$u_0 = a \cos(\tau + \beta) \quad (62)$$

şekindedir. Bu çözümü  $O(\varepsilon)$  da yerine yerleştirilirse,

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 = (2aw_0 w_1 - \frac{3}{4} a^3) \cos(\tau + \beta) - \frac{1}{4} a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad (63)$$

İfadesi elde edilir. Buradan

$$(2aw_0 w_1 - \frac{3}{4} a^3) = 0 \quad (64)$$

terimini seçilirse,

$$w_1 = \frac{3}{8w_0} a^2 \quad (65)$$

elde edilir. Frekans ise

$$w = w_0 + \varepsilon \frac{3}{8w_0} a^2 \quad (66)$$

şeklinde olur. Tüm bu sonuçları  $u$  tam çözümünde yerine yerleştirilirse

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) = a \cos(\tau + \beta) + \varepsilon \frac{1}{32} a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad (67)$$

denklemini elde edilir.

Zaman parametresinde yapılan dönüşüm,

$$\tau = (w_0 + \varepsilon \frac{3}{8w_0} a^2)t \quad \text{ve} \quad w = (w_0 + \varepsilon \frac{3}{8w_0} a^2) \quad (68)$$

$u$  tam çözümde yerine yazılırsa,

$$u = a \cos((w_0 + \varepsilon \frac{3}{8w_0} a^2)t + \beta) + \varepsilon \frac{1}{32} a^3 \cos(3(w_0 + \varepsilon \frac{3}{8w_0} a^2)t + 3\beta) \quad (69)$$

elde edilen bu denklem Duffing denkleminin çözümüdür.

### 3.4 . ÇOK ZAMAN ÖLÇEKLI METOT

#### 3.4.1. DUFFING DENKLEMİNİN ÇOK ZAMAN ÖLÇEKLI METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu metotta Lindstedt Poincaré tekniğinden farklı olarak genlik değişken olduğu zaman da çözüm üretilebilmektedir. Bu yönü ile Lindstedt Poincaré tekniğine göre daha avantajlıdır.

Çözümün zaman bağımlılığı  $t, \varepsilon t$  şeklindedir. Daha fazla terim alınırsa  $\varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots$  zaman bağımlılıkları da açıkça gözükecektir. Yani bu yöntemde ikinci mertebeden ileri terimler dikkate alınırsa çözüm fonksiyonu

$$u(t; \varepsilon) = u(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t; \varepsilon) \quad (70)$$

şeklinde ifade edilebilir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\text{hızlı zaman ölçeği } T_0 = t \quad (71)$$

$$\text{yavaş zaman ölçeği } T_1 = \varepsilon t \quad (72)$$

$$\text{daha yavaş zaman ölçekleri } T_2 = \varepsilon^2 t \quad (73)$$

...

$$\text{çok daha yavaş zaman ölçekleri } T_n = \varepsilon^n t \quad (74)$$

zaman parametresine göre çözüm

$$u(t; \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n; \varepsilon) \quad (75)$$

ve çözümün perturbasyondaki açılımı yazılırsa,

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n) + \dots \quad (76)$$

formunda gösterilebilir.  $D_n \cong \frac{\partial}{\partial T_n}$ , kısaltması kullanılarak zamana göre türevleri aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon D_2 + \dots \quad (77)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (78)$$

Eğer ki Duffing denklemi başlangıç koşullarını da dikkate alarak yazarsak ve bunları mertebelere ayırırsak,

$$O(1) : D_0^2 u_0 + w_0^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (79)$$

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + w_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^3 \quad (80)$$

$$u_1(0) = 0, \quad (81)$$

$$(D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0 \quad (82)$$

$$O(\varepsilon^2) : D_0^2 u_2 + w_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - 3u_0^2 u_1 \quad (83)$$

elde edilir.

Birinci mertebeden çözüm olarak;

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iw_0 T_0} + cc \quad (84)$$

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (85)$$

bulunur.

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm aşağıdaki gibi olacaktır :

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos(w_0 t + \beta(T_1, T_2)) \quad (86)$$



Önerilen çözüm başlangıç koşullarına uygulanır.

$$a(0) = a_0 \quad (87)$$

ve

$$\beta(0) = 0 \quad (88)$$

Çözüm epsilon mertebesinde yerine konur ve seküler terimler yok edilirse;

$$2iw_0 D_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (89)$$

Kutupsal formda aşağıdaki sonuç,

$$a = a_0(T_2), \quad (90)$$

$$\beta = \frac{3}{8w_0} a_0^2 T_1 + \beta_0(T_2), \quad (91)$$

$$\beta_0(0) = 0. \quad (92)$$

Epsilon mertebesindeki çözüm ise aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} u_1 &= B e^{iw_0 T_0} + \frac{1}{8w_0^2} A^3 e^{3iw_0 T_0} + cc \\ &= b \cos(w_0 T_0 + \gamma) + \frac{1}{32w_0^2} a^3 \cos(3w_0 T_0 + 3\beta) \end{aligned} \quad (93)$$

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\gamma} \quad (94)$$

Başlangıç koşulları :

$$b(0) = -\frac{1}{32w_0^2} a_0^3, \quad (95)$$

$$\gamma(0) = \beta_0(0) = 0 \quad (96)$$

Epsilon mertebesindeki seküler terimler temizlendiğinde,

$$2iw_0 D_1 B + D_1^2 A + 2iw_0 D_2 A + 3A^2 \bar{B} + 6A \bar{A} B + \frac{3}{8w_0^2} A^3 \bar{A}^2 = 0 \quad (97)$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$a = a_0, \quad (98)$$

$$b = -\frac{1}{32w_0^2} a_0^3, \quad (99)$$

$$\beta = \gamma = \frac{3}{8w_0} a_0^2 T_1 - \frac{21}{256w_0^3} a_0^4 T_2. \quad (100)$$

Sonuç olarak çözüm fonksiyonu,

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon a_0^3}{32w_0^2} (\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)) + O(\varepsilon^3) \quad (101)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3}{8w_0} a_0^2 - \varepsilon^2 \frac{21}{256w_0^3} a_0^4 \quad (102)$$

olacaktır. Perturbasyon yakınsama kriterine göre düzeltme terimleri, başlangıç terimlerinden daima küçük olmalıdır. Bu yakınsama kriteri, matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\varepsilon a_0^3}{32w_0^2} \ll 1 \quad (103)$$

### 3.5. ASİMPOTOTİK AÇILIMLARIN UYUMU

Bir iç ve bir de dış açılım yapıp iki açılımın uyumundan kompozit bir çözüm elde edilir.

#### 3.5.1. ASİMPOTOTİK AÇILIMIN UYUMU İLE TEKİL PERTÜRBASYON PROBLEMİ

Aşağıda verilen nonlineer problemi iki farklı metotla çözelim.

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + y' + y^2 &= 0 \\ y(0) = 0 \quad y(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (104)$$

##### 3.5.1.1. DIŞ AÇILIM

Diferansiyel denklemin çözümü olarak  $y$  terimini Pertürbe edersek

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots \quad (105)$$

bulunur. Aynı şekilde çözümün türevleri de pertürbe edilebilir. Bu denklemlerin pertürbe edilmiş halleri açılım olarak aşağıda gibidir.

$$y' = y_0' + \varepsilon y_1' + \dots \quad (106)$$

$$y'' = y_0'' + \varepsilon y_1'' + \dots \quad (107)$$

Eğer bu açılımlar (103) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\varepsilon(y_0'' + \varepsilon y_1'') + (y_0' + \varepsilon y_1') + (y_0 + \varepsilon y_1)^2 = 0 \quad (108)$$

denklemini elde edilir ve elde edilen denklemleri mertebelerine ayırarak her bir mertebeye ait adi diferansiyel denklemleri elde edilir. Bunlar :

$$\begin{aligned} O(1): \quad y_0' + y_0^2 &= 0 \\ O(\varepsilon): \quad y_1' + 2y_0 y_1 &= -y_0'' \end{aligned} \quad (109)$$

Bu kısımda verilen differansiyel denklem ile sınır değerleri birlikte yorumlanarak sınır tabakası belirlenir.

Sınır tabakasının sağda olduğunu varsayarsak sağdaki şartı  $y(1) = \frac{1}{2}$  dış açılımı sağlamalıdır.

$$y(1) = y_0(1) + \varepsilon y_1(1) \quad (110)$$

Pertürbe edilmiş sınır değerini yorumlandığında

$$y_0(1) = \frac{1}{2}, \quad y_1(1) = 0$$

değerlerine ulaşılır.

$O(1)$  çözümü:

$$\begin{aligned} O(1): \quad y_0' + y_0^2 = 0 &\Rightarrow \frac{-dy_0}{y_0^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{y_0} = x + C_1 \\ y_0(1) = \frac{1}{2} &\Rightarrow C_1 = 1 \end{aligned} \quad (111)$$

Böylece  $y_0(x) = \frac{1}{1+x}$  çözümü bulunur ki bu çözüm  $O(1)$  mertebesinin çözümüdür.

$O(\varepsilon)$  çözümü:

$$O(\varepsilon): \quad y_1' + 2y_0 y_1 = -y_0'' \quad (112)$$

Burada birinci mertebenin çözümü olan  $y_0$ 'ı yerine yazalım ve  $O(\varepsilon)$  seviyesinde elde edilen differansiyel denklemi çözelim.

$$y_1' + 2 \frac{1}{1+x} y_1 = \left(\frac{1}{1+x}\right)'' \quad (113)$$

Elde edilen yukarıdaki denklemdeki türev işlemleri yapılırsa denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_1' + \frac{2}{1+x} y_1 = \frac{-2}{(1+x)^3} \quad (114)$$

buradan diferansiyel denklem çözümü olan  $y_1$  bulunur.

$$y_1(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} \ln(1+x) + \frac{C_2}{(1+x)^2} \quad (115)$$

Bu genel çözümde problemin sınır koşullarından seçilen

$$y_1(1) = \frac{1}{2}$$

sınır koşulu yerine yazılırsa elde edilen çözüm aşağıda verildiği şekilde

$$y_1(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} \ln(1+1) + \frac{C_2}{(1+1)^2}$$

ise

$$y_1(x) = \frac{2}{(1+x)^2} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right) \quad (116)$$

Bulunan  $y_1$  ve  $y_0$  yaklaşık çözümlerini

$$y^o = y_0 + \varepsilon y_1$$

denkleme yerleştirildiğinde  $y^o$  dış açılım olarak

$$y^o = \frac{1}{1+x} + \varepsilon \frac{2}{(1+x)^2} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right) + \dots \quad (117)$$

denkleme elde edilir.

### 3.5.1.2. İÇ AÇILIM

Burada problemi tekrar ele alırsak;

$$\varepsilon y'' + y' + y^2 = 0$$

$$y(0) = 0 \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

Diferansiyel denklemin sınır koşullarından sol tarafta olan sıfır civarında sınır tabakası olduğu varsayımı ile sınır tabakası değişkenini tanımlanır :

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^\gamma} \quad (118)$$

$$\varepsilon^{1-2\gamma} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\gamma} \frac{dy}{d\xi} + y^2 = 0 \quad (119)$$

i) ilk iki terim mertebeden eşit ise,

$$1 - 2\gamma = -\gamma \quad (120)$$

ise

$$\gamma = 1 \quad (121)$$

ve

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\xi} + \varepsilon y^2 = 0 \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon} \quad (122)$$

seçim uygundur .

ii) Birinci ve üçüncü terimler mertebede eşitlenir.

$$1 - 2\gamma = 0 \quad (123)$$

ise

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad (124)$$

ve

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{d\xi} + y^2 = 0 \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon} \quad (125)$$

seçim uygun değildir. Baskın terimler fazla olmalıdır.

İlk olarak alınan (i) seçeneği uygun olduğundan iç açılım için  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  dönüşümü yapılarak çözüm yapılır:

$$y^i = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \dots \quad (126)$$

Pertürbe edilmiş iç açılımın çözümünün türevleri aşağıda verilmiştir.

$$y'^i = y'_0(\xi) + \varepsilon y'_1(\xi) + \dots \quad (127)$$

$$y''^i = y''_0(\xi) + \varepsilon y''_1(\xi) + \dots \quad (128)$$

Eğer bu açılımları (104) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(y''_0 + \varepsilon y''_1) + (y'_0 + \varepsilon y'_1) + \varepsilon (y_0 + \varepsilon y_1)^2 = 0 \quad (129)$$

Elde ettiğimiz denklemin her mertebesi için ayrı diferansiyel denklemler yazılır.

$$\begin{aligned} O(1): \quad y''_0 + y'_0 &= 0 \\ O(\varepsilon): \quad y''_1 + y'_1 &= -y_0^2 \end{aligned} \quad (130)$$

Sınır tabakasının solda olduğunu varsayarak  $y(0) = 0$  olacaktır. Denkleminde (105) uyarlırsak

$$y(0) = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) \quad (131)$$

Sınır koşuluna bağlı olarak,

$$y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = 0 \quad (132)$$

elde edilir.

$O(1)$  çözümü

Diferansiyel denklemin pertürbe ederek bulunan  $O(1)$  mertebesi

$$O(1): \quad y''_0 + y'_0 = 0 \quad (133)$$

Adi diferansiyel denklemin çözüldüğünde  $y_0$  çözümü elde edilir ki buda

$$y_0 = C_3 + C_4 \exp(-\xi) \quad (134)$$

Denklemini verir seçtiğimiz  $y_0(0) = 0$  sınır şartını burada uygularsak sabitleri yalnızca birini elde edebilir ki ikinci sabit ileride uyum şartı ile bulunur. Kullanılan tek sınır şartı ile

$$C_4 = -C_3 \quad (135)$$

bağıntısı bulunur.  $y_0$  çözümü ise,

$$y_0 = C_3(1 - \exp(-\xi)) \quad (136)$$

olur.

$O(\varepsilon)$  çözümü

$O(1)$  mertebesinde bulunan  $y_0$  çözümünü

$$y_1'' + y_1' = -y_0^2 \quad (137)$$

$O(\varepsilon)$  mertebesinde yerine yerleştirildiğinde diferansiyel denklem

$$y_1'' + y_1' = -(C_3(1 - \exp(-\xi)))^2 \quad (138)$$

olarak bulunur. Elde edilen adi differansiyel denklem çözümlendiğinde

$$y_1(\xi) = C_8 + C_9 e^{-\xi} - C_3^2 \left( \xi + 2\xi e^{-\xi} + \frac{1}{2} e^{-2\xi} - \frac{1}{2} e^{-\xi} \right) \quad (139)$$

Sınır değerlerini uyarlayarak iki farklı çözüm sunulur. İç açılım ve dış açılım olarak adlandırılan bu iki çözümün tek bir çözüm olarak sunmak üzere Nayfeh tarafından bulunan ve uygulanan uyum şartı kullanılır. Uyum şartı iki çözüm kümesinin toplanarak, bu iki çözüm kümesinin kesişmesinden oluşan parçanın çıkarılması ile yapılan basit bir işlemdir.



### 3.5.1.3. UYUM ŞARTI

$$(y^o)^i = (y^i)^o \quad (140)$$

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$(y^o)^i = \frac{1}{1 + \varepsilon\xi} + \varepsilon \frac{2}{(1 + \varepsilon\xi)^2} \ln\left(\frac{2}{1 + \varepsilon\xi}\right) \quad (141)$$

Eğer ki bu çözümün terimlerini seriye açarak yazsak

$$(y^o)^i \cong 1 - \varepsilon\xi + \varepsilon 2 \ln 2 \quad (142)$$

Yine aynı şekilde

$$\begin{aligned} (y^i)^o &= C_3 \left[ 1 - \underbrace{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}_{EKT} \right] + \varepsilon \left[ C_8 \left( 1 - \underbrace{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}_{EKT} \right) \right] - C_3^2 \left[ \frac{x}{\varepsilon} + 2 \frac{x}{\varepsilon} \underbrace{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}_{EKT} + \frac{1}{2} \underbrace{e^{-2\frac{x}{\varepsilon}}}_{EKT} - \frac{1}{2} \underbrace{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}_{EKT} \right] \\ &\cong C_3 - C_3^2 x + \varepsilon C_8 \end{aligned} \quad (143)$$

$(y^o)^i$  Ve  $(y^i)^o$  ifadeleri karşılaştırılırsa

$$C_3 = 1, \quad C_8 = 2 \ln 2 \quad (144)$$

sabit değerleri elde edilir. Kompozit açılım ise,

$$y^c = y^o + y^i - (y^i)^o. \quad (145)$$

ve denklemde değerler yerine yazılırsa,

$$y^c = \frac{1}{1+x} - (1+2x)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon \left\{ \frac{2}{(1+x)^2} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right) \left( \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \right) e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - \frac{1}{2} e^{-2\frac{x}{\varepsilon}} \right\} \quad (146)$$

denklemi ile elde edilen çözüm sınır değer probleminin çözümü olarak elde edilir. Çözümün sınır değerleri sağladığında ve Çok Ölçekli metot ile karşılaştırıldığında geçerli çözümler verdiği görülür.

#### 4. LİNEER OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN ÇÖZÜM VERECEK OLAN YENİ BİR PERTÜRBASYON TEKNİĞİ

Zaman içerisindeki fiziksel olmayan büyümeleri engellemek için geliştirilen metotta çözümün periyodik olduğu varsayılır. Önce zaman değişkeninde bir dönüşüm yapılır. Bu dönüşüm sayesinde pertürbasyon açılımı bu dönüşümdeki keyfi parametreye uygulanır ve çözümdeki patlamalar giderilir.

Seçilen zaman parametresinin dönüşümü

$$T_e = f \cdot t \quad (147).$$

ve türevleri

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dT_e} \frac{dT_e}{dt} = \frac{du}{dT_e} \left( \frac{df}{dt} t + f \right) = u'(\dot{f}t + f) \quad (148),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dT_e} \left( \frac{df}{dt} t + f \right) \right) \\ &= \left[ \frac{d}{dT_e} \left( \frac{du}{dT_e} \right) \right] \left( \frac{df}{dt} t + f \right) \frac{dT_e}{dt} + \frac{du}{dT_e} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dt} t + f \right) \right] \\ &= \frac{d^2u}{dT_e^2} \left( \frac{df}{dt} t + f \right)^2 + \frac{du}{dT_e} \left( \frac{d^2f}{dt^2} t + 2 \frac{df}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = u''(\dot{f}t + f)^2 + u'(\ddot{f}t + 2\dot{f}) \quad (149).$$

bulunur. Denklem (149) da ikinci türevin içerisinde birinci mertebeden bir türev daha elde edildi. Zamana bağlı olarak yapılan türevlerden birinci mertebeden türevin katsayısı bilindiği üzere mekanik problemlerde sönüm elemanı olarak matematiksel modellemelerde ise olayın gelişme hızını belirler. Uygulanan zaman dönüşümünün sağladığı yarar yapay bir zamana göre birinci türev ve bunun ile birlikte yapay bir sönüm katsayısı elde edildi. LP metodunda bu katsayı sabit olarak alınır ve Çok Zaman Ölçekli yöntem ise, zaman kademeli olarak ayarlanır. Bu çalışmada sunulan zaman değişkeninde ise avantaj problemin tipine ve gereksinimlerine göre sönüm katsayısının değiştirilebilmesidir.

#### 4.1. DUFFING DENKLEMİNİN YENİ PERTÜRBASYON TEKNİĞİ İLE ÇÖZÜMÜ

Duffing denklemini ele alalım:

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

Önce yeni bir zaman değişkeni tanımlayalım:

$$T_e = f(w,t) \cdot t \quad (150)$$

Tanımlanan zaman değişim fonksiyonun parametreleri daha sonra tanımlanabildiği gibi problemin başında da belirlenebilir. Taylor açılımı herhangi bir parametreye göre alınır ve diğer parametreler elenmiş olur. Bu çalışmada zaman parametresi alınır ve zamana göre kontrol sağlanır. Burada zamanın, zamana bağlı bir fonksiyon ile kontrolü sağlanır.

$$f(t) = \underbrace{f(t_0) + \frac{df(t)}{dt}(t-t_0)}_{ESAS} + \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots$$

Denklemden zaman parametresinde yapılacak olan dönüşüm

$$T_e = f(t) \cdot t \quad (151)$$

şeklindedir.

Tam çözüm olarak belirlenen  $u$  ' nun zamana göre türevleri zincir kuralı kullanılarak alındığında

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dT_e} \frac{dT_e}{dt} \quad (152)$$

elde edilir. Bu türeğe ait  $\frac{dT_e}{dt}$  terimini tanıma uygun olarak türevi uygulanır

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{df}{dt}t + f \quad (153)$$

olacaktır.

$$\frac{du}{dT_e} = u', \quad (154)$$

ve

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} \quad (155)$$

(154) ve (155) denklemleri kullanılarak

$$\frac{du}{dt} = u'(\dot{f}t + f) \quad (156)$$

denklemini elde edilir.

Aynı koşullar altında (156) denkleminin zamana göre ikinci türevi alındığında

$$\frac{d^2u}{dt^2} = u''(\dot{f}t + f)^2 + u'(\ddot{f}t + 2\dot{f}) \quad (157)$$

denklemini elde edilir. (156) ve (157) denklemlerini Duffing denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2u}{dT_e^2} \left( \frac{df}{dt}t + f \right)^2 + \frac{du}{dT_e} \left( \frac{d^2f}{dt^2}t + 2\frac{df}{dt} \right) + u + \epsilon u^3 = 0 \quad (158)$$

diferansiyel denklemini elde edilir.

Burada Duffing denkleminde bulunmayan sönüm katsayısı  $(\ddot{f}t + 2\dot{f})$  ortaya çıkar. Zamana bağlı olarak yapılan türevlerden birinci mertebeden türevin katsayısı bilindiği üzere mekanik problemlerde sönüm elemanı olarak matematiksel modellemelerde ise olayın gelişme hızını belirler. Uygulanan zaman dönüşümünün sağladığı yarar yapay bir zamana göre birinci türev ve

bunun ile birlikte yapay bir sönüm katsayısı elde edildi. LP metodunda bu katsayı sabit olarak alınır ve Çok Zaman Ölçekli yöntemde ise, zaman kademeli olarak ayarlanır. Bu çalışmada sunulan zaman değişkeninde ise avantaj, problemin tipine ve gereksinimlerine göre sönüm katsayısının değiştirilebilmesidir.

Nonlineer denklemlerde kolaylık sunmak üzere, nonlineer denklemlerin çözümlerinde kullanılan ve denklemin kararlı nokta etrafında periyodik çözümünün varlığı kabul edilerek alınan  $f$  fonksiyonun birinci türevini sıfırlayan ve bunun ile birlikte seçilen fonksiyonun bir sabit olduğunu gösterir. Eğer diferansiyel denklemin sönüm katsayısı sıfır olarak alınırsa,  $f$  fonksiyonuna ait türevler sıfır değerini alacaktır.

Klasik pertürbasyon metodunda kullanılan teknikler ile tam çözüm olan  $u$  pertürbe edilir.  $u$  çözüm fonksiyonu

$$u = u_0(T_e) + \varepsilon u_1(T_e) + \dots$$

şeklinde ifade edilir.

Yapılan bu açılımdan sonra aynı şekilde zamana göre türevler elde edilir. Zamana göre birinci mertebeden türevi

$$u' = u'_0(T_e) + \varepsilon u'_1(T_e) + \dots$$

şeklinde olacaktır.

Zamana göre ikinci mertebeden türev ise,

$$u'' = u''_0(T_e) + \varepsilon u''_1(T_e) + \dots$$

biçimindedir.

Dönüşümde kullanılan fonksiyon pertürbasyon tekniğine uygun olarak fonksiyona ve zamana göre türevlerinin açılımları yapıldığında

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \dots \\ \dot{f} &= \dot{f}_0 + \varepsilon \dot{f}_1 + \dots \\ \ddot{f} &= \ddot{f}_0 + \varepsilon \ddot{f}_1 + \dots \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Burada kontrol parametresi olan bu fonksiyonun açılımını yapmak ile problemin başından itibaren bir yaklaşımda bulunacağını ve  $f$  fonksiyonunu tam olarak değilde yalnızca iki terimli bir Taylor serisi şeklinde tahminde bulunacağı belirtilmiş olur. Bu bir dezavantaj olarak görülse bile, nonlineer problemlerin özellikle kaosa yatkın çözümlerinde hesaplamaları rahatlatır.

Fonksiyonun Taylor açılımını yapmanın bir avantajı da; klasik perturbasyon tekniklerinde kullanılan ilk adım olarak görülen direkt açılım olarak adlandırılan basit bir teknik ile uygun bir şekilde hesaplama kolaylığı sağlamasıdır.

Zaman dönüşümü ile ortaya konan  $T_e$  ile gerçek zaman  $t$  arasındaki bağıntı

$$t = \frac{T_e}{f} \quad (159)$$

olduğu rahatça görülür.  $u$  nun  $T_e$  nin açılımları denklemde yerine yazıldığında elde edilen denklem

$$\begin{aligned} & [u_0'' + \varepsilon u_1''] \left[ (\dot{f}_0^2 + \varepsilon \dot{f}_1 \dot{f}_0) T_e^2 + 2T_e (\dot{f}_0 f_0^2 + 2\varepsilon \dot{f}_0 f_1 \dot{f}_0 + \varepsilon \dot{f}_1 f_0^2) + (f_0^4 + 4\varepsilon f_0^3 f_1) \right] + \\ & [u_0' + \varepsilon u_1'] \left[ (f_0 \ddot{f}_0 + \varepsilon \dot{f}_1 \ddot{f}_0 + \varepsilon \ddot{f}_1 f_0) T_e + 2(\dot{f}_0 f_0^2 + 2\varepsilon \dot{f}_0 f_1 \dot{f}_0 + \varepsilon \dot{f}_1 f_0^2) \right] + \\ & [u_0 + \varepsilon u_1] (f_0^2 + 2\varepsilon f_0 f_1) + \\ & \varepsilon [u_0^3 + 3u_0^2 \varepsilon u_1] (f_0^2 + 2\varepsilon f_0 f_1) = 0 \end{aligned} \quad (160)$$

şeklindedir.

(160) denklemi mertebelerine ayrıldığında elde edilen adi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$O(1) : u_0'' (\dot{f}_0^2 T_e^2 + 2T_e \dot{f}_0 f_0^2 + f_0^4) + u_0' (f_0 \ddot{f}_0 T_e + 2\dot{f}_0 f_0^2) + u_0 f_0^2 = 0 \quad (161)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : & u_1'' (\dot{f}_0^2 T_e^2 + 2T_e \dot{f}_0 f_0^2 + f_0^4) + u_1' (f_0 \ddot{f}_0 T_e + 2\dot{f}_0 f_0^2) + u_1 f_0^2 \\ & = - \left[ \begin{aligned} & \left[ \dot{f}_1 \dot{f}_0 T_e^2 + 4T_e \dot{f}_0 f_1 \dot{f}_0 + 2T_e \dot{f}_1 f_0^2 + 4f_0^3 f_1 \right] u_0'' + \\ & \left[ f_1 \ddot{f}_0 T_e + \dot{f}_1 f_0 T_e + 4f_0 f_1 \dot{f}_0 + 2\dot{f}_1 f_0^2 \right] u_0' + \\ & 2u_0 f_0 f_1 + f_0^2 u_0^3 \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (162)$$

(161) ve (162) denklemlerinde eşitliğin sağ tarafında bulunan ve diferansiyel denklemin çözümünü zorlaştıran terimleri azaltmak amacı ile bazı terimlerin sıfırlanmasını sağlayan ve kontrol parametresi görevini yapan  $f$  fonksiyonunun türevlerini sıfıra eşitleyerek  $O(1)$  ve  $O(\varepsilon)$  mertebesi daha basit bir formda elde edilir.

Birinci mertebeden olan diferansiyel denklemin çözümü

$$u_0 = C_1 \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) \quad (163)$$

şeklindedir.

Başlangıç koşulları;

$$u_0(0) = a_0 \quad (164)$$

ve

$$u'_0(0) = 0 \quad (165)$$

uygulandığında

$$u_0 = a_0 \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) \quad (166)$$

denklemi çözüm olarak bulunur. (166) çözümünü kullanarak  $O(\varepsilon)$  mertebesinde  $u_1$  çözümünü bulalım:

$$O(\varepsilon) : u''_1 f_0^4 + u_1 f_0^2 = [-4f_0^3 f_1 u_0'' - 2u_0 f_0 f_1 - f_0^2 u_0^3] \quad (167)$$

Birinci mertebeden elde edilen denklemde  $u_0 = a_0 \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right)$  denklemi ve türevleri (168)

denkleminde yerleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$O(\varepsilon) : u''_1 f_0^2 + u_1 = -\frac{a_0}{4} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \quad (168)$$

$O(\varepsilon)$  mertebesinde elde edilen adi diferansiyel denklemin özel çözümünü bulmak üzere bir özel çözüm sunulur. Bu çözüm,

$$u_{\delta} = C_1 \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right). \quad (169)$$

şeklindedir.

Önerilen özel çözümün türevleri,

$$\begin{aligned} u'_{\delta} &= -C_1 \frac{3}{f_0} \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) + C_2 \frac{3}{f_0} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \\ u_{\delta}'' &= -C_1 \frac{9}{f_0^2} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) - C_2 \frac{9}{f_0^2} \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \end{aligned} \quad (170).$$

biçiminde olacaktır. (170) kullanılarak

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : u''_1 f_0^2 + u_1 &= \left[ 4f_0 f_1 \left[ a_0 \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) \right] - 2 \left[ a_0 \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) \right] f_0 f_1 - \left[ a_0 \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) \right]^3 \right] \\ &= \left[ \underbrace{2f_0 f_1 [a_0] - \left[ \frac{3}{4} a_0^3 \right]}_{=0} \right] \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) - \frac{1}{4} a_0^3 \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \end{aligned} \quad (171)$$

Bu denklemde seküler terimi yok etmek için kullanılır.

$$2f_0 f_1 [a_0] - \left[ \frac{3}{4} a_0^3 \right] = 0 \quad (172)$$

ise

$$f_1 = \frac{3a_0^2}{8f_0} \quad (173)$$

Yapılan bu işlemler sonucunda  $f_0$  ve  $f_1$  fonksiyonlarını birbirleri cinsinden ifade edebilir. Bunun yanında  $O(\varepsilon)$  denkleminde

$$O(\varepsilon) : u''_1 f_0^2 + u_1 = -\frac{1}{4} a_0^3 \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \quad (174)$$



$f_0$  teriminin sıfır değerli olmayacağını göz önüne alıp denklemin her iki tarafını  $f_0^2$  'ne bölünürse

$$O(\varepsilon) : u''_1 f_0^2 + u_1 = -\frac{a_0^3}{4} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \quad (175)$$

elde edilir.

Diferansiyel denklemi çözmek üzere özel çözümler sunulur.

$$u_{\delta} = C_1 \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \quad (176)$$

Özel çözüm olarak sunulan bu fonksiyonun türevleri aşağıda verildiği gibi

$$\begin{aligned} u'_{\delta} &= -C_1 \frac{3}{f_0} \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) + C_2 \frac{3}{f_0} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \\ u_{\delta}'' &= -C_1 \frac{9}{f_0^2} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) - C_2 \frac{9}{f_0^2} \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \end{aligned} \quad (177)$$

olur.

$$O(\varepsilon) : u''_1 f_0^2 + u_1 = -\frac{a_0^3}{4} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right)$$

denkleminde yerine yazılarak

$$-C_1 9 \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) - C_2 9 \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) + C_1 \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) = -\frac{a_0^3}{4} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right) \quad (178)$$

ve başlangıç koşulları kullanılarak sabit çarpanların değerleri bulunur. Sabitler;

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{a_0^3}{32} \quad (179)$$

olarak bulunur.

$O(1)$  ve  $O(\varepsilon)$  denklemlerinde elde edilen  $u_0$  ve  $u_1$  çözümlerini  $u = u_0 + \varepsilon u_1$  denkleminde yerine yazılırsa

$$u = a_0 \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e\right) + \varepsilon \frac{a_0^3}{32} \cos\left(\frac{3}{f_0} T_e\right)$$

yaklaşık çözümü bulunur.

Zaman dönüşümünü kullanarak elde edilen denklem

$$u = a_0 \cos\left(\frac{1}{f_0} ft\right) + \varepsilon \frac{a_0^3}{32} \cos\left(\frac{3}{f_0} ft\right) \quad (180)$$

şeklindedir.

$u$  tam çözümü

$$u = a_0 \cos\left[\frac{1}{f_0} (f_0 + \varepsilon f_1) t\right] + \varepsilon \frac{a_0^3}{32} \cos\left[\frac{3}{f_0} (f_0 + \varepsilon f_1) t\right] \quad (181)$$

olarak alınır. Yapılan bu işlemler sonucunda bulunan  $f_0$  ve  $f_1$  fonksiyonları yerlerine yerleştirilirse

$$u = a_0 \cos\left[\frac{1}{f_0} \left(f_0 + \varepsilon \frac{3a_0^2}{8f_0}\right) t\right] + \varepsilon \frac{a_0^3}{32} \cos\left[\frac{3}{f_0} \left(f_0 + \varepsilon \frac{3a_0^2}{8f_0}\right) t\right] \quad (182)$$

çözümü elde edilir.

Metot	Dönüşüm ve başlangıç koşulları	Yaklaşık çözüm
<b>Direkt Açılım Metot</b>	$u(0) = a$ $u'(0) = 0$	$u = a \cos(w_0 t) + \varepsilon \left( \frac{-3}{8} a^3 t \sin(w_0(t + \beta)) + \frac{1}{32} a^3 \cos(w_0(3t + 3\beta)) \right)$
<b>Metot</b>	$T_e = f(w, t) \cdot t$ $u(0) = a$ $u'(0) = 0$	$u = a_0 \cos \left[ \frac{1}{f_0} \left( f_0 + \varepsilon \frac{3a_0^2}{8f_0} \right) t \right] + \varepsilon \frac{a_0^3}{32} \cos \left[ \frac{3}{f_0} \left( f_0 + \varepsilon \frac{3a_0^2}{8f_0} \right) t \right]$
<b>LP Metot</b>	$\tau = wt$ $u(0) = a$ $u'(0) = 0$	$u = a \cos(wt + \beta) + \varepsilon \frac{1}{32} a^3 \cos(3wt + 3\beta)$ $w = w_0 + \varepsilon \frac{3}{8w_0} a^2$
<b>MS Metot</b>	$t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots$ $u(0) = a$ $u'(0) = 0$	$u = a_0 \cos(wt) + \frac{\varepsilon a_0^3}{32w^2} (\cos(3wt) - \cos(wt)) + O(\varepsilon^3)$

**Tablo 1:** Duffing denkleminin zaman dönüşümü ile bulunan çözümün klasik yöntemlerle karşılaştırılması.

#### 4.1.1. YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

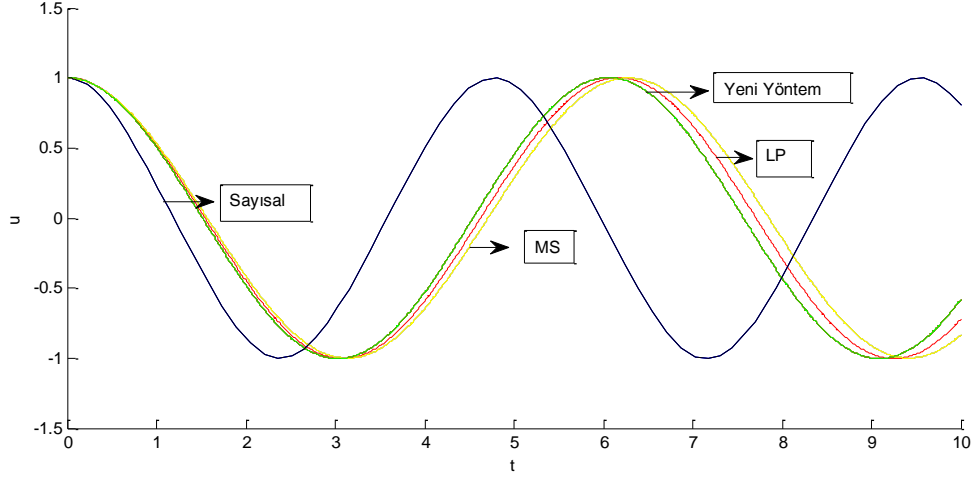
Duffing denklemleri için klasik yöntemler ile yeni yöntemin karşılaştırılmasında  $\varepsilon$  parametresi,  $a_0$  parametresi,  $w_0$  parametresi,  $b$  parametresi bütün işlemlerde  $\varepsilon = 0.1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $w_0 = 1$ ,  $b = 0$  olarak seçilmiştir. Şekil 1'de klasik yöntemlerden Çok Zaman Ölçekli yöntem, Lindstedt Poincare yöntemi ve sayısal çözüm yeni yöntem ile  $f_0 = 1$  için karşılaştırılmıştır. Klasik yöntemler ile yeni yöntem yakın çözümler yakınsamaktadır.

Şekil 2'de klasik yöntemlerden Çok Zaman Ölçekli yöntem, Lindstedt Poincare yöntemi ve sayısal çözüm yeni yöntem ile  $f_0 = 0.1$  için karşılaştırıldı. Klasik yöntemlerden Çok Zaman Ölçekli yöntem ile Lindstedt Poincare yöntemi birlerine daha yakın çözümler verirken, yeni yöntem sayısal çözüme çok yakın olduğu görülmektedir.

Bilinen Duffing denklemleri için Çok zaman ölçekli ile yeni yöntemin karşılaştırılması şekil 3'de  $f_0 = 1$  değeri için, şekil 4'de  $f_0 = 2$  değeri için ve şekil 5'de  $f_0 = 3$  değeri için karşılaştırıldı.

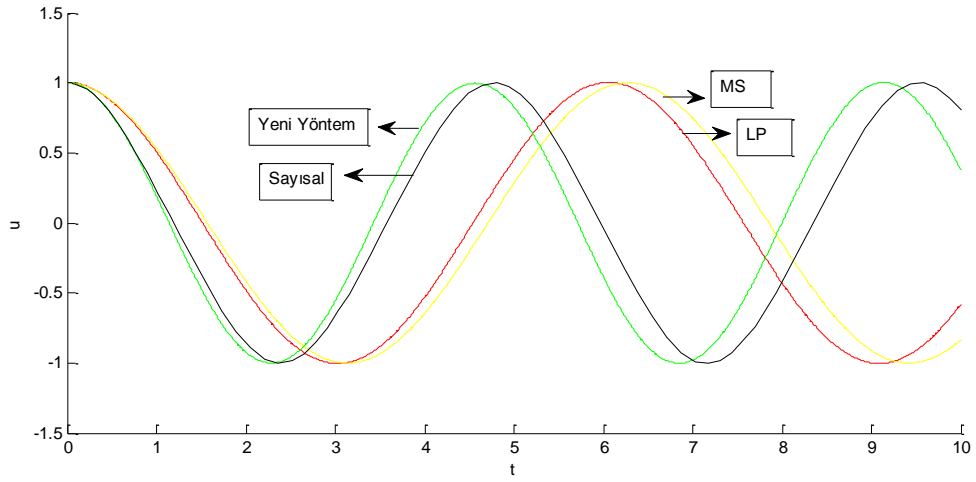
Duffing denklemleri için Lindstedt Poincare yöntemi ile yeni yöntemin karşılaştırılması şekil 6'de  $f_0 = 2$  değeri için, şekil 7'de  $f_0 = 1$  değeri için ve şekil 8'de  $f_0 = 0.1$  değeri için karşılaştırıldı.

Yeni yöntemin sayısal çözüm ile şekil 9'da  $f_0 = 1$  değeri için, şekil 10'da  $f_0 = 0.1$  değeri için ve şekil 11'de  $f_0 = 0.12$  değeri için karşılaştırıldı. Şekil 11'de yeni yöntem ile sayısal çözümün mükemmel uyumu görülmektedir.



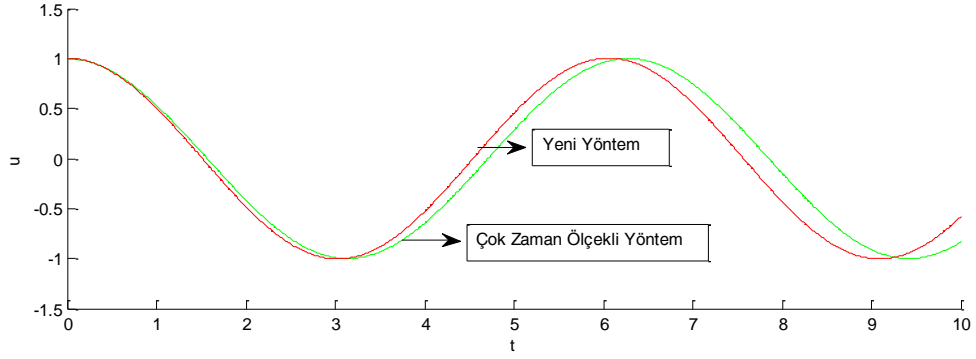
**Şekil 1.** Duffing denklemini için klasik yöntemlerin ve Sayısal çözümün Yeni yöntem ile karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 1$$



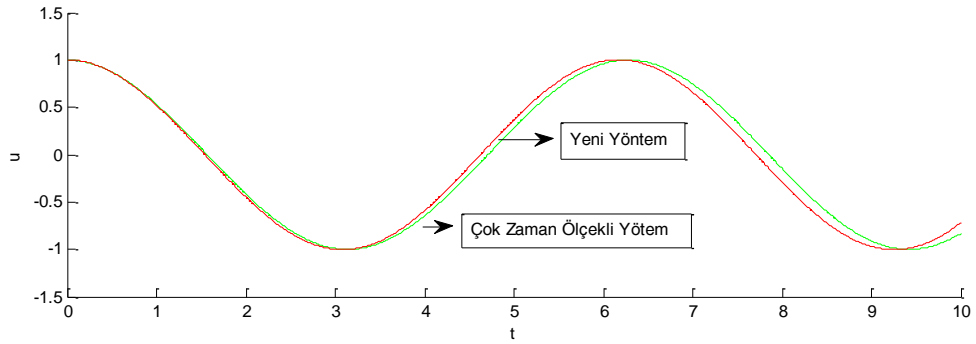
**Şekil 2.** Duffing denklemini için klasik yöntemlerin ve Sayısal çözümün Yeni yöntem ile karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.1$$



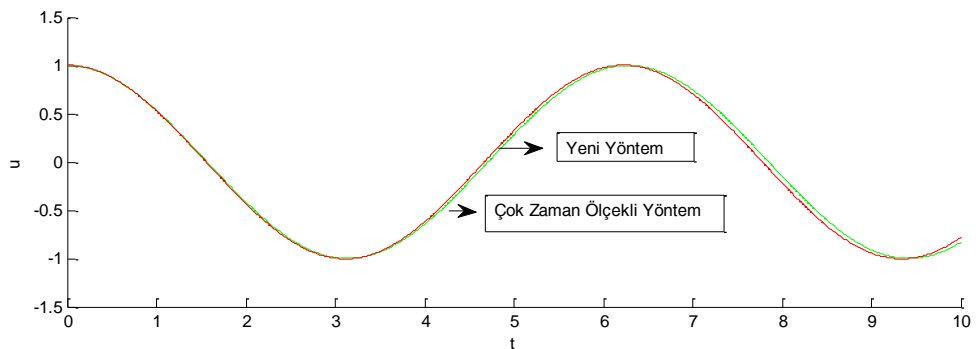
**Şekil 3.** Duffing denklemi için Çok zaman ölçekli ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, f_0 = 1$$



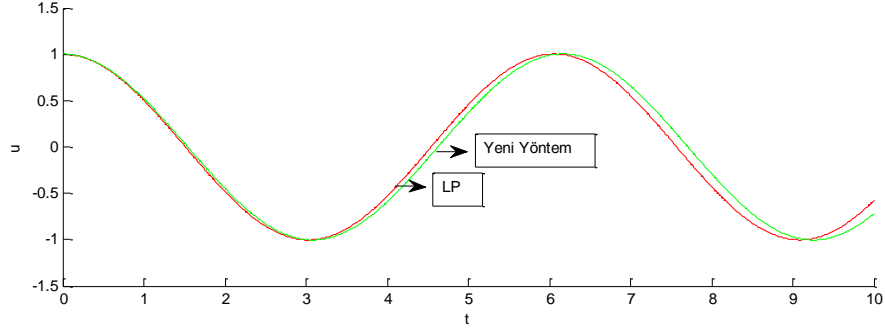
**Şekil 4.** Duffing denklemi için Çok zaman ölçekli ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, f_0 = 2$$



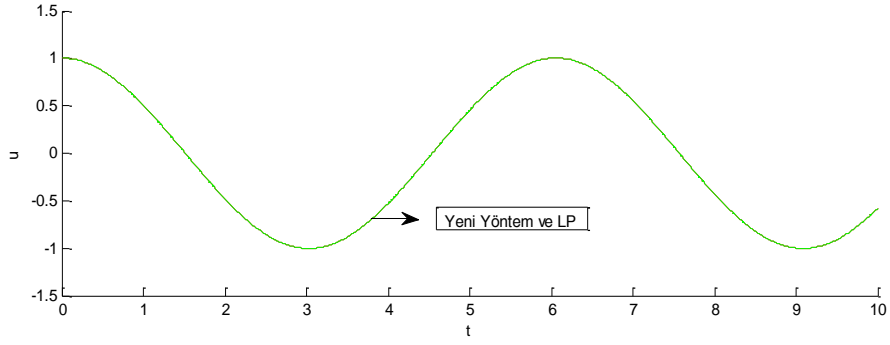
**Şekil 5.** Duffing denklemi için Çok zaman ölçekli ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, f_0 = 3$$



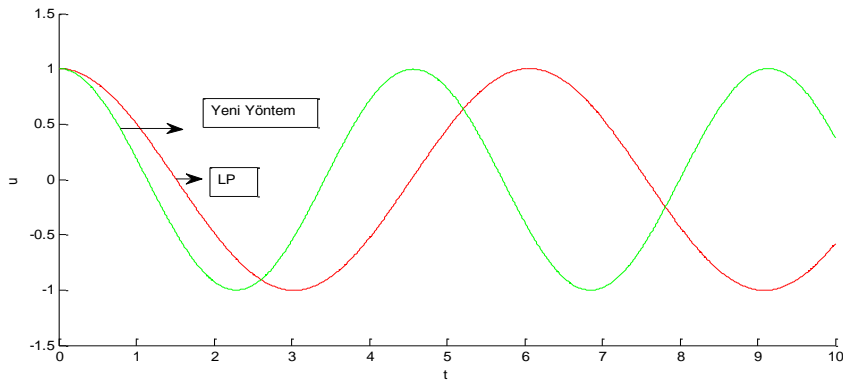
**Şekil 6.** Duffing denklemi için LP ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 2$$



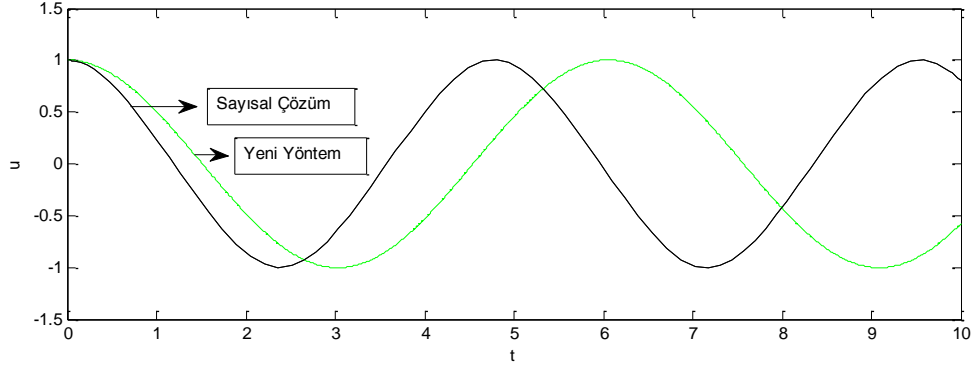
**Şekil 7.** Duffing denklemi için LP ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 1$$



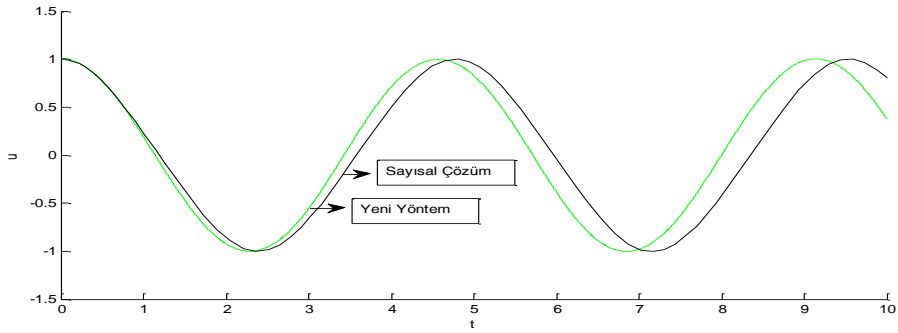
**Şekil 8.** Duffing denklemi için LP ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.1$$



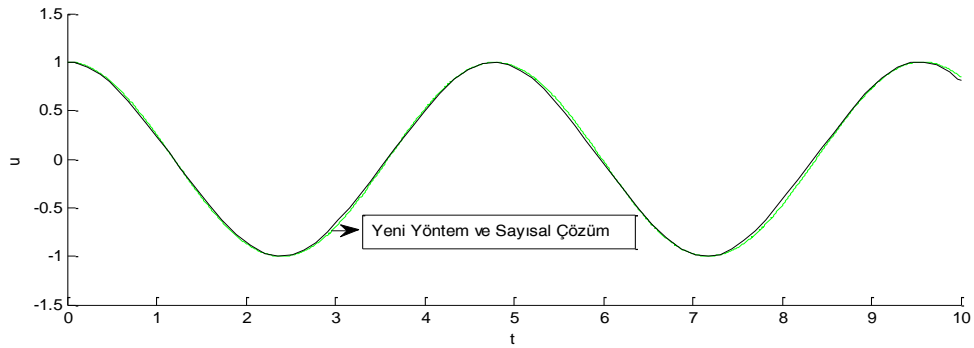
**Şekil 9.** Duffing denklemi için Sayısal Çözüm ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 1$$



**Şekil 10.** Duffing denklemi için Sayısal çözüm ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.1$$



**Şekil 11.** Duffing denklemi için Sayısal çözüm ile Yeni yöntemin karşılaştırılması

$$\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, w_0 = 1, b = 0, f_0 = 0.12$$



#### 4.2. YENİ DÖNÜŞÜM İLE VAN DER POL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$$\text{Denklem} \quad \ddot{u} + u = \varepsilon(1 - \dot{u}^2)\dot{u}$$

$$u(0) = a_0$$

$$\dot{u}(0) = 0 ,$$

Başlangıç koşulları altında çözümünü yeni dönüşüm ile

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{du}{dT_e} \frac{dT_e}{dt} = \frac{du}{dT_e} \left( \frac{df}{dt} t + f \right) = u'(\dot{f}t + f) \\ \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dT_e} \left( \frac{df}{dt} t + f \right) \right) = \left[ \frac{d}{dT_e} \left( \frac{du}{dT_e} \right) \right] \left( \frac{df}{dt} t + f \right) \frac{dT_e}{dt} + \frac{du}{dT_e} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dt} t + f \right) \right] \\ &= \frac{d^2u}{dT_e^2} \left( \frac{df}{dt} t + f \right)^2 + \frac{du}{dT_e} \left( \frac{d^2f}{dt^2} t + 2 \frac{df}{dt} \right) = u''(\dot{f}t + f)^2 + u'(\ddot{f}t + 2\dot{f}) \end{aligned}$$

bulunan türevleri Van der Pol denkleminde yerine yazılır:

$$\ddot{u} + u = \varepsilon(1 - \dot{u}^2)\dot{u}$$

$$u''(\dot{f}t + f)^2 + u'(\ddot{f}t + 2\dot{f}) + u - \varepsilon(1 - u'^2(\dot{f}t + f)^2)u'(\dot{f}t + f) = 0$$

Burada dikkat edilecek terim  $u'(\ddot{f}t + 2\dot{f})$ 'dir. Çünkü bu terim suni olarak üretilen bir terimdir. Bu terim ile yorum yapılır ve  $f$  fonksiyonun türevleri sıfırlanır. Buradaki fikir aynı seküler terimleri yok etmekte kullanılan teknik ile benzerdir. Fakat burada  $f$  fonksiyon olduğu için farklı bir yaklaşımda da bulunabilir. Bu işlem direkt açılımdan da yapılabilir. Sonraki işlem pertürbasyon yapmak üzere Taylor açılımları yerine yazılır ve uygun mertebelere ayrılır. Aşağıda görüldüğü gibi,

$$O(1): u_0'' + \frac{1}{f_0^2} u_0 = 0 \quad (183)$$

$$O(\varepsilon): u_1'' f_0^2 + u_1 = -2u_0'' f_0 f_1 + (1 - u_0'^2 f_0^2) u_0' f_0 \quad (184)$$

$$O(\varepsilon^2): u_2'' f_0^2 + u_2 = -2u_1'' f_0 f_1 - 2u_0'' f_0 f_0 - u_0'' f_1 f_1 + u_1' f_0 + u_0' f_1 - u_0^2 u_1' f_0 - u_0^2 u_0' f_1 - 2u_0 u_1 u_0' f_0 \quad (185)$$

$O(1)$  mertebesinin çözümü

$$u_0 = a \cos\left(\frac{1}{f_0} T_e + \beta\right) \quad (186)$$

bulunan çözüm  $O(\varepsilon)$  mertebesinde bulunan diferansiyel denklemin özel çözümünü bulmak üzere denkleme yerleştirdiğinde,

$$O(\varepsilon): u_1'' f_0^2 + u_1 = -2u_0'' f_0 f_1 + (1 - \dot{u}_0^2) u_0' f_0 \quad (187)$$

(186) denklemini (187) denkleminde yerine yazıldığında

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{a}{f_0} \sin\left(\frac{1}{f_0} T_e + \beta\right) + \frac{1}{3f_0^3} a^3 \sin^3\left(\frac{1}{f_0} T_e + \beta\right) \quad (188)$$

diferansiyel denklemini elde edilir. Diferansiyel denklemini çözümlendiğinde çözüm olarak  $u_1$  bulunur. Çözüm için

$$\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin(3\theta)$$

trigonometrik özdeşliği kullanılır. (188) denklemini tekrar ele alınır ve özdeşlik yerine yazılırsa

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \left(\frac{1}{4f_0^2} a^2 - \frac{1}{f_0}\right) a \sin\left(\frac{1}{f_0} T_e + \beta\right) - \frac{1}{12f_0^3} a^3 \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e + 3\beta\right) \quad (189)$$

denklemini elde edilir. (188) denkleminde sağ taraf iki farklı denklem olarak alınır. Birinci adi diferansiyel denklem

$$\ddot{u}_1^{(1)} + u_1^{(1)} = \left( \frac{1}{4f_0^2} a^2 - \frac{1}{f_0} \right) a \sin\left(\frac{1}{f_0} T_e + \beta\right) \quad (190)$$

şeklindedir. İkinci diferansiyel denklem ise,

$$\ddot{u}_1^{(2)} + u_1^{(2)} = -\frac{1}{12f_0^3} a^3 \sin\left(\frac{3}{f_0} T_e + 3\beta\right) \quad (191)$$

biçimindedir. (190) ve (191) diferansiyel denklemlerinin çözümleri elde edildiğinde

$$u_{1p}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4f_0^2} a^2 \right) a t \cos\left(\frac{T_e}{f_0} + \beta\right) \quad (192)$$

ve

$$u_{1p}^{(2)} = \frac{1}{96f_0^3} a^3 \sin(3t + 3\beta) \quad (193)$$

bulunur. (192) ve (193) çözümlerinin birleştirilmesi ile

$$u_{1p} = u_{1p}^{(1)} + u_{1p}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4f_0^2} a^2 \right) a t \cos\left(\frac{T_e}{f_0} + \beta\right) + \frac{1}{96f_0^3} a^3 \sin\left(3\frac{T_e}{f_0} + 3\beta\right) \quad (194)$$

elde edilen  $u_0$  ve  $u_1$  çözümleri  $u$  yerine yazıldığında elde edilen denklem,

$$u = a \cos(t + \beta) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4f_0^2} a^2 \right) a t \cos\left(\frac{T_e}{f_0} + \beta\right) + \frac{1}{96f_0^3} a^3 \sin\left(3\frac{T_e}{f_0} + 3\beta\right) \right] \quad (195)$$

çözümde bulunan

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4f_0^2} a^2 \right) a t \cos\left(\frac{T_e}{f_0} + \beta\right)$$

terimde çarpan olarak bulunan  $t$  parametresinin ( $t \rightarrow \infty$ ) zamanın büyümesi ile oluşturacağı büyümeyi engellemek üzere çarpan olarak bulunan

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4f_0^2} a^2 \right) a$$

terimi sıfırlayarak büyümei engelleyebiliriz. Terimin sıfıra eşitlendiğinde  $a = \pm 2f_0$   $a = 0$  sonuçları elde edilir. Sunulan çözüm  $a = 2f_0$  için

$$u = 2f_0 \cos(f_0 t + \beta) + \varepsilon \left[ \frac{1}{12} \sin(3f_0 t + 3\beta) \right] \quad (196)$$

şeklindedir.

### 4.3. YENİ DÖNÜŞÜM İLE TEKİL PERTÜRBASYON PROBLEMİ

Yukarıda yaklaşık olarak çözülen nonlinear problem farklı metotla çözümlenir. Problem ele alınırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + y' + y^2 &= 0 \\ y(0) = 0 \quad y(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (197)$$

Bu problemde  $y$  çözümünün  $x$  bağımsız değişkenine bağlı olduğunu ve  $\varepsilon$  teriminin varlığına dayanarak dönüşümün  $f$  çarpanının  $(x; \varepsilon)$  değişkenlerine bağımlı olabileceği düşünülür. Bunların yanında  $\gamma$  yardımcı parametresi ekleyerek yeni bir zaman değişkeni tanımlayalım:

$$T_\varepsilon = f(x, \gamma; \varepsilon) \cdot x \quad (198)$$

Zaman değişkeninin özelliği sırası geldiğinde tanımlanabilen bir  $f$  fonksiyonuna sahip olmasıdır. Buradaki  $f$  fonksiyonunun özelliği  $x$  parametresini istenen aralıkta hızlandırıp yavaşlatabilmesi ve istenen aralıkta orijinal olarak kalmasını sağlamasıdır. Klasik çözümlerden farkı ise problemin başında değil ihtiyaç olduğunda belirlenmesi olacaktır. Bu neden ile Nayfeh'in asimptotik yaklaşımlarda kullandığı iç açılım ve dış açılım olarak sunduğu çözüm mekanizması bu dönüşüm ile basit bir şekilde birleştirilebilir.

Zaman dönüşümümüzü diferansiyel denkleme uygulamak üzere türevlerini alarak, birinci türev olarak

$$\frac{dy}{dx} = y'(f_x x + f), \quad (199)$$

bulunur. İkinci türev olarak,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''(f_x x + f)^2 + y'(f_{xx} x + 2f_x) \quad (200)$$

elde edilir. Eğer ki türevler denklemde yerine yerleştirilirse

$$\varepsilon y''(f_x x + f)^2 + \varepsilon y'(f_{xx} x + 2f_x) + y'(f_x x + f) + y^2 = 0 \quad (201)$$

elde edilir. Bulunan bu denklemde uygun bir  $f$  fonksiyonu da seçilirse çözüm daha kolay olacaktır. Şimdi Nayfeh tarafından ortaya çıkarılan ve asimptotik yaklaşım olarak verilen

yöntemde iç ve dış açılımı tek bir işlemde toplandığında ve sınır koşullarının seçme zorunda kaldığında bir

$$f(x, \gamma, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \quad (202)$$

seçimi ile  $\gamma$  değişkenin alacağı değerlere karşılık sınır bölgelerindeki farklı durumlarda çözüme götürecektir.

$$f(x, \gamma, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma}$$

ise

$$X_e = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} x \quad (203)$$

$$\begin{aligned} f_x(x, \gamma, \varepsilon) &= 0 \\ f_{xx}(x, \gamma, \varepsilon) &= 0 \end{aligned} \quad (204)$$

Bulunan türevler yerine yerleştirilirse

$$\varepsilon y''(f_x x + f)^2 + \varepsilon y'(f_{xx} x + 2f_x) + y'(f_x x + f) + y^2 = 0 \quad (205)$$

$f$ ,  $f_x$  ve  $f_{xx}$  denklemde yerine yerleştirilirse,

$$\varepsilon y''\left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma}\right)^2 + y'\left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma}\right) + y^2 = 0 \quad (206)$$

Elde ettiğimiz denklemde küçük değişikliklerle aşağıda verilen şekilde

$$\varepsilon^{1-2\gamma} y'' + \varepsilon^{-\gamma} y' + y^2 = 0 \quad (207)$$

bulunan ikinci mertebeden nonlineer diferansiyel denklemin çözümünde  $\gamma$  değişkenin alacağı değerler sınır değerlerinin durumları göz önüne alınarak önerilmiştir.

$$\gamma = 0 \mapsto \varepsilon y'' + y' + y^2 = 0 \Rightarrow X_e = \frac{1}{\varepsilon^0} x \Rightarrow x = X_e \quad (208)$$

$$\gamma = 1 \mapsto \frac{1}{\varepsilon^1} y'' + \frac{1}{\varepsilon^1} y' + y^2 = 0 \Rightarrow X_e = \frac{1}{\varepsilon^1} x \Rightarrow x = \varepsilon^1 X_e \quad (209)$$

Bundan sonra yine pertürbasyon çözümü ile denklem yaklaşık olarak çözülür.

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots \quad (210)$$

$$y' = y'_0 + \varepsilon y'_1 + \dots \quad (211)$$

$$y'' = y''_0 + \varepsilon y''_1 + \dots \quad (212)$$

(202) ve (203) dönüşümlerini kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + y' + y^2 &= 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} y'' + \frac{1}{\varepsilon} y' + y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (213)$$

Elde ettiğimiz (207) denklemlerin toplamı alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left( \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) y'' + \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) y' + 2y^2 = 0 \quad (214)$$

$$\left( \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) (y''_0 + \varepsilon y''_1) + \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) (y'_0 + \varepsilon y'_1) + 2(y_0 + \varepsilon y_1)^2 = 0 \quad (215)$$

$$\left( \varepsilon (y''_0 + \varepsilon y''_1) + \frac{1}{\varepsilon} (y''_0 + \varepsilon y''_1) \right) + \left( (y'_0 + \varepsilon y'_1) + \frac{1}{\varepsilon} (y'_0 + \varepsilon y'_1) \right) + (2y_0 + 4\varepsilon y_1 y_0) = 0 \quad (216)$$

$$\left( (\varepsilon y''_0 + \varepsilon^2 y''_1) + \left( \frac{1}{\varepsilon} y''_0 + y''_1 \right) \right) + \left( (y'_0 + \varepsilon y'_1) + \left( \frac{1}{\varepsilon} y'_0 + y'_1 \right) \right) + (2y_0 + 4\varepsilon y_1 y_0) = 0, \quad (217)$$

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): y_0'' + y_0' = 0 \quad (218)$$

$$O(1): y_1'' + y_1' = -y_0' - 2y_0^2 \quad (219)$$

$$O(\varepsilon): y_1' + y_0'' = -4y_1 y_0 \quad (220)$$

$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$  çözümü şöyle elde edilir.

$$y_0'' + y_0' = 0 \rightarrow D^2 + D = 0 \rightarrow D = -1 \quad D = 0 \quad y_0 = C_1 + C_2 \exp(-X_e) \quad (221)$$

Başlangıç koşulları uygulandığında

$$X_e = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} x \quad (222)$$

ise

$$x = 0 \rightarrow X_e = 0 \quad (223)$$

$$x = 1 \rightarrow X_e = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \quad (224)$$

$$y(0) = 0 \quad (225)$$

Başlangıç koşulu için,

$$y(0) = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 0 \quad (226)$$

ve aynı şekilde

$$y(1) = \frac{1}{2} \quad (227)$$

Başlangıç koşulu için,

$$y(1) = y_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y_1\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2} \quad (228)$$

Sabit çarpanları bulmak üzere

$$y(0) = 0$$

Başlangıç koşulunu kullanarak

$$y_0 = C_1 + C_2 \exp(-X_e) \quad (229)$$

denklemden

$$y_0(0)$$

denklemine ve buradan



$$C_1 + C_2 = 0 \quad (230)$$

eşitliğini elde edilir. Aynı şekilde

$$y_0 = C_1 + C_2 \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \quad (231)$$

denklemden

$$C_1 = \frac{1}{2} \quad (232)$$

dir. Buradan elde ettiğimiz

$$C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = -\frac{1}{2}$$

sabitleridir.

$$y_0 = \frac{1}{2}(1 - \exp(-X_e)) \quad (233)$$

mertebenin çözümünü ve türevlerini

$$\begin{aligned} y_0' &= \exp(-X_e) \\ y_0'' &= -\exp(-X_e) \end{aligned} \quad (234)$$

$$O(1): \quad y_1'' + y_1' = -y_0' - 2y_0^2 \quad (235)$$

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1' &= -\exp(-X_e) - 2\left(\frac{1}{2}(1 - \exp(-X_e))\right)^2 \\ &= -\exp(-X_e) - \frac{1}{2}(1 - 2\exp(-X_e) + \exp(-2X_e)) \\ &= -\exp(-X_e) - \frac{1}{2} + \exp(-X_e) - \frac{1}{2}\exp(-2X_e) \\ &= -\frac{3}{2}\exp(-X_e) - \frac{1}{2}\exp(-2X_e) \end{aligned} \quad (236)$$

işlemlerinin sonucunda aşağıdaki denklem

$$y_1'' + y_1' = -\frac{3}{2} \exp(-X_e) - \frac{1}{2} \exp(-2X_e)$$

elde edilir. Diferansiyel denklemi çözmek üzere özel çözümler sunulur.

$$y_{1\delta} = C_3 X_e \exp(-X_e) + C_4 \exp(-2X_e).$$

Denkleminde özel çözüm olarak sunulan ifadenin türevleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} y_{1\delta}' &= -C_3 X_e \exp(-X_e) + C_3 \exp(-X_e) - 2C_4 \exp(-2X_e) \\ y_{1\delta}'' &= C_3 X_e \exp(-X_e) - C_3 \exp(-X_e) - C_3 \exp(-X_e) + 4C_4 \exp(-2X_e) \end{aligned} \quad (237)$$

Özel çözüm ve türevleri yerine yazıldığında bulunan denklem:

$$\begin{aligned} C_3 X_e \exp(-X_e) - C_3 \exp(-X_e) - C_3 \exp(-X_e) + 4C_4 \exp(-2X_e) + \\ - C_3 X_e \exp(-X_e) + C_3 \exp(-X_e) - 2C_4 \exp(-2X_e) = -\exp(-X_e) - 2\left(\frac{1}{2}(1 - \exp(-X_e))\right)^2 \end{aligned} \quad (238)$$

dir. Bu denklemde işlemler yapıldığında,

$$\exp(-X_e)(C_3) + (2C_4) \exp(-2X_e) = -\frac{3}{2} \exp(-X_e) - \frac{1}{2} \exp(-2X_e) \quad (239)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten sabit çarpanlardan

$$C_3 = -\frac{3}{2} \quad C_4 = -\frac{1}{4} \quad (240)$$

elde edilir.

$$y_1 = \frac{1}{2}(1 - \exp(-X_e)) + \varepsilon \left( -\frac{3}{2} X_e \exp(-X_e) - \frac{1}{4} \exp(-2X_e) \right) \quad (241)$$

$O(\varepsilon)$  mertebesinde elde edilen denklemde

$$O(\varepsilon): \quad y_1' + y_0'' = -4y_1 y_0 \quad (242)$$

$y_0$  ve  $y_1$  çözümleri yerine yazılırsa,

$$-2 \exp(-X_e) + 3X_e \exp(-X_e) - 3 \exp(-X_e) + \exp(-2X_e) = -2 \left[ -3X_e \exp(-X_e) - \frac{1}{2} \exp(-2X_e) \right] (1 - \exp(-X_e))$$

(243)

$X_e = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} x$  ise sonuç olarak

$$\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^\gamma} x\right) \left(-5 - 3 \frac{1}{\varepsilon^\gamma} x\right) + 6T_e \exp\left(-2 \frac{1}{\varepsilon^\gamma} x\right) + \exp\left(-3 \frac{1}{\varepsilon^\gamma} x\right) = 0 \quad (244)$$

Tüm terimler EKT olacak ve eşitliği doğrular. Çözüm olarak ise,

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$$

Mertebe çözümlerinden  $y_0$  ve  $y_1$  çözümlerini yaklaşık çözüm olarak aldığımız  $y$  de yerine yazılır.

$$y = \frac{1}{2} (1 - \exp(-X_e)) + \varepsilon \left( \frac{1}{2} (1 - \exp(-X_e)) + \varepsilon \left( -\frac{3}{2} X_e \exp(-X_e) - \frac{1}{4} \exp(-2X_e) \right) \right)$$

Sınır değerleri yerine yazılırsa sonucu doğrular.

## 5. SONUÇLAR

- Çalışmanın ilk uygulaması olarak alınan klasik ve bilinen Duffing denkleminde dönüşüm parametresi zamana bağlı olarak alındı ve gerçek zaman parametresinin kontrolü sağlandı. Nayfeh ve Duffing denkleminin çözümü ile çalışan diğerlerinin de yaptığı gibi zamanın kontrolü sabit bir katsayı çarpanı ile elde edildi. Fakat bu çalışmanın özelliği dönüşüm parametresinin içerisinde kullanılan fonksiyonun probleme göre seçimin farklı olabilmesidir. İleride yapılacak olan çalışmalarda kısmi türevli diferansiyel denklemler kullanılarak farklı yorumlar getirilebilir.
- Dönüşümün fonksiyonel olduğunu göstermek için klasik, bilinen Duffing ve Van der Pol denklemlerinin diğer pertürbasyon metotları karşılaştırması yapıldı. Sunulan dönüşüm klasik metotlarla karşılaştırıldığında benzer sonuçlar elde edildi.
- Ayrıca kendi yöntemin sınır değer problemlerine uygulandı. Sınır değer problemlerinin pertürbasyon teknikleri ile yapılan çözümleri tezin içerisinde gösterilmiştir. Klasik yöntemlerde uygulanan iki ve/veya daha fazla sınır değeri için farklı çözümler üretip bunların birleştirilmesi ile çözüme ulaşılır. Bu çalışmada ise konum parametresine bir dönüşüm uygulandı ve bu dönüşüm parametresi içerisinde yine kontrol için kullanılan bir fonksiyon ve bu fonksiyon ile farklı çözümlere ulaşıldı.

## 6. KAYNAKLAR

1. H. Hu and Z. G. Xiong, Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods, *Journal of Sound and Vibration* 278: 437-444, 2004.
2. H. Hu, A classical perturbation technique which is valid for large parameters, *Journal of Sound and Vibration* 269: 409-412, 2004.
3. H. Hu, A classical perturbation technique that works even when the linear part of restoring force is zero, *Journal of Sound and Vibration* 271: 1175-1179, 2004.
4. J. H. He, Linearized perturbation technique and its applications to strongly nonlinear oscillators, *Computers and Mathematics with Applications* 45: 1-8, 2003.
5. H. Hu, A modified method of equivalent linearization that works even when the non-linearity is not small, *Journal of Sound and Vibration* 276: 1145-1149, 2004.
6. J. H. He, Modified straightforward expansion, *Meccanica* 34: 287-289, 1999.
7. J. H. He, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *International Journal of Modern Physics B* 20: 1141-1199, 2006.
8. L. Xu, Determination of limit cycle by He's parameter-expanding method for strongly nonlinear oscillators, *Journal of Sound and Vibration* 302: 178-184, 2007.
9. S. Q. Dai, On a generalized PLK method and its applications, *Acta Mechanica Sinica* 6: 111-118, 1990.
10. J. H. He, Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part I: expansion of a constant, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37: 309-314, 2002.

11. J. H. He, Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part II: a new transformation, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37: 315-320, 2002.
12. V. Marinca and N. Herisanu, A modified iteration perturbation method for some nonlinear oscillation problems, *Acta Mechanica* 184: 231-242 ,2006.
13. H. Hu, Solutions of a quadratic nonlinear oscillator: Iteration procedure, *Journal of Sound and Vibration* 298: 1159-1165, 2006.
14. M. Pakdemirli, M. M. F. Karahan and H. Boyacı, A new perturbation algorithm with beter convergence properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare Method, *Mathematical and Computational Applications* 14 ,31-44, 2009.
15. M. Pakdemirli and M. M. F. Karahan, A New Perturbation Solution for Systems with Strong Quadratic and Cubic Nonlinearities, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 33, 704-712, 2010.
16. M. Pakdemirli, Comparison of higher order versions of the method of multiple scales for an odd nonlinearity problem, *Journal of Sound and Vibration* 262: 989-998, 2003.
17. H. Hu, Solution of a mixed parity nonlinear oscillator: Harmonic balance, *Journal of Sound and Vibration* 299, 331-338, 2007.

18. H. Nayfeh, Resolving controversies in the application of the method of Multiple Scales and the Generalized Method of Averaging, *Nonlinear Dynamics* 40: 61-102, 2005.
19. H. Nayfeh, 1981, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York.
20. M. Pakdemirli, A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Mechanics Research Communications* 21 , 203-208, 1994.
21. M. Pakdemirli and H. Boyaci, Comparison of direct-perturbation methods with discretization perturbation methods for nonlinear vibrations, *Journal of Sound and Vibration* 186, 837-845, 1995.
22. M. Pakdemirli, Vibrations of continuous systems with a general operator notation suitable for perturbative calculations, *Journal of Sound and Vibration* 246(5), 841-851, 2001.
23. *Perturbations, Theory and Methods*, James A. Murdock, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991.
24. *Applied Nonlinear Dynamics*, Ali H. Nayfeh and Balakumar Balachandran, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995.
25. *Perturbation Methods, Instability, Catastrophe and Chaos*, C F Chan Man Fong and D D Kee, World Scientific Publishing, 1999.
26. Prof. Dr. Mehmet Pakdemirli, *Mühendislikte Perturbasyon Metodları I ve II Ders Notları*

27. Özhan, B.B., Kübik Nonlineer Bir Sürekli Ortam Sisteminin Dış Zorlamalı ve Parametrik Titreşimlerine Genel Bir Yaklaşım, Doktora Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü 2009.
28. Nayfeh, A.H., Nayfeh S.A. and Mook, D.T., On Methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Nonlinear Dynamics*, 3, 145-162, 1992.
29. J. H. He, Homotopy perturbation technique, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 178, 257-262, 1999.
30. J. H. He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Applied Mathematics and Computation* 135, 73-79, 2003.
31. Pakdemirli, M., Boyacı, H., Vibrations of continuous systems having arbitrary quadratic and cubic nonlinearities, *Applied Mechanics and Engineering*, , 1, 3, 445-463, 1996.
32. Pakdemirli, M., Boyacı, H., The direct perturbation method versus the discretization perturbation method: Linear systems, *Journal of Sound and Vibration*, 199(5),825-832, 1997.
33. Boyacı, H., Pakdemirli, M., A comparison of different versions of the method of multiple scales for partial differential equations, *Journal of Sound and Vibration* , 204(4), 595-607, 1997.
34. Pakdemirli, M., A general solution procedure for coupled systems with arbitrary internal resonances, *Mechanics Research Communications*, Vol. 28. No. 6, pp. 617-522, 2001.



35. Pakdemirli , M., Comparison of higher order versions of the method of multiple scales for an odd non-linearity problem, *Journal of Sound and Vibration* 262, 989–998, 2003.
36. Pakdemirli, M., Özkaya, E. Three-to-one internal resonances in a general cubic non-linear continuous system, *Journal of Sound and Vibration* 268,543–553, 2003.
37. Pakdemirli,M., Özkaya, E., Two-to-one internal resonances in continuous systems with arbitrary quadratic nonlinearities, *Arabian Journal for Science and Engineering* 29 (1C), 99-112 (Mechanical Vibration and Noise Theme Issue), 2004.
38. Stephen T. Thornton, Jerry B. Marion Parçacıklar ve sistemler için klasik dinamik Akademi yayıncılık, 2011.
39. B.B. Özhan and M. Pakdemirli, A general solution procedure for the forced vibrations of a continuous system with cubic nonlinearities: primary resonance case, *Journal of Sound and Vibration* 325, 894-906 2009.
40. B.B. Özhan and M. Pakdemirli, A general solution procedure for the forced vibrations of a system with cubic nonlinearities: Three-to-one internal resonances with external excitation, *Journal of Sound and Vibration* 329, 2603-2615 2010.
41. Nayfeh, A.H., Reduced order models of weakly nonlinear spatially continuous systems, *Nonlinear Dynamics* 16,105–125, 1998.
42. Jordan, D.W. and Smith, P., *Nonlinear Ordinary differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

