T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

REGLE YÜZEYLER İÇİN YENİ ÇATILAR VE YENİ OFSETLER

Tolga KASIRGA

Danışman
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

MANİSA–2017

Tolga KASIRGA

REGLE YÜZEYLER İÇİN YENİ ÇATILAR VE YENİ OFSETLER

2017

TEZ ONAYI

Tolga KASIRGA tarafından hazırlanan **"Regle Yüzeyler için Yeni Çatılar ve Yeni Ofsetler"** adlı tez çalışması 12/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Mustafa KAZAZ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU** Gazi Üniversitesi
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT** Manisa Celal Bayar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Tolga KASIRGA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

E^3	3-boyutlu Öklid uzayı.
$\varphi(s,v)$	Regle yüzeylerin parametrik ifadesi.
$\vec{q}$	Regle yüzeyin birim anadoğrusu.
$\vec{c}(s)$	Boğaz çizgisi.
s	Boğaz çizgisinin yay parametresi.
s_1	$\vec{q}$ birim vektörünün küresel göstergesinin yay parametresi.
$\vec{h}$	Merkez normal vektörü.
$\vec{a}$	Merkez teğet vektörü.
$\vec{W}$	Darboux vektörü.
$M_{\ell}^{\ell^*}$	$M_{\ell}^{\ell^*}$ -tipli yüzey ofsetleri (ℓ -ofsetler).
$M_{d}^{\ell^*}$	$M_{d}^{\ell^*}$ -tipli yüzey ofsetleri.
$M_{h}^{\ell^*}$	$M_{h}^{\ell^*}$ -tipli yüzey ofsetleri.
S	Regle yüzey.
C	Regle yüzeyin boğaz noktası.
$k_1(s)$	Regle yüzeyin birim anadoğrularının küresel göstergesi.
κ	Regle yüzeyin konisel eğrilik fonksiyonu.
k	Regle yüzeyin dayanak eğrisi.
$\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$	Regle yüzeyin Frenet çatısı.
$\vec{u}$	Birim sabit vektör.
$\vec{m}$	Regle yüzeyin birim normal vektörü.
$\vec{m}_0$	Normlanmamış yüzey normali.
$\{\vec{h},\vec{\ell},\vec{d}\}$	Regle yüzeyin alternatif çatısı.
δ	Yüzeyin dağıtma parametresi.
$\{\varphi,\varphi^*\}$	Ofset çifti.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum Danışman Hocam Prof. Dr. Mustafa KAZAZ’a, lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu zamanlarında desteğini esirgemeyen ve her konuda bana yardımcı olan Sevgili Hocam Arş. Gör. Onur KAYA’ya ve öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Tolga KASIRGA
Manisa, 2017

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Regle Yüzeyler İçin Yeni Çatılar ve Yeni Ofsetler

Tolga KASIRGA

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

Bu tez çalışmasında diferansiyel geometrinin önemli konularından olan regle yüzeyler için yeni bir çatı ve bu çatıya göre tanımlanan yeni ofsetler tanımlanmıştır. Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümü olan birinci bölümde regle yüzeyler teorisinin önemine ilişkin literatür bilgisi ve ofset yüzeylerinin bilinen türlerinin tanımı verilmiştir.

İkinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 te regle yüzeyler teorisine değinilmiştir. Regle yüzeylerin boğaz çizgileri boyunca tanımlı olan Frenet çatıları hatırlatılmıştır. Ayrıca bu çatıya göre Bertrand ve Mannheim ofsetlerinin ve slant regle yüzeylerin tanım ve karakterizasyonları verilmiştir.

Üçüncü bölümde regle yüzeylerin boğaz çizgileri boyunca yeni bir çatı tanımlanmıştır. Bu çatı alternatif çatı olarak adlandırılmış ve bu çatı için türev denklemleri bulunmuştur.

Dördüncü bölümde regle yüzeyler için dört yeni ofset tanımlanmıştır. Bu ofsetleri karakterize eden denklemler verilerek, ofset yüzeylerinin açılabilir olma şartları bulunmuştur. Bu yeni ofsetlerden bazılarının slant regle yüzeylerle ilişkilerini veren sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca Bertrand ofsetlerinin alternatif çatıya göre karakterizasyonları verilmiştir.

Bu tez çalışmasının orijinal bölümleri üçüncü ve dördüncü bölümlerdir.

Anahtar Kelimeler: Regle yüzey, açılabilir yüzey, alternatif çatı, konisel eğrilik, ofset yüzeyi.

2017, 42 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

New Frames and New Offsets for Ruled Surfaces

Tolga KASIRGA

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

In this thesis, a new frame and new offsets for ruled surfaces, which are the important topics of differential geometry, have been defined. The thesis consists of four sections.

In the first section as given introduction, a literature information about the importance of ruled surfaces and definitions of well-known types of offset surfaces have been given.

In the Second Section, it has been mentioned the theory of ruled surfaces in the 3-dimensional Euclidean space E^3. The Frenet frame defined along the striction line of a ruled surface has been reminded. Moreover, definitions and characterizations of Bertrand and Mannheim offsets of ruled surfaces and of slant ruled surfaces according to Frenet frame have been given.

In the third section, a new orthonormal frame along the striction curve of a ruled surface has been defined. This frame has been called alternative frame and derivative formulas for this new frame have been obtained.

In the fourth section, four new offsets of ruled surfaces have been defined. The equations characterizing these new offsets have been given and some conditions for offset surfaces to be developable have been obtained. Some results giving the relationships between some of these new offsets and slant ruled surfaces have been obtained. Furthermore, the characterizations for Bertrand offsets have been given according to alternative frame.

The original part of this thesis are the third and fourth sections.

Keywords: Ruled surface, developable surface, alternative frame, konical curvature, offset surface.

2017,42 pages

1. GİRİŞ

Uzayda bir doğrunun bir eğri boyunca sürekli hareketiyle oluşan bir yüzey, genel olarak regle yüzey veya doğrusal yüzey olarak adlandırılır. Bu harekette eğriye dayanak eğrisi, doğruya da anadoğru adı verilir. Yani regle yüzeyler doğru aileleri tarafından oluşturulan yüzeylerdir. Regle yüzeyler teorisi diferansiyel geometride ve bazı mühendislik dallarında önemli bir yere sahiptir. Özellikle kinematikte ve bilgisayar destekli dizayn problemlerinde bu yüzeyler yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Örneğin, bir uzaysal harekette cisimlerin kinematik özellikleri ve eğrilik teorileri regle yüzeyler ve bu yüzeylerin çatıları yardımıyla incelenir [1]. Ayrıca bu yüzeylerin hesaplamalı geometrisi bilgisayar destekli geometrik tasarım alanında da kullanışlıdır [2].

Regle yüzeyler teorisinin en önemli konularından biri regle yüzey ofsetleridir. Regle yüzeylerin bilinen en yaygın ofsetleri Ravani ve Ku (1991) tarafından verilen Bertrand ofsetleri ile Orbay ve Ark. (2009) tarafından verilen Mannheim ofsetleridir. Yüzeylerin boğaz çizgileri boyunca Frenet vektörlerinin kendi içlerinde lineer bağımlı olması durumlarına bağlı olarak tanımlanan bu yüzeyler, regle yüzeyler teorisinin önemli bir bölümünü teşkil eder ve birçok matematikçi tarafından çeşitli uygulamaları ile birlikte farklı uzaylarda çalışılmıştır. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Regle yüzeyler teorisinde yeni bir kavram da slant regle yüzey kavramıdır. Slant regle yüzeyler ilk defa Önder (2013) tarafından tanımlanmış ve daha sonra Önder ve Kaya (2013,2015) tarafından farklı karakterizasyonları ortaya konulmuştur.

Bu tez çalışmasında regle yüzeyler için Frenet çatısının birim Darboux vektörü kullanılarak yeni bir çatı tanımlanmış ve bu çatıya göre alternatif eğrilikler ve türev denklemleri bulunmuştur. Daha sonra bulunan bu çatıya göre regle yüzeyler için yeni ofsetler tanımlanmıştır. Her bir ofset tipi için ilgili karakterizasyonlar ve açılabilirlik şartları incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. E^3 3-boyutlu Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında yüzeylerin geometrisi için Karger ve Novak (1978) tarafından verilen bazı temel tanım ve teoriler verilmiştir.

$\vec{k} = \vec{k}(s)$, E^3 uzayının bir açık alt aralığında tanımlı regüler bir eğri ve $\vec{q} = \vec{q}(s)$ E^3 uzayında yönlü bir doğrunun birim doğrultman vektörü olmak üzere, bir S regle yüzeyi, $\vec{q}$ doğrusunun $\vec{k}$ eğrisine dayanarak sürekli bir hareket yapması sonucu oluşan özel bir yüzeydir ve

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{k}(s) + v\vec{q}(s),\ v \in IR, \tag{2.1}$$

parametrizasyonu ile verilir. Yüzeyin $s = sabit$ parametre eğrileri yüzey üzerindeki doğrulardır. Bu doğrulara yüzeyin anadoğruları denir. $v = 0$ için elde edilen parametre eğrisi $\vec{k} = \vec{k}(s)$ olup, yüzeyin dayanak (üreteç) eğrisi olarak adlandırılır. Özel olarak $\vec{q}$ vektörü sabitse, bu takdirde, yüzeye silindirik regle yüzey, aksi takdirde, silindirik olmayan regle yüzey denir [1].

Bir S regle yüzeyinin birim normal vektörü (2.1) denkleminden

$$\vec{m} = \frac{\vec{\varphi}_s \times \vec{\varphi}_v}{\left\|\vec{\varphi}_s \times \vec{\varphi}_v\right\|} = \frac{\left(\dot{\vec{k}} + v\dot{\vec{q}}\right)\times\vec{q}}{\left\|\left(\dot{\vec{k}} + v\dot{\vec{q}}\right)\times\vec{q}\right\|}, \tag{2.2}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\dot{\vec{k}} = d\vec{k}/ds$ ve $\dot{\vec{q}} = d\vec{q}/ds$ olarak tanımlıdır. Şimdi, yüzeyin aynı anadoğrusunun $v_1 \neq v_2$ gibi farklı iki noktasındaki normal vektörleri düşünülürse, bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$\left[\left(\dot{\vec{k}} + v_1\dot{\vec{q}}\right)\times\vec{q}\right]\times\left[\left(\dot{\vec{k}} + v_2\dot{\vec{q}}\right)\times\vec{q}\right] = \left(v_1 - v_2\right)\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right|\vec{q}, \tag{2.3}$$

bulunur. Burada, $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = \det\left(\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right)$ dir. Eğer (2.3) denkleminde $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = 0$ ise, aynı anadoğrunun her noktasında normal vektörleri aynı doğrultuda olup yüzeyin tekil olmayan noktalarında teğet düzlemler aynıdır. Dolayısıyla, teğet düzlemin bir anadoğru boyunca yüzeye temas ettiği söylenebilir. Böyle bir anadoğruya torsal anadoğru denir. Eğer $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| \neq 0$ ise aynı anadoğrunun her noktasında yüzeyin teğet düzlemleri farklı olur. Böyle bir anadoğruya da torsal olmayan anadoğru denir [1].

Tanım 2.1. ([1]) Bütün anadoğruları torsal olan bir regle yüzeye açılabilir regle yüzey denir. Aksi halde regle yüzey, açılamayan (aykırı) regle yüzey olarak adlandırılır.

Teorem 2.1. ([1]) Bir S regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = 0$ olmasıdır.

Örnek 2.1. ([1]) Bir $\vec{k} = \vec{k}(s)$ birim hızlı uzay eğrisinin teğetleri tarafından üretilen regle yüzey göz önüne alınsın. Bu yüzeye $\vec{k}(s)$ eğrisinin teğetler yüzeyi denir ve parametrik denklemi

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{k}(s) + v\dot{\vec{k}}(s),$$

ile verilir. Bu durumda, $\vec{q} = \dot{\vec{k}}$ olup,

$$\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = \left|\dot{\vec{k}},\ \dot{\vec{k}},\ \ddot{\vec{k}}\right| = 0,$$

olduğundan, Teorem 2.1‘den bir uzay eğrisinin teğetler yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

Benzer şekilde, koni, silindir ve düzlemlerin açılabilir regle yüzeyler oldukları basitçe görülebilir.

Aykırı bir regle yüzeyin birim normal vektörü $\vec{m}(s,v)$, yüzeyin $s = s_0$ gibi torsal olmayan bir anadoğrusu üzerinde, $v \to \pm\infty$ için bir $\vec{a}$ vektörüne yakınsasın. Buradan, (2.2) eşitliğinden

$$\vec{a} = \lim_{v\to\pm\infty} \vec{m}(s_0,v) = \frac{\vec{q}\times\dot{\vec{q}}}{\left\|\dot{\vec{q}}\right\|}, \tag{2.4}$$

elde edilir.

Tanım 2.2. ([1]) Aykırı bir regle yüzeyin s_0 anadoğrusundan geçen ve (2.4) eşitliği ile verilen $\vec{a}$ vektörüne dik olan düzleme asimptotik düzlem denir. Yüzeyin s_0 anadoğrusundan geçen ve asimptotik düzleme dik olan düzlem ise merkez düzlem olarak adlandırılır. Bu iki düzlemin değme noktası olan C noktasına s_0 anadoğrusunun boğaz noktası adı verilir. C noktasından geçen, asimptotik düzleme ve merkez düzleme dik olan doğrular ise, sırasıyla, merkez teğet ve merkez normal doğruları olarak adlandırılır.

$\vec{q}$ ve $\dot{\vec{q}}$ vektörlerinin birbirlerine dik olduğu ve (2.4) eşitliği kullanılarak, $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = \frac{\dot{\vec{q}}}{\left\|\dot{\vec{q}}\right\|}, \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır ve C boğaz noktasının v parametresini belirlemek için $\vec{h} \times \vec{m} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$v = -\frac{\left\langle \dot{\vec{k}},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle}{\left\langle \dot{\vec{q}},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle},$$

bulunur. Böylece aşağıdaki tanıma ulaşılır:

Tanım 2.3. ([1, 10, 11]) Aykırı bir regle yüzeyin bütün anadoğruları üzerindeki boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz çizgisi (sitriksiyon eğrisi) denir. Boğaz çizgisinin parametrik denklemi;

$$\vec{c}(s) = \vec{k}(s) - \frac{\left\langle \dot{\vec{k}},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle}{\left\langle \dot{\vec{q}},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle}\vec{q},$$

ile verilir.

Teorem 2.2. ([1]) Aykırı bir regle yüzeyin dayanak eğrisinin boğaz çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\left\langle \dot{\vec{k}},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle = 0$ olmasıdır.

Eğer aykırı bir regle yüzeyde dayanak eğrisi boğaz çizgisi olarak seçilirse, bir $(s, 0)$ noktasında normlanmamış yüzey normali $\vec{m}_0$ olmak üzere, (2.2) eşitliğinden

$$\vec{m}_0 = \dot{\vec{k}} \times \vec{q},$$

bulunur. Dolayısıyla, $\vec{h} \times \vec{m}_0 = 0$ olacağından,

$$\dot{\vec{q}} \times \left(\dot{\vec{k}} \times \vec{q}\right) = \left\langle \dot{\vec{q}},\, \vec{q} \right\rangle \dot{\vec{k}} - \left\langle \dot{\vec{q}},\, \dot{\vec{k}} \right\rangle \vec{q} = 0,$$

olur ve buradan, $\dot{\vec{q}}$ ve $\dot{\vec{k}} \times \vec{q}$ vektörleri lineer bağımlı olup, d bir reel sayı olmak üzere $\dot{\vec{k}} \times \vec{q} = \delta \dot{\vec{q}}$ yazılabilir. Böylece, $\left\langle \dot{\vec{k}} \times \vec{q},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle = \delta \left\langle \dot{\vec{q}},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle$ yazılabileceğinden

$$\delta = \frac{\left\langle \dot{\vec{k}} \times \vec{q},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle}{\left\langle \dot{\vec{q}},\, \dot{\vec{q}} \right\rangle},$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeye yüzeyin dağıtma parametresi denir.

Sonuç 2.1. ([1, 10, 11]) Bir S regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağıtma parametresinin sıfır olmasıdır.

Tanım 2.4. ([1]) S aykırı bir regle yüzey, C bu yüzeyin bir anadoğrusu üzerindeki boğaz noktası ve $\vec{q}$, $\vec{h}$ ve $\vec{a}$ vektörleri, sırasıyla, anadoğrunun birim doğrultman vektörü, merkez normal ve merkez teğet vektörleri olmak üzere, $\{C, \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ortonormal çatısına S aykırı regle yüzeyinin Frenet çatısı denir.

Regüler bir S regle yüzeyinin boğaz çizgisi dayanak eğrisi olarak alınsın. Bu takdirde, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s),\ \|\vec{q}(s)\| = 1, \tag{2.6}$$

ile verilir. Eğer S açılabilir bir regle yüzeyse, boğaz çizgisinin teğet vektörleri anadoğrularla çakışır [2]. Bu takdirde, boğaz çizgisinin teğet vektörü için

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = \vec{q} \tag{2.7}$$

yazılabilir.

Eğer S regle yüzeyi üzerindeki bütün anadoğruların $\vec{q}(s)$ vektörleri orijin noktasına bağlanırsa, bu doğrular bir koni oluşturur. Bu koniye S yüzeyinin yönlü konisi denir. Yönlü koni düşüncesi, bir uzay eğrisinin teğetler göstergesi düşüncesinin regle yüzeylere bir uyarlaması olarak düşünülebilir. Dolayısıyla birim doğrultman vektörlerinin uç noktaları birim küre üzerinde küresel bir eğri çizer. Bu eğriye yüzeyin küresel göstergesi denir ve $\vec{k}_1$ ile gösterilir. $\vec{k}_1$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi de s_1 ile ifade edilir [1].

Eğer S yüzeyinin Frenet çatısının $\vec{a}(s)$ merkez teğet vektörleri orijin noktasına bağlanırsa, bu vektörlerin uç noktaları birim küre üzerinde yay uzunluğu parametresi s_3 olan bir $\vec{k}_3$ küresel eğrisi çizer. Buradan

$$s_3 = \int_0^{s_1} \|\vec{a}'\| ds_1 = \int_0^{s_1} \kappa ds_1 \;\Rightarrow\; \frac{ds_3}{ds_1} = \|\vec{a}'\| = \kappa,$$

eşitliğine ulaşılır [1].

Teorem 2.3. ([1]) S aykırı bir regle yüzey olmak üzere, S yüzeyinin yönlü konisinin $\{O, \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısının, $\vec{k}_1$ küresel göstergesinin s_1 yay parametresine göre Frenet türev formülleri,

$$\begin{cases} \vec{q}' = \vec{h}, \\ \vec{h}' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}, \\ \vec{a}' = -\kappa\vec{h}, \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklindedir. Burada $\kappa = \dfrac{ds_3}{ds_1} = \|\vec{a}'\|$ yüzeyin konisel eğriliğidir.

Frenet türev formülleri kinematik olarak şöyle yorumlanabilir: s zaman parametresi olarak alındığında, eğer $\vec{q}$ anadoğruları yönlü koniyi çiziyorsa, bu takdirde, $\{C; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ hareketli çatısı (2.8) ile verilen çatıya göre hareket eder. Bu hareket, ani bir ötelemeden ziyade,

$$\vec{W} = \kappa\vec{q} + \vec{a},$$

Darboux vektörüyle verilen açısal hızlı bir ani dönme içerir. Darboux vektörünün yönü ani dönme ekseninin yönü ile aynıdır ve uzunluğu

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{1+\kappa^2},$$

kadardır. Böylece, (2.8) ile verilen Frenet türev formülleri

$$\vec{q}' = \vec{W} \times \vec{q}, \qquad \vec{h}' = \vec{W} \times \vec{h}, \qquad \vec{a}' = \vec{W} \times \vec{a},$$

ile de verilebilir.

Aykırı bir S regle yüzeyinin boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olsun. Buradan,

$$\kappa = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{ds_3}{ds_1} = \frac{ds_3}{ds}\frac{ds}{ds_1},$$

olup, $\kappa_2 = \dfrac{ds_3}{ds}$ ve $\kappa_1 = \dfrac{ds_1}{ds}$ alınırsa $\kappa = \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}$ olur. Burada, κ_1 ve κ_2 fonksiyonları, sırasıyla, regle yüzeyin birinci ve ikinci eğrilikleri olarak adlandırılır [1]. Böylece, (2.8) denklemleri $\kappa_1 = ds_1 / ds$ ile çapılarak aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 2.4. ([1]) S bir regle yüzey olsun. S yüzeyinin $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ Frenet çatısının yüzeyin boğaz çizgisinin s yay parametresine göre Frenet türev formülleri

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{q}}{ds} = \kappa_1 \vec{h}, \\ \dfrac{d\vec{h}}{ds} = -\kappa_1 \vec{q} + \kappa_2 \vec{a}, \\ \dfrac{d\vec{a}}{ds} = -\kappa_2 \vec{h}, \end{cases} \tag{2.9}$$

ile verilir.

Tanım 2.5. ([12]) S_1 ve S_2 regle yüzeylerinin Frenet çatıları, sırasıyla, $\{\vec{q}_1,\, \vec{h}_1,\, \vec{a}_1\}$ ve $\{\vec{q}_2,\, \vec{h}_2,\, \vec{a}_2\}$ olsun. Eğer yüzeylerin boğaz çizgileri boyunca karşılıklı noktalarında merkez normalleri çakışıyorsa, yani $\vec{h}_1 = \vec{h}_2$ oluyorsa S_2 yüzeyine S_1 yüzeyinin bir Bertrand ofseti denir.

Tanım 2.6. ([13]) S_1 ve S_2 regle yüzeylerinin Frenet çatıları, sırasıyla, $\{\vec{q}_1,\, \vec{h}_1,\, \vec{a}_1\}$ ve $\{\vec{q}_2,\, \vec{h}_2,\, \vec{a}_2\}$ olsun. Eğer yüzeylerin boğaz çizgileri boyunca karşılıklı noktalarında $\vec{a}_1 = \vec{h}_2$ oluyorsa S_2 yüzeyine S_1 yüzeyinin bir Mannheim ofseti denir.

2.2 Slant Regle Yüzeyler

Tanım 2.7.([14]) S yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $\vec{c}(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s, boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere; S yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s); \qquad \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

parametrizasyonuyla verilsin. $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$, sırasıyla, yüzeyin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde birim ve sabit vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{q}$ anadoğruları $\vec{u}$ vektörü ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{q},\vec{u}\rangle = \cos\theta, \qquad \theta \in \left\{(0,\pi)-\frac{\pi}{2}\right\},$$

ise S regle yüzeyine q-slant regle yüzey denir. $\vec{u}$ vektörü de q-slant regle yüzeyin ekseni olarak adlandırılır.

Sonuç 2.2.([15]) S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\kappa = \text{sabit} \neq 0$ olmasıdır.

Tanım 2.8. ([15]) S yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $\vec{c}(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olmak üzere, S yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s); \qquad \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

parametrizasyonuyla verilsin. $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ sırasıyla S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde $\vec{u}$, birim ve sıfır olmayan sabit bir vektör olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü ile $\vec{u}$ vektörü sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{h},\vec{u}\rangle = \cos\theta = \text{sabit}, \ \theta \in \left\{(0,\pi)-\frac{\pi}{2}\right\},$$

ise, S regle yüzeyine h -slant regle yüzey denir.

Teorem 2.5.([15]) S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa'}{\left(1+\kappa^2\right)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0,$$

olmasıdır.

Tanım 2.9. ([16]) S yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $\vec{c}(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olmak üzere, S yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s,v)=\vec{c}(s)+v\vec{q}(s); \qquad \|\vec{q}(s)\|=1,$$

parametrizasyonuyla verilsin. Yüzeyin Frenet çatısının Darboux vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa S yüzeyine Darboux slant regle yüzey denir.

3. REGLE YÜZELERİN ALTERNATİF ÇATILARI

Bu bölümde regle yüzeylerin boğaz çizgisi boyunca Frenet çatısından farklı yeni bir alternatif çatı ve bu çatıya göre eğrilikler ve türev denklemleri verilecektir.

S bir regle yüzey ve S nin Frenet çatısı $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$, Darboux vektörü $\vec{W}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu κ olsun. Darboux vektörü, $\vec{W}=\kappa\vec{q}+\vec{a}$ olarak tanımlandığından $\vec{h}$ merkez normal vektörüne diktir. Dolayısıyla,

$$\vec{d}=\frac{\vec{W}}{\|\vec{W}\|}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}(\kappa\vec{q}+\vec{a}),$$

birim Darboux vektörü dikkate alınırsa, yeni bir $\vec{\ell}$ birim vektörü $\vec{d}\times\vec{h}=\vec{\ell}$ olarak tanımlanabilir. Bu durumda $\{\vec{h},\vec{\ell},\vec{d}\}$ üçlüsü S regle yüzeyinin boğaz çizgisi üzerinde yeni bir ortonormal çatı oluşturur. Bu çatıya regle yüzeyin alternatif çatısı denir. Bu bölümde bu çatı için Frenet benzeri türev formülleri verilecektir.

Teorem 3.1. S bir regle yüzey olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q},\,\vec{h},\,\vec{a}\}$ ve bu çatıdan elde edilen S nin yeni çatısı $\{\vec{h},\vec{\ell},\vec{d}\}$ olmak üzere bu çatının s_1 yay uzunluğu parametresine göre türev formülleri aşağıdaki gibidir;

$$\begin{bmatrix}\vec{h}'\\ \vec{\ell}'\\ \vec{d}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \gamma & 0\\ -\gamma & 0 & \mu\\ 0 & -\mu & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{h}\\ \vec{\ell}\\ \vec{d}\end{bmatrix}.$$

Burada $\gamma=\sqrt{1+\kappa^2}$ ve $\mu=\dfrac{\kappa'}{1+\kappa^2}$ olarak tanımlanır.

İspat: S yüzeyinin birim Darboux vektörü

$$\vec{d}=\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\,\vec{q}+\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\,\vec{a},$$

olduğundan,

$$\gamma=\sqrt{1+\kappa^2}\,,\quad \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}=\overline{\gamma}\,,\quad \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}=\frac{\kappa}{\gamma}=\overline{\kappa}$$

alınırsa, birim Darboux vektörü

$$\vec{d}=\overline{\kappa}\vec{q}+\overline{\gamma}\vec{a},$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, $\vec{\ell}$ vektörü

$$\vec{\ell} = \vec{d} \times \vec{h} = (\bar{\kappa}\vec{q} + \bar{\gamma}\vec{a}) \times \vec{h} = \bar{\kappa}\vec{a} - \bar{\gamma}\vec{q},$$

ile tanımlanır. Böylece $\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\}$ alternatif çatısı ile $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \vec{h} \\ \vec{\ell} \\ \vec{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\bar{\gamma} & 0 & \bar{\kappa} \\ \bar{\kappa} & 0 & \bar{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

ile verilir. (3.1) denklemlerinden

$$\begin{cases} \vec{\ell} = -\bar{\gamma}\vec{q} + \bar{\kappa}\vec{a} \\ \vec{d} = \bar{\kappa}\vec{q} + \bar{\gamma}\vec{a} \end{cases} \tag{3.2}$$

olup, (3.2) eşitliklerinden, $\bar{\gamma}^2 + \bar{\kappa}^2 = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} \vec{q} = -\bar{\gamma}\vec{\ell} + \bar{\kappa}\vec{d} \\ \vec{a} = \bar{\kappa}\vec{\ell} + \bar{\gamma}\vec{d} \end{cases} \tag{3.3}$$

bulunur. Böylece, (3.1) denklemlerine benzer olarak, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ile $\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\}$ alternatif çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\gamma} & \bar{\kappa} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\kappa} & \bar{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h} \\ \vec{\ell} \\ \vec{d} \end{bmatrix}$$

ile de verilebilir. Şimdi, (2.8) Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}, \tag{3.4}$$

olduğundan, (3.3) eşitlikleri (3.4) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \vec{h}' &= -(-\bar{\gamma}\vec{\ell} + \bar{\kappa}\vec{d}) + \kappa(\bar{\kappa}\vec{\ell} + \bar{\gamma}\vec{d}), \\ &= (\bar{\gamma} + \kappa\bar{\kappa})\vec{\ell} + (-\bar{\kappa} + \kappa\bar{\gamma})\vec{d} \\ &= (\bar{\gamma} + \kappa\bar{\kappa})\vec{\ell} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} + \frac{\kappa^2}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right)\vec{\ell} \\ &= \left(\sqrt{1+\kappa^2}\right)\vec{\ell} \\ &= \gamma\vec{\ell}, \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\vec{d} = \bar{\kappa}\vec{q} + \bar{\gamma}\vec{a}, \tag{3.5}$$

ile verilen birim Darboux vektörünün s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\vec{d}' = \overline{\kappa}'\vec{q} + \overline{\gamma}'\vec{a} \tag{3.6}$$

bulunur. (3.3) denklemleri kullanılarak (3.6) ifadesinden, $\mu = \overline{\kappa}'\,\overline{\gamma} - \overline{\kappa}\,\overline{\gamma}'$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{d}' &= \overline{\kappa}'\vec{q} + \overline{\gamma}'\vec{a}\\ &= \overline{\kappa}'(-\overline{\gamma}\,\vec{\ell} + \overline{\kappa}\,\vec{d}) + \overline{\gamma}'(\overline{\kappa}\,\vec{\ell} + \overline{\gamma}\,\vec{d})\\ &= (-\overline{\kappa}'\,\overline{\gamma} + \overline{\gamma}'\,\overline{\kappa})\vec{\ell}\\ &= -\mu\,\vec{\ell}\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, $\vec{\ell} = \vec{d} \times \vec{h}$ şeklinde tanımlı olduğundan bu ifadenin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\vec{\ell}' &= \vec{d}' \times \vec{h} + \vec{d} \times \vec{h}',\\ &= -\mu(\vec{\ell} \times \vec{h}) + \gamma(\vec{d} \times \vec{\ell})\\ &= -\gamma\,\vec{h} + \mu\,\vec{d}\end{aligned} \tag{3.7}$$

olup, S yüzeyinin $\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\}$ alternatif çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}\vec{h}' &= \gamma\vec{\ell},\\ \vec{\ell}' &= -\gamma\vec{h} + \mu\vec{d},\\ \vec{d}' &= -\mu\vec{\ell},\end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak bulunur. (3.8) türev denklemlerinin matris formu

$$\begin{bmatrix}\vec{h}'\\ \vec{\ell}'\\ \vec{d}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \gamma & 0\\ -\gamma & 0 & \mu\\ 0 & -\mu & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{h}\\ \vec{\ell}\\ \vec{d}\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$\gamma = \sqrt{1+\kappa^2} \text{ ve } \mu = \overline{\kappa}'\,\overline{\gamma} - \overline{\kappa}\,\overline{\gamma}' = \left(\frac{\overline{\kappa}}{\overline{\gamma}}\right)'\overline{\gamma}^2 = \frac{\kappa'}{1+\kappa^2}$$

dir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2. S yüzeyinin alternatif çatısı $\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\}$ olsun. Buna göre S, q-slant regle yüzeydir $\Leftrightarrow$ $\mu = 0$ dır.

Örnek 3.1. S regle yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s,v)=(0,0,s)+v(\cos s,\sin s,0)$$

parametrizasyonu ile verilsin (Şekil 3.1). Yüzeyin anadoğruları

$$\vec{q}=(\cos s,\sin s,0),$$

olduğundan, (2.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}=(-\sin s,\cos s,0),$$
$$\vec{a}=(0,0,1),$$

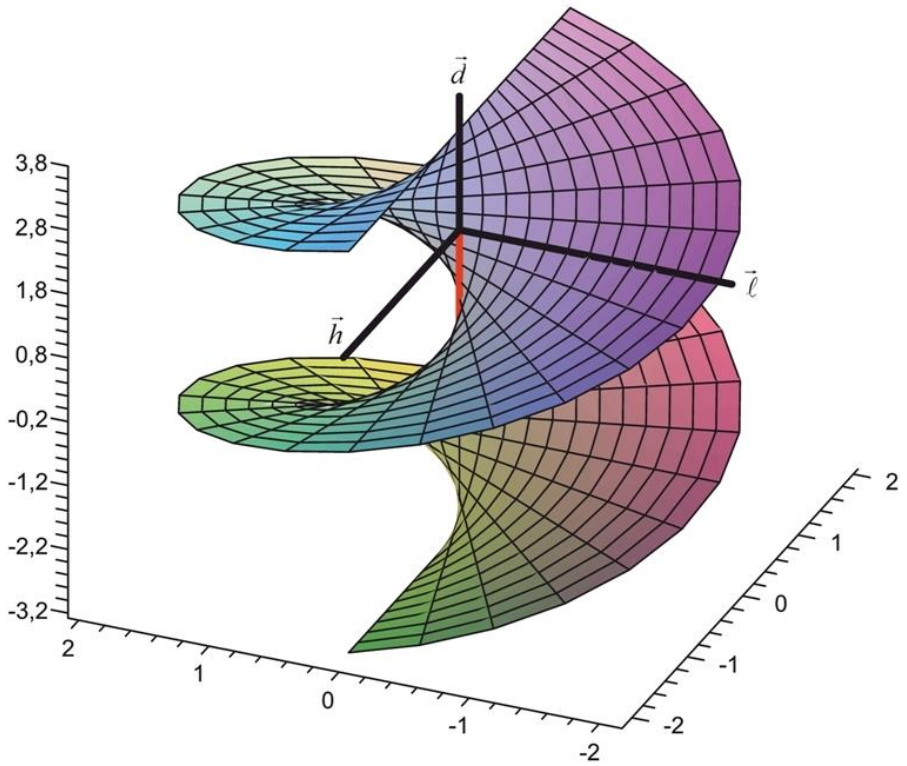
olup, yüzeyin $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ Frenet çatısı elde edilir. $\kappa=\|\vec{a}'\|$ olup, $\kappa=0$ bulunur. Böylece yüzeyin birim Darboux vektörü $\vec{d}=(0,0,1)$ şeklinde elde edilir. $\vec{\ell}=\vec{d}\times\vec{h}$ olduğundan

$$\vec{\ell}=(-\cos s,-\sin s,0),$$

olarak bulunur. Buradan, yüzeyin alternatif çatısı $\{\vec{h},\vec{\ell},\vec{d}\}$ nin vektörleri

$$\vec{h}=(-\sin s,\cos s,0),$$
$$\vec{\ell}=(-\cos s,-\sin s,0),$$
$$\vec{d}=(0,0,1),$$

şeklinde elde edilmiş olur. $\kappa=0$, $\gamma=\sqrt{1+\kappa^2}$ ve $\mu=\dfrac{\kappa'}{1+\kappa^2}$ olduğundan $\gamma=1,\ \mu=0$ dır.



Şekil 3.1. Helikoid yüzeyi

Örnek 3.2. S regle yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s,v)=\left(\cos(\sqrt{2}s),\ \sin(\sqrt{2}s),0\right)+v\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin(\sqrt{2}s),\cos(\sqrt{2}s),1\right)$$

parametrizasyonu ile verilsin (Şekil 3.2). Yüzeyin anadoğruları

$$\vec{q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin(\sqrt{2}s),\cos(\sqrt{2}s),1\right)$$

olduğundan, (2.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}=\left(-\cos(\sqrt{2}\,\mathrm{s}),-\sin(\sqrt{2}s),0\right)$$

$$\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(\sqrt{2}s),-\cos(\sqrt{2}s),1\right)$$

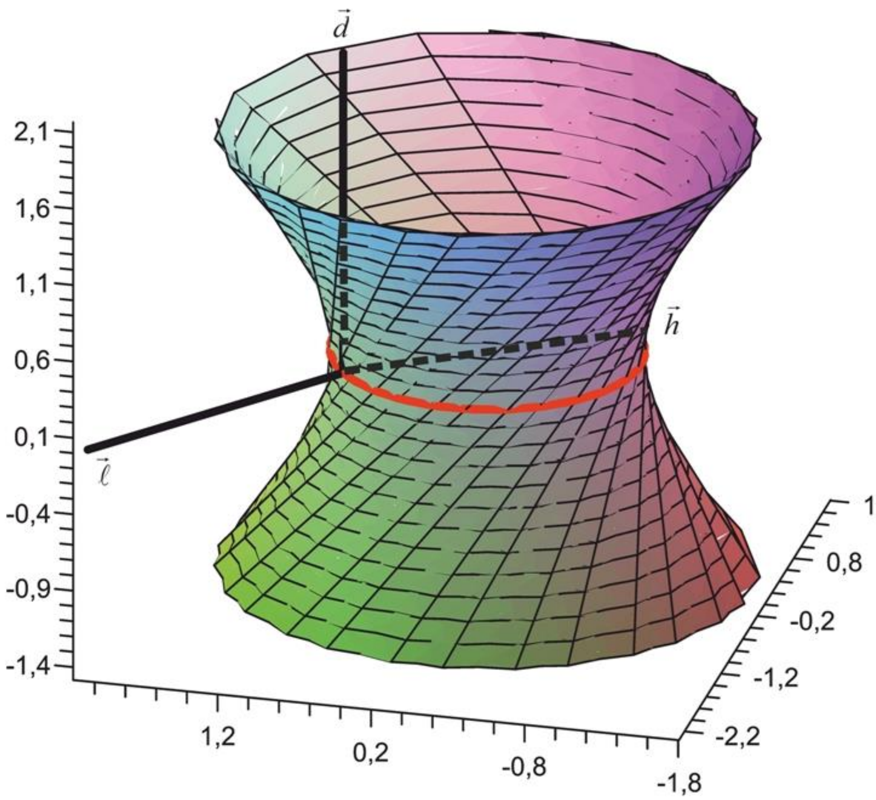
olup, yüzeyin $\left\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\right\}$ Frenet çatısı elde edilir. $\kappa=\left\|\vec{a}'\right\|$ olup, $\kappa=1$ bulunur. Böylece yüzeyin birim Darboux vektörü $\vec{d}=\left(0,0,1\right)$ şeklinde elde edilir. $\vec{\ell}=\vec{d}\times\vec{h}$ olduğundan

$$\vec{\ell}=\left(\sin(\sqrt{2}\,\mathrm{s}),\cos(\sqrt{2}\,\mathrm{s}),0\right),$$

olarak bulunur. Buradan, yüzeyin $\left\{\vec{h},\vec{\ell},\vec{d}\right\}$ alternatif çatısının vektörleri

$$\begin{aligned}\vec{h}&=\left(-\cos(\sqrt{2}\,\mathrm{s}),-\sin(\sqrt{2}s),0\right),\\ \vec{\ell}&=\left(\sin(\sqrt{2}\,\mathrm{s}),\cos(\sqrt{2}\,\mathrm{s}),0\right),\\ \vec{d}&=\left(0,0,1\right),\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiş olur. $\kappa=1$, $\gamma=\sqrt{1+\kappa^2}$ ve $\mu=\dfrac{\kappa'}{1+\kappa^2}$ olduğundan $\gamma=\sqrt{2}$ ve $\mu=0$ dır.



Şekil 3.2. Tek kanatlı hiperboloid

Örnek 3.3. S regle yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s,v)=\left(1-\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),1+\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),\frac{10s}{\sqrt{5}}\right)+v\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),2\right)$$

parametrizasyonu ile verilsin (Şekil 3.3). Açık olarak bu yüzey $\alpha(s)=\left(1-\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),1+\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),\frac{10s}{\sqrt{5}}\right)$ helisinin teğetleri tarafından üretilen açılabilir bir yüzeydir. Yüzeyin anadoğruları helisin teğetlerinden oluşacağından,

$$\vec{q}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),2\right)$$

olduğundan (2.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}=\left(\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),-\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),0\right)$$

$$\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),2\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right),-1\right)$$

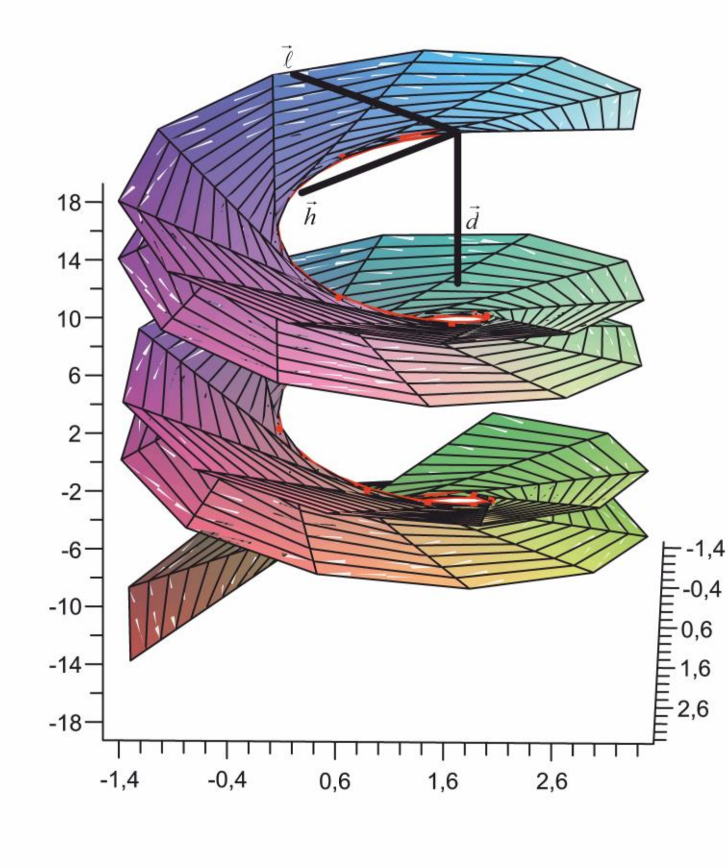
olup, yüzeyin $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ Frenet çatısı elde edilir. $\kappa = \|\vec{a}'\|$ olup, $\kappa = -2$ bulunur. Böylece yüzeyin birim Darboux vektörü $\vec{d} = (0,0,-1)$ şeklinde elde edilir. $\vec{\ell} = \vec{d} \times \vec{h}$ olduğundan

$$\vec{\ell} = \left(-\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right), -\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right), 0\right),$$

olarak bulunur. Buradan, yüzeyin $\{\vec{h},\vec{\ell},\vec{d}\}$ alternatif çatısının vektörleri

$$\vec{h} = \left(\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right), -\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right), 0\right),$$
$$\vec{\ell} = \left(-\sin\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right), -\cos\left(\frac{5s}{\sqrt{5}}\right), 0\right),$$
$$\vec{d} = (0,0,-1),$$

şeklinde elde edilmiş olur. $\kappa = -2$, $\gamma = \sqrt{1+\kappa^2}$ ve $\mu = \dfrac{\kappa'}{1+\kappa^2}$ olduğundan yüzeyin alternatif eğrilikleri de $\gamma = \sqrt{5}$ ve $\mu = 0$ dır.



Şekil 3.3. Helisin teğetlerinin oluşturduğu yüzey

4. REGLE YÜZEYLER İÇİN YENİ OFSETLER

Regle yüzeylerin Frenet çatısı dikkate alınarak tanımlanan en önemli iki ofsetler Bertrand ve Mannheim ofsetleridir. Bu bölümde alternatif çatı ele alınarak regle yüzeyler için yeni ofsetler tanımlanacaktır. Bu ofsetler, alternatif çatının vektörleri dikkate alınarak tanımlandığından isimlendirilmeler de çatı vektörleri cinsinden yapılacaktır.

4.1. Regle Yüzeylerin $M_{\ell}^{\ell^*}$-tipli Ofsetleri ($\ell-$ Ofsetler)

Bu bölümde, iki regle yüzeyin alternatif çatıları dikkate alınarak bu çatı elemanlarından ikinci vektörlerinin lineer bağımlı olması durumuna bağlı olarak yeni bir regle yüzey ofseti tanımlayacak ve bu ofset için karakterizasyonları vereceğiz.

Tanım 4.1.1. $\vec{\varphi}(s,v)=\vec{c}(s)+v\vec{q}(s)$ ve $\vec{\varphi}^*(s,v)=\vec{c}^*(s)+v\vec{q}^*(s)$ iki regle yüzey olsun. Bunların alternatif çatıları da, sırasıyla $\{\vec{h},\vec{\ell},\vec{d}\}$ ve $\{\vec{h}^*,\vec{\ell}^*,\vec{d}^*\}$ olsun. Eğer yüzeylerin boğaz çizgilerinin karşılıklı noktalarında $\vec{\ell}=\vec{\ell}^*$ eşitliği sağlanıyorsa bu yüzeylere $M_{\ell}^{\ell^*}$-tipli ofsetler veya ℓ-ofsetler denir. Bu durumda (φ,φ^*) ikilisi de ℓ-ofset çifti olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanıma göre $M_{\ell}^{\ell^*}$-tipli ofsetlerin alternatif çatıları arasındaki bağıntı matris formunda,

$$\begin{pmatrix}\vec{h}^*\\ \vec{\ell}^*\\ \vec{d}^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{h}\\ \vec{\ell}\\ \vec{d}\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde veya buna denk olarak

$$\begin{aligned}\vec{h}^* &= \cos\theta\,\vec{h}-\sin\theta\vec{d}\\ \vec{\ell}^* &= \vec{\ell}\\ \vec{d}^* &= \sin\theta\,\vec{h}+\cos\theta\vec{d}\end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitlikleriyle verilebilir. Burada $\theta=\theta(s)$, $\vec{h}$ ile $\vec{h}^*$ arasındaki açı fonksiyonudur. (4.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \cos\theta\,\vec{h}^*+\sin\theta\vec{d}^*\\ \vec{\ell} &= \vec{\ell}^*\\ \vec{d} &= -\sin\theta\,\vec{h}^*+\cos\theta\vec{d}^*\end{aligned} \tag{4.3}$$

olduğu kolayca görülür. Bu tanımlamalar dikkate alınırsa ℓ-ofsetlerin karakterizasyonları aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 4.1.1. (φ,φ^*) yüzeyleri ℓ-ofset çifti olsunlar. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

a) $\vec{h}$ ve $\vec{h}^*$ merkez normalleri arasındaki θ açısı sabittir.

b) Eğrilikler arasında

$$\int \mu^* ds_1^* = \cos\theta \int \mu ds_1 - \sin\theta \int \gamma ds_1$$

bağıntısı vardır. Burada s_1 ve s_1^* parametreleri, sırasıyla $\vec{q}$ ve $\vec{q}^*$ anadoğruları tarafından çizilen küresel eğrilerin yay uzunluğu parametreleridir.

İspat: a) (4.2) denklemlerinden, $\vec{d}^* = \sin\theta\vec{h} + \cos\theta\vec{d}$ olup, bu denklemin s_1 parametresine göre türevi alınır ve (3.8) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{d\vec{d}^*}{ds_1} = \theta' \cos\theta\,\vec{h} + (\gamma\sin\theta - \mu\cos\theta)\vec{\ell} - \theta'\sin\theta\vec{d}\,. \tag{4.4}$$

bulunur. Teorem 3.1 ile verilen türev formüllerini φ^* için düşünürsek, $\vec{d}^*$ vektörünün türevinin $\vec{\ell}^*$ ile lineer bağımlı olduğu görülür. Ayrıca $\vec{\ell} = \vec{\ell}^*$ olduğundan $\vec{h}$ ve $\vec{d}$ vektörlerinin katsayılarının sıfıra eşit olduğu sonucuna varırız. Böylece $\theta' = 0$, yani $\theta = \text{sabit}$ olur.

b)

$$\frac{d\vec{d}^*}{ds_1} = \frac{d\vec{d}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1} = -\frac{ds_1^*}{ds_1}\mu^*\vec{\ell}^*, \tag{4.5}$$

yazılabilir. $\vec{\ell} = \vec{\ell}^*$ ve θ sabit olduğundan, (4.4) denkleminden

$$\mu^*\frac{ds_1^*}{ds_1} = \mu\cos\theta - \gamma\sin\theta \tag{4.6}$$

bulunur. (4.6) denkleminin integralinden istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.1. φ ve φ^*, ℓ-ofset yüzeyleri olsunlar. Aşağıdaki diferansiyel denklemler sağlanır:

$$\bar{\gamma}^{*\prime} + \bar{\kappa}^*(\mu\cos\theta - \gamma\sin\theta) = 0 \tag{4.7}$$

$$\bar{\kappa}^{*\prime}\sin\theta+\gamma\bar{\gamma}^{*}=\lambda\cos\theta \tag{4.8}$$

$$\bar{\kappa}^{*\prime}\cos\theta-\mu\bar{\gamma}^{*}=-\lambda\sin\theta \tag{4.9}$$

Burada, $\bar{\gamma}^{*}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\kappa^{*}\right)^{2}}}$ ve $\bar{\kappa}^{*}=\dfrac{\kappa^{*}}{\sqrt{1+\left(\kappa^{*}\right)^{2}}}$ ve türevler s_1 parametresine göredir.

İspat : φ^{*} yüzeyini φ cinsinden yazalım. $\vec{q}^{*}$ anadoğrusu için (3.3) eşitliklerinden

$$\vec{q}^{*}=-\bar{\gamma}^{*}\vec{\ell}^{*}+\bar{\kappa}^{*}\vec{d}^{*} \tag{4.10}$$

yazılabilir. Burada $\vec{\ell}^{*}=\vec{\ell}$ ve (4.2) eşitliğinden $\vec{d}^{*}$ ın değeri (4.10) eşitliğinde yazılırsa

$$\vec{q}^{*}=\bar{\kappa}^{*}\sin\theta\vec{h}-\bar{\gamma}^{*}\vec{\ell}+\bar{\kappa}^{*}\cos\theta\vec{d} \tag{4.11}$$

bulunur. Buradan

$$\vec{q}^{*\prime}=\frac{d\vec{q}^{*}}{ds_1}=\frac{d\vec{q}^{*}}{ds_1^{*}}\frac{ds_1^{*}}{ds_1}=\lambda\vec{h}^{*},\quad\left(\frac{ds_1^{*}}{ds_1}=\lambda\right) \tag{4.12}$$

olur, (4.2) denkleminden $\vec{h}^{*}$ ın değeri yukarıda yazılırsa

$$\vec{q}^{*\prime}=\lambda\cos\theta\vec{h}-\lambda\sin\theta\vec{d} \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu ise $\vec{q}^{*\prime}$ vektörünün $\vec{h}$ ile $\vec{d}$ nin gerdiği düzlemde kaldığını gösterir. Benzer olarak, (4.11) in s_1 yayına göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}q^{*\prime}=&\left[\left(\bar{\kappa}^{*}\right)^{\prime}\sin\theta+\gamma\bar{\gamma}^{*}\right]\vec{h}+\left[\gamma\bar{\kappa}^{*}\sin\theta-\left(\bar{\gamma}^{*}\right)^{\prime}-\mu\bar{\kappa}^{*}\cos\theta\right]\vec{\ell}\\&+\left[\left(\bar{\kappa}^{*}\right)^{\prime}\cos\theta-\mu\bar{\gamma}^{*}\right]\vec{d}\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14) birbirine eşitlenirse

$$\left(\bar{\gamma}^{*}\right)^{\prime}+\bar{\kappa}^{*}(\mu\cos\theta-\gamma\sin\theta)=0 \tag{4.15}$$

$$\left(\bar{\kappa}^{*}\right)^{\prime}\sin\theta+\gamma\bar{\gamma}^{*}=\lambda\cos\theta \tag{4.16}$$

$$\left(\bar{\kappa}^{*}\right)^{\prime}\cos\theta-\mu\bar{\gamma}^{*}=-\lambda\sin\theta \tag{4.17}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir.

Teorem 4.1.2. φ ve φ^{*}, ℓ - ofset yüzeyleri iseler

$$\bar{\gamma}^{*\prime\prime}A-\bar{\gamma}^{*\prime}A^{\prime}+\bar{\gamma}^{*}A^{3}=0 \tag{4.18}$$

diferansiyel denklemi sağlanır. Burada $A=\gamma\sin\theta-\mu\cos\theta$ ve türevler s_1 yayına göredir.

İspat : (4.8) eşitliği $\sin\theta$, (4.9) eşitliği $\cos\theta$ ile çarpılır ve toplanırsa

$$\bar{\kappa}^{*\prime}+\bar{\gamma}^{*}\left(\gamma\sin\theta-\mu\cos\theta\right)=0 \tag{4.19}$$

olur. (4.7) den

$$\bar{\kappa}^{*}=\frac{\bar{\gamma}^{*\prime}}{\gamma\sin\theta-\mu\cos\theta} \tag{4.20}$$

değeri (4.19) da yerine yazılırsa ve $A=\gamma\sin\theta-\mu\cos\theta$ alınırsa

$$\left(\frac{\bar{\gamma}^{*\prime}}{A}\right)'+\bar{\gamma}^{*}A=0$$

olur. Buradan,

$$\frac{\bar{\gamma}^{*\prime\prime}A-\bar{\gamma}^{*\prime}A'}{A^2}+\bar{\gamma}^{*}A=0$$

ve dolayısıyla,

$$\bar{\gamma}^{*\prime\prime}A-\bar{\gamma}^{*\prime}A'+\bar{\gamma}^{*}A^3=0$$

bulunur.

Teorem 4.1.3. φ ve φ^*, ℓ-ofsetler ve φ açılabilir olsun. $R=R(s)$ fonksiyonu φ ve φ^* arasındaki uzaklık fonksiyonu olmak üzere, φ^* regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{ds^*}{ds}\bar{\kappa}^{*}\sin\theta=-R\gamma\frac{ds_1}{ds} \tag{4.21}$$

$$\frac{dR}{ds}-\bar{\gamma}=-\frac{ds^*}{ds}\bar{\gamma}^{*} \tag{4.22}$$

$$\frac{ds^*}{ds}\bar{\kappa}^{*}\cos\theta=\bar{\kappa}+R\mu\frac{ds_1}{ds} \tag{4.23}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: φ ve φ^* yüzeylerinin boğaz çizgileri, sırasıyla, c ve c^* eğrileri olsunlar. φ açılabilir olsun. Bu taktirde ℓ-ofset tanımından

$$\vec{c}^{\,*}(s)=\vec{c}(s)+R(s)\vec{\ell}(s) \tag{4.24}$$

yazılabilir. Bu ifadenin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\vec{c}^{*\prime}=\frac{d\vec{c}^{*}}{ds}=\frac{d\vec{c}}{ds}+R'\vec{\ell}+R\vec{\ell}'=\vec{q}+\frac{dR}{ds}\vec{\ell}+R\frac{ds_1}{ds}\left(-\gamma\vec{h}+\mu\vec{d}\right) \tag{4.25}$$

$$\frac{d\vec{c}^{*}}{ds}=-R\frac{ds_1}{ds}\gamma\vec{h}+\left[\frac{dR}{ds}-\overline{\gamma}\right]\vec{\ell}+\left[\overline{\kappa}+R\frac{ds_1}{ds}\mu\right]\vec{d} \tag{4.26}$$

olur. Şimdi φ^{*} yüzeyinin de açılabilir olduğunu düşünürsek, açılabilirlik şartından

$$\frac{d\vec{c}^{*}}{ds^{*}}=\vec{q}^{*}$$

$$\frac{d\vec{c}^{*}}{ds}=\frac{ds^{*}}{ds}\vec{q}^{*}$$

olup, (3.3) eşitliklerinden $\vec{q}^{*}=-\overline{\gamma}^{*}\vec{\ell}^{*}+\overline{\kappa}^{*}\vec{d}^{*}$ yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{c}^{*\prime}=\frac{ds^{*}}{ds}(-\overline{\gamma}^{*}\vec{\ell}^{*}+\overline{\kappa}^{*}\vec{d}^{*}), \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.2) denklemlerinden $\vec{\ell}^{*}$ ve $\vec{d}^{*}$ yukarıda yerine yazılırsa

$$\frac{d\vec{c}^{*}}{ds}=\frac{ds^{*}}{ds}\left[\overline{\kappa}^{*}\sin\theta\vec{h}-\overline{\gamma}^{*}\vec{\ell}+\overline{\kappa}^{*}\cos\theta\vec{d}\right], \tag{4.28}$$

bulunur. (4.26) ve (4.28) denklemleri aynı olduğundan bu iki eşitlik birbirine eşitlenirse istenilen eşitlikler elde edilir.

Tersine, (4.21)-(4.23) denklemleri sağlansın. Bu eşitlikler (4.26) denkleminde yazılırsa

$$\frac{d\vec{c}^{*}}{ds}=\frac{ds^{*}}{ds}\left[\overline{\kappa}^{*}\sin\theta\vec{h}-\overline{\gamma}^{*}\vec{\ell}+\overline{\kappa}^{*}\cos\theta\vec{d}\right] \tag{4.29}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{d\vec{c}^{*}}{ds}=\frac{ds^{*}}{ds}(\overline{\kappa}^{*}\vec{d}^{*}-\overline{\gamma}^{*}\vec{\ell}^{*})$$

olur. Buradan,

$$\frac{ds^{*}}{ds}=x$$

denilirse, (3.3) eşitliklerinden $\vec{q}^{*}=\overline{\kappa}^{*}\vec{d}^{*}-\overline{\gamma}^{*}\vec{\ell}^{*}$ olduğundan

$$\frac{d\vec{c}^{*}}{ds}=x\vec{q}^{*}$$

olup , φ^{*} açılabilirdir.

Sonuç 4.1.1. φ ve φ^* açılabilir ℓ-ofset yüzeyleri olsunlar. Bu taktirde ofset uzaklığının sabit olması için gerek ve yeter şart yay parametreleri ve eğrilikler arasında $\dfrac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}^*} = \dfrac{ds^*}{ds}$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat : (4.22) den $\dfrac{dR}{ds} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}^*} = \dfrac{ds^*}{ds}$ bulunur.

Teorem 4.1.4. φ ve φ^* , ℓ-ofsetler olsunlar. φ açılabilirse

$$\frac{\gamma}{\mu} = \tan\theta = sabit \tag{4.30}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : φ açılabilir olsun. Bu durumda (4.26) sağlanır. $\vec{c}^*$ boğaz çizgisi olduğundan $\left\langle \vec{c}^{*\prime}, \vec{q}^{*\prime} \right\rangle = 0$ dır. Şimdi (4.13) ve (4.26) denklemleri bu iç çarpımda yazılırsa

$$\frac{\gamma}{\mu} = \tan\theta = sabit \tag{4.31}$$

bulunur.

4.2. Regle Yüzeylerin $M_d^{\ell^*}$ - Tipli Ofsetleri

$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s)$, $\left\|\vec{q}^*\right\| = 1$ ve $\vec{\varphi}^*(s,v) = \vec{c}^*(s) + v\vec{q}^*(s)$, $\left\|\vec{q}^*\right\| = 1$ iki regle yüzey ve bu yüzeylerin alternatif çatıları da, sırasıyla, $\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\}$ ve $\{\vec{h}^*, \vec{\ell}^*, \vec{d}^*\}$ olsun. Eğer c ve c^* boğaz çizgilerinin karşılıklı noktalarında $\vec{d} = \vec{\ell}^*$ ise bu yüzeylere $M_d^{\ell^*}$-tipli ofsetler denir. Bu tanıma göre $M_d^{\ell^*}$-tipli ofset yüzeylerinin çatıları arasındaki bağıntı matris formunda,

$$\begin{pmatrix} \vec{h}^* \\ \vec{\ell}^* \\ \vec{d}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h} \\ \vec{\ell} \\ \vec{d} \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

şeklinde veya açık olarak,

$$\begin{aligned} \vec{h}^* &= \cos\theta\vec{h} + \sin\theta\vec{\ell} \\ \vec{\ell}^* &= \vec{d} \\ \vec{d}^* &= \sin\theta\vec{h} - \cos\theta\vec{\ell} \end{aligned} \tag{4.33}$$

eşitlikleriyle verilir. (4.33) eşitliklerinden de

$$
\begin{aligned}
\vec{h} &= \cos\theta \vec{h}^* + \sin\theta \vec{d}^* \\
\vec{\ell} &= \sin\theta \vec{h}^* - \cos\theta \vec{d}^* \\
\vec{d} &= \vec{\ell}^*
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

yazılabilir. Şimdi $M_d^{\ell^*}$ - tipli ofsetleri karakterize eden teoremleri verelim.

Teorem 4.2.1. (φ, φ^*) yüzeyleri $M_d^{\ell^*}$ - tipli ofset çifti olsunlar. Bu takdirde φ^* ın bir h -slant yüzey olması için gerek ve yeter şart θ nın sabit olmasıdır.

İspat: $M_d^{\ell^*}$ - tipli ofset tanımından $\vec{d} = \vec{\ell}^*$ olduğundan, bu eşitliğin s_1 yayına göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{d}}{ds_1} = \frac{d\vec{\ell}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1} \tag{4.35}$$

elde edilir. Frenet türev formüllerinden

$$-\mu\vec{\ell} = (-\gamma^*\vec{h}^* + \mu^*\vec{d}^*)\frac{ds_1^*}{ds_1} \tag{4.36}$$

olup, (4.34) eşitliğinden $\vec{\ell}$ vektörü yerine yazılırsa,

$$-\mu(\sin\theta\vec{h}^* - \cos\theta\vec{d}^*) = (-\gamma^*\vec{h}^* + \mu^*\vec{d}^*)\frac{ds_1^*}{ds_1} \tag{4.37}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \mu\sin\theta = \gamma^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1}, \\ \mu\cos\theta = \mu^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1}, \end{cases} \tag{4.38}$$

sistemine ulaşılır. Bu eşitliklerden;

$$\frac{\mu\sin\theta}{\gamma^*} = \frac{\mu\cos\theta}{\mu^*} \Rightarrow \frac{\gamma^*}{\mu^*} = \tan\theta, \qquad (\mu \neq 0) \tag{4.39}$$

elde edilir. $\dfrac{\gamma^*}{\mu^*} = \dfrac{\left(1+(\kappa^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^{*\prime}}$ olduğundan Tanım 2.6 ve (4.39) dan φ^* bir h -slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart θ sabittir.

Teorem 4.2.2. (φ, φ^*) regle yüzey ikilisi $M_d^{\ell^*}$ - tipli ofset çifti olsun. Bu durumda

$$\theta' + \gamma = 0 \tag{4.40}$$

$$\mu \cos\theta = \mu^* \frac{ds_1^*}{ds_1} \tag{4.41}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat : (4.33) denklemlerinden $\vec{d}^* = \sin\theta \vec{h} - \cos\theta \vec{\ell}$ olup, bu eşitliğin s_1 yayına göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{d}^*}{ds_1} = \theta' \cos\theta \vec{h} + \gamma \sin\theta \vec{\ell} + \theta' \sin\theta \vec{\ell} - \cos\theta(-\gamma \vec{h} + \mu \vec{d})$$

ve buradan,

$$\frac{d\vec{d}^*}{ds_1^*} \frac{ds_1^*}{ds_1} = (\theta' + \gamma)\cos\theta \vec{h} + (\theta' + \gamma)\sin\theta \vec{\ell} - \mu \cos\theta \vec{d} \tag{4.42}$$

bulunur. Frenet türev formüllerinde $\frac{d\vec{d}^*}{ds_1^*} = -\mu^* \vec{\ell}^*$ olduğu dikkate alınırsa

$$-\frac{ds_1^*}{ds_1} \mu^* \vec{\ell}^* = (\theta' + \gamma)\cos\theta \vec{h} + (\theta' + \gamma)\sin\theta \vec{\ell} - \mu \cos\theta \vec{d} \tag{4.43}$$

olur. $M_d^{\ell^*}$ - tipli ofset tanımından $\vec{\ell}^* = \vec{d}$ olduğundan

$$-\frac{ds_1^*}{ds_1} \mu^* \vec{d} = (\theta' + \gamma)\cos\theta \vec{h} + (\theta' + \gamma)\sin\theta \vec{\ell} - \mu \cos\theta \vec{d} \tag{4.44}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \theta' + \gamma = 0, \\ \mu \cos\theta = \mu^* \dfrac{ds_1^*}{ds_1}, \end{cases} \tag{4.45}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemden de açık olarak

$$\begin{cases} \theta = -\int \gamma ds_1 \\ \mu^* ds_1^* = \mu \cos\theta ds_1 \end{cases} \tag{4.46}$$

bulunur.

Teorem 4.2.3. (φ, φ^*) yüzeyleri $M_d^{\ell^*}$ - tipli ofset çifti olsunlar. Bu takdirde $\kappa^{*\prime} = \frac{d\kappa^*}{ds_1}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$
\begin{cases}
\bar{\kappa}^{*\prime}\sin\theta = \cos\theta\dfrac{ds_1^*}{ds_1}, \\
-\bar{\kappa}^{*\prime}\cos\theta + \bar{\gamma}^*\mu = \sin\theta\dfrac{ds_1^*}{ds_1}, \\
\bar{\gamma}^{*\prime} + \bar{\kappa}^*\mu\cos\theta = 0.
\end{cases}
\tag{4.47}
$$

İspat: (3.3) ve (4.33) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\vec{q}^* &= -\bar{\gamma}^*\vec{\ell}^* + \bar{\kappa}^*\vec{d}^* \\
&= -\bar{\gamma}\vec{d} + \bar{\kappa}^*(\sin\theta\vec{h} - \cos\theta\vec{\ell}) \\
&= \bar{\kappa}^*\sin\theta\vec{h} - \bar{\kappa}^*\cos\theta\vec{\ell} - \bar{\gamma}^*\vec{d}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

elde edilir. Bu eşitliğin s_1 yayına göre türevi alınırsa

$$
\frac{d\vec{q}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1} = (\bar{\kappa}^*\sin\theta)'\vec{h} + (\bar{\kappa}^*\sin\theta)\vec{h}' - (\bar{\kappa}^*\cos\theta)'\vec{\ell} - \bar{\kappa}^*\cos\theta\vec{\ell}' - (\bar{\gamma}^*)'\vec{d} - \bar{\gamma}^*\vec{d}'
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{q}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1} &= (\bar{\kappa}^{*\prime}\sin\theta + \theta'\bar{\kappa}^*\cos\theta)\vec{h} + \bar{\kappa}^*\sin\theta\,\gamma\vec{\ell} - (\bar{\kappa}^{*\prime}\cos\theta - \theta'\bar{\kappa}^*\sin\theta)\vec{\ell} \\
&\quad - \bar{\kappa}^*\cos\theta(-\gamma\vec{h} + \mu\vec{d}) - \bar{\gamma}^{*\prime}\vec{d} + \bar{\gamma}^*\mu\vec{\ell}
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

bulunur. $\dfrac{d\vec{q}^*}{ds^*} = \vec{h}^*$ olduğundan, (4.33) denkleminden $\vec{h}^*$ vektörü (4.49) denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{ds_1^*}{ds_1}(\cos\theta\vec{h} + \sin\theta\vec{\ell}) &= (\bar{\kappa}^{*\prime}\sin\theta + \theta'\bar{\kappa}^*\cos\theta + \bar{\kappa}^*\gamma\cos\theta)\vec{h} \\
&\quad + (\bar{\kappa}^*\gamma\sin\theta - \bar{\kappa}^{*\prime}\cos\theta + \theta'\bar{\kappa}^*\sin\theta + \bar{\gamma}^*\mu)\vec{\ell} \\
&\quad + (-\bar{\kappa}^*\mu\cos\theta - \bar{\gamma}^{*\prime})\vec{d}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{cases}
\bar{\kappa}^{*\prime}\sin\theta + \theta'\bar{\kappa}^*\cos\theta + \bar{\kappa}^*\gamma\cos\theta = \cos\theta\dfrac{ds_1^*}{ds_1}, \\
-\bar{\kappa}^{*\prime}\cos\theta + \theta'\bar{\kappa}^*\sin\theta + \bar{\kappa}^*\gamma\sin\theta + \bar{\gamma}^*\mu = \sin\theta\dfrac{ds_1^*}{ds_1}, \\
\bar{\gamma}^{*\prime} + \bar{\kappa}^*\mu\cos\theta = 0
\end{cases}
\tag{4.51}
$$

sistemine ulaşılır. (4.45) eşitliğinden $\theta' = -\gamma$ olduğundan bu sistem aşağıdaki sisteme indirgenir.

$$\begin{cases} \overline{\kappa}^{*\prime}\sin\theta = \cos\theta \dfrac{ds_1^*}{ds_1} \\ -\overline{\kappa}^{*\prime}\cos\theta + \overline{\gamma}^*\mu = \sin\theta \dfrac{ds_1^*}{ds_1} \\ \overline{\gamma}^{*\prime} + \overline{\kappa}^*\mu\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{4.52}$$

Teorem 4.2.4. (φ,φ^*) yüzey ikilisi $M_d^{\ell^*}$-tipli ofset çifti ise;

$$\overline{\kappa}^{*\prime\prime}B - \overline{\kappa}^{*\prime}B' + \overline{\kappa}^*B^3 = 0 \tag{4.53}$$

denklemi sağlanır. Burada $B = \mu\cos\theta$ dir.

İspat: (4.52) Sisteminin birinci denklemi $\sin\theta$ ile ikinci denklemi de $-\cos\theta$ ile çarpılıp, toplanırsa bu sistem

$$\begin{cases} \overline{\kappa}^{*\prime} - \overline{\gamma}^*\mu\cos\theta = 0 \\ \overline{\gamma}^{*\prime} + \overline{\kappa}^*\mu\cos\theta = 0, \end{cases} \tag{4.54}$$

sistemine indirgenir. Birinci denklemden $\overline{\gamma}^* = \dfrac{\overline{\kappa}^{*\prime}}{\mu\cos\theta}$ olup, bu ifadenin s_1 yayına göre türevi alınırsa

$$\overline{\gamma}^{*\prime} = \frac{\overline{\kappa}^{*\prime\prime}\mu\cos\theta - \overline{\kappa}^{*\prime}(\mu\cos\theta)'}{\mu^2\cos^2\theta} \tag{4.55}$$

elde edilir. Bu değer ikinci denklemde yerine yazılırsa;

$$\overline{\gamma}^{*\prime} + \overline{\kappa}^*\mu\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{\overline{\kappa}^{*\prime\prime}\mu\cos\theta - \overline{\kappa}^{*\prime}(\mu\cos\theta)'}{\mu^2\cos^2\theta} + \overline{\kappa}^*\mu\cos\theta = 0$$

$$\overline{\kappa}^{*\prime\prime}\mu\cos\theta - \overline{\kappa}^{*\prime}(\mu\cos\theta)' + \overline{\kappa}^*\mu^3\cos^3\theta = 0$$

$$\overline{\kappa}^{*\prime\prime}B - \overline{\kappa}^{*\prime}B' + \overline{\kappa}^*B^3 = 0 \quad (B = \mu\cos\theta) \tag{4.56}$$

bulunur.

Teorem 4.2.5. (φ,φ^*) yüzeyleri $M_d^{\ell^*}$-tipli ofsetler ve φ açılabilir olsun. Bu takdirde φ^* açılabilirse aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} \overline{\kappa}^* \sin\theta \dfrac{ds^*}{ds} = 0, \\ \overline{\kappa}^* \cos\theta \dfrac{ds^*}{ds} = \overline{\gamma} + \mu R \dfrac{ds_1}{ds}, \\ -\overline{\gamma}^* \dfrac{ds^*}{ds} = \overline{\kappa} + \dfrac{dR}{ds}. \end{cases} \tag{4.57}$$

İspat: φ açılabilir olsun. $M_d^{\ell^*}$ -tipli ofset tanımından,

$$\vec{c}^*(s) = \vec{c}(s) + R(s)\vec{d}(s)$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa ve φ yüzeyinin açılabilir olduğu, yani, $\dfrac{d\vec{c}}{ds} = \vec{q}$ eşitliğinin sağlandığı dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{c}^*}{ds} &= \frac{d\vec{c}}{ds} + \frac{dR}{ds}\vec{d} + R\frac{d\vec{d}}{ds} \\ &= \vec{q} + \frac{dR}{ds}\vec{d} - \mu\frac{ds_1}{ds}R\vec{\ell} \\ &= -\overline{\gamma}\vec{\ell} + \overline{\kappa}\vec{d} + \frac{dR}{ds}\vec{d} - \mu R\frac{ds_1}{ds}\vec{\ell} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d\vec{c}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = -\left(\overline{\gamma} + \mu R\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \left(\overline{\kappa} + \frac{dR}{ds}\right)\vec{d} \tag{4.58}$$

bulunur. Şimdi φ^* açılabilir kabul edilsin. Bu durumda $\dfrac{d\vec{c}^*}{ds^*} = \vec{q}^*$ olacağından

$$\frac{ds^*}{ds}\vec{q}^* = -\left(\overline{\gamma} + \mu R\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \left(\overline{\kappa} + \frac{dR}{ds}\right)\vec{d} \tag{4.59}$$

olup, (3.3) eşitliğinden $\vec{q}^* = -\overline{\gamma}^*\vec{\ell}^* + \overline{\kappa}^*\vec{d}^*$ alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds}\left(-\overline{\gamma}^*\vec{\ell}^* + \overline{\kappa}^*\vec{d}^*\right) = -\left(\overline{\gamma} + \mu R\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \left(\overline{\kappa} + \frac{dR}{ds}\right)\vec{d}$$

elde edilir. (4.33) den $\vec{d} = \vec{\ell}^*$ ve $\vec{d}^* = \sin\theta\vec{h} - \cos\theta\vec{\ell}$ olup, bunlar son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds}(-\overline{\gamma}^*\vec{d} + \overline{\kappa}^*\sin\theta\vec{h} - \overline{\kappa}^*\cos\theta\vec{\ell}) = -\left(\overline{\gamma} + \mu R\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \left(\overline{\kappa} + \frac{dR}{ds}\right)\vec{d} \tag{4.60}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{\kappa}^*\sin\theta\frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$\bar{\kappa}^* \cos\theta \frac{ds^*}{ds} = \bar{\gamma} + \mu R \frac{ds_1}{ds}$$

$$-\bar{\gamma}^* \frac{ds^*}{ds} = \bar{\kappa} + \frac{dR}{ds}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1. $\left(\varphi, \varphi^*\right)$ regle yüzey ikilisi $M_d^{\ell^*}$-tipli açılabilir ofset çifti olsunlar. Bu durumda (4.57) sisteminin birinci denkleminden

$$\bar{\kappa}^* \sin\theta \frac{ds^*}{ds} = 0 \Rightarrow \bar{\kappa}^* = 0 \quad \text{veya} \quad \sin\theta = 0$$

olur. Buna göre, aşağıdakiler elde edilir:

i) $\bar{\kappa}^* = 0$ ise, φ^* bir silindirdir.

ii) $\sin\theta = 0$ ise, $\theta = 0$ dır. Yani çatılar ortaktır.

4.3. Regle Yüzeylerin $M_h^{\ell^*}$ -Tipli Ofsetleri

$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s)$, $\|\vec{q}\| = 1$ ve $\varphi^*(s,v) = c^*(s) + vq^*(s)$, $\|\vec{q}^*\| = 1$ iki regle yüzey olsun. Bunların alternatif çatıları da sırasıyla $\left\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\right\}$ ve $\left\{\vec{h}^*, \vec{\ell}^*, \vec{d}^*\right\}$ olsun. Eğer c ve c^* boğaz çizgilerinin karşılıklı noktalarında $\vec{h} = \vec{\ell}^*$ olacak şekilde bire-bir bir eşleme varsa bu yüzeylere $M_h^{\ell^*}$-tipli ofsetler denir. Bu tanıma göre $M_h^{\ell^*}$-tipli ofsetlerin alternatif çatıları arasındaki bağıntının matris formu;

$$\begin{pmatrix} \vec{h}^* \\ \vec{\ell}^* \\ \vec{d}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h} \\ \vec{\ell} \\ \vec{d} \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

şeklindedir. Açık olarak vermek gerekirse çatılar arasındaki ilişkiler

$$\begin{aligned} \vec{h}^* &= \cos\theta\, \vec{\ell} + \sin\theta\, \vec{d} \\ \vec{\ell}^* &= \vec{h} \\ \vec{d}^* &= \sin\theta\, \vec{\ell} - \cos\theta\, \vec{d} \end{aligned} \tag{4.62}$$

veya

$$
\begin{aligned}
\vec{h} &= \vec{\ell}^* \\
\vec{\ell} &= \cos\theta\,\vec{h}^* + \sin\theta\,\vec{d}^* \\
\vec{d} &= \sin\theta\,\vec{h}^* - \cos\theta\,\vec{d}^*
\end{aligned} \tag{4.63}
$$

eşitlikleriyle verilebilir. Şimdi $M_h^{\ell^*}$ -tipli ofsetleri karakterize eden teoremleri verelim.

Teorem 4.3.1. $\left(\varphi,\varphi^*\right)$ yüzeyleri $M_h^{\ell^*}$ -tipli ofset çifti olsunlar. Bu takdirde

$$
\frac{\mu^*}{\gamma^*} = -\tan\theta \tag{4.64}
$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.62) denklemlerinden $\vec{h} = \vec{\ell}^*$ olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın s_1 yay parametresine göre türevi alınır ve (3.8) türev formülleri kullanılırsa

$$
\frac{d\vec{h}}{ds_1} = \frac{d\vec{\ell}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1}
$$

$$
\gamma\vec{\ell} = (-\gamma^*\vec{h}^* + \mu^*\vec{d}^*)\frac{ds_1^*}{ds_1}
$$

$$
\gamma(\cos\theta\,\vec{h}^* + \sin\theta\,\vec{d}^*) = (-\gamma^*\vec{h}^* + \mu^* d^*)\frac{ds_1^*}{ds_1}
$$

$$
\left(\gamma\cos\theta + \gamma^*\frac{ds_1^*}{ds_1}\right)\vec{h}^* + \left(\gamma\sin\theta - \mu^*\frac{ds_1^*}{ds_1}\right)\vec{d}^* = 0
$$

$$
\begin{cases}
\gamma\cos\theta + \gamma^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1} = 0 \\[2ex]
\gamma\sin\theta - \mu^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1} = 0
\end{cases} \tag{4.65}
$$

bulunur. Bu eşitliklerden;

$$
\frac{\gamma\cos\theta}{-\gamma^*} = \frac{\gamma\sin\theta}{\mu^*} \Rightarrow \frac{\mu^*}{\gamma^*} = -\tan\theta \tag{4.66}
$$

bulunur.

Sonuç 4.3.1. $\left(\varphi,\varphi^*\right)$ ikilisi $M_h^{\ell^*}$ -tipli ofset çifti olsun. Bu takdirde φ^*, h-slant regle yüzeydir $\Leftrightarrow$ θ açısı sabittir.

Teorem 4.3.2. (φ, φ^*) regle yüzey ikilisi $M_h^{\ell^*}$ -tipli ofset çifti olsun. Bu takdirde, eğrilikler ve θ açısı arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \mu^* = \gamma \sin\theta \dfrac{ds_1}{ds_1^*}, \\ \dfrac{d\theta}{ds_1} = -\mu. \end{cases} \tag{4.67}$$

İspat: (4.62) den $\vec{d}^* = \sin\theta \vec{\ell} - \cos\theta \vec{d}$ eşitliğinde her iki tarafın s_1 parametresine göre türevini alırsak;

$$\frac{\vec{d}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds_1}\vec{\ell} + \sin\theta \frac{d\vec{\ell}}{ds_1} + \sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}\vec{d} - \cos\theta \frac{d\vec{d}}{ds_1}$$

$$-\mu^* \vec{\ell}^* \frac{ds_1^*}{ds_1} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds_1}\vec{\ell} + \sin\theta(-\gamma\vec{h} + \mu\vec{d}) + \sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}\vec{d} + \mu\cos\theta\ \vec{\ell}$$

$$-\mu^* \vec{h} \frac{ds_1^*}{ds_1} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds_1}\vec{\ell} - \gamma\sin\theta\ \vec{h} + \mu\sin\theta\ \vec{d} + \sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}\vec{d} + \mu\cos\theta\ \vec{\ell}$$

$$\left(\mu^* \frac{ds_1^*}{ds_1} - \gamma\sin\theta\right)\vec{h} + \left(\cos\theta \frac{d\theta}{ds_1} + \mu\cos\theta\right)\vec{\ell} + \left(\mu\sin\theta + \sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}\right)\vec{d} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{cases} \mu^* = \gamma \sin\theta \dfrac{ds_1}{ds_1^*}, \\ \cos\theta \dfrac{d\theta}{ds_1} + \mu\cos\theta = 0, \\ \mu\sin\theta + \sin\theta \dfrac{d\theta}{ds_1} = 0, \end{cases} \tag{4.68}$$

bulunur. (4.68) sisteminin 2. ve 3. denklemlerinden

$$\begin{cases} \cos\theta\left(\dfrac{d\theta}{ds_1} + \mu\right) = 0, \\ \sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{ds_1} + \mu\right) = 0, \end{cases} \tag{4.69}$$

sistemi elde edilir. Buradan $\dfrac{d\theta}{ds_1} = -\mu$ bulunur. Böylece (4.68) sistemi (4.67) formuna indirgenir.

Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2 den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.3.2. φ^*, h-slant regle yüzeydir $\Leftrightarrow$ θ açısı sabittir $\Leftrightarrow$ μ sabittir $\Leftrightarrow$ κ sabittir $\Leftrightarrow$ φ, $\vec{q}$-slanttır.

İspat: φ^*, h-slant olsun. Bu durumda $\dfrac{\mu^*}{\gamma^*} = -\tan\theta = sabit$ ve Teorem 4.3.2 den $\mu = 0$ yani $\kappa = sabit$ bulunur. Böylece φ yüzeyi q- slanttır.

Tersine φ, q-slant yüzey ise $\kappa = sabit$ olup, $\mu = 0$ ve (4.67) den $\theta = sabit$ olur. Böylece Teorem 4.3.1 den φ^*, h-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.3.3. (φ, φ^*) yüzeyleri $M_h^{\ell^*}$-tipli ofset çifti olsunlar. Bu takdirde türevler s_1 yayına göre alınmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_1^*}{ds_1}\cos\theta = -\gamma\overline{\gamma} + (\overline{\kappa}^*\sin\theta)' + \overline{\kappa}^*\cos\theta\,\mu, \\ \dfrac{ds_1^*}{ds_1}\sin\theta = \overline{\kappa}^*\sin\theta\,\mu - (\overline{\kappa}^*\cos\theta)', \\ -\overline{\gamma}^{*\prime} - \gamma\,\overline{\kappa}^*\sin\theta\,\mu - (\overline{\kappa}^*\cos\theta)'. \end{cases} \tag{4.70}$$

İspat: (3.3) denkleminden

$$\vec{q}^* = -\overline{\gamma}^*\vec{\ell}^* + \overline{\kappa}^*\vec{d}^*$$

olup, $\vec{d}^* = \sin\theta\vec{\ell} - \cos\theta\vec{d}$ eşitliği yukarıda yerine yazılırsa

$$\vec{q}^* = -\overline{\gamma}^*\vec{\ell}^* + \overline{\kappa}^*(\sin\theta\vec{\ell} - \cos\theta\vec{d})$$

$$\vec{q}^* = -\overline{\gamma}^*\vec{h} + \overline{\kappa}^*\sin\theta\vec{\ell} - \overline{\kappa}^*\cos\theta\vec{d} \tag{4.71}$$

bulunur. Buradan her iki tarafın s_1 yayına göre türevi alınırsa;

$$\frac{d\vec{q}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1} = -\overline{\gamma}^{*\prime}\vec{h} - \gamma\,\overline{\gamma}^*\vec{\ell} + (\overline{\kappa}^*\sin\theta)'\vec{\ell} + \overline{\kappa}^*\sin\theta(-\gamma\vec{h} + \mu\vec{d})$$
$$-(\overline{\kappa}^*\cos\theta)'\vec{d} + \overline{\kappa}^*\mu\cos\theta\,\vec{\ell}$$

$$\frac{ds_1^*}{ds_1}(\cos\theta\,\vec{\ell} + \sin\theta\vec{d}) = (-\overline{\gamma}^{*\prime} - \gamma\,\overline{\kappa}^*\sin\theta)\vec{h} + \left(-\gamma\,\overline{\gamma}^* + (\overline{\kappa}^*\sin\theta)' + \overline{\kappa}^*\mu\cos\theta\right)\vec{\ell}$$
$$+\left(\overline{\kappa}^*\mu\sin\theta - \left(\overline{\kappa}^*\cos\theta\right)'\right)\vec{d} \tag{4.72}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{cases} \dfrac{ds_1^*}{ds_1}\cos\theta = -\gamma\bar{\gamma}^* + \left(\bar{\kappa}^*\sin\theta\right)' + \bar{\kappa}^*\mu\cos\theta \\ \dfrac{ds_1^*}{ds_1}\sin\theta = \bar{\kappa}^*\mu\sin\theta - \left(\bar{\kappa}^*\cos\theta\right)' \\ -\bar{\gamma}^{*\prime} - \gamma\,\bar{\kappa}^*\sin\theta = 0 \end{cases}$$

sistemi bulunur.

Sonuç 4.3.3. (φ,φ^*) ikilisi, $M_h^{\ell^*}$ -tipli ofset çifti olsun. Bu takdirde yay parametreleri arasında

$$s_1^* = -\int \gamma\,\bar{\gamma}^*\cos\theta\, ds_1$$

bağıntısı vardır.

İspat: (4.70) sisteminin birinci denklemi $\cos\theta$, ikinci denklemi $\sin\theta$ ile çarpılıp, toplanırsa;

$$\frac{ds_1^*}{ds_1} = -\gamma\,\bar{\gamma}^*\cos\theta + (\bar{\kappa}^*\sin\theta)'\cos\theta + \bar{\kappa}^*\mu\cos^2\theta + \bar{\kappa}^*\mu\sin^2\theta - (\bar{\kappa}^*\cos\theta)'\sin\theta$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{ds_1^*}{ds_1} = -\gamma\,\bar{\gamma}^*\cos\theta + \bar{\kappa}^*\,\mu + \theta'\,\bar{\kappa}^*$$

$$\frac{ds_1^*}{ds_1} = -\gamma\,\bar{\gamma}^*\cos\theta + \bar{\kappa}^*(\theta' + \mu) \tag{4.73}$$

elde edilir. Teorem 4.3.2 den $\theta' + \mu = 0$ olduğundan

$$\frac{ds_1^*}{ds_1} = -\gamma\,\bar{\gamma}^*\cos\theta$$

yazılabilir. Buradan,

$$s_1^* = -\int \gamma\,\bar{\gamma}^*\cos\theta\, ds_1 \tag{4.74}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.4. (φ,φ^*) yüzeyleri $M_h^{\ell^*}$ -tipli ofsetler ve φ açılabilir olsun. Bu takdirde, φ^* açılabilirse aşağıdaki denklem sistemi sağlanır:

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{ds} = -\bar{\gamma}^* \dfrac{ds^*}{ds} \\ -\bar{\gamma} + R\gamma \dfrac{ds_1}{ds} = \bar{\kappa}^* \sin\theta \dfrac{ds^*}{ds} \\ \bar{\kappa} = -\bar{\kappa}^* \cos\theta \dfrac{ds^*}{ds} \end{cases} \tag{4.75}$$

İspat: $M_h^{\ell^*}$ -tipli ofset tanımından

$$\vec{c}^*(s) = \vec{c}(s) + R(s)\vec{h}(s)$$

olup, bu eşitliğin s parametresine göre türev alınırsa ve φ nin açılabilirliği, yani $\dfrac{d\vec{c}}{ds} = \vec{q}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{c}^*}{ds} &= \frac{d\vec{c}}{ds} + \frac{dR}{ds}\vec{h} + R\frac{d\vec{h}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} \\ &= \vec{q} + \frac{dR}{ds}\vec{h} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\vec{\ell} \\ &= -\bar{\gamma}\,\vec{\ell} + \bar{\kappa}\,\vec{d} + R'\,\vec{h} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\vec{\ell} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten

$$\frac{d\vec{c}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = R'\vec{h} + \left(-\bar{\gamma} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \bar{\kappa}\,\vec{d} \tag{4.76}$$

elde edilir. Şimdi φ^* açılabilir olsun. Bu durumda $\dfrac{d\vec{c}^*}{ds^*} = \vec{q}^*$ olacağından (4.76) eşitliğinden

$$\vec{q}^*\frac{ds^*}{ds} = R'\,\vec{h} + \left(-\bar{\gamma} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \bar{\kappa}\,\vec{d}$$

$$\frac{ds^*}{ds}(-\bar{\gamma}^*\vec{\ell}^* + \bar{\kappa}^*\vec{d}^*) = R'\,\vec{h} + \left(-\bar{\gamma} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \bar{\kappa}\,\vec{d}$$

bulunur. (4.62) den $\vec{\ell} = \vec{h}^*$ ve $\vec{d}^* = \sin\theta\vec{\ell} - \cos\theta\vec{d}$ olup, bunlar son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds}(-\bar{\gamma}^*\vec{h} + \bar{\kappa}^*\sin\theta\,\vec{\ell} - \bar{\kappa}^*\cos\theta\,\vec{d}) = R'\,\vec{h} + \left(-\bar{\gamma} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \bar{\kappa}\,\vec{d}$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{ds} = -\overline{\gamma}^* \dfrac{ds^*}{ds} \\ -\overline{\gamma} + R\gamma \dfrac{ds_1}{ds} = \overline{\kappa}^* \sin\theta \dfrac{ds^*}{ds} \\ \overline{\kappa} = -\overline{\kappa}^* \cos\theta \dfrac{ds^*}{ds} \end{cases}$$

sistemi elde edilir.

Sonuç 4.3.4. (4.75) sisteminin birinci denkleminden uzaklık fonksiyonu,

$$R = -\int \overline{\gamma}^* ds^* \tag{4.77}$$

ile tanımlıdır.

4.4. Regle Yüzeylerin $M_d^{h^*}$ -Tipli Ofsetleri

$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s)$, $\|\vec{q}\| = 1$ ve $\vec{\varphi}^*(s,v) = \vec{c}^*(s) + v\vec{q}^*(s)$, $\|\vec{q}^*\| = 1$ iki yüzey olsun. Bunların alternatif çatıları da sırasıyla $\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\}$ ve $(\vec{h}^*, \vec{\ell}^*, \vec{d}^*)$ olsun. c ve c^* boğaz çizgilerinin karşılıklı noktalarında $\vec{d} = \vec{h}^*$ olacak şekilde bire-bir bir eşleme varsa bu yüzeylere $M_d^{h^*}$ -tipli ofsetler denir.

Bu tanıma göre $M_d^{h^*}$ -tipli ofsetlerin alternatif çatıları arasındaki bağıntının matris formu

$$\begin{pmatrix} \vec{h}^* \\ \vec{\ell}^* \\ \vec{d}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h} \\ \vec{\ell} \\ \vec{d} \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

şeklindedir. Açık olarak (4.78) ifadesinden

$$\begin{cases} \vec{h}^* = \vec{d}, \\ \vec{\ell}^* = \cos\theta\,\vec{h} + \sin\theta\,\vec{\ell}, \\ \vec{d}^* = -\sin\theta\,\vec{h} + \cos\theta\,\vec{\ell}, \end{cases} \tag{4.79}$$

$$\begin{cases} \vec{h} = \cos\theta\,\vec{\ell}^* - \sin\theta\,\vec{d}^*, \\ \vec{\ell} = \sin\theta\,\vec{\ell}^* + \cos\theta\,\vec{d}^*, \\ \vec{d} = \vec{h}^*, \end{cases} \tag{4.80}$$

eşitlikleri yazılabilir. Şimdi $M_d^{h^*}$ -tipli ofsetleri karakterize eden teoremleri verelim.

Teorem 4.4.1. (φ,φ^*) regle yüzey çifti $M_d^{h^*}$ -tipli ofset çifti olsun. Bu takdirde $\gamma\gamma^* - \mu\mu^* = 0$ dır.

İspat: $M_d^{h^*}$ -tipli ofset tanımından $\vec{d} = \vec{h}^*$ olduğundan her iki tarafın s_1 yayına göre türevini alırsak,

$$\frac{d\vec{d}}{ds_1} = \frac{d\vec{h}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1}$$

$$-\mu\,\vec{\ell} = \gamma^*\vec{\ell}^*\frac{ds_1^*}{ds_1} \Rightarrow \vec{\ell} = -\vec{\ell}^* \tag{4.81}$$

Buradan $\vec{h} = \vec{d}^*$, $\vec{\ell} = -\vec{\ell}^*$, $\vec{d} = \vec{h}^*$ olur. $\vec{h} = \vec{d}^*$ eşitliğinde her iki tarafın s_1 yayına göre türevini alırsak

$$\frac{d\vec{h}}{ds_1} = \frac{d\vec{d}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1}$$

$$\gamma\,\vec{\ell} = -\mu^*\vec{\ell}^*\frac{ds_1^*}{ds_1} \tag{4.82}$$

elde edilir. Buradan $\vec{\ell} = -\vec{\ell}^*$ olduğundan (4.81) ve (4.82) den

$$\begin{cases} \gamma = \mu^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1} \\[2ex] \mu = \gamma^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1} \end{cases} \tag{4.83}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemden de

$$\frac{ds_1^*}{ds_1} = -\frac{\gamma}{\mu^*} = -\frac{\mu}{\gamma^*} \Rightarrow \gamma\gamma^* = \mu\mu^*$$

bulunur.

Sonuç 4.4.1. (φ,φ^*) yüzeyleri $M_d^{h^*}$ -tipli ofsetler olsunlar. Bu takdirde çatılar arasındaki bağıntı, $\vec{h} = \vec{d}^*$, $\vec{\ell} = -\vec{\ell}^*$, $\vec{d} = \vec{h}^*$ şeklinde olup, $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ dir.

Teorem 4.4.2. $\left(\varphi,\varphi^*\right)$ yüzeyleri $M_d^{h^*}$-tipli ofsetler ve φ açılabilir olsun. Bu takdirde, φ^* açılabilirse aşağıdaki denklem sistemi sağlanır:

$$\begin{cases} -\bar{\gamma}^* \dfrac{ds^*}{ds} = \bar{\gamma} + R\mu \dfrac{ds_1}{ds}, \\ \bar{\kappa}^* \dfrac{ds^*}{ds} = 0, \\ \bar{\kappa} + R' = 0. \end{cases} \tag{4.84}$$

İspat: $M_d^{h^*}$ ofset tanımından boğaz çizgileri arasındaki bağıntı

$$\vec{c}^* = \vec{c}(s) + R(s)\vec{d}(s)$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın s parametresine göre türevi alınır ve φ nin açılabilir olduğu yani $\dfrac{d\vec{c}}{ds} = \vec{q}$ olduğu düşünülürse

$$\frac{d\vec{c}^*}{ds} = \frac{d\vec{c}}{ds} + R'\vec{d} + R\frac{d\vec{d}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}$$

$$= \vec{q} + R'\vec{d} - R\mu\frac{ds_1}{ds}\vec{\ell}$$

olur. $\vec{q} = -\bar{\gamma}\vec{\ell} + \bar{\kappa}\vec{d}$ olduğundan

$$\frac{d\vec{c}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = -\left(\bar{\gamma} + R\mu\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + (\bar{\kappa} + R')\vec{d} \tag{4.85}$$

bulunur. Şimdi φ^* açılabilir olsun. Bu durumda $\dfrac{d\vec{c}^*}{ds^*} = q^*$ olup, (4.85) den

$$\frac{ds^*}{ds}\vec{q}^* = -\left(\bar{\gamma} + R\mu\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + (\bar{\kappa} + R')\vec{d}$$

$$\frac{ds^*}{ds}(-\bar{\gamma}^*\vec{\ell}^* + \bar{\kappa}^*\vec{d}^*) = -\left(\bar{\gamma} + R\mu\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + (\bar{\kappa} + R')\vec{d}$$

olur. $\vec{\ell} = -\vec{\ell}^*$, $\vec{h} = \vec{d}^*$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds}(\bar{\gamma}^*\vec{\ell} + \bar{\kappa}^*\vec{h}) = -\left(\bar{\gamma} + R\mu\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + (\bar{\kappa} + R')\vec{d}$$

olup buradan,

$$-\bar{\gamma}^*\frac{ds^*}{ds} = \bar{\gamma} + R\mu\frac{ds_1}{ds}$$

$$\bar{\kappa}^*\frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$\bar{\kappa} + R' = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.2. (4.84) sisteminin üçüncü denkleminden, uzaklık fonksiyonu

$$R = -\int \bar{\kappa} ds$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

Sonuç 4.4.3. Uzaklığın sabit olması için gerek yeter şart $\bar{\kappa}$ eğriliğinin sıfır olmasıdır.

4.5. Regle Yüzeylerin Bertrand Ofsetlerinin Alternatif Çatıya Göre Karakterizasyonu

$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s)$, $\|\vec{q}\| = 1$ ve $\vec{\varphi}^*(s,v) = \vec{c}^*(s) + v\vec{q}^*(s)$, $\|q^*\| = 1$ iki regle yüzey ve bu yüzeylerin alternatif yeni çatıları da sırasıyla $\{\vec{h}, \vec{\ell}, \vec{d}\}$ ve $\{\vec{h}^*, \vec{\ell}^*, \vec{d}^*\}$ olsun. c ve c^* boğaz çizgilerinin karşılıklı noktalarında $\vec{h} = \vec{h}^*$ olacak şekilde bire-bir bir eşleme varsa bu yüzeyler Bertrand ofseti olarak adlandırılır [12]. Bertrand ofsetleri özellikle bilgisayar destekli tasarım çalışmalarında önemli bir yere sahiptir [17].

Bertrand ofsetlerinin alternatif çatıları arasındaki bağıntıların matris formu

$$\begin{pmatrix} \vec{h}^* \\ \vec{\ell}^* \\ \vec{d}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h} \\ \vec{\ell} \\ \vec{d} \end{pmatrix} \tag{4.86}$$

şeklinde olup, bu ifadeden aşağıdaki eşitlikler yazılabilir,

$$\begin{cases} \vec{h}^* = \vec{h} \\ \vec{\ell}^* = \cos\theta\,\vec{\ell} + \sin\theta\,\vec{d} \\ \vec{d}^* = -\sin\theta\,\vec{\ell} + \cos\theta\,\vec{d} \end{cases} \tag{4.87}$$

$$\begin{cases} \vec{h} = \vec{h}^* \\ \vec{\ell} = \cos\ell^* - \sin\theta\, d^* \\ \vec{d} = \sin\theta\,\ell^* + \cos\theta\, d^* \end{cases} \tag{4.88}$$

Şimdi Bertrand ofsetlerini karakterize eden teoremleri verelim.

Teorem 4.5.1. Bertrand ofsetlerinin alternatif çatıları çakışır ve eğrilikler arasında $\gamma\mu^* - \mu\gamma^* = 0$ bağıntısı vardır.

İspat: (4.88) denklemlerinden $\vec{h} = \vec{h}^*$ eşitliğinde her iki tarafın s_1 yayına göre türevi alınırsa

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{h}}{ds_1} = \dfrac{d\vec{h}^*}{ds_1^*}\dfrac{ds_1^*}{ds_1} \\ \gamma\,\vec{\ell} = \gamma^*\vec{\ell}^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1} \end{cases} \tag{4.89}$$

eşitliğinden $\vec{\ell} = \vec{\ell}^*$ elde edilir. Böylece, $\vec{d} = \vec{h}\times\vec{\ell} = \vec{h}^*\times\vec{\ell}^* = \vec{d}^*$ olacağından çatılar aynıdır. Buna göre $\vec{d} = \vec{d}^*$ eşitliğinde her iki tarafın s_1 yayına göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{d}}{ds_1} = \frac{d\vec{d}^*}{ds_1^*}\frac{ds_1^*}{ds_1} \Rightarrow -\mu\,\vec{\ell} = -\mu^*\vec{\ell}^*\frac{ds_1^*}{ds_1} \Rightarrow \mu = \mu^*\frac{ds_1^*}{ds_1} \tag{4.90}$$

elde edilir. (4.89) ve (4.90) dan $\gamma = \gamma^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1}$, $\mu = \mu^*\dfrac{ds_1^*}{ds_1}$ bulunur. Bu da $\gamma\mu^* - \mu\gamma^* = 0$ eşitliğini verir.

Teorem 4.5.2. (φ, φ^*) yüzeyleri Bertrand ofsetler ve φ açılabilir olsun. Bu takdirde, φ^* açılabilirse aşağıdaki denklem sistemi sağlanır:

$$\begin{cases} -\bar{\gamma}^*\dfrac{ds^*}{ds} = -\bar{\gamma} + R\gamma\dfrac{ds_1}{ds}, \\ \bar{\kappa}^*\dfrac{ds^*}{ds} = \bar{\kappa}. \end{cases} \tag{4.91}$$

İspat: (φ, φ^*) Bertrand ofseti olduklarından R sabittir [12]. φ açılabilir olsun. Bu durumda Bertrand ofset tanımından

$$\vec{c}^* = \vec{c} + R\vec{h}$$

olup s parametresine göre türev alınır ve $\vec{q} = -\bar{\gamma}\vec{\ell} + \bar{\kappa}\vec{d}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{c}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} &= \frac{d\vec{c}}{ds} + R\frac{d\vec{h}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} \\ &= \vec{q} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\vec{\ell} \\ &= (-\bar{\gamma}\vec{\ell} + \bar{\kappa}\vec{d}) + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\vec{\ell} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{c}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \left(-\bar{\gamma} + R\gamma\frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \bar{\kappa}\vec{d} \tag{4.92}$$

bulunur. Şimdi φ^* yüzeyinin açılabilir olduğunu düşünelim. Bu durumda

$$\frac{d\vec{c}^*}{ds^*} = \vec{q}^* = -\overline{\gamma}^* \vec{\ell}^* + \overline{\kappa}^* \vec{d}^*$$

olacağından (4.92) den

$$\frac{ds^*}{ds}(-\overline{\gamma}^* \vec{\ell}^* + \overline{\kappa}^* \vec{d}^*) = \left(-\overline{\gamma} + R\gamma \frac{ds_1}{ds}\right)\vec{\ell} + \overline{\kappa}\vec{d} \qquad (4.93)$$

buradan $\vec{\ell} = \vec{\ell}^*$ ve $\vec{d} = \vec{d}^*$ olduğundan (4.93) eşitliğinden

$$-\overline{\gamma}^* \frac{ds^*}{ds} = -\overline{\gamma} + R\gamma \frac{ds_1}{ds}$$

$$\overline{\kappa}^* \frac{ds^*}{ds} = \overline{\kappa}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Karger, A., Novak, J. Space Kinematics and Lie Groups. STNL Publishers of Technical Lit. Prague, Czechoslovakia. 1978.

[2] Peternel, M., Pottmann, H., Ravani, B. On the computational geometry of ruled surfaces. Comput Aid Geom Des. 1999, 31, 17-32.

[3] Küçük, A., Gürsoy, O. On the invariants of Bertrand trajectory surface offsets. App. Math. and Comp. 2004, 151, 763-773.

[4] Kasap, E., Kuruoğlu, N. The Bertrand offsets of ruled surfaces in IR_1^3, ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA.2006, 31(1), 39-48.

[5] Önder, M., Arı, Z., Küçük, A. On the Developable of Bertrand Trajectory Timelike Ruled Surface Offsets in Minkowski 3-space, International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences. 2011, Vol. 5, No: 1-2, 15-26.

[6] Önder, M. Darboux Approach to Bertrand Surface Offsets. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012, 74(2), 221–234.

[7] Önder, M., Uğurlu, H.H. On the Developable Mannheim Offsets of Timelike Ruled Surfaces. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci. 2014, DOI 10.1007/s40010-014-0162-4, 84(4), 541–548.

[8] Önder, M., Uğurlu, H.H. On the Mannheim Surface Offsets. New Trends in Mathematical Sciences. 2015, 3(3), 35–45.

[9] Pottmann, H., Lu, W., Ravani, B. Rational ruled surfaces and their offsets. Graph Models Image Process. 1996, 58(6), 544-552.

[10] Hacısalihoğlu, H.H., Diferansiyel Geometri. Gazi Üniversitesi, Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi. 1982.

[11] Struik, D.J. Lectures on Classical Differential Geometry, 2nd ed. Addison Wesley, Dover, 1988.

[12] Ravani, B., Ku, T.S. Bertrand offsets of ruled and developable surfaces. Computer Aided Geometric Design. 1991, 23(2), 145–152.

[13] Orbay, K., Kasap, E., Aydemir, I. Mannheim Offsets of Ruled Surfaces, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 160917 2009.

[14] Önder, M. Slant ruled surfaces in the Euclidean 3-space, 2013, arXiv:1311.0627 [math.DG]

[15] Kaya, O. Slant Regle Yüzeylerin Karakterizasyonları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2015.

[16] Önder, M., Kaya, O. Darboux Slant Ruled Surfaces, Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015, 5(1), 64–72.

[17] Papaioannou, S.G., Kiritsis, D. An application of Bertrand curves and surfaces to CAD/CAM. Computer Aided Design. 1985, 17(8), 348-352.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tolga KASIRGA

Doğum Yeri ve Yılı : Manisa, 1992

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : tlgksrg@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Hasan Türek Anadolu Lisesi, 2009

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013

Mesleki Deneyim

Manisa Fen Bilimleri Dershanesi: 2014-2015

Ankara Gelir İdaresi Başkanlığı : 2016-