

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP DARBOUX VEKTÖRÜNE
GÖRE UZAY EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI**

Hatice Kübra ÖZ

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**



MANİSA-2015

**Haice Kübra
Z**

**3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP DARBOUX VEKTÖRÜNE GÖRE UZAY
EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI**

2015

TEZ ONAYI

Hatice Kübra ÖZ tarafından hazırlanan "3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Darboux Vektörüne Göre Uzay Eğrilerinin Karakterizasyonları" adlı tez çalışması 21/08/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Yrd. Doç Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT
Celal Bayar Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Mehmet SEZER
Celal Bayar Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ
Ege Üniversitesi



TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Hatice Kübra ÖZ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATI.....	9
2.1. Relatif Paralel Alanlar.....	9
2.2. Özel Adapte Edilmiş Çatılar.....	12
4. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDAKİ BİSHOP DARBOUX VEKTÖRÜNE GÖRE EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI.....	16
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

RPAF	Relatif Paralel Adapte edilmiş Çatı
R	Reel Sayılar
κ	Frenet Çatıya göre eğrilik
τ	Frenet Çatıya göre burulma
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç Çarpım
$\ \cdot \ $	Norm
E^3	3-boyutlu Öklid Uzayı
\vec{W}	Bishop Darboux Vektörü
\vec{W}^\perp	Normal Bishop Darboux Denklemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Bishop Çatı ve Frenet Çatısının aynı eğri üzerindeki konumu	14
Şekil 3.2. Bishop Çatısında oluşan açının eğrilik cinsinden değeri	15

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın oluőmasında ve planlanmasında ve düzenli bir sekilde yürütülmesinde olumlu ve yapıcı eleőtirileriyle bana yol gösteren Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYIĐIT' e ve önerilerde bulunan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Zehra EKİNCİ' ye teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca manevi desteklerini her zaman hissettiğim, bugünlere gelmeme yardımcı olan ve beni destekleyen sevgili anneme, kardeőlerime ve sevgili eőime en içten teőekkürlerimi sunarım.

Hatice Kübra Z
Manisa, 2015

ÖZET

Yüksek Lisans

3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Darboux Vektörüne Göre Uzay Eğrilerinin Karakterizasyonları

Hatice Kübra ÖZ

Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCA YİĞİT

Bu makalede, Laplace operatörünü ve Levi Civita koneksiyonunu kullanarak E^3 3-boyutlu Öklid uzayındaki Bishop çatısına göre uzay eğrilerinin bazı karakterizasyonlarını elde ettik.

Birinci bölümde, konu ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan Bishop çatısı ile ilgili [18] referanslı kaynaktan bazı bölümler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Laplace operatörünü ve Levi Civita bağlantısını kullanarak E^3 3-boyutlu Öklit uzayındaki Bishop çatısına göre uzay eğrilerinin bazı karakterizasyonlarını elde ettik. Bununla beraber, Bishop Darboux vektörüne ve normal Bishop Darboux vektörüne göre uzay eğrilerinin karakterizesi olan genel diferansiyel denklemlerini verdik.

Anahtar Kelimeler: Bishop Darboux vektörü, Öklid uzayı, Paralel adapte edilmiş çatı, RPAF, Bishop çatı, Frenet çatı.

2015, 33 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Characterizations of Space Curves According to Bishop Darboux Vector in Euclidean 3-Space

Hatice Kübra ÖZ

Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin KOCA YİĞİT

In this paper, we obtained some characterizations of space curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space E^3 by using Laplacian operator and Levi-Civita connection.

In the first section, basic definitions are given.

In the second section, some part about Bishop Frame which is base of our research from [18] are given.

In the third section, we obtain some characterization of space curves according to Bishop Frame in E^3 3-Euclidean Space by using Laplace operator and Levi-Civita connection. Also we give general differential equations which is characterization of space curves, according to Bishop Darboux vector and normal Bishop Darboux vector.

Keywords: Bishop Darboux vector, Euclidean Space, Relative Parallel Adapted Frame, RPAF, Bishop Frame, Frenet Frame.

2015, 33 pages

1. GİRİŞ

Sabit eğimli eğrinin veya genel helisin tanımının, genel helisin ekseni olarak da adlandırılan bir sabit düz doğru ile eğrinin teğetinin sabit açı yapmasıyla olduğu iyi bilinir.

Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter eğrilik ve burulmanın oranının sabit olmasıdır [10]. Matematikçiler bu eğrilerle ilgili pek çok çalışma yapmışlardır. İlarıslan 3-boyutlu E_1^3 Minkowski uzayında helislerin karakterizasyonunu çalışmış ve E_1^3 Frenet vektörlerinin karakterize ettiği helislere göre diferansiyel denklemlerini bulmuştur [15]. Kocayiğit, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayı ve 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet vektörlerinin karakterize ettiği genel diferansiyel denklemleri elde etmiş [11].

Izumiya ve Takeuchi, 3-boyutlu Öklid uzayında helis eğrisine benzeyen yeni özel bir eğri, slant helis eğrisini tanımlamışlardır. Bu γ eğrisinin özelliği uzaydaki eğrinin normali ile sabit doğrultunun sabit açı yapmasıdır [19]. Kula ve Yaylı slant helisin binormal ve teğet göstergelerinin küresel görüntülerini çalışmışlardır ve slant helisin küresel helisler olduğunu bulmuşlardır [16]. Dahası, Kula, bir slant helis ve bir genel helis arasındaki ilişkiyi çalışmıştır [17]. Slant helis karakterizasyonu olan bazı diferansiyel denklemler bulmuşlardır.

Ali ve Turgut slant helisin konum vektörlerini çalışmışlardır [3]. E^n n-boyutlu Öklid uzayındaki bir slant helisinin genellemesini vermişlerdir [4]. Dahası, Chen ve Ishikawa E_v^n yarı Öklid uzayında $\Delta H = 0$ durumundaki biharmonik eğrileri sınıflandırmıştır, öyle ki Δ Laplace operatörü ve H Frenet eğrisinin eğrilik vektör alanıdır [9]. Sonra, Kocayiğit ve Hacısalıhoğlu E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında [13] ve E^3 3-boyutlu Öklid uzayında [12] biharmonik ve birinci tip eğrileri $\Delta H = \lambda H$ iken ve λ nın sabit olduğu şartlarda çalışmışlardır. Biharmonik eğriler ve geodeziklerin arasındaki ilişki ile dairesel helis ve birinci tip eğriler arasındaki ilişkiyi göstermişlerdir. Dahası, Bükçü ve Karacan Öklid uzayında [5] ve Minkowski uzayına [6,7] Bishop çatısına göre slant helisleri çalışmıştır. E^3 3-boyutlu Öklid

uzayında Bishop çatısına göre uzay eğrisinin eğrilüğünün karakterizasyonları [14]'te verilmiştir.

Bu tezde, Laplace operatörü kullanılarak E^3 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre uzay eğrilerinin bazı karakterizasyonlarını verildi. Bishop Darboux vektörüne ve normal Bishop Darboux vektörüne göre uzay eğrilerini karakterize eden genel diferansiyel denklemleri bulunmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimizde yer alan bazı temel tanımları vereceğiz.

Tanım 2.1. R reel sayılar cismini göstermek üzere, $R^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in R\}$ vektör uzayında, iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : R^n \times R^n &\rightarrow R \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu R^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir. Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı R^n afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [21].

Tanım 2.2. I , R reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset R &\rightarrow E^n \\ s &\rightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan diferansiyellenebilir α dönüşümüne, E^n uzayında bir **eğri** denir [21].

Tanım 2.3. E^n uzayında, $\alpha : I \subset R \rightarrow E^n$ eğrisi için

$$\forall s \in I, \quad \|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir [21].

Tanım 2.4. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin s noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. \vec{T}, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **birim teğet vektör alanı** denir [21].

Tanım 2.5. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisi için,

$$\begin{aligned} \kappa: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin s noktasındaki **eğriliği** denir [21].

Tanım 2.6. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s)$$

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **asli normali** denir. \vec{N} , α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **asli vektör alanı** denir [21].

Tanım 2.7. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **binormali** denir. \vec{B} vektör alanına da α eğrisinin **binormal vektör alanı** denir [21].

Tanım 2.8. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere,

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = - \langle \vec{B}'(s), \vec{N}'(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin s noktasındaki **burulması** denir [21].

Tanım 2.9. Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı, hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır, yani bir eğrinin ikinci türevi olmasa bile iyi tanımlıdır. Çatının her bileşenini paralel öteleme ile eğri üzerinde ortonormal çatı yardımıyla kolayca paralel taşıyabiliriz. Bu paralel öteleme çatısı şu gözleme dayalıdır. Verilen eğri için $\vec{T}(s)$ tek iken çatının geri kalanı için α eğrisinin sırasıyla birinci eğriliği ve ikinci eğriliği k_1, k_2 (doğal eğrilikler) olmak üzere herhangi uygun keyfi bazları $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ seçelim, böylece bu çatı her noktada $\vec{T}(s)$ vektörüne dik normal düzlemedir. $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlı ise her biri birbirine bağlı değilse, doğal eğrilikler ne olursa olsun yol boyunca düzgün olarak $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ bazlarını değiştirebiliriz. Böylece

$$\begin{bmatrix} \nabla_\alpha \vec{T} \\ \nabla_\alpha \vec{N}_1 \\ \nabla_\alpha \vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere alternatif çatı denklemleri elde ederiz (Öklid üzerindeki Bishop çatı) [18].

$$\kappa(s) = \sqrt{\|\alpha'(s)\|} = \sqrt{\|\vec{T}(s)\|},$$

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), k_1 \neq 0,$$

$$\tau = \theta' = \frac{k_1 k_2' - k_1' k_2}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Burada κ, θ kutup koordinatları için etkin bir biçimde Kartezyen koordinat sistemine karşılık gelir [18].

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ regüler bir eğri olsun, yani herhangi bir s parametresi için türevi sıfırdan farklı bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\vec{N}_1(s)$ birim vektörü bazı sabit \vec{U} birim vektörleriyle sabit θ açısı yapıyorsa yani $s \in I$ için $\langle \vec{N}_1(s), \vec{U} \rangle = \text{sabit}$ ise α eğrisi **slant helis** olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle α eğrisi bir slant helistir ancak $\frac{k_1}{k_2}(s)$ sabittir [6].

Tanım 2.10. $\alpha = \alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatı alanı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ile gösterelim. α nın Frenet-Serret formülleri

$$\begin{bmatrix} D_r \vec{T} \\ D_r \vec{N} \\ D_r \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada κ ve τ fonksiyonları sırasıyla α eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır [21].

- Özel olarak $\kappa = 0$ ise α eğrisi **geodeziktir**.
- $\kappa = sbt$, $\tau = 0$ ise **çember (pseudo çemberi) dir**.
Dolayısıyla geodezikler sıfır eğrilikli Reimann çemberleridir.
- $\frac{\kappa}{\tau} = sbt$ olan eğrilere **genel helis** denir.
- $\kappa = sbt$, $\tau = sbt$ olan eğrilere **dairesel helis** denir.
- E^3 te $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle \neq 0$ ise α birim hızlı eğrisine bir **Frenet eğrisi** denir [9],[25],[26].

Tanım 2.11. Regüler bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için α nın $\vec{N}_1(s)$ birim vektörü ile \vec{U} sabit birim vektörü arasındaki θ açısı sabit yani $\langle \vec{N}_1(s), \vec{U} \rangle = \cos \theta$ ise α eğrisine Bishop çatısına göre bir **slant helis** denir. Bir α slant helisi için $\frac{k_2}{k_1} = sbt$ tir. Eğer k_1 ve k_2 doğal eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler ise α eğrisine Bishop Çatısına göre bir **c-Slant helisi** denir [27].

Tanım 2.12. E^3 uzayındaki regüler α eğrisi için

$$\Delta T = 0,$$

eşitliği sağlanıyorsa α eğrisine **harmonik tanjant vektörlü eğri** denir. Ayrıca E^3 uzayında α regüler eğrisi için

$$\Delta T = \lambda T, \quad \lambda \in R,$$

eşitliği sağlanıyorsa α eğrisine **harmonik 1-tipli tanjant vektörlü eğri** denir [14].

Tanım 2.13. E^3 uzayındaki regüler α eğrisi için

$$\Delta \vec{N}_1 = 0,$$

şartı sağlanıyorsa α eğrisine **harmonik \vec{N}_1 vektörlü eğri** denir. Üstelik E^3 uzayında α regüler eğrisi için

$$\Delta \vec{N}_1 = \lambda \vec{N}_1, \quad \lambda \in R,$$

eşitliği sağlanıyorsa α eğrisine **harmonik 1-tipli \vec{N}_1 vektörlü eğri** denir [14].

Tanım 2.14. E^3 uzayındaki regüler α eğrisi

$$\Delta \vec{N}_2 = 0,$$

şartlarını sağlıyorsa α eğrisine **harmonik \vec{N}_2 vektörlü eğri** denir. Ayrıca E^3 uzayındaki α regüler eğrisi için

$$\Delta \vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_2, \lambda \in R,$$

şartı sağlıyorsa α eğrisine **harmonik 1-tipli \vec{N}_2 vektörlü eğri** denir [14].

Tanım 2.15. ∇ sembolüne, α eğrisinin yay parametresi s olmak üzere $\nabla_\alpha = \frac{d}{ds}$ ile verilen **Levi-Civita koneksiyonu** denir.

α eğrisinin Laplace operatörü ise

$$\Delta = -\nabla_{\alpha'}^2 = -\nabla_{\alpha'} \nabla_{\alpha'}$$

ile tanımlanır [24].

3. BİR EĞRİYİ BİRDEN FAZLA YOL İLE ÇATILANDIRMA

Bu kısımda çalışmamızda kullandığımız [18] referansında verilen Bishop çatısının yapısından bahsedilmiştir.

Öklid uzayındaki üç kere sürekli diferansiyellenebilir eğrinin Frenet çatısı, Öklid hareketleri altında eğri invaryantlarının özelliklerini analiz etmek için standart araç olmaktadır. Keyfi hareketli çatılar için, yani ortonormal baz alanlar, çatının türevlerini kendi eğri parametreleri cinsinden açıklayabiliriz, ve ortonormallikten dolayı katsayılar matrisi her zaman antisimetriktir (skew-symmetric). Böylece genelde üç tane sıfır olmayan girdiye sahiptir. Frenet çatısı üçlü türevlenmişlerinden birinin her zaman sıfır olmasından dolayı özel bir durum ortaya çıkar. Frenet çatısının diğer bir özelliği ise eğriye adapte edilmesidir elemanları eğriye teğettir veya diktir. Bu makalenin amacı, bu aynı avantajlara sahip başka çatılar olduğunu göstermektir.

3.1 Relatif Paralel Alanlar

Bir eğri boyunca bir normal vektör alanı \vec{M} , eğer türevi teğet ise relatif paraleldir. Böyle bir alan, normal kalması için ne kadar miktar gerekli ise o kadar döner, bu yüzden normallliğini kaybetmeden mümkün olabildiğince paralel olmaya yakındır. Türevi ona dik olduğundan, kısmi paralel normal alanı sabit uzunluğa sahiptir. Böyle alanlar yani vektör alanı, verilen eğriye paraleldir. Gerçekten, γ bir eğri ise, t parametrelili yer değiştirme vektör fonksiyonu olarak göz önüne alınırsa, \vec{M} relatif paralel ise, yerdeğiştirme vektörü $\gamma + \vec{M}$ olan eğri $(\gamma + \vec{M})' = (v + f)\vec{T}$ hızına sahiptir, burada $\vec{T}; \gamma$ nın birim tanjant vektör alanıdır, $v; \gamma$ nın hızı ve $\vec{M}' = f\vec{T}$ dir. Böylece, iki eğri arasındaki kesit yani segment her ikisine de diktir. Bu segment \vec{M} nin uzunluğu ve eğriliğe göre iki eğrinin arasındaki minimum uzunluğunun bölgesel bir bölümüdür. \vec{M} yeteri kadar kısa alınırsa bu segmentin minimum olması kolayca gösterebilir. Tersine olarak bir eğri γ dan sabit uzaklıkta hareket ediyorsa $\gamma + \vec{M}$ ile verilmelidir burada \vec{M} relatif paraleldir.

$\vec{M}(t_0) = \vec{M}_0$ olacak şekilde tek bir relatif paralel alan $\vec{M}, \gamma(t_0)$ noktasında tek bir normal vektör \vec{M}_0 vektörünü üretir . Bu teklik aşıkardır. İki relatif paralel alanların farkı açık bir şekilde relatif paraleldir. Böylece iki paralel alan tek bir noktada çakışırsa onların farkı sıfır sabit uzunluğuna sahiptir. Varlığını göstermek için yardımcı adapte edilmiş çatı alınır. Eğer varsa Frenet çatısını almak isteriz. Bozulmuş eğriler için bile Frenet çatısının olmasını isteriz fakat bazı noktalarda eğrilik kaybolur. Bu durumda böyle çatılar \vec{T} ve iki paralel alana Gram Shchmidt yöntemini uygulayarak oluşturulabilir.

Eğer $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ adapte edilmiş çatı ise bu takdirde,

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}'_1 \\ \vec{N}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ -p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ -p_{02} & -p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= p_{01}\vec{N}_1 + p_{02}\vec{N}_2, \\ \vec{N}'_1 &= -p_{01}\vec{T} + p_{12}\vec{N}_2, \\ \vec{N}'_2 &= -p_{02}\vec{T} + p_{12}\vec{N}_1. \end{aligned}$$

elde ederiz.

\vec{L} sabit uzunluklu bir normal alanın relatif paralel olması için bir şart bulalım. olacak şekilde bir düzgün θ açı fonksiyonu vardır.

$$\vec{M} = \vec{L}(\cos \theta \vec{N}_1 + \sin \theta \vec{N}_2),$$

Diferansiyeli alınırsa, şunu elde ederiz

$$\vec{M}' = \vec{L}(-\sin \theta \vec{N}_1 \theta' + N'_1 \cos \theta + \cos \theta \vec{N}_2 \theta' + N'_2 \sin \theta),$$

$$\vec{M}' = \vec{L}[-\sin \theta \vec{N}_1 \theta' + (-p_{01}\vec{T} + p_{12}\vec{N}_2) \cos \theta + \cos \theta \vec{N}_2 \theta' + (-p_{02}\vec{T} - p_{12}\vec{N}_1) \sin \theta],$$

$$\vec{M}' = \vec{L} \left[\theta' (-\sin \theta \vec{N}_1 + \cos \theta \vec{N}_2) + p_{12} (\cos \theta \vec{N}_2 - \sin \theta \vec{N}_1) + \vec{T} (-p_{01} \cos \theta - p_{02} \sin \theta) \right],$$

$$\vec{M}' = \vec{L} [(\theta' + p_{12})(-\sin \theta \vec{N}_1 + \cos \theta \vec{N}_2) - (p_{01} \cos \theta + p_{02} \sin \theta) \vec{T}].$$

Bundan şunu görürüz, \vec{M} relatif paraleldir ancak ve ancak $\theta' + p_{12} = 0$. Herhangi bir başlangıç şartını sağlayan θ için bir çözüm olduğundan bu lokal relatif paralel normal alanların var olduğunu gösterir. Genel varlığı elde etmek için belli kaplama üzerinde belli aralıklarla varolan lokal varlıkları bir araya getirebiliriz.

Birleştikleri noktalardaki düzgünlük, tek segmentin bir sonucudur. Bir tanjant vektör alanı, birim tanjant vektör alanı \vec{T} nin sabit bir çarpanı ise bu tanjant vektör alanını *relatif tanjant vektör alanı* olarak tanımlarız. Keyfi bir alanın tanjant ve normal bileşenleri relatif paralel iseler bu keyfi alana *relatif paralel* denir. Bu alanların varlığını ve tekliliğini göstermek için aşağıdaki gibi tam hipotezlerden bahsedilebilir.

Teorem 3.1.1. γ , 3-boyutlu bir Öklid uzayında düzgün bir C^k eğrisi olsun. $\gamma(t_0)$ noktasında herhangi bir \vec{V}_0 vektörü için $\vec{V}(t_0) = \vec{V}_0$ ve iki relatif paralel alanın skalar çarpımı sabit olacak şekilde γ boyunca tek bir C^{k-1} relatif paralel alanı \vec{V} vardır.

İspat: \vec{V}, \vec{W} iki relatif paralel alanlarının skalar çarpımı $\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$ sabit olduğunu ispatlamak için bu durum teğetlerden biri için bu aşikar olduğundan teğet ve normal kısımları ayrı ayrı gösterilebilir. Böylece $f\vec{T}$ ve $g\vec{T}$ türevleriyle \vec{V} ve \vec{W} nun normal olduklarını kabul ederiz ve $\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$ nun türevi istendiği gibi

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle' = \langle \vec{V}', \vec{W} \rangle + \langle \vec{V}, \vec{W}' \rangle$$

$\vec{V}' = f\vec{T}$ ve $\vec{W}' = g\vec{T}$ olduğundan,

$$\langle f\vec{T}, \vec{W} \rangle + \langle \vec{V}, g\vec{T} \rangle = 0$$

yazabiliriz.

3.2 Özel adapte edilmiş çatılar

Şurası açıktır ki bir C^2 düzgün eğrisi üzerindeki relatif paralel alanlar yönlü 1-boyutlu bir tanjant alanı ile 2-boyutlu normal alanından oluşan farklı alt uzaylı R üzerinde 3-boyutlu bir vektör uzayı oluştururlar. Ayrıca komşu Öklid uzayı üzerinde nokta tabanlı skalar çarpımdan gelen bir skalar çarpım vardır. Bu iki alt uzaya uyan bu vektör uzayının ortonormal tabanına *relatif paralel adapte edilmiş çatı* veya *RPAF* deriz. Komşu Öklid uzayının tercih edilen bir yöne sahip olduğunu farzederek eğrinin normal uzayının da tercih edilen bir yönü olur ve bu durumda özel olarak yönlendirilmiş relatif adapte edilmiş, RPAF, çatıdan sözedebiliriz. RPAF lerin toplamları iki çember formundadır. Aşağıdaki açık sonuca göre iki boyutlu ortogonal grup ile parametrelendirilebildiklerinden dolayı biri her yönlü sınıfında olan iki çember şeklinde olur.

Teorem 3.2.1. Eğer $(\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ RPAF ise o zaman RPAF nin toplamı $(\vec{T}, a\vec{N}_1 + b\vec{N}_2, c\vec{N}_1 + d\vec{N}_2)$ şeklindeki çatıdan oluşur. Burada $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sabit girdilere sahip ortogonal matrislere gider.

Şimdi eğer $(\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ RPAF ise bir nokta ile yay uzunluğuna göre türevlerini göstererek,

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\vec{T}' = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$$

$$\vec{N}_1' = -k_1\vec{T}$$

$$\vec{N}_2' = -k_2\vec{T}$$

elde ederiz.

Böylece bulunan matrisin iki tane sıfır olmayan girdisi bulunan Cartan matrisi olduğunu gördük. Cartan matrislerinin daha genel bir tartışması için [30] a bakınız. Aslında bu şekilde RPAF şartıyla Teorem 3.2.1 bu RPAF ın mümkün matrislerinin şunlar olduğunu gösterir

$$\begin{bmatrix} 0 & ak_1 + bk_2 & ck_1 + dk_2 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Buradaki * işareti antisimetrik kullanarak belirlenebilen bir girişi gösterir.

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

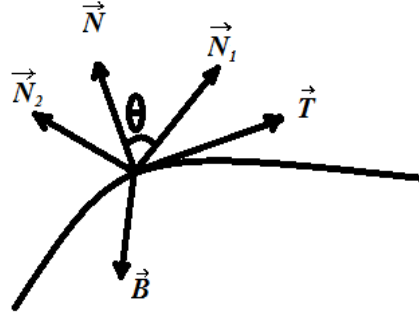
olduğunu biliyoruz. Görüldüğü gibi Frenet çatısı şu şekilde bir Cartan matrisine sahiptir

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ * & 0 & \tau \\ 0 & * & 0 \end{bmatrix},$$

Böyle bir Cartan matrisi vardır ve komşu uzayın yönlenmesi ve τ burulma işaretinin uygun seçilmesi halinde bu Cartan matrisi tektir. Kaybolan tek girişli bir Cartan matrisinin daha başka tek ihtimali şu olur

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

Ancak bunun sadece $f = \pm\kappa$, $g = \pm\tau$ ya sahip olan Frenet çatısının olduğu kolayca görülebilir. Çeşitli Cartan matrislerinin arasında ilişki kurmak kolaydır.



Şekil 3.1

Burada iki çatının teğetleri ortak olduğundan,

$$\vec{N} = \cos \theta \vec{N}_1 + \sin \theta \vec{N}_2$$

$$\vec{B} = -\sin \theta \vec{N}_1 + \cos \theta \vec{N}_2$$

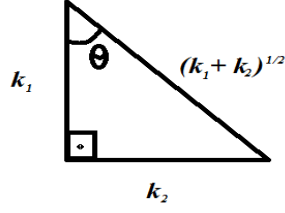
yani

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dır. Şimdi Frenet ve Bishop çatısı eğrilikleri arasındaki bağıntıları verelim,

$$\kappa = \|\vec{T}'\| = \|k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2\| = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}.$$

Frenet çatısından biliyoruz ki $\kappa = \|\vec{T}'\|$ ve Bishop çatısından da $\kappa = \|k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2\|$



Şekil 3.2

$$\cos \theta = \frac{k_1}{\kappa}, \quad \sin \theta = \frac{k_2}{\kappa}$$

dır. Bu bağıntıları kullanarak asli normalini,

$$\vec{N} = \cos \theta \vec{N}_1 + \sin \theta \vec{N}_2 = (k_1/\kappa) \vec{N}_1 + (k_2/\kappa) \vec{N}_2$$

şeklinde yazılıp diferansiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} \vec{N}' &= -\sin \theta \vec{N}_1 \theta' + \cos \theta \vec{N}_1' + \cos \theta \vec{N}_2 \theta' + \sin \theta \vec{N}_2', \\ \vec{N}' &= \cos \theta \vec{N}_1' + \sin \theta \vec{N}_2' + \theta' (-\sin \theta \vec{N}_1 + \cos \theta \vec{N}_2), \end{aligned}$$

elde edilir ve Frenet çatısında $\vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$ olduğundan

$$\vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B} = -\kappa \vec{T} + \theta' (-\sin \theta \vec{N}_1 + \cos \theta \vec{N}_2)$$

eşitliği yazılabilir.

Eğer $(\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ uygun şekilde yönlendirilirse, $\vec{B} = -\sin \theta \vec{N}_1 + \cos \theta \vec{N}_2$ ve bu yüzden de $\tau = \theta'$ elde ederiz. Böylece κ ve tanımsız (indefinite) $\int \tau ds$ integrali (k_1, k_2) eğrisi için (polar) kutup koordinatlarıdır.

4. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDAKİ BİSHOP DARBOUX VEKTÖRÜNE GÖRE EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde, 3-boyutlu E^3 Öklid uzayında, Bishop çatısına göre uzay eğrilerinin karakterizasyonlarını veriyoruz. Dahası, E^3 te \vec{W}^\perp normal Bishop Darboux vektörü ve \vec{W} Bishop Darboux vektörüne göre uzay eğrilerini karakterize eden genel diferansiyel denklemleri elde ettik.

Teorem 4.1. $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı k_1 eğrilik, k_2 burulma iken $\alpha(s)$ bir birim hızlı uzay eğrisi olsun. α eğrisinin \vec{W} Bishop Darboux vektörü

$$\vec{W} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 \quad (4.1)$$

ile verilir. [8]

İspat: (3.1) denkleminde

$$\begin{aligned} T' &= k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \\ \vec{N}_1' &= -k_1 \vec{T} \\ \vec{N}_2' &= -k_2 \vec{T} \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alalım.

$$\vec{T}' = \vec{W}_x \vec{T} \quad (4.2)$$

$$\vec{N}_1' = \vec{W}_x \vec{N}_1 \quad (4.3)$$

$$\vec{N}_2' = \vec{W}_x \vec{N}_2 \quad (4.4)$$

Darboux eşitliklerinin olduklarını biliyoruz.

$$\vec{W} = a\vec{T} + b\vec{N}_1 + c\vec{N}_2$$

olsun.

$\vec{T}' = \vec{W}x\vec{T}$ denkleminde \vec{W} yerine $a\vec{T} + b\vec{N}_1 + c\vec{N}_2$ değerini yazıp, \vec{T}' yerine (4.1) denklemindeki değeri yazılırsa,

$$k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 = (a\vec{T} + b\vec{N}_1 + c\vec{N}_2)x\vec{T} ,$$

$$k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 = a(\vec{T}x\vec{T}) + b(\vec{N}_1x\vec{T}) + c(\vec{N}_2x\vec{T})$$

$\vec{T}x\vec{T} = 0$, $\vec{N}_1x\vec{T} = -\vec{N}_2$, $\vec{N}_2x\vec{T} = \vec{N}_1$ eşitlikleri yukarıdaki denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 = c\vec{N}_1 - b\vec{N}_2$$

denklemini elde ederiz. Burada $c = k_1$ ve $b = -k_2$ olduğu açıkça görülür.

Benzer şekilde $\vec{N}'_1 = \vec{W}x\vec{N}_1$ denkleminde \vec{W} yerine $a\vec{T} + b\vec{N}_1 + c\vec{N}_2$ değerini yazıp, \vec{N}'_1 yerine (3.1) denklemindeki değeri yazılırsa,

$$-k_1\vec{T} = (a\vec{T} - k_2\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_2)x\vec{N}_1 ,$$

$$-k_1\vec{T} = a(\vec{T}x\vec{N}_1) - k_2(\vec{N}_1x\vec{N}_1) + k_1(\vec{N}_2x\vec{N}_1)$$

$\vec{T}x\vec{N}_1 = \vec{N}_2$, $\vec{N}_1x\vec{N}_1 = 0$, $\vec{N}_2x\vec{N}_1 = \vec{T}$ eşitlikleri yukarıdaki denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$-k_1\vec{T} = a\vec{N}_2 - k_1\vec{T}$$

denklemini elde ederiz. Burada $a = 0$ olduğu açıkça görülür. Yani

$$\vec{W} = a\vec{T} + b\vec{N}_1 + c\vec{N}_2$$

denkleminde a , b ve c değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\vec{W} = 0\vec{T} - k_2\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_2$$

$$\vec{W} = -k_2\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_2$$

denklemini elde edilir.

Tanım 4.1. α , E^3 te düzgün bir uzay eğrisi iken eğer

$$\Delta\vec{W} = 0$$

şartı sağlanıyorsa α eğrisi \vec{W} harmonik Darboux vektörüne sahiptir denir [13].

Tanım 4.2. α , E^3 te düzgün bir uzay eğrisi iken eğer

$$\Delta\vec{W} = \lambda\vec{W}, \quad \lambda \in R \quad (4.5)$$

şartı sağlanıyorsa α eğrisi \vec{W} harmonik 1 tip Darboux vektörüne sahiptir denir [13].

Teorem 4.2 $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı k_1 eğrilik, k_2 burulma iken E^3 3-boyutlu Öklid uzayında $\alpha(s)$ bir birim hızlı uzay eğrisi olsun. \vec{W} Bishop Darboux vektörüne göre diferansiyel denklem karakterizasyonu

$$\lambda_4 \nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} + \lambda_3 \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} + \lambda_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W} + \lambda_1 \vec{W} = 0 \quad (4.6)$$

denklemini ile verilir. Burada,

$$\lambda_4 = f^2,$$

$$\lambda_3 = -f(f' + g),$$

$$\lambda_2 = -\left[(f' + g)g - k_1(k_2''' + k_1 f) f + k_2(k_1''' - k_2 f) f\right],$$

$$\lambda_1 = -\left[(f' + g) \left(\frac{k_1'}{k_2'}\right) (k_2')^2 + k_1'(k_2''' + k_1 f) f - k_2'(k_1''' + k_2 f) f\right].$$

ve

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' (k_2)^2, \quad g = k_1 k_2'' - k_1'' k_2$$

dir.

İspat: $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı k_1 eğrilik, k_2 burulma iken $\alpha(s)$ bir birim hızlı uzay eğrisi iken,

$$\vec{W} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2,$$

vektörünün birinci türevini alırsak,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'} \vec{W} &= (-k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2)', \\ \nabla_{\alpha'} \vec{W} &= (-k_2' \vec{N}_1 - k_2 D_{\alpha'} \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_2 + k_1 D_{\alpha'} \vec{N}_2) \end{aligned}$$

$D_{\alpha'} \vec{N}_1 = -k_1 \vec{T}$ ve $D_{\alpha'} \vec{N}_2 = -k_2 \vec{T}$ eşitlikleri denklemde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'} \vec{W} &= -k_2' \vec{N}_1 + k_1 k_2 \vec{T} + k_1' \vec{N}_2 - k_1 k_2 \vec{T}, \\ \nabla_{\alpha'} \vec{W} &= -k_2' \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

denklemini elde edilir. (3.4) denkleminin türevi alınır,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} &= (-k_2' \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_2)', \\ \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} &= -k_2'' \vec{N}_1 - k_2' D_{\alpha'} \vec{N}_1 + k_1'' \vec{N}_2 + k_1' D_{\alpha'} \vec{N}_2 \end{aligned}$$

bulunur. $D_{\alpha'} \vec{N}_1 = -k_1 \vec{T}$ ve $D_{\alpha'} \vec{N}_2 = -k_2 \vec{T}$ eşitlikleri denklemde yukarıdaki denklemde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} &= -k_2'' \vec{N}_1 + k_1 k_2' \vec{T} + k_1'' \vec{N}_2 - k_1' k_2 \vec{T}, \\
\nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} &= -(k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{T} - k_2'' \vec{N}_1 + k_1'' \vec{N}_2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

denklemini elde edilir. (4.5) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} &= [(k_1 k_2' - k_1' k_2) \vec{T} - k_2'' \vec{N}_1 + k_1'' \vec{N}_2]', \\
\nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} &= [(k_1 k_2' - k_1' k_2) \vec{T}]' - k_2''' \vec{N}_1 - k_2'' D_{\alpha'} \vec{N}_1 + k_1''' \vec{N}_2 + k_1'' D_{\alpha'} \vec{N}_2, \\
\nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} &= (k_1 k_2' - k_1' k_2)' \vec{T} + (k_1 k_2' - k_1' k_2) D_{\alpha'} \vec{T} - k_2''' \vec{N}_1 - k_2'' D_{\alpha'} \vec{N}_1 + k_1''' \vec{N}_2 + k_1'' D_{\alpha'} \vec{N}_2
\end{aligned}$$

bulunur. $D_{\alpha'} \vec{T} = k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2$, $D_{\alpha'} \vec{N}_1 = -k_1 \vec{T}$, $D_{\alpha'} \vec{N}_2 = -k_2 \vec{T}$ eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} &= (k_1 k_2' - k_1' k_2)' \vec{T} + (k_1 k_2' - k_1' k_2) (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) \\
&\quad - k_2''' \vec{N}_1 - k_2'' (-k_1 \vec{T}) + k_1''' \vec{N}_2 + k_1'' (-k_2 \vec{T})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} &= (k_1 k_2' - k_1' k_2)' \vec{T} + k_1^2 k_2' \vec{N}_1 + k_1 k_2 k_2' \vec{N}_2 \\
&\quad - k_1 k_1' k_2 \vec{N}_1 - k_1' k_2^2 \vec{N}_2 - k_2''' \vec{N}_1 + k_1 k_2' \vec{T} + k_1'' \vec{N}_2 \\
&\quad - k_1'' k_2 \vec{T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} &= \left[(k_1 k_2' - k_1' k_2)' + k_1 k_2'' - k_1'' k_2 \right] \vec{T} \\
&\quad + \left[k_1^2 k_2' - k_1 k_1' k_2 - k_2''' \right] \vec{N}_1 \\
&\quad + \left[k_1 k_2 k_2' - k_1' k_2^2 + k_1''' \right] \vec{N}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}^3 \vec{W} &= \left[(k_1 k_2' - k_1' k_2)' + k_1 k_2'' - k_1'' k_2 \right] \vec{T} \\
&\quad + \left[-k_2''' - k_1 (k_1 k_2' - k_1' k_2) \right] \vec{N}_1 \\
&\quad + \left[k_1''' - k_2 (k_1 k_2' - k_1' k_2 +) \right] \vec{N}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha}^3 \vec{W} &= \left[(k_1 k_2' - k_1' k_2)' + k_1 k_2'' - k_1'' k_2 \right] \vec{T} \\
&\quad - \left[k_2''' + k_1 (k_1 k_2' - k_1' k_2) \right] \vec{N}_1 \\
&\quad + \left[k_1''' - k_2 (k_1 k_2' - k_1' k_2) \right] \vec{N}_2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

denklemini elde ederiz.

(4.1) deki denklemi $-k_1'$ ile ve (4.4) denklemini de k_1 ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
-k_1' \vec{W} &= k_1' k_2 \vec{N}_1 - k_1 k_1' \vec{N}_2 \\
k_1 \nabla_{\alpha} \vec{W} &= -k_1 k_2' \vec{N}_1 + k_1 k_1' \vec{N}_2
\end{aligned}$$

denklemlerini taraf tarafa toplayıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
-k_1' \vec{W} + k_1 \nabla_{\alpha} \vec{W} &= (k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{N}_1 \\
\frac{-k_1' \vec{W} + k_1 \nabla_{\alpha} \vec{W}}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} &= \vec{N}_1
\end{aligned}$$

$$\vec{N}_1 = \frac{k_1}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \nabla_{\alpha} \vec{W} - \frac{k_1'}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \vec{W} \tag{4.10}$$

denklemini elde ederiz.

Benzer şekilde (4.1) denklemini $-k_2'$ ile ve (4.4) denklemini k_2 ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
-k_2' \vec{W} &= k_2' k_2 \vec{N}_1 - k_1 k_2' \vec{N}_2 \\
k_2 \nabla_{\alpha} \vec{W} &= -k_2 k_2' \vec{N}_1 + k_1 k_2' \vec{N}_2
\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemleri taraf tarafa toplayıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$k_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W} - k_2' \vec{W} = (k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{N}_2$$

$$\frac{k_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W} - k_2' \vec{W}}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} = \vec{N}_2$$

$$\vec{N}_2 = \frac{k_2}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \nabla_{\alpha'} \vec{W} - \frac{k_2'}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \vec{W} \quad (4.11)$$

denklemini elde ederiz.

(4.10) ve (4.11) denklemleri (4.8) de yerine yazılırsa, yani $\nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} = -(k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{T} - k_2'' \vec{N}_1 + k_1'' \vec{N}_2$ denkleminde,

$$\vec{N}_1 = \frac{k_1}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \nabla_{\alpha'} \vec{W} - \frac{k_1'}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \vec{W}$$

ve

$$\vec{N}_2 = \frac{k_2}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \nabla_{\alpha'} \vec{W} - \frac{k_2'}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \vec{W}$$

eşitliklerini yerlerine yazalım,

$$\nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} = -(k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{T} - \frac{k_2'' k_1}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \nabla_{\alpha'} \vec{W} + \frac{k_1' k_2''}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \vec{W} + \frac{k_1'' k_2}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \nabla_{\alpha'} \vec{W} - \frac{k_1'' k_2'}{k_1' k_2 - k_1 k_2'} \vec{W},$$

$$(k_1' k_2 - k_1 k_2') \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} = -(k_1' k_2 - k_1 k_2')^2 \vec{T} + (k_1'' k_2 - k_1 k_2'') \nabla_{\alpha'} \vec{W} + (k_1' k_2'' - k_1'' k_2') \vec{W},$$

$$-(k_1' k_2 - k_1 k_2')^2 \vec{T} = (k_1' k_2 - k_1 k_2') \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} - (k_1'' k_2 - k_1 k_2'') \nabla_{\alpha'} \vec{W} - (k_1' k_2'' - k_1'' k_2') \vec{W},$$

$$-\vec{T} = \frac{(k_1' k_2 - k_1 k_2')}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')^2} \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} - \frac{(k_1'' k_2 - k_1 k_2'')}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')^2} \nabla_{\alpha'} \vec{W} - \frac{(k_1' k_2'' - k_1'' k_2')}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')^2} \vec{W},$$

$$-\vec{T} = \frac{1}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} - \frac{(k_1'' k_2 - k_1 k_2'')}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')^2} \nabla_{\alpha'} \vec{W} - \frac{(k_1' k_2'' - k_1'' k_2')}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')^2} \vec{W},$$

$$\bar{T} = -\frac{1}{(k_1'k_2 - k_1k_2')} \nabla_{\alpha'}^2 \bar{W} + \frac{(k_1''k_2 - k_1k_2'')}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2} \nabla_{\alpha'} \bar{W} + \frac{(k_1'k_2'' - k_1''k_2')}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2} \bar{W},$$

$$\bar{T} = \frac{1}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \nabla_{\alpha'}^2 \bar{W} - \frac{k_1k_2'' - k_1''k_2}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2} \nabla_{\alpha'} \bar{W} - \frac{k_1''k_2' - k_1'k_2''}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2} \bar{W} \quad (4.12)$$

denklemini elde ederiz.

Denklem (4.10), (4.11) ve (4.12) u denklemi (4.9) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}^3 \bar{W} = & +[(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2)] \frac{1}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \nabla_{\alpha'}^2 \bar{W} \\ & +[(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2)] \frac{(k_1k_2'' - k_1''k_2)}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2} \nabla_{\alpha'} \bar{W} \\ & +[(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2)] \frac{(k_1''k_2' - k_1'k_2'')}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2} \bar{W} \\ & -[k_2''' + k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')] \frac{k_1}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \nabla_{\alpha'} \bar{W} \\ & +[k_2''' + k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')] \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \bar{W} \\ & +[k_1''' + k_2(k_1'k_2 - k_1k_2')] \frac{k_2}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \nabla_{\alpha'} \bar{W} \\ & +[k_1''' + k_2(k_1'k_2 - k_1k_2')] \frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \bar{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(k_1'k_2 - k_1k_2')\nabla_{\alpha'}^3\vec{W} &= [(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2)](k_1'k_2 - k_1k_2')\nabla_{\alpha'}^2\vec{W} \\
&+ [(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2)](k_1k_2'' - k_1''k_2)\nabla_{\alpha'}\vec{W} \\
&+ [(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2)](k_1''k_2' - k_1'k_2'')(k_1'k_2 - k_1k_2')\vec{W} \\
&- [k_2''' + k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')]k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')\nabla_{\alpha'}\vec{W} \\
&+ [k_2''' + k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')]k_1'(k_1'k_2 - k_1k_2')\vec{W} \\
&+ [k_1''' - k_2(k_1'k_2 - k_1k_2')]k_2'(k_1'k_2 - k_1k_2')\nabla_{\alpha'}\vec{W} \\
&- [k_1''' - k_2(k_1'k_2 - k_1k_2')]k_2'(k_1'k_2 - k_1k_2')\vec{W}
\end{aligned}$$

denklemlerinde,

$$\begin{aligned}
(k_1'k_2 - k_1k_2')^2\nabla_{\alpha'}^3\vec{W} &= \left[(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2) \right] (k_1'k_2 - k_1k_2')\nabla_{\alpha'}^2\vec{W} \\
&+ \left[(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2) \right] (k_1k_2'' - k_1''k_2)\nabla_{\alpha'}\vec{W} \\
&+ \left[(k_1'k_2 - k_1k_2')' + (k_1k_2'' - k_1''k_2) \right] (k_1''k_2' - k_1'k_2'')(k_1'k_2 - k_1k_2')\vec{W} \\
&- \left[k_2''' + k_1(k_1'k_2 - k_1k_2') \right] k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')\nabla_{\alpha'}\vec{W} \\
&+ \left[k_2''' + k_1(k_1'k_2 - k_1k_2') \right] k_1'(k_1'k_2 - k_1k_2')\vec{W} \\
&+ \left[k_1''' - k_2(k_1'k_2 - k_1k_2') \right] k_2(k_1'k_2 - k_1k_2')\nabla_{\alpha'}\vec{W} \\
&- \left[k_1''' - k_2(k_1'k_2 - k_1k_2') \right] k_2'(k_1'k_2 - k_1k_2')\vec{W}
\end{aligned}$$

denkleminde,

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' (k_2)^2 \quad \text{veya} \quad f = k_1' k_2 - k_1 k_2', \quad g = k_1 k_2'' - k_1'' k_2$$

olduğunu kabul edersek,

$$\begin{aligned} f^2 \nabla_\alpha^3 \vec{W} &= [f' + g] f \nabla_\alpha^2 \vec{W} + [f' + g] g \nabla_\alpha \vec{W} + [f' + g] (k_1'' k_2' - k_1' k_2'') f \vec{W} \\ &\quad - [k_2''' + k_1 f] k_1 f \nabla_\alpha \vec{W} + [k_2''' + k_1 f] k_1' f \vec{W} + [k_1''' - k_2 f] k_2 f \nabla_\alpha \vec{W} \\ &\quad - [k_1''' - k_2 f] k_2' f \vec{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^2 \nabla_\alpha^3 \vec{W} &= [f' + g] f \nabla_\alpha^2 \vec{W} + [(f' + g)g - (k_2''' + k_1 f)k_1 f + (k_1''' + k_2 f)k_2 f] \nabla_\alpha \vec{W} \\ &\quad + [(f' + g)(k_1'' k_2' - k_1' k_2'') f + (k_2''' + k_1 f)k_1' f - (k_1''' - k_2 f)k_2' f] \vec{W} \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada katsayılar,

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= f^2 \\ \lambda_3 &= -(f' + g) \\ \lambda_2 &= - \left[(f' + g)g - k_1 (k_2''' + k_1 f) f + k_2 (k_1''' - k_2 f) f \right] \\ \lambda_1 &= - \left[(f' + g) \left(\frac{k_1'}{k_2'} \right)' (k_2')^2 + k_1' (k_2''' + k_1 f) - k_2' (k_1''' - k_2 f) f \right] \end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa,

$$\lambda_4 \nabla_\alpha^3 \vec{W} + \lambda_3 \nabla_\alpha^2 \vec{W} + \lambda_2 \nabla_\alpha \vec{W} + \lambda_1 \vec{W} = 0.$$

denkelemini elde ederiz..

Sonuç 4.1. $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı k_1 eğrilik, k_2 burulma iken $\alpha(s)$ E^3 de bir genel helis olsun. \vec{W} Bishop Darboux vektörüne göre diferansiyel denklem karakterizasyonu

$$g\nabla_{\alpha'}\vec{W} - \left(\frac{k_1'}{k_2'}\right)'(k_2')^2\vec{W} = 0$$

şeklinde verilir.

Teorem 4.3. $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı k_1 eğrilik, k_2 burulma iken $\alpha(s)$ bir birim hızlı uzay eğrisi olsun. \vec{W}^\perp Normal Bishop Darboux vektörüne göre diferansiyel denklem karakterizasyonu

$$\lambda_3\nabla_{\alpha'}^2\vec{W}^\perp + \lambda_2\nabla_{\alpha'}\vec{W}^\perp + \lambda_1\vec{W}^\perp = 0$$

denklemleri ile verilir. Burada,

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= f, \\ \lambda_2 &= g, \\ \lambda_1 &= \left(\frac{k_1'}{k_2'}\right)'(k_2')^2,\end{aligned}$$

ve

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'(k_2)^2, \quad g = k_1k_2'' - k_1''k_2$$

dır.

İspat: $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı k_1 eğrilik, k_2 burulma iken $\alpha(s)$ bir birim hızlı uzay eğrisi olsun. W^\perp nun s ye göre iki defa diferansiyelini alarak aşağıdakiler elde edilir.

$$\vec{W}^\perp = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'} \vec{W}^\perp &= -(k_2' \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_1') + k_1' \vec{N}_2 + k_1 \vec{N}_2', \\ \nabla_{\alpha'} \vec{W}^\perp &= -k_2' \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_1' + k_1' \vec{N}_2 + k_1 \vec{N}_2', \end{aligned}$$

$\vec{N}_1' = 0$ ve $\vec{N}_2' = 0$ olduğundan,

$$\nabla_{\alpha'} \vec{W}^\perp = -k_2' \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_2 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W}^\perp &= -(k_2'' \vec{N}_1 + k_2' \vec{N}_1') + k_1'' \vec{N}_2 + k_1' \vec{N}_2', \\ \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W}^\perp &= -k_2'' \vec{N}_1 - k_2' \vec{N}_1' + k_1'' \vec{N}_2 + k_1' \vec{N}_2', \end{aligned}$$

$$\nabla_{\alpha'}^2 \vec{W}^\perp = -k_2'' \vec{N}_1 + k_1'' \vec{N}_2 \quad (4.16)$$

\vec{N}_1 vektörünü bulmak için (4.14) denklemini $-k_1'$ ile ve (4.15) denklemini de k_1 ile çarpılırsa ,

$$\begin{aligned} -k_1' \vec{W}^\perp &= k_1' k_2 \vec{N}_1 - k_1 k_1' \vec{N}_2, \\ k_1 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^\perp &= -k_1 k_2' \vec{N}_1 + k_1 k_1' \vec{N}_2 \end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} k_1 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^\perp - k_1' \vec{W}^\perp &= (k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{N}_1 \\ \vec{N}_1 &= \frac{k_1 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^\perp - k_1' \vec{W}^\perp}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \end{aligned}$$

$$\vec{N}_1 = \frac{k_1 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp}}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} - \frac{k_1' \vec{W}^{\perp}}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \quad (4.17)$$

\vec{N}_2 vektörünü bulmak için (4.15) denklemi k_2 ile ve (4.14) denklemi de $-k_2'$ ile çarpılırsa,

$$-k_2' \vec{W}^{\perp} = k_2 k_2' \vec{N}_1 - k_1 k_2' \vec{N}_2,$$

$$k_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp} = -k_2 k_2' \vec{N}_1 + k_1' k_2 \vec{N}_2$$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$k_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp} - k_2' \vec{W}^{\perp} = k_1' k_2 \vec{N}_2 - k_1 k_2' \vec{N}_2,$$

$$k_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp} - k_2' \vec{W}^{\perp} = (k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{N}_2,$$

$$\frac{k_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp} - k_2' \vec{W}^{\perp}}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} = \vec{N}_2,$$

$$\vec{N}_2 = \frac{k_2 \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp}}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} - \frac{k_2' \vec{W}^{\perp}}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')},$$

$$\vec{N}_2 = \frac{k_2}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp} - \frac{k_2'}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \vec{W}^{\perp} \quad (4.18)$$

(4.17) ve (4.18) denklemleri (4.16) te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W}^{\perp} = & -k_2'' \left(\frac{k_1}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp} - \frac{k_1'}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \vec{W}^{\perp} \right) \\ & + k_1'' \left(\frac{k_2}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \nabla_{\alpha'} \vec{W}^{\perp} - \frac{k_2'}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \vec{W}^{\perp} \right) \end{aligned}$$

$$\nabla_{\alpha}^2 \bar{W}^{\perp} = -\frac{k_1 k_2''}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \nabla_{\alpha} \bar{W}^{\perp} + \frac{k_1' k_2''}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \bar{W}^{\perp} + \frac{k_1'' k_2}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \nabla_{\alpha} \bar{W}^{\perp} - \frac{k_1'' k_2'}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \bar{W}^{\perp}$$

$$\nabla_{\alpha}^2 \bar{W}^{\perp} = \frac{k_1'' k_2 - k_1 k_2''}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \nabla_{\alpha} \bar{W}^{\perp} + \frac{k_1' k_2'' - k_1'' k_2'}{(k_1' k_2 - k_1 k_2')} \bar{W}^{\perp}$$

denkleminde $f = \left(\frac{k_1'}{k_2}\right)' (k_2)^2$ veya $f = k_1' k_2 - k_1 k_2'$, $g = k_1 k_2'' - k_1'' k_2$ eşitlikleri

yazılırsa,

$$\nabla_{\alpha}^2 \bar{W}^{\perp} = \frac{-g}{f} \nabla_{\alpha} \bar{W}^{\perp} + \frac{(k_1' k_2'' - k_1'' k_2')}{f} \bar{W}^{\perp},$$

$$f \nabla_{\alpha}^2 \bar{W}^{\perp} = -g \nabla_{\alpha} \bar{W}^{\perp} + (k_1' k_2'' - k_1'' k_2') \bar{W}^{\perp},$$

$$f \nabla_{\alpha}^2 \bar{W}^{\perp} = -g \nabla_{\alpha} \bar{W}^{\perp} + \left(\frac{k_1'}{k_2}\right)' (k_2')^2 \bar{W}^{\perp} \quad (4.19)$$

denklemini elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2. $\{\bar{T}(s), \bar{N}_1(s), \bar{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı k_1 eğrilik, k_2 burulma iken E^3 de $\alpha(s)$ bir slant helis olsun. \bar{W}^{\perp} normal Bishop Darboux vektörüne göre diferansiyel denklem karakterizasyonu,

$$g \nabla_{\alpha} \bar{W}^{\perp} + \left(\frac{k_1'}{k_2'}\right)' (k_2')^2 \bar{W}^{\perp} = 0$$

denklemini ile verilir.

Teorem 4.4. $\alpha, \{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısında, E^3 te bir birim hızlı uzay eğrisi olsun. α harmonik 1-tip Darboux vektörüdür ancak ve ancak α eğrisinin k_1 eğriligi ve k_2 burulması aşağıdakileri sağlar.

$$-k_1'' = \lambda k_1, \quad k_1' k_2 - k_1 k_2' = 0, \quad -k_2'' = \lambda k_2. \quad (4.20)$$

İspat: $\Delta = -\nabla_{\alpha'}^2 = -\nabla_{\alpha'} \nabla_{\alpha'}$ olduğundan (4.8) denkleminde,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} &= (k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{T} - k_2'' \vec{N}_1 + k_1'' \vec{N}_2, \\ \Delta \vec{W} = -\nabla_{\alpha'}^2 \vec{W} &= -\left[-(k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{T} - k_2'' \vec{N}_1 + k_1'' \vec{N}_2 \right], \\ \Delta \vec{W} &= (k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{T} + k_2'' \vec{N}_1 - k_1'' \vec{N}_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

denklemini elde edilir.

(4.21) i (4.5) de yerine yazılırsa, ve $\Delta \vec{W} = \lambda \vec{W}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta \vec{W} &= \lambda (-k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2), \\ (k_1' k_2 - k_1 k_2') \vec{T} + k_2'' \vec{N}_1 - k_1'' \vec{N}_2 &= -\lambda k_2 \vec{N}_1 + \lambda k_1 \vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliğin iki tarafı birbirine eşit olduğundan katsayılar da birbirine eşittir. Dolayısıyla,

$$-k_1''' = \lambda k_1, \quad k_1' k_2 - k_1 k_2' = 0, \quad -k_2''' = \lambda k_2$$

yukarıdaki eşitlikler elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hanson, A.J., Ma, H., Parallel Transport Approach to Curve Framing, Indiana University, Techreports-TR425, January 11 1995.
- [2] Hanson, A.J., Ma, H., Quaternion frame approach to streamline visualization, IEEE Transactions On Visualization and Computer Graphics, 1 (1995), 164-174.
- [3] Ali, A.T., Turgut , M., Position vector of a timelike slant helix in Minkowski 3-Space, Journal of Math. Analysis and Appl., 365 (2010), 559-569.
- [4] Ali, A.T., Turgut , M., Some characterizations of slant helices in the Euclidean space E_n , Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39:3 (2010), 327-336.
- [5] Bükçü, B., Karacan, M.K., The slant helices according to Bishop frame, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 3:2 (2009), 63-66.
- [6] Bükçü, B., Karacan, M.K., On the slant helices according to Bishop frame of the timelike curve in Lorentzian space, Tamkang Journal of Math., 39:3 (2008), 255-262.
- [7] Bükçü, B., Karacan, M.K., The Bishop Darboux rotation axis of the spacelike curve in Minkowski 3-space, JFS, Vol.30, 1- 5, E.U.F.F. Turkey, 2007.
- [8] Bükçü, B., Karacan, M.K., Special Bishop motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 6:1 (2008), 27-34.
- [9] Chen, B.Y., Ishikawa, S., Biharmonic surface in pseudo-Euclidean spaces, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A45 (1991), 323-347.
- [10] Struik, D.J., Lectures on Classical Differential Geometry, Addison Wesley, Dover, (1988).
- [11] Kocayiğit, H., Lorentz Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontak Geometri, Ph. D. Thesis, Ankara University, (2004).
- [12] Kocayiğit, H., Hacısalihoğlu, H.H., 1-Type curves and biharmonic curves in Euclidean 3-space, International Electronic Journal of Geometry, Vol.4, No.1(2011), 97-101.
- [13] Kocayiğit, H., Hacısalihoğlu, H.H., 1-Type and biharmonic Frenet curves in Lorentzian 3-space, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol.33, No. A2(2009), 159-168.
- [14] Kocayiğit, H., Kazaz, M., Arı , Z.: Some Characterizations of space curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space E^3 , Ankara Matematik Günleri, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü , Ankara, 3–4 Haziran 2010.

- [15] İlarıslan, K., Some Special Curves on Non-Euclidean Manifolds, Ph. D. Thesis, Ankara University, (2002).
- [16] Kula, L., Yaylı, Y., On slant helix and its spherical indicatrix, Appl. Math. Comp., 169 (2005), 600–607.
- [17] Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y., İlarıslan, K., Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, Tur. J. Math., 34 (2010), 261-273.
- [18] Bishop, L.R., There is more than one way to frame a curve, Amer. Math. Monthly, 82:3 (1975), 246-251.
- [19] Izumiya, S., Takeuchi, N., New special curves and developable surfaces, Turk J. Math., 28 (2004), 153-163.
- [20] Shifrin, T., Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces, University of Georgia, Preliminary Version, 2008.
- [21] Sabuncuođlu, A., Diferansiyel Geometri, Ankara, 2004.
- [22] Kocayığıt, H., Arı, Z., Önder, M., Some Characterizations of Space Curves According to Bishop Frame in Euclidian 3-Spaces, (Submitted)
- [23] İlarıslan, K., Nesovic, E., Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space, Indian J. Pure Appl. Math., 35 (7) : 882,2004.
- [24] O’neill, B., Sem’i-Reiamannian Geometry, Academic Press 1983.
- [25] Chen, B.Y., Ishikawa, S., Biharmonic Pseudo-Reimannia Submanifolds in Pseudo-Euclidean Spaces, Kyushu J. Math. 52,167-185
- [26] Ferrandez, A., Lucas, P., Merano, M.A., Biharmonic Hopfy Cylinders, Rocky Mountain J. Math., 1998, 28, 957-975
- [27] Yuksel, N., Bukcu, B., Karacan, M.K., Position Vectors of The C-Slant Helix According to Bishop Frame in 3-Space,2010, (Hakemde) [28] Guggenhcimer, H.W., Differential Geometry, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [29] O’Neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966.
- [30] Heinrich, W., Guggenhcimer, Differential Geometry Mc Graw-Hill, New York, 1963.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hatice Kübra ÖZ

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : haticekoz86@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Özel Yamanlar Lisesi, 2004

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi/ Matematik Bölümü, 2008

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi/ Matematik Bölümü, -

Mesleki Deneyim

Selçuk Anafen Dershanesi, Matematik Öğretmeni, 2008 - 2010

Yayımları

Önder, M., Arı, Z., Galip, H.K., On the Blaschke Approach and Kinematic Interpretation of Timelike Ruled Surfaces, IX. Geometri Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, 07–10 Haziran 2011.(Poster)

Kocayiğit, H., Özdemir, A., Çetin, M., Öz, H.K., Characterizations of Space Curves According to Bishop Darboux Vector in Euclidean 3-Space E^3 , International J.Math. Combin. Vol.2 (2014), 74-80p.