

T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE DİNAMİĞİ BİLİM DALI

BİR GEMİNİN PERVANE ŞAFTININ TORSİYONEL
TİTREŞİMLERİNİN ANALİZİ

Şevki AKKOCA

Danışman
Yrd.Doç.Dr. Süleyman Murat BAĞDATLI



Manisa-2017

TEZ ONAYI

Şevki AKKOCA tarafından hazırlanan "**Bir Geminin Pervane Şaftının Torsiyonel Titreşimlerinin Analizi**" adlı tez çalışması 31/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak savunulmuş ve **oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman

Yrd.Doc.Dr. Süleyman Murat BAĞDATLI

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Yrd.Doc.Dr. Saim KURAL

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Yrd.Doc.Dr. Recep HALICIOĞLU

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Şevki AKKOCA



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	III
ŞEKİLLER DİZİNİ	V
TABLO DİZİNİ.....	VIII
TEŞEKKÜR.....	IX
ÖZET	X
ABSTRACT	XII
1. GİRİŞ	1
2. GEMİ TAHRİK SİSTEMLERİNİN MODELLENMEK İRDELENMESİ....	5
2.1. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı Birinci Model Sistemlere Ait Hesaplamalar	7
2.1.1.Mekanik Titreşimlerde Burulmada Doğal (ω_n) Enerji metodu İle Hesaplanması.....	8
2.1.2. Birinci Model Parametrik Hesaplamaları.....	11
2.2. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı İkinci Model Sistemlere Ait Hesaplamalar.	11
2.2.1. İkinci Model Parametrik Hesaplamaları.....	12
2.3. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı Birinci Model Sisteme Ait Pervane Şaftında Zorlayıcı Momentin Değişimleri ve Zorlanmış Titreşimler.....	28
2.4. İki Ana Makineden Oluşan Gemi Tahrik Sistemlerinin (Zorlanmış Titreşim) Parametrik Hesaplamaları.....	39
2.5. (2 İki) Kütle-2 (İki) Yay) Radyal Serbest Titreşiminin Matematiksel Modeli ve Denklemleri.....	54
2.6. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı Üçüncü Model (Zorlanmış Titreşim) Sistemlere Ait Hesaplamalar.....	58
3. DİNAMİK ETKİ ARTTIRMA KÜTLESİ (DEAK).....	61
4. BURULMA TİTREŞİMLERİNİN ANALİTİK ANALİZİ.....	66
4.1. Düzensiz Dairesel Şaftta Oluşan Burulma Titreşimi.....	67

4.2. Burulma Titreşimine İlişkin Hareket Denkleminin Hamilton Denklemi İle Bulunması.....	68
4.3. Düzgün Dairesel Şaftta Oluşan Burulma Titreşimi.....	69
4.4. Her İki Ucu Sabitlenmiş Şaftın Doğal Frekansının Bulunması.....	71
4.5. Her İki Ucu Serbest Olan Şaftın Doğal Frekansının Bulunması.....	72
4.6. Bir Ucu Sabitlenmiş Diğer Ucunda Pervane Olan Şaftın Doğal Frekansının Bulunması.....	73
5. ÖRNEK BİR SİSTEMİN DOĞAL FREKNASLARININ BULUNMASI.....	76
6. PERVANE İLE YATAKLANMAMIŞ (DESTEKLENMEMİŞ) ŞAFTTAN OLUŞAN SİSTEME İLİŞKİN EĞİLME TİTREŞİMLERİN HAREKET DENKLEMLERİNİN BULUNMASI.....	89
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	98
KAYNAKLAR.....	99
ÖZGEÇMİŞ.....	101

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

F	Kuvvet
M	Moment
m	Kütle
P	Güç
rpm	Dakikadaki Devir Sayısı
J_P	Pervanenin Su Üstündeki Kütle Atalet Momenti
I_P	Kesit Atalet Momenti
k_b	Burulma Titreşiminde Yay (Katsayısı) Sabiti
G	Kayma Elastiklik Modülü
L, l	Burulma Boyu
d	Şaft Çapı
E_k	Kinetik Enerji
E_P	Potansiyel Enerji
φ	Burulma açısı
ω_n	Doğal Frekans
k	Radyal Titreşimde Yay (Katsayısı) Sabiti
i₁₂, i₂₁, i₁₃	Çevrim Oranı (İndirgeme Oranı)
“e” sayısı	2.718
i	$\sqrt{-1}$
π sayısı	3.1415926535
Z₁, Z₂	Diş Sayısı
D	Dişli Çarkların Yuvarlanma Daire Çapları
J_{eş}	Eş Değer Kütle Atalet Momenti
k_{eş}	Eş Değer Yay (Katsayısı) Sabiti
f	Frekans
T	Periyod
n	devir sayısı
η	verim
M_g	Genlik burulma Momenti
M_{ort}	Ortalama Burulma Momenti
t	Zaman

$\omega, \omega_{nb}, \Lambda_{nb}$	Doğal Burulma Frekansı
ω_1, ω_2	Doğal Burulma Frekansı
$\omega_b, \omega_{b1,2}$	Zorlanmış Burulma Frekansı
R.A.B	Rezonans Altı Bölgesi
R.B.	Rezonans Bölgesi
R.Ü.B.	Rezonans Üstü Bölgesi
M_R	Bileşke Moment
R	Bileşke Kuvvet
\ddot{X}, \ddot{x}	İvme
X, x	Yerdeğiştirme
DEAK	Dinamik Etki Arttırma Kütlesi
Z₁, Z₂	Diş Sayıları
J₁, J₂	Kütle Atalet Momenti
D₁, D₂	Dişli çarkların yuvarlanma daireleri çapları
y	Eğilmeden kaynaklanan çökme (deplasman)
Ψ	Eğilmeden kaynaklanan dönme açısı
A	Şafttaki bir x kesitindeki kesit alanı
J	Şafttaki birim uzunluk başına kütleli atalet momenti
E	Çekme Elastiklik Modülü
c	Şaftın kesit şekline bağlı bir katsayı
$V(x, t)$	Kesme kuvveti
β	Kesmeden kaynaklanan kayma açısı
M	Düzgün Olmayan Şaft Üzerine Uygulanan Burulma Momenti.
m	Düzgün Olmayan Birim Uzunluğunda Oluşan Burulma Momenti.
k₁, k₂	Yay Sabiti
x₁, x₂	Denge Noktası Uzama Miktarı
m₁, m₂	Kütle

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.0. Şaft ve Pervane Sistemi.....	7
Şekil 2.1. Motor, Redüktör, Şaft ve Pervane Parçalarından Oluşan Gemi Tahrik Modeli.....	8
Şekil 2.2. Birinci Modele İlişkin Matematiksel Model.....	10
Şekil 2.3. Motor, Redüktör Sistemi, Şaft ve Pervane Parçalarından Oluşan Gemi Tahrik Modeli.....	11
Şekil 2.4. İkinci Modele İlişkin Matematiksel Model	12
Şekil 2.5. İkinci Mile (Pervane Şaftı) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmamış)	13
Şekil 2.6. İkinci Mile (Pervane Şaftı) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmış)	14
Şekil 2.7. Birinci Mile (Motor Miline) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmamış)	14
Şekil 2.8. Birinci Mile (Motor Miline) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmış)	15
Şekil 2.9. Millerin ve Atalet Momentlerinin İndirgenme İşlemlerine İlişkin Örnek Model	19
Şekil 2.10. İkinci Milin Birinci Mile İndirgenmesi	19
Şekil 2.11. Birinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli.....	20
Şekil 2.12. İkinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli	21
Şekil 2.13. Birinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli.....	22
Şekil 2.14. İkinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli	22
Şekil 2.15. Birinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli.....	23
Şekil 2.16. İkinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli	24
Şekil 2.17. Motor, Redüktör, Şaft ve Pervane Parçalarından Oluşan Gemi Tahrik Sistemine Ait Matematiksel Model	28
Şekil 2.18. Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Momenti (M)- Zaman (t) ve Burulma Açısı(φ)-Zaman (t) Grafikleri.....	29
Şekil 2.19. Zorlanmış Titreşime Ait Makine Devri(n)- Zaman (t) Grafiği.....	30
Şekil 2.20. Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Momenti (M)- Zaman (t) Grafiği..	31
Şekil 2.21. Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Açısı (φ)- Zaman (t) Grafiği	32

Şekil 2.22. Vektörel Düzlemde Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Açısı (ϕ)- Zaman (t) Grafiği	33
Şekil 2.23. Denklem 2.109'a Ait Grafik	35
Şekil 2.24. Burulma Açısının Rezonans Bölgesi Altında ve Üstündeki Değişmelere İlişkin Grafik	36
Şekil 2.25 Farklı Burulma Açılarında Sahip Sistemlerin Rezonans Bölgesi Altındaki ve Üstündeki Değişmelere İlişkin Grafik	37
Şekil 2.26. Üç Yay ve İki Kütle Sisteminin Matematiksel Modeli	38
Şekil 2.27. Üç Yay ve İki Kütle Sisteminin Matematik Modeli	39
Şekil 2.28. İki Ana Makineden ve Bir Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeli	40
Şekil 2.29. İki Ana Makineden ve Bir Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeline Ait Matematik Model	41
Şekil 2.30. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi	42
Şekil 2.31. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	42
Şekil 2.32. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	43
Şekil 2.33. İki Ana Makineden ve Bir Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeline Ait Matematik Model	45
Şekil 2.34. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi	46
Şekil 2.35. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	46
Şekil 2.36. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	47
Şekil 2.37. İki Ana Makineden ve Bir Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeline Ait Matematiksel Model	49
Şekil 2.38. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi	50
Şekil 2.39. Bileşke Burulma Momentinin Grafiksiz Gösterimi	51
Şekil 2.40. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	52
Şekil 2.41. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	52
Şekil 2.42. İki Yay İki Kütleli Sistem	54
Şekil 2.43. İki Yay ve İki Kütle Sistemine İlişkin Matematiksel Modeli	56
Şekil 2.44. İki Yay ve İki Kütle Sistemine İlişkin Matematiksel Modeli	56
Şekil 2.45. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sistemi	58
Şekil 2.46. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sisteminin Matematik Modeli	59

Şekil 2.47. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	59
Şekil 2.48. İndirgenmiş Matematiksel Modeli	59
Şekil 3.1. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sistemi	61
Şekil 3.2. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sistemine Ait Matematiksel Model	62
Şekil 3.3. İndirgenmiş Matematiksel Model	62
Şekil 3.4. İndirgenmiş ve Dinamik Damper Eklenmiş Sevk Sistemi	62
Şekil 3.5. İndirgenmiş ve Dinamik Damper Eklenmiş Matematiksel Model	63
Şekil 3.6. İndirgenmiş ve Dinamik Damper Eklenmiş Matematiksel Model	64
Şekil 4.1. Düzgün Olmayan Şaftta Oluşan Burulma Titreşimi	66
Şekil 4.2. Her İki Ucu Sabitlenmiş Şaft	71
Şekil 4.3. Her İki Ucu Serbest Olan Şaft	72
Şekil 4.4. Bir Ucu Sabitlenmiş Diğer Ucunda Pervane Olan Şaft	73
Şekil 5.1. İki Makine, Bir Redüktör ve Bir Valondan Oluşan Gemi İtici Tahrik Sistemi	76
Şekil 5.2. İki Makine, Bir Redüktör ve Bir Valondan Oluşan Gemi İtici Tahrik Sistemine Ait Matematik Modeli	76
Şekil 5.3. Valon Miline İndirgenmiş Sistem	78
Şekil 5.4 Modelin Valon Miline İndirgenmiş Sistem	78
Şekil 5.5. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi	80
Şekil 5.6. Üç Kütle Üç Yay Sistemi	83
Şekil 6.1 Pervane ile Yataklanmamış Şafttan Oluşan Sistem	90
Şekil 6.2 Pervane ile Yataklanmamış Şafttan Oluşan Sistemin Matematiksel Modeli	90

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1 Düzgün Şaft Burulma Titreşimlerine İlişkin Sınır Şartları ve Doğal Frekanslar.....	75
Tablo 5.1 Sayısal Değerler.....	85
Tablo 6.1 Düzgün Şaft Eğilme Titreşimlerine İlişkin Sınır Şartları.....	97

TEŞEKKÜR

Çalıőmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aőamalarında yardımcı olan hocam Sayın Prof.Necati TAHRALI'ya, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve lisansüstü öğrenim hayatımda desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili danışman hocam Sayın Yrd.Doc. Dr. Süleyman Murat BAğDATLI' ya, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan eőime yürekten teşekkür ederim.

Şevki AKKOCA
Manisa, 2017

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bir Geminin Pervane Şaftının Torsiyonel Titreşimlerinin Analizi

Şevki AKKOCA

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Süleyman Murat BAĞDATLI

Günümüzde kara, hava ve deniz ulaşımında kullanılan araçların hareket etmesini sağlayan makinelerin ve güç aktarma parçaları (şaft ve redüktör)'nin üretimindeki temel prensip, makineleri hafif ve mukavemeti yüksek malzemelerden üreterek çalışma devirlerini yükseltmek suretiyle güçlerini ve ekonomik kullanım ömürlerini arttırmaktır. Makinenin devir sayısının arttırılması ve akabinde gücün yükselmesi nedeniyle makinede ve aktarma parçalarında oluşan titreşimler, çözülmesi gereken önemli bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Araçların hareket ve aktarma sistemlerinin tasarım hesaplamalarında, dengelenmemiş atalet merkezkaç kuvvelerinin ihmal edilmesi, aracın hareket ve sevk sistemlerinde büyük boyutlarda titreşime neden olmaktadır. Rezonans bölgesinde oluşacak bu titreşimler nedeniyle, aracı hareketini sağlayan aktarma parçaları, hesaplanan çalışma ömürlerinden önce kırılacaktır. Aracın hareket etmesini sağlayan aktarma parçalarının serbest ve zorlanmış titreşimlerdeki rezonans frekanslarının hesaplanması suretiyle, makinenin rezonans bölgesi içerisinde çalışmasını engelleyecek işletme önlemlerinin alınmasıdır. Bu çözüm ile, makinenin; rezonans bölgesindeki devirlere kısa süreliğine girip çıkması hızlanması ve yavaşlaması sağlanarak verimli ve sürekli bir çalışma yapılması sağlanacaktır. Kullanılan makine ve aktarma sistemlerinin verimli ve sürekli bir çalışma içinde olması için, çalışma esnasında aktarma parçalarında oluşan radyal (öteleme) ve torsiyonel (burulma) titreşimlerinin rezonans bölgesi içerisinde büyük

genlikler oluşturmasının engellenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada yapılacak hesaplamalar ile, gemi sevk ve aktarma parçalarından oluşan farklı aktarma sistemlerinin burulma titreşimleri matematik modellerinin irdelenerek hareketin doğal frekans denklemleri bulunacaktır. Bulunan doğal frekans denklemleri ile, tasarımı yapılacak olan gemilere ait mekanik aktarma sistemlerinin, rezonans frekanslarında çalışmamaları için işletme devirleri veya aralıkları tespit edilecek ve makinelere ait işletme devirlerine ilişkin gerekli ikazların kullanıcılara yapılması sağlanacaktır.

Anahtar Kelimeler: Burulma, g aktarma organları, gemi, redüktör, şaft, titreşim

2017, 101 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Analysis of Torsional Vibrations of a Ship Propeller Shaft

Şevki AKKOCA

Manisa Celal Bayar University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Mechanical Engineering Anabilim Dalı

Supervisor: Assoc. Prof. Dr.Süleyman Murat BAĞDATLI

Today, the basic principle in the production of machines and power transmission parts (shafts and reducers) that enables the vehicles used in land, air and marine transportation to move is to increase the power and economic life of the machines by increasing the working cycles by producing the machines with light and high strength materials. Because of the increase in the number of revolutions of the machine and the subsequent increase in power, the vibrations that occur in the machine and transfer parts arise as an important problem to be solved. The neglect of the unbalanced inertia centrifugal forces in the design calculations of the vehicle motion and transmission systems causes large vibrations in the vehicle motion and propulsion systems. Due to these vibrations to occur in the resonance zone, the transfer parts providing the movement of the vehicle will be broken before the calculated working life. By taking into account the resonance frequencies of the free and forced vibrations of the transfer parts that allow the vehicle to move, it is necessary to take operational measures which will prevent the machine from operating in the resonance zone. With this solution, It is ensured that the revolutions in the resonance zone are entered into a short period of time and that the output is accelerated and slowed down. In order for the used machinery and transmission systems to operate efficiently and continuously, it is necessary to prevent the radial (torsional) and torsional (torsional) vibrations that occur in the transmission parts during operation from generating large amplitudes in

the resonance region. With the natural frequency equations found, the operating cycles or intervals of the mechanical transmission systems of the ships to be designed shall be determined so as not to work at the resonance frequencies and the necessary warnings about the operating cycles of the machines shall be made to the users.

Keywords— Gearbox, powertrain, shaft, the ship, torsion, vibration

2017, 101 pages



1. GİRİŞ

Günümüzde kara, hava ve deniz ulaşımında kullanılan araçların hareket etmesini sağlayan makinelerin ve güç aktarma parçaları (şaft ve redüktör)'nin üretimindeki temel prensip, makineleri hafif ve mukavemeti yüksek malzemelerden üreterek çalışma devirlerini yükseltmek suretiyle güçlerini ve ekonomik kullanım ömürlerini arttırmaktır. Bahse konu makine ve güç aktarma parçaları ile hareket eden gemilerde de, iç ve dış kaynaklı kuvvetler gemi kaportası ve yüzeyinde titreşimlere neden olduğu gibi ayrıca mekanik sistemlerde de titreşimlere sebebiyet vermektedirler.

Gemi titreşimine neden olan iç kaynaklar; ana makine, şaft, pervane gibi güç iletim sistemleri, kompresör, seperatör ve pompa tertibatlarıdır. Dalga, akıntı ve gemideki yük dengesizliği de dış kaynaklı gemi titreşimidir. Meydana gelen bu titreşimler gemi bünyesinde birçok yapıda hasara sebep olduğu gibi aynı zamanda yolcu konforu, mürettebat ve hareketli aksamaların çalışma performansını etkilediği için kontrol edilmesi gerekmektedir.[1] Ancak gemi yapımı tamamlandıktan ve çalışmaya başladıktan sonra alınacak önlemlerin uygulanması hem daha zor hem de maliyetli olmaktadır. Bu nedenle, titreşim probleminin çözümüne yönelik gemi inşası esnasında teorik ve deneysel çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalar ana makinede, yardımcı makinelerde, pervanede işletmeye yönelik titreşim analizleri yapıldığı gibi yapısal titreşim analizlerini de içermektedir. Bu nedenle, farklı makine ve aktarma istemleri ile parçalarda yapısal ve işletmeye yönelik titreşim analizleri yapılmaktadır. Bu titreşim analizlerinin yapılacağı sistemlerden en önemlisi de şaft sistemidir. Çünkü gemini hareket etmesini sağlayan parçaların çoğu bu sisteme doğrudan veya dolaylı olarak bağlıdır. Bu nedenle, gemi sevk sistemi mekanik titreşim analizleri ve özellikle de şaft titreşimleri ile ilgili çok çeşitli çalışmalar mevcuttur.

Alarçin ve Korkmaz [1], gemi ana makine ve şaft sisteminin analizinde, hem ana makinenin çalışması ile meydana gelen bozucu dinamik kuvvetler hem de sudan gelen hidrodinamik etkiler göz önüne alınarak gemi ana makine şaft titreşimlerinin azaltılmasını amaçlamıştır. Sistemin matematik modeli, şaft sisteminin eksenel-burulma zorlanma durumları baz alınarak Lagrange metodu ile oluşturulmuştur. Şaftın ve pervanenin, eksenel-burulma hareketlerinin değişimini, Matlab-Simulink programı

kullanılarak elde etmişler ve genliklerin azaltılması için kullanılan farklı sönüm katsayılarını etkisi incelemişlerdir.

Talukdar [2], çalışmasında, sürekli sistemlerin temel dinamiklerini ele almıştır. Atalet, elastiklik ve sönümlemenin titreşim hareketi boyunca etkisini incelemiştir. Serbest titreşim hareketine ait doğal frekanslarının ve mod şekillerinin çözümünü yaklaşık analitik yöntemler ile yapmıştır. Zorlanmış titreşim sorununu süperpozisyon yardımı ile ele almıştır. Burulma, eksenel ve kiriş eğilme titreşimleri bazı örneklerle açıklamıştır.

Özgen [3], bir elektrik motoru, iki kanatlı bir pervane ve motordan aldığı döndürme momentini pervaneye ileten iki yerden yataklı, içi dolu, tek kademeli bir şafttan oluşan sevk sistemi modelinin doğal frekanslarını, diferansiyel denklem çözümüne dayanan analitik yöntemle ve nümerik yöntemlere dayanan yaklaşık çözümle çözümlenmiştir, çalışmasında daha sonra ivmeölçer ile ölçüm yaparak analitik ve nümerik yöntemlerle bulunan frekansları karşılaştırmıştır.

Okay [4], hazırlamış olduğu lisans bitirme tezinde, $P= 4900$ kW $n=170$ d/d Üreten Bir Makineye Bağlı Şaftın burulma titreşimleri ve mukavemet hesaplamalarını yapmıştır.

Ünsan ve İnel [5], çalışmalarında, eş zamanlı olarak, Strain-Gage bazlı şaft gücü ölçümünü, pervanenin gemi üzerinde yapmış olduğu basıncın önceden belirlenen yerlerde ölçümünü, daha önceden analiz edilip problem olacağı tahmin edilen yerlerde akselometreler yardımı ile titreşim ölçümünü, uydu bağlantısı yardımıyla geminin hızını, dünyanın manyetik alanının doğrultusu ve düşey ivmeler baz alınarak geminin bütün hareketlerinin (yalpa, dalıp çıkma, baş kış vurma v.s.) tespitini, gemi olanaklarını kullanıp dalga durumunun tespitini yapmışlardır. Ayrıca, çalışmalarında ölçüm sistemlerin nasıl kurulacağı, hangi aletlerin, hangi ölçme aralığında seçildiği, ölçme aletlerinin hangi şartlarda yerleştirildiği anlatılmıştır. Sonuç olarak, çalışmalarında gemi makine ve aktarma elemanlarında titreşim ölçümleri alınmasını ve titreşim analizi yapılmasının önemi vurgulanmıştır.

Hara, Furukawa ve Andshoda [6], çalışmalarında, son yıllarda üretimi yapılan

yeni tip gemi ana makinelerinde ortaya çıkan titreşimleri incelemişlerdir. Yeni ana makine mili sisteminde, torsiyonel, eksenel ve eğilme titreşimlerinin birbirini etkilediği tespitinde bulunmuşlar. Building Block yaklaşımını kullanarak ana makine ve şaft sisteminin titreşim analizine yönelik yeni bir yöntem geliştirmişlerdir.

Maurice [7], eserinde, makine gücünün aktarılmasını sağlayan mil ve benzeri dönen parçalardan oluşan farklı model ve sistemlerde, oluşan burulma titreşimlerini ve titreşimlerin ortadan kaldırılmaması durumunda ortaya çıkan arızaları incelemiştir. Farklı model ve sistemlerde oluşan burulma titreşiminin hareket denklemlerinin hesaplamalarının nasıl yapılacağını göstermiştir.

Tahrallı [8], eserinde, şaft, mil ve redüktörden oluşan farklı serbestlik derecelerindeki sistemlere ait burulma titreşimlerinin matematiksel modellemelerini yaparak doğal frekanslarını parametrik ve sayısal olarak hesaplamıştır.

Kelly [9], eserinde, tek ve çok serbestlik derecesine sahip sistemlere ait mekanik titreşimlerin doğal frekans ve rezonans durumlarına ilişkin parametrik ve sayısal hesaplamalar yapmıştır. Ayrıca, matematik modellemesini çıkarttığı sistemlere ilişkin mekanik titreşim hesaplamalarını MATLAB programı üzerinden çözmüştür.

Seto [10], eserinde, tek ve çok serbestlik derecesine sahip sistemlere ait mekanik titreşimlerin doğal frekanslarına ilişkin parametrik ve sayısal hesaplamalar yapmıştır. Ayrıca, eserinde, mil, şaft ve benzer dönen makine parçalarından oluşan sistemlerin burulma titreşimlerine ilişkin hesaplamalara da yer vermiştir.

Thomson ve Dahleh [11], eserlerinde, farklı serbestlik derecesine sahip sistemlerin matematiksel modellerine ait titreşimlerin hareket denklemlerinin parametrik ve sayısal hesaplamalarını yapmıştır. Ayrıca, mekanik titreşimlere ilişkin analitik hesaplamalar yanında, sonlu elemanlar yöntemi ile titreşim hareketlerine ait frekans denklemleri için çözüm yolları önerilmiştir. Makine, makine parçaları ve konstrüksiyon elemanlarında ortaya çıkan sürekli ortam titreşimleri ve çözümlerine yer verilmiştir.

Wilson [12], eserinde, otomobil, uçak ve gemilerdeki sevk sistemlerinde

kullanılan mil, şaft, dişli ve dönen makine parçalarından oluşan sistemlerin matematiksel modellerine ait titreşimlerin doğal frekanslarının parametrik ve sayısal hesaplamaları yapılmış ve burulma titreşimine ait grafikler çıkartılmıştır. Çoklu kütleli sistemlerin matematik modelleri çıkartılarak, kütle atalet momentlerinin ve millerin sahip olduğu burulma titreşimi yay katsayılarının farklı millere indirgeme işlemlerinin nasıl yapılacağı anlatılmıştır. Farklı sistemlerin burulma titreşim hareketlerinin doğal frekansların ait parametrik hesaplamaların sayısal çözümleri yapılmıştır. Özellikle eserde, farklı dişli sistemlerinden oluşan redüktörlü aktarma sistemlerinin matematiksel modelleri ve akabinde bu modellere ait burulma titreşimlerinin doğal frekans hesaplamaları yapılmıştır.

Singiresu [13] eserinde, tek ve çok serbestlik dereceli sistemlere ait titreşimlerin doğal frekans ve rezonans durumlarına ilişkin hesaplamaları yapmıştır. Ayrıca, sürekli sistemlere ait boyuna, eğilme ve burulma titreşimlerinin analitik çözümleri yapılmıştır. Bununla birlikte, boyuna, eğilme ve burulma sürekli ortam titreşimlerine ait hareket denklemlerinin Hamilton prensibi ile çözümü yapılmıştır. Farklı başlangıç ve sınır şartları içeren örneklerin çözümü yapılmıştır. Bahsedilen sürekli ortam titreşimlerinin birbiriyle olan etkileşimleri ve ortak titreşim frekanslarının hesaplanmaları hakkında bilgiler verilmiştir.

Tahralı ve Bağdatlı [14] eserlerinde, Tek serbestlik dereceli ve çok serbestlik dereceli mekanik sistemlerde oluşan burulma ve radyal titreşimler hakkında bilgi vermişlerdir. Bu titreşimlerin meydana geldiği sistemlerin matematiksel modellemesini yapmak suretiyle doğal frekanslarının ve rezonans durumlarının parametrik hesaplamalarını yapmışlardır. Otomobil vb. araçların makine ve dönen makine parçalarında ortaya çıkan radyal ve torsiyonel titreşim problemlerinin ortadan kaldırılmasına yönelik parametrik ve sayısal çözümleri yapmışlardır. Ayrıca, titreşim izolasyonuna yönelik parametrik ve sayısal hesaplamalar hakkında ayrıntılı bilgiler vermişlerdir.

Tahralı, Kaya, Yüksek ve Güçlü [15] eserlerinde, mekanik titreşimler sınıflandırılmış, titreşim elemanları tanımlanmış ve titreşim sistemlerine ilişkin matematiksel modeller çıkartılmıştır. Çıkartılan bu matematiksel modellere ilişkin parametrik ve sayısal çözümler yapılmıştır. Araç sevk sistemlerinde meydana

gelen titreşimler üzerine örnek problemler çözülmüştür.

Yukarıda belirtilen çalışmalardan ve eserlerden de görüleceği üzere, mühendislik mekaniğinin günümüzü uğraştıran dinamik problemlerinden en önemlilerinden birisi titreşimdir. Makine mühendislerince yapılan çalışmaların amacı, bu istenmeyen titreşimin ortadan kaldırılması veya zararsız hale getirilmesidir.

Titreşimlerin istenmediği yerlerden biride gemi sevk sistemleridir. Gemi sevk sistemlerindeki istenmeyen durum, şaft ve redüktörde oluşan burulma titreşimidir. Küçük genlikler ile pek fark edilmeyen kritik hızlar ile rezonans bölgesinde çalışan bir mil belli bir müddet çalıştıktan sonra kırılabilmektedir. Krank millerinde de kritik hızlarda rezonans bölgesinde motorun uzun süre çalışması durumunda çoğunlukla yataklar içerisinde bulunmayan serbest mil parçasında alternatif yük etkisi altında malzeme yorulmakta, büyük lokal gerilmelerin olduğu kesitlerde plastik bölgede deformasyonlar (çatlaklar) meydana gelmekte dolayısıyla bu çatlaklar büyümekte ve sonuç olarak mil kesitinin sağlam kısmı istenilen momenti taşıyamadığı için kırılmaktadır. Bu nedenle bugün titreşim analizi hesaplanmayan, incelenmeyen hiçbir makine bilhassa motor yapılamamaktadır. [14]

Bu çalışmada, bahsedilen araştırma ve incelemelerden biraz farklı olarak şaftı tahrik edici makine (motor, yardımcı makine, redüktörv.b.) şaft ve pervanenin hareketlerinden meydana gelen burulma titreşimleri çeşitli matematik modeller ile incelenecektir. Şaftın yataklanmasında, şaft sehimine engel olmak için sık radyal yataklar ile mesnetlenmiştir. Ancak yine de, yataklanamayan ve pervane arasında kalan şaftın eğilme titreşimlerine ilişkin hesaplamalara da yapılmıştır. Burulma (torsiyonel) titreşimleri çeşitli matematik modelleri üzerinden incelenerek, pratikten alınan sayısal değerler ile rezonans bölgelerinin tespitleri gerçekleştirilmiştir.

2. GEMİ TAHRİK SİSTEMLERİNİN MODELLENEREK İRDELENMESİ

Bir geminin hareket edebilmesi için, ana makinede üretilen gücün pervaneye iletilmesi gerekmektedir. Güç iletimi aşağıdaki üç yöntemden birisi kullanılarak yapılmaktadır. [16]

Doğrudan Tahrik : Doğrudan tahrikte ana makine bir şaft vasıtasıyla doğrudan pervaneye bağlanır. Genelde düşük devirli (60-150 rpm) dizel motorlarında doğrudan tahrik kullanılmaktadır. Şayet gemide pervane yerine su jeti kullanılıyorsa orta devirli dizeller de (450-800 rpm) sistemi doğrudan tahrik edebilmektedir. Sabit pitch pervane kullanılıyorsa bütün manevralar yani hız düşürme ve geri hareket makine hızı ve devir yönü değişimi ile temin edilmektedir.

Dişli ile Tahrik (Redüktör): Bu tür sistemde pervane devri ile makine devir farklı olduğundan bir dişli kutusu ile devir dönüşümü sağlanmaktadır. Dişli kutusu aynı zamanda makine devir yönü değişmeden pervane dönüş yönünü değiştirebilecek şekilde de dizayn edilebilmektedir. Dolayısıyla sevk zinciri makine, dişli kutusu, şaft ve pervaneden oluşmaktadır.

Elektrikli Tahrik: Bu sistemde dizel motorları jeneratörleri tahrik ederek elektrik üretilmektedir. Pervane ile ana makine arasında doğrudan bir mekanik ilinti yoktur. Pervane bir elektrik motoru yardımıyla çevrilmektedir. Sistemin avantajı gemi sevk gücü, otel yükleri ve diğer enerji taleplerinin hepsi elde edilen elektrik enerjisi ile karşılanmakta ve yeterince yedekleme olduğundan güç kesintisi söz konusu olmamaktadır. Ayrıca doğrudan mekanik ilinti olmadığından makine dairesi gemi kığı yerine başka bir yerde, mesela başta olabilmektedir.

Bu tezde “Doğrudan Tahrik ve Dişli İle Tahrik” sistemlerine ilişkin modellemeler ve hesaplamalar yapılacaktır. Bu kapsamda, farklı üç gemi sevk tahrik sistemine ilişkin matematik modellerin çıkartılması suretiyle sistemin burulma titreşimlerinin doğal frekansları parametrik olarak bulunmaktadır.

Bir sistemin elemanlarının simgeler ile tanımlanıp bunlar arasındaki ilişkilerin fonksiyonlar ile gösterimine "matematiksel model" adı verilmektedir. Bu çalışmadaki amacımız, gemi sevk sistemin oluşturan mekanik parçalarda meydana gelen burulma titreşimlerini analiz etmektir. Mekanik parçalardaki titreşim problemi tanımlandıktan sonra problemi etkileyen parametre değerlerinin belirlenerek problemin matematiksel modeli kurulmaktadır. Model kurulduktan sonra titreşim hareketine ilişkin oluşturulan diferansiyel denklemler çözümlenerek, sistemin rezonans bölgeleri bulunmaktadır. Bu

kapsamda, 4 (dört) gemi sevk sistemine ait matematiksel model üzerinde durulacaktır. Bahse konu modeller basitten karmaşığa doğru irdelenecektir. Ayrıca, irdelenecek modellerden birinde özel olarak yataklanmamış ve pervane arasında kalan şaftın eğilme ve burulmadan kaynaklanan sürekli eğilme ve burulma titreşimlerine ait hareket denklemleri çıkartılacaktır. Buradaki amaç, modele ait titreşimin doğal frekansın sadece burulmadan kaynaklanmadığı ayrıca şaftta ki eğilmeden kaynaklanan titreşim hareketinin de olduğu matematiksel model ve parametrik hesaplamalar ile ortaya konulacaktır. Böylece gemi sevk sistemine ait şaft ve aktarma sistemlerinde arızaların açıklanmasında sadece burulma titreşimlerinden kaynaklanan durumların değil ayrıca yataklanmamış şaft kısımlarının eğilme titreşimlerine de maruz kaldığı görülmektedir. Bu durum gemi sevk sistemi tasarımlarında büyük önem arz etmektedir.

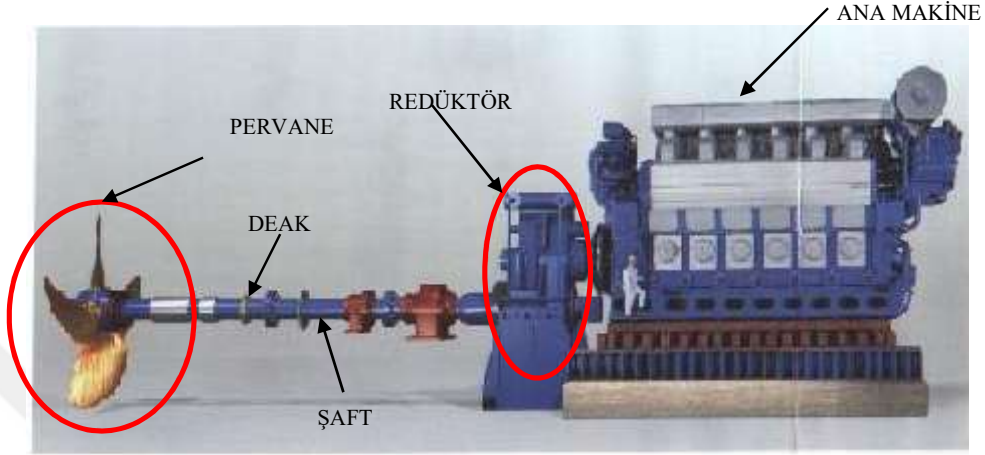


Şekil 2.0 Şaft ve Pervane Sistemi

2.1. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı Birinci Model Sistemlere Ait Hesaplamalar

Aşağıdaki şekil 2.1’de belirtilen gemi sevk sistemi, ana makine, şaft, redüktör ve pervane sisteminden oluşmaktadır. Ayrıca, burulma titreşiminden kaynaklanan rezonans frekans aralıklarının istenilen düzeyde tutulması maksadıyla, Dinamik Etki

Arttırma Kütlesi (DEAK) kullanılmıştır. İlerleyen bölümlerde, DEAK kullanılmış bir modelin burulma titreşime ilişkin doğal frekansları bulunacaktır.



Şekil 2.1. Motor, Redüktör, Şaft ve Pervane Parçalarından Oluşan Gemi Tahrik Modeli

Şekilde 2.1.'de gösterilen motor, redüktör, şaft ve pervane modeli farklı matematiksel modeller esas alınarak burulmada doğal frekanslar ve titreşimler açıklanacaktır.

$$k_b = \frac{GI_p}{L} \quad (2.1)$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.2)$$

2.1.1. Mekanik Titreşimlerde Burulmada Doğal (ω_n) Enerji Metodu İle Hesaplanması

$$\text{Kinetik Enerji (E}_k\text{) + Potansiyel Enerji (E}_p\text{) = C (Sabit)} \quad (2.3)$$

Burulma titreşim hareketinin herhangi bir anında mil burulma yayında Potansiyel Enerji (E_p);

$$E_P = \frac{1}{2} k_b \varphi^2 \quad (2.4)$$

Burulma titreşim hareketinin herhangi bir anında mil burulma yayında Kinetik Enerji (E_k);

$$E_K = \frac{1}{2} J_b \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (2.5)$$

Denklem 2.4 ve Denklem 2.5'i, Denklem 2.3'ün içine yazarak türevini alalım;

$$\frac{d}{dt} (E_P + E_k) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k_b \varphi^2 + \frac{1}{2} J_b \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$k_b \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) + J_P \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$k_b \varphi + J_P \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) + \frac{k_b}{J_P} \varphi = 0 \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) + \omega_n^2 \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{k_b}{J_P} \left[\frac{\text{radyan}}{\text{saniye}} \right]^2 \quad (2.10)$$

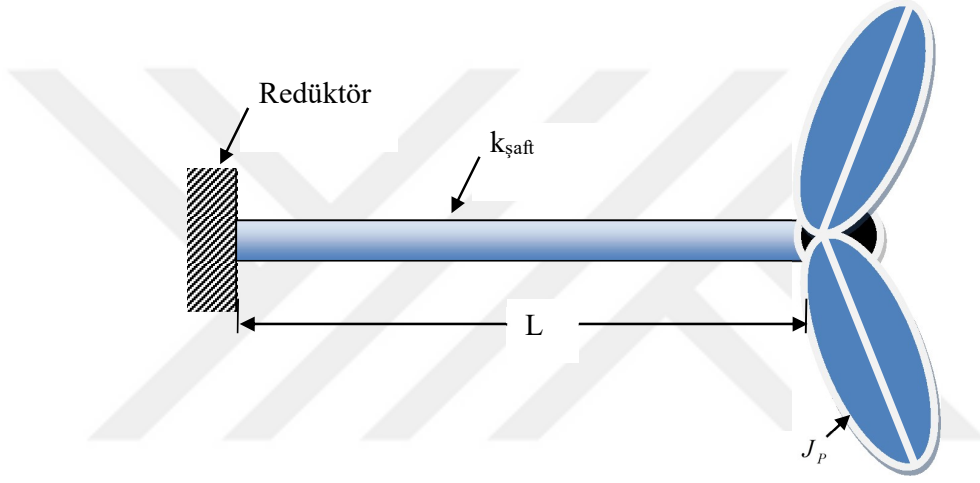
Denklem 2.10'un çözümü için aşağıdaki burulma açısı φ çözüm önerisini yerine yazılırsa;

$$\varphi = \varphi_{maks} e^{i\omega_n t} \quad (2.11)$$

$\dot{\phi}$ parametrik değeri aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$\ddot{\phi} = -\omega_n^2 \phi_{maks} e^{i\omega_n t} = -\omega_n^2 \phi \quad (2.12)$$

Aşağıdaki gemi sevk sistemi ana makine, şaft ve pervaneden oluşmaktadır. Ana makineden üretilen moment doğrudan pervaneye iletilmektedir.



Şekil 2.2. Birinci Modele İlişkin Matematiksel Model

Şekil 2.2'ye ait matematiksel modelde, tek bir ana makineye bağlı pervane şaftındaki serbest burulma titreşimleri incelenmiştir. Burada J_p değeri, pervane kütle atalet momentine eşit olarak ele alınmıştır. Burulma yay katsayısı k_b değeri redüktöre kadar olan pervane milindeki her bir yay katsayılarının pervane miline indirgenmesi ile elde edilmiştir. Genel olarak büyük kütle atalet momentli elemanlar, küçük salınımlar ile titreşim yaparlar. Küçük kütle atalet momentli elemanlar ise büyük salınımlar ile titreşim yaparlar. Burada pervanenin kütle atalet momenti büyük olmasına rağmen, sistemde meydana getirdiği titreşimlerin belirlenebilmesi amacıyla bu modelleme yapılmıştır. Bu modellemede sistemin sabit kısmı redüktör olarak kabul edilerekten, ana makinenin de sabit olduğu düşünülmüştür.

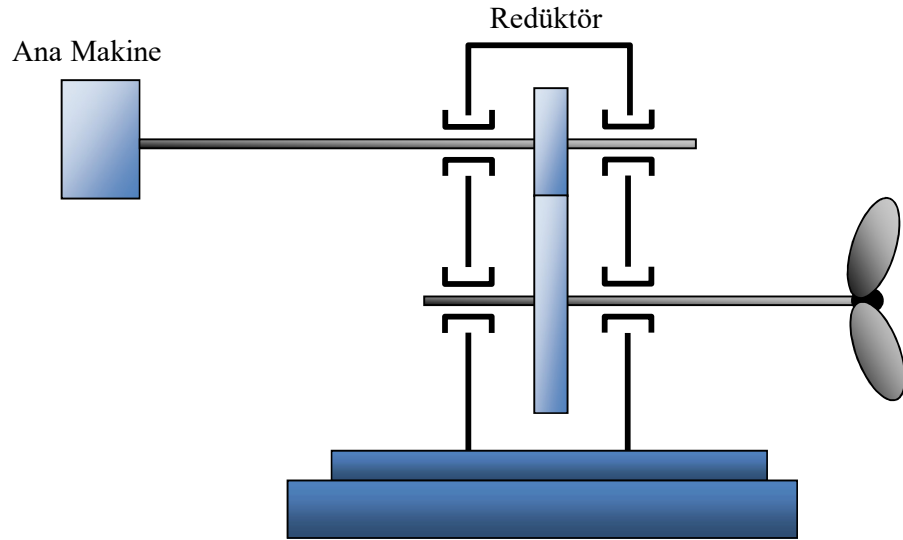
2.1.2. Birinci Model Sistemin Parametrik Hesaplamaları

Şekil 2.2'ye ait matematiksel modele ait burulma titreşiminin doğal frekansı (ω_{nb}) aşağıdaki gibidir.

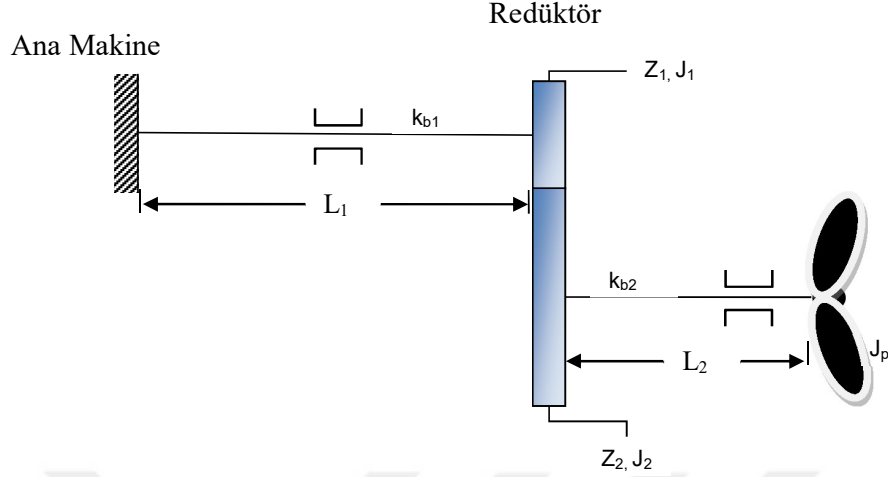
$$\omega_{nb} = \sqrt{\frac{k_{\text{şaft}}}{j_b}} \quad (2.13)$$

2.2. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı İkinci Model Sistemlere Ait Hesaplamalar

Aşağıda verilen gemi sevk sistemi, ana makine, iki kademeli redüktör, miller ve pervaneden oluşmaktadır. Bu sistemde ana makine tarafından üretilen moment redüktör sistemi vasıtasıyla pervaneye iletilmektedir. Bu sayede üretilen moment tasarımda kullanılan redüktörlerin çapları ve dişli sayılarına oranla pervaneye iletilerek, gemi hareket etmektedir.



Şekil 2.3. Motor, Redüktör Sistemi, Şaft ve Pervane Parçalarından Oluşan Gemi Tahrik Modeli



Şekil 2.4. İkinci Modele İlişkin Matematiksel Model

Şekil 2.4’de gösterilen matematiksel modelde ana makineye (ana makine, sabit olarak gösterilmiştir; çünkü karşı direnç burulma momenti mevcuttur.) tek kademeli (redüktör) ile bağlı olan pervane şaftının serbest burulma titreşimi incelenmiştir. Modelleme, 2 (iki) kütle 2 (iki) yay olarak düşünülmüştür. Birinci kütle redüktör dişlilerine ait indirgenmiş kütle atalet momentleridir. İkinci kütle, pervane atalet momenti olarak ele alınmaktadır. Giriş dişlileri, çıkış dişlisine indirgenerek kütle atalet momentleri toplanmıştır. Toplanan kütle atalet momenti ve pervane kütle atalet momenti ile, 2 (iki) kütle 2 (iki) yay matematik modeli oluşturulmuştur. Ana makineye bağlı millerin yay katsayıları, pervane şaftının yay katsayısına indirgenip toplanarak, toplam yay katsayısı $k_{beş}$ bulunacaktır. Bu matematik modelde, pervanenin ve redüktörün meydana getirdiği burulma titreşimlerinin hesaplamaları ele alınmıştır. Buradan doğal frekans, rezonans frekansı belirlenmektedir.

2.2.1. İkinci Modelin Parametrik Hesaplamaları

İkinci Modelde oluşan burulma titreşimlerinden kaynaklanan doğal frekansı (ω_{nb}) bulabilmek için kütleler arasında ve miller (şaft) arasında indirgenme işlemleri yapılmalıdır. Bu kapsamda; öncelikle; “İkinci mile (pervane şaftı) indirgeme” işlemini yaparak doğal frekans bulunacaktır. Birinci milin, İkinci milin burulma yay katsayısına indirgenme işlemi aşağıdadır.

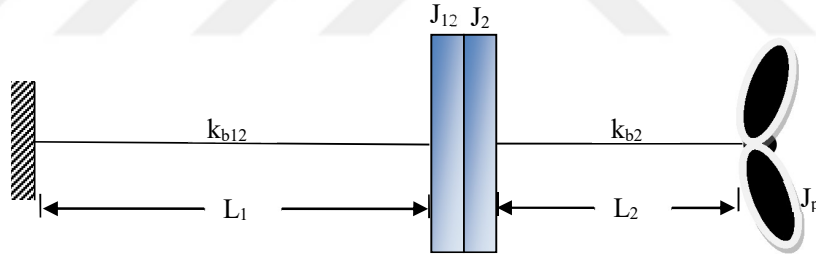
$$k_{b12} = k_{b1} i_{12}^2 ; \quad i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (2.14)$$

$$k_{b12} = k_{b1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 \quad (2.15)$$

Birinci dişlinin kütle atalet momentinin ikinci dişliye indirgenme işlemi aşağıdadır.

$$J_{b12} = J_{b1} i_{12}^2 ; \quad i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (2.16)$$

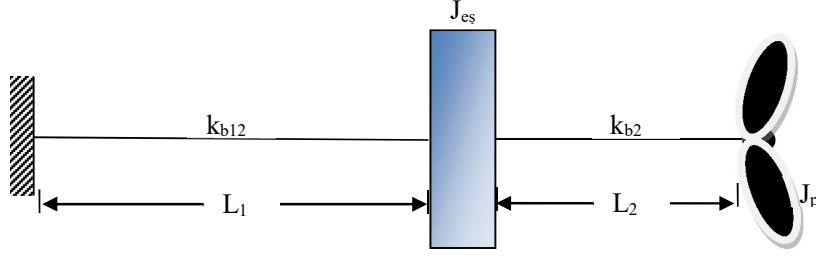
$$J_{b12} = J_{b1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 \quad (2.17)$$



Şekil 2.5. İkinci Mile (Pervane Şaftı) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmamış)

Yapılan indirgeme işlemlerine göre, yeni oluşan $\left(J_{e\dot{\varphi}} \right)$ kütle atalet momentini aşağıda verilmiştir.

$$J_{e\dot{\varphi}} = J_{12} + J_2 \quad (2.18)$$

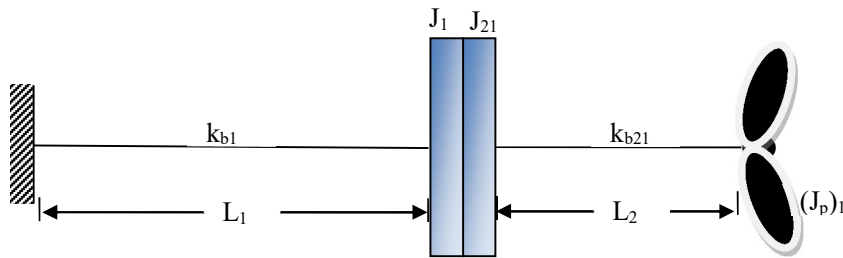


Şekil 2.6. İkinci Mile (Pervane Şaftı) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmış)

Yukarıda yapılan hesaplamalar ile ikinci mile yani pervane şaftına indirgeme işlemi yapılmıştır. Aşağıda ise; birinci mile yani motor miline İndirgeme işlemleri yapılmaktadır. Buradaki amaç, her iki yöntem ile yapılan doğal frekans hesaplamalarının doğruluğunu kanıtlamaktır. Bahse konu bu hususa ilişkin hesaplamalara ilerleyen bölümlerde tekrar değinilecektir. Bu kapsamda, şimdi yukarıda yapmış olduğumuz indirgeme işlemlerini şimdi de motor mili için uygulanacaktır. Burada, ikinci milin, birinci milin yay katsayısına indirgenmesi işlemi aşağıdadır.

$$k_{b21} = k_{b2} (i_{21})^2 \quad i_{21} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.19)$$

$$k_{b21} = k_{b2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \quad (2.20)$$



Şekil 2.7. Birinci Mile (Motor Miline) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmamış)

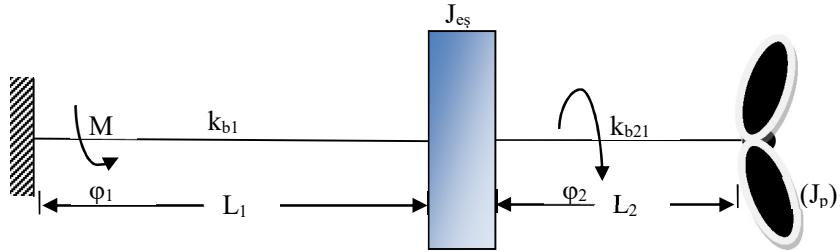
Yapılan indirgeme işlemlerine göre, motor miline indirgenen pervanenin yeni kütle atalet momenti $(J_p)_1$ aşağıda verilmiştir.

$$(J_p)_1 = J_p (i_{21})^2 \quad (2.21)$$

Yapılan indirgeme işlemlerine göre, motor miline indirgenen ikinci dişlinin yeni kütle atalet momenti (J_{21}) aşağıda verilmiştir.

$$J_{21} = J_2 (i_{21})^2 \quad i_{21} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.22)$$

$$J_{21} = J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \quad (2.23)$$



Şekil 2.8. Birinci Mile (Motor Miline) İndirgemesi Yapılmış Matematiksel Model (Kütle Atalet Momentleri Toplanmış)

Şekil 2.8'deki indirgenmiş matematiksel model 2 (iki) yay 2 (iki) kütle sistemine benzerdir. Şimdi yukarıda yapmış olduğumuz indirgeme işlemlerini kullanmak suretiyle, sisteme ait burulma titreşimi doğal frekansı (ω_{nb}) bulunacaktır.

Şekil 2.8'deki sistemin matematik modelinden Newton'nun ikinci yasasından;

$$\Sigma M = J \ddot{\phi} \quad (2.24)$$

$$J_{e\dot{s}} \ddot{\varphi}_1 = -k_{b12} \varphi_1 - k_{b2} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.25)$$

$$J_p \ddot{\varphi}_2 = -k_{b2} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.26)$$

Denklem 2.25 ve 2.26'yı çözebilmek için aşağıdaki ifadeleri yerine konulursa,

$$\varphi_1 = A e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} \quad \text{veya} \quad \varphi_1 = A \sin(\omega_{nb} t + \phi) \quad (2.27)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -A \omega_{nb}^2 e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} \quad (2.28)$$

$$\varphi_2 = B e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} \quad \text{veya} \quad \varphi_2 = B \sin(\omega_{nb} t + \phi) \quad (2.29)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -B \omega_{nb}^2 e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} \quad (2.30)$$

Denklem 2.25 ve 2.26'nın tekrar düzenlenmesinden aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$J_{e\dot{s}} \ddot{\varphi}_1 + k_{b12} \varphi_1 + k_{b2} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (2.31)$$

$$J_p \ddot{\varphi}_2 + k_{b2} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = A i \omega_{nb} e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} = i \omega_{nb} \varphi_1 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -A \omega_{nb}^2 e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} = -\omega_{nb}^2 \varphi_1 \quad (2.33)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = B i \omega_{nb} e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} = i \omega_{nb} \varphi_2 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -B \omega_{nb}^2 e^{i(\omega_{nb} t + \phi)} = -\omega_{nb}^2 \varphi_2 \quad (2.34)$$

Yukarıdaki burulma açıları φ_1 ve φ_2 değerlerine ilişkin parametreleri 2.31 ve 2.32'de yerine yazılırsa,

$$J_{e\varsigma} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + k_{b12} \varphi_1 + k_{b2} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (2.35)$$

$$-J_{e\varsigma} A \omega_{nb}^2 e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} + k_{b12} A e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} + k_{b2} (A e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} - B e^{i(\omega_{nb}t + \phi)}) = 0 \quad (2.36)$$

$$e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} \left(-J_{e\varsigma} A \omega_{nb}^2 + k_{b12} A + k_{b2} (A - B) \right) = 0 \quad (2.37)$$

$$J_p \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + k_{b2} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (2.38)$$

$$-J_p B \omega_{nb}^2 e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} + k_{b2} (B e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} - A e^{i(\omega_{nb}t + \phi)}) = 0 \quad (2.39)$$

$$e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} \left(-J_p B \omega_{nb}^2 + k_{b2} (B - A) \right) = 0 \quad (2.40)$$

Denklem 2.37 ve 2.40'ın sıfır olabilmesi için, her t zaman diliminde üstsel fonksiyon sıfır olamayacağından ($e^{i(\omega_{nb}t + \phi)} \neq 0$) dolayı, denklemlerin A ve B katsayılarına ait kısımlarının sıfır yapılması gerekmektedir.

$$\left(k_{b12} + k_{b2} - J_{e\varsigma} \omega_{nb}^2 \right) A - k_{b2} B = 0 \quad (2.41)$$

$$k_{b2} A - \left(k_{b2} - J_p \omega_{nb}^2 \right) B = 0 \quad (2.42)$$

Yukarıdaki denklem 2.41 ve 2.42 matris yöntemi ile çözümlerse;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_{b12} + k_{b2} - J_{e\varsigma} \omega_{nb}^2 & -k_{b2} \\ k_{b2} & -k_{b2} + J_p \omega_{nb}^2 \end{pmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}_{[C]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{[0]} \quad (2.43)$$

Denklem 2.43'ün çözümü için $\det(K)=0$ olması gerekmektedir.

$$(k_{b12} + k_{b2} - J_{e\dot{s}} \omega_{nb}^2)(-k_{b2} + J_p \omega_{nb}^2) + k_{b2}^2 = 0 \quad (2.44)$$

$$\omega_{nb}^4 - \left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{b2}}{J_p} \right] \omega_{nb}^2 + \frac{k_{b12} k_{b2}}{J_{e\dot{s}} J_p} = 0 \quad (2.45)$$

$\omega_{nb}^2 = \Lambda_{nb}$ değişimi yapılarak Denklem (2.45) çözülrse,

$$\Lambda_{nb}^2 - \left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{b2}}{J_p} \right] \Lambda_{nb} + \frac{k_{b12} k_{b2}}{J_{e\dot{s}} J_p} = 0 \quad (2.46)$$

$$\omega_{nb1,2}^2 = \Lambda_{nb1,2} = \frac{- \left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{b2}}{J_p} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{b2}}{J_p} \right]^2 - 4 \frac{k_{b12} k_{b2}}{J_{e\dot{s}} J_p}}}{2} \quad (2.47)$$

elde edilmektedir.

Şekil 2.8'deki modelde toplam kütle atalet momenti $J_{e\dot{s}} = J_{12} + J_2$ uygun parametreler seçilip tasarım geliştirilirse, iki kütle ve iki yay sisteminde pervane titreşimlerinin amplitütleri $(\varphi_p)_{maks} = 0$ yani pervane kütlesi burulma titreşimi yapmayacaktır. $J_{e\dot{s}}$ kütlesi “dinamik absorber (titreşim yutucu)” olarak görev yapmaktadır. Bunun irdelenmesi aşağıdaki zorlanmış burulma titreşimi denkleminde elde edilmektedir.

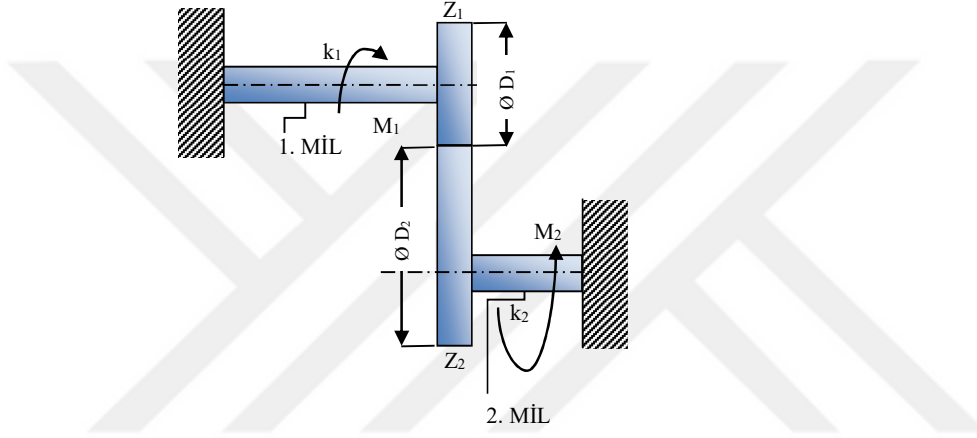
$$(\varphi_2)_{pervane} = \frac{M_{bg} k_{b2} \sin \omega_b t}{(k_{b12} + k_{b2} - J_{e\dot{s}} \omega_b^2)(k_{b2} - J_p \omega_b^2) - k_{b2}^2} \quad (2.48)$$

$$(\varphi_1)_{absorber} = \frac{M_{bg} (k_{b2} - J_p \omega_b^2) \sin \omega_b t}{(k_{b12} + k_{b2} - J_{e\dot{s}} \omega_b^2)(k_{b2} - J_p \omega_b^2) - k_{b2}^2} \quad (2.49)$$

Bunun için tasarımda $\omega_p = \sqrt{\frac{k_{b2}}{J_{pervane}}} = \omega_b$ seçildiği takdirde ana makinden redüktöre

kadar olan titreşimler sıfır olmaktadır.

Yukarıda yapılan indirgeme işlemlerinin doğru bir şekilde yapılıp yapılmadığının kontrol edilmesi ve bununla birlikte farklı millere yapılacak indirgeme işlemlerinde de hesaplanan parametrik sonucun değişmeyeceğinin gösterilmesi amacıyla, aşağıda “İndirgeme İşlemleri” ne” ilişkin ayrıntılı açıklamalar yapılmıştır. Bu kapsamda; iki ucu sabitlenmiş olarak modellenmiş olan şekil 2.9’daki sistemin indirgeme işlemleri yapılmıştır.[8]

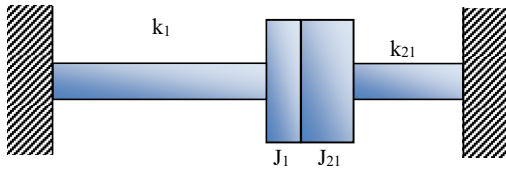


Şekil 2.9. Millerin ve Atalet Momentlerinin İndirgenme İşlemlerine İlişkin Matematiksel Model

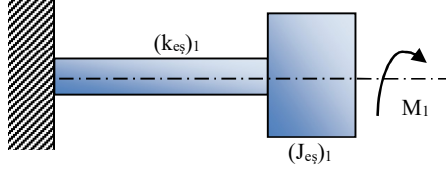
$$(i_{12}) = \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (2.50)$$

İkinci milin birinci mile indirgenmesi işlemleri aşağıdadır.

$$\left(k_{eş}\right)_1 = k_1 + k_{21} \quad \left(J_{eş}\right)_1 = J_1 + J_{21} \quad (2.51)$$



Şekil 2.10. İkinci Milin Birinci Mile İndirgenmesi



Şekil 2.11. Birinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli

Genel olarak:

$$i_{12} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad (\text{çevrim oranı}) \quad (2.52)$$

$$M_1 = k_1 \varphi_1 \quad ; \quad M_2 = k_2 \varphi_2 \quad (\text{gerçek momentler}) \quad (2.53)$$

$$M_1 = k_{21} \varphi_{21} \quad ; \quad M_2 = k_{12} \varphi_{12} \quad (\text{indirgenmiş momentler}) \quad (2.54)$$

$$\varphi_1 = \frac{M_1}{k_1} \quad ; \quad \varphi_{12} = \frac{M_2}{k_{12}} \quad ; \quad \varphi_2 = \frac{M_2}{k_2} \quad ; \quad \varphi_{21} = \frac{M_1}{k_{21}} \quad (2.55)$$

Dinamik eşdeğerlik olabilmesi için, gerçek potansiyel enerji $[(E_p)_1, (E_p)_2]$ 'nin, indirgenmiş (eşdeğer) potansiyel enerji $[(E_p)_{12}, (E_p)_{21}]$ 'ye eşit olması gerekmektedir.

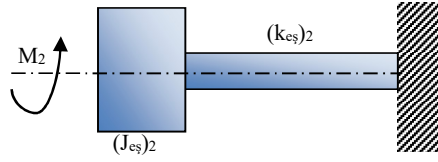
$$(E_p)_1 = (E_p)_{12} \quad ; \quad (E_p)_2 = (E_p)_{21} \quad (2.56)$$

Gerçek kinetik enerji $[(E_k)_1, (E_k)_2]$ 'nin, indirgenmiş (eşdeğer) kinetik enerji $[(E_k)_{12}, (E_k)_{21}]$ 'ye eşit olması gerekmektedir.

$$(E_k)_1 = (E_k)_{12} \quad ; \quad (E_k)_2 = (E_k)_{21} \quad (2.57)$$

Denklem 2.56'da verilen ifadeleri denklem 2.58'de yerine konulursa;

$$E_{p21} = \frac{1}{2} k_{21} (\varphi_{21})^2 = \frac{1}{2} k_{21} \left(\frac{M_1}{k_{21}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(M_1)^2}{k_{21}} \quad (2.58)$$



Şekil 2.12. İkinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli

Aşağıda millere ait burulma titreşimi yay katsayılarının toplamından, eşdeğer burulma yay katsayısı bulunmuştur.

$$(k_{e\varphi})_2 = k_2 + (i_{12})^2 k_1 \quad (2.59)$$

Aşağıda dönen parçalara ait kütle atalet momentlerinin toplamından, eşdeğer kütle atalet momenti bulunmuştur.

$$(J_{e\varphi})_2 = J_2 + (i_{12})^2 J_1 \quad (2.60)$$

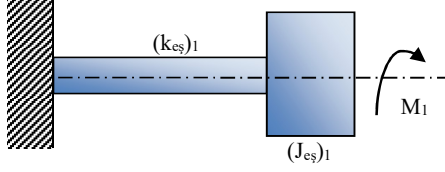
Denklem 2.59 ve 2.60'daki ifadelerin, potansiyel enerji denkleminde yerine konulursa,

$$E_{p2} = \frac{1}{2} k_2 (\varphi_2)^2 = \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{M_2}{k_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(M_2)^2}{k_2} \quad (2.61)$$

$$k_{21} = k_2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 = k_2 \left(\frac{1}{i_{12}} \right)^2 \quad (2.62)$$

Sisteme ait burulma titreşimi yay katsayılarının toplanması ile elde edilen burulma titreşimi yay katsayısı.

$$k_{e\dot{s}1} = k_1 + k_{21} = k_1 + k_2 \left(\frac{1}{i_{12}} \right) \quad (2.63)$$



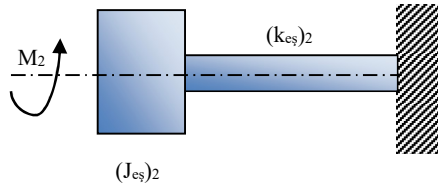
Şekil 2.13. Birinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli

$$(\omega_{12})^2 = \frac{(k_{e\dot{s}})_1}{(J_{e\dot{s}})_1} \quad (2.64)$$

Denklem 2.57’de verilen ifadeleri denklem 2.65’de yerine konulursa;

$$E_{k21} = \frac{1}{2} J_{21} (\omega_{21})^2 \quad ; \quad E_{k2} = \frac{1}{2} J_2 (\omega_2)^2 \quad (2.65)$$

$$J_{21} = J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = J_2 \left(\frac{1}{i_{12}} \right)^2 \quad (2.66)$$



Şekil 2.14. İkinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli

$$(\omega_{12})^2 = \frac{(k_{e\varphi})_2}{(J_{e\varphi})_{21}} \quad (2.67)$$

Sisteme ait kütle atalet momentlerinin toplanması ile elde edilen eşdeğer kütle atalet momenti;

$$(J_{e\varphi})_1 = J_1 + J_{21} = J_1 + J_2 \left(\frac{1}{i_{12}} \right)^2 \quad (2.68)$$

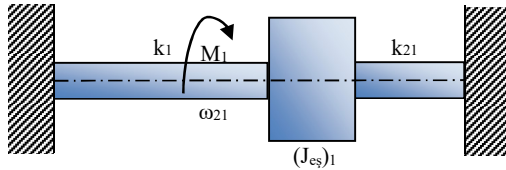
İkinci milin birinci mile indirgenmiş sisteme ilişkin hesaplanan Öz frekans (Doğal Frekans) aşağıdadır.

$$\omega_{21}^2 = \frac{(k_{e\varphi})_1}{(J_{e\varphi})_1} = \frac{k_2 + k_1(i_{12})^2}{J_2 + J_1(i_{12})^2} \quad (2.69)$$

Birinci milin ikinci mile indirgenmesi işlemleri aşağıdadır.

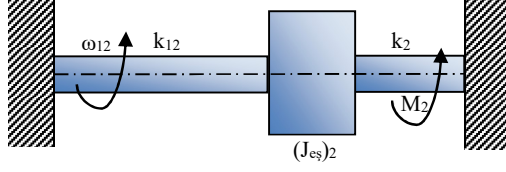
Denklem 2.56'da verilen ifadeleri denklem 2.70'de yerine konulursa;

$$E_{p12} = \frac{1}{2} k_{12} (\varphi_{12})^2 = \frac{1}{2} k_{12} \left(\frac{M_2}{k_{12}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(M_2)^2}{k_{12}} \quad (2.70)$$



Şekil 2.15. Birinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli

Şekil 2.15 ve Şekil 2.16'da farklı millere indirgenme işleminin matematiksel modellenmesi gösterilmiştir.



Şekil 2.16. İkinci Mile İndirgenmiş Sistemin Matematiksel Modeli

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1)^2 = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{M_1}{k_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(M_1)^2}{k_1} \quad (2.71)$$

$$k_{12} = k_1 i_{12}^2 ; \quad k_{es2} = k_2 + k_{12} = k_2 + k_1 i_{12}^2 \quad (2.72)$$

Denklem 2.57'de verilen ifadeleri denklem 2.73'de yerine konulursa;

$$E_{k12} = \frac{1}{2} J_{12} (\omega_{12})^2 ; \quad E_{k1} = \frac{1}{2} J_1 (\omega_1)^2 \quad (2.73)$$

$$J_{12} = J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 = J_1 i_{12}^2 \quad (2.74)$$

$$J_{es2} = J_2 + J_{12} = J_2 + J_1 i_{12}^2 \quad (2.75)$$

Birinci milin ikinci mile indirgenmiş sisteme ilişkin hesaplanan Öz frekans (Doğal Frekans) aşağıdadır.

$$\omega_{12}^2 = \frac{(k_{e\vartheta})_2}{(J_{e\vartheta})_2} = \frac{k_2 + k_1(i_{12})^2}{J_2 + J_1(i_{12})^2} \quad (2.76)$$

Sonuç olarak ; denklem 2.69 ve denklem 2.76 birbirine eşittir. Yani eş değer sistemlerin öz frekansları birbirine eşittir. ($\omega_{12} = \omega_{21} = \omega_{e\vartheta}$) Bu durumda, bulunan sonuçlardan hareket edilerek, 2 (iki) yay 2 (iki) kütleli sistem, tek yaylı tek kütleli eş değer sisteme dönüştürülmektedir.

$$k_{e\vartheta} = k_2 + k_1 i_{12}^2 ; \quad J_{e\vartheta} = J_2 + J_1 i_{12}^2 \quad (2.77)$$

$$\omega_{e\vartheta}^2 = \frac{(k_{e\vartheta})}{(J_{e\vartheta})} = \frac{k_2 + k_1(i_{12})^2}{J_2 + J_1(i_{12})^2} \quad (2.78)$$

Şekil 2.15'deki sistemi tek kütle, paralel bağlı 2 (iki) yay olarak düşünebiliriz.

$$k_{e\vartheta} = k_1 + k_{21} ; \quad J_{e\vartheta} = J_1 + J_{21} \quad (2.79)$$

$$\omega_{e\vartheta}^2 = \frac{k_1 + k_{21}}{J_1 + J_{21}} = \frac{k_1(i_{12})^2 + k_2}{J_1(i_{12})^2 + J_2} \quad (2.80)$$

Şekil 2.16'daki sistemi tek kütle, paralel bağlı 2 (iki) yay olarak düşünölebilmektedir.

$$\omega_{e\vartheta}^2 = \frac{k_2 + k_{12}}{J_2 + J_{12}} = \frac{k_2 + k_1(i_{12})^2}{J_2 + J_1(i_{12})^2} \quad (2.81)$$

Denklem 2.80 ve denklem 2.81'deki çevrim oranı (i_{12}), 1 (bir) olarak alınırsa,

$$\omega_{12}^2 = \omega_{21}^2 = \omega_{e\varphi}^2 = \frac{k_2 + k_1}{J_2 + J_1} = \frac{(\sum k)}{(\sum J)} \quad (2.82)$$

Çevrim oranını bir alınırsa ($i_{12} = 1$), burulma titreşimi yay katsayılarının ($k_1 = k_2$) birbirine eşit olduğunu varsaymak suretiyle denklem 2.82'de yerine konulursa,

$$\omega_{12}^2 = \omega_{21}^2 = \omega_{e\varphi}^2 = \frac{2k_1}{J_2 + J_1} = \frac{2k_2}{J_2 + J_1} = \frac{(\sum k)}{(\sum J)} \quad (2.83)$$

Çevrim oranını (i_{12}) 1 (bir) alınırsa, burulma titreşimi yay katsayılarının ($k_1 = k_2$) ve kütle atalet momentlerinin ($J_1 = J_2$) birbirine eşit olduğunu varsaymak suretiyle denklem 2.82'de yerine konulursa,

$$\omega_{12}^2 = \omega_{21}^2 = \omega_{e\varphi}^2 = \frac{2k_1}{2J_1} = \frac{2k_2}{2J_2} = \frac{(\sum k)}{(\sum J)} \quad (2.84)$$

Yukarıdaki parametrik hesaplamalardan da anlaşılacağı üzere, şekil 2.15 ve şekil 2.16'daki eş değer sistemlerde: Toplam enerji ($E_1 = E_2$) ve burulma titreşimi doğal frekansları $[(\omega_1 = \omega_2), (\omega_{12} = \omega_{21})]$ birbirine eşittir. Aşağıda bu belirtmiş olduğumuz hususu parametrik hesaplarla gösterilmektedir.

$$E_1 = E_{k1} + E_{p1} \quad E_2 = E_{k2} + E_{p2} \quad (2.85)$$

Şekil 2.15 ve şekil 2.16'daki eş değer sistemlerdeki burulma titreşimine ait toplam enerjinin parametrik gösterimi aşağıdadır.

$$E_1 = \frac{1}{2}(k_{e\varphi})_1(\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(J_{e\varphi})_1(\omega_1)^2 \quad (2.86)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(k_{e\varphi})_2(\varphi_2)^2 + \frac{1}{2}(J_{e\varphi})_2(\omega_2)^2 \quad (2.87)$$

Burulma açılarında $\varphi_1 = i_{12}\varphi_2$ burulma titreşimlerinin doğal frekansları $\omega_1 = i_{12}\omega_2$ arasında gösterildiği şekilde bir ilişki olduğu göz önünde tutulup, denklem 2.86 ve denklem 2.87’de yerine konulursa, sisteme ilişkin Toplam Enerji (E) yazılırsa;

$$E_1 = \frac{1}{2} \left[k_1 + \frac{k_2}{i_{12}^2} \right] \left(\frac{\varphi_1}{i_{12}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{J_2}{i_{12}^2} + J_1 \right] (\omega_1)^2 \quad (2.88)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \left[k_1 + \frac{k_2}{i_{12}^2} \right] \left(\frac{\varphi_1}{i_{12}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{J_2}{i_{12}^2} \left[J_1 i_{12}^2 + J_2 \right] \left(\frac{\omega_1}{i_{12}} \right)^2 \quad (2.89)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[k_2 + k_1 i_{12}^2 \right] (\varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \left[J_2 + J_1 i_{12}^2 \right] (\omega_2)^2 \quad (2.90)$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{i_{12}} ; \omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{12}} \quad (2.91)$$

Denklem 2.91’deki ifadeler denklem 2.90’da yerine konulursa;

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[k_1 + \frac{k_2}{i_{12}^2} \right] \left(\frac{\varphi_1}{i_{12}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{J_2}{i_{12}^2} \left[J_1 i_{12}^2 + J_2 \right] \left(\frac{\omega_1}{i_{12}} \right)^2 \quad (2.92)$$

$E_1 = E_2$ eşitliğinden;

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_{12}^2 = \omega_{21}^2 = \frac{(k_{\text{es}})}{(J_{\text{es}})} = \frac{k_2 + k_1 (i_{12})^2}{J_2 + J_1 (i_{12})^2} \quad (2.93)$$

bulunur.

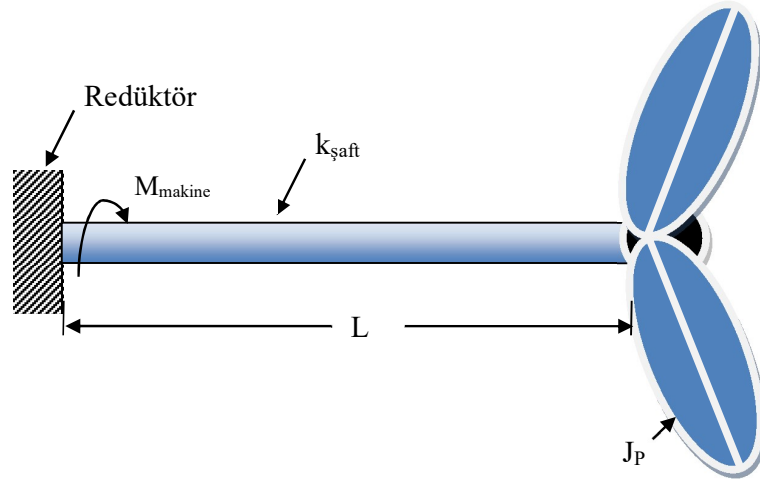
Yukarıda yapılan hesaplamalar ile; birinci veya ikinci mile indirgeme yapıldığında aynı sonuçlar elde edilir. Pervane şaftına indirgeme yapılması hesapları

kolaylaştırır. Şunu da ifade etmek mümkündür; tüm burulma sistemini herhangi bir mile indirgeme yapılarak aynı sonuç elde edilebilir. Ancak, pervane şaftı haricindeki diğer millere indirgemelerde hesaplamalarda hata yapma ihtimali yüksektir.

Mekanik titreşimler konusunda şu hususu önemle belirtmek gerekir; Radyal (öteleme), torsiyonel (burulma) titreşimlerinin serbestlik derecelerine göre elde edilen hareketlerin diferansiyel denklemleri ve çözümleri aynı formdadır. Bundan dolayı aynı matematik modele sahip titreşim sistemleri “Analog-Benzer” mekanik sistemler olarak bilinir. Öteleme veya burulma titreşimleri için elde edilen tüm denklemler, parametreler değiştirilerek kullanılabilir. İleride anlatılacak öteleme titreşimleri için elde edilen denklemlerde burulma titreşim parametreleri yerine konularak “2 (iki) yay 2 (iki) kütle” matematiksel model çözümleri elde edilecektir.[8]

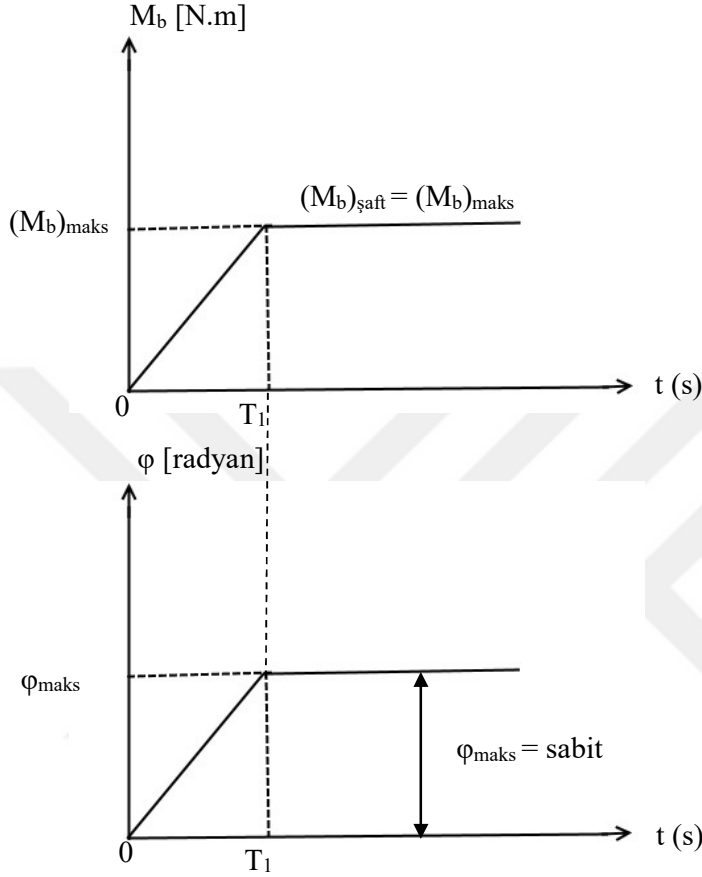
2.3. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı Birinci Model Sisteme Ait Pervane Şaftında Zorlayıcı Momentin Değişimleri Ve Zorlanmış Titreşimler

Aşağıdaki Şekil 2.17’ de ana makine tarafından moment uygulanan bir şaftın zorlanmış burulma titreşimine ait parametrik hesaplar yapılacaktır.



Şekil 2.17. Motor, Redüktör, Şaft ve Pervane Parçalarından Oluşan Gemi Tahrik Sistemine Ait Matematiksel Modeli

Gemi tam yol sabit hızla rotasında giderse, Şekil 2.18.’de gösterilen moment diyagramı söz konusudur ve ϕ burulma açısı sabit değerdedir.



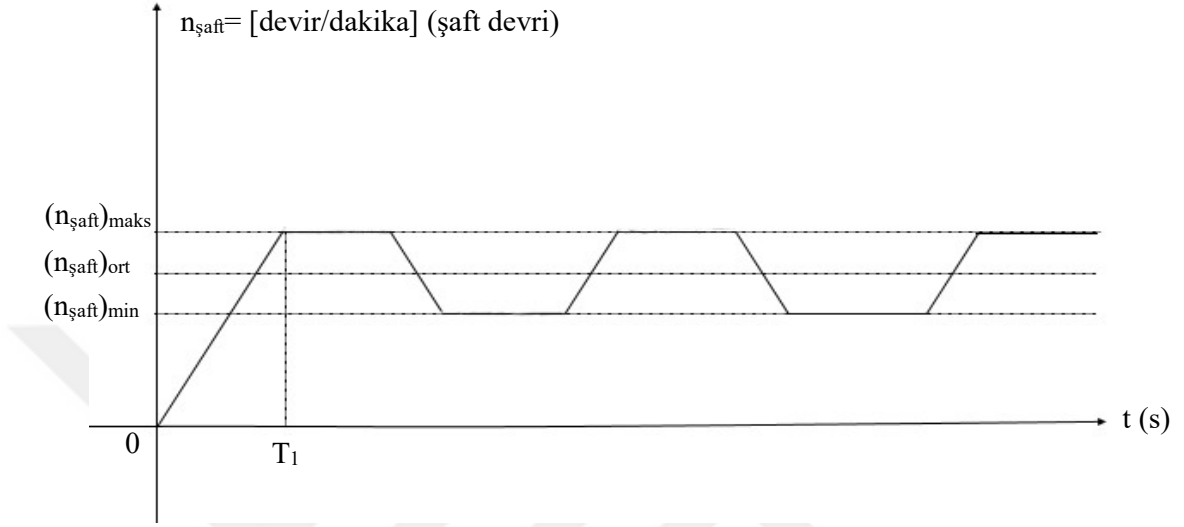
Şekil 2.18. Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Momenti (M)- Zaman (t) ve Burulma Açısı(ϕ)-Zaman (t) Grafikleri

Aşağıda verilen denklemlerde, Şekil 2.17' deki sistemde, ana makine tarafından sağlanan güç (P), devir sayısı (n), döndürme momenti (M) ve verim (τ) arasındaki ilişki gösterilmektedir.

$$(M_b)_{maks} [N.m] = 9550 \frac{P_{saft}}{n_{saft}} \quad (2.94)$$

$$(P_{saft}) = \eta_{toplam} P_{motor} \quad (2.95)$$

Şaftın devir sayısı (yani geminin hızı) değiştirilmek mecburiyetinde olduğu devir sayısı [$(n_{\text{şaft}})_{\text{maks}}$ ve $(n_{\text{şaft}})_{\text{min}}$] ve zaman (t) arasındaki ilişki Şekil 2.19’da gösterilmiştir.

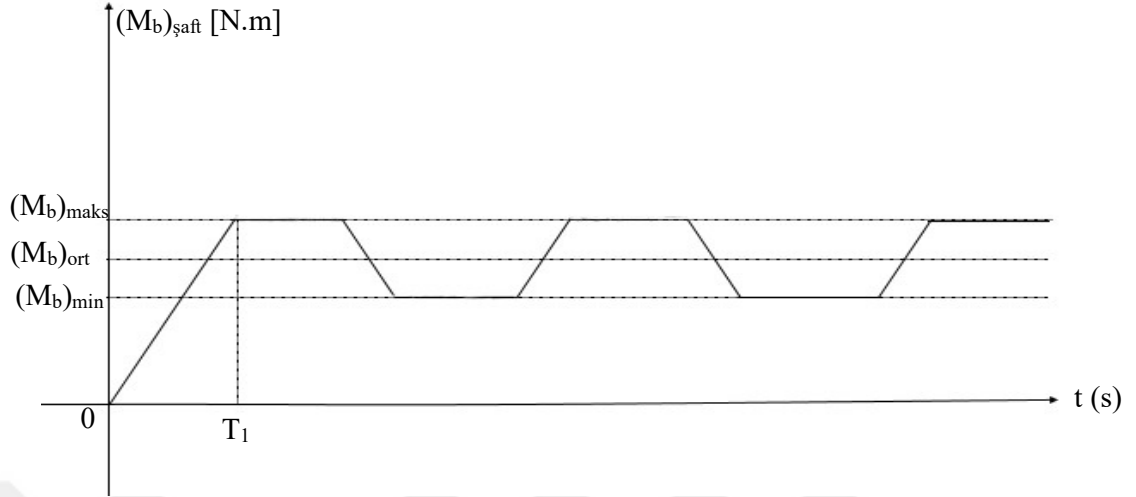


Şekil 2.19. Zorlanmış Titreşime Ait Makine Devri- Zaman Grafiği

$$n_{ort} = \frac{n_{maks} + n_{min}}{2} \Rightarrow (\text{ortalama devir}) \quad (2.96)$$

$$n_g = \frac{n_{maks} - n_{min}}{2} \Rightarrow (\text{genlik devri}) \quad (2.97)$$

Denklem 2.94 ve denklem 2.95 irdelenirse, ana makinenin devir sayısında ($n_{\text{şaft}}$) değişme olması durumunda, şaftta oluşan burulma momenti $(M_b)_{\text{şaft}}$ de değişmektedir. Bu değişime ilişkin grafik Şekil 2.19.’da gösterilmektedir.



Şekil 2.20. Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Momenti (M)- Zaman (t) Grafiği

$$M_{ort} = \frac{M_{maks} + M_{min}}{2} \Rightarrow (\text{ortalama burulma momenti}) \quad (2.98)$$

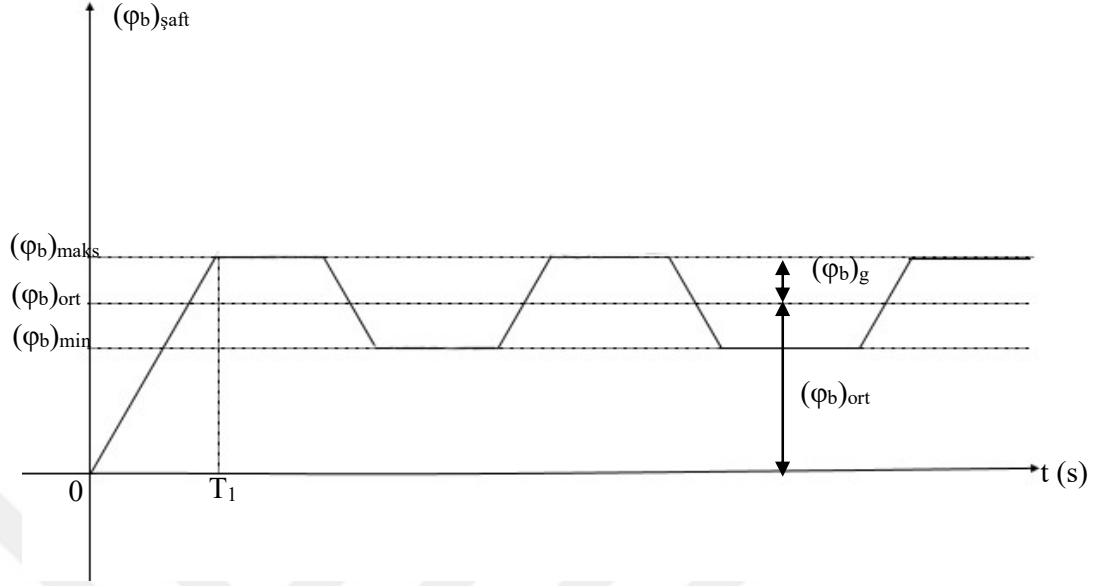
$$M_g = \frac{M_{maks} - M_{min}}{2} \Rightarrow (\text{genlik burulma momenti}) \quad (2.99)$$

Aşağıda burulma açısı ile burulma momenti arasındaki ilişki gösterilmektedir.

$$\varphi_b = \frac{M_g}{(k_b)_{eş} - J_{eş} \omega_b^2} e^{i\omega_b t} \Rightarrow \varphi_{maks} = \frac{M_g}{(k_b)_{eş} - J_{eş} \omega_b^2} \quad (2.100)$$

$$\varphi_b = \varphi_{maks} e^{i\omega_b t} \text{ ve ya } \varphi_b = \varphi_{maks} \sin \omega_b t \quad (2.101)$$

Burulma açısının (φ_b) zaman ile değişim diyagramı aşağıdaki Şekil 2.21.'de gösterilmektedir.



Şekil 2.21. Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Açısı - Zaman Grafiği

Aşağıdaki parametrik hesaplamalar ile, şaftın yapımında kullanılan malzemeye yönelik, güvenli burulma açısının bulunması için gerekli işlemler yapılmaktadır. Yapılan güvenilirlik hesaplamaları ile şaftın kırılmadan çalışabileceği devir sayılarının tespiti ve bu devirlerde çalışması durumunda şaftın kullanım ömrü öngörülebilmektedir.[17]

$$(\varphi_b)_{maks} = (\varphi_b)_{ort} + (\varphi_b)_g \quad (2.102)$$

Denklem 2.102'deki ifadeler mukavemetten ve güvenilirlik hesaplamalarından elde edilmektedir.

$$(\varphi_b)_{ort} = \frac{(M_b)_{ort}}{(k_b)_{eş}} \quad (2.103)$$

Denklem 2.104, zorlanmış burulma titreşimindeki, gerilme momenti ile burulma açısındaki ilişki gösterilmektedir.

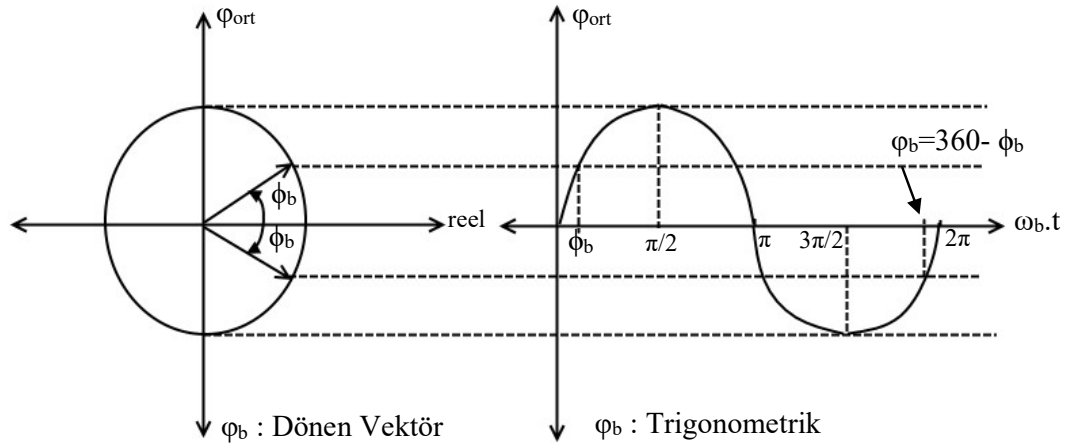
$$\varphi_b = \frac{M_g}{(k_b)_{e\varphi} - J_{e\varphi} \omega_b^2} e^{i\omega_b t} \Rightarrow \varphi_{maks} = \frac{M_g}{(k_b)_{e\varphi} - J_{e\varphi} \omega_b^2} \quad (2.104)$$

$$\omega_{ort} = \frac{(\omega_b)_{maks} + (\omega_b)_{min}}{2} \quad (2.105)$$

Ana makine çalışma devirleri ile çalışma frekansı arasındaki ilişki aşağıda gösterilmektedir.

$$(\omega_b)_{maks} = \frac{\pi n_{maks}}{30} ; \quad (\omega_b)_{min} = \frac{\pi n_{min}}{30} \quad (2.106)$$

Trigonometrik düzlemde burulma açısının (φ_{ort}) değişimi grafik olarak Şekil 2.22'de gösterilmektedir.



Şekil 2.22. Vektörel Düzlemde Zorlanmış Titreşime Ait Burulma Açısı (φ)-Zaman (t) Grafiği

Aşağıdaki denklem 2.107'de zorlanmış burulma titreşimi yapan bir sistemin burulma açısına ait parametrik denklem gösterilmektedir.

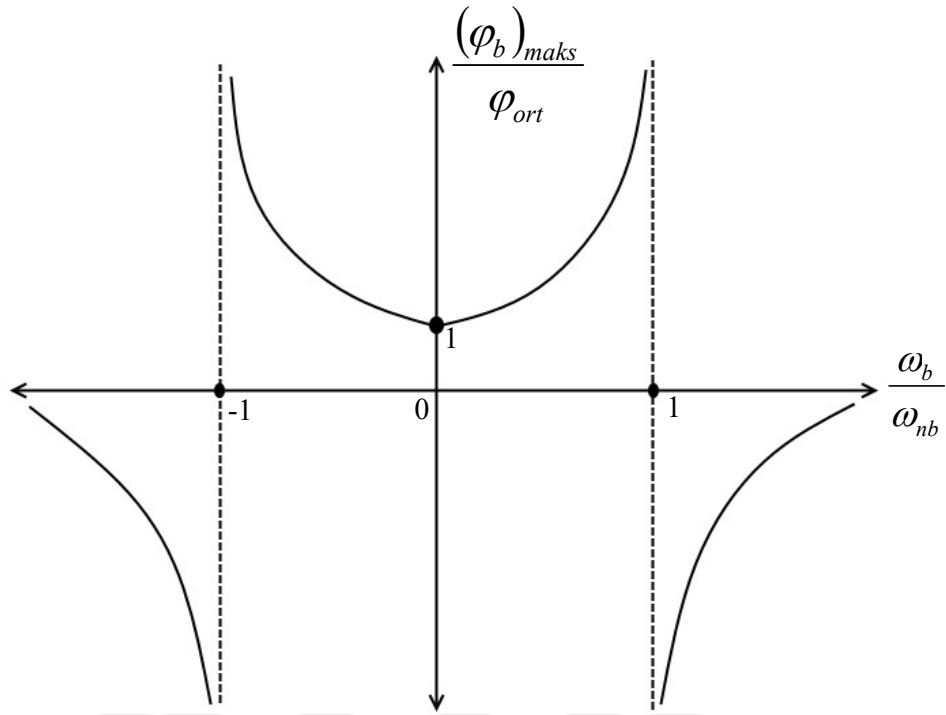
$$\varphi_b = \frac{M_g}{(k_b)_{e\varphi} - J_{e\varphi} \omega_b^2} = \frac{M_g}{(k_b)_{e\varphi}} \frac{1}{1 - \frac{J_{e\varphi}}{(k_b)_{e\varphi}} \omega_b^2} \quad (2.107)$$

Denklem 2.108 ve 2019'da zorlanmış burulma titreşim yapan bir şaftın emniyetli bir şekilde çalışabileceği burulma açısına ait konstrüksiyon güvenilirlik hesaplamaları gösterilmektedir.

$$(\varphi_b)_{maks} = \frac{M_g}{(k_b)_{e\varphi}} \frac{1}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2}} \quad (2.108)$$

$$\omega_{nb}^2 = \frac{(k_b)_{e\varphi}}{J_{e\varphi}} \Rightarrow (\varphi_b)_{maks} = \varphi_{ort} \frac{1}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2}} \quad (2.109)$$

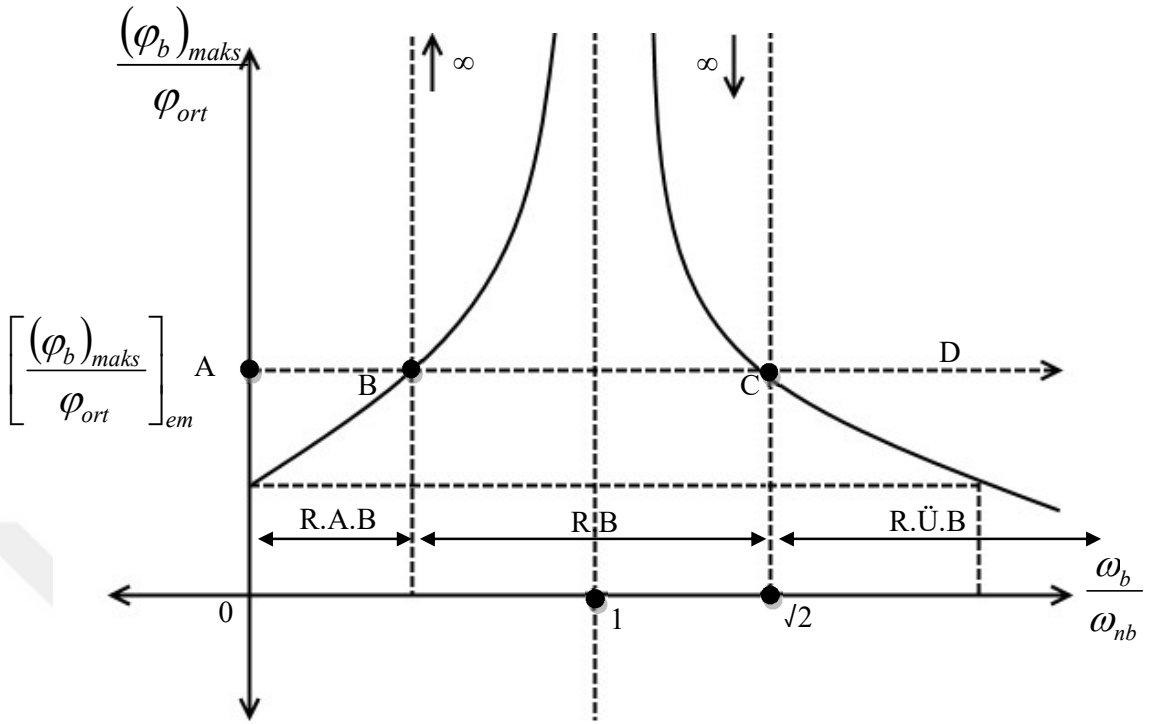
Eğer, ana makinenin çalışma frekansının, sistemin burulma titreşiminin doğal frekansına eşit olması ($\omega_b = \omega_{nb}$) durumunda olursa; denklem 2.109' un sonucu sonsuza gitmektedir. $[(\varphi_b)_{maks} = \infty]$ Bu durum, tam rezonans durumudur. Şaft bu durumda kırılacaktır. Denklem 2.109 ait grafik aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 2.23. Denklem 2.109'a Ait Grafik

$$\frac{(\varphi_b)_{maks}}{\varphi_{ort}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2}}, \quad \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2} = 1 \quad (2.110)$$

Denklem 2.110'da ve şekil 2.23'de $\frac{\omega_b}{\omega_{nb}} = \pm 1$; durumu gemi şaftının (\pm) dönme yönünü göstermektedir ve denklem 2.110'un grafiği ordinat eksenine göre simetrik eğri vermektedir. Denklem 2.110'nun grafiği ve mühendislikte kullanım tarzı (çizimi) şekil 2.24'de gösterilmektedir.



Şekil 2.24. Burulma Açısının Rezonans Bölgesi Altında ve Üstündeki Değişmelere İlişkin Grafik

Yukarıdaki şekil 2.24’de yaklaşık olarak burulma açıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\left[\frac{(\varphi_b)_{maks}}{\varphi_{ort}} \right] < 0,80 \quad \text{ise} \quad \mathbf{R.A.B} : \text{Rezonans Altı Bölgesi}$$

$$0,80 < \left[\frac{(\varphi_b)_{maks}}{\varphi_{ort}} \right] < 1,25 \quad \text{ise} \quad \mathbf{R.B} : \text{Rezonans Bölgesi}$$

$$1,25 < \left[\frac{(\varphi_b)_{maks}}{\varphi_{ort}} \right] \quad \text{ise} \quad \mathbf{R.Ü.B} : \text{Rezonans Üstü Bölgesi}$$

$$\frac{(\varphi_b)_{maks}}{\varphi_{ort}} = (\varphi_b)_{em} = \left[\frac{(\varphi_b)_{maks}}{\varphi_{ort}} \right]_{em} \quad (2.111)$$

$(\varphi_b)_{em}$: Gemi şaftları için emniyetli burulma açısıdır. Standartlarda mevcuttur.

Şekil 2.24. 'de;

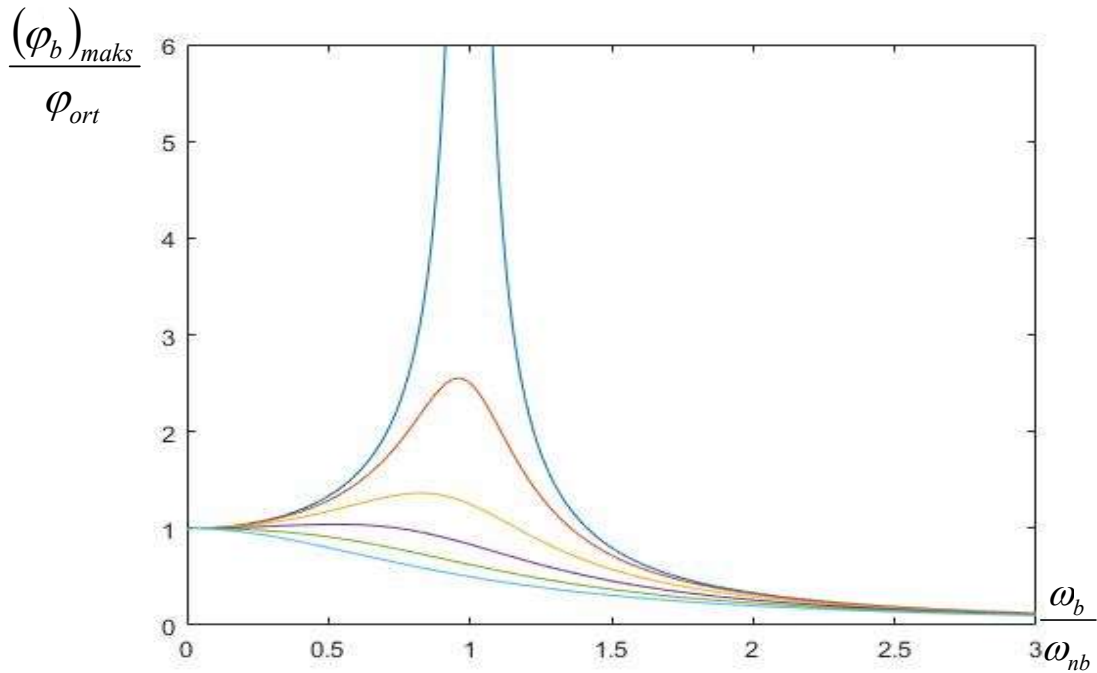
\overline{AB} Bölgesi, Rezonans Altı Bölgesi (R.A.B)

\overline{BC} Bölgesi, Rezonans Bölgesi (R. B)

\overline{CD} Bölgesi, Rezonans Üstü Bölgesi (R.Ü.B)

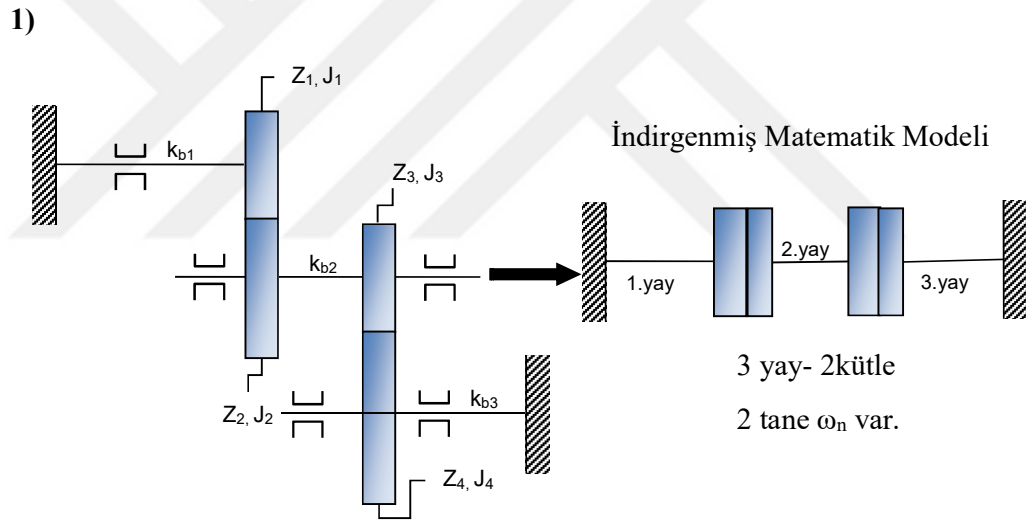
Şaft devirlerinin değişmesi R.A.B ve R.Ü.B de olursa, problem yoktur. Fakat Rezonans Bölgesi (R.B) içinde kesinlikle olmamalıdır. Şaftın bu bölgede çalışması durumunda, şaft bir süre sonra kırılacaktır.

Yukarıdaki hesaplamalar ile tek yay-tek kütle sistemleri için oluşturulan "Matematiksel Model"e ait matematik değerlendirmeler yapılmıştır. Ayrıca, matematiksel modelde zorlanma titreşimlerinde Şekil 2.24.'dekine benzer çizim ile 2 (iki) tane REZONANS BÖLGESİ elde edilebilmektedir.



Şekil 2.25. Farklı Burulma Açılarına Sahip Sistemlerin Rezonans Bölgesi Altındaki ve Üstündeki Değişmelere İlişkin Grafik

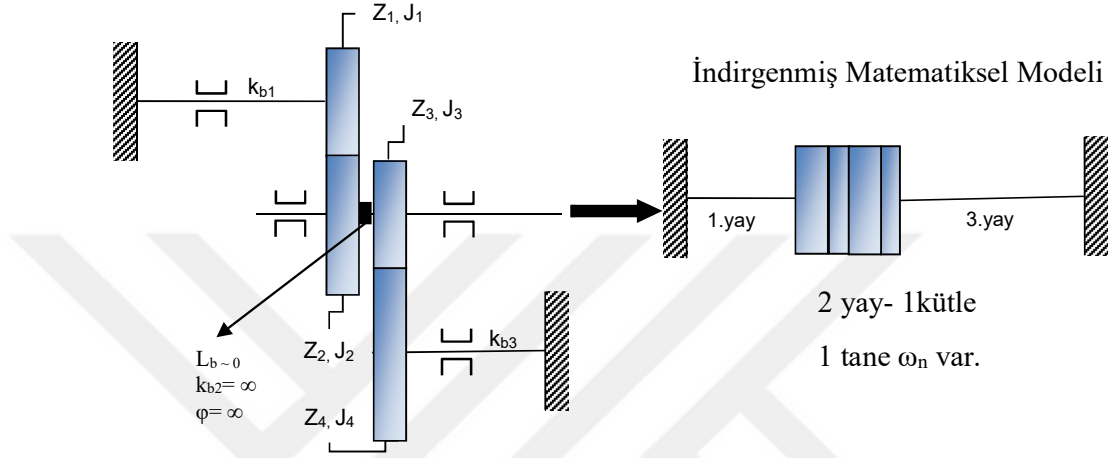
Şekil 2.24 ve şekil 2.25’de belirtilen rezonans durumları ile karşılaşılması için, gemi sevk sistemlerinin tasarımı bazı düzenlemelere gidilmektedir. Aşağıdaki, şekil 2.26 ve şekil 2.27’de verilen dişli kutularında (Redüktörlerde) da burulma titreşimine ait doğal frekansların, ana makinenin çalışma frekans aralığı ile rezonans durumuna geçmemesi amacıyla yapılacak tasarımsal değişiklikler gösterilmektedir. Öncelikle şekil 2.26’daki sisteme ilişkin olarak iki adet burulma titreşimi doğal frekansının olduğu yani iki serbestlik derecesine sahip bir sistem olduğu görülmektedir. Şekil 2.27’de belirtilen sistemde, yapılan küçük bir tasarım değişikliği ile sistemin burulma titreşimine ilişkin doğal frekansı bire düşmüş ve tek serbestlik derecesine sahip olmuştur. Bu sayede, ana makinenin çalışma frekans aralığı ile, sistemin doğal frekansının çakışarak rezonans durumuna geçme olasılığı azalmaktadır.



Şekil 2.26. 3 Yay ve 2 Kütle Sisteminin Matematiksel Modeli

Yukarıdaki Şekil 2.26’da makine, redüktör ve mil sisteminin iki farklı rezonans frekansı (ω_n) bölgesi bulunmaktadır. Bu tasarımın rezonans bölgelerinde çalışma ihtimali yüksektir. Sistem verimli olarak çalışmayacaktır. Rezonans bölgesinde çalışma daha sık olacağından dolayı, sistem; öngörülen çalışma süresinden daha az bir süre çalıştıktan sonra arızalanacaktır.

2) Rezonans durumunun ortadan kaldırılması maksadıyla, Z_2 ve Z_3 dişlisi arasındaki mesafe çok küçük olacak şekilde (tek pare olarak) aşağıdaki gibi imal edilebilir.



Şekil 2.27. 3 Yay ve 2 Kütle Sisteminin Matematiksel Modeli

$$\left. \begin{array}{l} k_{b2} = \infty \\ \varphi_b = \infty \end{array} \right\} k_{b2} = \frac{G_b I_b}{L_b} = \infty \quad (2.112)$$

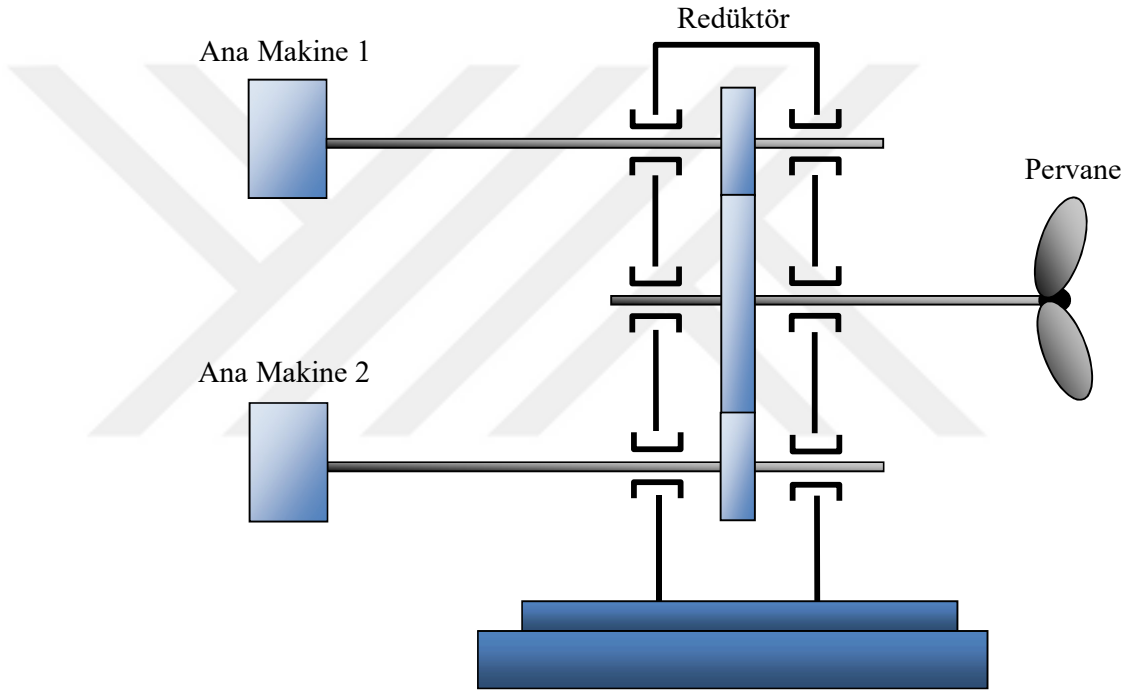
$$(M_b) = k_{b2} \varphi_b \Rightarrow \varphi_b = \frac{(M_b)}{\infty} = 0 \quad (2.113)$$

Yukarıdaki Şekil 2.27’de makine, redüktör ve mil tasarımının bir tane rezonans frekansı (ω_n) bölgesi bulunmaktadır. Bu sistemde, Z_2 ve Z_3 dişlisi arasındaki mil kaldırılarak dişliler tek pare hale getirilmiştir. Bu tasarım ile sistemin tek rezonans bölgesine sahip olması sağlanmıştır. Bu sayede sistemin daha verimli bir şekilde çalıştırılması sağlanmıştır.

2.4. İki Ana Makineden Oluşan Gemi Tahrik Sistemlerinin (Zorlanmış Titreşim) Parametrik Hesaplamaları

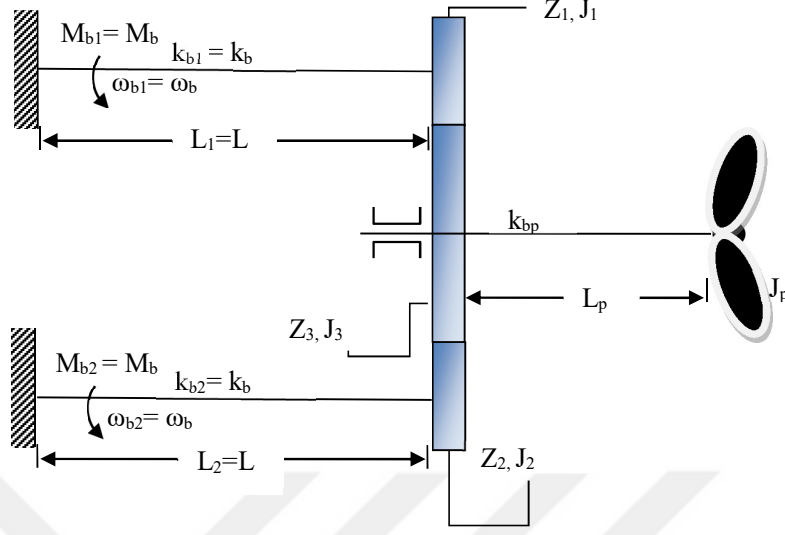
Pervane şaftına tahrik makinelerinden verilen döndürme momentleri aynı frekansta olmak mecburiyetindedir. Fakat bu durum pratikte tam olarak

gerçekleştirilememektedir. Bu durumda zorlanmış burulma titreşimleri bileşke momente göre elde edilmektedir. Bahse konu durumu anlatan sistem şekil 2.28’de gösterilmektedir. İlerleyen kısımlarda Şekil 2.28’deki gemi sevk sisteminin matematiksel modeli çıkartılarak, zorlanmış burulma titreşimine ait hareket denklemlerinin, farklı çalışma momentlerine ve frekanslarına göre parametrik hesaplamaları yapılacaktır. Matematiksel modeli çıkartılan sistemin burulma titreşiminin doğal frekansları bulunacaktır.



Şekil 2.28. İki Ana Makineden ve Bir Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeli

Şekil-2.28’deki Ana Makinelerin Frekansları ve tahrik güçleri aynı olması durumunda ($\omega_{b1} = \omega_{b2} = \omega_b$), ($P_1 = P_2 = P$ veya $M_{b1} = M_{b2} = M_b$); şekil 2.28’deki sistemin matematiksel modeli şekil 2.29’da gösterildiği gibidir.



Şekil 2.29. İki Ana Makineden ve Bir Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeline Ait Matematiksel Model

Millere uygulanan momentlerin matematiksel gösterimi aşağıdadır.

$$M_{b1} = M_b e^{i(\omega_b t + \phi_1)} \quad (2.114)$$

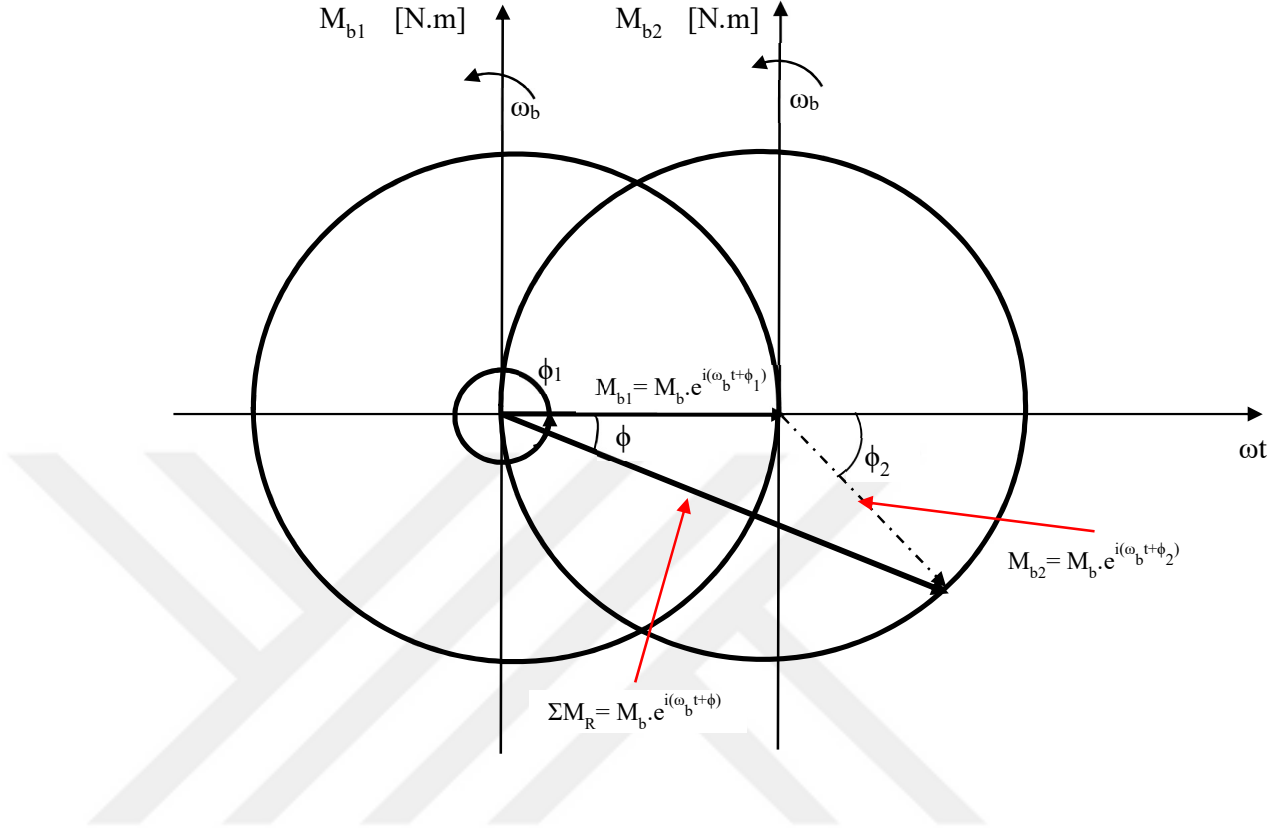
$$M_{b2} = M_b e^{i(\omega_b t + \phi_2)} \quad (2.115)$$

Yukarıdaki momentlerin oluşturduğu bileşke moment $(\sum M_R)$ aşağıdadır.

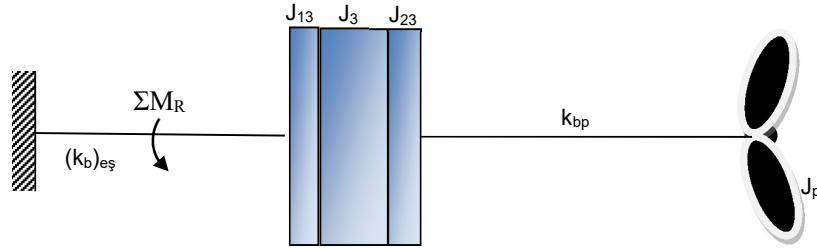
$$\sum M_R = M_{b1} + M_{b2} = M_b e^{i(\omega_b t + \phi_1 + \phi_2)} \quad (2.116)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (2.117)$$

$$\sum M_R = M_b e^{i(\omega_b t + \phi)} \quad (2.118)$$



Şekil 2.30. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi



Şekil 2.31. İndirgenmiş Matematiksel Modeli

Şekil 2.31’de pervane şaftına yapılan indirgeme işlemine istinaden, millere ait yay katsayılarının indirgemesi yapılarak toplam yay katsayısı elde edilmiştir.

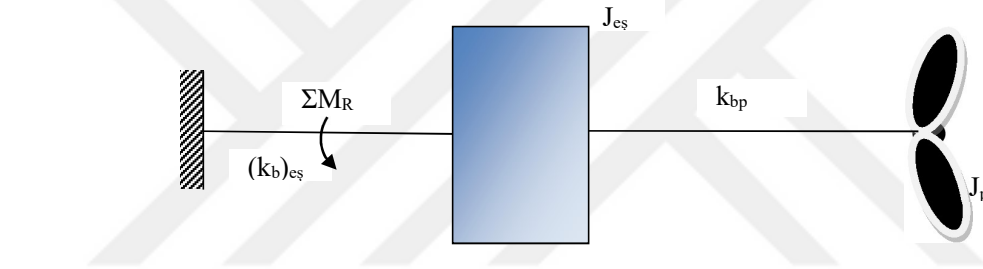
$$(k_b)_{eş} = k_{b13} + k_{b23} = k_{b1}i_{13}^2 + k_{b2}i_{23}^2 \quad (2.119)$$

$$(k_b)_{e\vartheta} = k_{b1} \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 + k_{b2} \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 \quad (2.120)$$

Şekil 2.31’de pervane şaftına yapılan indirgeme işlemine istinaden, dişli çarklara ait kütle atalet momentlerinin indirgemesi yapılarak toplam kütle atalet momenti elde edilmiştir.

$$(J)_{e\vartheta} = J_{13} + J_{23} + J_3 = J_1 i_{13}^2 + j_2 i_{23}^2 + J_3 \quad (2.121)$$

$$(J)_{e\vartheta} = J_1 \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 + j_2 \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 + J_3 \quad (2.122)$$



Şekil 2.32. İndirgenmiş Matematiksel Model

Şekil 2.32’deki matematik modele ait burulma titreşimi doğal frekansı denklem 2.123’de verilmektedir.

$$\omega_{nb1, nb2}^2 = \Lambda_{nb1, nb2} = - \left[\frac{(k_b)_{e\vartheta} + k_{bp}}{J_{e\vartheta}} + \frac{k_{bp}}{J_P} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{(k_b)_{e\vartheta} + k_{bp}}{J_{e\vartheta}} + \frac{k_{bp}}{J_P} \right]^2 - 4 \frac{(k_b)_{e\vartheta} k_{bp}}{J_{e\vartheta} J_P}} \quad (2.123)$$

Sistemin toplam kütle atalet momenti aşağıdadır.

$$\frac{1}{[(J)_{e\vartheta}]_T} = \frac{1}{(J)_{e\vartheta}} + \frac{1}{J_P} \quad (2.124)$$

Sistemin toplam burulma titreşimi yay katsayısı aşağıdadır.

$$\left[(k_b)_{eş} \right]_T = (k_b)_{eş} + k_{bP} \quad (2.125)$$

Şekil 2.32 İndirgenmiş Matematiksel Modele ilişkin olarak oluşan burulma açısının parametrik hesabı aşağıdadır.

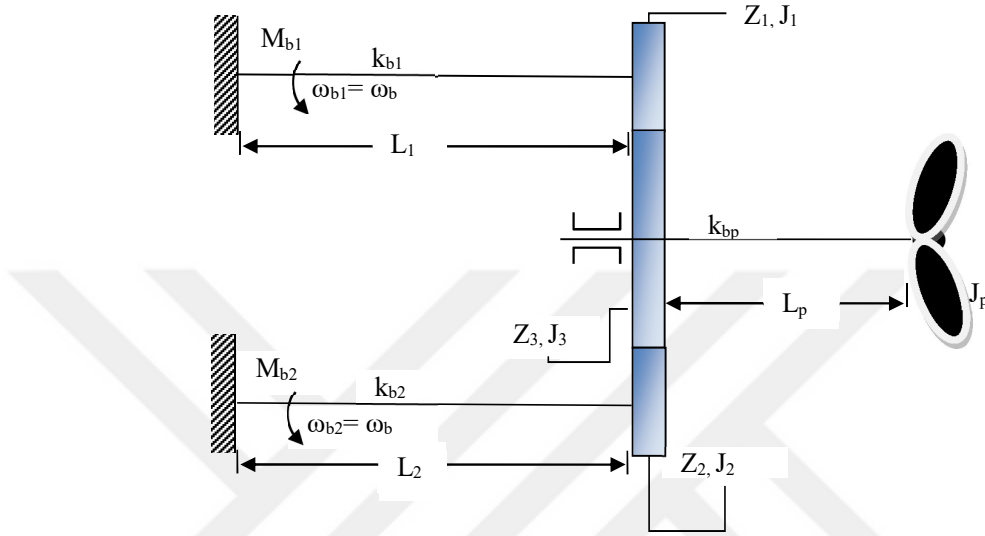
$$[\varphi]_T = \frac{M_b}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T - \left[(J)_{eş} \right]_T \omega_b^2} e^{i(\omega_b t + \phi)} = \frac{\frac{M_b}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T} e^{i(\omega_b t + \phi)}}{1 - \frac{\left[(J)_{eş} \right]_T}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T} \omega_b^2} \quad (2.126)$$

$$\frac{M_b}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T} = \varphi_R \quad , \quad \frac{\left[(J)_{eş} \right]_T}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T} = \frac{1}{(\omega_{nb})^2} \quad (2.127)$$

Sistemin emniyet dahilinde burulabileceği burulma açısı aşağıdadır.

$$[\varphi]_T = \frac{\varphi_R}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2}} e^{i(\omega t + \phi)} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{[\varphi]_T}{\varphi_R} \right]_{em} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2}} e^{i(\omega t + \phi)} \quad (2.128)$$

Şekil-2.25'deki Ana Makinelerin Frekansları aynı ve tahrik güçleri farklı olması durumunda ($\omega_{b1} = \omega_{b2} = \omega_b$), ($P_1 \neq P_2$ veya $M_{b1} \neq M_{b2}$); şekil 2.28'deki sistemin matematiksel modeli şekil 2.33'de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.33. İki Ana Makineden ve Bir Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeline Ait Matematiksel Model

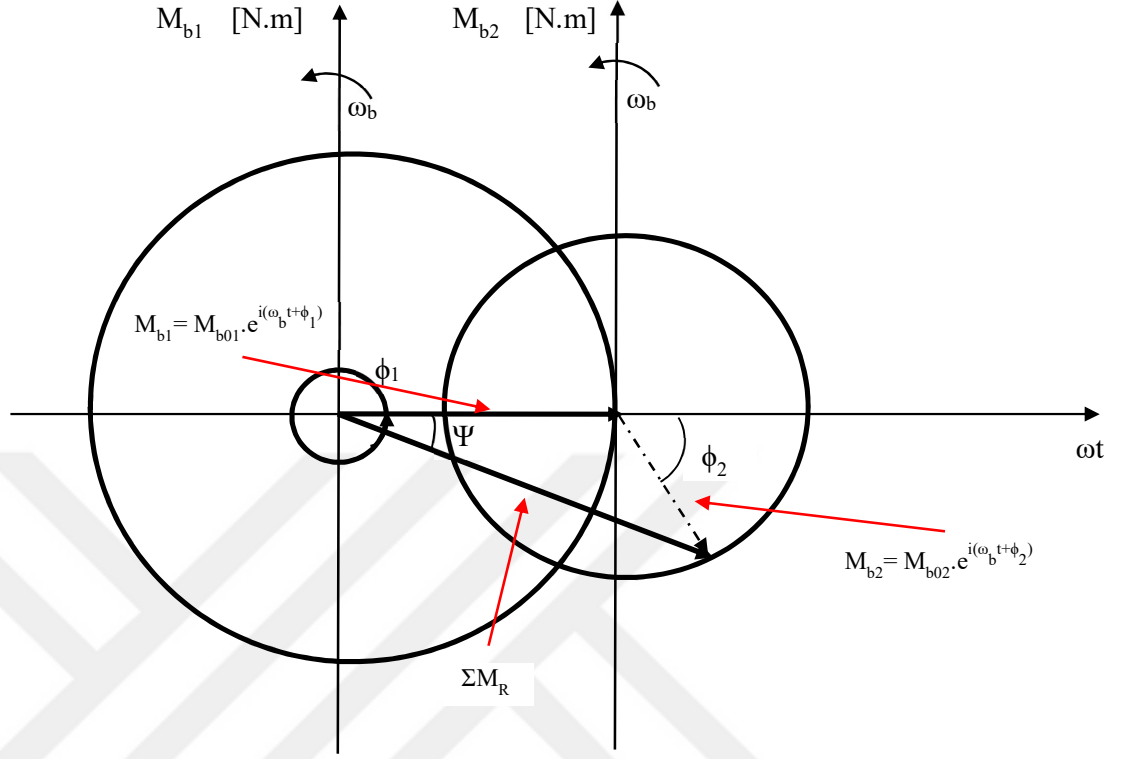
Millere uygulanan momentlerin matematiksel gösterimi aşağıdadır.

$$M_{b1} = M_{b01} e^{i(\omega_b t + \phi_1)} \quad (2.129)$$

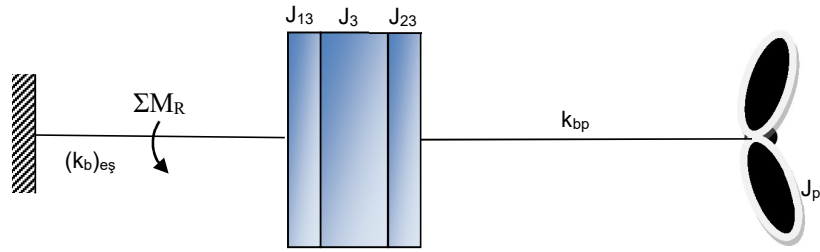
$$M_{b2} = M_{b02} e^{i(\omega_b t + \phi_2)} \quad (2.130)$$

Yukarıdaki momentlerin oluşturduğu bileşke moment ($\sum M_R$) aşağıdadır.

$$\sum M_R = M_{b1} + M_{b2} = e^{i\omega_b t} [M_{b01} e^{i\phi_1} + M_{b02} e^{i\phi_2}] \quad (2.131)$$



Şekil 2.34. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi



Şekil 2.35. İndirgenmiş Matematiksel Model

Şekil 2.35’de pervane şaftına yapılan indirgeme işlemine istinaden, millere ait yay katsayılarının indirgenmesi yapılarak toplam yay katsayısı elde edilmiştir.

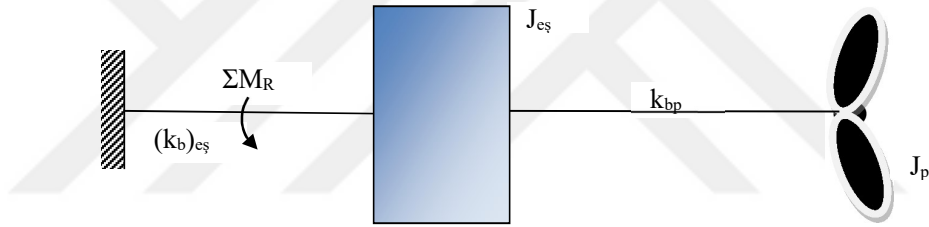
$$(k_b)_{eş} = k_{b13} + k_{b23} = k_{b1}i_{13}^2 + k_{b2}i_{23}^2 \quad (2.132)$$

$$(k_b)_{e\vartheta} = k_{b1} \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 + k_{b2} \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 \quad (2.133)$$

Şekil 2.35’de pervane şaftına yapılan indirgeme işlemine istinaden, dişli çarklara ait kütle atalet momentlerinin indirgemesi yapılarak toplam kütle atalet momenti elde edilmiştir.

$$(J)_{e\vartheta} = J_{13} + J_{23} + J_3 = J_1 i_{13}^2 + J_2 i_{23}^2 + J_3 \quad (2.134)$$

$$(J)_{e\vartheta} = J_1 \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 + J_3 \quad (2.135)$$



Şekil 2.36. İndirgenmiş Matematiksel Model

Şekil 2.32’deki matematik modele ait burulma titreşim doğal frekansı denklem 2.136’da verilmektedir.

$$\omega_{nbl,nb2}^2 = \Lambda_{nbl,nb2} = - \left[\frac{(k_b)_{e\vartheta} + k_{bp}}{J_{e\vartheta}} + \frac{k_{bp}}{J_P} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{(k_b)_{e\vartheta} + k_{bp}}{J_{e\vartheta}} + \frac{k_{bp}}{J_P} \right]^2 - 4 \frac{(k_b)_{e\vartheta} k_{bp}}{J_{e\vartheta} J_P}} \quad (2.136)$$

Sistemin toplam burulma titreşimi kütle atalet momenti;

$$\frac{1}{[(J)_{e\vartheta}]_T} = \frac{1}{(J)_{e\vartheta}} + \frac{1}{J_P} \quad (2.137)$$

Sistemin toplam burulma titreşimi yay katsayısı;

$$\left[(k_b)_{eş} \right]_T = (k_b)_{eş} + k_{bP} \quad (2.138)$$

Şekil 2.36 İndirgenmiş Matematiksel Modele ilişkin olarak oluşan burulma açısının parametrik hesabı aşağıdadır.

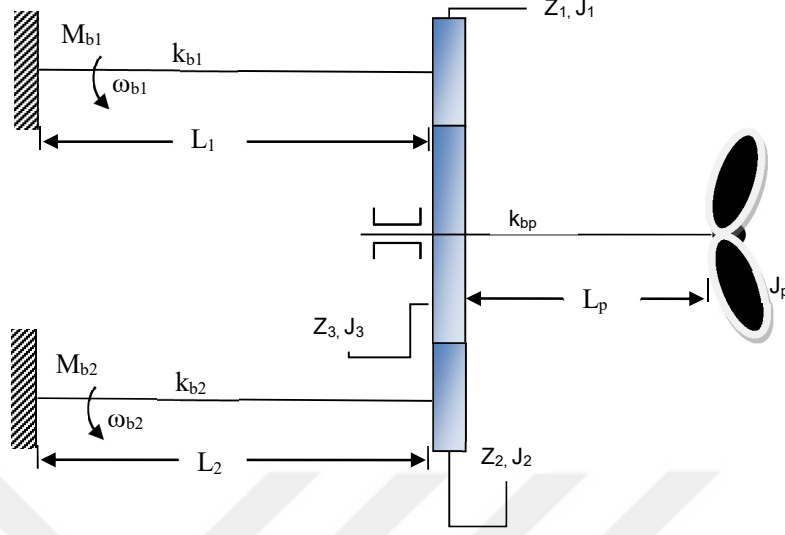
$$[\varphi]_T = \frac{[M_{b01} e^{i\phi_1} + M_{b02} e^{i\phi_2}]}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T - [(J)_{eş}]_T \omega_b^2} e^{i(\omega_b t + \psi)} = \frac{[M_{b01} e^{i\phi_1} + M_{b02} e^{i\phi_2}] = \sum M_R}{1 - \frac{[(J)_{eş}]_T}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T} \omega_b^2} e^{i(\omega_b t + \psi)} \quad (2.139)$$

$$\frac{\sum M_R}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T} = \varphi_R \quad , \quad \frac{[(J)_{eş}]_T}{\left[(k_b)_{eş} \right]_T} = \frac{1}{(\omega_{nb})^2} \quad (2.140)$$

Sistemin emniyet dahilinde burulabileceği burulma açısı aşağıdadır.

$$[\varphi]_T = \frac{\varphi_R}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2}} e^{i(\omega_b t + \psi)} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{[\varphi]_T}{\varphi_R} \right]_{em} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_{nb}^2}} e^{i(\omega_b t + \psi)} \quad (2.141)$$

Şekil-2.25'deki Ana Makinelerin Frekansları ve tahrik güçleri farklı olması durumunda ($\omega_{b1} \neq \omega_{b2}$), ($P_1 \neq P_2$ veya $M_{b1} \neq M_{b2}$); şekil 2.28'deki sistemin matematiksel modeli şekil 2.37'de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.37. 2 Ana Makineden ve 1 Redüktör Sisteminden Oluşan Gemi Tahrik Modeline Ait Matematik Model

Millere uygulanan momentlerin matematiksel gösterimi aşağıdadır.

$$M_{b1} = M_{b01} e^{i\omega_{b1}t} \quad (2.142)$$

$$M_{b2} = M_{b02} e^{i\omega_{b2}t} \quad (2.143)$$

Ana makinelerin çalışma frekansları arasındaki fark aşağıdadır.

$$\Delta\omega = \omega_{b2} - \omega_{b1} \quad (2.144)$$

Şekil 2.37'deki sisteme ait bileşke moment aşağıdadır.

$$\sum M = M_R e^{i\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} \quad (2.145)$$

$$M_R = \sqrt{(M_{b01})^2 + 2M_{b01}M_{b02} \cos(\Delta\omega t) + (M_{b02})^2} \quad (2.146)$$

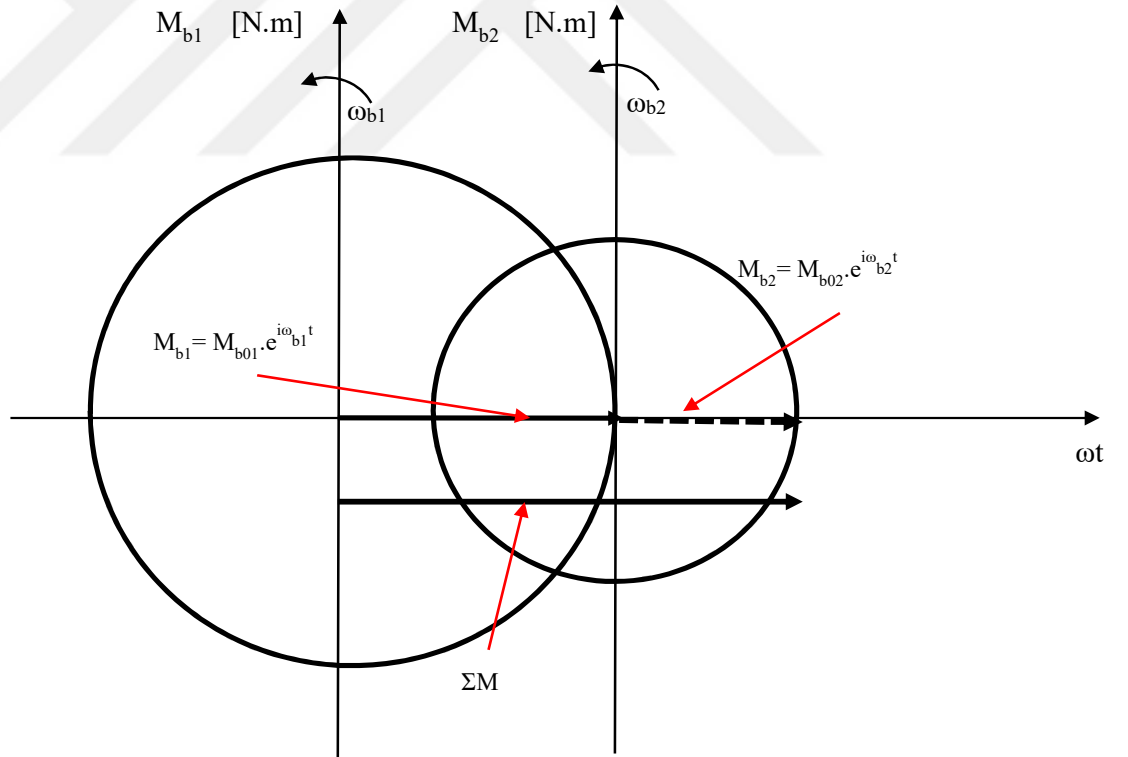
Denklem 2.146 zarf eğrisi olarak ifade edilmektedir. Şekil 2.29’da gösterilmiştir.

$$\sum M = M_R e^{i\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} = M_R \sin\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \quad (2.147)$$

$$\sum M = \sqrt{(M_{b01})^2 + 2M_{b01}M_{b02} \cos(\Delta\omega t) + (M_{b02})^2} \sin\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \quad (2.148)$$

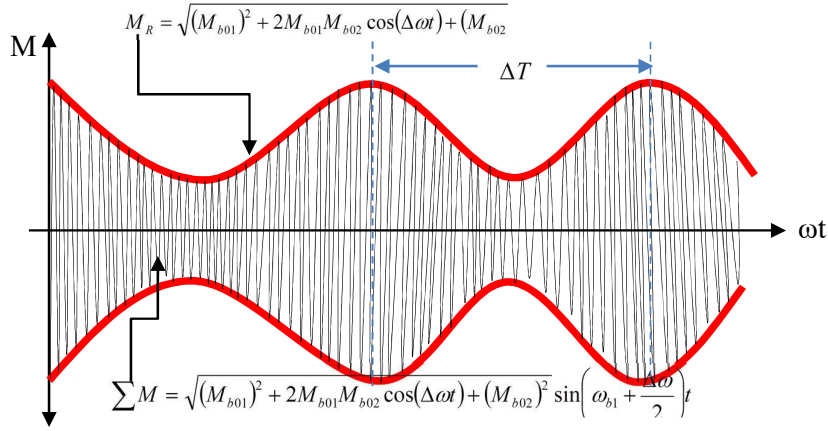
$$M_{maks} = M_{b01} + M_{b02} \quad (2.149)$$

$$M_{min} = M_{b01} - M_{b02} \quad (2.150)$$



Şekil 2.38. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi

Denklem 2.148’nin grafiksel gösterimi aşağıdadır.

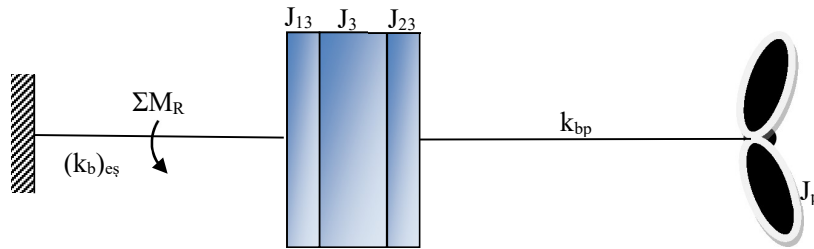


Şekil 2.39 Bileşke Burulma Momenti (ΣM)'nin Grafiksel Gösterimi

Şekil 2.37'deki ana makinelerin farklı devirlerde çalışmasından ötürü ortaya çıkan zarf eğrisi (M_R)'nin periyoduna ait parametrik denklem aşağıdadır. Burada bu periyodun bulunmasının amacı, Bileşke moment (ΣM)'in zarf eğrisi içindeki tekrarlanma adedinin tespit edilmesidir.

$$\Delta \omega = 2\pi(\Delta f) = \frac{2\pi}{(\Delta T)} \quad \Rightarrow \quad (\Delta T) = 2\pi \frac{1}{\Delta \omega} \quad (2.151)$$

Yukarıdaki Şekil 2.37'nin matematik modeli aşağıdaki matematik modele indirgenmektedir.



Şekil 2.40. İndirgenmiş Matematik Modeli

Şekil 2.40'da pervane şaftına yapılan indirgeme işlemine istinaden, millere ait yay katsayılarının indirgemesi yapılarak toplam yay katsayısı elde edilmektedir.

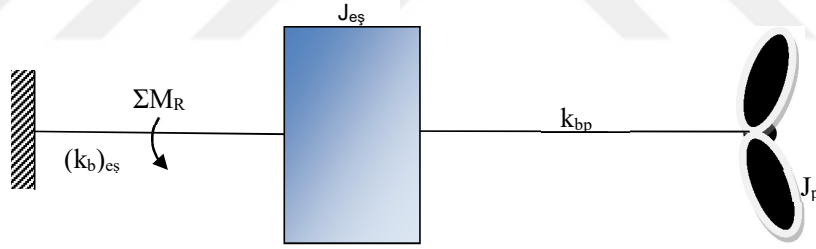
$$(k_b)_{e\dot{s}} = k_{b13} + k_{b23} = k_{b1}i_{13}^2 + k_{b2}i_{23}^2 \quad (2.152)$$

$$(k_b)_{e\dot{s}} = k_{b1} \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 + k_{b2} \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 \quad (2.154)$$

Şekil 2.40’da pervane şaftına yapılan indirgeme işlemine istinaden, dişli çarklara ait kütle atalet momentlerinin indirgemesi yapılarak toplam kütle atalet momenti elde edilmektedir.

$$(J)_{e\dot{s}} = J_{13} + J_{23} + J_3 = J_1 i_{13}^2 + j_2 i_{23}^2 + J_3 \quad (2.155)$$

$$(J)_{e\dot{s}} = J_1 \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 + j_2 \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 + J_3 \quad (2.156)$$



Şekil 2.41 İndirgenmiş Matematiksel Modeli

Şekil 2.41’deki matematiksel modele ait burulma titreşiminin doğal frekansı denklem 2.157’de verilmektedir.

$$\omega_{nbl,2}^2 = \Lambda_{nbl,2} = \left[\frac{(k_b)_{e\dot{s}} + k_{bP}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{bP}}{J_P} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{(k_b)_{e\dot{s}} + k_{bP}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{bP}}{J_P} \right]^2 - 4 \frac{(k_b)_{e\dot{s}} k_{bP}}{J_{e\dot{s}} J_P}} \quad (2.157)$$

Sistemin toplam burulma titreşimi kütle atalet momenti aşağıdadır.

$$\frac{1}{[(J)_{e\varphi}]_T} = \frac{1}{(J)_{e\varphi}} + \frac{1}{j_P} \quad (2.158)$$

Sistemin toplam burulma titreşimi yay katsayısı aşağıdadır.

$$[(k_b)_{e\varphi}]_T = (k_b)_{e\varphi} + k_{bP} \quad (2.159)$$

Şekil 2.41 İndirgenmiş Matematiksel Modele ilişkin olarak oluşan burulma açısının parametrik hesabı aşağıdadır.

$$[\varphi_R]_T = \frac{\left[\sqrt{(M_{b01})^2 + 2M_{b01}M_{b02} \cos(\Delta\omega t) + (M_{b02})^2} \right]}{[(k_b)_{e\varphi}]_T - [(J)_{e\varphi}]_T \left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2} e^{i\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} + \psi \right)} \quad (2.160)$$

$$[\varphi_R]_T = \frac{\frac{\left[\sqrt{(M_{b01})^2 + 2M_{b01}M_{b02} \cos(\Delta\omega t) + (M_{b02})^2} \right]}{[(k_b)_{e\varphi}]_T} = M_R}{1 - \frac{[(J)_{e\varphi}]_T}{[(k_b)_{e\varphi}]_T} \left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2} e^{i\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} + \psi \right)} \quad (2.161)$$

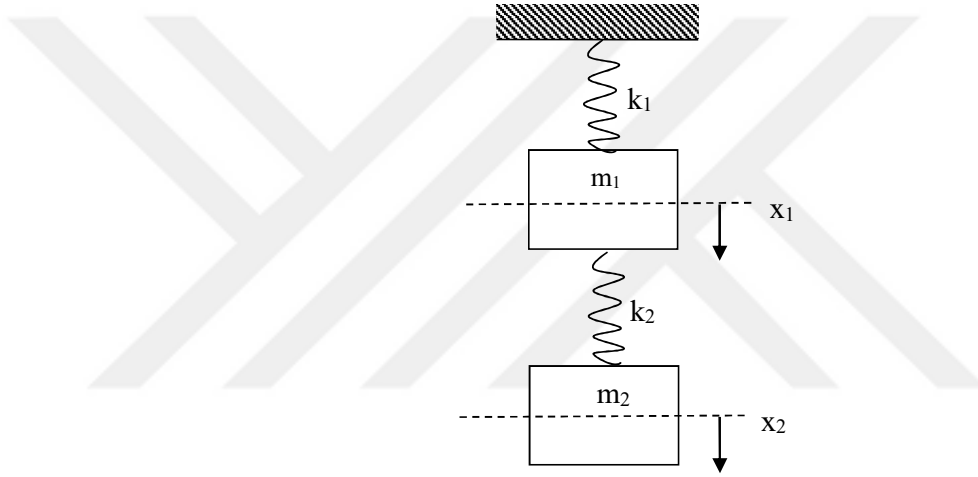
$$\frac{M_R}{[(k_b)_{e\varphi}]_T} = \varphi_R, \quad \frac{[(J)_{e\varphi}]_T}{[(k_b)_{e\varphi}]_T} = \frac{1}{(\omega_{nb})^2} \quad (2.162)$$

Sistemin emniyet dahilinde burulabileceği burulma açısı aşağıdadır.

$$[\varphi]_T = \frac{\varphi_R}{1 - \frac{\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2}{\omega_{nb}^2}} e^{i\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} + \psi \right)} \Rightarrow \left[\frac{[\varphi]_T}{\varphi_R} \right]_{em} = \frac{1}{1 - \frac{\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2}{\omega_{nb}^2}} e^{i\left(\omega_{b1} + \frac{\Delta\omega}{2} + \psi \right)} \quad (2.163)$$

2.5. (2 (iki) Kütle - 2 (iki) Yay) Radyal Serbest Titreşiminin Matematiksel Modeli Ve Denklemleri

Şimdiye kadar, ana makine, mil, dişli çark, şaft ve pervaneden oluşan gemi sevk sistemlerinin burulma titreşimlerinin doğal frekanslarının parametrik hesaplamaları yapılmıştır. Bu bölümde ise, bahse konu parametrik hesaplamalarda kullanılan burulma titreşimi doğal frekans denklemlerinin nasıl elde edildiği hususunda düşey olarak konumlandırılmış kütle-yay sistemleri incelenecektir.



Şekil 2.42. İki Yay İki Kütleli Sistem

Yukarıdaki şekil 2.42'deki sisteme ilişkin hareket denklemleri aşağıdadır.

$$\Sigma F = M\ddot{X} \quad (2.164)$$

Denklem 2.153'de belirtilen Newton'un ikinci yasasını, şekil 2.42'deki sisteme uygulanması durumunda denklem 2.165 ve 2.166'ya ulaşılmaktadır.

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \quad (2.165)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \quad (2.166)$$

Yukarıdaki denklemlerin çözülebilmesi için uzama miktarları (x_1 , x_2) için aşağıdaki çözüm önerilerinden yararlanılmaktadır.

$$x_1 = Ae^{i(\omega t + \phi)} \quad \text{veya} \quad x_1 = A \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \phi)} \quad (2.167)$$

$$x_2 = Be^{i(\omega t + \phi)} \quad \text{veya} \quad x_2 = B \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = -B\omega^2 e^{i(\omega t + \phi)} \quad (2.168)$$

(

Yukarıdaki x_1 ve x_2 değerlerine ilişkin parametreleri Denklem 2.165 ve 2.166'da yerine yazılırsa, denklem 2.169 ve 2.170'e ulaşılmaktadır.

$$e^{i(\omega t + \phi)} (-m_1 A \omega^2 + k_1 A + k_2 (A - B)) = 0 \quad (2.169)$$

$$e^{i(\omega t + \phi)} (-m_2 B \omega^2 + k_2 (A - B)) = 0 \quad (2.170)$$

Her t zaman diliminde üstsel fonksiyon sıfır olamayacağından ($e^{i(\omega t + \phi)} \neq 0$) dolayı Denklem 2.169 ve 2.170'in sıfır olabilmesi için, denklemlerin A ve B katsayılarına ait kısımlarının sıfır yapılması gerekmektedir.

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)A - k_2 B = 0 \quad (2.171)$$

$$k_2 A - (k_2 - m_2 \omega^2)B = 0 \quad (2.172)$$

Yukarıdaki denklem 2.171 ve 2.172 matris yöntemi ile çözümlenirse;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ k_2 & -k_2 + m_2 \omega^2 \end{pmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}_{[C]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0 \quad (2.173)$$

Yukarıdaki denklemin çözümü için $\det(K) = 0$ olması gerekmektedir ($\omega = \omega_n$).

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(-k_2 + m_2 \omega^2) + k_2^2 = 0 \quad (2.174)$$

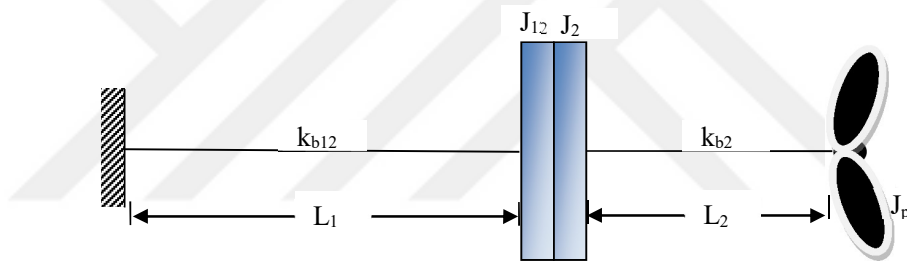
$$\omega_n^4 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right] \omega_n^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0 \quad (2.175)$$

$\omega_n^2 = \Lambda_n$ değişimi yapılarak Denklem 2.175'i çözelim.

$$\Lambda_n^2 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right] \Lambda_n + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0 \quad (2.176)$$

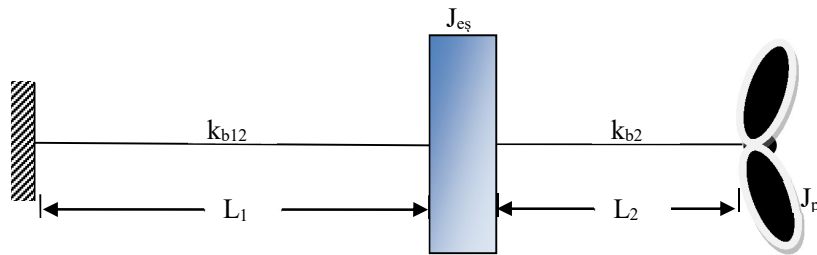
$$\omega_{n1,2}^2 = \Lambda_{n1,2} = \frac{- \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right]^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}}{2} \quad (2.177)$$

Yukarıdaki parametrik çözümler, 2 (iki) yay ve 2 (iki) kütleli sistemin Doğal Frekanslarıdır.



Şekil 2.43. İki Yay ve İki Kütle Sistemine İlişkin Matematiksel Model

Şekil 2.43'deki sistemin kütle atalet momentlerinin toplanmış durumu aşağıdadır.



Şekil 2.44. İki Yay ve İki Kütle Sistemine İlişkin Matematiksel Model

$$\omega_{n1,2}^2 = (\omega^2)_{nb}$$

$$k_1, k_2 = k_{b12}, k_{b2}$$

$$m_1, m_2 = j_{eş}, j_p$$

$$J_{eş} = J_{12} + J_2 = J_1 i_{12}^2 + J_2 = J_1 \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 + J_2 \quad (2.178)$$

$$\omega_{nb1,2}^2 = \Lambda_{nb1,2} = \frac{- \left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{eş}} + \frac{k_{b2}}{J_p} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{eş}} + \frac{k_{b2}}{J_p} \right]^2 - 4 \frac{k_{b12} k_{b2}}{J_{eş} J_p}}}{2} \quad (2.179)$$

İkinci mil için burulma titreşimi doğal frekansı $(\omega_{nb})_2$ aşağıdadır.

$$(\omega_{nb})_2 = \sqrt{\frac{k_{b2}}{J_p}} \quad (2.180)$$

İkinci milin, birinci milin yay katsayısına indirgenmesi aşağıdadır.

$$k_{b21} = k_{b2} (i_{21})^2; \quad i_{21} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.181)$$

$$k_{b21} = k_{b2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \quad (2.182)$$

İkinci dişlinin kütle atalet momentinin birinci dişliye indirgenmesi;

$$J_{b21} = J_{b2} (i_{21})^2; \quad i_{21} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.183)$$

$$J_{b21} = J_{b2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \quad (2.184)$$

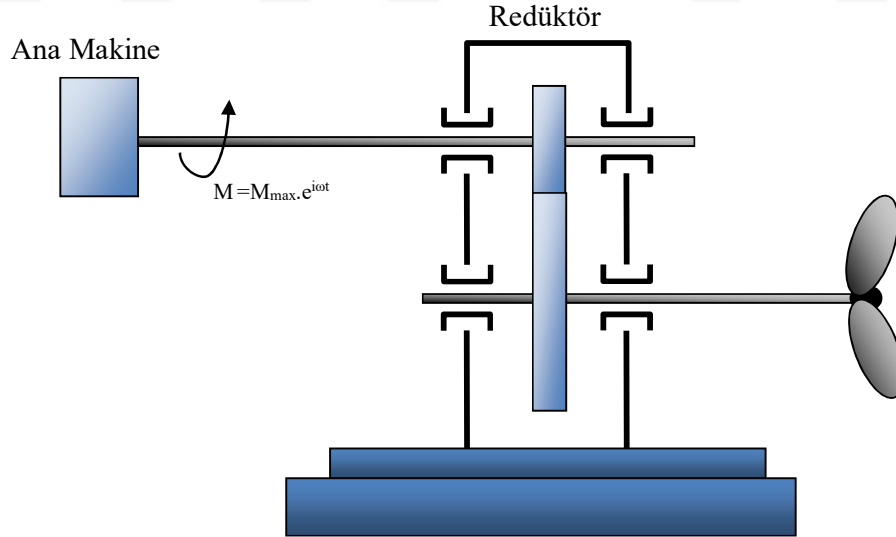
$$J_{eş} = J_1 + J_{21} = J_{21} i_{21}^2 + J_1 = J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + J_1 \quad (2.185)$$

Şekil 2.43'deki indirgenmiş sistemin burulma titreşimi denklem 2.186'da verilmektedir.

$$\omega_{nb1,2}^2 = \Lambda_{nb1,2} = \frac{-\left[\frac{k_{b21} + k_{b1}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{b21}}{J_p}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{k_{b1} + k_{b21}}{J_{e\dot{s}}} + \frac{k_{b21}}{J_p}\right]^2 - 4\frac{k_{b1}k_{b21}}{J_{e\dot{s}}J_p}}}{2} \quad (2.186)$$

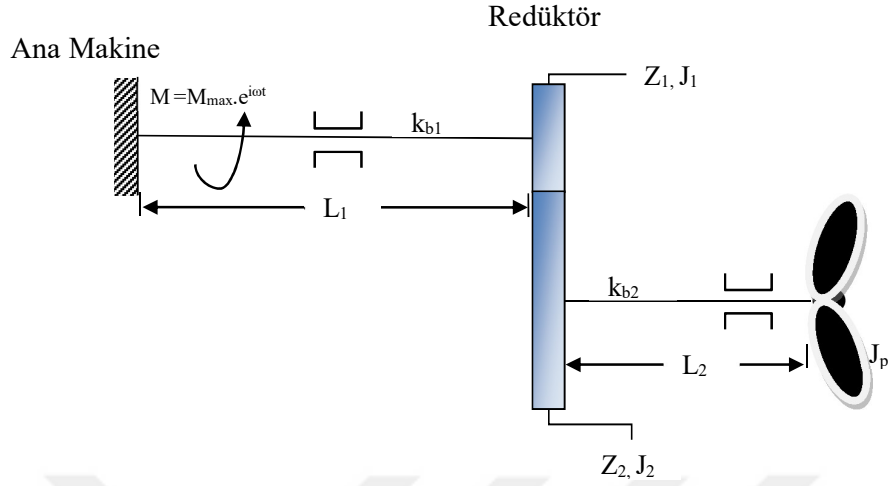
2.6. Gemi Tahrik Sistem Tasarımı Üçüncü Model (Zorlanmış Titreşim) Sistemlere Ait Hesaplamalar

Aşağıdaki sistemde, ana makine mili, $M = M_{\max} \cdot e^{i\omega t}$ momenti ile burulmaya zorlanmaktadır. (Birinci model üzerinde, pervane shaftında zorlayıcı momentin değişimleri ve zorlanmış titreşimlere ilişkin açıklamalar yapılmıştır.) Bu sistemde oluşan burulma titreşimlerine ait hareket denklemlerinin parametrik hesaplamaları yapılacaktır. Daha önceki kısımlarda anlatılan sistemlerden farklı olarak Şekil 2.44’de de görüleceği üzere sisteme tek bir ana makine tarafından güç verilmektedir. Bu durum, zorlanma burulma titreşimine ait hareket denklemlerinin çıkartılmasını kolaylaştırmaktadır.

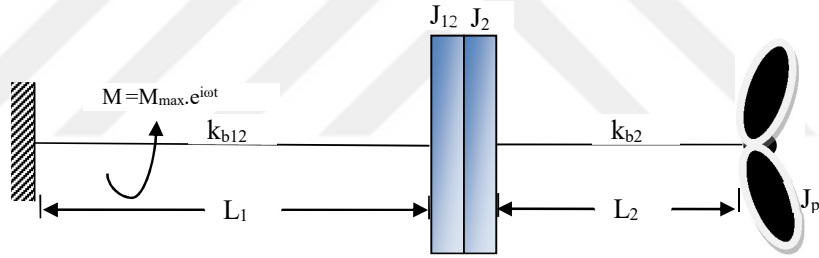


Şekil 2.45. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sistemi

Şekil 2.45’deki gemi sevk sistemine ait matematiksel model ve indirgeme işlemi yapılmış matematiksel modeller aşağıdadır.

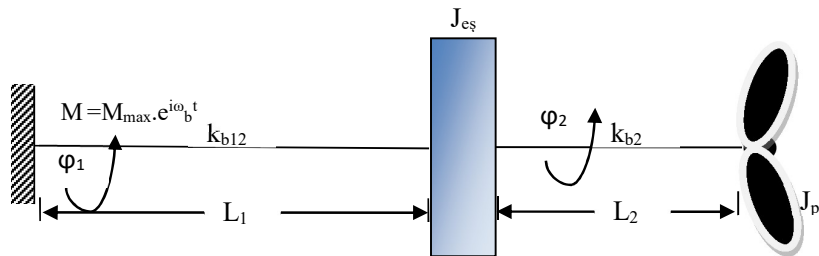


Şekil 2.46. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sisteminin Matematiksel Modeli



Şekil 2.47. İndirgenmiş Matematiksel Modeli

Şekil 2.47'deki sistemin kütle atalet momentlerinin toplanmış durumu aşağıdadır.



Şekil 2.48. İndirgenmiş Matematiksel Model

$$k_{eş} = k_{b2} + k_{b12} = k_{b2} + k_{b1}i_{12}^2 \quad J_{eş} = J_2 + J_{12} = J_2 + J_1i_{12}^2 \quad (2.187)$$

Şekil 2.47’de gösterilen 2 (iki) kütleli 2 (iki) yaylı bir titreşim sistemidir. Redüktör dişlilerinin üzerine $M = M_{\max} \cdot e^{i\omega_b t}$ zorlayıcı momenti etki ettirilmektedir.

$$J_{eş} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + k_{b12} \varphi_1 + k_{b2} (\varphi_2 - \varphi_1) = M_{\max} e^{i\omega_b t} \quad (2.188)$$

$$J_P \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + k_{b2} \varphi_2 - k_{b2} \varphi_1 = 0 \quad (2.189)$$

$J_{eş}$ kütlesi ile ana makine arasındaki mil zorlanmış burulma titreşimi yapmaktadır. J_P ile $J_{eş}$ kütleleri arasında kalan mil serbest burulma titreşimi hareketi yapmaktadır. Her iki mil de harmonik hareket yapmaktadır. (burulma titreşimi doğal frekansı $\omega_{nb} = \omega$)

$$\varphi_1 = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{veya} \quad \varphi_1 = A e^{i(\omega t + \phi)} \quad (2.190)$$

$$\varphi_2 = B \sin(\omega t + \phi) \quad \text{veya} \quad \varphi_2 = B e^{i(\omega t + \phi)} \quad (2.191)$$

φ_1 ve φ_2 denklemleri denklem 2.188 ve 2.189’da yerine konulursa;

$$(k_{b12} + k_{b2} - J_{eş} \omega^2) A - k_{b2} B = M_{\max} \quad (2.192)$$

$$k_{b2} A - (k_{b2} - J_P \omega^2) B = 0 \quad (2.193)$$

Serbest titreşim kaybolduktan sonra zorlayıcı momentin etkisi altında zorlanmış titreşim hareketi yaparlar. Titreşim hareketi ile zorlayan kuvvet aynı fazdadır. ($\phi = 0^\circ$) veya zıt yönlüdür. ($\phi = 180^\circ$) Aşağıda millerde oluşan burulma açıları verilmektedir.

$$\varphi_1 = \frac{M_{\max} (k_{b2} - J_P \omega_b^2) \sin \omega_b t}{(k_{b12} - k_{b2} - J_{eş} \omega_b^2) (k_{b2} - J_P \omega_b^2) - k_{b2}^2} = \varphi_{maks1} \sin \omega_b t \quad (2.194)$$

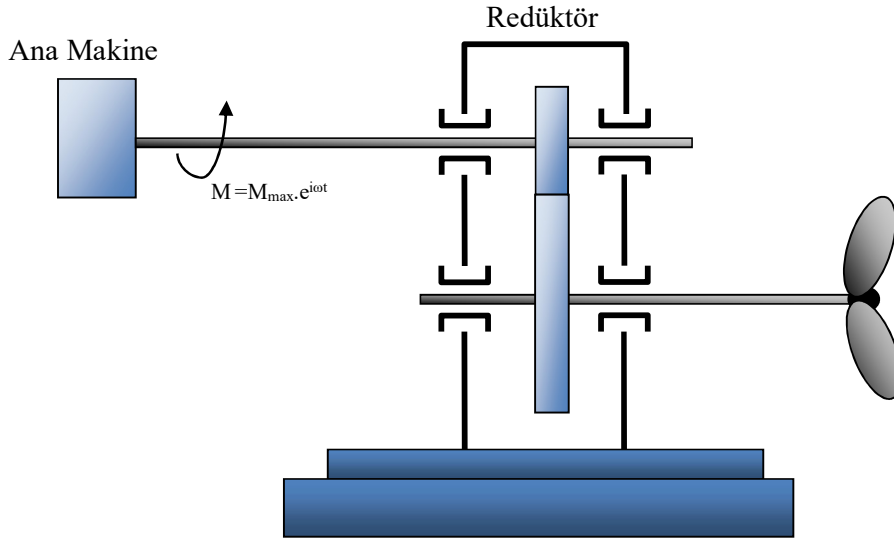
$$\varphi_2 = \frac{M_{\max} k_{b2} \sin \omega_b t}{(k_{b12} - k_{b2} - J_{eş} \omega_b^2)(k_{b2} - J_P \omega_b^2) - k_{b2}^2} = \varphi_{maks2} \sin \omega_b t \quad (2.195)$$

Şekil 2.5'deki matematiksel modeli verilen sistemin burulma titreşimine ait doğal frekansı aşağıdaki denklem 2.196'da verilmektedir.

$$\omega_{nb}^4 - \left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{eş}} + \frac{k_{b2}}{J_P} \right] \omega_{nb}^2 + \frac{k_{b12} k_{b2}}{J_{eş} J_P} = 0 \quad (2.196)$$

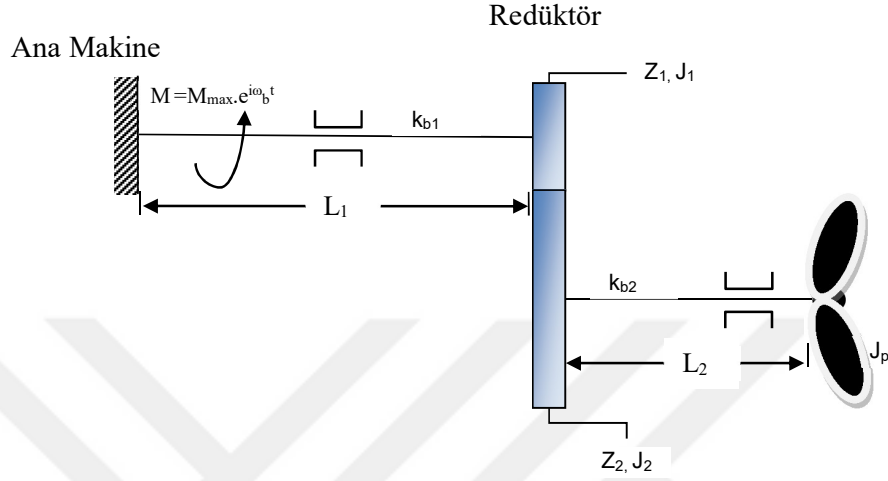
3. DİNAMİK ETKİ ARTTIRMA KÜTLESİ (DEAK)

Aşağıdaki şekil 3.1.'deki sistem, iki adet doğal frekansa sahiptir. Bir önceki kısımda da bu sistemin burulma titreşimine ait hareket denklemleri parametrik olarak çıkartılmıştır. Bu kapsamda, sisteme ilişkin hesaplamalar ve matematik modeller aşağıda belirtilmiştir. Bu nedenle, bahse konu sistemin burulma titreşimine ait iki farklı rezonans frekansının olduğu bilinmektedir. Yani gemiye ait sevk sisteminin verimli bir şekilde çalışması için, gemi makinesinin işletme devirlerinin, hesaplaması yapılan doğal frekans aralığında olmaması gerekmektedir. Bu kapsamda, ilerleyen bölümlerde gemi makinesinin işletme devirlerinin, rezonans frekansı aralığında olmaması maksadıyla yapılacak işlemler anlatılmaktadır.

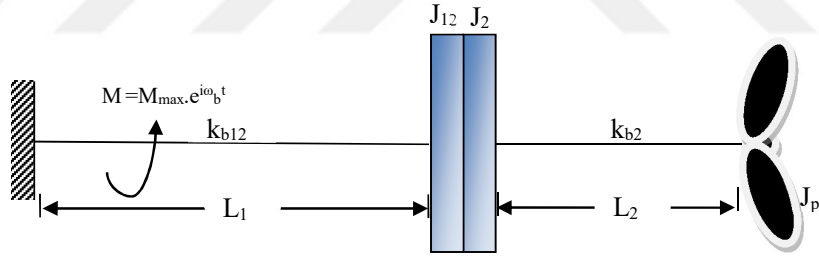


Şekil 3.1. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sistemi

Şekil 3.1'deki sistemin matematiksel modeli ve pervane miline indirgenmiş matematiksel modeli aşağıdadır.

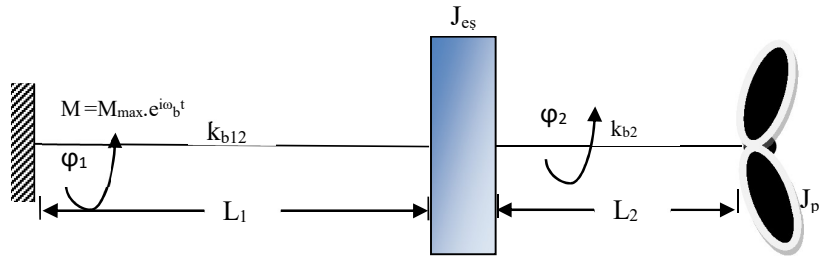


Şekil 3.2. Ana Makine, Redüktör Sistemi ve Pervaneden Oluşan Gemi Tahrik Sistemine Ait Matematiksel Model



Şekil 3.3 İndirgenmiş Matematiksel Model

Şekil 3.3'deki sistemin kütle atalet momentlerinin toplanmış durumu aşağıdadır.



Şekil 3.4 İndirgenmiş Matematiksel Model

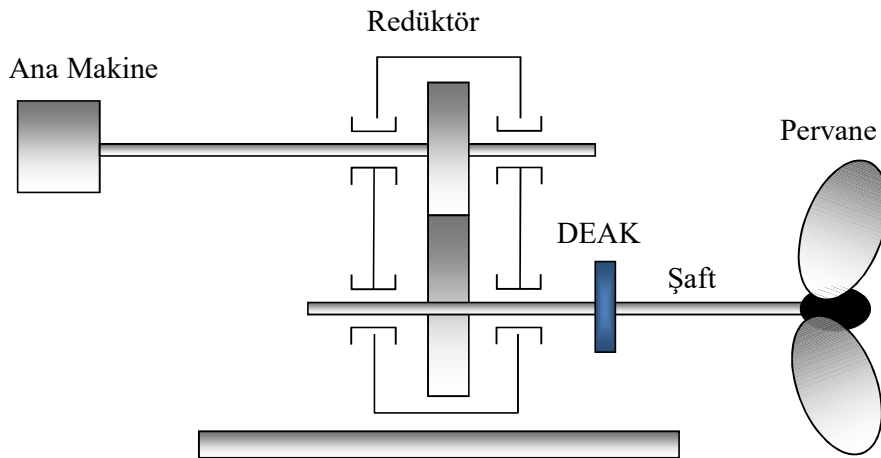
Şekil 3.2’de verilen sistemin burulma titreşimine ait matematiksel model aşağıdadır.

$$\omega_{nb}^4 - \left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{eş}} + \frac{k_{b2}}{J_P} \right] \omega_{nb}^2 + \frac{k_{b12}k_{b2}}{J_{eş}J_P} = 0 \quad (3.1)$$

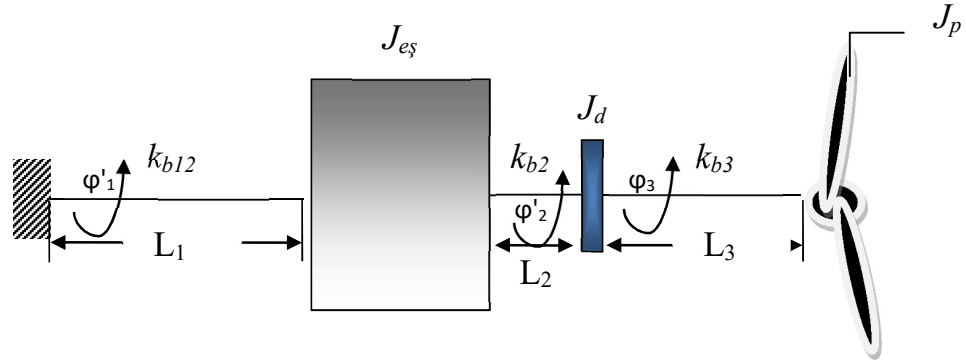
$$\omega_{nb1,2}^2 = \Lambda_{nb1,2} = \frac{- \left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{eş}} + \frac{k_{b2}}{J_P} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{k_{b12} + k_{b2}}{J_{eş}} + \frac{k_{b2}}{J_P} \right]^2 - 4 \frac{k_{b12}k_{b2}}{J_{eş}J_P}}}{2} \quad (3.2)$$

Yukarıdaki parametrik çözüm, 2 (iki) yay ve 2 (iki) kütlelen oluşan sistemin Doğal Frekanslarıdır.

Makinenin, teorikte hesaplanan işletme devirleri pervanesinin su içindeki polar kütle atalet momenti J_p değeri dikkate alınmadan tasarımının gerçekleştirilmesi durumunda, işletme devirlerinin rezonans bölgesinde olmasına neden olabilir. Böyle bir problem ile karşılaşılması durumunda, tasarım baştan yapmak yerine bir J_o kütle atalet momentine sahip bir disk, pervane ile redüktör arasına yerleştirilebilir. Eklenen bu kütleye Dinamik Etki Arttırma Kütle (DEAK) denir. Şekil 3.5’de DEAK eklenmiş bir gemi sevk sistemi gösterilmiştir. Şekil 3.6’daki matematiksel modele ilişkin yapılan hesaplamalarda sistemin rezonans bölgesi aralıkları değiştirmektedir.



Şekil 3.5 İndirgenmiş ve Dinamik Damper Eklenmiş Sevk Sistemi



Şekil 3.6 İndirgenmiş ve Dinamik Damper Eklenmiş Matematiksel Model

Yukarıdaki sisteme dinamik damperinde eklenmesi ile, sistemin zorlanmış titreşim hareketine ilişkin doğal frekansları değişmektedir. Bu sayede, sistemin rezonans frekansın da titreşim hareketi yapması engellenmiştir. Aşağıdaki denklemin çıkartılması ilerleyen bölümlerde verilecektir.

$$\omega_{nb}^6 - \left(\frac{k_{b1} + k_{b2}}{j_1} + \frac{k_{b2} + k_{b3}}{j_2} + \frac{k_{b3}}{j_3} \right) \omega_{nb}^4 + \left(\frac{k_{b1}k_{b2} + k_{b2}k_{b3} + k_{b3}k_{b1}}{j_1j_2} + \frac{k_{b2}k_{b3} + k_{b1}k_{b2}}{j_2j_3} + \frac{(k_{b1} + k_{b2})k_{b3}}{j_1j_3} \right) \omega_{nb}^2 - \frac{k_{b1}k_{b2}k_{b3}}{j_1j_2j_3} = 0 \quad (3.3)$$

Yukarıdaki denklemin çözümünü yapabilmek için; $\omega_{nb}^2 = y$ dönüşümü yapılsa,

$$y^3 - \left(\frac{k_{b1} + k_{b2}}{j_1} + \frac{k_{b2} + k_{b3}}{j_2} + \frac{k_{b3}}{j_3} \right) y^2 + \left(\frac{k_{b1}k_{b2} + k_{b2}k_{b3} + k_{b3}k_{b1}}{j_1j_2} + \frac{k_{b2}k_{b3} + k_{b1}k_{b2}}{j_2j_3} + \frac{(k_{b1} + k_{b2})k_{b3}}{j_1j_3} \right) y - \frac{k_{b1}k_{b2}k_{b3}}{j_1j_2j_3} = 0 \quad (3.4)$$

Yukarıdaki denklemin çözümünü yapmak için aşağıda verilen denklemlerden faydalanılabilmektedir. Ayrıca, MATLAB, VOLFRAM MATHEMATİCA v.b. bilgisayar programlarından da çözümleri yapılabilmektedir.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.5)$$

$$\Delta = c^2b^2 - 4db^3 - 4c^3a + 18dcba - 27d^2a^2 \quad (3.6)$$

$\Delta > 0$ → üç kökü reel ve en az biri diğerlerinden farklı

$\Delta = 0$ → üç kökü reel ve eşit

$\Delta < 0$ → en az bir kökü reel değil

Yukarıda verilen açıklamalardan, denklem 3.5’de verilen polinomun köklerini bulabilmek için aşağıdaki denklemlerden yararlanılmaktadır.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad (3.7)$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \quad (3.8)$$

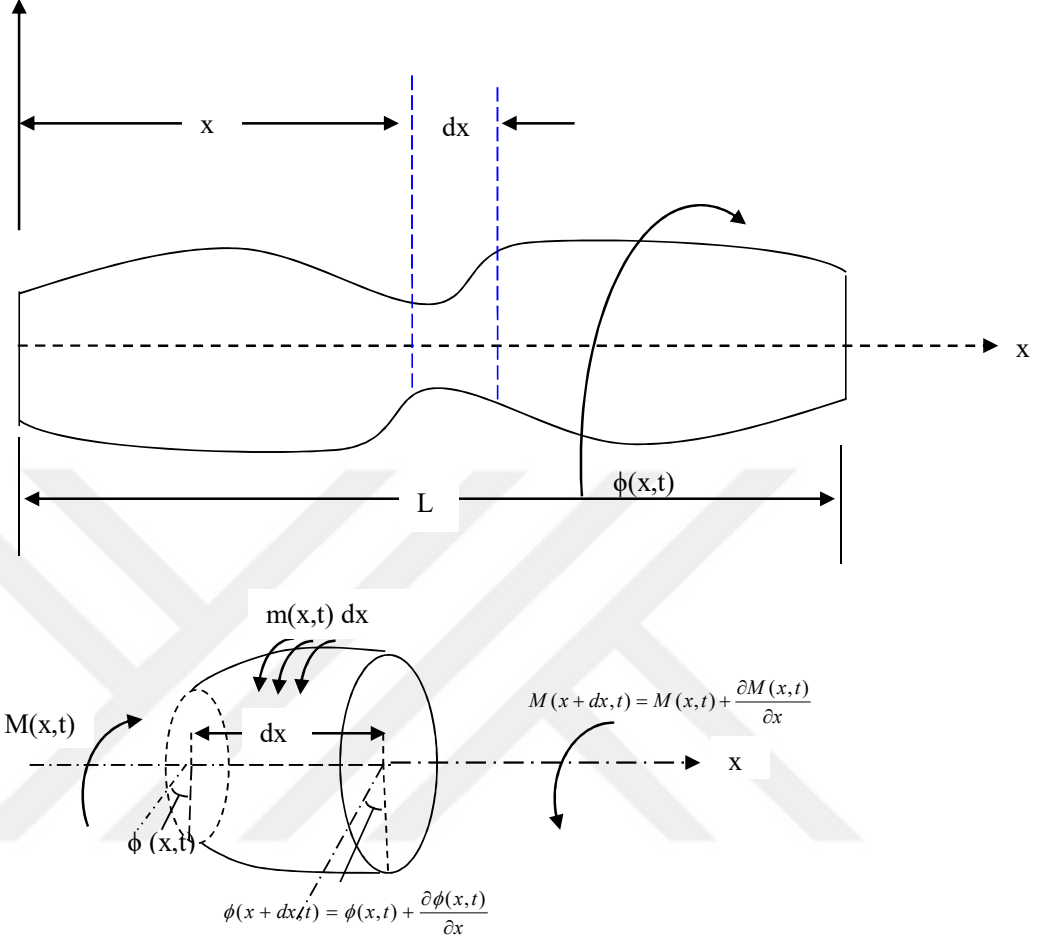
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} \quad (3.9)$$

4. BURULMA TİTREŞİMLERİNİN ANALİTİK ANALİZİ

Gemi sevk sistemi için hayati öneme sahip olan konstrüksiyon elemanı pervane mili (şaft)’nde ortaya çıkan burulma titreşimine ait sürekli ortam titreşimlerini analitik olarak incelenerek hareketin doğal frekansının parametrik hesaplamaları yapılacaktır.

4.1. Düzensiz Dairesel Şaftta Oluşan Burulma Titreşimi

Aşağıdaki şekil 4.1’de düzgün olmayan şaftın bir moment etkisinde oluşan burulma titreşiminde, dx kesit alanındaki zorlama moment ve burulma açısı arasındaki ilişki gösterilmektedir.



Şekil 4.1. Düzgün Olmayan Şaftta Oluşan Burulma Titreşimi

Aşağıdaki denklemlerde düzgün olmayan şaftta oluşan momentin parametrik gösterimi yapılmaktadır.

$$\sum M = J\ddot{\phi} \quad (4.1)$$

Aşağıda, kütle atalet momenti ile kesit kütle atalet momenti arasındaki ilişki gösterilmektedir.

$$J = I dx \quad (4.2)$$

Newton'un 2. Hareket Yasasının Şekil 6'daki Sisteme uygulanırsa,

$$\left(M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right) - M(x,t) + m(x,t) dx = I dx \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.3.)$$

Mukavemetten şaftta etki eden moment;

$$M = GI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.4)$$

Denklem 4.2'den faydalanarak denklem 4.1'i tekrar düzenlenirse, şekil 4.1'de şaftta oluşan burulma titreşimin hareket denklemi, denklem 4.6'da gösterilmektedir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GI \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right) + m(x,t) = J \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

$$GI \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} + m(x,t) = J \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

4.2 Burulma Titreşimine İlişkin Hareket Denkleminin Hamilton Denklemi İle Bulunması.

Şekil 4.1'deki sisteme ilişkin denklem 4.7'deki Hamilton Eşitliği için Burulma Titreşimi Kinetik Enerjisi (E_K) ve Burulma Titreşimi Gerilme Enerjisi (E_G)'ne ait ifadeler aşağıdadır.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_K - E_G) dt = 0 \quad (4.7)$$

Burulma titreşiminden kaynaklanan kinetik enerji aşağıdadır.

$$E_K = \frac{1}{2} \int_0^L J(x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4.8)$$

Burulma titreşiminden kaynaklanan gerilme enerjisi aşağıdadır.

$$E_G = \frac{1}{2} \int_0^L GI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.9)$$

Denklem 4.8 ve Denklem 4.9'u Denklem 4.7'de yerine yazalım.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_K - E_G) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L J(x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L GI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt = 0 \quad (4.10)$$

Yukarıdaki Denklem 4.10'u ikiye bölerek δ operatörünü uygularsak;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L J(x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \right] = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \delta \phi dx dt \quad (4.11)$$

t_1 ve t_2 için $\delta \phi = 0$ 'dır. Bu eşitlikten yararlanmak suretiyle denklem 4.11 tekrar düzenlenirse,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L GI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \right] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L GI \delta \phi \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(GI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi dx \right] dt \quad (4.12)$$

Denklem 4.11 ve denklem 4.12 kullanılarak denklem 4.10'u tekrar düzenlenirse,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(GI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] \delta \phi dx - GI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} \right\} dt = 0 \quad (4.13)$$

Denklem 4.13'ü aşağıda verilen sınır şartlarına göre çözümlenirse denklem 4.14 ve denklem 4.15 elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad 0 < x < L \quad (4.14)$$

$$\left(GI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = L \end{array} \quad (4.15)$$

4.3. Düzgün Dairesel Şaftta Oluşan Burulma Titreşimi

Bu kısımda ise, kullanılan şaft düzgün olarak alınacaktır. O zaman, şaftın düzgün olamamasında ötürü ortaya çıkan burulma momenti $m(x,t) = 0$ alınacaktır. O zaman, daha önce bulunan denklem 4.6. aşağıdaki gibi tekrar düzenlenir.

$$GI \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = J \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.16)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.17)$$

$$c = \sqrt{\frac{GI}{J}} \quad (4.18)$$

Düzgün şekilli şaft için kütle atalet momenti aşağıdadır.

$$J = \rho I \quad (4.19)$$

Denklem 4.19'u, Denklem 4.18'de yerine yazıp tekrar düzenlenirse;

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.20)$$

$$\phi(x,t) = \Phi(x)T(t) \quad (4.21)$$

Denklem 4.17'i, yukarıdaki denklemlerden faydalanarak tekrar düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi(x) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (4.23)$$

Yukarıdaki denklemleri çözebilmek için $\Phi(x)$ ve $T(t)$ aşağıdaki gibi tanımlırsa;

$$\Phi(x) = F \cos \frac{\omega x}{c} + H \sin \frac{\omega x}{c} \quad (4.24)$$

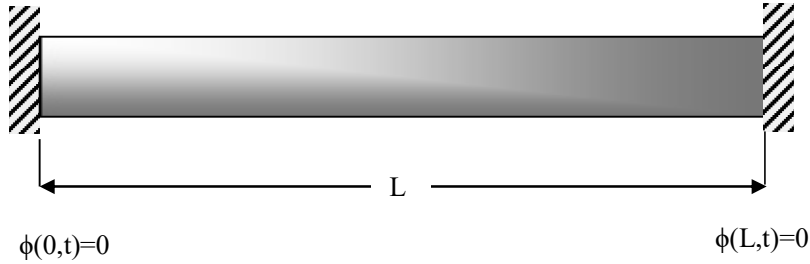
$$T(t) = M \cos \omega t + N \sin \omega t \quad (4.25)$$

$\phi(x,t)$, torsiyonel burulma açısının genelleştirilmiş durumu aşağıda verilmiştir.

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) T_n(t) \quad (4.26)$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \cos \frac{\omega_n x}{c} + H_n \sin \frac{\omega_n x}{c} \right) (M_n \cos \omega_n t + N_n \sin \omega_n t) \quad (4.27)$$

4.4 Her İki Ucu Sabitlenmiş Şaftın Doğal Frekansının Bulunması



Şekil 4.2. Her İki Ucu Sabitlenmiş Şaft.

$$\phi(x,t) = \Phi(x)T(t) = \left(F \cos \frac{\omega x}{c} + H \sin \frac{\omega x}{c} \right) (M \cos \omega t + N \sin \omega t) \quad (4.28)$$

Sınır şartlarından ve Denklem 4.28'den;

$$F=0 \quad (4.29)$$

Denklem 4.28 tekrar düzenlenirse eğer;

$$\phi(x,t) = \sin \frac{\omega x}{c} (M' \cos \omega t + N' \sin \omega t) \quad (4.30)$$

M' ve N' yeni katsayılarıdır. Doğal frekansı bulabilmek için;

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (4.31)$$

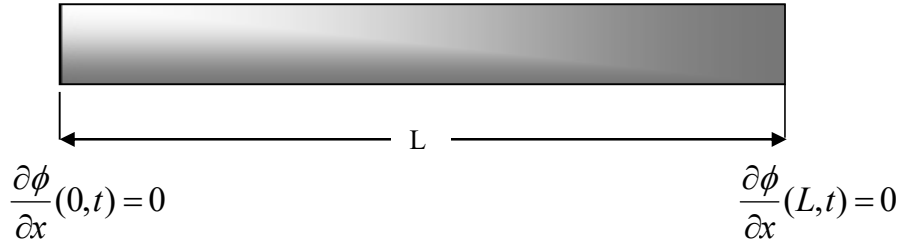
$$\frac{\omega L}{c} = n\pi, \quad n=1,2,\dots \quad (4.32)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.33)$$

$$\Phi_n(x) = H_n \sin \frac{\omega_n x}{c}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.34)$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\omega_n x}{c} \left(M_n' \cos \omega_n t + N_n' \sin \omega_n t \right) \quad (4.35)$$

4.5. Her İki Ucu Serbest Olan Şaftın Doğal Frekansının Bulunması



Şekil 4.3. Her İki Ucu Serbest Olan Şaft

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0) = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(L) = 0 \quad (4.37)$$

$$\Phi(x) = F \cos \frac{\omega x}{c} + H \sin \frac{\omega x}{c} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x) = -\frac{F\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{H\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \quad (4.39)$$

Sınır şartlarından ve denklem 4.39'dan;

$$H=0 \quad (4.40)$$

Denklem 4.39 tekrar düzenlenirse;

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (4.41)$$

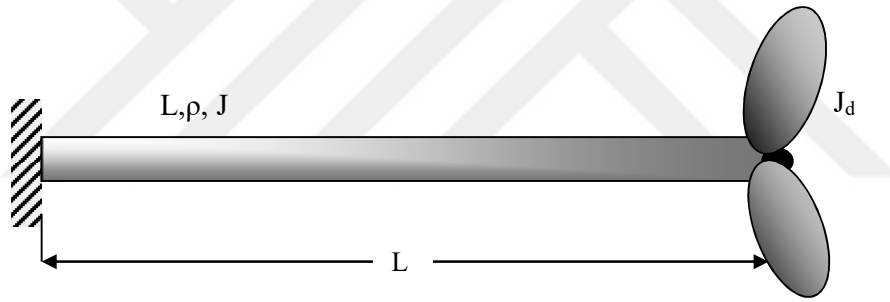
$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.42)$$

$$\Phi_n(x) = F_n \cos \frac{\omega_n x}{c}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.43)$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\omega_n x}{c} (M_n \cos \omega_n t + N_n \sin \omega_n t) \quad (4.44)$$

M ve N katsayıları başlangıçtaki katsayılardan farklıdır.

4.6 Bir Ucu Sabitlenmiş Diğer Ucunda Pervane Olan Şaftın Doğal Frekansının Bulunması



$$\phi(0,t)=0$$

$$GJ \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} = -J_d \frac{\partial^2 \phi(L,t)}{\partial t^2}$$

Şekil 4.4 Bir Ucu Sabitlenmiş Diğer Ucunda Pervane Olan Şaft

$$\phi(x,t) = \Phi(x)T(t) = \left(F \cos \frac{\omega x}{c} + H \sin \frac{\omega x}{c} \right) (M \cos \omega t + N \sin \omega t) \quad (4.45)$$

Şekil 4.4'de belirtilen başlangıç ve sınır şartlarını Denklem 4.45'de yerine yazılırsa;

$$\phi(0,t) = \Phi(x)T(t) = (F \cos 0 + H \sin 0) T(t) \quad (4.46)$$

Denklem 4.46'dan $F = 0$ olmaktadır.

$$GJ \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} = -J_d \frac{\partial^2 \phi(L,t)}{\partial t^2} \quad (4.47)$$

Denklem 4.47'nin çözümünden;

$$\frac{GJ}{J_d \omega^2} H \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (4.48)$$

Denklem 4.48'in sıfır olabilmesi için denklemin trigonometrik kısmının sıfır olması gerekmektedir.

$$\cos \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (4.49)$$

$$\frac{\omega L}{c} = \frac{n \pi}{2} \quad (4.50)$$

Yukarıdaki denklemden burulma titreşimin doğal frekansı aşağıdadır.




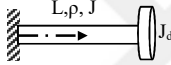
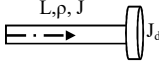
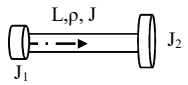
$$\omega = \frac{n \pi c}{2L} = \frac{n \pi}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \quad (4.51)$$

Yukarıdaki burulmaya ilişkin doğal frekansın, pervanenin kütle atalet momenti (J_d)'den bağımsızdır.

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\omega_n x}{c} (M_n \cos \omega_n t + N_n \sin \omega_n t) \quad (4.52)$$

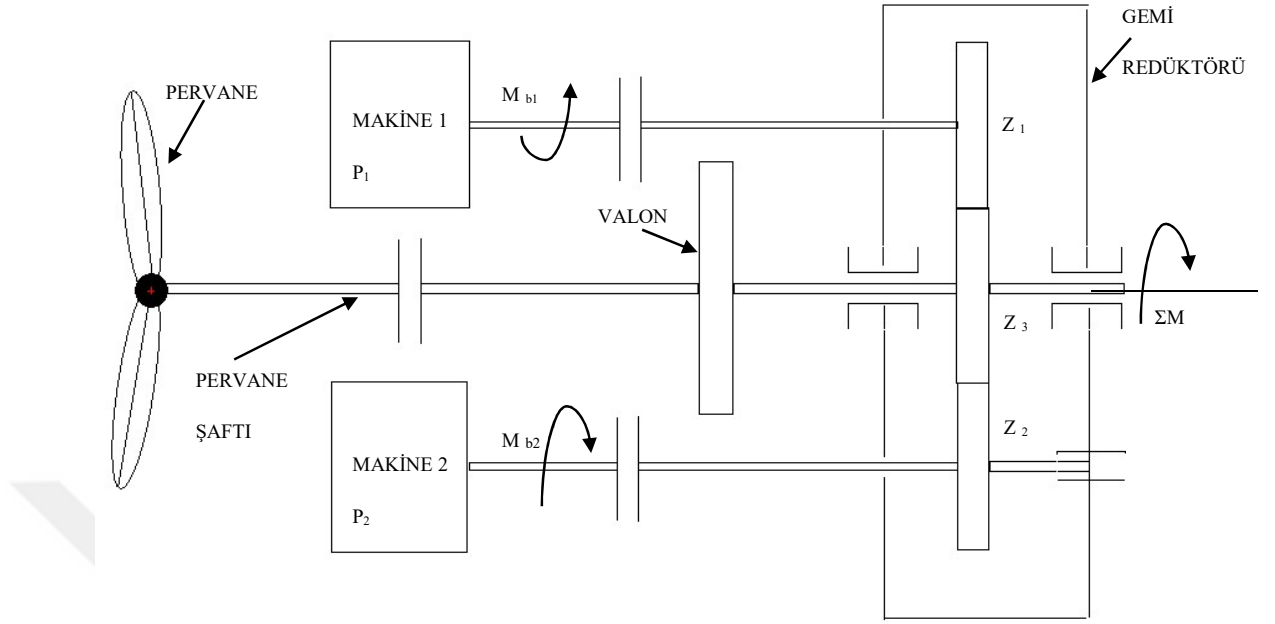
Yukarıdaki başlangıç ve sınır şartlarına ilave olarak düzgün şaftın burulma titreşimlerine ilişkin diğer başlangıç ve sınır şartları aşağıdaki tablo 4.1.'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Düzgün Şaft Burulma Titreşimlerine İlişkin Sınır Şartları. [13]

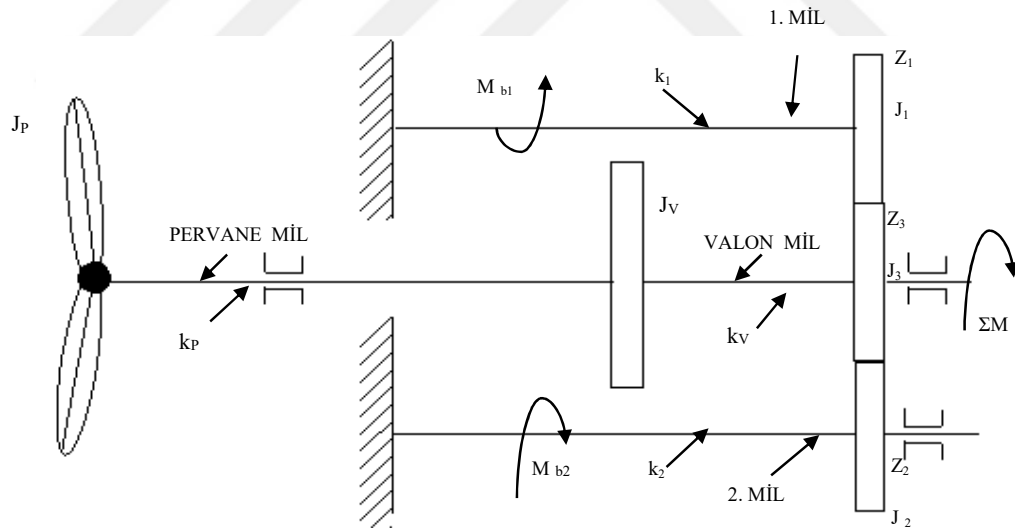
Şaft Bağlantıları	Sınır Şartları	Frekans Eşitliği	Mod Eşitliği	Doğal Frekans
1. Sabit-Serbest 	$\phi(0,t)=0$ $\frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = 0$ $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) = 0$	$\cos \frac{\omega L}{c} = 0$	$\Phi_n(x) = M_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2L}$ $n=0,1,2,3,\dots$
2. Serbest-Serbest 	$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) = 0$ $\frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = 0$	$\sin \frac{\omega L}{c} = 0$	$\Phi_n(x) = M_n \cos \frac{n\pi x}{L}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ $n=0,1,2,3,\dots$
3. Sabit-Sabit 	$\phi(0,t)=0$ $\phi(L,t)=0$	$\sin \frac{\omega L}{c} = 0$	$\Phi_n(x) = M_n \sin \frac{n\pi x}{L}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ $n=1,2,3,\dots$
4. Sabit-Disk 	$\phi(0,t)=0$ $GJ \frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = -J_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(L,t)$	$\alpha \tan \alpha = \beta$ $\alpha = \frac{\omega L}{c}$ $\beta = \frac{\rho L J_d}{J_d}$	$\Phi_n(x) = M_n \sin \frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n = \frac{\alpha_n c}{L}$ $n=1,2,3,\dots$
5. Serbest-Disk 	$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) = 0$ $GJ \frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = -J_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(L,t)$	$\alpha \tan \alpha = -\beta$ $\alpha = \frac{\omega L}{c}$ $\beta = \frac{\rho L J_d}{J_d}$	$\Phi_n(x) = M_n \cos \frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n = \frac{\alpha_n c}{L}$ $n=1,2,3,\dots$
6. Disk-Disk 	$GJ \frac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) = J_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(0,t)$ $GJ \frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = -J_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(L,t)$	$\tan \alpha = \frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)}{(\alpha^2 - \beta_1 \beta_2)}$ $\alpha = \frac{\omega L}{c}$ $\beta_1 = \frac{\rho L J_1}{J_1}$ $\beta_2 = \frac{\rho L J_2}{J_2}$	$\Phi_n(x) = M_n \left(\cos \frac{\alpha_n x}{L} - \frac{\alpha_n}{\beta_1} \sin \frac{\alpha_n x}{L} \right)$	$\omega_n = \frac{\alpha_n c}{L}$ $n=1,2,3,\dots$

5. ÖRNEK BİR SİSTEMİN DOĞAL FREKANSLARININ BULUNMASI

Aşağıdaki şekil 5.1’de iki ana makine, redüktör sistemi, valon ve pervaneden oluşan bir sistemde meydana gelen burulma titreşimine ait rezonans frekanslarının parametrik ve sayısal değerler vermek suretiyle matematiksel hesaplamaları yapılacaktır.



Şekil 5.1. 2 (iki) Makine, 1 (bir) Redüktör ve 1 (bir) Valondan Oluşan Gemi İtici Tahrik Sistemi.



Şekil 5.2. 2 (iki) Makine, 1 (bir) Redüktör ve 1 (bir) Valondan Oluşan Gemi İtici Tahrik Sistemine Ait Matematiksel Modeli

Birinci milin, Valon Milinin yay katsayısına indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$(k_b)_{1V} = k_{b1}(i_{13})^2 \quad , \quad i_{13} = \frac{z_3}{z_1} = \frac{n_1}{n_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad (5.1)$$

$$(k_b)_{1V} = k_{b1} \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 \quad (5.2)$$

J₁ kütleinin, J₃ kütleine indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$J_{13} = J_1 (i_{13})^2 \quad , \quad i_{13} = \frac{z_3}{z_1} = \frac{n_1}{n_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad (5.3)$$

$$J_{13} = J_1 \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 \quad (5.4)$$

İkinci milin, Valon Milinin yay katsayısına indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$(k_b)_{2V} = k_{b2} (i_{23})^2 \quad , \quad i_{23} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{n_2}{n_3} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \quad (5.5)$$

$$(k_b)_{2V} = k_{b2} \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 \quad (5.6)$$

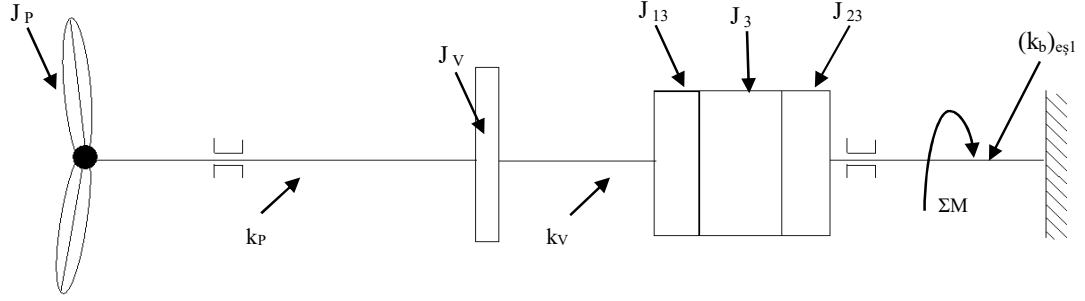
J₂ kütleinin, J₃ kütleine indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$J_{23} = J_2 (i_{23})^2 \quad , \quad i_{23} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{n_2}{n_3} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \quad (5.7)$$

$$J_{23} = J_2 \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 \quad (5.8)$$

Sistemdeki burulma yay katsayılarının toplanmasından, $(k_b)_{eş1}$ eş değer burulma yay katsayısı bulunmaktadır.

$$(k_b)_{eş1} = (k_b)_{1V} + (k_b)_{2V} \quad (5.9)$$

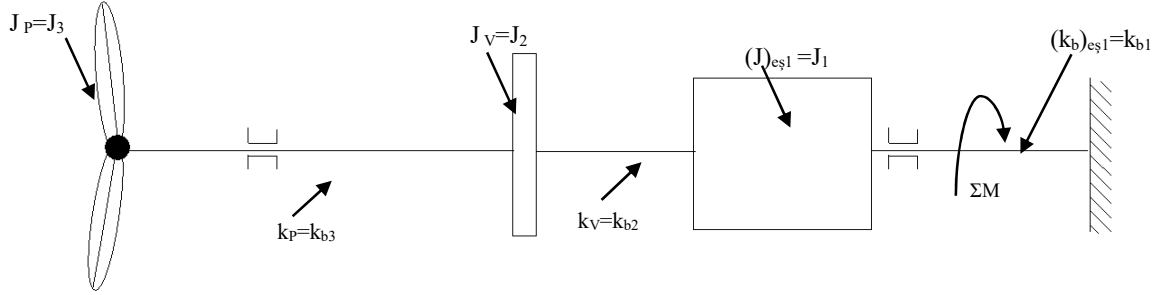


Şekil 5.3. Valon Miline İndirgenmiş Sistem

Sistemdeki redüktör dişlilerine ait yeni eş değer kütle atalet momenti $(J)_{eş}$ bulunmaktadır.

$$(J)_{eş} = J_{13} + J_{23} + J_3 = J_1 i_{13}^2 + J_2 i_{23}^2 + J_3 \quad (5.10)$$

$$(J)_{eş1} = J_1 \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^2 + J_3 \quad (5.11)$$



Şekil 5.4 Modelin Valon Miline İndirgenmiş Sistem

Yukarıdaki indirgenmiş sistem, 3 (üç) yay 3 (üç) kütle sistemidir.

$$M_{b1} = M_{b01} e^{i\omega_1 t} \quad (5.12)$$

$$M_{b2} = M_{b02} e^{i\omega_2 t} \quad (5.13)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (5.14)$$

$$\sum M = M_R e^{i\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} \quad (5.15)$$

$$M_R = \sqrt{(M_{b01})^2 + 2M_{b01}M_{b02} \cos(\Delta\omega t) + (M_{b02})^2} \quad (5.16)$$

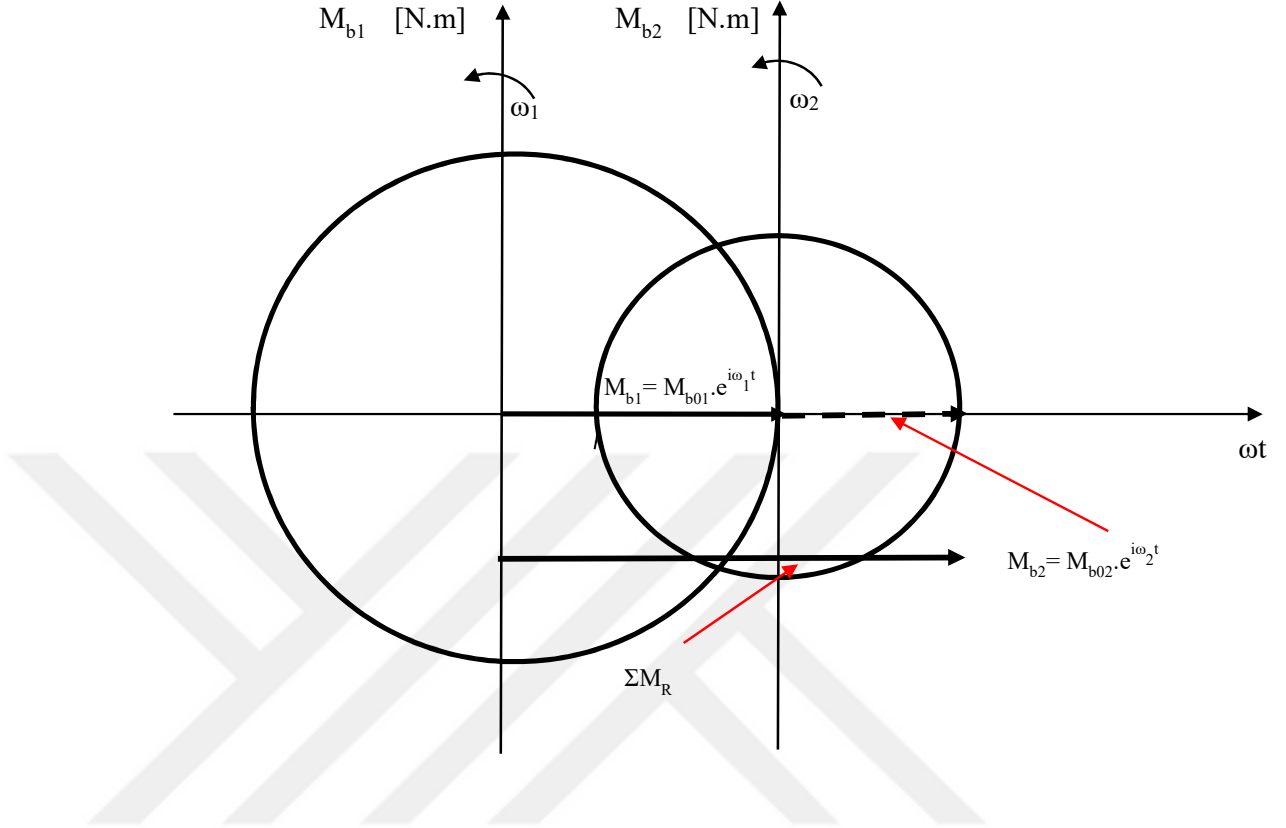
Denklem 5.16 zarf eğrisi olarak ifade edilmektedir.

$$\sum M = M_R e^{i\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} = M_R \sin\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \quad (5.17)$$

$$\sum M = \sqrt{(M_{b01})^2 + 2M_{b01}M_{b02} \cos(\Delta\omega t) + (M_{b02})^2} \sin\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \quad (5.18)$$

$$M_{maks} = M_{b01} + M_{b01} \quad (5.19)$$

$$M_{min} = M_{b01} - M_{b01} \quad (5.20)$$



Şekil 5.5. Vektörel Düzlemde Burulma Momentlerinin Gösterimi

$$\Delta\omega = 2\pi(\Delta f) = \frac{2\pi}{(\Delta T)} \quad \Rightarrow \quad (\Delta T) = 2\pi \frac{1}{\Delta\omega} \quad (5.21)$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{b01}}{k_1 - J_1\omega_1^2} e^{i\omega_1 t} = (\varphi_1)_{maks} e^{i\omega_1 t} \quad (5.22)$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{b02}}{k_2 - J_2\omega_2^2} e^{i\omega_2 t} = (\varphi_2)_{maks} e^{i\omega_2 t} \quad (5.23)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (5.24)$$

$$\Sigma \varphi = \varphi_B e^{i\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} \quad (5.25)$$

$$\varphi_B = \sqrt{(\varphi_1)_{maks}^2 + 2(\varphi_1)_{maks}(\varphi_2)_{maks} \cos(\Delta\omega t) + (\varphi_2)_{maks}^2} \quad (5.26)$$

$$\sum \varphi = \varphi_B e^{i\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} = \varphi_B \sin\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \quad (5.27)$$

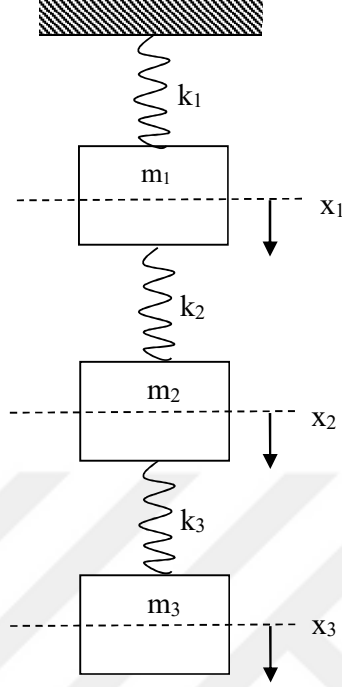
$$\sum \varphi = \sqrt{(\varphi_1)_{maks}^2 + 2(\varphi_1)_{maks}(\varphi_2)_{maks} \cos(\Delta\omega t) + (\varphi_2)_{maks}^2} \sin\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \quad (5.28)$$

$$\varphi_{maks} = (\varphi_1)_{maks} + (\varphi_2)_{maks} \quad (5.29)$$

$$\varphi_{min} = (\varphi_1)_{maks} - (\varphi_2)_{maks} \quad (5.30)$$

$$\Delta\omega = 2\pi(\Delta f) = \frac{2\pi}{(\Delta T)} \Rightarrow (\Delta T) = 2\pi \frac{1}{\Delta\omega} \quad (5.31)$$

Yukarıdaki indirgenmiş sistem, 3 (üç) yay 3 (üç) kütle sistemidir. Sisteme ilişkin yay kütle modelinin hareket denklemlerinin çıkartılması için müteakip, Şekil 5.6'daki kütle-yay sisteminden faydalanılacaktır. Denklemlerin çıkartılmasına müteakip, titreşim hareketlerindeki benzerlikten yararlanarak bulunan hareket denklemleri Şekil 5.4'deki sisteme uyarlanacaktır.



Şekil 5.6. 3 (üç) Kütle 3 (üç) Yay Sistemi

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \quad (5.32)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 (x_2 - x_3) \quad (5.33)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -k_3 (x_3 - x_2) \quad (5.34)$$

$$x_1 = A e^{i\omega t} \quad \ddot{x}_1 = -A \omega^2 e^{i\omega t} \quad (5.35)$$

$$x_2 = B e^{i\omega t} \quad \ddot{x}_2 = -B \omega^2 e^{i\omega t} \quad (5.36)$$

$$x_3 = C e^{i\omega t} \quad \ddot{x}_3 = -C \omega^2 e^{i\omega t} \quad (5.37)$$

Yukarıdaki değerleri, Denklem 5.32, 5.33 ve 5.34'de yerine konulursa;

$$-m_1 \omega^2 x_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (5.38)$$

$$(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \quad (5.39)$$

$$-m_2\omega^2x_2 + k_2x_2 - k_2x_1 + k_3x_2 - k_3x_3 = 0 \quad (5.40)$$

$$-k_2x_1 + (-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = 0 \quad (5.41)$$

$$-m_3\omega^2x_3 + k_3x_3 - k_3x_2 = 0 \quad (5.42)$$

$$(-m_3\omega^2 + k_3)x_3 - k_3x_2 = 0 \quad (5.43)$$

Yukarıdaki denklemlerin çözümü için matris kullanırsa;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2 + k_3 \end{pmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{[X]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0 \quad (5.44)$$

Yukarıdaki eşitliğin sıfıra eşit olması için, [A] matrisinin determinantının sıfır olması gerekmektedir. [A] matrisinin determinantının çözülmesi sonucu ($\omega = \omega_n$);

$$\omega_n^6 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{k_3}{m_3} \right) \omega_n^4 + \left(\frac{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}{m_1m_2} + \frac{k_2k_3 + k_1k_2}{m_2m_3} + \frac{(k_1 + k_2)k_3}{m_1m_3} \right) \omega_n^2 - \frac{k_1k_2k_3}{m_1m_2m_3} = 0 \quad (5.45)$$

Yukarıdaki radyan titreşime ilişkin denklemleri burulma titreşimine uyarlanırsa eğer;

$$\omega_{nb}^6 - \left(\frac{k_{b1} + k_{b2}}{J_1} + \frac{k_{b2} + k_{b3}}{J_2} + \frac{k_{b3}}{J_3} \right) \omega_{nb}^4 + \left(\frac{k_{b1}k_{b2} + k_{b2}k_{b3} + k_{b3}k_{b1}}{J_1J_2} + \frac{k_{b2}k_{b3} + k_{b1}k_{b2}}{J_2J_3} + \frac{(k_{b1} + k_{b2})k_{b3}}{J_1J_3} \right) \omega_{nb}^2 - \frac{k_{b1}k_{b2}k_{b3}}{J_1J_2J_3} = 0 \quad (5.46)$$

Yukarıdaki denklemin çözümünü yapabilmek için; $\omega^2 = y$ dönüşümü yapılırsa; aşağıda denklem 5.47'e ulaşılmaktadır. Bu denklem ile sistemin rezonans frekanslarına ulaşılmaktadır.

$$y^3 - \left(\frac{k_{b1} + k_{b2}}{J_1} + \frac{k_{b2} + k_{b3}}{J_2} + \frac{k_{b3}}{J_3} \right) y^2 + \left(\frac{k_{b1}k_{b2} + k_{b2}k_{b3} + k_{b3}k_{b1}}{J_1J_2} + \frac{k_{b2}k_{b3} + k_{b1}k_{b2}}{J_2J_3} + \frac{(k_{b1} + k_{b2})k_{b3}}{J_1J_3} \right) y - \frac{k_{b1}k_{b2}k_{b3}}{J_1J_2J_3} = 0 \quad (5.47)$$

Yukarıdaki denklem 5.47 denkleminde yararlanmak suretiyle, şekil 5.1'deki sistem için verilen aşağıdaki sayısal değerler kullanılmak suretiyle matematiksel rezonans frekansı değerleri hesaplanacaktır.

Tablo 5.1. Sayısal değerler

Ana makine 1,2 ile redüktör arasındaki millerin uzunluğu	1.5 m
Ana makine 1, 2 ile redüktör arasındaki millerin çapı	0.7 m
Redüktör ile valon arasındaki milin uzunluğu	1.25 m
Redüktör ile valon arasındaki milin çapı	0.55 m
Valon ile pervane arasındaki milin uzunluğu	2.5 m
Valon ile pervane arasındaki milin çapı	0.5 m
Redüktörün giriş dişlisi 1 için kütle atalet momenti (J_1)	100 kgm ²
Redüktörün giriş dişlisi 2 için kütle atalet momenti (J_2)	100 kgm ²
Redüktörün çıkış dişlisi 3 için kütle atalet momenti (J_3)	7500 kgm ²
Valon için kütle atalet momenti (J_v)	13368kgm ²
Pervane için su içindeki kütle atalet momenti (J_p)	15479 kgm ²
Redüktör çevrim oranı ($i_{13}=i_{23}$)	3
Miller için Kayma Elastiklik Modülü (G)	8.10 ¹⁰ N/m ²

Tablo 5.1 de verilen sayısal değerlerden yararlanılırsa;

Birinci milin, kesit atalet momentinin hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$I_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi 0,7^4}{32} = 0,0236 m^4 \quad (5.48)$$

Birinci milin, burulma titreşimi yay katsayısının hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$k_1 = \frac{GI_1}{L_1} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,0236}{1,5} = 1,26 \cdot 10^9 N.m / rad \quad (5.49)$$

Birinci milin, Valon Milinin yay katsayısına indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$(k_b)_{IV} = k_1 (i_{13})^2 = 1,26 \cdot 10^9 \cdot 3^2 = 11,34 \cdot 10^9 N.m / rad \quad (5.50)$$

Redüktör sistemindeki birinci giriş dişlisinin J_1 kütle atalet momentinin, çıkış dişlisi J_3 kütle atalet momentine indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$J_{13} = J_1 (i_{13})^2 = 100 \cdot 3^2 = 900 kg.m^2 \quad (5.51)$$

İkinci milin, kesit atalet momentinin hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$I_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi 0,7^4}{32} = 0,0236 m^4 \quad (5.52)$$

İkinci milin, burulma titreşimi yay katsayısını hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$k_2 = \frac{GI_2}{L_2} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,0236}{1,5} = 1,26 \cdot 10^9 N.m / rad \quad (5.53)$$

İkinci milin, Valon Milinin yay katsayısına indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$(k_b)_{2V} = k_2 (i_{23})^2 = 1,26 \cdot 10^9 \cdot 3^2 = 11,34 \cdot 10^9 \text{ N.m / rad} \quad (5.54)$$

Redüktör sistemindeki ikinci giriş dişlisinin J_2 kütle atalet momentinin, çıkış dişlisi J_3 kütle atalet momentine indirgenmesi işlemleri aşağıdadır;

$$J_{23} = J_2 (i_{23})^2 = 100 \cdot 3^2 = 900 \text{ kg.m}^2 \quad (5.55)$$

Sistemdeki burulma yay katsayılarının toplanmasından, $(k_b)_{eş1}$ eş değer burulma yay katsayısı bulunmaktadır.

$$(k_b)_{eş1} = (k_b)_{1V} + (k_b)_{2V} = 11,34 \cdot 10^9 + 11,34 \cdot 10^9 = 22,68 \cdot 10^9 \text{ N.m / rad} \quad (5.56)$$

Sistemdeki redüktör dişlilerine ait yeni eş değer kütle atalet momenti $(J_{eş})_1$ bulunmaktadır.

$$(J_{eş})_1 = J_{13} + J_{23} + J_3 = 900 + 900 + 7500 = 9300 \text{ kg.m}^2 \quad (5.57)$$

Valon milinin, kesit atalet momentinin hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$I_V = \frac{\pi d_V^4}{32} = \frac{\pi 0,55^4}{32} = 8,98 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad (5.58)$$

Valon milinin, burulma titreşimi yay katsayısını hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$k_V = \frac{GI_V}{L_V} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 8,98 \cdot 10^{-3}}{1,25} = 0,57 \cdot 10^9 \text{ N.m / rad} \quad (5.59)$$

Pervane mili (Şaft)'nin, kesit atalet momentinin hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$I_P = \frac{\pi d_p^4}{32} = \frac{\pi 0,50^4}{32} = 6,14 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (5.60)$$

Pervane mili (Şaft)'nin, burulma titreşimi yay katsayısını hesaplanma işlemleri aşağıdadır.

$$k_P = \frac{GI_P}{L_P} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 6,14 \cdot 10^{-3}}{2,5} = 0,196 \cdot 10^9 N.m / rad \quad (5.61)$$

Sistemin burulma titreşimine ait doğal frekans denklemi aşağıdadır. Burada;

$$(k_b)_{eş1} = k_{b1} \quad (5.62)$$

$$k_v = k_{b2} \quad (5.63)$$

$$k_p = k_{b3} \quad (5.64)$$

$$(J_{eş})_1 = J_1 \quad (5.65)$$

$$J_v = J_2 \quad (5.65)$$

$$J_p = J_3 \quad (5.67)$$

olarak alınmıştır.

$$\omega_{nb}^6 - \left(\frac{k_{b1} + k_{b2}}{J_1} + \frac{k_{b2} + k_{b3}}{J_2} + \frac{k_{b3}}{J_3} \right) \omega_{nb}^4 + \left(\frac{k_{b1}k_{b2} + k_{b2}k_{b3} + k_{b3}k_{b1}}{J_1J_2} + \frac{k_{b2}k_{b3} + k_{b1}k_{b2}}{J_2J_3} + \frac{(k_{b1} + k_{b2})k_{b3}}{J_1J_3} \right) \omega_{nb}^2 - \frac{k_{b1}k_{b2}k_{b3}}{J_1J_2J_3} = 0 \quad (5.68)$$

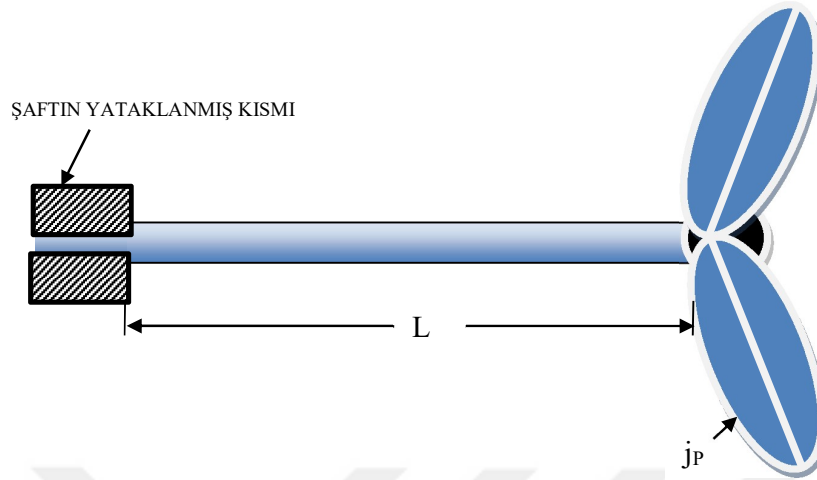
$$\omega_{nb}^6 - \left(\frac{22,68 \cdot 10^9 + 0,57 \cdot 10^9}{9300} + \frac{0,57 \cdot 10^9 + 0,196 \cdot 10^9}{13368} + \frac{0,196 \cdot 10^9}{15479} \right) \omega_{nb}^4 + \left(\frac{22,68 \cdot 10^9 \cdot 0,57 \cdot 10^9 + 0,57 \cdot 10^9 \cdot 0,196 \cdot 10^9 + 0,196 \cdot 10^9 \cdot 22,68 \cdot 10^9}{9300 \cdot 13368} + \frac{0,57 \cdot 10^9 \cdot 0,196 \cdot 10^9 + 22,68 \cdot 10^9 \cdot 0,57 \cdot 10^9}{13368 \cdot 15479} + \frac{(22,68 \cdot 10^9 + 0,57 \cdot 10^9) \cdot 0,196 \cdot 10^9}{9300 \cdot 15479} \right) \omega_{nb}^2 - \frac{22,68 \cdot 10^9 \cdot 0,57 \cdot 10^9 \cdot 0,196 \cdot 10^9}{9300 \cdot 13368 \cdot 15479} = 0 \quad (5.69)$$

$$\omega_{nb}^6 - 2569963 \omega_{nb}^4 + 0,23 \cdot 10^{12} \omega_{nb}^2 - 1,316 \cdot 10^{15} = 0 \quad (5.70)$$

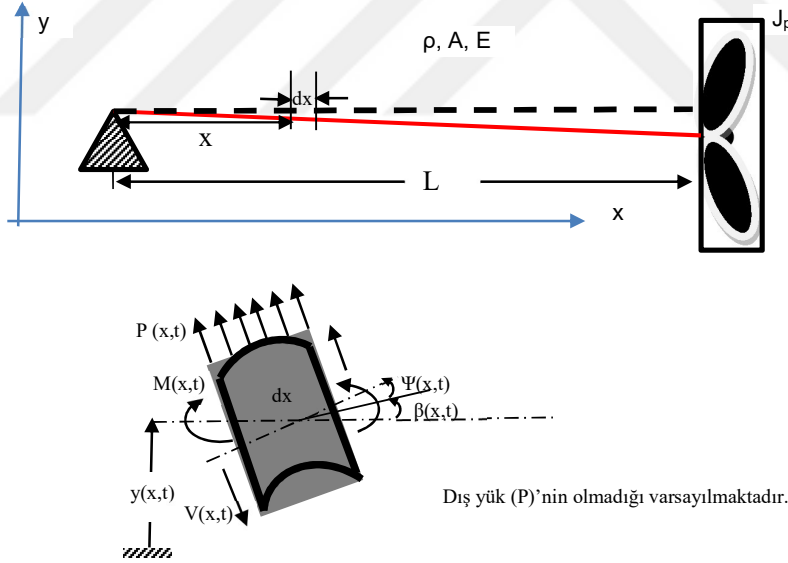
Yukarıdaki denklemin Mathematica Wolfram Programı ile hesaplanması neticesinde üç adet doğal rezonans frekansı bulunmuştur. Ancak söz konusu frekansların hiçbiri gerçek sayı düzleminde değildir, hepsi karmaşık düzlemedir. Bu nedenle, mevcut tasarım hatalıdır. Yani tasarımda kullanılması planlanan şaft ve redüktörün uygun olmadığı görülmektedir. Tasarımın uygun hale getirilmesi amacıyla, redüktördeki çevrim oranı, kullanılan millerin çapları ile uzunluklarının farklı olarak seçilmesi veya redüktörde kullanılan dişli çarkların farklı kütle atalet momentine sahip dişli çarklar ile değiştirilmesi suretiyle tasarımın uygun hale getirilebileceği değerlendirilmektedir.

6. PERVANE İLE YATAKLANMAMIŞ (DESTEKLENMEMİŞ) ŞAFTTAN OLUŞAN SİSTEME İLİŞKİN EĞİLME TİTREŞİMLERİN HAREKET DENKLEMLERİNİN BULUNMASI.

Aşağıdaki şekil 6.1’de, pervane ile yataklanmamış şafttan oluşan gemi sevk sisteminde meydana gelen eğilme titreşimine ait doğal frekansın parametrik hesaplamaları yapılacaktır. Burada önemli olan husus, pervane şaftı ne kadar desteklense de, geminin karina kısmında çıkan ve pervane ile bağlanan şaft kısmında herhangi bir destekleme yapılmamaktadır. Bu durumda, yataklanmayan şaftı, burulma deformasyonu ile birlikte eğilme deformasyonuna maruz bırakılmaktadır.



Şekil 6.1 Pervane ile Yataklanmamış Şafttan Oluşan Sistem



Şekil 6.2 Pervane ile Yataklanmamış Şafttan Oluşan Sistemin Matematik Modeli

Eğilmeden kaynaklanan Toplam Kinetik Enerjiyi iki kısımdan oluşur; Birinci kısım şaftın eğilme titreşiminden kaynaklanan kinetik enerji, dönmeden kaynaklanan kinetik enerji ve kütlede kaynaklanan kinetik enerji (Burada, yataklanmamış şaftın

kesit boyutlarının, boyuna oranla küçük olmasından kesme kuvvetinden kaynaklanan (kayma deformasyonu) kayma açısı (β) ihmal edilmiştir.);

Ayrıca, çökme (y) ile kayma ve dönme açıları arasındaki ilişki aşağıdadır.

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \Psi(x,t) + \beta(x,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \Psi(x,t) \quad (6.1)$$

$$E_{KE} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L J \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx \quad (6.2)$$

Eğilme momentinden kaynaklanan potansiyel enerji ve kütlelen kaynaklanan potansiyel enerji (Burada, yataklanmamış şaftın kesit boyutlarının, boyuna oranla küçük olmasından dolayı kesme kuvvetinden kaynaklanan (kayma deformasyonu) enerji (E_{EK}) ve kayma açısı (β) ihmal edilmiştir.);

$$E_{EK} = \frac{1}{2} \int_0^L V(x,t) \beta dx = \frac{1}{2} \int_0^L cGA \beta^2 dx \quad (6.3)$$

$$E_E = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + mgy(L,t) \quad (6.4)$$

Şafttaki $P(x,t)$ yüklemesinden oluşan iş;

$$W = \int_0^L P y dx \quad (6.5)$$

Hamilton Eşitliğini Şekil 6.2'deki modeldeki eğilme durumu için yazarsak eğer;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (-E_K - W + E_E) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial y(L,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \int_0^L J \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx - \int_0^L P y dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + mgy(L,t) \right] dt = 0 \quad (6.6)$$

Yukarıdaki denklem parçalara ayrılırsa;

Şaftın eğilme momentinden kaynaklanan gerilme enerjisi kısmı;

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) \delta y \Big|_0^L \right. \\ \left. + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) \delta y dx \right] dt \end{aligned} \quad (6.7)$$

Kütleden kaynaklanan potansiyel enerji;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} m g y(L,t) = \int_{t_1}^{t_2} m g \delta y(L,t) = 0 \quad (6.8)$$

Şaftın gerilmesinden kaynaklanan kinetik enerji;

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx dt = \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_0^L \left(\int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dt \right) dx \\ = - \int_0^L \left(\int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dt \right) dx \end{aligned} \quad (6.9)$$

Kütleden kaynaklanan kinetik enerji;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial y(L,t)}{\partial t} \right)^2 dt = - \int_{t_1}^{t_2} m \left(\frac{\partial y^2(L,t)}{\partial t^2} \right) \delta y(L,t) dt \quad (6.10)$$

Dönmeden kaynaklanan kinetik enerji;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^L J \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} J \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} \delta \Psi \Big|_L^0 dt = \int_{t_1}^{t_2} J \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x \partial t^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L dt \quad (6.11)$$

P yüklemesinden kaynaklanan iş;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L P y \, dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L P \delta y \, dx dt \quad (6.12)$$

Hamilton Eşitliği, yukarıdaki denklemler yazılarak tekrar düzenlenirse,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P \right] \delta y \, dx \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \Big|_0^L \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} m \left(\frac{\partial y^2}{\partial t^2} \right) \delta y \Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} J \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x \partial t^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L dt = 0 \quad (6.13)$$

Eğilmeden kaynaklanan titreşim hareketinin denklemi (Dış kuvvetin olmadığı varsayılırsa);

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t) = 0 \quad (6.14)$$

Sınır şartları ise;

$$y(0,t) = 0 \quad (6.15)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (6.16)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = J \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x \partial t^2} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} \right) = m \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial t^2} \quad (6.18)$$

Buradan;

$$a = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.19)$$

$$a^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.20)$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemi çözebilmek için aşağıdaki denklemden yararlanılır.

$$y(x,t) = Y(x)T(t) \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} - K^4 Y(x) = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (6.23)$$

$$K^4 = \frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (6.24)$$

Denklem 6.22 ve 6.23'deki diferansiyel denklemin çözümünden, Y(x) ve T(t) denklemleri elde edilir.

$$Y(x) = C_1 \cos Kx + C_2 \sin Kx + C_3 \cosh Kx + C_4 \sinh Kx \quad (6.25)$$

$$T(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (6.26)$$

Tablo 6.1'de verilen ve yukarıda da doğruluğu ispatlanan başlangıç ve sınır şartlarından;

Denklem 6.15'deki eşitliği yazalım;

$$y(0,t) = (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + C_3 \cosh 0 + C_4 \sinh 0) T(t) = 0 \quad (6.27)$$

$$y(0,t) = (C_1 + C_3) T(t) = 0 \quad (6.28)$$

Denklem 6.16'deki eşitliği yazalım;

$$EI \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = (-C_1 K^2 \cos 0 - C_2 K^2 \sin 0 + C_3 K^2 \cosh 0 + C_4 K^2 \sinh 0) T(t) = 0 \quad (6.29)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = EIK^2(-C_1 + C_3) T(t) = 0 \quad (6.30)$$

Denklem 6.28 ve 6.30'dan;

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (6.31)$$

Denklem 6.17'deki eşitliği yazalım;

$$EI(-C_1 K^2 \cos KL - C_2 K^2 \sin KL + C_3 K^2 \cosh KL + C_4 K^2 \sinh KL) T(t) = -J\omega^2(-C_1 K \sin KL + C_2 K \cos KL + C_3 K \sinh KL + C_4 K \cosh KL) T(t) \quad (6.32)$$

Denklem 6.18'deki eşitliği yazalım;

$$EI(C_1 K^3 \sin KL - C_2 K^3 \cos KL + C_3 K^3 \sinh KL + C_4 K^3 \cosh KL) T(t) = -m\omega^2(C_1 \cos KL + C_2 \sin KL + C_3 K \cosh KL + C_4 \sinh KL) T(t) \quad (6.33)$$

$C_1 = C_3 = 0$ eşitliğini dikkate alarak, denklem 6.30 ve 6.31'i katsayılar matrisi olacak şekilde, yeniden düzenlersek eğer;

$$\begin{pmatrix} -EIK^2 \sin KL + \omega^2 JK \cos KL & EIK^2 \sinh KL + \omega^2 JK \cosh KL \\ -EIK^3 \cos KL + \omega^2 m \sin KL & EIK^3 \cosh KL + \omega^2 m \sinh KL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.34)$$

Denklem 6.34'ün sıfır olabilmesi için $\text{DET}(G)$ 'nin sıfır olması gerekmektedir.

$$\text{DET}(G) = 0 \quad (6.35)$$

Denklem 6.34 açılırsa;

$$2EI\omega^2 K^2 [JK^2 \cos KL \cosh KL - m \sin KL \sinh KL] - K(\omega^4 Jm + E^2 I^2 K^4) [\cos KL \sinh KL - \sin KL \cosh KL] = 0 \quad (6.36)$$

Yukarıdaki eşitliğin sıfır olması için hiperbolik kısımlarının sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu nedenle, denklem 6.36'daki hiperbolik kısımları ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

$$JK^2 \cos KL \cosh KL - m \sin KL \sinh KL = 0 \quad (6.37)$$

$$\cos KL \sinh KL - \sin KL \cosh KL = 0 \quad (6.38)$$

Denklem 6.37 ve 6.38'den faydalanılarak aşağıdaki denklem 6.39' e ulaşılmaktadır.

$$JK^2 \cosh^2 KL - m \sinh^2 KL = 0 \quad (6.39)$$

Aşağıdaki denklem 6.39'deki hiperbolik fonksiyonların matematiksel işlemlerine ilişkin özel kurallardan faydalanılırsa;

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 \quad (6.40)$$

Aşağıdaki denklem 6.41'ye ulaşılmaktadır.

$$JK^2 (1 + \sinh^2 KL) - m \sinh^2 KL = 0 \quad (6.41)$$

$$\sinh^2 KL = \frac{JK^2}{m - JK^2} \quad (6.42)$$

$$\sinh KL = \sqrt{\frac{JK^2}{m - JK^2}} \quad (6.43)$$







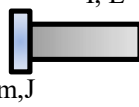
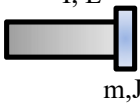
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (6.44)$$

Denklem 6.44'deki yaklaşım denklem 6.43'de kullanılırsa;

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{m}{J} \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K_n L)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^2}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K_n L)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^2 + 1} \right]^2 \frac{E I}{\rho A}} \quad (6.45)$$

Denklem 6.45 ile şekil 6.1'de verilen sistemin, eğilme titreşimi doğal frekansına ait denkleme ulaşılmaktadır. Aşağıdaki tabloda farklı sistemlere ait başlangıç ve sınır şartları verilmektedir.

Tablo 6.1 Eğilme Titreşiminde Başlangıç ve Sınır Şartları. [13]

SİSTEMİN SAĞ TARAFI		SİSTEMİN SOL TARAFI	
Sınır Şartları (x=0)	Matematik Model	Matematik Model	Sınır Şartları (x=L)
Serbest (bağımsız) uc	 I, E $EF \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) \right) = 0$	 I, E $EF \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) \right) = 0$	Serbest (bağımsız) uc
Sabit uc	 $y(0,t) = 0$ $\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0$	 $y(L,t) = 0$ $\frac{\partial y(L,t)}{\partial x} = 0$	Sabit uc
Mesnetli Uc	 I, E $y(0,t) = 0$ $EF \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0$	 I, E $y(L,t) = 0$ $EF \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0$	Mesnetli Uc
Kütleli uc	 I, E m, J $EF \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = -J \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x \partial t^2}$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} \right) = -m \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial t^2}$	 I, E m, J $EF \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = J \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x \partial t^2}$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} \right) = m \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial t^2}$	Kütleli uc

7. SONUÇ

Bu tezde; ana makine, mil, redüktör, pervane şaftı ve pervaneden oluşan 4 (dört) farklı gemi sevk sisteminin matematiksel modelleri çıkartılmıştır. Bu matematiksel modellere ilişkin doğal frekanslar ve rezonans bölgeleri parametrik olarak hesaplanmıştır. Ayrıca, beşinci model olarak bir gemi sevk sistemi tasarım yapılarak, doğal frekansları bulunmuştur. Sonuç olarak;

a. Tasarım aşamasında, gemi sevk sistemine ait doğal frekans veya frekansların hesaplanmaması durumunda, zorlama frekansının, sistemin doğal frekansı ile çakışması neticesinde sistem rezonans durumuna geçecek ve burulma titreşimleri büyük genlikler ile oluşarak sistemde büyük hasara yol açacaktır. Bu nedenle, tasarım öncesi sistemin doğal frekanslarının bulunması, gemi sevk tahrik sisteminin ekonomik ömrünü uzatmak bağlamında önemli bir detaydır.

b. Sisteme ilişkin doğal frekans hesaplamaları yapılmadan tasarlanan ve montajı tamamlanan gemi sevk sistemlerinde büyük genliklerde burulma titreşimleri meydana gelmesi durumunda ise; titreşim probleminin çözümüne yönelik olarak uygun bir materyalden yapılmış dinamik damperin sevk sisteminin uygun bir yerine montajı yapılması ile zararlı burulma titreşim problemlerinin ortadan kaldırılacağı değerlendirilmektedir.

c. Ayrıca, pervane şaftı sık yataklanmış olsa da, pervaneye kadar yataklanmamış bir kısım pervane mili (şaft) kalmaktadır. Bu şaft kısmı, önemsiz görünse de burulma titreşimi ile birlikte eğilme titreşimini de maruz kalmaktadır. Bu durumda, pervane şaftında burulmadan kaynaklanan deformasyonla birlikte eğilmeden kaynaklanan bir deformasyonla da karşılaşılmaktadır. Bu nedenle, gemi sevk sistemlerinin tasarımında bu hususunda dikkate alınması gerekmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Alarçin, F. ve Korkmaz, F. C., ResearchArticle / Araştırma Makalesi Vibration Analysis Of Ship Main Engine And Shaft System, International Journal of MechanicalSciences, 310-319 Yıldız Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Denizcilik Fakültesi, Gemi Makineleri İşletme Mühendisliği Bölümü, Yıldız-İSTANBUL, 2012.
- [2] Talukdar, S. Vibration Of Continous Systems, Departman Of Civil Engineering Indian İnstitute Of Technology Guwahati-781039
- [3] Özgen, O., Pervane Şaftı Titreşim Analizi, Yıldız Teknik Üniversitesi, FBE Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Ana Bilim Dalı, İstanbul, 37 sayfa. (Yüksek Lisans Tezi), 2010.
- [4] Okay, F. C. (P= 4900 kW n=170 d/d Üreten Bir Makineye Bağlı Şaft Hesapları, Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Gemi İnşaatı Mühendisliği Bölümü, İstanbul, 28 sayfa. (Bitirme Projesi), 1999.
- [5] Ünsan, Y., ve İnsel, M., “Gemi İnşaatı Sektöründe Karşılaşılan Problemin Çözümü İçin Yapılan Tam Ölçekli Endüstriyel Ölçümler ve Örnekler”, Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, Mühendislik Ölçmeleri STB Komisyonu, 2. Mühendislik Ölçmeleri Sempozyumu, 23-25 Kasım 2005, İstanbul, 2005.
- [6] Hara, T., Furukawa, T. AndShoda, K., “Vibration Analysis of Main Engine Shaft System by Building Block Approach”, Bulletin of the M.E.S.J,1995; 77-81.
- [7] Maurice, L.A. Rotating Machinery Vibrations-From Analysis toTroubleshooting, Part 1, 3 Torsional Rotor Vibration Analysis Models, Marcel DEKKER, New York, 2001; 104-131.
- [8] TAHRALI, N., Makine Dinamiği Mekanik Titreşimler Çözümlü Problemler 2. Fasikül Burulma Titreşimleri Eğitim Yayınları A.Ş., 1988; 20-90.
- [9] Kelly, S.G., Fundamentals of Mechanical Vibration 2th edition, the University of Akron, 1999; 61-418.
- [10] William W.SETO, Vibraciones Mecanicas Teoria y 225 Problemos Resuelios, Josué Arturo Cedeño González, Ingeniería Mecánica Industrial Universidad Tecnológica de Panamá, 2014, 114-174
- [11] Thomson, W.T., DAHLEH;D.M., Theory of Vibrations With Appliation, Fifth Edition Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1998; 16-369

- [12] Wilson, W.Ker Torsional Vibration Problems, Chapman&Hall Ltd., London, 1967, 1-700
- [13] Singiresu, S.R. Vibration Of Continous Systems, Jonh Wiley&Sons, Inc, University Of Miami, Coral Gables, Florida, 2007; 271-315
- [14] Tahralı, N. ve Bağdatlı, S. M., Mekanik Titeşimler ve İzolasyonu (Teorik Açıklamalar ve Uygulamalar) Celal Bayar Üniversitesi Yayınları Yayın No:0012, 2014; 49-150.
- [15] Tahralı, N., Kaya, F., Yüksek, İ. ve Güçlü, R. (Makine Dinamiği 3. Baskı Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi, 1999; 149-160.
- [16] <http://web.itu.edu.tr/~ytemel/files/week9.pdf>
- [17] Tahralı, N. ve Atik, E., Konstrüksiyon Elemanlarında Güvenilirlik ve Ömür (Hesapları (Teorik Açıklamalar ve Uygulamalar) Celal Bayar Üniversitesi Yayınları Yayın No: 0005, 2012; 80-115.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şevki AKKOCA

Doğum Yeri ve Yılı : İstanbul, 1982

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : sevkiakkoca@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Karşıyaka Lisesi, 1999

Lisans : Ankara Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Fizik Mühendisliği Bölümü, 2003

Mesleki Deneyim

K.K.K.lığı 4'üncü Ana Bakım Merkezi Komutanlığı, Ankara 2007-2013

Dz.K.K.lığı İzmir Tersanesi Komutanlığı, İzmir 2013-.....(halen)