T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI

ÇİFT BULANIK SAYI DİZİLERİNİN AĞIRLIKLI ORTALAMALARININ İSTATİSTİKSEL TOPLANABİLİRLİĞİ

Aslıhan ÜNAL

Danışman
Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

MANİSA-2018

TEZ ONAYI

Aslıhan ÜNAL tarafından hazırlanan **"Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Ağırlıklı Ortalamalarının İstatistiksel Toplanabilirliği"** adlı tez çalışması 29.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Cihangir ALACA** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR** Afyon Kocatepe Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Aslıhan ÜNAL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$C(K)$	$K \subseteq \mathbb{R}^2$ üzerindeki sürekli reel değerli fonksiyonlar uzayı
$C_{\mathcal{F}}(K)$	K üzerindeki tüm sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların kümesi
$(C, 1, 1)$	Çift diziler için Cesàro metodu
E^1	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fuzzy sayılarının uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$(\overline{N}, p, q, 1, 1)$	Çift diziler için ağırlıklı ortalama metodu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$st - \lim_{mn} u_{mn}$	(u_{mn}) çift dizisinin istatistiksel limiti
(t_{mn}^{11})	Bir cift dizisinin ağırlıklı ortalamalar dizisi
$\delta_2(M)$	M kümesinin yoğunluğu
λ_n	λn çarpımının tam kısmı
$\Vert \cdot \Vert$	$C(K)$ uzayının alışılmış supremum normu

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgilerinden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN'a ve tezimin yazım aşamasında yardımını eksik etmeyen Araştırma Görevlisi Enes YAVUZ'a teşekkür ederim.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiç eksik etmeyen, her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür etmeyi borç bilirim.

Aslıhan Ünal
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Ağırlıklı Ortalamalarının İstatistiksel Toplanabilirliği

Aslıhan ÜNAL

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramının ve Tauber teorisinin tarihi gelişiminden bahsedilmiştir. Çift dizilerin istatistiksel toplanabilirliği ile ilgili çalışmalar özetlenmiştir. Bulanık küme teorisi hakkında bilgi verilmiştir ve bu tezin amacı taktim edilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak ağırlıklı ortalamaları istatistiksel toplanabilen çift diziler için Tauber şartlar verilmiştir. Ardından çift diziler için istatistiksel A-toplanabilme kavramı tanımlanmıştır. Son olarak, bulanık sayıları ve bulanık pozitif lineer operatörler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin orjinal sonuçları verildi. Bu bölümde çift bulanık sayı dizilerin ağırlıklı ortalamalarının istatistiksel toplanabilirliği kavramı tanıtıldı ve ağırlıklı ortalaması istatistiksel toplanabilen çift bulanık sayı dizilerin istatistiksel yakınsak olmasını sağlayan Tauber şartları verildi. Ayrıca elde edilen yeni metot yardımıyla, bulanık pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için Korovkin tipi bir yaklaşım teoremi ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı dizileri, Ağırlıklı ortalamaların istatistiksel toplanabilirliği, Tauber koşulları, İstatistiksel yakınsaklık, Bulanık pozitif lineer operatör, Korovkin tipi yaklaşım teoremi.

2018, 46 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Statistical Weighted Mean Summability of Double Sequences of Fuzzy Numbers

Aslıhan ÜNAL

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüsamettin Çoşkun

This study consists of three chapters.

The first chapter is introduction chapter. In this chapter historical developments of Tauberian theory and the notion of statistical convergence are mentioned. Studies concerning with statistical summability of double sequences are summarized. Also, information about fuzzy set theory are given and the aim of this thesis are introduced.

In the second chapter, first, Tauberian conditions for double sequences that are statistically summable by weighted means are given. Next, the notion of statistical A-summabilitiy for double sequence is defined. Finally, basic definitions and theorems related to fuzzy numbers and fuzzy positive linear operators are given.

In the third chapter, original results of this thesis are given. In this chapter we define the method of statistical summability of weighted means of fuzzy double sequences and we give Tauberian conditions under which statistical convergence of fuzzy double sequences follows from the statistical summability of their weighted means. Furthermore by means of our new method We prove a Korovkin-type approximation theorem for a double sequence of fuzzy positive linear operators.

Keywords: fuzzy double sequences, statistical summability of weighted means, Tauberian conditions, Fuzzy positive linear operator, Korovkin type approximation theorem.

2018, 46 pages

1. GİRİŞ

Toplanabilme metodları yakınsak olsun veya olmasın sonsuz bir seriye uygun bir toplam atamak için Euler'in zamanından beri kullanılmaktadır. En basit tanımıyla, Tauber Teorisi bir toplanabilme metoduyla toplanabilen bir serinin hangi koşullar altında yakınsak olduğunu bulma problemiyle ilgilenir. Bu tür ilk şart Abel toplanabilme metodu için Tauber [1] tarafından verilmiştir. Bu sebeple bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın yeniden elde edilmesini sağlayan koşullara Tauber koşulu ve bu türdeki teoremlere Tauber tipi teorem adı verilmektedir. Daha sonraları Hardy [2], Landau [3] ve Schmidt [4] bu teorinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Tauber teorisinin tarihsel gelişimi Jacob Korevaar [5]'in kitabında güzel bir şekilde sunulmuştur. Sınırsız sayıda toplanabilme metodu vardır dolayısıyla bu metodlarla ilişkili sınırsız sayıda Tauberian Teoremler verilebilmektedir. Bu sebeple günümüzdede Tauber Teorisinde çok sayıda yayın yapılmaktadır

Tek dizilerin istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast [6] tarafından takdim edilmiştir. Daha sonra Šalát [7], Fridy [8], Connor [9] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık, bilinen anlamdaki yakınsaklık kavramının bir genellemesidir. Bu sebeple klasik Tauber teoremlerinin istatistiksel genellemeleri Fridy ve Khan [10], Móricz [11], Móricz ve Orhan [12] tarafından çalışılmıştır.

Çift dizilerde, tek dizilerin aksine, birden fazla yakınsaklık çesidi tanımlanmıstır. İlk olarak Pringsheim [13] çift dizilerin yakınsaklıgı ile ilgilenmiştir. Daha sonra birçok yazar bu yakınsaklığı kullanarak çeşitli toplanabilme metodları tanımlamış ve bu metodlardan Pringsheim yakınsaklığın elde edildiği Tauberian teoremleri vermişlerdir. Móricz [14] Cesaro toplanabilme metodunu, Chen ve Hsu [15] ağırlıklı ortalamalar metodunu ve Baron [16] kuvvetli seri metotlarını çift diziler için tanımlamışlar ve bu metodlar için Tauber şartları vermişlerdir.

Mursaleen ve Edely [17] ile Móricz [18] birbirlerinden bağımsız olarak çift diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Daha sonra Móricz [19] çift diziler için istatistiksel Cesaro toplanabilme metodunu tanımlamış ve bu metoddan istatistiksel istatistiksel yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremleri vermiştir. Chen ve Chang [20], Móricz [19]'in elde ettiği sonuçları genelleştirmiş ve çift dizilerin ağırlıklı ortalamalarının istatistiksel toplanabilirliğini tanımlamışlardır. Chen ve Chang [20] bu makalede ağırlıklı ortalamaları istatistiksel toplanabililen çift dizilerin istatistiksel yakınsak olmaları için gerek ve yeter Tauber şartlarını vermişlerdir. Bu istatistiksel toplanabilme metodlarının daha geneli negatif olmayan reel bir RH-regüler A matrisi yardımıyla Belen, Mursalen ve Yıldırım [21] tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada bir çift dizinin istatistiksel A-toplanabilirliği tanımlanmış ve bu metoddan yararlanarak bir Krovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanmıştır.

Bulanık küme teorisi 1965 yılında Zadeh [22] tarafından bulunmuş olup birçok dalda ilerlemiş ve birçok açıdan incelenmiştir. Toplanabilme teorisi alanında çalışan araştırmacılar da bulanık küme teorisiyle ilgilenmişlerdir. Araştırmacılar bulanık sayı dizileri için çeşitli toplanabilme metotlarını tanıtmışlar ve bu metotlar için uygun Tauber koşullarını elde etmişlerdir [23–32].

Savaş ve Mursaleen [33] çift bulanık sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlar ve istatistiksel yakınsak çift bulanık sayı dizilerinin bazı özelliklerini vermişlerdir. Daha sonra Talo ve Bayazit [34] ilk kez çift bulanık sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklıktan yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremleri elde etmişlerdir. Çift bulanık sayı dizilerinin istatistiksel $(C, 1, 1)$ toplanabilirliği Yapalı ve Talo [35] ile Önder, Çanak ve Totur [36] tarafından eş zamanlı çalışılmış ve bu toplanabilme metodundan istatistiksel yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Bu tez çalışmasında çift bulanık sayı dizilerinin ağırlıklı ortalamalarının istatistiksel toplanabilirliği kavramı tanımlanacak ve Chen ve Chang [20] tarafından elde edilen sonuçların benzerleri çift bulanık sayı dizileri için elde edilecektir. Bu sonuçlar aynı zamanda Yapalı ve Talo [35] ile Önder, Çanak ve Totur [36] tarafından elde edilen sonuçların bir genellemesidir. Ayrıca bu metodun bir uygulaması olarak bulanık pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için bir korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çift reel ve kompleks dizilerin istatistiksel yakınsaklığı, ağırlıklı ortalamaları ve ağırlıklı ortalamalarının istatistiksel toplanabilirliği ile ilgili temel tanım ve teoremleri sunacağız.

2.1. Çift Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 2.1.1. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere,

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$$

$$(m, n) \to f(m, n) = x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir çift dizi denir. Eğer görüntü kümesi X, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ise (x_{mn}) dizisini çift reel dizi olarak, kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ise çift kompleks dizi olarak adlandıracağız.

Herhangi bir $x = (x_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ bir çift dizisinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.1.2. $x = (x_{mn})$ reel veya kompleks sayıların bir çift dizisi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için, $m, n > N$ olduğunda,

$$|x_{mn} - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. L sayısına da $x = (x_{mn})$ dizisinin Pringsheim limiti denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir diziye kısaca yakınsak çift dizi denilir ve

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L \quad \text{veya} \quad x_{mn} \to L$$

şeklinde gösterilir [13].

Çift diziler için farklı yakınsaklık çeşitleri tanımlanabilmektedir. Biz bu tez boyunca Pringsheim anlamında yakınsaklık kavramını kullanacağız.

Tanım 2.1.3. $x = (x_{mn})$ bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n \geq 0} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa, x dizisine sınırlıdır denir.

Yakınsak olan bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnekte bu görülür.

Örnek 2.1.1. $x = (x_{mn})$ çift dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , \quad m = 0 \text{ ise} \\ m & , \quad n = 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{mn} & , \quad n = m \geq 1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu dizi 0 'a yakınsak olmasına rağmen sınırlı değildir.

Tanım 2.1.4. $x = (x_{mn})$ çift dizi olmak üzere verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n, p, q > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa $x = (x_{mn})$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1.1. $x = (x_{mn})$ çift dizi olsun. $x = (x_{mn})$ yakınsaktır gerek ve yeter şart Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.5. $x = (x_{mn})$ reel sayıların bir çift dizisi ve

$$\alpha_n(x) = \sup_{j,k \geq n} x_{jk} \text{ ve } \beta_n(x) = \inf_{j,k \geq n} x_{jk}$$

olsun. Bu durumda, en az bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$\alpha_n(x) < \infty \text{ ve } \beta_n(x) > -\infty$$

ise $x = (x_{mn})$ çift dizisi Pringsheim anlamında bir üst ve alt limite sahiptir denir. Buna göre, bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin Pringsheim alt limiti,

i) Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) = -\infty$ ise,

$$\liminf_{m,n \to \infty} x_{mn} = -\infty,$$

ii) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) > -\infty$ ise,

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \lim_{n\to\infty} (\inf_{j,k\geq n} x_{jk}) = \sup_n \beta_n(x)$$

ve Pringsheim üst limiti,

i) Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) = +\infty$ ise,

$$\limsup_{m,n\to\infty} x_{mn} = +\infty,$$

ii) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) < +\infty$ ise,

$$\limsup_{m,n\to\infty} x_{mn} = \lim_{n\to\infty} (\sup_{j,k\geq n} x_{jk}) = \inf_n \alpha_n(x)$$

şeklinde tanımlanır [37].

Örnek 2.1.2. $x = (x_{jk})$ çift dizisi

$$x_{jk} := \begin{cases} j, & k = 0, \\ -k, & j = 0, \\ (-1)^j, & j = k \geqslant 1, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\sup x_{jk} = +\infty$ ve $\inf x_{jk} = -\infty$ olduğu halde $n \geq 1$ için $\alpha_n(x) = 1$ ve $\beta_n(x) = -1$ bulunduğu için

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = -1 \ \text{ ve } \ \limsup_{m,n\to\infty} x_{mn} = 1$$

olur.

Teorem 2.1.2. $x = (x_{nm})$ ve $y = (y_{nm})$ reel sayıların iki çift dizisi olsun. Bu durumda

1) $\liminf\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} \leq \limsup\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$,
2) $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L \Leftrightarrow \liminf\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = \limsup\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$
3) $\limsup\limits_{m,n\to\infty}(-x_{mn}) = -\liminf\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$
4) $\limsup\limits_{m,n\to\infty}(x_{mn} + y_{mn}) \leq \limsup\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} + \limsup\limits_{m,n\to\infty} y_{mn}$,
5) $\liminf\limits_{m,n\to\infty}(x_{mn} + y_{mn}) \geq \liminf\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} + \liminf\limits_{m,n\to\infty} y_{mn}$

ilişkileri mevcuttur [37].

Çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramı Murseleen ve Edely [17] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.6. $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun.

$$K(m,n) = \{(j,k), \ \ j \leq m \ \text{ ve } \ k \leq n : \ \ (j,k) \in K\}$$

ve $|K|$, K kümesinin kardinalitesi göstermek üzere, eğer $(\frac{|K(m,n)|}{(m+1)(n+1)})$ çift dizisinin limiti varsa bu limite K kümesinin çift doğal yoğunluğu denir ve

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{|K(m,n)|}{(m+1)(n+1)}$$

ile gösterilir. [17].

Tanım 2.1.7. $x = (x_{jk})$ reel veya kompleks sayıların bir çift dizisi olsun. Verilen her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\{(j,k) : \ |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, yani

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left|\{(j,k), \ \ j \leq m \ \text{ ve } \ k \leq n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise, $x = (x_{jk})$ çift dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum

$$st - \lim x_{jk} = L \quad \text{veya} \quad x_{jk} \xrightarrow{st} L$$

şeklinde gösterilir [17].

Not 2.1.1. $x = (x_{jk})$ reel veya kompleks sayıların bir çift dizisi olsun.

a) Eğer $x = (x_{jk})$, L sayısına yakınsak ise o zaman $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

b) Eğer $x = (x_{jk})$, L sayısına istatistiksel yakınsak ise L tektir.

c) $x = (x_{jk})$ istatistiksel yakınsak ise yakınsak olmasına gerek yoktur. Sınırlı olmasına da gerek yoktur.

Şimdi son ifadeye bir örnek verelim.

Örnek 2.1.3. $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} j & , \ \ j \text{ tam kare, } \ \text{her } k \text{ için} \\ 3 & , \ \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. $x = (x_{jk})$ çift dizisi yakınsak değildir ve üstelik sınırlı da değildir. Fakat 3 noktasına istatistiksel yakınsaktır. Çünkü verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için;

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \left|\{(j,k), \ \ j \leq m \ \text{ ve } \ k \leq n : |x_{jk} - 3| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{(\sqrt{m}+1)(n+1)}{(m+1)(n+1)}$$

olduğundan dizinin 3 haricindeki elemenlarının yoğunluğu 0 dır.

Teorem 2.1.3. $x = (x_{jk})$ çift reel sayı dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$K = \{(j,k) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : j,k = 1,2,3,...\},\ \delta_2(K) = 1$$

ve

$$\lim_{j,k\to\infty,\ \ (j,k)\in K} x_{jk} = L$$

olacak şekilde $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesinin var olmasıdır [17].

Tanım 2.1.8. $x = (x_{jk})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık ve her $j,p \geq N,\ k,q \geq M$ için,

$$\delta_2\big(\{(j,k),\ \ j \leq m \ \text{ ve } \ k \leq n : |x_{jk} - x_{pq}| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon),\ M = M(\varepsilon)$ doğal sayıları varsa $x = (x_{jk})$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [17].

Teorem 2.1.4. $x = (x_{jk})$ reel değerli bir çift dizi olsun. $x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [17].

2.2. Ağırlıklı Ortalamaları İstatistiksel toplanabilen Çift Diziler İçin Tauber Tipi Teoremler

Bu bölümde öncelikle çift kompleks diziler için Tauber tipi teoremleri vereceğiz. Daha sonra çift reel dizilerle ilgileneceğiz.

Tanım 2.2.1. $p = (p_j)$ ve $q = (q_k)$ iki kompleks dizi öyleki

$$P_m = \sum_{j=0}^{m} p_j \neq 0 \ (m \geq 0) \quad \text{ve} \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \neq 0 \ (n \geq 0)$$

olsun. Kompleks sayıların bir (x_{jk}) çift dizisinin ağırlıklı ortalaması

$$t_{mn}^{11} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_j q_k x_{jk}, \quad m,n = 0,1,2,\ldots$$

$$t_{mn}^{10} = \frac{1}{P_m} \sum_{j=0}^{m} p_j x_{jn}, \quad t_{mn}^{01} = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k x_{mk} \quad m,n = 0,1,2,\ldots$$

ile tanımlanır. $(\alpha,\beta) = (1,1), (1,0)$ ya da $(0,1)$ olmak üzere, eğer

$$\lim_{m,n\to\infty} t_{mn}^{\alpha\beta} = L$$

limiti mevcut ise (x_{jk}) dizisi L sayısına $(\overline{N}, p, q; \alpha, \beta)$ toplanabilirdir denir [15].

Bu tez çalışması boyunca λ_n ile λn çarpımının tam kısmını göstereceğiz, yani $\lambda_n = [\lambda n]$.

Tanım 2.2.2. Eğer her $m \geq 0$ için $P_m \neq 0$ ve

$$\liminf_{m\to\infty} \left| \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} - 1 \right| > 0 \quad \lambda \neq 0 \text{ olan her } \lambda \neq 1 \text{ için} \tag{2.1}$$

koşulları sağlanıyorsa p dizisi SVA sınıfına aittir denir. SVA sınıfına ait bütün reel p dizilerinin sınıfı SVA_r ile ve SVA sınıfına ait bütün negatif olmayan reel p dizilerinin sınıfı ise SVA_+ ile gösterilir. Açık olarak $SVA_+ \subseteq SVA_r \subseteq SVA$ kapsaması sağlanır. Açık olarak $p \in SVA_+$ olması için gerek ve yeter şart $p_0 > 0$, her $m \geq 1$ için $p_m \geq 0$ ve (2.1) sağlanır [15].

Lemma 2.2.1. $p = (p_j)$ her $m \geq 0$ için $P_m \neq 0$ olan kompleks dizi olsun. O zaman $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ için

$$\liminf_{m\to\infty} \left| \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} - 1 \right| > 0 \Leftrightarrow \liminf_{m\to\infty} \left| \frac{P_m}{P_{\lambda_m}} - 1 \right| > 0$$

olur [15].

Tanım 2.2.3. $(\alpha, \beta) = (1,1), (1,0)$ ya da $(0,1)$ olmak üzere, $t_{mn}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} L$ ise o zaman (x_{jk}) dizisi L sayısına istatistiksel $(\overline{N}, p, q, \alpha, \beta)$ toplanabilirdir denir ve

$$x_{mn} \xrightarrow{st} L \; (\overline{N}, p, q, \alpha, \beta)$$

yazılır [20].

Lemma 2.2.2. $(\alpha, \beta) = (1,1), (1,0)$ ya da $(0,1)$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L \; (\overline{N}, p, q; \alpha, \beta)$ olsun. O zaman her $\lambda > 0$ için $t_{\lambda_m,\lambda_n}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} L$, $t_{\lambda_m,n}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} L$ ve $t_{m,\lambda_n}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} L$ olur [20].

İspat: Biz sadece $(\alpha, \beta) = (1,1)$ için $t_{\lambda_m,\lambda_n}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} L$ olduğunu göstereceğiz. Diğerleri için ispat benzerdir. $\lambda = 1$ için ispat basittir. $\lambda > 1$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $f(m,n) = (\lambda_m, \lambda_n)$ 1-1 bir dönüşüm tanımlar. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| \left\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : |t_{\lambda_m,\lambda_n}^{11} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\leq \frac{\lambda^2}{(\lambda_m+1)(\lambda_n+1)} \left| \left\{ m \leq \lambda_m \text{ ve } n \leq \lambda_n : |t_{mn}^{11} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\longrightarrow 0 \; (\min(M,N) \to \infty).
\end{aligned}$$

Son adımda $x_{mn} \xrightarrow{st} L \; (\overline{N}, p, q; 1, 1)$ elde edilir. $0 < \lambda < 1$ için $(\lambda_j)_{j=0}^{\infty}$ dizisi azalmayandır. Eğer bazı j, l tam sayıları için

$m = \lambda_j = \lambda_{j+1} = ... = \lambda_{j+l-1} < \lambda_{j+l}$ ise o zaman $m \leq \lambda j < \lambda(j+1) < ... < \lambda(j+l-1) < m+1 \leq \lambda(j+l)$ olur. Bu $m+\lambda(l-1) \leq \lambda_j+\lambda(l-1) = \lambda(j+l-1) < m+1$ gerektirir. Bu sebeple $l < 1 + \lambda^{-1}$ dir. Böylece $\lambda_j = m$ ve $\lambda_k = n$ olmak üzere (j,k) ikilisi en çok $(1+\lambda^{-1})^2$ kere meydana gelir. Buna ek olarak $N \geq \max(\lambda^{-1} - 2, 0)$ için $(\lambda_N + 1)/(N+1) \leq 2\lambda$ ifadesine sahip oluruz. Bu

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(M+1)(N+1)} \left|\left\{m \leq M \ \text{ ve } \ n \leq N : |t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{(1+\lambda^{-1})^2}{(M+1)(N+1)} \left|\left\{m \leq \lambda_M \ \text{ ve } \ n \leq \lambda_N : |t^{11}_{mn} - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{(1+\lambda^{-1})^2(2\lambda)^2}{(\lambda_M+1)(\lambda_N+1)} \left|\left\{m \leq \lambda_M \ \text{ ve } \ n \leq \lambda_N : |t^{11}_{mn} - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\longrightarrow 0 \ \ \min(M,N) \to \infty
\end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.1. Varsayalım ki $p, q \in SVA$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L(\overline{N}, p, q, 1, 1)$ olsun. O zaman $\lambda > 1$ için

$$st - \lim \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk} = L \tag{2.2}$$

ve $0 < \lambda < 1$ için

$$st - \lim \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_{m+1}}^{m} \sum_{k=\lambda_{n+1}}^{n} p_j q_k x_{jk} = L \tag{2.3}$$

olur [20].

İspat: $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk} \\
&= t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} + \frac{1}{(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m} - 1)}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} - t^{11}_{m,\lambda_n}) + \frac{1}{(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n} - 1)}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} - t^{11}_{\lambda_m,n}) \\
&+ \frac{1}{(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m} - 1)} \frac{1}{(\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n} - 1)}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} - t^{11}_{m,\lambda_n} - t^{11}_{\lambda_m,n} + t^{11}_{mn})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

eşitliğine sahibiz. $p, q \in SVA$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L \ (\overline{N}, p, q, 1, 1)$, Lemma 2.2.2 den

$$\left|\frac{1}{(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m} - 1)}(t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} - t^{11}_{m,\lambda_n})\right| \leq \frac{1}{\inf_{k \geq m}\left|\frac{P_{\lambda_k}}{P_k} - 1\right|} \mid t^{11}_{\lambda_m,\lambda_n} - t^{11}_{m,\lambda_n}| \xrightarrow{st} 0 \ \min(m,n) \to \infty$$

elde ederiz. (2.4) deki son iki terim istatistiksel olarak $\min(m,n) \to \infty$ iken sıfıra gider. Böylece (2.4) den (2.2) elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ için Lemma 2.2.1 den

$$\liminf_{m\to\infty}\left|\frac{P_m}{P_{\lambda_m}}-1\right|>0 \text{ ve } \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{Q_n}{Q_{\lambda_n}}-1\right|>0$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. $\lambda_m \leftrightarrow m$ ve $\lambda_n \leftrightarrow n$ rolleri değiştirerek $\lambda > 1$ durumuna benzer bir şekilde (2.3) elde edilir. ■

Teorem 2.2.2. $p, q \in SVA$ olsun. $x_{mn} \xrightarrow{st} L\ (\overline{N}, p, q; 1, 1)$ olduğunu varsayalım .O zaman aşağıdaki dört ifade sağlanır.

(i) $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için ,

$$\inf_{\lambda>1}\limsup_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}\Bigg|\{m\le M \text{ ve } n\le N :$$
$$\left|\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_k(x_{jk}-x_{mn})\right|\ge\varepsilon\}\Bigg|=0. \tag{2.5}$$

(ii) $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{0<\lambda<1}\limsup_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}\Bigg|\{m\le M \text{ ve } n\le N :$$
$$\left|\frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_jq_k(x_{mn}-x_{jk})\right|\ge\varepsilon\}\Bigg|=0. \tag{2.6}$$

(iii) Bazı $\lambda > 1$ için (2.5) ile (2.7) ve bazı $0 < \lambda < 1$ için (2.6) ile (2.8) yer değiştirebilir

$$st-\lim\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_k(x_{jk}-x_{mn})=0, \tag{2.7}$$

$$st-\lim\frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_jq_k(x_{mn}-x_{jk})=0. \tag{2.8}$$

(iv) Dahası (2.7) bazı $\lambda > 1$ için sağlanıyorsa o zaman tüm $\lambda > 1$ için doğrudur. Aynı durum (2.8) için de geçerlidir [20].

İspat: (2.7) ⇒ (2.5) ve (2.8) ⇒ (2.6) olduğu açıktır. $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olduğunu varsayalım $\lambda > 1$ olsun Teorem 2.2.1 den

$$\begin{aligned}&st-\lim\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_k(x_{jk}-x_{mn})\\&=st-\lim\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_kx_{jk}-st-\lim x_{mn}\\&=L-L=0\end{aligned}$$

sahip oluruz ve bu sebeple (2.7) tüm $\lambda > 1$ için sağlanır. Tersine (2.5) in $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ gerektirdiğini göstereceğiz.

$$\begin{aligned} x_{mn} &= \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk} \\ &\quad - \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) \\ &= A - B \end{aligned}$$

olur. Her $\varepsilon > 0$ için biliyoruzki ;

$$\begin{aligned} &\{m \leq M \text{ ve } n \leq N :| x_{mn} - L |\geq \varepsilon\} \\ &\subseteq \left\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : |A - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : |B| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \end{aligned}$$

olur. Bu ifade

$$\begin{aligned} &\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left|\left\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : |A - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\ &+ \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left|\left\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : |B| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \end{aligned}$$

ifadesini gerektirir. (2.5) ve Teorem 2.2.1 den $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ elde edilir. Bu da (i) nin ispatını ve (iii) ve (iv) nin her ikisinin ilk kısmını tamamlar. $0 < \lambda < 1$ için aynı yollar gösterilebilir. ■

Tanım 2.2.4. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : \max_{m<j\leq\lambda_m} |x_{jn} - x_{mn}| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.9}$$

sağlanırsa (x_{mn}) dizisi birinci indise göre istatistiksel yavaş salınımlıdır ve eğer (2.9) da

$$\max_{m<j\leq\lambda_m} |x_{jn} - x_{mn}| \text{ yerine } \max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |x_{jk} - x_{mk}|$$

yazılırsa (x_{mn}) birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlıdır denir. İkinci indise göre istatistiksel yavaş salınımlılık özelliği benzer şekilde tanımlanır [19].

Şimdi $p, q \in SVA_+$ olsun. O zaman

$$\left|\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn})\right|$$

$$\leq \max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |x_{jk} - x_{mk}| + \max_{n<k\leq\lambda_n} |x_{mk} - x_{mn}|$$

olur. Böylece (x_{mn}) ikinci indise göre istatistiksel yavaş salınımlı ve birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlı ise $\lambda > 0$ için (2.5) sağlanır. O zaman Teorem 2.2.2 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.2.1. $p, q \in SVA_+$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L\ (\overline{N}, p, q; 1, 1)$ olsun. Eğer (x_{mn}) her iki indise göre istatistiksel yavaş salınımlı ve ilaveten indislerin birine göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlı ise ozaman $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olur [20].

İki taraflı Landau şartları, çift diziler için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$j|x_{jn} - x_{j-1,n}| \leq H \quad (j, n > \tilde{n}) \tag{2.10}$$

$$k|x_{mk} - x_{m,k-1}| \leq H \quad (m, k > \tilde{n}) \tag{2.11}$$

olacak şekilde $\widetilde{n} \geq 1$ ve $H > 0$ sabitleri mevcutsa ozaman (x_{mn}) çift dizisi Landau'nun iki taraflı şartlarını sağlar denir.

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} |x_{jk} - x_{mk}| &\leq \max_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} \left\{ \left(\sum_{l=m+1}^{j} \frac{1}{l} \right) \left(\sup_{m<l\leq j} l|x_{lk} - x_{l-1,k}| \right) \right\} \\
&\leq \sum_{l=m+1}^{\lambda_m} \frac{H}{l} \leq H \log \lambda.
\end{aligned}$$

Buradan görülürki eğer (2.10) sağlanırsa (x_{mn}) birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlıdır. Benzer şekilde (2.11) sağlanırsa (x_{mn}) ikinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlıdır. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.2. $p, q \in SVA_+$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L\ (\overline{N}, p, q, 1, 1)$ olsun. Eğer (x_{mn}) çift dizisi (2.10) ve (2.11) şartlarını sağlarsa ozaman $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olur [20].

Bundan sonraki bölümde $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodu için verilen sonuçları $(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilme metodu için ifade edeceğiz. $\lambda > 1$ ve $\lambda_m > m$ için

$$\frac{1}{P_{\lambda_m} - P_m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j x_{jn} = t^{10}_{\lambda_m,n} + \frac{1}{\left(\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}\right) - 1} (t^{10}_{\lambda_m,n} - t^{10}_{mn}) \tag{2.12}$$

eşitliğine sahip oluruz. (2.12) ile (2.4) yer değiştirirse yukarıda verilen teoremlere benzer olarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Teorem 2.2.3. Varsayalım $p \in SVA$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L\ (\overline{N}, p, *, 1, 0)$ olsun. O zaman $\lambda > 1$ için

$$st - \lim \frac{1}{P_{\lambda_m} - P_m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j x_{jn} = L$$

ve $0 < \lambda < 1$ için

$$st - \lim \frac{1}{P_m - P_{\lambda_m}} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} p_j x_{jn} = L$$

olur [20].

Teorem 2.2.4. Varsayalımki $p \in SVA$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L\ (\overline{N}, p, *, 1, 0)$ olsun. O zaman aşağıdaki dört şart sağlanır.

(i) $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \Bigg| \Bigg\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : \left| \frac{1}{P_{\lambda_m} - P_m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j (x_{jn} - x_{mn}) \right| \geq \varepsilon \Bigg\} \Bigg| = 0. \tag{2.13}$$

(ii) $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \Bigg| \Bigg\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : \left| \frac{1}{P_m - P_{\lambda_m}} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} p_j (x_{mn} - x_{jn}) \right| \geq \varepsilon \Bigg\} \Bigg| = 0. \tag{2.14}$$

(iii) En az bir $\lambda > 1$ için (2.13) ile (2.15) yer değiştirebilir ve en az bir $0 < \lambda < 1$ için (2.14) ile (2.16) yer değiştirebilir.

$$st - \lim \frac{1}{P_{\lambda_m} - P_m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j (x_{jn} - x_{mn}) = 0, \tag{2.15}$$

$$st - \lim \frac{1}{P_m - P_{\lambda_m}} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} p_j (x_{mn} - x_{jn}) = 0. \tag{2.16}$$

(iv) Dahası eğer en az bir $\lambda > 1$ için (2.15) sağlanırsa o zaman tüm $\lambda > 1$ için sağlanır. Aynı durum (2.16) da olur [20].

$p \in SVA_+$ için

$$\left| \frac{1}{P_{\lambda_m} - P_m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j (x_{jn} - x_{mn}) \right| \leq \max_{m<j\leq\lambda_m} |x_{jn} - x_{mn}|$$

olacağından $(x_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ nin istatistiksel olarak yavaş salınımlı olması (2.13) u gerektirir. (2.5) de gösterildiği gibi, (2.10) koşulu (x_{mn}) in istatistiksel olarak birinci indise göre kuvvetli yavaş salınımlı olmasını sağlar.

Sonuç 2.2.3. $p \in SVA_+$ ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L\ (\overline{N}, p, *; 1, 0)$ olsun. Eğer $(x_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ birinci indise göre yavaş salınımlı oluyorsa veya (2.10) koşulunu sağlıyorsa $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ dir [20].

Bundan sonraki kısımda çift reel sayı dizileriyle ilgileniyoruz.

Lemma 2.2.3. $p = (p_m)$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve $p_0 > 0$ olsun. O zaman $p \in SVA_+$ olması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} > 1 \qquad (\lambda > 1)$$
$$\limsup_{m\to\infty} \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} < 1 \qquad (0 < \lambda < 1)$$
$$\liminf_{m\to\infty} \frac{P_m}{P_{\lambda_m}} > 1 \qquad (0 < \lambda < 1)$$
$$\limsup_{m\to\infty} \frac{P_m}{P_{\lambda_m}} < 1 \qquad (\lambda > 1)$$

şartlarından herhangi birinin sağlanmasıdır [15].

Teorem 2.2.5. $p, q \in SVA_r$ olsun. $(x_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ çift reel sayı dizisi ve

$$x_{mn} \xrightarrow{st} L(\overline{N}, p, q; 1, 1)$$

olsun. O zaman $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \Bigg| \Bigg\{ m \le M \ \text{ ve } \ n \le N : \\ \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) \le -\varepsilon \Bigg\} \Bigg| = 0 \tag{2.17}$$

ve

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \Bigg| \Bigg\{ m \le M \ \text{ ve } \ n \le N : \\ \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (x_{mn} - x_{jk}) \le -\varepsilon \Bigg\} \Bigg| = 0 \tag{2.18}$$

şartlarının sağlanmasıdır [20].

İspat: Varsayalım ki $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olsun. $\lambda > 1$, $\lambda_m > m$ ve $\lambda_n > n$ için

$$B = \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn})$$

tanımlayalım. O zaman

$$\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : B \leq -\varepsilon\} \subseteq \{m \leq M \text{ ve } n \leq N : |B| \geq \varepsilon\}.$$

Teorem 2.2.2 nin (i) şartından (2.17) elde edilir. Benzer tartışmayla (2.18) elde edilir. Tersine (2.17) ve (2.18) sağlansın $\lambda > 1$, $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ olsun. Tekrar $x_{mn} - L$ terimini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} x_{mn} - L &= \left(\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk} - L\right) \\ &\quad -\left(\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn})\right) \\ &= C - B. \end{aligned}$$

(2.17) dan, bir $\lambda > 1$ vardır öyleki;

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left|\left\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : B \leq -\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \delta \tag{2.19}$$

böyle λ sayıları için, Teorem 2.2.1 den;

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left|\left\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : C \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0 \tag{2.20}$$

elde edilir. (2.19) ve (2.20) birleştirilirse

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |m \leq M \text{ ve } n \leq N : x_{mn} - L \geq \varepsilon| < \delta$$

elde edilir. $\delta > 0$ keyfi olduğundan

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |m \leq M \text{ ve } n \leq N : x_{mn} - L \geq \varepsilon| = 0 \tag{2.21}$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi $0 < \lambda < 1$ durumunu irdeleyelim. O zaman

$$\begin{aligned} x_{mn} - L &= \left[\frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k x_{jk} - L\right] \\ &\quad +\left[\frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (x_{mn} - x_{jk})\right] \\ &= C^{'} + B^{'} \end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz. $\lambda > 1$ için verilen ispata benzer şekilde

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \leq M \text{ ve } n \leq N : x_{mn} - L \leq -\varepsilon\}| = 0 \tag{2.22}$$

elde ederiz. (2.21) ve (2.22) birlikte kullanılırsa $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olur. ■

Şimdi çift reel diziler için istatistiksel yavaş azalanlık tanımını verelim. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \text{ ve } n \le N : \min_{m<j\le\lambda_m} (x_{jn} - x_{mn}) \le -\varepsilon\}| = 0 \tag{2.23}$$

sağlanıyorsa (x_{mn}) çift dizisine birinci indise göre istatistiksel yavaş azalandır denir. Eğer (2.23) eşitliğinde

$$\min_{m<j\le\lambda_m} (x_{jn} - x_{mn}) \text{ yerine } \min_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} (x_{jk} - x_{mk})$$

yazılırsa (x_{mn}) çift dizisine birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş azalandır denir. İkinci indise göre istatistiksel yavaş azalanlık benzer şekilde tanımlanır. (2.23) koşulu

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| \left\{ m \le M \text{ ve } n \le N : \min_{\lambda_m<j\le m} (x_{mn} - x_{jn}) \le -\varepsilon \right\} \right| = 0$$

koşulunu gerektirir ve bunun terside doğrudur. Benzer özellikler ikinci indise göre istatistiksel yavaş azalanlık ve kuvvetli istatistiksel yavaş azalanlık içinde doğrudur. $p, q \in SVA_+$ ve $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} & \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) \\ & \ge \min_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} (x_{jk} - x_{mk}) + \min_{n<k\le\lambda_n} (x_{mk} - x_{mn}) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla eğer (x_{mn}) ikinci indise göre istatistiksel yavaş azalansa ve birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş azalansa ozaman (2.17) her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Benzer şekilde her $\varepsilon > 0$ için (2.18) geçerlidir. Teorem 2.2.5'ten aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.2.4. $p, q \in SVA_+$ ve (x_{mn}), $(x_{mn}) \xrightarrow{st} L$ $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ olan bir çift reel dizi olsun. Eğer (x_{mn}) dizisi her iki indise göre istatistiksel yavaş azalan ve ek olarak indislerden birine göre kuvvetli istatistiksel yavaş azalan ise o zaman $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olur [20].

Aşağıdaki Landau'nun tek taraflı koşullarını verelim. Uygun $\widetilde{n} > 0$ ve H sabitleri için

$$j(x_{jn} - x_{j-1,n}) \ge -H \qquad (j, n \ge \widetilde{n}), \tag{2.24}$$

$$k(x_{mk} - x_{m,k-1}) \geq -H \qquad (j, n \geq \widetilde{n}), \tag{2.25}$$

şartları sağlansın. $\lambda > 1$ ve $m, n > \widetilde{n}$ için,

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} (x_{jk} - x_{mk}) &\geq \min_{\substack{m<j\leq\lambda_m \\ n<k\leq\lambda_n}} \left(\sum_{l=m+1}^{j} \frac{1}{l} \right) \left(\inf_{m<l\leq j} l(x_{lk} - x_{l-1,k}) \right) \\
&\geq -\left(\sum_{l=m+1}^{\lambda_m} \frac{H}{l} \right) \geq -H \log \lambda
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu nedenle (2.24) koşulu altında (x_{mn}) birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş azalandır. Benzer şekilde (2.25) koşulu altında (x_{mn}) ikinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş azalandır. Sonuç 2.2.4 e göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.5. $p, q \in SVA_+$ ve (x_{mn}), $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ olan bir reel çift dizi olsun. Eğer (x_{mn}) bazı $\widetilde{n} > 0$ ve H için (2.24) ve (2.25) şartlarını sağlıyorsa o zaman $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olur [20].

$(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ toplanabilirlik için yukarıda verilen teorem ve sonuçlara paralel bir teori türetilebilir. Bu sonuçları ispatsız bir şekilde aşağıda veriyoruz.

Teorem 2.2.6. $p \in SVA_r$ ve (x_{mn}) reel çift dizi ve $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ $(\overline{N}, p, q; 1, 0)$ olsun. O zaman $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ dir gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \Bigg| \Bigg\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : \\ \frac{1}{P_{\lambda_m} - P_m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} p_j (x_{jn} - x_{mn}) \leq -\varepsilon \Bigg\} \Bigg| = 0$$

ve

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \Bigg| \Bigg\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : \\ \frac{1}{P_m - P_{\lambda_m}} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} p_j (x_{mn} - x_{jn}) \leq -\varepsilon \Bigg\} \Bigg| = 0$$

şartlarının sağlanmasıdır [20].

Sonuç 2.2.6. $p \in SVA_+$ ve (x_{mn}), $x_{mn} \xrightarrow{st} L(\overline{N}, p, *; 1, 0)$ olan bir çift reel dizi olsun. Eğer (x_{mn}) birinci indise göre istatistiksel yavaş azalan ise veya bazı $\tilde{n} > 0$ ve H sayıları için (2.24) sağlanıyor ise ozaman $x_{mn} \xrightarrow{st} L$ olur [20].

2.3. Çift Dizilerin İstatistiksel A-toplanabilirliği

Bu bölümde negatif olmayan reel bir RH-regüler matris yardımıyla bir çift dizinin istatistiksel A-toplanabilirliği tanımlanacaktır. Bu metot daha önce tanıtılan istatistiksel $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodunun genel bir halidir.

Tanım 2.3.1. $x = (x_{ij})$ çift dizisi verilmiş olsun. Şimdi,

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \;\; ; \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan (s_{mn}) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda, $\big((x_{mn}), (s_{mn})\big)$ ikilisine bir çift seri denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak, yani

$$\lim_{m,n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = s$$

ise $((x_{mn}), (s_{mn}))$ serisi yakınsaktır ve serinin toplamı s sayısıdır. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir.

Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} = s$$

şeklinde gösterilir. Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_{ij} \text{ veya kısaca } \sum_{i=0,j=0}^{\infty,\infty} x_{ij}$$

ile gösterilir.

$A = (a_{ij}^{mn})$, $m, n, i, j \in \mathbb{N}$ olmak üzere dört boyutlu (reel veya komplex) sonsuz bir matris ve $x = (x_{ij})$ bir çift dizi olsun. O zaman her $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için

$$\sum_{i=0,j=0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} x_{ij}$$

çift serisi yakınsak ise,

$$y_{mn} = \sum_{i=0,j=0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} x_{ij}$$

ile tanımlı $Ax = (y_{mn})$ dizisine x dizisinin A-dönüşüm dizisi denir. Eğer Ax çift dizisi bir ℓ sayısına yakınsaksa, yani

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = \ell \tag{2.26}$$

oluyorsa x dizisi ℓ sayısına A-toplanabilirdir denir.

Her sınırlı yakınsak bir çift diziyi yine aynı limite toplayan dört boyutlu bir A matrisine RH-regülerdir (veya sınırlı regülerdir) denir. Robison - Hamilton [38] dört boyutlu bir matrisin regülerlik koşullarını aşağıdaki şekilde vermiştir:

Teorem 2.3.1. Dört boyutlu $A = (a_{ij}^{mn})$ matrisinin RH-regüler olması için gerek ve yeter şart;

$$RH_1 : \lim_{m,n} a_{ij}^{mn} = 0, \text{her bir } \ (i,j) \in \mathbb{N}^2 \ \text{ için},$$

$$RH_2 : \lim_{m,n} \sum_{ij \in \mathbb{N}^2} A_{ij}^{mn} = 1,$$

$$RH_3 : \lim_{m,n} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| a_{ij}^{mn} \right| = 0, \text{ her bir } i \in \mathbb{N} \ \text{ için},$$

$$RH_4 : \lim_{m,n} \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| a_{ij}^{mn} \right| = 0 \text{ her bir } j \in \mathbb{N} \ \text{ için},$$

$$RH_5 : \sum_{i,j \in \mathbb{N}^2} \left| a_{ij}^{mn} \right| \ \text{ yakınsak},$$

RH_6 : Her $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ sayıları için, $\sum_{i,j > B} \left| a_{ij}^{mn} \right| < A$ olacak şekilde A ve B sayılarının mevcut olmasıdır [38].

Tanım 2.3.2. $A = (a_{ij}^{mn})$ negatif olmayan reel bir RH regüler matris, $x = (x_{ij})$ bir çift dizi ve (y_{mn}) dizisi (2.26) ile tanımlı dönüşüm dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m,n) \in \mathbb{N}^2 : |y_{mn} - L| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0,$$

ise x dizisi L'ye istatistiksel A toplanabilirdir denir. Yani, x dizisi L'ye istatistiksel A toplanabilir ise o zaman her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{M,N \to \infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| \left\{ (i,j), i \leq M, j \leq N : |y_{ij} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olur. Böylece bir x çift dizisinin L'ye istatistiksel A toplanabilir olması için gerek ve yeter şart Ax dönüşüm dizisinin L'ye istatistiksel yakınsak olmasıdır [21].

Şimdi istatistiksel A toplanabilme için bazı örnekler verelim.

Örnek 2.3.1. $A = (a_{ij}^{mn})$ dört boyutlu matrisini,

$$a_{ij}^{mn} = \begin{cases} \frac{1}{(m+1)(n+1)} & , \ \text{eğer } i \leq m \text{ ve } j \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak alırsak A matrisi Cesaro matrisine indirgenir. Cesaro matrisi $(C,1,1)$ ile gösterilir. $x = (x_{ij})$ çift dizisini her j için $x_{ij} = (-1)^i$ olarak tanımlayalım. O zaman x dizisi sıfıra

$(C,1,1)$ toplanabilirdir ve dolayısıyla istatistiksel $(C,1,1)$ toplanabilirdir. Ancak x dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Çift dizilerin istatistiksel $(C,1,1)$-toplanabilirliği ilk defa Móricz [19] tarafından çalışılmıştır. Móricz [19] istatistiksel $(C,1,1)$- toplanabilmeden istatistiksel yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremleri elde etmiştir.

Örnek 2.3.2. $p=(p_i)$ ve $q=(q_j)$ dizileri Tanım 2.2.1'deki gibi olmak üzere, $A=(a_{ij}^{mn})$ dört boyutlu matrisini

$$a_{ij}^{mn}=\begin{cases}\frac{p_iq_j}{P_mQ_n} & , \text{ eğer } i\leq m \text{ ve } j\leq n \text{ ise}\\ 0 & , \text{ diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak alırsak istatistiksel A toplanabilme metodu istatistiksel $(\overline{N},p,q,1,1)$ toplanabilme metoduna indirgenir. Görüldüğü gibi $p_i=1, q_j=1$ alınırsa istatistiksel $(\overline{N},p,q,1,1)$ metodu da istatistiksel $(C,1,1)$ toplanabilme metoduna indirgenir.

Örnek 2.3.3. $A=(a_{ij}^{mn})$

$$a_{ij}^{mn}=\begin{cases}\frac{1}{m^2} & , \text{ eğer } m=n, i,j\leq m \text{ ve } m \text{ çift kare}\\ \frac{1}{(m^2-m)} & , \text{ eğer } m=n, i\neq j, i,j\leq m \text{ ve } m \text{ tek kare}\\ 0 & , \text{ diğer durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlansın ve $x=(x_{ij})$ çift dizisi de

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & , \text{ eğer } i \text{ tek ve tüm } j \text{ için}\\ 0 & , \text{ diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda A matrisinin RH-regüler olduğunu yani (RH1)-(RH6) koşulları sağladığını kolayca görebiliriz. x dizisinin dönüşüm dizisi

$$y_{mn}=\sum_{i,j=1,1}^{\infty,\infty}a_{ij}^{mn}x_{ij}=\begin{cases}1/2 & , \text{ eğer } m \text{ çift kare ise}\\ (m+1)/2m & , \text{ eğer } m \text{ tek kare ise}\\ 0 & , \text{ diğer durumlarda}\end{cases}$$

olur. (y_{mn}) dizisi yakınsak olmadığından x dizisi A-toplanabilir değildir. Bununla birlikte $st-\lim_{m,n}y_{mn}=0$ olduğundan x dizisi sıfıra istatistiksel A-toplanabilirdir.

İstatistiksel A-toplanabilme metodlarının bir uygulama alanı Krovkin tipi yaklaşım teoremleridir. Bu metodlar kullanılarak Positif lineer operatörlerin çift dizileri için çeşitli yaklaşım teoremleri ispatlanmıştır. Aşağıda bu teoremlerden bahsedeceğiz.

K, $\mathbb{R}^2$ nin kompak bir alt kümesi ve $C(K)$ da K üzerinde sürekli fonksiyonların uzayını ifade etsin. $C(K)$ kümesi

$$\|f\|=\sup_{(x,y)\in K}|f(x,y)|\,(f\in C(K))$$

ile tanımlı $\|\cdot\|$ normlu ile bir Banach uzaydır.

T, $C(K)$'dan $C(K)$ içine bir lineer operatör olsun. Her $(x,y) \in K$ noktasındaki Tf değeri $T(f;x,y)$ ile gösterilir. Her $(x,y) \in K$ için $f(x,y) \geq 0$ ise $f \geq 0$ yazılır. Her $f \geq 0$ olan $f \in C(K)$ fonksiyonu için $Tf \geq 0$ koşulunu sağlayan T lineer operatörüne pozitif lineer operatör denir. $C(K)$ üzerindeki Korovkin tipi yaklaşım teoremi ilk olarak Volkov [39] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir. Biz bu tez boyunca

$$f_0(x,y) = 1, \;\; f_1(x,y) = x, \;\; f_2(x,y) = y, \;\; f_3(x,y) = x^2 + y^2$$

olarak alacağız.

Teorem 2.3.2. (L_{ij}), $C(K)$ üzerindeki pozitif lineer operatörlerin bir çift dizisi olsun. O zaman her $f \in C(K)$ için

$$\lim_{m,n} \| L_{ij}(f) - f \| = 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{m,n} \|L_{ij}(f_r) - f_r\| = 0 \, (r = 0,1,2,3)$$

olmasıdır [39].

Belen, Mursaleen ve Yıldırım [21] da istatistiksel A-toplanabilme metodu yardımıyla daha genel bir Korovkin tipi yaklaşım teoremini aşağıdaki şekilde vermişlerdir. .

Teorem 2.3.3. $A = (a_{ij}^{mn})$ negatif olmayan bir RH-regüler matris olsun. (L_{ij}), $C(K)$'dan $C(K)$ içine pozitif lineer operatörlerin bir çift dizisi olsun. O zaman her $f \in C(K)$ için;

$$st - \lim_{m,n} \left\| \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f) - f \right\|_{C(K)} = 0 \tag{2.27}$$

olması için gerek ve yeter şart

$$st - \lim_{m,n} \left\| \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f_r) - f_r \right\| = 0 r = (0,1,2,3) \tag{2.28}$$

olmasıdır. [21].

İspat: Her $f \in C(K)$ için (2.27) sağlandığında $r = 0,1,2,3$ için $f_r \in C(K)$ olacağından (2.28) direkt olarak sağlanır.

Şimdi (2.28) koşulunu kabul edelim. Götereceğiz ki her $f \in C(K)$ için (2.27) sağlanır. f fonksiyonu sürekli ve K kümesi kompakt olduğundan f fonksiyonu K kümesi üzerinde sınırlıdır dolayısıyla her $(x, y) \in K$ için $|f(x, y)| \leq M$ olacak şekilde bir $M = \|f\|_{C(K)}$ mevcuttur. Ayrıca f fonksiyonunun sürekliliğinden her $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki yeterli $|u - x| < \delta$ ve $|v - y| < \delta$ şartını sağlayan her $(u, v) \in K$ için $|f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$|f(u,v) - f(x,y)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left\{(u-x)^2 + (v-y)^2\right\} \tag{2.29}$$

alırız. L_{ij} bir pozitif lineer operatör olduğundan (2.29) eşitsizliğinden herhangi bir $m, n \in N$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f; x, y) - f(x, y)\right| \\
&\leq \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{i,j}(|f(u,v) - f(x,y)|; x, y) \\
&\quad + |f(x,y)|\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f_0; x, y) - f_0(x, y)\right| \\
&\leq \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}[(u-x)^2 + (v-y)^2]; x, y) \\
&\quad + |f(x,y)|\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{i,j}(f_0; x, y) - f_0(x, y)\right| \\
&\leq \varepsilon + (\varepsilon + M)\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(f_0; x, y) - f_0\right| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f_3; x, y) - f_3(x, y)\right|\right. \\
&\quad \left. + 2|x|\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f_1; x, y) - f_1(x, y)\right|\right\} \\
&\quad + 2|y|\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f_2; x, y) - f_2(x, y)\right| \\
&\quad + (x^2 + y^2)\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{i,j}(f_0; x, y) - f_0(x, y)\right| \\
&\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}(C^2 + D^2)\right)\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(f_0; x, y) - f_0(x, y)\right|
\end{aligned}$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(f_3;x,y)-f_3(x,y)\right|$$

$$+\frac{4MC}{\delta^2}\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(f_1;x,y)-f_1(x,y)\right|$$

$$+\frac{4MD}{\delta^2}\left|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(f_2;x,y)-f_2(x,y)\right|$$

Burada $C = \max|x|$, $D = \max|y|$. Yukarıdaki eşitsizlikte $(x,y) \in K$ üzerinden supremum alarsak ve

$$B = \max\left\{\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}(C^2+D^2), \frac{2M}{\delta^2}, \frac{4MC}{\delta^2}, \frac{4MD}{\delta^2}\right\}.$$

dersek

$$\left\|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f)-f\right\| \leq \varepsilon + B\sum_{r=0}^{3}\left\|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{mn} L_{ij}(f_r;x,y)-f_r(x,y)\right\|,$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi belli bir $\rho > 0$ için $\varepsilon > 0$ seçelim öyleki $\varepsilon < \rho$ olsun ve

$$E := \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \left\|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(f;x,y)-f(x,y)\right\| \geq \rho\right\|,$$

$$E_r := \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \left\|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{ij}^{m,n} L_{ij}(f_r;x,y)-f_r(x,y)\right\| \geq \frac{\rho-\varepsilon}{4B}\right\}, r = 0,1,2,3$$

kümelerini tanımlayalım. O zaman $E \subset \bigcup_{r=0}^{3} E_r$ ve dolayısıyla $\delta_2(E) \leq \sum_{r=0}^{3} E_r$ olur. Bu eşitsizliği gözönüne alarak ve (2.28) kabulünü kullanarak (2.27) i elde edilir. ■

Şimdi Teorem 2.3.3'ün klasik uygulamalardan ve istatistiksel formlarından daha güçlü olduğunu göstereceğiz. $A = (C,1,1)$ olsun ve $x = (x_{ij})$ tüm i ler için $x_{ij} = (-1)^j$ şeklinde tanımlansın. O zaman bu dizi ne yakınsak ne de istatistiksel yakınsaktır fakat $st - \lim Ax = 0$ dır. Şimdi $K = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere her $(x,y) \in K$ ve $f \in C(K)$ için

$$B_{ij}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} f\left(\frac{k}{i},\frac{l}{j}\right) C(i,k)x^k(1-x)^{i-k}C(j,l)y^j(1-y)^{j-l},$$

ile verilen Bernstein operatörlerini göz önüne alalım. Bu operatörleri kullanarak ,$C(K)$ üzerinde aşağıdaki pozitif lineer operatörleri tanımlayalım:

$$L_{ij}(f;x,y) = (1+x_{ij})B_{ij}(f;x,y),\ (x,y) \in K,\ f \in C(K)$$

O zaman

$$\begin{aligned}
L_{ij}(f_0;x,y) &= (1+x_{ij})f_0(x,y),\\
L_{ij}(f_1;x,y) &= (1+x_{ij})f_1(x,y)\\
L_{ij}(f_2;x,y) &= (1+x_{ij})f_2(x,y)\\
L_{ij}(f_3;x,y) &= (1+x_{ij})\left(f_3(x,y)+\frac{x-x^2}{i}+\frac{y-y^2}{j}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. $st-\lim Ax=0$ olduğundan r=0,1,2,3 için,

$$\begin{aligned}
&st-\lim_{m,n}\left\|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty}a_{ij}^{m,n}L_{ij}(f_r)-f_r\right\|\\
&=st-\lim_{m,n}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\left\|\sum_{i,j=0,0}^{m,n}L_{ij}(f_r)-f_r\right\|=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.3.3'den herhangi bir $f\in C(K)$ için

$$st-\lim_{m,n}\left\|\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty}a_{ij}^{m,n}L_{ij}(f)-f\right\|=0$$

sonucuna ulaşırız. Bununla birlikte (x_{ij}) dizisi ne yakınsak ne de istatistiksel yakınsaktır. Dolayısıyla (L_{ij}) pozitif operatörler dizisi için ne klasik ne de istatistiksel korovkin tipi yaklaşım teoremi geçerli değidir.

2.4. Bulanık Sayılar

Bu bölümde bulanık sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.4.1. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathbb{R}$ üzerindeki bir

$$u:\mathbb{R}\to[0,1]$$

fonksiyonuna bir bulanık sayısı denir:

1. u, normaldir. Yani en az bir $x_0\in\mathbb{R}$ için $u(x_0)=1$'dir.
2. u, bulanık konvekstir. Yani $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ve $\forall\lambda\in[0,1]$ için,

$$u(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\min\{u(x),u(y)\}.$$

3. u, üstten yarı süreklidir.
4. $[u]_0=\overline{\{x\in\mathbb{R}:u(x)>0\}}$ kompakt bir kümedir [22].

Burada $\overline{A}$, A kümesinin kapanışı anlamındadır.

Bir u bulanık sayısının α-seviye kümesi,

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}}\,, & 0 < \alpha \leq 1 \text{ ise}, \\ \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}\,, & \alpha = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir r reel sayısı,

$$\overline{r}(x) = \begin{cases} 1\;, & x = r \text{ ise} \\ 0\;, & x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir $\overline{r}$ bulanık sayısı gibi düşünülür. $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün bulanık sayılarının kümesi E^1 ile gösterilir ve bulanık sayı uzayı olarak isimlendirilir.

Not 2.4.1. Açık olarak $u \in E^1$ olması için gerek ve yeter şart her bir $\alpha \in [0,1]$ için $[u]_\alpha$ kümesinin boş olmayan, kapalı ve sınırlı bir aralık olmasıdır.

Bir bulanık sayısının α-seviye kümelerinin uç noktaları ile temsil edilebileceği Goetschel ve Voxman [40] tarafından ispatlanmıştır. Bu teorem bulanık sayılarının temsil teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.4.1. $u \in E^1$ ve her bir $\alpha \in [0,1]$ için $[u]_\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ olsun. O zaman aşağıdaki şartlar sağlanır:

1. $u^-(\alpha)$; $(0,1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.
2. $u^+(\alpha)$; $(0,1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve artmayan bir fonksiyondur.
3. $u^-(\alpha)$ ve $u^+(\alpha)$ fonksiyonları, $\alpha = 0$ noktasında sağdan süreklidir.
4. $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Tersine; γ ve β, $(1) - (4)$ şartlarını sağlayan iki fonksiyon ise, o zaman

$$[u]_\alpha = [\gamma(\alpha), \beta(\alpha)]$$

olacak şekilde bir tek $u \in E^1$ vardır. γ ve β'ya karşılık gelen u bulanık sayısı;

$$u : \mathbb{R} \to [0,1],\;\; u(x) = \sup\{\alpha : \gamma(\alpha) \leq x \leq \beta(\alpha)\}$$

olarak tanımlanır [40].

Bulanık sayılar kümesi üzerindeki aritmetik işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır. $u, v \in E^1$ bulanık sayılarının

(i) $u + v$ cebirsel toplamları,

$$\begin{aligned} u + v = w \quad &\Leftrightarrow \quad [w]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad w^-(\alpha) = u^-(\alpha) + v^-(\alpha) \;\text{ ve } w^+(\alpha) = u^+(\alpha) + v^+(\alpha), \end{aligned}$$

(ii) $u - v$ farkları,

$$\begin{aligned} u - v = w \quad &\Leftrightarrow \quad [w]_\alpha = [u]_\alpha - [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad w^-(\alpha) = u^-(\alpha) - v^+(\alpha) \text{ ve } w^+(\alpha) = u^+(\alpha) - v^-(\alpha), \end{aligned}$$

(iii) $u \cdot v$ çarpımları,

$$uv = w \Leftrightarrow [w]_\alpha = [u]_\alpha [v]_\alpha,$$

her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$w^-(\alpha) = \min\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\}$$

ve

$$w^+(\alpha) = \max\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\},$$

(iv) u sayısının k skaları ile çarpımı,

$$[ku]_\alpha = k[u]_\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $u \in E^1$ ve $0 \notin \{t \in \mathbb{R} : u(t) > 0\}$ ise, o zaman

$$\left(\frac{1}{u}\right)^-(\alpha) = \frac{1}{u^+(\alpha)} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{1}{u}\right)^+(\alpha) = \frac{1}{u^-(\alpha)}$$

biçiminde tanımlıdır.

Yukarıda tanımlı işlemlere göre bulanık sayılarının sahip olduğu bazı cebirsel özellikler aşağıda not edilmiştir.

Teorem 2.4.2. (i) Toplama işlemine göre birim eleman $\overline{0}$ dır.

(ii) Toplama işlemine göre her $u \neq \overline{r}, r \in \mathbb{R}$ bulanık sayılarının ters elemanı yoktur.

(iii) $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ olsun. Eğer $a, b \geq 0$ veya $a, b \leq 0$ ise o zaman

$$(a + b)u = au + bu$$

eşitliği geçerlidir. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için bu eşitlik geçerli olmayabilir.

(iv) Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve $u, v \in E^1$ için

$$a(u + v) = au + av$$

eşitliği geçerlidir.

(v) Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ için

$$a(bu) = (ab)u$$

eşitliği geçerlidir [41].

Bundan sonraki kısımda E^1 üzerindeki metrik, bulanık çift diziler ve bu metriğe göre bulanık çift dizilerin yakınsaklığı tanımlanacaktır. $u, v \in E^1$ olsun. O zaman u ile v arasındaki $D(u, v)$ uzaklığı,

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|\}$$

şeklinde tanımlanır. D metriğinin tanımından

$$D(u, \overline{0}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|u^-(\alpha)|, |u^+(\alpha)|\} = \max\{|u^-(0)|, |u^+(0)|\}$$

olduğu görülür. D metriği aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Teorem 2.4.3. $u, v, w, z \in E^1$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman,

(i) (E^1, D) tam metrik uzaydır,

(ii) $D(ku, kv) = |k|D(u, v)$,

(iii) $D(u + v, w + v) = D(u, w)$,

(iv) $D(u + v, w + z) \leq D(u, w) + D(v, z)$,

(v) $|D(u, \overline{0}) - D(v, \overline{0})| \leq D(u, v) \leq D(u, \overline{0}) + D(v, \overline{0})$ [41].

2.5. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde çift bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını inceleyeceğiz.

Tanım 2.5.1. E^1 bulanık sayı uzayı olmak üzere,

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E^1$$

$$(m, n) \to f(m, n) = u_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir bulanık çift dizi denir.

Çift bulanık sayı dizileri, çift reel veya kompleks dizilerden ayırmak için $(u_{mn}), (v_{mn}), (w_{mn})$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.5.2. $u = (u_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ bir çift bulanık sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var öyleki $\min(m, n) \geq N$ iken $D(u_{mn}, \mu) < \varepsilon$ oluyorsa $u = (u_{mn})$ dizisi μ bulanık sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Bu durumda $u_{mn} \to \mu$ veya $\lim u_{mn} = \mu$ yazılır [42].

Tanım 2.5.3. $u = (u_{mn})$ çift bulanık sayı dizisi olsun. Eğer her m ve n için $D(u_{mn}, \overline{0}) < M$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı varsa $u = (u_{mn})$ çift dizisi sınırlıdır denir [42].

Savaş ve Mursaleen [33] tarafından çift bulanık sayı dizilerin istatistiksel yakınsaklığı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.4. $u = (u_{mn})$, E^1 de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left|\{m \leq M \ \text{ ve } \ n \leq N : D(u_{mn}, \mu) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $u = (u_{mn})$ çift dizisi μ bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $u_{mn} \xrightarrow{st} \mu$ veya $st - \lim u_{mn} = \mu$ yazılır [33].

$u_{mn} \to \mu \Rightarrow u_{mn} \xrightarrow{st} \mu$ gerektirmesi geçerlidir. Ancak, genel olarak tersi doğru olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 2.5.1. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$u_{jk}(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x - jk, & jk \leq x \leq jk+1 \text{ için} \\ -x + jk + 2, & jk+1 \leq x \leq jk+2 \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & j \text{ ve } k \text{ tam kare ise,} \\ \mu(x), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \text{ için,} \\ -x+1, & 0 \leq x \leq 1 \text{ için,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde E^1 deki bir (u_{jk}) çift dizisi tanımlansın.

$$\frac{1}{(M+1)(N+1)} \left|\{j \leq M \ \text{ ve } \ k \leq N : D(u_{jk}, \mu) \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{(\sqrt{N}+1)(\sqrt{M}+1)}{(M+1)(N+1)}$$

olduğundan (u_{jk}) çift dizisi μ bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır. Fakat (u_{jk}) dizisi yakınsak değildir.

Teorem 2.5.1. Bulanık sayılarının (u_{jk}) ve (v_{jk}) çift dizilerini alalım.

(a) Eğer $st - \lim u_{jk} = \mu$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise, o zaman $st - \lim cu_{jk} = c\mu$ olur.

(b) Eğer $st - \lim u_{jk} = \mu$ ve $st_2 - \lim v_{jk} = \nu$ ise, o zaman $st - \lim(u_{jk} + v_{jk}) = \mu + \nu$ olur [33].

Teorem 2.5.2. Bulanık sayılarının bir $u = (u_{jk})$ dizisinin bir μ bulanık sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesi vardır öyle ki $\delta_2(K) = 1$ ve

$$\lim_{j,k\to\infty,\ (j,k)\in K} u_{jk} = \mu$$

[33].

Tanım 2.5.5. $u = (u_{jk})$ çift bulanık sayı dizisi olsun.

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{jk}$$

şeklinde tanımlanan σ_{mn} dizisine $u = (u_{mn})$ çift bulanık sayı dizisinin Cesàro toplamı denir. Eğer

$$\lim_{m,n\to\infty} \sigma_{mn} = \mu$$

olacak şekilde bir μ bulanık sayısı mevcut ise $u = (u_{mn})$ çift bulanık sayı dizisi μ bulanık sayısına Cesàro toplanabilir ya da kısaca $(C,1,1)$ toplanabilirdir denir ve

$$u_{mn} \longrightarrow \mu \; (C,1,1)$$

yazılır [33].

Sınırlı bir $u = (u_{mn})$ çift bulanık sayı dizisi için

$$u_{mn} \longrightarrow \mu \Rightarrow u_{mn} \longrightarrow \mu \; (C,1,1)$$

gerektirmesi sağlanır. Fakat bunun tersi genel olarak sağlanmaya bilir. Bu gerektirmenin tersinin gerçekleşmesi için gerekli şartlar, yani Cesàro toplanabilen bir çift bulanık sayı dizisinin yakınsak olmasını sağlayan Tauber şartları Çanak, Totur ve Önder [43] tarafından verilmiştir.

Çift bulanık sayı dizileri için istatistiksel Cesàro toplanabilme kavramı Yapalı ve Talo [35] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.5.6. $u = (u_{mn})$ bir çift bulanık sayı dizisi ve μ bir bulanık sayı olsun. Eğer

$$st - \lim_{m,n\to\infty} \sigma_{mn} = \mu$$

oluyorsa, (u_{mn}) çift dizisi μ sayısına istatistiksel $(C,1,1)$ taplanabilirdir denir ve

$$u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \; (C,1,1)$$

ile gösterilir.

Çift bulanık sayı dizilerinin istatistiksel $(C,1,1)$ toplanabilirliği Yapalı ve Talo [35] ile Önder, Çanak ve Totur [36] tarafından eş zamanlı çalışılmıştır. Sınırlı (u_{mn}) çift bulanık sayı dizisi için

$$u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \Rightarrow u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \; (C,1,1)$$

gerektirmesi daima sağlanır. Bu önermenin tersi ise genel olarak sağlanmayabilir.

Örnek 2.5.2. $u = (u_{jk})$ çift bulanık sayı dizisini

$$\mu(x) = \begin{cases} 2+3x, & -\frac{2}{3} \leq x \leq 0 \text{ için}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \nu(x) = \begin{cases} 2-3x, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ için}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$u_{jk} = \begin{cases} \mu, & j,k \text{ tek sayı ise}, \\ \nu, & j,k \text{ çift sayı ise} \\ \overline{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $u = (u_{jk})$ dizisinin α-seviye kümeleri her $\alpha \in [0,1]$ için

$$[u_{jk}]_\alpha = \begin{cases} \left[0, \frac{\alpha-2}{3}\right], & j,k \text{ tek sayı ise} \\ \left[\frac{2-\alpha}{3}, 0\right], & j,k \text{ çift sayı ise} \\ \{0\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulunur. $w = \frac{\mu+\nu}{4}$ tanımlarsak

$$\lim_{m,n\to\infty} D(\sigma_{mn}, w) = 0$$

olur. Dolayısıylada $u_{jk} \xrightarrow{st} w$ $(C,1,1)$ elde edilir. Bununla birlikte her $0 < \varepsilon < 1/6$ ve her $j,k \in \mathbb{N}$ için $D(u_{jk}, w) \geq \varepsilon$ olacağından (u_{jk}) çift bulanık dizisi w bulanık sayısına istatistiksel yakınsak değildir [36].

Çift bulanık sayı dizileri için

$$u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \; (C,1,1) \Rightarrow u_{mn} \xrightarrow{st} \mu$$

gerektirmesini sağlayan Tauber şartlar Yapalı ve Talo [35] ile Önder, Çanak ve Totur [36] tarafından verilmiştir. Biz bu tez çalışmasında bu makalelerde istatistiksel $(C,1,1)$ toplanabilme metodu için elde edilen sonuçları daha gelen bir metot olan istatistiksel $(\overline{N}, p, q, 1, 1)$ toplanabilme metoduna genelleyeceğiz.

2.6. Bulanık Pozitif Lineer operatörler için Korovkin Tip Teoremler

Bu bölümde sürekli bulanık sayı değerli fonksiyon uzayında tanımlı pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için ispatlanmış olan Korovkin tipi teoremlerden bahsedeceğiz.

Öncelikle E^1 üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı tanımlayalım. $u, v \in E^1$ olmak üzere

$$u \preceq v \iff \text{her } \alpha \in [0,1] \text{ için } u^-(\alpha) \leq v^-(\alpha) \text{ ve } u^+(\alpha) \leq v^+(\alpha)$$

biçiminde tanımlanan $\preceq$ bağıntısı E^1 üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Lemma 2.6.1. $u, v, w, e \in E^1$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Aşağıdaki ifadeleri verebiliriz.

(i) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $u \preceq v + \overline{\varepsilon}$ ise, o zaman $u \preceq v$ olur.

(ii) Eğer $u \preceq v$ ve $v \preceq w$ ise, o zaman $u \preceq w$ olur.

(iii) Eğer $u \preceq w$ ve $v \preceq e$ ise, o zaman $u + v \preceq w + e$ olur.

(iv) Eğer $u + w \preceq v + w$ ise, o zaman $u \preceq v$ olur [29].

E^1 üzerinde D metriği aşağıdaki önemli özelliğe sahiptir.

Lemma 2.6.2. $u, v \in E^1$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

(i) $D(u, v) \leq \varepsilon$.

(ii) $u - \overline{\varepsilon} \preceq v \preceq u + \overline{\varepsilon}$

ifadeler birbirine denktir [44].

Tanım kümesi $\mathbb{R}^2$'nin bir alt kümesi, görüntü kümesi E^1 bulanık sayılar uzayı olan fonksiyonlara iki değişkenli bulanık sayı değerli fonksiyon denir. Bir $f : K \to E^1$ iki değişkenli bulanık sayı değerli fonksiyonun parametrik gösterimi herbir $(x, y) \in K$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$[f(x, y)]_\alpha = [f_\alpha^-(x, y), f_\alpha^+(x, y)]$$

olarak verilir. $\mathbb{R}^2$'nin bir K kompakt altkümesi üzerindeki tüm sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların kümesi $C_{\mathcal{F}}(K)$ ile gösterilir ve $C_{\mathcal{F}}(K)$

$$\begin{aligned} D^*(f, g) &= \sup_{(x,y)\in K} D(f(x, y), g(x, y)) \\ &= \sup_{(x,y)\in K} \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\{|f_\alpha^-(x, y) - g_\alpha^-(x, y)|, |f_\alpha^+(x, y) - g_\alpha^+(x, y)|\}. \end{aligned}$$

ile tam metrik uzaydır. Şimdi $L : C_{\mathcal{F}}(K) \to C_{\mathcal{F}}(K)$ bir operatör olsun. $L_{mn}(f; x, y)$ ile $L_{mn}(f)$ fonksiyonunun bir (x, y) noktasındaki değerini gösterelim. Eğer her $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in C_{\mathcal{F}}(K)$ ve $(x, y) \in K$ için

$$L(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2; x, y) = \lambda_1 L(f_1; x, y) + \lambda_2 L(f_2; x, y)$$

şartı sağlanıyor ise L operatörüne lineerdir denir. Ayrıca L bir lineer operatör ve $f(x, y) \preceq g(x, y)$ olan her $f, g \in C_{\mathcal{F}}(K)$ fonksiyonlar ve tüm $(x, y) \in K$ ikilileri için $L(f; x, y) \preceq L(g; x, y)$ şartı sağlıyor ise L operatörüne bulanık pozitif lineer operatör denir. Bulanık pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için bulanık Korovkin tipi yaklaşım teoremi Demirci ve Karakuş [45] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.6.1. $\{L_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, $C_{\mathcal{F}}(K)$ üzerinnde bulanık pozitif lineer operatörlerin bir çift dizisi olsun. Tüm $(x,y)\in K, \alpha\in[0,1]$, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ ve $f\in C_{\mathcal{F}}(K)$ için

$$\{L_{mn}(f;x,y)\}_{\alpha}^{\pm}=\widetilde{L}_{mn}(f_{\alpha}^{\pm};x,y)$$

özelliğine sahip $C(K)$ da pozitif lineer operatörlerin bir $\{\tilde{L}_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ dizisinin mevcut olduğunu varsayalım.

$$g_0(x,y)=1,\ g_1(x,y)=x,\ g_2(x,y)=y,\ g_3(x,y)=x^2+y^2$$

olmak üzere

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\widetilde{L}_{mn}(g_i)-g_i\right\|=0,\quad i=0,1,2,3$$

olsun. O zaman her $f\in C_{\mathcal{F}}(K)$ için

$$\lim_{m,n\to\infty}D^*\left(L_{mn}(f),f\right)=0.$$

olur [45].

Bu tez çalışmasında bulanık pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için bulanık Korovkin tipi yaklaşım teoremi istatistiksel $(\overline{N},p,q,1,1)$ toplanabilme metodu kullanarak ispatlanacaktır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölüm tezin orjinal sonuçlarından oluşmaktadır.

3.1. Çift Bulanık Sayı Dizilerinin Ağırlıklı Ortalamalarının İstatistiksel Toplanabilirliği

Bu kısımda öncelikle çift bulanık sayı dizilerinin ağırlıklı ortalamalarının istatistiksel toplanabilirliği kavramı takdim edilecektir. Sonra bu toplanabilme metodundan istatistiksel yakınsaklığın elde edildiği Tauber koşullar verilecektir.

Tanım 3.1.1. $p = (p_j)$ ve $q = (q_k)$ negatif olmayan reel diziler, $p_0 > 0, q_0 > 0$ ve

$$P_m = \sum_{j=0}^{m} p_j \ (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{ve} \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

olsun. Bir (u_{jk}) bulanık çift sayı dizisinin ağırlıklı ortalaması

$$t_{mn}^{11} := \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_j q_k u_{jk}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t_{mn}^{10} := \frac{1}{P_m} \sum_{j=0}^{m} p_j u_{jn}, \quad t_{mn}^{01} := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k u_{mk} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

ile tanımlanır. $(\alpha, \beta) = (1, 1), (1, 0)$ ya da $(0, 1)$ olmak üzere, eğer $t_{mn}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} \mu$ oluyorsa (u_{jk}) çift bulanık sayı dizisinin ağırlıklı ortalaması μ bulanık sayısına istatistiksel toplanabilirdir veya kısaca istatistiksel $(\overline{N}, p, q, \alpha, \beta)$ toplanabilirdir denir ve

$$u_{jk} \xrightarrow{st} \mu \ (\overline{N}, p, q, \alpha, \beta)$$

yazılır.

Lemma 2.2.2 nın ispatına benzer olarak çift bulanık sayı dizileri için aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.1.1. $(\alpha, \beta) = (1, 1), (1, 0)$ ya da $(0, 1)$ ve $u_{jk} \xrightarrow{st} \mu \ (\overline{N}, p, q, \alpha, \beta)$ olsun. O zaman her $\lambda \neq 0$ için $t_{\lambda_m, \lambda_n}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} \mu$, $t_{\lambda_m, n}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} \mu$ ve $t_{m, \lambda_n}^{\alpha\beta} \xrightarrow{st} \mu$ olur.

Bundan sonraki kısımda ilk olarak bulanık çift sayı dizileri için

$$u_{jk} \xrightarrow{st} \mu \ (\overline{N}, p, q, 1, 1) \Rightarrow u_{jk} \xrightarrow{st} \mu \tag{3.1}$$

gerektirmesi için gerekli Tauber koşullar verilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma 3.1.2. $p, q \in SVA_+$, (u_{mn}) bir çift bulanık sayı dizisi, μ bir bulanık sayı dizisi ve

$$u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \,(\overline{N}, p, q; 1, 1)$$

olsun. O zaman her $\lambda > 1$ için

$$st - \lim \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk} = \mu \tag{3.2}$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$st - \lim \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k u_{jk} = \mu \tag{3.3}$$

İspat: $\lambda > 1$ olsun. Bu durumda Totur ve Çanak [46] çalışmasında verilen Lemma 4.1. den yararlanarak

$$\begin{aligned}
&D\left(\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk}, \mu\right) \\
&\leq D\left(\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk}, t_{mn}^{11}\right) + D(t_{mn}^{11}, \mu) \\
&\leq \frac{P_{\lambda_m} Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} D\left(t_{\lambda_m, \lambda_n}^{11}, t_{\lambda_m, n}^{11}\right) \\
&+ \frac{P_{\lambda_m} Q_{\lambda_n}}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} D\left(t_{mn}^{11}, t_{m, \lambda_n}^{11}\right) \\
&+ \frac{P_{\lambda_m}}{(P_{\lambda_m} - P_m)} D\left(t_{\lambda_m, n}^{11}, t_{mn}^{11}\right) \\
&+ \frac{Q_{\lambda_n}}{(Q_{\lambda_n} - Q_n)} D\left(t_{m, \lambda_n}^{11}, t_{mn}^{11}\right) + D(t_{mn}^{11}, \mu).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Burada, Lemma 2.2.3 den

$$\begin{aligned}
\limsup_{m \to \infty} \frac{P_{\lambda_m}}{(P_{\lambda_m} - P_m)} &= \left(1 - \limsup_{m \to \infty} \frac{P_m}{P_{\lambda_m}}\right)^{-1} < \infty \\
\limsup_{n \to \infty} \frac{Q_{\lambda_n}}{(Q_{\lambda_n} - Q_n)} &= \left(1 - \limsup_{n \to \infty} \frac{Q_n}{Q_{\lambda_n}}\right)^{-1} < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan, Lemma 3.1.1'den, (3.4) eşitsizliğinden ve (t_{mn}^{11}) dizisin istatistiksel yakınsaklığından (3.2) elde edilir.

Şimdi $0 < \lambda < 1$ alalım. Bu durumda da, yine Totur ve Çanak [46] çalışmasında verilen Lemma 4.1. den yararlanarak

$$
\begin{aligned}
&D\left(\frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}u_{jk},\mu\right)\\
&\leq D\left(\frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}u_{jk},t_{mn}^{11}\right)+D(t_{mn}^{11},\mu)\\
&\leq \frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}D\left(t_{mn}^{11},t_{m,\lambda_n}^{11}\right)\\
&+\frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}D\left(t_{\lambda_m,\lambda_n},t_{\lambda_m,n}^{11}\right)\\
&+\frac{P_{\lambda_m}}{(P_m-P_{\lambda_m})}D\left(t_{mn}^{11},t_{\lambda_m,n}\right)\\
&+\frac{Q_{\lambda_n}}{(Q_n-Q_{\lambda_n})}D\left(t_{mn}^{11},t_{m,\lambda_n}\right)+D(t_{mn}^{11},\mu).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Yine burada, Lemma 2.2.3 den

$$
\begin{aligned}
\limsup_{m\to\infty}\frac{P_{\lambda_m}}{(P_m-P_{\lambda_m})}&=\left(\liminf_{m\to\infty}\frac{P_m}{P_{\lambda_m}}-1\right)^{-1}<\infty\\
\limsup_{n\to\infty}\frac{Q_{\lambda_n}}{(Q_n-Q_{\lambda_n})}&=\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{Q_n}{Q_{\lambda_n}}-1\right)^{-1}<\infty
\end{aligned}
$$

sağlandığından, (3.5) eşitsizliğinden, Lemma 3.1.1'den ve (t_{mn}^{11}) dizisinin istatistiksel yakınsaklığından (3.3) elde edilir ■

Teorem 3.1.1. $p,q\in SVA_+$, (u_{mn}) bir çift bulanık sayı dizisi, μ bir bulanık sayı dizisi ve

$$u_{mn}\xrightarrow{st}\mu\,(\overline{N},p,q;1,1)$$

olsun. O zaman $u_{mn}\xrightarrow{st}\mu$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon>0$ için aşağıdaki iki şarttan birinin sağlanmasıdır.

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\lambda>1}\limsup_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}\Bigg|\Bigg\{m\leq M \text{ ve } n\leq N:\\
&D\left(\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_ku_{jk},u_{mn}\right)\geq\varepsilon\Bigg\}\Bigg|=0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
&\inf_{0<\lambda<1}\limsup_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}\Bigg|\Bigg\{m\leq M \text{ ve } n\leq N:\\
&D\left(\frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_jq_ku_{jk},u_{mn}\right)\geq\varepsilon\Bigg\}\Bigg|=0.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

İspat: Gereklilik. $u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \; (\overline{N}, p, q; 1, 1)$ ve $u_{mn} \xrightarrow{st} \mu$ olsun. O zaman Lemma 3.1.2 den, $\lambda > 1$ için (3.6) ve $0 < \lambda < 1$ için (3.7) sağlanır.

Yeterlilik. $u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \; (\overline{N}, p, q; 1, 1)$ olsun ve (3.6) sağlansın. Kolaylık adına

$$t_{mn}^{>} := \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk}$$

olarak tanımlayalım. Üçgen eşitsizliğinden

$$D(u_{mn}, \mu) \leq D\left(u_{mn}, t_{mn}^{>}\right) + D\left(t_{mn}^{>}, \mu\right)$$

bulunur. Burada

$$A_{MN}(\varepsilon) = \left\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : D(u_{mn}, t_{mn}^{>}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$B_{MN}(\varepsilon) = \left\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : D(t_{mn}^{>}, \mu) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olmak üzere

$$\left\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : D(u_{mn}, \mu) \geq \varepsilon \right\} \subseteq A_{MN}(\varepsilon) \cup B_{MN}(\varepsilon)$$

olur. $\delta > 0$ için (3.6) dan

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| A_{MN}(\varepsilon) \right| \leq \delta$$

olacak şekilde $\lambda > 1$ vardır. Ayrıca Lemma 3.1.2 den

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| B_{MN}(\varepsilon) \right| = 0$$

olur. Böylece

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| \left\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : D(u_{mn}, \mu) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \delta$$

elde edilir. $\delta > 0$ keyfi olduğundan $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| \left\{ m \leq M \text{ ve } n \leq N : D(u_{mn}, \mu) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu da $D(u_{mn}, \mu) \xrightarrow{st} 0$ olması demektir.

$0 < \lambda < 1$ için ispat yukarıdaki ispata benzer şekilde (3.7) ve Lemma 3.1.2 kullanılarak yapılabilir. ■

Şimdi çift bulanık sayı dizileri için istatistiksel yavaş salınımlılık tanımlarını verelim. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} \Big\{ m \le M \text{ ve } n \le N : \max_{m<j\le\lambda_m} D(u_{jn}, u_{mn}) \ge \varepsilon \Big\} \tag{3.8}$$

ise E^1 de bir (u_{mn}) çift dizisi birinci indise göre istatistiksel yavaş salınımlıdır denir. Eğer (3.8) eşitliğinde

$$\max_{m<j\le\lambda_m} D(u_{jn}, u_{mn}) \quad \text{yerine} \quad \max_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} D(u_{jk}, u_{mk})$$

alınırsa (u_{mn}) dizisi birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlıdır denir. İkinci indise göre istatistiksel yavaş salınımlılık özelliğide benzer şekilde tanımlanır. Teorem 2.4.2 ve Teorem 2.4.3 dikkate alınarak

$$D\left(\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k u_{jk}, u_{mn} \right) \le \max_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} D(u_{jk}, u_{mk}) + \max_{n<k\le\lambda_n} D(u_{mk}, u_{mn})$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece eğer (u_{mn}) ikinci indise göre istatistiksel yavaş salınımlı ve birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlı ise bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için (3.6) sağlanır .

Sonuç 3.1.1. (u_{mn}) bulanık çift dizisi her iki indise göre istatistiksel yavaş salınımlı ve bununla beraber indislerden birine göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlı ise (3.1) sağlanır. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Şimdi (u_{mn}) çift bulanık sayı dizisi için Landau tipi Tauberian koşullarını verelim.

$$jD(u_{jn}, u_{j-1,n}) \le H \quad (j, n > n_0), \tag{3.9}$$

$$kD(u_{mk}, u_{m,k-1}) \le H \quad (m, k > n_0) \tag{3.10}$$

olacak şekilde $n_0 \ge 1$ ve $H > 0$ uygun sabitleri mevcut olsun. $\lambda > 1$ ve $m, k > n_0$ için

$$\max_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} D(u_{jk}, u_{mk}) \le \max_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} \left\{ \left(\sum_{l=m+1}^{j} \frac{1}{l} \right) \left(\sup_{m<l\le j} lD(u_{lk}, u_{l-1,k}) \right) \right\}$$

$$\leq \sum_{l=m+1}^{\lambda_m} \frac{H}{l} \leq H \log \lambda$$

olacağından, eğer (3.9) sağlanırsa, bu takdirde (u_{mn}) birinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlıdır. Benzer şekilde, (3.10) ifadesi ikinci indise göre kuvvetli istatistiksel yavaş salınımlı olmayı gerektirir. Buradan Sonuç 3.1.1'in bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.2. $p, q \in SVA_+$, (u_{mn}) çift bulanık sayı dizisi, μ bir bulanık sayı ve

$$u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \; (\overline{N}, p, q; 1, 1)$$

olsun. Eğer (3.9) ve (3.10) şartlarını sağlayacak şekilde $n_0 \geq 1$ ve $H > 0$ sabitleri mevcut ise, bu takdirde $u_{mn} \xrightarrow{st} L$ olur.

Talo ve Bayazit [34] aşağıdaki sonucu vermişlerdir.

Sonuç 3.1.3. (u_{mn}) çift bulanık sayı dizisi, μ bir bulanık sayı ve $u_{mn} \xrightarrow{st} \mu$ olsun. Eğer (3.9) ve (3.10) şartlarını sağlayacak şekilde $n_0 \geq 1$ ve $H > 0$ sabitleri mevcut ise ozaman $u_{mn} \to L$ olur. sayı

Sonuç 3.1.2 ile Sonuç 3.1.3 birlikte gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.1.4. $p, q \in SVA_+$, (u_{mn}) çift bulanık sayı dizisi, μ bir bulanık sayı ve

$$u_{mn} \xrightarrow{st} \mu \; (\overline{N}, p, q; 1, 1)$$

olsun. Eğer (3.9) ve (3.10) şartlarını sağlayacak şekilde $n_0 \geq 1$ ve $H > 0$ sabitleri mevcut ise o zaman $u_{mn} \to \mu$ olur.

3.2. Bulanık Korovkin Tipi Teoremlere Uygulamalar

Bu kısımda $C_{\mathcal{F}}(K)$ üzerinde tanımlı bulanık pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için bir Korovkin tip yaklaşım teoremini istatistiksel $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodunu kullanılarak ispatlayacağız.

Teorem 3.2.1. $\{L_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, $C_{\mathcal{F}}(K)$ üzerinde bulanık pozitif lineer operatörlerin bir çift dizisi olsun. Tüm $(x, y) \in K, \alpha \in [0, 1]$, $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ve $f \in C_{\mathcal{F}}(K)$ için

$$\{L_{mn}(f; x, y)\}_{\alpha}^{\pm} = \widetilde{L}_{mn}(f_{\alpha}^{\pm}; x, y) \tag{3.11}$$

özelliğine sahip $C(K)$ üzerinde pozitif lineer operatörlerin bir $\{\tilde{L}_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ dizisinin mevcut olduğunu varsayalım.

$$g_0(x, y) = 1,\; g_1(x, y) = x,\; g_2(x, y) = y,\; g_3(x, y) = x^2 + y^2$$

olmak üzere

$$st-\lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(g_i)-g_i\right\|=0,\quad i=0,1,2,3 \tag{3.12}$$

olsun. O zaman her $f\in C_{\mathcal{F}}(K)$ için

$$st-\lim_{m,n\to\infty}D^{*}\left(\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_kL_{jk}(f),f\right)=0. \tag{3.13}$$

olur.

İspat: $f\in C_{\mathcal{F}}(K)$ olduğundan K kompakt kümesi üzerinde sınırlıdır, yani her $(x,y)\in K$ için için

$$D(f(x,y),\overline{0})\leq M$$

olacak şekilde bir $M>0$ vardır. Diğer taraftan f bulanık sayı değerli fonksiyonunun sürekliliğinden her $\varepsilon>0$ için bir $\delta>0$ sayısı vardır öyleki $\sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}<\delta$ olan her $(s,t)\in K$ ikilisi için $D(f(s,t),f(x,y))<\varepsilon$ sağlanır. Böylece

$$D(f(s,t),f(x,y))\leq D(f(s,t),\overline{0})+D(f(x,y),\overline{0})\leq\frac{2M}{\delta^2}\left((s-x)^2+(t-y)^2\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla sabit (x,y) için

$$D(f(s,t),f(x,y))<\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left((s-x)^2+(t-y)^2\right)$$

elde ederiz. D metriğinin tanımından her $\alpha\in[0,1]$ için

$$|f_\alpha^{\pm}(s,t)-f_\alpha^{\pm}(x,y)|<\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left((s-x)^2+(t-y)^2\right) \tag{3.14}$$

olur. $\alpha\in[0,1]$ için $f_\alpha^{\pm}\in C(K)$ olduğunu ve her $m,n\in\mathbb{N}$ için $\widetilde{L}_{mn}$ operatörlerinin de $C(K)$ üzerinde lineer ve pozitif olduklarını biliyoruz. Burada Teorem 3.2.1'in ispatı dikkate alınırsa her $\alpha\in[0,1]$ için (3.14) eşitsizliğinden, $A=\max_{(x,y)\in K}\{|x|\}$ ve $B=\max_{(x,y)\in K}\{|y|\}$ tanımlanarak,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(f_\alpha^{\pm};x,y)-f_\alpha^{\pm}(x,y)\right|\\ \leq\ &\varepsilon+\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}(A^2+B^2)\right)\left|\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{L}_{jk}(g_0;x,y)-g_0(x,y)\right|\\ &+\frac{2M}{\delta^2}\left|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(g_3;x,y)-g_3(x,y)\right|\end{aligned}$$

$$+\frac{4MA}{\delta^2}\left|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(g_1;x,y)-g_1(x,y)\right|$$
$$+\frac{4MB}{\delta^2}\left|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(g_2;x,y)-g_2(x,y)\right|$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $(x,y)\in K$ ler üzerinden supremum alarak $\alpha\in[0,1]$ için

$$\left\|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(f_\alpha^{\pm})-f_\alpha^{\pm}\right\|\le\varepsilon+C\sum_{i=0}^{3}\left\|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(g_i)-g_i\right\| \quad (3.15)$$

elde ederiz. Burada

$$C=\max\left\{\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}(A^2+B^2)\right),\frac{2M}{\delta^2},\frac{4MA}{\delta^2},\frac{4MB}{\delta^2}\right\}$$

dır. D^* metriğinin tanımından

$$\begin{aligned}
&D^*\left(\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_kL_{jk}(f),f\right)\\
=&\sup_{(x,y)\in K}D\left(\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_kL_{jk}(f;x,y),f(x,y)\right)\\
=&\sup_{(x,y)\in K}\sup_{\alpha\in[0,1]}\max\left\{\left|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(f_\alpha^-;x,y)-f_\alpha^-(x,y)\right|,\right.\\
&\left.\left|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(f_\alpha^+;x,y)-f_\alpha^+(x,y)\right|\right\}\\
=&\sup_{\alpha\in[0,1]}\max\left\{\left\|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(f_\alpha^-)-f_\alpha^-\right\|,\right.\\
&\left.\left\|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(f_\alpha^+)-f_\alpha^+\right\|\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikle (3.15) birleştirilirse,

$$D^*\left(\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_kL_{jk}(f),f\right)\le\varepsilon+C\sum_{i=0}^{3}\left\|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(g_i)-g_i\right\| \quad (3.16)$$

elde ederiz. Şimdi belli bir $\varepsilon'>0$ için $0<\varepsilon<\varepsilon'$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ seçelim ve aşağıdaki tanımları yapalım:

$$\begin{aligned}
U:&=\left\{m,n\in\mathbb{N}:D^*\left(\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_kL_{jk}(f),f\right)\ge\varepsilon'\right\},\\
U_i:&=\left\{m,n\in\mathbb{N}:\left\|\frac{1}{P_mQ_n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_jq_k\widetilde{L}_{jk}(g_i)-g_i\right\|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{4C}\right\}\ i=0,1,2,3.
\end{aligned}$$

(3.16) eşitsizliğinden

$$U \subseteq U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3$$

kapsaması elde edilir ve böylece

$$\delta(U) \leq \delta(U_0) + \delta(U_1) + \delta(U_2) + \delta(U_3)$$

olur. Bu eşitsizliği ve (3.12) dikkate alırsak (3.13) elde ederiz. Buda ispatı tamamlar. ■

Örnek 3.2.1. $K = [0,1] \times [0,1]$, $f \in C_{\mathcal{F}}(K)$, $(x,y) \in K$ ve $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_{mn}(f;x,y) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{j}{m},\frac{k}{n}\right)\binom{m}{j}x^j(1-x)^{m-j}\binom{n}{k}y^k(1-x)^{n-k} \tag{3.17}$$

bulanık Bernstein tipi polinomlarının çift dizisini tanımlayalım. Bu operatörler yardımıyla $C_{\mathcal{F}}(K)$ üzerinde $x_{mn} = (-1)^n$ olmak üzere

$$L_{mn}(f;x,y) = (1 + x_{mn})B_{mn}(f;x,y) \tag{3.18}$$

dizisini tanımlayalım. Her $\alpha \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\{L_{mn}(f;x,y)\}_{\alpha}^{\pm} = \widetilde{L}_{mn}(f_{\alpha}^{\pm};x,y)\\
&= (1+x_{mn})\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} f_{\alpha}^{\pm}\left(\frac{j}{m},\frac{k}{n}\right)\binom{m}{j}x^j(1-x)^{m-j}\binom{n}{k}y^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{mn}(g_0;x,y) &= (1+x_{mn})g_0(x,y),\\
\tilde{L}_{mn}(g_1;x,y) &= (1+x_{mn})g_1(x,y),\\
\tilde{L}_{mn}(g_2;x,y) &= (1+x_{mn})g_2(x,y),\\
\tilde{L}_{mn}(g_2;x,y) &= (1+x_{mn})\left(g_3(x,y) + \frac{x-x^2}{m} + \frac{y-y^2}{n}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her j için $p_j = 1$, her k için $q_k = 1$ alırsak $(\overline{N},p,q;1,1)$ metodu $(C,1,1)$ metoduna indirgenir ve

$$st - \lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{L}_{jk}(g_i) - g_i\right\| = 0, \quad i = 0,1,2,3$$

olur. Theorem 3.2.1 den her $f \in C_{\mathcal{F}}(K)$ için

$$st - \lim_{m,n\to\infty} D^*\left(\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}L_{jk}(f), f\right) = 0.$$

elde edilir. (x_{mn}) dizisi yakınsak bir dizi olmadığından $L_{mn}(f)$ bulanık operatörler dizisi için Teorem 2.6.1 sağlanmaz.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında çift bulanık sayı dizileri için istatistiksel $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodu tanımlandı. Sonrasında istatistiksel $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilen çift bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsak olmasını sağlayan Tauber şartları elde edildi. Bu metodun bir uygulaması olarak bulanık pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlandı.

Bu tezde elde edilen sonuçları genelleştirmek mümkündür. Negatif olmayan reel bir RH-regüler matris yardımıyla bir çift bulanık sayı dizisinin istatistiksel A-toplanabilirliği tanımlanabilir. Bu metot bu tezde tanımlanan istatistiksel $(\overline{N}, p, q; 1, 1)$ toplanabilme metodun bir genellemesi olacaktır. Bu tezde elde edilen sonuçların ışığında istatistiksel A-toplanabilme metodu için Tauber şartlar verilebilir ve bu yeni metod kullanılarak bulanık pozitif lineer operatörlerin çift dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Tauber, A. Ein Satz aus der Theorie der unend lichen Reihen. Monatshefte für Mathematic und Physik. 1897, 8, 273–277.

[2] Hardy, G.H. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proceedings of the London Mathematical Society. 1910, 2(8), 310–320.

[3] Landau, E. Über die Bedeutung einiger Grenzwertsatze der herren Hardy and Axel. Prace Matematyczno-Fizyczne, 1910, 21, 97–177.

[4] Schmidt, R. Über divergente Folgen und Mittelbildungen. Mathematische Zeitschrift. 1925, 22, 89–152.

[5] Korevaar J. Tauberian Theory, A Century of Developments, Springer, 2004, 469 s.

[6] Fast, H. Sur la convergence statistique. Colloquium Mathematicum. 1951, 2, 241–244.

[7] Šalát, T. On statistically convergent sequences of real numbers. Mathematica Slovaca. 1980, 30, 139–150.

[8] Fridy, J.A. On statistical convergence. Analysis. 1985, 5, 301–313.

[9] Connor, S. The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. Analysis. 1988, 8, 47–63.

[10] Fridy, J.A., Khan, M.K. Statistical extensions of some classical Tauberian theorems. Proceedings of the American Mathematical Society. 2000, 128, 2347-2355.

[11] Móricz, F. Tauberian conditions, under which statistical convergence follows from statistical summability (C, 1). Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2002, 275, 277–287.

[12] Móricz, F., Orhan, C. Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 2004, 41 , 391–403.

[13] Pringsheim, A. Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. Mathematishe Annalen. 1900,53, 289–321.

[14] Móricz, F. Tauberian theorems for Cesàro summable double sequences. Studia Mathematica 1994, 110(1), 83–96

[15] Chen, C.-P., Hsu J.-M. Tauberian theorems for weighted means of double sequences. Analysis Mathematica. 2000, 26, 243–262.

[16] Baron S. Tauberian Theorems for Power Series Methods Applied to Double Sequences. Journal Of Mathematical Analysis And Applications. 1997, 211, 574–589 .

[17] Mursaleen, M., Osama, H., Edely, H. Statistical convergence of double sequences. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003, 288, 223–231.

[18] Móricz, F. Statistical convergence of multiple sequences. Archiv der Mathematik. 2003, 81, 82–89.

[19] F. Móricz. Tauberian theorems for double sequences that are statistically summable (C, 1, 1), Journal of Mathematical Analysis and Applications 2003, 286, 340–350.

[20] Chen, C.-P., Chang, C.-T. Tauberian Theorems In The Statıstıcıal Sense For The Weighted Means Of Double Sequences Taıwanese Journal Of Mathmetics. 2007, 11(5), 1327–1342.

[21] Belen C., Mursalen M., M. Yıldırım. Statistical A-Summability Of Double Sequences And A Korovkin Type Approximation Theorem Bulletin of the Korean Mathematical Society 2012, 49(4), 851–861.

[22] Zadeh, L. A. Fuzzy sets. Information and Control. 1965, 8, 29–44.

[23] Çanak, İ. On the Riesz mean of sequences of fuzzy real numbers. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2014, 26(6), 2685–2688.

[24] Çanak, İ. Tauberian theorems for Cesàro summability of sequences of fuzzy number. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2014, 27(2), 937–942.

[25] Önder, Z., Sezer, S. A., Çanak, İ. A Tauberian theorem for the weighted mean method of summability of sequences of fuzzy numbers. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2015, 28, 1403–1409.

[26] Sezer, S. A., Çanak, İ. Power series methods of summability for series of fuzzy numbers and related Tauberian Theorems. Soft Computing. 2017, 21 (4), 1057–1064.

[27] Subrahmanyam, P.V. Cesàro summability of fuzzy real numbers. Journal of Analysis. 1999, 7, 159–168.

[28] Talo, Ö., Çakan, C. On the Cesàro convergence of sequences of fuzzy numbers. Applied Mathematics Letters. 2012, 25(4), 676–681.

[29] Talo, Ö., Başar F. On the Slowly Decreasing Sequences of Fuzzy Numbers. Abstract and Applied Analysis. 2013, Article ID 891986 doi:10.1155/2013/891986 , 1–7.

[30] Tripathy, B. C., Baruah, A. Nörlund and Riesz mean of sequences of fuzzy real numbers. Applied Mathematics Letters. 2010, 23, 651–655.

[31] Yavuz, E., Talo, Ö. Abel summability of sequences of fuzzy numbers. Soft Computing. 2016, 20(3), 1041–1046.

[32] Yavuz, E., Çoşkun, H. On the Borel summability method of sequences of fuzzy numbers. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2016, 30(4), 2111–2117.

[33] Savaş, E., Mursaleen, M. On statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. Information Sciences. 2004, 162, 183–192.

[34] Talo, Ö., Bayazit, F. Tauberian theorems for statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2017, 32(3), 2617–2624.

[35] Yapalı, R., Talo, Ö. Tauberian conditions for double sequences which are statistically summable (C,1,1) in fuzzy number space. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2017, 33, 947–956.

[36] Önder, Z., Çanak, İ., Totur, Ü. Tauberian theorems for statistically (C,1,1) summable double sequences of fuzzy numbers. Open Mathematics. 2017, 15, 157–178.

[37] Patterson, R.F. Double sequences core theorems. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1999, 22, 785–793.

[38] Robison G. M. Divergent double sequences and series, Transactions of the American Mathematical Society. 1926, 28, 50–73.

[39] Volkov V. I. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables, Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.). 1957, 115, 17–19.

[40] Goetschel, R., Voxman, W. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems. 1986, 18, 31–43.

[41] Bede, B. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, 65–170 s.

[42] Savaş, E. A note on double sequences of fuzzy numbers. Turkish Journal Of Mathematics. 1996, 20, 175–178.

[43] Çanak İ., Totur Ü., Önder Z. A Tauberian Theorem For (C; 1; 1) Summable Double Sequences Of Fuzzy Numbers. Iranian Journal of Fuzzy Systems. 2017, 14(1), 61–75.

[44] Aytar, S., Mammadov, M., Pehlivan, S. Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems. 2006, 157(7), 976–985.

[45] Demirci, K., Karakuş, S. Four-Dimensional Matrix Transformation and A-Statistical Fuzzy Korovkin Type Approximation. Demonstratio Mathematica. 2013, Vol. XLVI, No 1, 37–49

[46] Totur Ü., Çanak İ. Tauberian Theorems For $(N; P; Q)$ Summable Double Sequences Of Fuzzy Numbers. Under comminication.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Aslıhan Ünal
Doğum Yeri ve Yılı	:	İzmir, 1993
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	aslihanunal987@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Şehit Erkan Özcan Lisesi, 2011
Lisans	:	Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015
Yüksek Lisans	:	Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018