T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATIYA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Buse YEŞİLGÜL

Danışman
Yrd.Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA–2018

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Buse YEŞİLGÜL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

IR	Reel sayılar cümlesi
IR^3	3-boyutlu Öklid uzayı
IR^4	4-boyutlu Öklid uzayı
$\{T, N, B\}$	3- boyutlu Öklid uzayında Frenet-Serret çatısı
κ	3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu
τ	3-boyutlu Öklid uzayında burulma fonksiyonu
$\{t, n, b_1, b_2\}$	4- boyutlu Öklid uzayında Frenet-Serret çatısı
k_1, k_2, k_3	4- boyutlu Öklid uzayında Frenet-Serret çatısına göre eğrilik fonksiyonları
$\{T, M_1, M_2, M_3\}$	4- boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı
K_1, K_2, K_3	4- boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları

ŞEKİLLER DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip bana vakit ayıran, çalışmalarımı takip eden, bilgi ve tecrübesiyle destek veren saygıdeğer hocam Yrd.Doç.Dr.Hüseyin KOCAYİĞİT'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İki yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, bilgi ve tecrübesiyle tezime kattığı desteği asla unutmayacağım saygıdeğer hocam Prof.Dr.Mustafa KAZAZ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteğini daima hissettiğim tez yazma sürecimde yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Buse YEŞİLGÜL

Manisa,2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATIYA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Buse YEŞİLGÜL

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, eğriler hakkında genel bilgi verilmiş ve Smarandache eğrilerinin tarihçesine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, eğriler teorisinin temel tanımları ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında özel TN-NB-TNB Smarandache eğrileri için Frenet-Serret çatısı ve eğrilikleri incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında Smarandache eğrileri hakkında genel bilgi verilmiştir. tb_1 Smarandache eğrisi için Frenet-Serret çatısı ve TM_1 Smarandache eğrisi için Bishop çatısı elde edilmiştir. Smarandache eğrilerinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Frenet-Serret çatısı, Bishop çatısı, Eğrilik, Smarandache eğrisi.

2018, 39 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATIYA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Buse YEŞİLGÜL

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd.Doç.Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

This thesis consists of four chapters.

General information about curves and the history Smarandache curves are given in the first chapter.

Basic definitions and theorems of the theory of curves are given in the second chapter.

In the third chapter, in three-dimensional Euclidean space the Frenet-Serret frame and curvatures for the special TN-NB-TNB Smarandache curves are investigated and are given some examples.

In the fourth chapter, general information about Smarandache curves in four-dimensional Euclidean space are given. For the tb_1 Smarandache curve the Frenet-Serret frame and the Bishop frame for the TM_1 Smarandache curve were obtained. The first, second and third curvatures of Smarandache curves are calculated.

Keywords: Frenet-Serret frame, Bishop frame, Curvatures, Smarandache curve.

2018, 39 pages

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Eğriler hayatımızın her alanında kullandığımız, yaşamımızı kolaylaştıran birçok araç gereçte işlem gören geometrinin başlıca alanıdır. Çeşitli dallar da eğrileri kendi alanlarında kullanmaktadırlar. Bu sebeple birçok eğri türleri ve dolayısıyla kullanım alanları ortaya çıkmıştır. Eğrilerin diferansiyel geometrisinde en çok ilgi gören alanlarından biri olan özel eğriler birçok araştırmacı tarafından incelenmiş ve bu konuda çeşitli çalışmalar yapılmıştır[1].

IR^3 uzayındaki eğriler teorisinin birçok önemli sonuçları G. Monge tarafından ortaya çıkarılmıştır ve G. Darboux hareketli çatı fikrine öncülük etmiştir. Daha sonra, F. Frenet-Serret kendi hareketli çatısı ile mekanik, kinematikte ve özellikle diferansiyel geometride önemli rol oynayan kendi özel denklemlerini elde etmiştir [2].

Mevcut bilgilerin ışığında, Frenet-Serret çatı vektörleriyle özel eğriler çalışılmıştır[3]. Son zamanlarda çalışılan yeni özel eğrilerden biri de Smarandache eğrileridir. Örneğin, yazarlar Smarandache eğrilerini genişletmiş ve çalışmışlardır [4,5].

Diğer yandan paralel vektör alanlarına bağlı olarak eğrilerin alternatif veya paralel öteleme çatısı olarak adlandırılan Bishop çatısı, 1975 yılında L. R. Bishop tarafından tanımlanmıştır[6]. Böylece geometriciler bu çatı sayesinde Frenet-Serret çatısının tanımlanamadığı durumlar için (özellikle eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda) alternatif bir çatı olarak Bishop çatısını kullanmaya başlamışlardır[7].

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayındaki özel TN, NB, TNB- Smarandache eğrilerini Frenet-Serret çatısına göre Ahmad T. Ali 'nin makalesinde ve 4-boyutlu Öklid uzayındaki özel tb_1 Smarandache eğrisini Frenet-Serret çatısına göre, TM_1 Smarandache eğrisini ise Bishop çatısına göre Mervat Elzawy'ın makalesinde ele alıp yorum yapacağız[8,9].

2.BÖLÜM

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, eğriler ile ilgili gerekli tanım ve teoremler verilecektir. Burada verilen tanım ve teoremler için $[10]$ numaralı referansa bakılabilir.

EĞRİLER İÇİN TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1 (Eğri): I, R **'nin** bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to IR^n$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne, IR^n uzayı içinde bir eğri denir.

Tanım 2.2 (Hız vektörü): $\alpha : I \to IR^n$, $\alpha = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$ bir eğri olsun. $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), ..., \alpha_n'(t))$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir.

Tanım 2.3 (Regüler eğri): $\alpha : I \to IR^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler (düzgün) eğri denir.

Tanım 2.4 (Öklid iç çarpımı): $\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \to IR$, $\forall$ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ için $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ şeklinde tanımlanan fonksiyona IR^n vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpımı denir.

Tanım 2.5 (Norm) : Bir $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektörünün normu , $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.6 (Birim hızlı eğri): $\alpha : I \to IR^n$, $\alpha = \alpha(t)$ olmak üzere

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir.

Tanım 2.7 (Teğet vektörü): $\alpha : I \to IR^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü denir.

Tanım 2.8 (Ortogonal küme): $u,v\in IR^3$ iki vektör olmak üzere, $\langle u,v\rangle=0$ ise u ve v vektörlerine ortogonal (dik) vektörler denir. Her vektörü sıfırdan farklı olan bir kümenin vektörleri ikişer ikişer ortogonal ise bu kümeye ortogonal küme denir.

Tanım 2.9 (Ortonormal küme): Her vektörü birim uzunluğa sahip olan yani normu 1 olan bir ortogonal kümeye ortonormal küme denir.

Tanım 2.10 (Vektörel çarpım): $a=(a_1,a_2,a_3)$ ve $b=(b_1,b_2,b_3)\in IR^3$ olmak üzere iki vektör olsun. Bu iki vektörün vektörel çarpımı,

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ile verilir.

Tanım 2.11 (Eğrilik fonksiyonu): $\alpha:I\to IR^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa:I\to IR$,

$$\kappa(s)=\left\|T'(s)\right\|=\left\|\alpha''(s)\right\|$$

ile tanımlanan fonksiyona, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 2.12 (Asli normal): $\alpha:I\to IR^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$N(s)=\frac{1}{\kappa(s)}T'(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü veya asli normali denir.

Tanım 2.13 (Binormal): $\alpha:I\to IR^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$B(s)=T(s)\times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü veya binormali denir.

Tanım 2.14 (Frenet-Serret çatısı): $\alpha:I\to IR^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s),N(s),B(s)$ vektörlerine Frenet-Serret vektör alanları denir. $\{T(s),N(s),B(s)\}$ ortonormal kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet-Serret çatısı denir.

Tanım 2.15 (Burulma fonksiyonu): $\alpha : I \to IR^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

Frenet-Serret vektör alanları T, N, B olmak üzere $\tau : I \to IR$

$$\tau(s) = -\langle B^{'}(s), N(s) \rangle$$

ile tanımlanan fonksiyona α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir.

Tanım 2.16 (Helis eğrisi): $\alpha = \alpha(s)$, IR^3 uzayında regüler bir eğri olsun.

Eğer $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı, sabit bir u vektör alanıyla sabit açı oluşturuyorsa bu eğriye helis eğrisi denir.

Tanım 2.17 (Darboux ani dönme vektörü): Frenet-Serret 3-ayaklısı eğri boyunca ilerlerken aynı zamanda dönme hareketi yapar. Bu dönme hareketi Darboux ani dönme vektörü denen bir vektör etrafında olur. Darboux ani dönme vektörü

$$\omega = \tau T + \kappa B$$

olarak verilir.

Teorem 2.18: $\alpha : I \to IR^3$ birim hızlı olmayan bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet-Serret vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$T = \frac{\alpha^{'}}{\left\| \alpha^{'} \right\|} \quad , \quad B = \frac{\alpha^{'} \times \alpha^{''}}{\left\| \alpha^{'} \times \alpha^{''} \right\|} \quad , \quad N = B \times T$$

dir. Eğrilik ve burulma fonksiyonları κ ve τ olsun. Bu takdirde,

$$\kappa = \frac{\left\| \alpha^{'} \times \alpha^{''} \right\|}{\left\| \alpha^{'} \right\|^3} \quad , \quad \tau = \frac{\langle \alpha^{'} \times \alpha^{''}, \alpha^{'''} \rangle}{\left\| \alpha^{'} \times \alpha^{''} \right\|^2}$$

dir.

Teorem 2.19 (Frenet-Serret Türev Formülleri): $\alpha : I \to IR^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet-Serret vektör alanları T, N, B ise,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \qquad (2.2.1)$$

dir. Matris formu ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Bu formüllere Frenet-Serret türev formülleri denir.

3.BÖLÜM

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölüm, $[8]$ Ahmad T.Ali'nin makalesinin bir incelenmiş halidir. Örnekler ise $[11]$ S.Şenyurt-S.Sivas'ın makalesinden alınarak incelenmiştir.

Tanım 3.1: Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet-Serret çatısı tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğri denir $[11]$.

Tanım 3.2: $\alpha : I \to IR^3$, $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı bir regüler eğrisinin Frenet-Serret çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$\alpha_{TN}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$ eğrisine TN-Smarandache eğrisi,

$\alpha_{NB}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$ eğrisine NB-Smarandache eğrisi,

$\alpha_{TNB}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$ eğrisine TNB-Smarandache eğrisi denir $[11]$.

Tanım 3.3 (TN-Smarandache eğrisi):

$\alpha : IR \to IR^3$, $\alpha = \alpha(s)$ bir birim hızlı bir regüler eğri ve $\{T, N, B\}$ bu eğrinin hareketli Frenet-Serret çatısı olsun.

α_{TN} TN -Smarandache eğrisini ξ ile gösterelim.

$\alpha = \alpha(s)$ eğrisine göre ξ Smarandache TN-eğrisinin Frenet-Serret elemanlarını inceleyelim.

ξ TN Smarandache eğrisinin yay uzunluğu parametresini s_ξ ile gösterelim.

$$\xi = \xi(s_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

$$\xi' = \xi'(s_\xi) = \frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T'(s) + N'(s)\right)$$

olur.

$(2.2.1)$ ifadesinden,

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\kappa(s)N(s) - \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)\right),$$

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B).$$

Ayrıca,

$$\frac{ds_\xi}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}$$

dir. Buradan,

$$T_\xi = \frac{\xi'(s)}{\left\|\xi'(s)\right\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\kappa T + \kappa N + \tau B\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-\kappa)^2 + \kappa^2 + \tau^2}}$$

dir. Böylece ξ eğrisinin teğet vektörü

$$T_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}\left(-\kappa T + \kappa N + \tau B\right)$$

bulunur. Şimdi,

$$T_\xi = \frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}$$

ifadesinin tekrar türevini alalım.

$$T_\xi' = \frac{dT_\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds} = \left(\frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}\right)' \frac{ds_\xi}{ds}$$

dır. Buradan,

$$\dot{T_\xi} = \frac{dT_\xi}{ds_\xi} = \frac{\left(-\kappa T + \kappa N + \tau B\right)'\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2} - \left(\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}\right)'\left(-\kappa T + \kappa N + \tau B\right)}{\left(\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}\right)^2}$$

bulunur.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\dot{T}_\xi = \frac{\left(-\kappa^2\left(2\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa'\tau^2+\kappa\tau\tau'\right)T-\kappa^2\left(2\kappa^2+3\tau^2\right)-\tau\left(\tau^3-2\kappa'+\kappa\tau'\right)N + \kappa\left[\left(\tau\left(2\kappa^2+\tau^2\right)-\tau\left(\tau\kappa'-\kappa\tau'\right)\right)\right]B}{\left(2\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}$$

elde edilir.

Böylece,

$$T_\xi' = \dot{T}_\xi \frac{ds_\xi}{ds} = \frac{\delta T+\mu N+\eta B}{\left(2\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\delta &= -\left[\kappa^2\left(2\kappa^2+\tau^2\right)+\tau\left(\tau\kappa'-\kappa\tau'\right)\right],\\
\mu &= -\left[\kappa^2\left(2\kappa^2+3\tau^2\right)+\tau\left(\tau^3-2\kappa'+\kappa\tau'\right)\right],\\
\eta &= \kappa\left[\tau\left(2\kappa^2+\tau^2\right)-\tau\left(\tau\kappa'-\kappa\tau'\right)\right].
\end{aligned}$$

dır. Burada,

$$\dot{T}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{\left(2\kappa^2+\tau^2\right)^2}\left(\delta T+\mu N+\eta B\right)$$

bulunur.

Eğrilik tanımından ξ eğrisinin κ_ξ eğriliği şu şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left\|T'\right\|,\\
\kappa_\xi &= \left\|\dot{T}_\xi\right\| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta^2+\mu^2+\eta^2}}{\left(2\kappa^2+\tau^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Şimdi asli normal vektörü bulalım.

$$N_\xi = \frac{\dot{T}_\xi}{\left\|\dot{T}_\xi\right\|} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{\left(2\kappa^2+\tau^2\right)^2}\left(\delta T+\mu N+\eta B\right)}{\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\delta^2+\mu^2+\eta^2}}{\left(2\kappa^2+\tau^2\right)^2}} = \frac{\left(\delta T+\mu N+\eta B\right)}{\sqrt{\delta^2+\mu^2+\eta^2}}$$

bulunur. Son olarak binormal vektörü bulalım.

$$B_{\xi}=T_{\xi}\times N_{\xi}=\frac{1}{m\ell}\begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa & \tau \\ \delta & \mu & \eta \end{vmatrix},$$

$$m=\sqrt{2\kappa^{2}+\tau^{2}}\ ,\ell=\sqrt{\delta^{2}+\mu^{2}+\eta^{2}}$$

olduğundan,

$$B_{\xi}=\frac{1}{\vartheta\ell}\left[\left(\kappa\eta-\mu\tau\right)T+\left(\delta\tau+\eta\kappa\right)N-\left(\mu\kappa+\delta\kappa\right)B\right]$$

elde edilir.

ξ eğrisinin burulmasını hesaplamak için ξ eğrisinin birinci türevinden yararlanarak ikinci ve üçüncü türevini sırasıyla bulalım.

$$\xi^{'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\kappa T+\kappa N+\tau B\right),$$

$$\xi^{''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\kappa^{'}T-\kappa T^{'}+\kappa^{'}N+\kappa N^{'}+\tau^{'}B+\tau B^{'}\right),$$

$$\xi^{''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(\kappa^{'}+\kappa^{2}\right)T+\left(\kappa^{'}-\kappa^{2}-\tau^{2}\right)N+\left(\kappa\tau+\tau^{'}\right)B\right)$$

ve

$$\xi^{'''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\left(\kappa^{''}+2\kappa\kappa^{'}\right)T+\left(\kappa^{'}+\kappa^{2}\right)T^{'}+\left(\kappa^{''}-2\kappa\kappa^{'}-2\tau\tau^{'}\right)N \\ +\left(\kappa^{'}-\kappa^{2}-\tau^{2}\right)N^{'}+\left(\kappa^{'}\tau+\kappa\tau^{'}+\tau^{''}\right)B+\left(\kappa\tau+\tau^{'}\right)B^{'} \end{pmatrix},$$

$$\xi^{'''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \left(-\kappa^{''}-2\kappa\kappa^{'}-\kappa\kappa^{'}+\kappa^{3}+\kappa\tau^{2}\right)T \\ +\left(-\kappa^{'}\kappa-\kappa^{3}+\kappa^{''}-2\kappa\kappa^{'}-2\tau\tau^{'}-\kappa\tau^{2}-\tau^{'}\tau\right)N \\ +\left(\kappa^{'}\tau-\kappa^{2}\tau-\tau^{3}+\kappa^{'}\tau+\kappa\tau^{'}+\tau^{''}\right)B \end{pmatrix},$$

$$\xi''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \left(\kappa^3+\kappa\left(\tau^2-3\kappa'\right)-\kappa''\right)T+\left(\left(-\kappa^3-\kappa\left(\tau^2+3\kappa'\right)-3\tau'\tau+\kappa''\right)N\right) \\ +\left(-\kappa^2\tau-\tau^3+2\tau\kappa'+\kappa\tau'+\tau''\right)B \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$\omega=\kappa^3+\kappa\left(\tau^2-3\kappa'\right)-\kappa'',$$
$$\varphi=-\kappa^3-\kappa\left(\tau^2+3\kappa'\right)-3\tau'\tau+\kappa'',$$
$$\sigma=-\kappa^2\tau-\tau^3+2\tau\kappa'+\kappa\tau'+\tau'',$$

denilirse,

$$\xi'''=\frac{\omega T+\phi N+\sigma B}{\sqrt{2}}$$

elde edilir. Böylece ξ eğrisinin τ_ξ burulmasını

$$\tau_\xi=\frac{\left\langle \xi'\times\xi'',\xi'''\right\rangle}{\left\|\xi'\times\xi''\right\|^2}=\frac{\det\left(\xi',\xi'',\xi'''\right)}{\left\|\xi'\times\xi''\right\|^2}$$

formülünden bulalım.

$$\xi'\times\xi''=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa & \tau \\ -\left(\kappa^2+\kappa'\right) & \left(\kappa'-\kappa^2-\tau^2\right) & \left(\kappa\tau+\tau'\right)\end{vmatrix},$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\kappa\left(\kappa\tau+\tau'\right)-\tau\left(\kappa'-\kappa^2-\tau^2\right)\right]T+\left[-\tau\left(\kappa^2+\kappa'\right)+\kappa\left(\kappa\tau+\tau'\right)\right]N+\left[-\kappa\left(\kappa'-\kappa^2-\tau^2\right)+\tau\left(\kappa^2+\kappa'\right)\right]B\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\kappa^2\tau+\kappa\tau'-\kappa'\tau+\kappa^2\tau+\tau^3\right)T+\left(-\kappa^2\tau-\tau\kappa'+\kappa^2\tau+\kappa\tau'\right)N+\left(-\kappa\kappa'+\kappa^3+\kappa\tau^2+\tau\kappa^2+\tau\kappa'\right)B\right\}$$

$$\left\|\xi'\times\xi''\right\|^2=\frac{1}{4}\left\{\left(2\kappa^2\tau+\kappa\tau'-\kappa'\tau+\tau^3\right)^2+\left(\kappa\tau'-\tau\kappa'\right)^2+\left(-\kappa\left(\kappa'-\kappa^2-\tau^2\right)+\tau\left(\kappa^2+\kappa'\right)\right)^2\right\},$$

$$\left\langle \xi' \times \xi'', \xi''' \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\omega\left(2\kappa^2\tau + \kappa\tau' - \kappa'\tau + \tau^3\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\phi\left(\kappa\tau' - \tau\kappa'\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma\left(-\kappa\kappa' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 + \tau\kappa^2 + \tau\kappa'\right)$$

dır. Böylece bu değerler yerine yazılırsa,

$$\tau_\xi = \frac{\sqrt{2}\left[\left(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa'\right)\left(\kappa\sigma + \tau\omega\right) + \kappa\left(\kappa\tau + \tau'\right)\left(\phi - \omega\right) + \left(\kappa^2 + \kappa'\right)\left(\kappa\sigma - \tau\phi\right)\right]}{\left[\tau\left(2\kappa^2 + \tau^2\right) + \kappa\tau' - \kappa'\tau\right]^2 + \left(\kappa'\tau - \kappa\tau'\right)^2 + \left(2\kappa^3 + \kappa\tau^2\right)^2}$$

bulunur.

Tanım 3.3 (NB-Smarandache eğrisi):

$\alpha : IR \to IR^3$, $\alpha = \alpha(s)$ bir birim hızlı bir regüler eğri ve $\{T, N, B\}$ bu eğrinin hareketli Frenet-Serret çatısı olsun.

α_{NB} NB-Smarandache eğrisini ζ ile gösterelim.

$\alpha = \alpha(s)$ eğrisine göre ζ Smarandache NB-eğrisinin Frenet-Serret elemanlarını inceleyelim.

ζ NB Smarandache eğrisinin yay uzunluğu parametresini s_ζ ile gösterelim.

$$\zeta = \zeta(s_\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(N + B\right)$$

$$\zeta' = \zeta'(s_\zeta) = \frac{d\zeta}{ds_\zeta}\frac{ds_\zeta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(N'(s) + B'(s)\right)$$

olur.

$(2.2.1)$ ifadesinden,

$$\zeta' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\kappa(s)T(s) - \tau(s)N(s) + \tau(s)B(s)\right)$$

$$\zeta' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\kappa T - \tau N + \tau B\right).$$

Ayrıca,

$$\frac{ds_\zeta}{ds}=\sqrt{\frac{\kappa^2+2\tau^2}{2}}$$

dir. Buradan ζ eğrisinin teğet vektörü

$$T_\zeta=\frac{\zeta^{'}(s)}{\left\|\zeta^{'}(s)\right\|}=\frac{(-\kappa T-\tau N+\tau B)}{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}}$$

bulunur. Şimdi ζ eğrisinin teğet vektörünün tekrar türevini alalım.

$$T^{'}_{\zeta}=\frac{\sqrt{2}\left(\delta_1 T+\delta_2 N+\delta_3 B\right)}{\left(\kappa^2+2\tau^2\right)^2}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 2\tau^2\left(-\kappa^{'}+\tau\kappa\right)+\kappa\tau\left(\kappa^2+2\tau^{'}\right),\\
\delta_2 &= \kappa\left(-\kappa^3-\tau^{'}\kappa+\tau\kappa^{'}\right)-\tau^2\left(3\kappa^2+2\tau^2\right),\\
\delta_3 &= \kappa^2\left(\tau^{'}-\tau^2\right)-\tau\left(2\tau^3+\kappa\kappa^{'}\right).
\end{aligned}$$

Eğrilik tanımından ζ eğrisinin κ_ζ eğriliği şu şekilde bulunur.

$$\kappa_\zeta=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}}{\left(\kappa^2+2\tau^2\right)^2}.$$

Şimdi asli normal vektörü bulalım.

$$N_\zeta=\frac{T_\zeta^{'}}{\left\|T_\zeta^{'}\right\|}=\frac{\delta_1 T+\delta_2 N+\delta_3 B}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}}$$

bulunur.

Son olarak binormal vektörü bulalım.

$$B_\zeta=T_\zeta\times N_\zeta=\frac{-\left(\delta_3+\delta_2\right)T+\left(\tau\delta_1+\kappa\delta_3\right)N+\left(-\kappa\delta_2+\tau\delta_1\right)B}{\sqrt{\left(\kappa^2+2\tau^2\right)\left(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\right)}}$$

bulunur.

ζ eğrisinin burulmasını hesaplamak için ζ eğrisinin birinci türevinden yararlanarak ikinci ve üçüncü türevini sırasıyla bulalım.

$$\zeta^{''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(-\kappa^{'}+\tau\kappa\right)T-\left(\kappa^{2}+\tau^{2}+\tau^{'}\right)N+\left(\tau^{'}-\tau^{2}\right)B\right\}$$

$$\zeta^{'''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l}\left(-\kappa^{''}+\kappa\left(2\tau^{'}+\kappa^{2}\right)+\tau\left(\kappa^{'}+\kappa\tau\right)\right)T\\+\left(\kappa\left(-3\kappa^{'}+\tau\kappa\right)+\tau\left(-3\tau^{'}+\tau^{2}\right)-\tau^{''}\right)N\\+\left(-\tau\left(\kappa^{2}+\tau^{2}+3\tau^{'}\right)+\tau^{''}\right)B\end{array}\right\}$$

olur. Buradan,

$$\phi_1=-\kappa^{''}+\kappa\left(2\tau^{'}+\kappa^{2}\right)+\tau\left(\kappa^{'}+\kappa\tau\right)$$
$$\phi_2=\kappa\left(-3\kappa^{'}+\tau\kappa\right)+\tau\left(-3\tau^{'}+\tau^{2}\right)-\tau^{''}$$
$$\phi_3=-\tau\left(\kappa^{2}+\tau^{2}+3\tau^{'}\right)+\tau^{''}$$

denilirse,

$$\zeta^{'''}=\frac{\phi_1T+\phi_2N+\phi_3B}{\sqrt{2}}$$

elde edilir. Böylece ζ eğrisinin τ_ζ burulmasını

$$\tau_\zeta=\frac{\left\langle\zeta^{'}\times\zeta^{''},\zeta^{'''}\right\rangle}{\left\|\zeta^{'}\times\zeta^{''}\right\|^{2}}=\frac{\det\left(\zeta^{'},\zeta^{''},\zeta^{'''}\right)}{\left\|\zeta^{'}\times\zeta^{''}\right\|^{2}}$$

formülünden bulalım.

$$\zeta^{'}\times\zeta^{''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}T & N & B\\-\kappa & -\tau & \tau\\-\kappa^{'}+\tau\kappa & -\kappa^{2}-\tau^{2}-N^{2} & \tau^{'}-\tau^{2}\end{vmatrix},$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(-\tau\tau^{'}+\tau^{3}+\tau\kappa^{2}+\tau^{3}+\tau N^{'}\right)T+\left(-\kappa\tau^{'}+\kappa\tau^{2}+\kappa^{'}\tau-\tau^{2}\kappa\right)N+\left(\kappa^{3}+\kappa\tau^{2}+\kappa N^{'}-\kappa^{'}\tau-\tau^{2}\kappa\right)B\right\}$$

$$\left\|\zeta^{'}\times\zeta^{''}\right\|^{2}=\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\left(-\tau\tau^{'}+2\tau^{3}+\tau\kappa^{2}+\tau N^{'}\right)^{2}+\left(-\kappa\tau^{'}+\kappa\tau^{2}+\kappa^{'}\tau-\tau^{2}\kappa\right)^{2}\\+\left(\kappa^{3}+\kappa\tau^{2}+\kappa N^{'}-\kappa^{'}\tau+\tau^{2}\kappa\right)^{2}\end{array}\right\}$$

$$\left\langle \zeta^{'} \times \zeta^{''}, \zeta^{'''} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\tau\left(2\tau^2 + \kappa^2\right)\phi_1 + \left(-\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'}\right)\phi_2 + \left(\kappa\left(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau^{'}\right) - \tau\kappa^{'}\right)\phi_3 \right)$$

dır. Böylece bu değerler yerine yazılırsa,

$$\tau_\zeta = \frac{\sqrt{2}\left\{\left(\tau\left(2\tau^2 + \kappa^2\right)\right)\phi_1 + \left(-\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'}\right)\phi_2 + \left(\kappa\left(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau^{'}\right) - \tau\kappa^{'}\right)\phi_3\right\}}{\left(\tau\left(2\tau^2 + \kappa^2\right)\right)^2 + \left(-\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'}\right)^2 + \left(\kappa\left(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau^{'}\right) - 2\kappa^{'}\right)^2}$$

bulunur.

Tanım 3.4 (TNB-Smarandache eğrisi):

$\alpha : IR \to IR^3$, $\alpha = \alpha(s)$ bir birim hızlı bir regüler eğri ve $\{T, N, B\}$ bu eğrinin hareketli Frenet-Serret çatısı olsun.

α_{TNB} TNB -Smarandache eğrisini ψ ile gösterelim.
$\alpha = \alpha(s)$ eğrisine göre ψ Smarandache TNB-eğrisinin Frenet-Serret elemanlarını inceleyelim.

ψ TNB Smarandache eğrisinin yay uzunluğu parametresini s_ψ ile gösterelim.

$$\psi = \psi(s_\psi) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(T + N + B\right)$$

$$\psi^{'} = \psi^{'}(s_\psi) = \frac{d\psi}{ds_\psi}\frac{ds_\psi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(T^{'}(s) + N^{'}(s) + B^{'}(s)\right)$$

olur.

$(2.2.1)$ ifadesinden,

$$\psi^{'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\kappa(s)T(s) + (\kappa - \tau)(s)N(s) + \tau(s)B(s)\right)$$

$$\psi^{'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\kappa T + \left(\kappa - \tau\right)N + \tau B\right).$$

Ayrıca,

$$\frac{ds_\psi}{ds} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau}}{3}$$

dir.

Buradan, ψ eğrisinin teğet vektörü

$$T_\psi = \frac{\psi'(s)}{\left\|\psi'(s)\right\|} = \frac{\left(-\kappa T + (\kappa - \tau) N + \tau B\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau}}$$

bulunur.

ψ eğrisinin teğet vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$T'_\psi = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B)}{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau\right)^2}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \kappa^2\left(-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 4\tau\kappa - \kappa^2\tau'\right) + \kappa\tau\left(\kappa' + 2\tau^2 + 2\tau'\right) - 2\kappa'\tau^2 \\
\lambda_2 &= \kappa^2\left(-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 2\kappa\tau - \tau'\right) + \tau^2\left(-2\tau^2 + 2\kappa\tau + \kappa'\right) + \kappa\tau\left(\kappa' - \tau'\right) \\
\lambda_3 &= 2\kappa^2\left(\kappa\tau - 2\tau^2 + \tau'\right) + \tau^2\left(4\kappa\tau - 2\tau^2 + \kappa'\right) - \kappa\tau\left(\tau' + 2\kappa'\right)
\end{aligned}$$

dır.

Eğrilik tanımından ψ eğrisinin κ_ς eğriliği şu şekilde bulunur.

$$\kappa_\psi = \left\|T'_\psi\right\| = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau\right)^2}.$$

Şimdi asli normal vektörü bulalım.

$$N_\psi = \frac{T'_\psi}{\left\|T'_\psi\right\|} = \frac{\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B}{\sqrt{\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2}}$$

bulunur. Son olarak binormal vektörü bulalım.

$$B_\psi = T_\psi \times N_\psi = \frac{\left((\kappa - \tau)\lambda_3 - \tau\lambda_2\right)T + \left(\tau\lambda_1 + \kappa\lambda_3\right)N - \left(\kappa\lambda_2 + (\kappa - \tau)\lambda_1\right)B}{\sqrt{\left(2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau\right)\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)}}$$

elde edilir.

ψ eğrisinin burulmasını hesaplamak için ψ eğrisinin birinci türevinden yararlanarak ikinci ve üçüncü türevini sırasıyla bulalım.

$$\psi'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(-\kappa' - \kappa^2 + \kappa\tau\right)T - \left(\kappa^2 + \kappa' + \tau' + \tau^2\right)N + \left(\kappa\tau - \tau^2 + \tau'\right)B\right\}$$

ve

$$\psi''' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\begin{array}{l} \left(\kappa'\tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2\right)T \\ +\left(\tau^3 - \kappa^3 - 3\left(\kappa\kappa' + \tau\tau'\right) - \left(-\kappa'' + \tau''\right) + \kappa\tau\left(\kappa - \tau\right)\right)N \\ +\left(\tau'' - \kappa^2\tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau'\right)B \end{array}\right\}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \kappa'\tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \\ \theta_2 &= \tau^3 - \kappa^3 - 3\left(\kappa\kappa' + \tau\tau'\right) - \left(-\kappa'' + \tau''\right) + \kappa\tau\left(\kappa - \tau\right) \\ \theta_3 &= \tau'' - \kappa^2\tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \end{aligned}$$

denilirse,

$$\psi''' = \frac{\theta_1 T + \theta_2 N + \theta_3 B}{\sqrt{3}}$$

elde edilir. Böylece ψ eğrisinin τ_ψ burulmasını

$$\tau_\psi = \frac{\left\langle \psi' \times \psi'', \psi''' \right\rangle}{\left\| \psi' \times \psi'' \right\|^2} = \frac{\det\left(\psi', \psi'', \psi'''\right)}{\left\| \psi' \times \psi'' \right\|^2}$$

formülünden bulalım.

$$\psi' \times \psi'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa - \tau & \tau \\ -\kappa' - \kappa^2 + \kappa\tau & -\kappa^2 - \tau^2 - \kappa' - \tau' & \kappa\tau - \tau^2 + \tau' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(-\kappa\tau^2 + \kappa\tau' - \kappa\tau^2 - \tau\kappa'\right)T + \left(-\kappa\tau - \kappa\tau' + \tau\kappa' + \tau\kappa^2\right)N + \left(\kappa\tau' + \tau\kappa' + 2\kappa^2\tau\right)B\right\}$$

$$\left\langle \psi' \times \psi'', \psi''' \right\rangle = \sqrt{3} \left\{ \begin{array}{l} \left(\kappa'\tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \right) \beta_1 \\ + \left(\tau^3 - \kappa^3 - 3\left(\kappa\kappa' + \tau\tau' \right) - \left(-\kappa'' + \tau'' \right) + \kappa\tau \left(\kappa - \tau \right) \right) \beta_2 \\ + \left(\tau'' - \kappa^2\tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \right) \beta_3 \end{array} \right\}$$

Burada

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\kappa\tau\left(\kappa - \tau\right) + \kappa\tau' - \tau\kappa' + 2\tau^3 \\ \beta_2 &= \kappa\tau' - \tau\kappa' \\ \beta_3 &= 2\kappa^3 + \kappa\tau' + 2\kappa\tau^2 - 2\kappa^2\tau - \kappa'\tau \end{aligned}$$

denilir ve bu değerler yerine yazılırsa,

$$\tau_\psi = \frac{\sqrt{3}\left(\beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2 + \beta_3\theta_3\right)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$$

bulunur.

Örnek: [8]

$$\alpha=\alpha(s)=\left(\frac{9}{208}\sin 16s-\frac{1}{117}\sin 36s,-\frac{9}{208}\cos 16s+\frac{1}{117}\cos 36s,\frac{6}{65}\sin 10s\right)$$

birim hızlı eğrisinin Frenet-Serret çatı elemanlarını inceleyelim. TN,NB,TNB-Smarandache eğrilerini bulalım.

İlk önce $\alpha(s)=\left(\frac{9}{208}\sin 16s-\frac{1}{117}\sin 36s,-\frac{9}{208}\cos 16s+\frac{1}{117}\cos 36s,\frac{6}{65}\sin 10s\right)$ eğrisinin türevini alalım.

$$\alpha^{'}(s)=\alpha(s)=\left(\frac{9}{208}\cos 16s-\frac{1}{117}\cos 36s,\frac{9}{208}\sin 16s-\frac{1}{117}\sin 36s,\frac{6}{65}\cos 10s\right).$$

Eğrinin teğet vektörü,

$$T_{\alpha}=\frac{\alpha^{'}(s)}{\left\|\alpha^{'}(s)\right\|}=\left(\frac{9}{13}\cos 16s-\frac{4}{13}\cos 36s,\frac{9}{13}\sin 16s-\frac{4}{13}\sin 36s,\frac{12}{13}\cos 10s\right)$$

bulunur.

Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$T^{'}_{\alpha}=\left(-\frac{9}{13}\sin 16s+\frac{4}{13}\sin 36s,\frac{9}{13}\cos 16s-\frac{4}{13}\cos 36s,-\frac{12}{13}\sin 10s\right)$$

bulunur.

Eğrilik tanımından $\alpha(s)$ eğrisinin κ_{α} eğriliği

$$\kappa_{\alpha}=\left\|T^{'}_{\alpha}\right\|=-24\sin 10s$$

şeklinde olur.

Diğer yandan, $N_{\alpha}=\frac{T_{\alpha}}{\left\|T_{\alpha}\right\|}$ olduğundan asli normal vektör

$$N_{\alpha}=\left(\frac{12}{13}\cos 26s,\frac{12}{13}\sin 26s,-\frac{5}{13}\right)$$

olur.

$B_\alpha = T_\alpha \times N_\alpha$ ifadesinden de binormal vektör,

$$B_\alpha = \left(-\frac{9}{13}\sin 16s - \frac{4}{13}\sin 36s, \frac{4}{13}\cos 36s + \frac{9}{13}\cos 16s, \frac{12}{13}\sin 10s \right)$$

şeklinde olur.

α eğrisinin 2. ve 3. türevi sırasıyla

$$\alpha^{''} = \left(-\frac{9}{208}\sin 16s + \frac{1}{117}\sin 36s, \frac{9}{208}\cos 16s - \frac{1}{117}\cos 36s, -\frac{6}{65}\sin 10s \right)$$

$$\alpha^{'''} = \left(-\frac{9}{208}\cos 16s - \frac{1}{117}\cos 36s, -\frac{9}{208}\sin 16s + \frac{1}{117}\sin 36s, -\frac{6}{65}\cos 10s \right)$$

olmak üzere,

$$\tau = \frac{\left\langle \alpha^{'} \times \alpha^{''}, \alpha^{'''} \right\rangle}{\left\| \alpha^{'} \times \alpha^{''} \right\|^2} = \frac{\det\left(\alpha^{'}, \alpha^{''}, \alpha^{'''}\right)}{\left\| \alpha^{'} \times \alpha^{''} \right\|^2}$$

formülünden,

$$\alpha^{'} \times \alpha^{''} = \begin{vmatrix} T & N & B \\ \frac{9}{208}\cos 16s - \frac{1}{117}\cos 36s & \frac{9}{208}\sin 16s - \frac{1}{117}\sin 36s & \frac{6}{65}\cos 10s \\ -\frac{9}{208}\sin 16s + \frac{1}{117}\sin 36s & \frac{9}{208}\cos 16s - \frac{1}{117}\cos 36s & -\frac{6}{65}\sin 10s \end{vmatrix},$$

Buradan,

$$\tau_\alpha = \frac{\left\langle \alpha^{'} \times \alpha^{''}, \alpha^{'''} \right\rangle}{\left\| \alpha^{'} \times \alpha^{''} \right\|^2} = 24\cos 10s$$

şeklinde bulunur.

Şimdi sırasıyla TN,NB,TNB-Smarandache eğrilerini bulalım.

$\alpha_{TN}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T+N)$ Smarandache eğrisi

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{9}{13}\cos 16s-\frac{4}{13}\cos 36s+\frac{12}{13}\cos 26s,\\ \frac{9}{13}\sin 16s-\frac{4}{13}\sin 36s+\frac{12}{13}\sin 26s,\\ \frac{12}{13}\cos 10s-\frac{5}{13}\end{pmatrix}$$

bulunur.

$\alpha_{NB}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(N+B)$ Smarandache eğrisi

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{12}{13}\cos 26s-\frac{9}{13}\sin 16s-\frac{4}{13}\sin 36s,\\ \frac{12}{13}\sin 26s+\frac{4}{13}\cos 36s+\frac{9}{13}\cos 16s,\\ -\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\sin 10s\end{pmatrix}$$

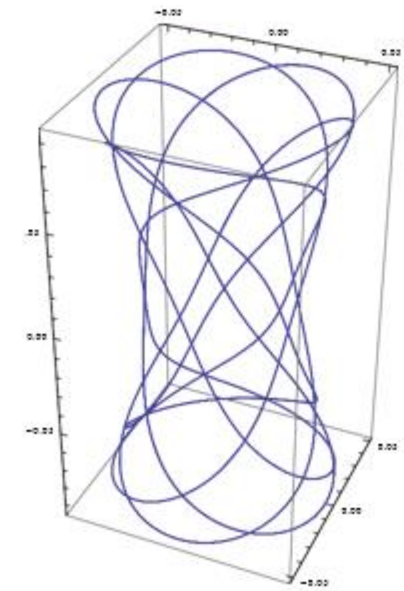
bulunur.

$\alpha_{TNB}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(T+N+B)$ Smarandache eğrisi

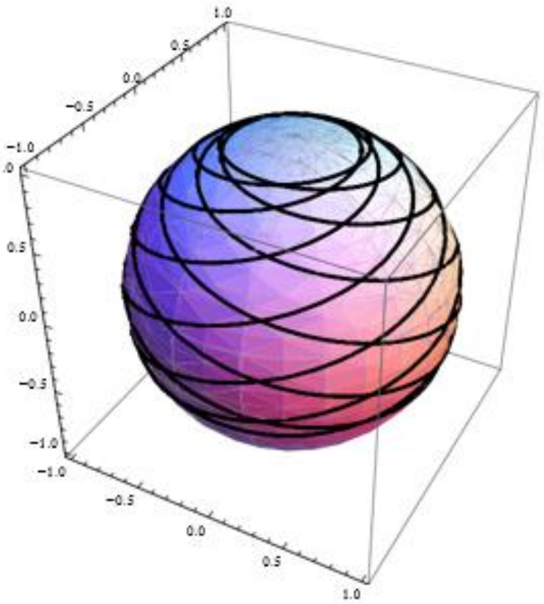
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{9}{13}\cos 16s-\frac{4}{13}\cos 36s+\frac{12}{13}\cos 26s-\frac{9}{13}\sin 16s-\frac{4}{13}\sin 36s,\\ \frac{9}{13}\sin 16s-\frac{4}{13}\sin 36s+\frac{12}{13}\sin 26s+\frac{4}{13}\cos 36s+\frac{9}{13}\cos 16s,\\ \frac{12}{13}\cos 10s-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\sin 10s\end{pmatrix}$$

bulunur.

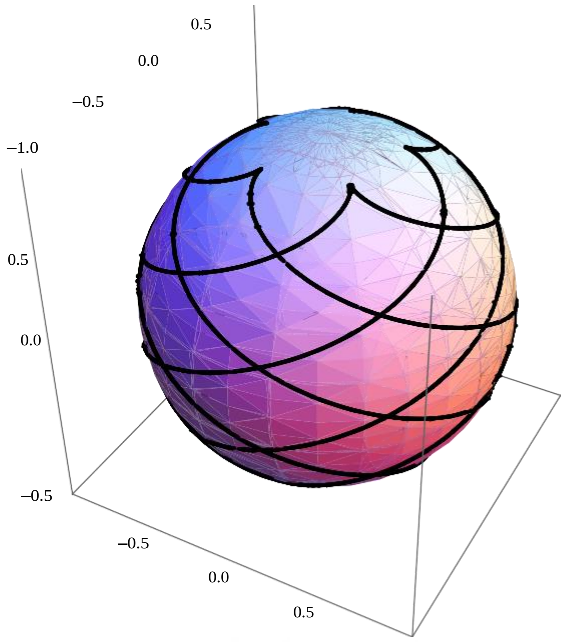
$\alpha(s)$ eğrisi şekil 3.1 'de ve buradan oluşan Smarandache TN eğrisi şekil 3.2'de, Smarandache NB şekil 3.3'te, Smarandache TNB eğrisi şekil 3.4 'te gösterilmiştir $[8]$.



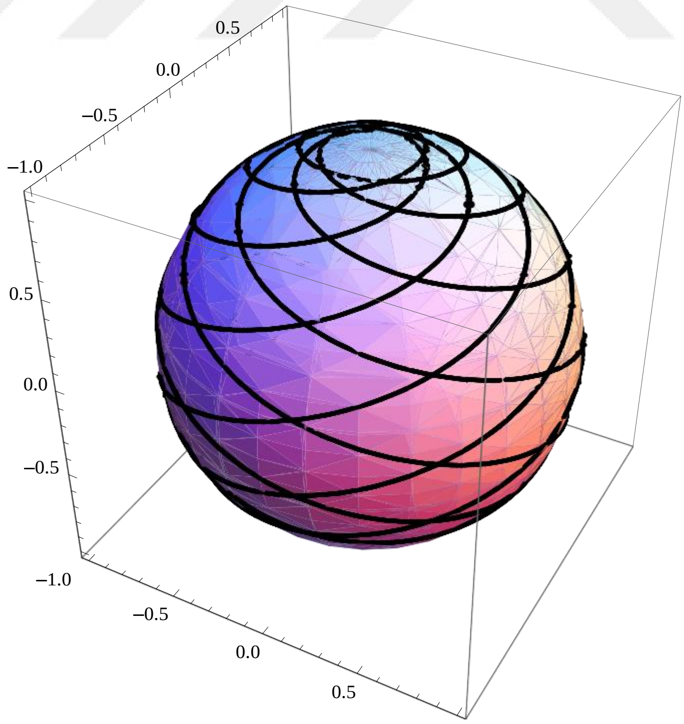
Şekil 3.1: $\alpha = \alpha(s)$



Şekil 3.2: Smarandache TN-eğrisi



Şekil 3.3: Smarandache NB-eğrisi



Şekil 3.4 : Smarandache TNB-eğrisi

Örnek: [11]

$\alpha=\alpha(s)=\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ birim hızlı helis eğrisinin Frenet-Serret çatı elemanlarını inceleyelim. TN, NB, TNB-Smarandache eğrilerini bulalım.

$$\alpha^{'}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s,\cos s,1)$$

olduğundan $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü,

$$T_{\alpha}(s)=\frac{\alpha^{'}(s)}{\left\|\alpha^{'}(s)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\cos\frac{s}{\sqrt{2}},1\right)$$

bulunur.

Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa,

$$T^{'}_{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\sin\frac{s}{\sqrt{2}},0\right)$$

bulunur.

Eğrilik tanımından $\alpha(s)$ eğrisinin κ_{α} eğriliği

$$\kappa_{\alpha}(s)=\left\|T_{\alpha}^{'}(s)\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

şeklinde olur.

$N_{\alpha}=\frac{T_{\alpha}^{'}}{\left\|T_{\alpha}^{'}\right\|}$ olduğundan asli normal vektör

$$N_{\alpha}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\sin\frac{s}{\sqrt{2}},0\right)$$

olur.

$B_{\alpha}=T_{\alpha}\times N_{\alpha}$ ifadesinden de binormal vektör,

$$B_{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}},-\cos\frac{s}{\sqrt{2}},1\right)$$

olur.

α eğrisinin 2. ve 3. türevi sırasıyla

$$\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos s, -\sin s, 0\right)$$

$$\alpha''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin s, -\cos s, 0\right)$$

olmak üzere,

$$\tau = \frac{\left\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \right\rangle}{\left\| \alpha' \times \alpha'' \right\|^2} = \frac{\det\left(\alpha', \alpha'', \alpha'''\right)}{\left\| \alpha' \times \alpha'' \right\|^2}$$

formülünden,

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\alpha' \times \alpha'' = (0,0,1)$$

Buradan,

$$\tau_\alpha = \frac{\left\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \right\rangle}{\left\| \alpha' \times \alpha'' \right\|^2} = 0$$

şeklinde bulunur.

Şimdi sırasıyla TN, NB, TNB-Smarandache eğrilerini bulalım.

$\alpha_{TN}\left(s\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T+N\right)$ Smarandache eğrisi

$$= \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

bulunur.

$$\alpha_{NB}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(N+B) \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$$

bulunur.

$$\alpha_{TNB}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(T+N+B) \text{ Smarandache eğrisi}$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

bulunur.

4.BÖLÜM

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölüm $[9]$ Mervat Elzawy 'in makalesinin incelenmiş bir halidir. Burada tb_1 Smarandache eğrisi Frenet-Serret çatısına göre, TM_1 Smarandache eğrisi Bishop çatısına göre incelenecektir.

4.1. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler Hakkında Genel Bilgi

$\alpha : IR \to IR^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında keyfi bir eğri olmak üzere,

$a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ ve $c=(c_1,c_2,c_3,c_4)$ IR^4 uzayında üç vektör olsun.

$a,b,\mathrm{c} \in IR^4$ için dış çarpım,

$$a\times b\times c=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

ile verilir. Burada,

$$\begin{aligned} e_1\times e_2\times e_3 &= e_4, \\ e_2\times e_3\times e_4 &= e_1, \\ e_3\times e_4\times e_1 &= e_2, \\ e_4\times e_1\times e_2 &= e_3, \\ e_3\times e_2\times e_1 &= e_4 \end{aligned}$$

dır$[9]$.

$t(s),n(s),b_1(s),b_2(s)$ vektörleri birim hızlı bir α eğrisi boyunca hareketli Frenet-Serret çatısıdır. Frenet-Serret türev formülleri şöyle verilir.

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b_1' \\ b_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ n \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad [9].$$

Burada t,n,b_1 ve b_2 sırasıyla α eğrisinin teğet, asli normal, 1. binormal ve 2. binormal vektör alanlarıdır. Bu $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ fonksiyonları sırasıyla α eğrisinin 1., 2. ve 3. eğrilikleridir[9].

$\alpha=\alpha(t)$ IR^4 uzayında keyfi bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet-Serret vektörleri aşağıdaki gibi verilir.

$$t=\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},$$

$$n=\frac{\|\alpha'\|^2\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha'}{\left\|\|\alpha'\|^2\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha\right\|},$$

$$b_1=\eta b_2\times t\times n \quad ,$$

$$b_2=\eta\frac{t\times n\times\alpha'''}{\|t\times n\times\alpha'''\|} \ ,$$

ve eğrilikler de,

$$k_1=\frac{\left\|\|\alpha'\|^2\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha'\right\|}{\|\alpha'\|^4},$$

$$k_2=\frac{\|t\times n\times\alpha'''\|\|\alpha'\|}{\left\|\|\alpha'\|^2\alpha''-\langle\alpha',\alpha''\rangle\alpha'\right\|},$$

$$k_3=\frac{\langle\alpha^{IV},b_2\rangle}{\|t\times n\times\alpha'''\|\|\alpha'\|},$$

ile verilir. Burada $[t,n,b_1,b_2]$ matrisinin determinantı 1'e eşit olacak şekilde $\eta=\mp 1$ olarak seçilir[9].

Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı, eğrinin 2. türevi sıfır olduğunda da hareketli bir çatıyı tanımlamak için yeterlidir. Çatının her bileşenini paralel olarak öteleme suretiyle bir eğri boyunca bir ortonormal çatının paralel ötelemesini ifade edebiliriz[9].

Bishop (paralel öteleme) denklemleri IR^4 uzayında aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \\ M_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix},$$

burada K_1, K_2 ve K_3 eğrilikleri Bishop (paralel öteleme) çatısına göre α eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır. $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ kümesine α eğrisinin Bishop (paralel öteleme) çatısı denir$[12,13]$.

Temel eğrilikler aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} K_1 &= k_1 \cos\theta \cos\psi, \\ K_2 &= k_1 \left(-\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi\right), \\ K_3 &= k_1 \left(\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \sin\theta \cos\psi\right), \end{aligned}$$

$$k_1 = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2} \ ,$$

$$k_2 = -\psi' + \phi' \sin\theta \ ,$$

$$k_3 = \frac{\theta'}{\sin\psi'} \ ,$$

$$\phi' \cos\theta + \theta' \cot\psi = 0 \ ,$$

burada,

$$\theta' = \frac{k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \ , \quad \psi' = -\left(k_2 + k_3 \frac{\sqrt{k_3^2 - \left(\theta'\right)^2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right) , \quad \phi' = \frac{\sqrt{k_3^2 - \left(\theta'\right)^2}}{\cos\theta}$$

şeklindedir.

Burada K_1, K_2, K_3 α eğrisinin Bishop (paralel öteleme) çatısına göre temel eğrilik fonksiyonları ve k_1, k_2, k_3 α eğrisinin Frenet-Serret çatısına göre temel eğrilik fonksiyonlarıdır.

4.2. Frenet-Serret çatısına göre 4-boyutlu Öklid uzayında tb₁ Smarandache eğrisi

Bu bölümde tb_1 Smarandache eğrileri tanımlanacak ve Frenet-Serret elemanları elde edilecektir$[9]$.

Tanım 4.2.1: Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet-Serret çatısı tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğri denir$[11]$.

Tanım 4.2.2: $\alpha=\alpha(s)$, sabit ve sıfırdan farklı k_1,k_2,k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri ve $\{t,n,b_1,b_2\}$ hareketli çatı üzerinde tb_1 Smarandache eğrileri

$$\beta(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t(s)+b_1(s)\right)$$

ile tanımlanmaktadır$[9]$.

Teorem 4.2.1: $\beta(s_\beta)$ sabit ve sıfırdan farklı k_1,k_2,k_3 eğriliklerine sahip ve $\alpha(s)$ eğrisinin çatı vektörleri tarafından tanımlanan tb_1 Smarandache eğrisi olsun. Bu takdirde $\beta(s_\beta)$ eğrisinin Frenet-Serret elemanları $\beta\left(\{t_\beta,n_\beta,b_{1\beta},b_{2\beta},k_{1\beta},k_{2\beta},k_{3\beta}\}\right)$ $\alpha(s)$ eğrisinin $\left(\{t,n,b_1,b_2,k_1,k_2,k_3\}\right)$ Frenet-Serret elemanları tarafından oluşturulur $[9]$.

İspat: $\beta=\beta(s)$, $\alpha(s)$ eğrisinin tb_1 Smarandache eğrisi olsun$[9]$.

$$\beta(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t(s)+b_1(s)\right)$$

eğrisinin s'ye göre diferansiyel alınırsa,

$$\frac{d\beta(s_\beta)}{ds}=\frac{d\beta(s_\beta)}{ds_\beta}.\frac{ds_\beta}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left((k_1-k_2)n+k_3b_2\right)$$

elde edilir.

β eğrisinin teğet vektörü

$$t_\beta=A_1n+A_2b_2$$

ile verilir.

Burada

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{\sqrt{\left(k_1 - k_2\right)^2 + k_3{}^2}}{\sqrt{2}}$$

$$A_1 = \frac{\left(k_1 - k_2\right)}{\sqrt{\left(k_1 - k_2\right)^2 + k_3^2}}$$

$$A_2 = \frac{k_3}{\sqrt{\left(k_1 - k_2\right)^2 + k_3^2}}$$

dir.

Yine β eğrisinin 2.türevi alınırsa,

$$\beta'' = \frac{\sqrt{2}\left(-k_1\left(k_1 - k_2\right)t + \left(k_1k_2 - k_2^2 - k_3^2\right)b_1\right)}{\left(k_1 - k_2\right)^2 + k_3^2}$$

elde edilir.

β eğrisinin asli normali

$$n_\beta = A_3 t + A_4 b_1$$

olur.

Burada,

$$A_3 = \frac{-k_1\left(k_1 - k_2\right)}{\sqrt{k_1^2\left(k_1 - k_2\right)^2 + \left(k_1k_2 - k_2^2 - k_3^2\right)^2}}$$

$$A_4 = \frac{k_1k_2 - k_2^2 - k_3^2}{\sqrt{k_1^2\left(k_1 - k_2\right)^2 + \left(k_1k_2 - k_2^2 - k_3^2\right)^2}}$$

dir.

$$\beta''' = A_5\eta + A_6 b_2$$

olmak üzere burada

$$A_5 = \frac{2(-k_1\left(k_1-k_2\right)-k_2\left(k_1k_2-k_2^2-k_3^2\right)}{\left(\left(k_1-k_2\right)^2+k_3^2\right)^{3/2}} \quad , \quad A_6 = \frac{k_3\left(k_1k_2-k_2^2-k_3^2\right)}{\left(\left(k_1-k_2\right)^2+k_3^2\right)^{3/2}}$$

dir.

β eğrisinin 1. ve 2. binormal vektörü,

$$b_{2\beta} = \frac{\left(k_1k_2-k_2^2-k_3^2\right)t+k_1\left(k_1-k_2\right)b_1}{\sqrt{\left(k_1k_2-k_2^2-k_3^2\right)^2+k_1^2\left(k_1-k_2\right)^2}}$$

$$b_{1\beta} = \frac{-k_3\eta+\left(k_1-k_2\right)b_2}{\sqrt{k_3^2+\left(k_1-k_2\right)^2}}$$

şeklindedir.

β eğrisinin 1., 2., ve 3. eğrilikleri,

$$k_{1\beta} = \frac{2\left(\left(k_1k_2-k_2^2-k_3^2\right)^2+k_1^2\left(k_1-k_2\right)^2\right)}{\left(k_3^2+\left(k_1-k_2\right)^2\right)^2}$$

$$k_{2\beta} = \frac{\sqrt{2}k_3\left(k_1\left(k_1k_2-k_2^2k_3^2\right)+k_1^2\left(k_1-k_2\right)\right)}{\left(k_3^2+\left(k_1-k_2\right)^2\right)\sqrt{\left(k_1k_2-k_2^2-k_3^2\right)^2+k_1^2\left(k_1-k_2\right)^2}}$$

$$k_{3\beta} = \frac{\sqrt{2}\left(-k_1A_4A_5-k_2A_3A_5+k_3A_3A_6\right)}{\sqrt{\left(k_3^2+\left(k_1-k_2\right)^2\right)}\sqrt{\left(k_1k_2-k_2^2-k_3^2\right)^2+k_1^2\left(k_1-k_2\right)^2}}$$

olarak elde edilir[9].

4.3. Bishop (paralel öteleme) çatısına göre 4-boyutlu Öklid uzayında TM1 Smarandache eğrisi

Bu bölümde TM_1 Smarandache eğrisi tanımlanacak ve Bishop (paralel öteleme) çatısı ve temel eğrilikleri elde edilecektir $[9]$.

Tanım 4.3.1: IR^4 uzayında $\alpha=\alpha(s)$ birim hızlı bir eğri ve $\{T_\alpha, M_{1\alpha}, M_{2\alpha}, M_{3\alpha}\}$ hareketli Bishop (paralel öteleme) çatısı olsun. TM_1 Smarandache eğrisi

$$\beta(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_\alpha+M_{1\alpha})$$

ile tanımlanır $[9]$.

Teorem 4.3.1: $\beta(s_\beta)$, IR^4 uzayında $\kappa_{1\beta}, \kappa_{2\beta}, \kappa_{3\beta}$ sabit eğriliklerine sahip $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Bishop (paralel öteleme) çatı vektörleri tarafından oluşturulan TM_1 Smarandache eğrisine sahip olan birim hızlı bir eğri olsun. Buradan, α eğrisinin Bishop çatısı tarafından β eğrisinin Bishop çatısı oluşturulur. α eğrisinin eğrilikleri tarafından β eğrisinin $(\kappa_{1\beta}, \kappa_{2\beta}, \kappa_{3\beta})$ eğrilikleri elde edilir $[9]$.

İspat : TM_1 Smarandache eğrisinin Bishop çatısının s 'ye göre diferansiyeli alınırsa $[9]$,

$$T_\beta \frac{ds_\beta}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\kappa_{1\alpha}T_\alpha+\kappa_{1\alpha}.M_{1\alpha}+\kappa_{2\alpha}.M_{2\alpha}+\kappa_{3\alpha}.M_{3\alpha}\right)$$

β eğrisinin teğet vektörü,

$$T_\beta=\frac{-\kappa_{1\alpha}T_\alpha+\kappa_{1\alpha}.M_{1\alpha}+\kappa_{2\alpha}.M_{2\alpha}+\kappa_{3\alpha}.M_{3\alpha}}{\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2+\kappa_{2\alpha}^2+\kappa_{3\alpha}^2}}$$

bulunur. Burada,

$$\frac{ds_\beta}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2+\kappa_{2\alpha}^2+\kappa_{3\alpha}^2}\ .$$

T_β nin s 'ye göre diferansiyel alınırsa,

$$T_\beta^{'}=\frac{dT_\beta}{ds_\beta}=\lambda_0T_\alpha+\lambda_1M_{1\alpha}+\lambda_2M_{2\alpha}+\lambda_3M_{3\alpha}$$

bulunur.

Buradan,

$$\lambda_0 = \frac{-\sqrt{2}\left(\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)}{\left(2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)},$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{2}\kappa_{1\alpha}^2}{\left(2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)},$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sqrt{2}\kappa_{1\alpha}\kappa_{2\alpha}}{\left(2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)},$$

$$\lambda_3 = \frac{-\sqrt{2}\kappa_{1\alpha}\kappa_{3\alpha}}{\left(2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)}$$

elde edilir.

Frenet-Serret çatısına göre β eğrisinin ilk eğriliği

$$k_{1\beta} = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{K_{1\alpha}{}^2 + K_{2\alpha}{}^2 + K_{3\alpha}{}^2}}{\sqrt{2K_{1\alpha}{}^2 + K_{2\alpha}{}^2 + K_{3\alpha}{}^2}}$$

bulunur.

β eğrisinin asli normali

$$n_\beta = \frac{\lambda_0 T_\alpha + \lambda_1 M_{1\alpha} + \lambda_2 M_{2\alpha} + \lambda_3 M_{3\alpha}}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}$$

bulunur.

β eğrisinin 3.türevi

$$\beta''' = \left(\lambda_0 T_\alpha' + \lambda_1 M_{1\alpha}' + \lambda_2 M'_{2\alpha} + \lambda_3 M'_{3\alpha}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2}}$$

olup düzenlenirse,

$$= \frac{\sqrt{2}\left[\left(-\lambda_1 K_{1\alpha} - \lambda_2 K_{2\alpha} - \lambda_3 K_{3\alpha}\right)T_\alpha + \lambda_0 K_{1\alpha} M_{1\alpha} + \lambda_0 K_{2\alpha} M_{2\alpha} + \lambda_0 K_{3\alpha} M_{3\alpha}\right]}{\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2}}$$

elde edilir.

$$T_\beta \times n_\beta \times \beta''' = C_1 M_{1\alpha} + C_2 M_{2\alpha} + C_3 M_{3\alpha}$$

eşitliğinde,

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}\left[\lambda_0\lambda_3 K_{1\alpha}K_{2\alpha} - \lambda_0\lambda_2 K_{1\alpha}K_{3\alpha} - \left(\lambda_1 K_{1\alpha} + \lambda_2 K_{2\alpha} + \lambda_3 K_{3\alpha}\right)\left(\lambda_3 K_{2\alpha} - \lambda_2 K_{3\alpha}\right)\right]}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\left(2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)},$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}\left[\lambda_0\lambda_3 K_{1\alpha}^2 - \lambda_0\lambda_1 K_{1\alpha}K_{3\alpha} - \left(\lambda_1 K_{1\alpha} + \lambda_2 K_{2\alpha} + \lambda_3 K_{3\alpha}\right)\left(\lambda_3 K_{1\alpha} - \lambda_1 K_{3\alpha}\right)\right]}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\left(2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)},$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{2}\left[\lambda_0\lambda_2 K_{1\alpha}^2 - \lambda_0\lambda_1 K_{1\alpha}K_{2\alpha} - \left(\lambda_1 K_{1\alpha} + \lambda_2 K_{2\alpha} + \lambda_3 K_{3\alpha}\right)\left(\lambda_1 K_{2\alpha} - \lambda_2 K_{2\alpha}\right)\right]}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\left(2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2\right)},$$

olarak bulunur.

Buradan β eğrisinin 2.binormali,

$$b_{2\beta} = \frac{C_1 M_{1\alpha} + C_2 M_{2\alpha} + C_3 M_{3\alpha}}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

bulunur.

β eğrisinin 1. binormali,

$$b_{1\beta} = b_{2\beta} \times T_\beta \times n_\beta,$$

$$b_{1\beta} = \gamma_0 T_\alpha + \gamma_1 M_{1\alpha} + \gamma_2 M_{2\alpha} + \gamma_3 M_{3\alpha},$$

olmak üzere,

$$\gamma_0 = \frac{C_1\lambda_3 K_{2\alpha} - C_1\lambda_2 K_{3\alpha} + C_2\lambda_1 K_{3\alpha} - C_2\lambda_3 K_{1\alpha} + C_3\lambda_2 K_{1\alpha} - C_3\lambda_1 K_{2\alpha}}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2 + \kappa_{2\alpha}^2 + \kappa_{3\alpha}^2}}$$

$$\gamma_1 = \frac{C_2\lambda_3K_{1\alpha} + C_2\lambda_0K_{3\alpha} - C_3\lambda_2K_{1\alpha} - C_3\lambda_0K_{1\alpha}}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2+\kappa_{2\alpha}^2+\kappa_{3\alpha}^2}}$$

$$\gamma_2 = \frac{C_1\lambda_3K_{1\alpha} + C_1\lambda_0K_{3\alpha} - C_3\lambda_1K_{1\alpha} - C_3\lambda_0K_{1\alpha}}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2+\kappa_{2\alpha}^2+\kappa_{3\alpha}^2}}$$

$$\gamma_3 = \frac{C_1\lambda_2K_{1\alpha} + C_1\lambda_0K_{2\alpha} - C_2\lambda_1K_{1\alpha} - C_2\lambda_0K_{1\alpha}}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}\sqrt{2\kappa_{1\alpha}^2+\kappa_{2\alpha}^2+\kappa_{3\alpha}^2}}$$

şeklindedir.

β eğrisi için Bishop çatısı,

$$\begin{aligned}
M_{1\beta} &= \left(\frac{\lambda_0\cos\theta_\beta\cos\psi_\beta}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_0\cos\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)T_\alpha \\
&+ \left(\frac{\lambda_1\cos\theta_\beta\cos\psi_\beta}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_1\cos\theta_\beta\sin\psi_\beta - \frac{C_1\sin\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)M_{1\alpha} \\
&+ \left(\frac{\lambda_2\cos\theta_\beta\cos\psi_\beta}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_2\cos\theta_\beta\sin\psi_\beta - \frac{C_2\sin\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)M_{2\alpha} \\
&+ \left(\frac{\lambda_3\cos\theta_\beta\cos\psi_\beta}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_3\cos\theta_\beta\sin\psi_\beta - \frac{C_3\sin\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)M_{3\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{2\beta} &= \left[\frac{\lambda_0\left(-\cos\phi_\beta\sin\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\cos\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_0\left(\cos\phi_\beta\cos\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)\right]T_\alpha \\
&+ \left[\frac{\lambda_1\left(-\cos\phi_\beta\sin\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\cos\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_1\left(\cos\phi_\beta\cos\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right) + \left(\frac{C_1\sin\phi_\beta\cos\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)\right]M_{1\alpha} \\
&+ \left(\frac{\lambda_2\left(-\cos\phi_\beta\sin\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\cos\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_2\left(\cos\phi_\beta\cos\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right) + \left(\frac{C_2\sin\phi_\beta\cos\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)\right)M_{2\alpha} \\
&+ \left(\frac{\lambda_3\left(-\cos\phi_\beta\sin\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\cos\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \gamma_3\left(\cos\phi_\beta\cos\psi_\beta + \sin\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right) + \frac{C_3\sin\phi_\beta\cos\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)M_{3\alpha},
\end{aligned}$$

$$M_{3\beta}=\left[\frac{\lambda_0\left(\sin\phi_\beta\sin\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}+\gamma_0\left(-\sin\phi_\beta\cos\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)\right]T_\alpha$$

$$+\left[\frac{\lambda_1\left(\sin\phi_\beta\sin\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}+\gamma_1\left(-\sin\phi_\beta\cos\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)+\frac{C_1 cos\phi_\beta\cos\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right]M_{1\alpha}$$

$$+\left(\frac{\lambda_2\left(\sin\phi_\beta\sin\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\cos\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}+\gamma_2\left(-\sin\phi_\beta\cos\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)+\frac{C_2\cos\phi_\beta\cos\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)M_{2\alpha}$$

$$+\left(\frac{\lambda_3\left(\sin\phi_\beta\sin\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}+\gamma_3\left(-\sin\phi_\beta\cos\psi_\beta+\cos\phi_\beta\sin\theta_\beta\sin\psi_\beta\right)+\frac{C_3\cos\phi_\beta\cos\theta_\beta}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}\right)M_{3\alpha},$$

bulunur.

Burada,

$$\theta_\beta=\int\frac{k_{3\beta}}{\sqrt{k_{1\beta}^2+k_{2\beta}^2}},$$

$$\psi_\beta=-\int\left[k_{2\beta}+k_{3\beta}\frac{\sqrt{k_{3\beta}^2-\theta_\beta^{'\,2}}}{\sqrt{k_{1\beta}^2+k_{1\beta}^2}}\right]ds_\beta \quad ,$$

$$\phi_\beta=-\int\frac{\sqrt{k_{3\beta}^2-\theta_\beta^{'\,2}}}{\cos\theta_\beta}ds$$

bulunur.

Frenet-Serret çatısına göre 2. ve 3.eğrilik

$$k_{2\beta}=\sqrt{\frac{C_1^2+C_2^2+C_3^2}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}}$$

$$k_{3\beta}=\frac{-\left(C_1K_{1\alpha}+C_2K_{2\alpha}+C_3K_{3\alpha}\right)\left(\lambda_1K_{1\alpha}+\lambda_2K_{2\alpha}+\lambda_3K_{3\alpha}\right)}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}$$

şeklinde elde edilir.

Bishop çatısına göre eğrilikler de

$$K_{1\beta} = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos\theta_\beta \cos\psi_\beta$$

$$K_{2\beta} = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \left[-\cos\phi_\beta \sin\psi_\beta + \sin\phi_\beta \sin\theta_\beta \cos\psi_\beta \right]$$

$$K_{3\beta} = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \left[\sin\phi_\beta \sin\psi_\beta + \cos\phi_\beta \sin\theta_\beta \cos\psi_\beta \right]$$

olarak elde edilir [9].

KAYNAKLAR

[1] Kahraman T., Dual Öklidyen ve Lorentziyen uzaylardaki küresel eğrilerin Smarandache eğrileri ve regle yüzeyleri, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2013.

[2] Boyer, C.B., A History of Mathematics,. John Willey and sons Inc., New York, 1968

[3] Scofield, P.D., Curves of constant precession, Amer. Math. Monthly, 102 (1995), 531–537.

[4] Turgut M., Smarandache breadth pseudo null curves in Minkowski space time, Int. J. Math. Combin. Vol 1 (2009), 46–49.

[5] Turgut M., Yilmaz S., Smarandache curves in Minkowski space-time, Int. J. Math. Combin, Vol. 3(2008) 51–55.

[6] Bishop, R.L., There is more than one way to frame a curve, The American Mathematical Monthly, Vol:82, No:3, 1975, 246-251.

[7] Masal M., Azak A.Z., 3-Boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğriler ve Bishop çatısı, Sakarya Üniv. Fen Bilimleri Ens. Dergisi, 21(6), 1140-1145, 2017.

[8] Ali A.T., Special Smarandache curves in the Euclidean space,Int.J.Math. Combin, Vol. 2, (2010), 30–36.

[9] Elzawy M., Smarandache curves in Euclidean , (4-space) E^4, Journal of the Egyptian Mathematical Society (2017).

[10] Sabuncuoğlu A., Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları/ Matematik İstatistik Yayınlar Dizisi:10, Ankara, 2006.

[11] Senyurt S., Sivas S., An application of Smarandache curve, Ordu Univ. J. Sci. Tech., Vol:3, No:1, 2013, 46-60.

[12] Senyurt S., Calıskan A., N C-Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame, Int. J. Math. Combin,Vol:1 (2015) 1–13.

[13] Cetin M., Tuncer Y., Karacan M.K., Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space, Gen. Math. Notes , Vol:20, No:2, (February 2014), (50-66).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Buse YEŞİLGÜL

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : buseyesilgul@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Salih Dede Lisesi, 2010.

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015.

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik/Geometri Bölümü, 2018.

Mesleki Deneyim

Ege Sistem Eğitim Kurumları	2015-2017
Güzelbahçe Özel Bilgince Koleji	2017-(halen)