BAZI PARABOLİK TİP DENKLEMLER İÇİN
CARLEMAN KESTİRİMLERİ VE UYGULAMALARI

Sezin YILMAZ

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran 2012

KABUL:

Sezin YILMAZ tarafından hazırlanan "BAZI PARABOLİK TİP DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN KESTİRİMLERİ VE UYGULAMALARI" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 19/06/2012

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU (BEÜ) ....

Üye : Doç. Dr. Hakan Kasım AKMAZ (ÇKÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL (BEÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2012

Prof. Dr. Özden ÖZEL GÜVEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Sezin YILMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI PARABOLİK TİP DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN KESTİRİMLERİ VE UYGULAMALARI

Sezin YILMAZ

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Haziran 2012, 61 sayfa

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gerekli bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde basit ısı denklemi için Carleman kestirimi, parabolik denklemler için Carleman kestiriminin direkt elde edilişi ve global Carleman kestirimi incelenmiştir. Üçüncü bölümde Carleman kestirimlerinin parabolik denklemlere uygulanması kapsamında, Cauchy probleminin şartlı kararlılığı ve bir ters katsayı probleminin lokal Hölder kararlılığı araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Carleman kestirimi, Parabolik denklemler, Cauchy problemi, Ters katsayı problemi, Kararlılık

Bilim Kodu: 403.06.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CARLEMAN ESTIMATES FOR SOME PARABOLIC TYPE EQUATIONS AND APPLICATIONS

Sezin YILMAZ

Bülent Ecevit University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU
June 2012, 61 pages

This thesis consists of three sections. The first section is devoted to some essential definitions and theorems. In the second section a Carleman estimate for a simple heat equation, direct derivation of a Carleman estimate for a parabolic equation and a global Carleman estimate are introduced. Finally, in the third section conditional stability for the Cauchy problem and local Hölder stability for an inverse coefficient problem are investigated as applications of Carleman estimates for parabolic equations.

Key Words: Carleman estimate, Parabolic equations, Cauchy problem, Inverse coefficient problem, Stability

Science Code: 403.06.01

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, görüş ve önerileriyle yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU'na (BEÜ) çok teşekkür ederim.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme ve sevgili arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A^*	:	A operatörünün Lagrange anlamında eşleniği
$\mathbb{C}^n$	:	n-boyutlu komleks uzay
$C^k(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
D^α	:	Türev için multiindeks gösterimi
$\partial\Omega$	:	Ω bölgesinin sınırı
$\nabla\varphi(x)$	:	$\varphi(x)$ fonksiyonunun gradienti; $\nabla\varphi(x)=(\varphi_{x_1},\varphi_{x_2},...,\varphi_{x_n})$
$H^k(\Omega)$	:	Kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$L^1(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülü integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^\infty(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülünün esaslı supremumu sonlu fonksiyonlar uzayı
n	:	Dış normal vektörü
$\bar{\Omega}$	:	Ω bölgesinin kapanışı
χ	:	Kesme (cut-off) fonksiyonu
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Euclid uzayı
$supp\varphi(x)$	:	φ fonksiyonunun supportu; $supp\varphi(x)=\overline{\{x \mid x\in\Omega, \varphi(x)\neq 0\}}$

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Carleman kestirimleri bir eliptik denklem için Cauchy probleminin çözümünün tekliğini ispatlamak amacıyla Carleman (1939) tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonra Carleman kestirimi ve uygulamalarına büyük bir ilgi gösterilmiş ve bu alanda önemli çalışmalar yapılmıştır (Egorov 1986, Hörmander 1963, 1985, Isakov 1990, 1993, 1998, 2006, Tataru 1996, Taylor 1981, Treves 1970).

Kısmi türevli diferensiyel denklem için bir ters problem verildiğinde çözümün tekliğinin araştırılması, kararlılık kestiriminin yapılması ve yaklaşık çözümün elde edilmesi önemli üç meseledir. Ters problemler teorisinde Carleman kestirimleri, ilk olarak çok boyutlu ters problemler için global teklik sonuçlarının ispatlanması amacıyla kullanılmış ve bu problemler için Hölder kestirimlerinin ispatlarında da uygulanabilirliği görülmüştür (Bukhgeim and Klibanov 1981, Klibanov 2000). Ayrıca kötü konulmuş Cauchy problemleri ve ters problemler için Lipschitz kararlılığının ispatlanmasında ve uygulama açısından önemli olan, yaklaşık çözüm yöntemlerinin ortaya konulmasında da Carleman kestirimlerinden yararlanılmaktadır (Klibanov and Timonov 2004).

1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ

Bir ters problem, kötü konulmuş olmasına rağmen, eğer çözümlerin bir sınıfı önsel (apriori) sınırlı bir küme ile sınırlandırılabilirse, kararlılık analizinin yapılabilmesini sağlayan koşullu kararlılık kestirimlerinin ispat edilebilmesi mümkün olur. Uygulamada, bu tür bir önsel sınırlı küme fiziksel olarak kabul edilebilir bir kısıtlanış kümesi olarak yorumlanabilir. Koşullu kararlılık sadece teorik olarak değil aynı zamanda kararlı nümerik yöntemler için de önemlidir. Koşullu kararlılığı ispatlamak için birçok metot vardır ve Carleman kestirimi bu metotlardan biridir.

Ters problem ve kontrol teori alanlarında, Carleman kestirimleri çeşitli şekillerde uygulanmakta olup bu çalışmanın amaçları

1. Carleman kestirimlerinin elde ediliş yöntemini,

2. Bir Carleman kestiriminin, çözümler için kestirim yapma problemlerinde ve katsayının veya kaynak teriminin belirlenmesi ters problemlerinde uygulama yöntemlerini araştırmaktır.

Carleman kestirimi teorisinin incelenmesi ve kısmi diferensiyel denklemler için ters problemlere uygulanması önemli ve genel bir konu olmakla beraber, bu çalışmada parabolik tip denklemler için Carleman kestirimleri ve uygulamaları, Yamamoto'nun (2009) çalışmasından yararlanılarak ele alınacaktır.

Bölüm 2'de, bir Carleman kestiriminin ispatlanması için direkt metot verilmiştir. Bu tür bir direkt elde ediliş diğer tip kısmi diferensiyel denklemler için Carleman kestirimi elde edilmesinde de yol gösterici olabilir (Yamamoto 2009). Bölüm 3'te bir parabolik denklem için Cauchy probleminin şartlı kararlılığı ve bir ters katsayı probleminin lokal Hölder kararlılığı araştırılmıştır.

1.2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda, bu çalışmada gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1 *(Kuvvetli Yakınsaklık) $\mathcal{F}$ bir normlu lineer uzay ve (f_m), $\mathcal{F}$ nin elemanlarından oluşan bir dizi olmak üzere, $m \to \infty$ iken $\|f_m - f\| \to 0$ oluyor ise (f_m) dizisi $f \in \mathcal{F}$ elemanına kuvvetli (norma göre) yakınsaktır denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.2.2 *(Tam Uzay) $\mathcal{F}$ bir normlu lineer uzay olmak üzere $\mathcal{F}$ nin elemanlarından oluşan her bir temel dizi $\mathcal{F}$ nin bir elemanına yakınsıyor ise $\mathcal{F}$ ye tam uzay denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.2.3 *(Banach Uzayı) Tam normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.2.4 *(Her Yerde Yoğunluk) $M \subset \mathcal{F}$ olmak üzere, her bir $f \in \mathcal{F}$ için, M nin elemanlarından oluşan bir (f_m) dizisi f ye yakınsayacak şekilde varsa, M kümesine $\mathcal{F}$ de her yerde yoğundur denir (Mikhailov 1978, s. 66).*

Teorem 1.2.1 *(Bunyakovskii (Cauchy-Schwarz) Eşitsizliği) Her* $h_1, h_2 \in H$ *için*

$$|(h_1, h_2)|^2 \leq (h_1, h_1) \,.\, (h_2, h_2)$$

eşitsizliği sağlanır (Mikhailov 1978, s. 66).

Tanım 1.2.5 *(Hilbert Uzayı) Üzerindeki iç çarpım ile tanımlanan* $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$ *normuna göre tam olan bir lineer uzaya Hilbert uzayı denir (Mikhailov 1978, s. 66).*

Tanım 1.2.6 *(Zayıf Yakınsaklık)* H *bir Hilbert uzayı ve* (h_m), H *nın elemanlarından oluşan bir dizi olmak üzere, her* $f \in H$ *için* $m \to \infty$ *iken* $(h_m, f) \to (h, f)$ *oluyor ise* (h_m) *dizisi* $h \in H$ *elemanına zayıf yakınsaktır denir (Mikhailov 1978, s. 67).*

Tanım 1.2.7 *(Ortonormal Sistem)* $h_1, h_2, ..., h_m, ... \in H$ *olmak üzere,* $\|h_i\| = 1$, $i = 1, 2, ..., m, ...$ *ve* $(h_i, h_j) = 0 \quad i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., m, ...$ *ise* $\{h_1, h_2, ..., h_m, ...\}$ *sistemine ortonormaldir denir (Mikhailov 1978, s. 68).*

Tanım 1.2.8 *(Tam Sistem)* $h_1, h_2, ..., h_m, ... \in H$ *olmak üzere,* $(f, h_i) = 0$, $i = 1, 2, ..., m, ...$ *yalnızca* $f = 0$ *olması durumunda mümkün ise* $\{h_1, h_2, ..., h_m, ...\}$ *sistemine tamdır denir.*

Tanım 1.2.9 *(Lineer Operatör ve Lineer Fonksiyonel)* X *ve* Y *aynı cisim üzerinde tanımlı herhangi iki lineer uzay olsun.* X *in bir* D_A *lineer alt uzayından* Y *nin içine tanımlı* $A : f \to g = A(f) = Af$ *dönüşümü, her* $f_1, f_2 \in D_A$ *ve* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *için*

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$$

eşitliğini sağlıyor ise A *ya* $D_A \subset X$ *kümesinden* Y *nin içine bir lineer operatördür denir.* Y *lineer uzayının* $\mathbb{R}$ *ya da* $\mathbb{C}$ *olması durumunda* A *ya lineer fonksiyonel denir (Mikhailov 1972, s. 72).*

Tanım 1.2.10 *(Sınırlı Operatör)* X *ve* Y *herhangi iki normlu lineer uzay olsun.* A, X *in bir* D_A *lineer alt uzayından* Y *nin içine tanımlı bir operatör olmak üzere, her* $f \in D_A$ *için*

$$\|Af\| \leq Cf$$

olacak şekilde bir $C > 0$ *sayısı varsa* A *operatörüne sınırlıdır denir (Mikhailov 1978, s. 73).*

Tanım 1.2.11 *(Sürekli Operatör) X ve Y herhangi iki normlu lineer uzay ve A, X in bir D_A lineer alt uzayından Y nin içine tanımlı bir operatör olsun. A operatörü X in normuna göre bir $f \in D_A$ elemanına yakınsayan D_A nın elemanlarından oluşan bir (f_k) dizisini, Y nin normuna göre Af ye yakınsayan bir (Af_k) dizisine dönüştürüyorsa, A operatörüne süreklidir denir (Mikhailov 1978, s. 73).*

Tanım 1.2.12 *(Eşlenik Operatör) H bir Hilbert uzayı ve $A : H \to H$ şeklinde, H da her yerde yoğun bir D_A kümesi üzerinde tanımlı olsun. $D_{A^*} \subset H$ kümesi ise her bir $g \in D_{A^*}$ için, bir $h \in H$ elemanı, her $f \in D_A$ için $(Af, g) = (f, h)$ eşitliğini sağlayacak şekilde var olan bir küme olsun. D_{A^*} üzerinde tanımlı, her bir $g \in D_{A^*}$ elemanına bir $h = A^*g \in H$ elemanını her $f \in D_A$ için*

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

olacak şekilde eşleyen A^* operatörüne A operatörünün eşleniği denir. Eğer $A = A^*$ ise A operatörüne öz-eşleniktir denir (Mikhailov 1978, s. 76).

Tanım 1.2.13 *(Kompakt Küme) H bir Hilbert uzayı ve $M \subset H$ olsun. M nin elemanlarından oluşan her dizi H da temel dizi olan bir alt diziye sahipse M ye kompakttır denir (Mikhailov 1978, s. 79).*

Tanım 1.2.14 *(Kompakt Operatör) X ve Y herhangi iki normlu uzay olsun. Bir $A : X \to Y$ operatörü lineer ve her sınırlı $M \subset X$ kümesinin $A(M)$ görüntü kümesi relatif kompakt yani $\overline{A(M)}$ kapanış kümesi kompakt ise A ya kompakt operatör denir (Kreyszig 1989, s. 405).*

Tanım 1.2.15 *($C^k(\Omega)$ Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi üzerinde tanımlı ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip tüm fonksiyonların kümesi $C^k(\Omega)$ ile ifade edilir. $f \in C^k(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bir multiindeks ($\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, i = 1, 2, ..., n$) ve $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ olsun. Bu durumda*

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n} f(x)$$

f fonksiyonunun kısmi türevlerini ifade eder ve $D^k f(x) = \{ D^\alpha f(x) | \; |\alpha| = k\}$ kümesi f fonksiyonunun mertebesi k olan tüm kısmi türevlerin oluşturduğu kümedir (Evans 1997, s. 617).

Tanım 1.2.16 *($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) $C_0^\infty(\Omega)$, Ω üzerinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu ($supp\varphi(x) = \overline{\{x : x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$) Ω nın kompakt alt kümesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir (Mikhailov 1978, s. 10).*

Tanım 1.2.17 *(Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $\mathcal{D}(\Omega)$ ile gösterilir. Eğer*
(a) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt kümesi vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $supp\varphi_k \subset K$,
(b) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ve $k \to \infty$ iken $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$, yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise $k \to \infty$ için $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$ yakınsar denir.
$\mathcal{D}(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{D}'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1984, s. 81).

Tanım 1.2.18 *(Genelleşmiş Türev) $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^\alpha f$ (genelleşmiş) türevi,*

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1984, s. 94).

Tanım 1.2.19 *($C(\overline{\Omega})$, $C^k(\overline{\Omega})$ Uzayları) $C(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ üzerinde sürekli tüm fonksiyonların oluşturduğu küme, $C^k(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, ...$, $\overline{\Omega}$ üzerinde k. mertebeye kadar tüm türevleri sürekli olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümelere ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 101);*
(a) $C(\overline{\Omega})$ ve $C^k(\overline{\Omega})$ lineer uzaydır ve $C^k(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$,
(b) $C(\overline{\Omega})$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \underset{x \in \overline{\Omega}}{maks} |f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,
(c) $C^k(\overline{\Omega})$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \underset{x \in \overline{\Omega}}{maks} |D^\alpha f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,
(d) $C(\overline{\Omega})$ ayrılabilir uzaydır (rasyonel katsayılı tüm polinomların oluşturduğu sayılabilir bir küme $C(\overline{\Omega})$ da her yerde yoğundur).

Teorem 1.2.2 *(Ostrogradskii Formülü) $\partial\Omega \in C^1$ olmak üzere Ω üzerinde bir $A(x) = (A_1(x), A_2(x), ..., A_n(x))$ vektörü tanımlansın ve $A_i(x) \in C(\overline{\Omega}\ ) \cap C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., n$ olsun. Bu durumda*

$$\int_\Omega \operatorname{div} A(x)dx = \int_{\partial\Omega} A(x).\mathbf{n}(x)dS$$

olur, burada $\mathbf{n}$, $\partial\Omega$ nın dış normal vektörüdür (Mikhailov 1978, s. 103).

Teorem 1.2.3 *(Gauss-Green Formülü) $\partial\Omega \in C^1$ ve $f \in C^1(\overline{\Omega}\ )$ olsun. Bu durumda*

$$\int_\Omega f_{x_i}dx = \int_{\partial\Omega} fn_i dS$$

eşitliği sağlanır, burada $n_i = \cos(\mathbf{n}, x_i)$, $\partial\Omega$ yüzeyinin dış normali olan $\mathbf{n}$ ile x_i ekseni arasındaki açının kosinüsüdür (Evans 1997, s. 627).

Teorem 1.2.4 *(Green Formülleri) $\partial\Omega \in C^1$ ve $f, g \in C^2(\overline{\Omega}\ )$ olsun. Bu durumda $\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n})$, $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}$ ve $\mathbf{n}$, $\partial\Omega$ yüzeyinin dış normali olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Evans 1997, s. 628);*

(a) $\int_\Omega \Delta f dx = \int_{\partial\Omega} \nabla f.\mathbf{n}dS$,

(b) $\int_\Omega \nabla f.\nabla g dx = \int_{\partial\Omega} g\nabla f.\mathbf{n}dS - \int_\Omega g\Delta f dx$,

(c) $\int_\Omega g\Delta f dx - \int_\Omega f\Delta g dx = \int_{\partial\Omega} g\nabla f.\mathbf{n}dS - \int_{\partial\Omega} f\nabla g.\mathbf{n}dS$.

Tanım 1.2.20 *($L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ Uzayları) $L^1(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu küme, $L^2(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve (modülünün) karesi integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümelere ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 105);*

Tanım 1.2.21 *(a) $L^1(\Omega)$ ve $L^2(\Omega)$ lineer uzaydır ve Ω sınırlı bir bölge ise $C(\overline{\Omega}\ ) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$,*

(b) $L^1(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,

(c) $L^2(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f_1(x)\overline{f_2(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir,

(d) $C(\overline{\Omega}\ )$ *ve* $C_0^\infty(\overline{\Omega}\ )$ *uzayı,* $L^1(\Omega)$ *ve* $L^2(\Omega)$ *da her yerde yoğundur,*

(e) $L^1(\Omega)$ *ve* $L^2(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Tanım 1.2.22 *($H^k(\Omega)$ Uzayları)* $H^k(\Omega)$*, kendisi ve* k*. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri* $L^2(\Omega)$ *ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümeye ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 121);*

(a) $H^k(\Omega)$ *lineer uzaydır ve* $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$*,*

(b) $H^k(\Omega)$*, üzerinde tanımlanan*

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha f_1 D^\alpha \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir,

(c) $\partial\Omega \in C^k$ *ise* $C^\infty(\overline{\Omega}\ )$ *uzayı,* $H^k(\Omega)$ *da her yerde yoğundur,*

(d) $\partial\Omega \in C^k$ *ise* $H^k(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Tanım 1.2.23 *($\mathring{H}^k(\Omega)$ Uzayı)* $\mathring{H}^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega}\ )$ *uzayına ait ve* Ω *bölgesi ile* $\partial\Omega$ *yüzeyinin bir komşuluğunun arakesitinde sıfır olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümenin kapanışıdır (Mikhailov 1978, s. 131).*

Teorem 1.2.5 *(İz (Trace) Teoremi)* Ω *sınırlı bir bölge ve* $\partial\Omega \in C^1$ *olsun. Bu durumda sınırlı bir lineer*

$$T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar;

(a) Eğer $f \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}\ )$ *ise* $Tf = f|_{\partial\Omega}$*,*

(b) Her bir $f \in H^1(\Omega)$ *için* $\|Tf\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\,\|f\|_{H^1(\Omega)}$ *dır, burada* $C > 0$ *sayısı sadece* Ω *ya bağlı olup* f *den bağımsızdır.*

T operatörüne iz operatörü, Tf ye f fonksiyonunun $\partial\Omega$ üzerindeki izi denir ve $\|Tf\|_{L^2(\partial\Omega)}$, $\|f\|_{L^2(\partial\Omega)}$ ile ifade edilir (Evans 1997, s. 258).

Teorem 1.2.6 *Ω sınırlı bir bölge, $\partial\Omega \in C^1$ ve $f \in H^1(\Omega)$ olsun. Bu durumda $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $\partial\Omega$ üzerinde $Tf = 0$ olmasıdır (Mikhailov 1978, s. 142).*

Teorem 1.2.7 *($H^1(\Omega)$ da Kısmi İntegrasyon) $f, g \in H^1(\Omega)$ ve $\partial\Omega \in C^1$ olsun. Bu durumda*

$$\int_\Omega f_{x_i} g dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i dS - \int_\Omega f g_{x_i} dx, \quad (i = 1, 2, ...n)$$

kısmi integrasyon formülü sağlanır, burada $n_i = \cos(\mathbf{n}, x_i)$, $\partial\Omega$ yüzeyinin dış normali olan $\mathbf{n}$ ile x_i ekseni arasındaki açının kosinüsü ve yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında yer alan $\partial\Omega$ üzerinde alınan integral içindeki f ve g, $\partial\Omega$ üzerinde f ve g fonksiyonlarının izidir (Mikhailov 1978, s. 139).

Tanım 1.2.24 *(Hadamard Anlamında İyi Konulmuş Problemler) U ve F metrik uzaylar, $A : U \longrightarrow F$ operatör olmak üzere,*

$$Au = f \tag{1.1}$$

olsun. (1.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir;
1) Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır,
2) Çözüm U uzayında tektir,
3) Koşullar F uzayında az değiştiğinde çözüm de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986, s. 26).
Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) de zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

İyi konulmuş problem tanımı 20. yüzyılın başlarında Hadamard tarafından verilmiştir. Hadamard'a göre kötü konulmuş problemler yardımı ile, reel fiziksel anlamı olan pratik olaylar tanımlanamaz. Çünkü pratikte her zaman koşullar belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçlara neden olabilir. Bu nedenle bir çok matematikçi önceleri sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemlerle ilgilenmişlerdir. Ancak pratikteki bir çok problem Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlere dönüşerek matematikçilerin karşısına çıkmıştır ve Tikhonov, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerin gerekliliğini ortaya koymuştur (Tikhonov and Arsenin 1979).

Tanım 1.2.25 *(Tikhonov Anlamında İyi (Şartı iyi) Konulmuş Problemler) (1.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine şartı iyi (doğru) konulmuş problem veya Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem denir;*
1) Problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ kümesine aittir,
2) Problemin çözümü M de tektir,
3) Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M kümesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir (Lavrent'ev et al. 1986, s. 27). M kümesine problemin doğruluk kümesi denir ve M genellikle kompakt bir küme olarak seçilir.

Bölüm 2 ve 3'te kullanılan bazı gösterimler aşağıda ifade edilmiştir;
$\Omega \subset R^n$, $\partial\Omega$ sınırı düzgün olan sınırlı bir bölge ve $Q = \Omega \times (0,T)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ ve $t \geq 0$ sırasıyla uzaysal ve zamansal değişkenler, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ multiindeks ve $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x))$, x noktasında $\partial\Omega$ nın dış birim normal vektörü olmak üzere

$$\begin{aligned}
x' &= (x_2, ..., x_n) \in R^{n-1}, \xi' = (\xi_2, ..., \xi_n) \in R^{n-1}, \\
\partial_t &= \frac{\partial}{\partial t},\ \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \\
\nabla &= (\partial_1, ..., \partial_n), \quad \nabla_{x,t} = (\nabla, \partial_t), \quad \Delta = \partial_1^2 + ... + \partial_n^2, \\
\partial_x^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \\
\frac{\partial}{\partial\nu} &= \nu.\nabla
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca, $s \geq 0$ olmak üzere, $C^1(\overline{Q}\ )$, $H^s(\Omega)$, $H_0^s(\Omega)$ fonksiyon uzayları bilinen anlamda kullanılmakta olup (Adams 1975),

$H^{1,0}(Q) = \left\{u \in L^2(Q) : \nabla u \in L^2(Q)\right\}$

ve $m \in N$ için

$$H^{2m,m}(Q) = \left\{ u \in L^2(Q) : \partial_x^\alpha \partial_t^{\alpha_{n+1}} u \in L^2(Q), |\alpha| + 2\alpha_{n+1} \leq 2m \right\}.$$

Eğer özel olarak belirtilmemişse,

$$a_{ij} \in C^1(\overline{Q}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{1.2}$$

olduğu ve $\{a_{ij}\} = \{a_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ katsayılarının düzgün eliptiklik koşulunu sağladığı, yani

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \sigma_1 |\xi|^2, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (x,t) \in \overline{Q} \tag{1.3}$$

olacak şekilde bir $\sigma_1 > 0$ sabitinin var olduğu ve

$$b_k, c \in L^\infty(Q), \quad 1 \leq k \leq n$$

olduğu kabul edilecektir. Bu çalışmada ele alınacak parabolik operatör

$$\begin{aligned}(Lu)(x,t) = \partial_t u(x,t) &- \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u(x,t) \\ &- \sum_{k=1}^{n} b_k(x,t)\partial_k u(x,t) - c(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in Q \end{aligned} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlıdır.

BÖLÜM 2

CARLEMAN KESTİRİMLERİ

Carleman kestirimi, bir kısmi diferensiyel denklemin çözümü için büyük parametreli bir L^2-ağırlıklı kestirimdir. Carleman kestirimi için genel bir teorem ifadesi vermek yerine, ilk olarak basit bir ısı denklemi için Carleman kestiriminin elde edilişi verilecektir.

2.1 BASİT ISI DENKLEMİ İÇİN CARLEMAN KESTİRİMİ

$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0 \tag{2.1}$$

ısı denklemi verilsin. Amaç, (2.2) de belirtilen ve Carleman kestirimi olarak adlandırılan, bir $D \subset Q$ bölgesinde s büyük parametresi ile bir L^2-ağırlıklı kestirimi bulmaktır. Bunun için uygun bir $\varphi(x,t)$ fonksiyonu seçilir, öyle ki her $s > s_0$ ve her $u \in C_0^\infty(D)$ için

$$\int_D s(|\nabla u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2) e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \leq C \int_D |f(x,t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \tag{2.2}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $s_0 > 0$ sabitleri vardır. (2.2) Carleman kestirimi, her büyük $s > 0$ için (yani $s \geq s_0$: *sabit)* düzgün olarak sağlanır. Başka bir deyişle $C > 0$ sabiti, $s > s_0$ ve $u \in C_0^\infty(D)$ den bağımsız olmalıdır. Uygulamalarda, s parametresi önemli bir rol oynar ve geometrik açıdan $\varphi(x,t)$ ağırlık fonksiyonlarının nasıl seçildiği de önemlidir.

İlk önce (2.1) basit ısı denklemini düşünelim. Farz edelim ki daha önceden bir $\varphi(x,t)$ ağırlık fonksiyonu bulunmuş olsun. Ağırlıklı L^2-normlarını incelemek için;

$$\begin{aligned} w(x,t) &= e^{s\varphi(x,t)} u(x,t), \\ Pw(x,t) &= e^{s\varphi}(\partial_t - \Delta)(e^{-s\varphi} w) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
Pw &= e^{s\varphi}(\partial_t - \Delta)(e^{-s\varphi}w) \\
&= e^{s\varphi}\left(\partial_t\left(e^{-s\varphi}w\right) - \nabla(\nabla\left(e^{-s\varphi}w\right))\right) \\
&= e^{s\varphi}[e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_t w + w_t\right) - \nabla(e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_1}w + w_{x_1}) + ... + e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_n}w + w_{x_n}))] \\
&= e^{s\varphi}e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_t w + w_t\right) - e^{s\varphi}[(-s\varphi_{x_1}e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_1}w + w_{x_1}) \\
&\quad + e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_{x_1x_1}w - s\varphi_{x_1}w_{x_1} + w_{x_1x_1}\right)) + ... + (-s\varphi_{x_n}e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_n}w + w_{x_n}) \\
&\quad + e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_{x_nx_n}w - s\varphi_{x_n}w_{x_n} + w_{x_nx_n}\right))] \\
&= e^{s\varphi}e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_t w + w_t\right) - e^{s\varphi}e^{-s\varphi}(s^2\varphi_{x_1}^2 w - s\varphi_{x_1}w_{x_1} - s\varphi_{x_1x_1}w - s\varphi_{x_1}w_{x_1} + w_{x_1x_1}) \\
&\quad - ... - e^{s\varphi}e^{-s\varphi}(s^2\varphi_{x_n}^2 w - s\varphi_{x_n}w_{x_n} - s\varphi_{x_nx_n}w - s\varphi_{x_n}w_{x_n} + w_{x_nx_n}) \\
&= -s\varphi_t w + w_t - s^2\varphi_{x_1}^2 w + 2s\varphi_{x_1}w_{x_1} + s\varphi_{x_1x_1}w - w_{x_1x_1} \\
&\quad - ... - s^2\varphi_{x_n}^2 w + 2s\varphi_{x_n}w_{x_n} + s\varphi_{x_nx_n}w - w_{x_nx_n} \\
&= w_t - (w_{x_1x_1} + ... + w_{x_nx_n}) + 2s(\varphi_{x_1}w_{x_1} + ... + \varphi_{x_n}w_{x_n}) \\
&\quad + w\left[-s\varphi_t w - s^2\left(\varphi_{x_1}^2 + ...\varphi_{x_n}^2\right) + s(\varphi_{x_1x_1} + ... + \varphi_{x_nx_n})\right]
\end{aligned}
$$

olur ve

$$
Pw = \partial_t w - \Delta w + 2s\nabla\varphi.\nabla w + (-s\partial_t\varphi - s^2|\nabla\varphi|^2 + s\Delta\varphi)w
$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= u_t(x,t) - \Delta u(x,t) \\
&= -s\varphi_t e^{-s\varphi}w + e^{-s\varphi}w_t - \nabla(e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_1}w + w_{x_1}) + ... + e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_n}w + w_{x_n})) \\
&= -s\varphi_t e^{-s\varphi}w + e^{-s\varphi}w_t - (-s\varphi_{x_1}e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_1}w + w_{x_1}) \\
&\quad + e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_{x_1x_1}w - s\varphi_{x_1}w_{x_1} + w_{x_1x_1}\right)) + ... + (-s\varphi_{x_n}e^{-s\varphi}(-s\varphi_{x_n}w + w_{x_n}) \\
&\quad + e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_{x_nx_n}w - s\varphi_{x_n}w_{x_n} + w_{x_nx_n}\right)) \\
&= e^{-s\varphi}\left(-s\varphi_t w + w_t\right) - e^{-s\varphi}(s^2\varphi_{x_1}^2 w - s\varphi_{x_1}w_{x_1} - s\varphi_{x_1x_1}w - s\varphi_{x_1}w_{x_1} + w_{x_1x_1}) \\
&\quad - ... - e^{-s\varphi}(s^2\varphi_{x_n}^2 w - s\varphi_{x_n}w_{x_n} - s\varphi_{x_nx_n}w - s\varphi_{x_n}w_{x_n} + w_{x_nx_n}) \\
&= e^{-s\varphi}[-s\varphi_t w + w_t + (-s^2\varphi_{x_1}^2 w + s\varphi_{x_1}w_{x_1} \\
&\quad + s\varphi_{x_1x_1}w + s\varphi_{x_1}w_{x_1} - w_{x_1x_1}) + ... + (-s^2\varphi_{x_n}^2 w + s\varphi_{x_n}w_{x_n} \\
&\quad + s\varphi_{x_nx_n}w + s\varphi_{x_n}w_{x_n} - w_{x_nx_n})] \\
&= e^{-s\varphi}(\partial_t w - \Delta w + 2s\nabla\varphi.\nabla w + (-s\partial_t\varphi - s^2|\nabla\varphi|^2 + s\Delta\varphi)w)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
f(x,t) = e^{-s\varphi}Pw(x,t)
$$

eşitliği elde edilir. Buna göre

$$f^2e^{2s\varphi} = |Pw(x,t)|^2$$

olup (2.2) nin sağ tarafı

$$\int\limits_D f^2e^{2s\varphi}dxdt = \int\limits_D |Pw(x,t)|^2\ dxdt$$

olarak yazılabilir. Amaç, $\| Pw \|^2_{L^2(D)}$nin bir zayıf kestirimini elde etmektir.

$u \in C_0^\infty(D)$ olduğu kabul edilmesi durumunda, istenilen şekilde kısmi integrasyon uygulanabilir. $\| Pw \|^2_{L^2(D)}$için zayıf kestirim elde etmek için genel yol, P operatörünü, simetrik parçası P_+ ve antisimetrik parçası P_- olmak üzere $Pw = P_+w + P_-w$ biçiminde ayırmaktır. Bu yöntem, örneğin 1-boyutlu Schrödinger denklemi için kullanılmıştır (Bukhgeim and Klibanov 1981).

P nin (formal) eşlenik operatörü, P^* ı düşünelim:

$$(Pw,v)_{L^2(D)} = (w,P^*v)_{L^2(D)}, \quad v,w \in C_0^\infty(D).$$

$v,w \in C_0^\infty(D)$ olmak üzere, kısmi integrasyon ve Green teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\partial_t w,v)_{L^2(D)} &= -(w,\partial_t v)_{L^2(D)},\\ (-\Delta w,v)_{L^2(D)} &= (w,-\Delta v)_{L^2(D)}\end{aligned}$$

ve

$$(2s\nabla\varphi.\nabla w,v)_{L^2(D)} = (w,-2s(\nabla\varphi.\nabla + \Delta\varphi)v)_{L^2(D)}$$

olur. Buradan

$$P^*w = -\partial_t w - \Delta w - 2s\nabla\varphi.\nabla w - (s\Delta\varphi + s^2|\nabla\varphi|^2 + s(\partial_t\varphi))w$$

olduğu görülür.

P nin simetrik parçası P_+ ve antisimetrik parçası P_-

$$\begin{aligned}P_+ &= \frac{1}{2}(P+P^*),\\ P_- &= \frac{1}{2}(P-P^*)\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Buna göre

$$P_+w = -\Delta w - (s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w$$

ve

$$P_-w = \partial_t w + 2s\nabla\varphi.\nabla w + s(\Delta\varphi)w$$

olmak üzere

$$Pw = P_+w + P_-w$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_D f^2 e^{2s\varphi}dxdt &= \| P_+w + P_-w \|^2_{L^2(D)} \\ &= \| P_+w \|^2_{L^2(D)} + \| P_-w \|^2_{L^2(D)} + 2(P_+w, P_-w)_{L^2(D)} \\ &\geqslant 2(P_+w, P_-w)_{L^2(D)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

yazılabilir, yani (2.2) nin sağ tarafı için $2(P_+w, P_-w)_{L^2(D)}$ ile bir alt kestirim yapılabilir. Burada $\| P_+w \|^2_{L^2(D)}$ ve $\| P_-w \|^2_{L^2(D)}$ terimleri önemsenmemiştir. Ayrıca Pw nin bu parçalanışı dışında daha iyi farklı parçalanışları da var olabilir (Bölüm 2.2'de genel parabolik denklem için farklı bir parçalanış kullanılmıştır).

$$\begin{aligned}2(P_+w, P_-w)_{L^2(D)} &= 2(-\Delta w - (s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w, \partial_t w + 2s\nabla\varphi.\nabla w + s(\Delta\varphi)w)_{L^2(D)} \\ &= 2(-\Delta w, \partial_t w)_{L^2(D)} + 2(-\Delta w, 2s\nabla\varphi.\nabla w)_{L^2(D)} + \\ &\quad 2(-\Delta w, s(\Delta\varphi)w)_{L^2(D)} - 2((s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w, \partial_t w)_{L^2(D)} \\ &\quad -2((s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w, 2s\nabla\varphi.\nabla w)_{L^2(D)} \\ &\quad -2((s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w, s(\Delta\varphi)w)_{L^2(D)}\end{aligned}$$

$w \in C_0^\infty(D)$ olduğundan, kısmi integrasyon kullanılarak w nin türevlerinin mertebesi düşürülebilir. Bundan sonraki kısımda, $C > 0$, s den bağımsız genel bir sabit olarak kullanılacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned}2(-\Delta w, \partial_t w)_{L^2(D)} &= -2\int_D \Delta w \partial_t w dxdt \\ &= 2\int_D \nabla w \nabla \frac{\partial}{\partial_t} w dxdt \\ &= \int_D \frac{\partial}{\partial_t}\left(|\nabla w|^2\right) dxdt \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. $2(\partial_k w)(\partial_k \partial_j w) = \partial_j(|\partial_k w|^2)$ olduğu dikkate alınır ve kısmi integrasyon kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2(-\Delta w, 2s\nabla\varphi.\nabla w)_{L^2(D)} &= 2\sum_{j,k=1}^{n}(-\partial_k^2 w, 2s(\partial_j w)\partial_j\varphi)_{L^2(D)} \\
&= 2\sum_{j,k=1}^{n}(\partial_k w, 2s(\partial_k\partial_j w)(\partial_j\varphi)_{L^2(D)} \\
&\quad +(\partial_k w, 2s(\partial_j w)(\partial_k\partial_j\varphi)_{L^2(D)} \\
&= -2s\sum_{j,k=1}^{n}\int_D(\partial_j^2\varphi)|\partial_k w|^2 dxdt \\
&\quad +4s\sum_{j,k=1}^{n}\int_D(\partial_j w)(\partial_k w)(\partial_j\partial_k\varphi)dxdt
\end{aligned}$$

olup, Green formülünden

$$\begin{aligned}
2(-\Delta w, s(\Delta\varphi)w)_{L^2(D)} &= 2s\int_D \nabla w.\nabla((\Delta\varphi)w)dxdt \\
&= 2s\int_D \Delta\varphi|\nabla w|^2 dxdt + 2s\int_D \nabla(\Delta\varphi).w\nabla w dxdt
\end{aligned}$$

ve

$$\left|s\int_D \nabla(\Delta\varphi).w\nabla w dxdt\right| \leq Cs\int_D |w||\nabla w|dxdt$$

olur. Böylece

$$2(-\Delta w, s(\Delta\varphi)w)_{L^2(D)} \geq 2s\int_D \Delta\varphi|\nabla w|^2 dxdt - Cs\int_D |w||\nabla w|dxdt$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
-2((s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w, \partial_t w)_{L^2(D)} &= -2\int_D (s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w\partial_t w dxdt \\
&= -2\int_D s^2|\nabla\varphi|^2 w\partial_t w dxdt - 2\int_D s\partial_t\varphi w\partial_t w dxdt \\
&\geq -2\int_D s^2|\nabla\varphi|^2 w\partial_t w dxdt - Cs^2\int_D w^2 dxdt,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-2((s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi)w, 2s\nabla\varphi.\nabla w)_{L^2(D)} &= -4s\sum_{i=1}^{n}\int\limits_D \left\{(s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi)w\right\}(\partial_i\varphi)(\partial_i w)dxdt \\
&= -2s\sum_{i=1}^{n}\int\limits_D (s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi)(\partial_i\varphi)\partial_i(w^2)dxdt \\
&= 2s\sum_{i=1}^{n}\int\limits_D \partial_i((s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi)\partial_i\varphi)w^2dxdt \\
&= 2s\int\limits_D \left\{\nabla(s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi).\nabla\varphi\right. \\
&\quad \left. +(s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi)\Delta\varphi\right\} w^2dxdt
\end{aligned}
$$

ve

$$
-2((s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi)w, s(\Delta\varphi)w)_{L^2(D)} = -2s\int\limits_D (s^2|\nabla\varphi|^2+s\partial_t\varphi)(\Delta\varphi)w^2dxdt
$$

elde edilir. Bu nedenle, s^3 ve s sırasıyla w^2 nin ve $|\nabla w|^2$ nin terimlerine göre en büyük mertebeler olduğu dikkate alınarak, daha düşük mertebeli terimler için kestirim yapılırsa

$$
\begin{aligned}
(P_+w, P_-w)_{L^2(D)} &\geq s^3\int\limits_D \left\{\nabla(|\nabla\varphi|^2).\nabla\varphi\right\} w^2dxdt + 2s\sum_{j,k=1}^{n}\int\limits_D (\partial_j w)(\partial_k w)(\partial_j\partial_k\varphi)dxdt \\
&\quad -C\int\limits_D s^2w^2dxdt - Cs\int\limits_D |w||\nabla w|dxdt \\
&\geq s^3\int\limits_D \left\{\nabla(|\nabla\varphi|^2).\nabla\varphi\right\} w^2dxdt + 2s\sum_{j,k=1}^{n}\int\limits_D (\partial_j w)(\partial_k w)(\partial_j\partial_k\varphi)dxdt \\
&\quad -C\int\limits_D (|\nabla w|^2+s^2w^2)dxdt
\end{aligned}
$$

olur. Son eşitsizlikte

$$
s|\nabla w||w| \leq \frac{1}{2}s^2|w|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2
$$

kullanılmıştır. Bundan dolayı, sadece yeteri kadar büyük $s > 0$ dikkate alındığından, s nin $|w|^2$ ve $|\nabla w|^2$ terimleri için maksimum kuvvetleri dikkate alındığında, daha düşük kuvvetten terimleri yüksek kuvvetten olanlara dahil edilebilir. Bu durumda eğer φ için

$$
\{\partial_i\partial_j\varphi\}_{1\leq i,j\leq n} \qquad \text{pozitif tanımlı} \tag{2.4}
$$

ve

$$
\overline{D} \text{ de bir } r_1 > 0 \text{ sabiti vardır öyle ki } \nabla(|\nabla\varphi|^2).\nabla\varphi \geq r_1 \tag{2.5}
$$

şartları sağlanıyorsa, her $s \geq s_0$ ve her $w \in C_0^\infty(D)$ için

$$\int_D (s|\nabla w|^2 + s^3|w|^2)dxdt \leq C \int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $s_0 > 0$ sabitleri vardır. $w = e^{s\varphi}u$ olduğundan, bu eşitsizlik u için yeniden yazılabilir ve her $s \geq s_0$ ve her $u \in C_0^\infty(D)$ için,

$$\int_D (s|\nabla u|^2 + s^3|u|^2)e^{2s\varphi} dxdt \leq C \int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt \tag{2.6}$$

elde edilir.

Sonraki önemli adım φ ağırlık fonksiyonunun seçimidir. Ağırlık fonksiyonunun sadece (2.4) ve (2.5) şartlarını değil, aynı zamanda direkt ve ters problemler için anlamlı uygulamalara yönelik bazı geometrik şartları da sağlaması gerekir. Bir Carleman kestirimi uygulanırken, D bölgesi genellikle $\delta > 0$ olmak üzere $\{(x,t) : \varphi(x,t) > \delta\}$ ile tanımlanan bir seviye kümesi olarak alınır ve böyle bir seviye kümesinin en azından sınırlı olması gerekir.

(2.6) Carleman kestiriminde φ için fazla seçim yolu yoktur. Örneğin,

$$\varphi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta(t - t_0)^2 \tag{2.7}$$

bir tipik seçimdir. Burada $t_0 \in (0,T)$ ve $\beta > 0$ keyfi olarak sabitlenmiş ve her $(x,t) \in \overline{D}$ için $|x - x_0| \neq 0$ olduğu kabul edilir. Bu durumda, $\overline{D}$ de $\nabla(|\nabla\varphi|^2).\nabla\varphi = 16|x - x_0|^2 > 0$ ve

$$E_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\{\partial_i\partial_j\varphi\}_{1\leq i,j\leq n} = 2E_n$ olur. Yani, (2.4) ve (2.5) şartları sağlanır.

Eğer (2.6) Carleman kestirimi, Bölüm 3.1'de ifade edilen Teorem 3.1.2'de uygulanmak istenirse, (2.7) deki seçime bağlı olarak bazı ekstra geometrik koşulların kabul edilmesi gerekir. Örneğin, Γ civarında Ω nın konveks olması gerekir. Bir sonraki bölümde daha uygulanabilir olan ve daha kuvvetli sonuçların elde edilebilmesini sağlayan Carleman kestirimleri elde edilecektir.

2.2 PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN KESTİRİMİNİN DİREKT ELDE EDİLİŞİ

$D \subset Q$, ∂D sınırı sonlu sayıda düzgün yüzeyden meydana gelen sınırlı bir bölge olsun. Çeşitli denklemler için Carleman kestirimini elde etmeye yönelik birçok çalışma vardır ve bunlardan bazı önemli olanları aşağıda iki grup halinde verilmiştir;

1. Genel yol (Eller and Isakov 2000, Isakov 1986, 1993, 2004a, b, Tataru 1996);

2. Direkt yol (Chae et al. 1996, Fursikov and Imanuvilov 1996, Imanuvilov 1995, Lavrent'ev et al. 1986, Yuan and Yamamoto 2009).

Hiperbolik denklemler için de Carleman kestirimlerinin direkt elde edilişine yönelik önemli sonuçlar ortaya konulmuştur (Klibanov and Timonov 2004, Lavrent'ev et al. 1986). Bu çalışmada ise sadece parabolik denklemler için Carleman kestiriminin elde edilişi araştırılmaktadır. Bu kısımda daha kullanışlı olmasından dolayı direkt metot açıklanacaktır. Carleman kestirimi için direkt metot uygulanırken önemli nokta, kısmi integrasyonun uygulanışı ve kestirimde yer alan s parametresinin derecesine göre terimlerin uygun olarak gruplandırılmasıdır.

Aşağıdaki iki tip parabolik denklemden biri için Carleman kestirimini kanıtlamak yeterli olacaktır;

$$\rho(x,t)\partial_t u(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\tilde{a}_{ij}(x,t)\partial_j u(x,t))$$
$$-\sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(x,t)\partial_k u(x,t) - \tilde{c}(x,t)u(x,t) = \tilde{f}(x,t)$$

ve

$$\partial_t u(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u(x,t)$$
$$-\sum_{k=1}^{n} b_k(x,t)\partial_k u(x,t) - c(x,t)u(x,t) = f(x,t).$$

Burada $\overline{D}$ üzerinde $\rho > 0$ olmak üzere $\rho \in C^1(\overline{D}\ )$,$b_k, \tilde{b}_k, c, \tilde{c} \in L^\infty(D)$ ve

$$\begin{cases} \tilde{a}_{ij} \in C^1(\overline{D}), \qquad \tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji}, \quad 1 \le i,j \le n, \\ \quad \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (x,t) \in \overline{D},\ \xi_1,...,\xi_n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

olduğunu kabul edelim. Gerçekten

$$\rho(x,t)\partial_t u(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\tilde{a}_{ij}(x,t)\partial_j u(x,t)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(x,t)\partial_k u(x,t) - \tilde{c}(x,t)u(x,t) = \tilde{f}(x,t)$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\partial_t u(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ij}}{\rho}\partial_i\partial_j u - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\rho}\left(\tilde{b}_k + \sum_{i=1}^{n}\partial_i\tilde{a}_{ij}\right)\partial_k u - \frac{\tilde{c}}{\rho}u = \frac{\tilde{f}}{\rho}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Q bölgesinde

$$Lu(x,t) = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u(x,t) - \sum_{k=1}^{n} b_k(x,t)\partial_k u(x,t) - c(x,t)u(x,t)$$

ve

$$L_0 u(x,t) = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u(x,t)$$

olsun. Burada a_{ij}, $1 \le i,j \le n$ katsayılarının (1.2) ve (1.3) şartlarını sağladığını ve $b_k, c \in L^\infty(Q)$, $1 \le k \le n$ olduğunu kabul ediyoruz.

$$Lu = f$$

parabolik denklemini ele alalım. Amaç, her büyük $s > 0$ ve $\lambda > 0$ ve supp$u \subset D$ olan her $u \in H^{2,1}(Q)$ için

$$\int_D \left\{ \frac{1}{s\varphi}\left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n}|\partial_i\partial_j u|^2\right) + s\lambda^2\varphi|\nabla u|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3 u^2 \right\} e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_D |Lu|^2 e^{2s\varphi}dxdt$$

Carleman kestirimini oluşturmaktır.

Q da

$$|L_0 u|^2 = |Lu + \sum_{k=1}^{n} b_k\partial_k u + cu|^2 \le 2|Lu|^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\partial_k u + cu\right|^2$$

eşitsizliği sağlanır ve bu durumda

$$\begin{aligned}\int_D |L_0 u|^2 e^{2s\varphi}dxdt &\le \int_D \left(2|Lu|^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\partial_k u + cu\right|^2\right) e^{2s\varphi}dxdt \\ &\le 2\int_D |Lu|^2 e^{2s\varphi}dxdt + 4\int_D \left(\sum_{k=1}^{n}\|b_k\|^2_{L^\infty(D)}|\nabla u|^2 + \|c\|^2_{L^\infty(D)}|u|^2\right) e^{2s\varphi}dxdt\end{aligned}$$

olup, kestirimi L_0 için ispat etmek yeterlidir. Böylece L_0 için Carleman kestiriminden

$$\begin{aligned}
&\int\limits_D \left\{ \frac{1}{s\varphi} \left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_i \partial_j u|^2 \right) + s\lambda^2 \varphi |\nabla u|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 \right\} e^{2s\varphi} dxdt \\
\leq \;& C \int\limits_D |Lu|^2 e^{2s\varphi} dxdt + C \sum_{i=1}^{n} \|b_k\|^2_{L^\infty(D)} \int\limits_D |\nabla u|^2 e^{2s\varphi} dxdt \\
&+ C \|c\|^2_{L^\infty(D)} \int\limits_D |u|^2 e^{2s\varphi} dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $s > 0$ yeterince büyük seçilir ve eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler sol tarafa dahil edilir. Bundan dolayı Carleman kestiriminde, düşük mertebeden terimlerin katsayıları $L^\infty(Q)$ ya ait ise sadece x ve t değişkenlerine göre en yüksek mertebeden türevleri içeren terimler önemlidir. Dolayısıyla Q bölgesinde

$$L_0 u = f \tag{2.8}$$

denklemi ele alınır.

Bölüm 2.1'deki basit metot, simetrik ve antisimetrik kısımlara ayırmaya dayanmaktaydı, ancak değişken katsayılı genel parabolik denklem için bu metot kullanılamaz. Bu bölümde genel bir parabolik denklemin bir Carleman kestiriminin elde edilişi için bir direkt metot açıklanacaktır. Burada, bir φ ağırlık fonksiyonu için önemli faktör ikinci büyük parametre $\lambda > 0$ dır ve φ ağırlık fonksiyonu $e^{\lambda\psi}$ formunda aranır. Bu formun kullanışlı olduğu görülmüş (Hörmander 1963, Bölüm 8.6) ve birçok çalışmaya temel olmuştur (Eller and Isakov 2000, Imanuvilov 1995, Isakov 1986, 1993, Isakov and Kim 2008a, b). $e^{\lambda\psi}$ formu sayesinde $\|Pw\|^2_{L^2(D)}$ nin kestiriminde $|w|^2$ ve $|\nabla w|^2$ nin katsayılarının pozitifliğini garanti etmek daha kolaydır.

Kabul edelim ki $d \in C^2(\overline{D}\;)$, $\overline{D}$ de $|\nabla d| \neq 0$ olsun. $t_0 \in (0, T)$, c_0, $\beta > 0$ ve $\inf_{(x,t)\in Q} \psi(x,t) > 0$ olmak üzere

$$\psi(x,t) = d(x) - \beta(t - t_0)^2 + c_0$$

ve

$$\varphi(x,t) = e^{\lambda\psi(x,t)}$$

şeklinde tanımlansın. Q da $\psi > 0$ oluşu gerekli değildir ancak pozitiflik, ileride verilecek olan ispatlarda kullanışlı olmaktadır.

Uyarı 2.2.1 *$Lu = f$ denklemi için bir Carleman kestirimi ele alınmakta olup, aynı değerlendirmeler Q da*

$$\left|\partial_t u(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u(x,t)\right| \leq C\left(|\nabla u(x,t)| + |u(x,t)| + |f(x,t)|\right)$$

parabolik eşitsizliği için de geçerlidir.

İlk olarak $u \in C_0^\infty(D)$ olsun, ayrıca

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)(\partial_i d)(x)(\partial_j d)(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \\ w(x,t) &= e^{s\varphi(x,t)}u(x,t) \end{aligned}$$

ve

$$Pw(x,t) = e^{s\varphi}L_0(e^{-s\varphi}w) = e^{s\varphi}L_0 u \tag{2.9}$$

olarak tanımlansın.

Carleman kestiriminin elde edilişi aşağıda verilen üç adımdan ibarettir;

1. P, P_1 ve P_2 şeklinde iki kısma ayrılır. Burada P_1, x e göre ikinci ve sıfırıncı mertebeden terimlerden, P_2 ise t ye göre birinci mertebeden ve x e göre birinci mertebeden terimlerden oluşur. Pw deki terimler simetrik ve antisimetrik kısımlarına göre değil, s, λ ve φ nin en yüksek derecesine göre sınıflandırılır.

2.
$$\int_D \left(|P_2 w|^2 + 2(P_1 w)(P_2 w)\right) dxdt$$

   integrali için alttan kestirim yapılır.

3.
$$\int_D Pw \times (Pw \text{ içinde } s,\ \lambda \text{ ve } \varphi \text{ nin ikinci en yüksek dereceden olduğu } u \text{ terimi})$$

   için bir başka kestirim yapılır.

Yukarıda bahsedilen ayrıştırma ile $\partial_t u$ nun L^2-terimi için bir kestirim yapılmalı ve dolayısıyla ikinci adımdaki $\int_D |P_2 w|^2 \, dxdt$ için de bir kestirim yapılmalıdır. Ayrıca ikinci adımda, s, λ ve φ nin istenilen derecesi ile u için bir kestirim elde edilirken, ∇u için bir kestirim elde edilmez. Bu durum, ele alınan terimlerdeki farklı mertebeden türevlerin doğal bir sonucudur. Bu nedenle üçüncü adımda bir başka kestirimin yapılması gerekmektedir.

(2.9) dan,

$$\begin{aligned}
\partial_t \varphi &= \lambda \varphi \partial_t \psi \\
\partial_i \varphi &= \lambda \varphi \partial_i \psi = \lambda \left(\partial_i d\right) \varphi \\
\partial_j \varphi &= \lambda \varphi \partial_j \psi = \lambda \left(\partial_j d\right) \varphi \\
\partial_i (e^{-s\varphi}) &= -s\lambda \varphi \left(\partial_i d\right) e^{-s\varphi}
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınarak gerekli hesaplamalar yapıldığında D de

$$\begin{aligned}
Pw &= e^{s\varphi} \left[\partial_t (e^{-s\varphi} w) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \partial_i \partial_j (e^{-s\varphi} w) \right] \\
&= e^{s\varphi} \Big[e^{-s\varphi} \partial_t w - s \partial_t \varphi e^{-s\varphi} w \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \left(\partial_i \partial_j (e^{-s\varphi}) w + \partial_j (e^{-s\varphi}) \partial_i w + \partial_i (e^{-s\varphi}) \partial_j w + e^{-s\varphi} \partial_i \partial_j w \right) \Big] \\
&= \partial_t w - s\lambda \varphi \partial_t \psi w + s\lambda^2 \varphi w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\partial_i d)(\partial_j d) + s\lambda \varphi w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j d \\
&\quad - s^2 \lambda^2 \varphi^2 w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\partial_i d)(\partial_j d) + s\lambda \varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\partial_j d) \partial_i w \\
&\quad + s\lambda \varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\partial_i d) \partial_j w - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j w
\end{aligned}$$

olup, böylece

$$\begin{aligned}
Pw &= \partial_t w - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \partial_i \partial_j w + 2s\lambda \varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) (\partial_i d)(x) \partial_j w \\
&\quad - s^2 \lambda^2 \varphi^2 \sigma w + s\lambda^2 \varphi \sigma w + s\lambda \varphi w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j d \\
&\quad - s\lambda \varphi w (\partial_t \psi) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (2.10) da katsayıların s, λ ve φ ye bağımlılığı açıkça görülmektedir.

$$A_1 = s\lambda^2\varphi\sigma + s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j d - s\lambda\varphi(\partial_t\psi) \equiv s\lambda^2\varphi a_1(x,t;s,\lambda)$$

olsun. Bu durumda D de

$$\begin{aligned} Pw &= \partial_t w - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j w + 2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)(\partial_i d)\partial_j w \\ &\quad - s^2\lambda^2\varphi^2\sigma w + A_1 w \end{aligned}$$

olur. Burada a_1, s ve λ ya bağımlıdır, fakat $(x,t) \in \overline{D}$ ve yeterince büyük her $\lambda > 0$ ve $s > 0$ için $|a_1(x,t;s,\lambda)| \leq C$ olur.

Burada ve bundan sonra C, C_1, vs. s, λ ve φ den bağımsız genel sabitleri ifade etmek için kullanılacaktır. Buna göre, (s, λ, φ) nin dereceleri dikkate alınarak Pw,

$$P_1 w = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j w - s^2\lambda^2\varphi^2 w\sigma(x,t) + A_1 w \tag{2.11}$$

ve

$$P_2 w = \partial_t w + 2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)(\partial_i d)\partial_j w \tag{2.12}$$

olmak üzere iki kısma ayrılabilir.

$$\begin{aligned} \|fe^{s\varphi}\|^2_{L^2(D)} &= \|Pw\|^2_{L^2(D)} \\ &= \|P_1 w + P_2 w\|^2_{L^2(D)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$2\int_D (P_1 w)(P_2 w)\, dxdt + \|P_2 w\|^2_{L^2(D)} \leq \int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt \tag{2.13}$$

elde edilir.

İlk olarak

$$
\begin{aligned}
\int_D (P_1 w)\,(P_2 w)\,dxdt &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij}(\partial_i \partial_j w)\,(\partial_t w)\,dxdt \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij}(\partial_i \partial_j w) 2s\lambda\varphi \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(\partial_k d)(\partial_l w) dxdt \\
&\quad -\int_D s^2\lambda^2\varphi^2 \sigma w\,(\partial_t w)\,dxdt - \int_D 2s^3\lambda^3\varphi^3\sigma w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)\,(\partial_j w)\,dxdt \\
&\quad +\int_D (A_1 w)\,(\partial_t w)\,dxdt \ + \int_D (A_1 w)\,2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)\,(\partial_j w)\,dxdt \\
&\equiv \sum_{k=1}^{6} J_k \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

için kestirim yapılacaktır. Kısmi integrasyon kullanılarak, $a_{ij} = a_{ji}$, $u \in C_0^\infty(D)$ olduğu göz önüne alınıp, $\lambda > 1$ ve $s > 1$ yeterince büyük kabul edilirse, w nin tüm türevleri w, $\partial_i w$ ve $\partial_t w$ ye indirgenebilir. Bu aşamada J_k, $k = 1, ..., 6$ için kestirim elde edilecektir:

$$
\begin{aligned}
|J_1| &= \left| -\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij}(\partial_i \partial_j w)\,(\partial_t w)\,dxdt \right| \\
&= \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_D (\partial_i a_{ij})(\partial_j w)\,(\partial_t w)\,dxdt + \sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij}(\partial_j w)\,(\partial_i \partial_t w)\,dxdt \right| \\
&= \Bigg| \sum_{i,j=1}^{n} \int_D (\partial_i a_{ij})(\partial_j w)\,(\partial_t w)\,dxdt + \Bigg(\sum_{i>j}^{n} \int_D a_{ij}\left((\partial_j w)\,(\partial_i \partial_t w) + (\partial_i w)\,(\partial_j \partial_t w)\right) dxdt \\
&\quad + \int_D \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\partial_i w)\,(\partial_i \partial_t w)\,dxdt \Bigg) \Bigg| \\
&\leq C \int_D |\nabla w|\,|\partial_t w|\,dxdt + \frac{1}{2} \left| \int_D \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_t a_{ij})(\partial_i w)\,(\partial_j w)\,dxdt \right| \\
&\leq C \int_D |\nabla w|\,|\partial_t w|\,dxdt + C \int_D |\nabla w|^2 dxdt \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

olup, burada

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i>j}^{n} \int_D a_{ij}\left((\partial_j w)\,(\partial_i \partial_t w) + (\partial_i w)\,(\partial_j \partial_t w)\right) dxdt + \int_D \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\partial_i w)\,(\partial_i \partial_t w)\,dxdt \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij} \partial_t((\partial_j w)\,(\partial_i w)) dxdt
\end{aligned}
$$

eşitliğinden yararlanılmıştır. Daha sonra,

$$
\begin{aligned}
|J_2| &= -\sum_{i,j=1}^{n}\int_D a_{ij}(\partial_i\partial_j w)2s\lambda\varphi\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(\partial_k d)(\partial_l w)dxdt \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\int_D 2s\lambda\varphi a_{ij}a_{kl}(\partial_k d)(\partial_l w)(\partial_i\partial_j w)dxdt \\
&= 2s\lambda\int_D\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\lambda(\partial_i d)\varphi a_{ij}a_{kl}(\partial_k d)(\partial_l w)(\partial_j w)dxdt \\
&\quad +2s\lambda\int_D\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\varphi\partial_i(a_{ij}a_{kl}\partial_k d)(\partial_l w)(\partial_i w)dxdt \\
&\quad +2s\lambda\int_D\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\varphi a_{ij}a_{kl}(\partial_k d)(\partial_i\partial_l w)(\partial_j w)dxdt
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
& 2s\lambda\int_D\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\lambda(\partial_i d)\varphi a_{ij}a_{kl}(\partial_k d)(\partial_l w)(\partial_j w)dxdt \\
=\ & 2s\lambda^2\int_D\varphi\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\partial_i d)(\partial_j w)\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(\partial_k d)(\partial_l w)dxdt \\
=\ & 2s\lambda^2\int_D\varphi\left|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\partial_i d)(\partial_j w)\right|^2 dxdt \geq 0
\end{aligned}
$$

ve J_1 dekine benzer olarak kestirim yapılırsa

$$
\begin{aligned}
& 2s\lambda\int_D\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\varphi a_{ij}a_{kl}(\partial_k d)(\partial_i\partial_l w)(\partial_j w)dxdt \\
=\ & s\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\int_D\varphi a_{ij}a_{kl}(\partial_k d)\partial_l((\partial_i w)(\partial_j w))dxdt \\
=\ & -s\lambda\int_D\sum_{k,l=1}^{n}\lambda\varphi a_{kl}(\partial_k d)(\partial_l d)\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j w)dxdt \\
& -s\lambda\int_D\varphi\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\partial_l(a_{ij}a_{kl}(\partial_k d))(\partial_i w)(\partial_j w)dxdt \\
=\ & -s\lambda^2\int_D\varphi\sigma\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j w)dxdt \\
& -s\lambda\int_D\varphi\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}\partial_l\left(a_{ij}a_{kl}\partial_k d\right)(\partial_i w)(\partial_j w)dxdt
\end{aligned}
$$

olur ve buna göre,

$$
\begin{aligned}
J_2 &\geq -\int_D s\lambda^2\varphi\sigma\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j w)dxdt \\
&\quad -C\int_D s\lambda\varphi\left|\nabla w\right|^2 dxdt + 2s\lambda^2\int_D \varphi\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)(\partial_j w)\right|^2 dxdt \\
&\geq -\int_D s\lambda^2\varphi\sigma\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j w)dxdt - C\int_D s\lambda\varphi\left|\nabla w\right|^2 dxdt \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $J_3,\ J_4,\ J_5$ ve J_6 için kestirimler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
|J_3| &= \left|-\int_D s^2\lambda^2\varphi^2\sigma w\left(\partial_t w\right)dxdt\right| \\
&= \left|-\int_D \frac{1}{2}s^2\lambda^2\varphi^2\sigma\partial_t(w^2)dxdt\right| \\
&= \left|\int_D s^2\lambda^2\varphi\left\{\lambda(\partial_t\psi)\varphi\right\}\sigma w^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_D s^2\lambda^2\varphi^2\left(\partial_t\sigma\right)w^2 dxdt\right| \\
&\leq C\int_D s^2\lambda^3\varphi^2 w^2 dxdt, \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_4 &= -\int_D 2s^3\lambda^3\varphi^3\sigma w\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)\left(\partial_j w\right)dxdt \\
&= -\int_D s^3\lambda^3\varphi^3\sum_{i,j=1}^{n}\sigma a_{ij}(\partial_i d)\partial_j(w^2)dxdt \\
&= \int_D s^3\lambda^3\sum_{i,j=1}^{n} 3\varphi^2\left\{\lambda(\partial_j d)\varphi\right\}\sigma a_{ij}(\partial_i d)w^2 dxdt + \int_D s^3\lambda^3\varphi^3\sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(\sigma a_{ij}\partial_i d)w^2 dxdt \\
&\geq \int_D 3s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt - C\int_D s^3\lambda^3\varphi^3 w^2 dxdt, \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|J_5| &= \left|\int_D \left(A_1 w\right)\left(\partial_t w\right)dxdt\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_D s\lambda^2\varphi a_1\partial_t(w^2)dxdt\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_D s\lambda^2\varphi\left(\partial_t a_1\right)w^2 dxdt + \int_D s\lambda^3\varphi(\partial_t\psi)a_1 w^2 dxdt\right| \\
&\leq C\int_D s\lambda^3\varphi w^2 dxdt, \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|J_6| &= \left| \int\limits_D (A_1 w)\, 2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)\,(\partial_j w)\, dxdt \right| \\
&= \left| \int\limits_D s\lambda^2 \varphi a_1 w \times 2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)\,(\partial_j w)\, dxdt \right| \\
&= \left| \int\limits_D 2a_1 s^2\lambda^3\varphi^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)\,(\partial_j w)\, dxdt \right| \\
&= \left| \int\limits_D a_1 s^2\lambda^3\varphi^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i d)\partial_j \left(w^2\right) dxdt \right| \\
&= \left| -\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_1 s^2\lambda^3\varphi^2 a_{ij}(\partial_i d)) w^2 dxdt \right| \\
&\leq C\int\limits_D s^2\lambda^4\varphi^2 w^2 dxdt. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Burada, $|J_6|$ için kestirim yapılırken kısmi integrasyon uygulanması gereklidir. Eğer $\int\limits_D s^2\lambda^3\varphi^2 |\nabla w|\,|w|\, dxdt$ benzeri bir kestirim için Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla daha basit bir yol uygulanırsa, s ve λ nın istenen mertebeleri kaybolur ve bu durumda kestirime devam edilemez.

Böylece $(2.14) - (2.20)$ den

$$
\begin{aligned}
\int\limits_D (P_1 w)\,(P_2 w)\, dxdt \geq\ & 3\int\limits_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt - \int\limits_D s\lambda^2\varphi\sigma \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i w)\,(\partial_j w)\, dxdt \\
& - C\int\limits_D s\lambda\varphi\, |\nabla w|^2\, dxdt - C\int\limits_D \left(s^3\lambda^3\varphi^3 + s^2\lambda^4\varphi^2\right) w^2 dxdt \\
& - C\int\limits_D |\nabla w|\,|\partial_t w|\, dxdt
\end{aligned}
$$

olur ve sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
& 3\int\limits_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt - \int\limits_D s\lambda^2\varphi\sigma \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i w)\,(\partial_j w)\, dxdt \\
\leq\ & \int\limits_D (P_1 w)\,(P_2 w)\, dxdt + C\int\limits_D s\lambda\varphi\, |\nabla w|^2\, dxdt \\
& + C\int\limits_D \left(s^3\lambda^3\varphi^3 + s^2\lambda^4\varphi^2\right) w^2 dxdt + C\int\limits_D |\nabla w|\,|\partial_t w|\, dxdt \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Ayrıca her büyük $s > 0$ için, P_2 nin (2.12) deki tanımından ve

$|\alpha+\beta|^2 \geq \frac{1}{2}|\alpha|^2 - |\beta|^2$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_D |P_2 w|^2\, dxdt &\geq \int_D \frac{1}{s\varphi}|P_2 w|^2\, dxdt \\
&= \int_D \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t w + 2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i d)(\partial_j w)\right|^2 dxdt \\
&\geq \frac{1}{2}\int_D \frac{1}{s\varphi}|\partial_t w|^2\, dxdt - C\int_D s\lambda^2\varphi\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i d)(\partial_j w)\right|^2 dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir, yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon\int_D \frac{1}{s\varphi}|\partial_t w|^2\, dxdt \leq C\int_D |P_2 w|^2\, dxdt + C\varepsilon\int_D s\lambda^2\varphi\, |\nabla w|^2\, dxdt$$

olur. Böylece (2.21) ve (2.13) ten

$$\begin{aligned}
&3\int_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt - \int_D s\lambda^2\varphi\sigma\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j w)\, dxdt + \varepsilon\int_D \frac{1}{s\varphi}|\partial_t w|^2\, dxdt \\
\leq\; & C\int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt + C\int_D s\lambda\varphi\, |\nabla w|^2\, dxdt + C\varepsilon\int_D s\lambda^2\varphi\, |\nabla w|^2\, dxdt \\
&+ C\int_D \left(s^3\lambda^3\varphi^3 + s^2\lambda^4\varphi^2\right) w^2 dxdt + C\int_D |\nabla w|\, |\partial_t w|\, dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir.

w^2 nin s, λ ve φ ye göre en büyük dereceli çarpanı $s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2$, $|\nabla w|^2$ nin en büyük dereceli çarpanı $s\lambda^2\varphi\sigma$ ve $|\partial_t w|^2$ nin en büyük dereceli çarpanı $\frac{1}{s\varphi}$ dir. Örneğin s ve λ büyük seçilebildiğinden $\left(s^3\lambda^3\varphi^3 + s^2\lambda^4\varphi^2\right) w^2$ terimi daha düşük derecelidir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|\partial_t w|\, |\nabla w| &= s^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\, |\partial_t w|\, s^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}\, |\nabla w| \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{1}{s\lambda\varphi}|\partial_t w|^2 + \frac{1}{2}s\lambda\varphi\, |\nabla w|^2
\end{aligned}$$

olur ve bu durumda

$$
\begin{aligned}
& 3\int\limits_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt - \int\limits_D s\lambda^2\varphi\sigma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i w)\,(\partial_j w)\,dxdt \\
& +\left(\varepsilon - \frac{C}{\lambda}\right)\int\limits_D \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t w\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C\int\limits_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt + C\int\limits_D s\lambda\varphi\left|\nabla w\right|^2 dxdt + C\varepsilon\int\limits_D s\lambda^2\varphi\left|\nabla w\right|^2 dxdt \\
& +C\int\limits_D \left(s^3\lambda^3\varphi^3 + s^2\lambda^4\varphi^2\right) w^2 dxdt \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafındaki birinci ve ikinci terimler değişik işaretli olduğundan bir başka kestirime ihtiyaç vardır. Bu nedenle

$$
\int\limits_D (P_1 w + P_2 w) \times \left(s\lambda^2\varphi\sigma w\right) dxdt
$$

yardımıyla

$$
\int\limits_D s\lambda^2\varphi\sigma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i w)\,(\partial_j w)\,dxdt
$$

için başka bir kestirim yapılacaktır.

$\left|\nabla w\right|^2$ li terimi istenen (s,λ,φ) çarpanını ile yani $s\lambda^2\varphi$ ile elde edebilmek için $s\lambda^2\varphi\sigma w$ çarpanı seçilir, bir başka deyişle

$$
\partial_t w + 2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i d)(\partial_j w) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i\partial_j w - s^2\lambda^2\varphi^2\sigma w + A_1 w = f e^{s\varphi}
$$

eşitliğinin $s\lambda^2\varphi\sigma w$ ile çarpılması sonucu

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_D (\partial_t w)\, s\lambda^2\varphi\sigma w dxdt + \int\limits_D 2s\lambda\varphi \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i d)(\partial_j w) s\lambda^2\varphi\sigma w dxdt \\
& -\int\limits_D \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i\partial_j w\right) s\lambda^2\varphi\sigma w dxdt - \int\limits_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt \\
& +\int\limits_D (A_1 w)\left(s\lambda^2\varphi\sigma w\right) dxdt \\
\equiv\ & \sum_{k=1}^5 I_k = \int\limits_D f e^{s\varphi} s\lambda^2\varphi\sigma w dxdt \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Şimdi, kısmi integrasyon yardımıyla ve $w \in C_0^\infty(D)$, $|\partial_t \varphi| = |\lambda(\partial_t \psi)\varphi| \leq C\lambda\varphi$ ve $\partial_i \varphi = \lambda(\partial_i d)\varphi$ vs. olduğu göz önünde bulundurularak, $I_1, ..., I_5$ terimleri için kestirim yapılacaktır;

$$|I_1| = \left| \int_D \frac{1}{2} s\lambda^2 \varphi\sigma\partial_t(w^2) dxdt \right| \leq C \int_D s\lambda^3 \varphi w^2 dxdt, \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_D s^2\lambda^3\varphi^2\sigma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i d)\partial_j(w^2) dxdt \right| \\ &= \left| -\int_D \sum_{i,j=1}^n s^2\lambda^3 \left\{ 2\lambda(\partial_j d)\varphi^2 \right\} \sigma a_{ij}(\partial_i d) w^2 dxdt - \sum_{i,j=1}^n s^2\lambda^3\varphi^2 \partial_j(\sigma a_{ij}(\partial_i d)) w^2 dxdt \right| \\ &\leq C \int_D s^2\lambda^4\varphi^2 w^2 dxdt, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int_D s\lambda^2 \sum_{i,j=1}^n \varphi\sigma a_{ij} w(\partial_i\partial_j w) dxdt \\ &= \int_D s\lambda^2 \sum_{i,j=1}^n \varphi\sigma a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j w) dxdt + \int_D s\lambda^2 \sum_{i,j=1}^n \partial_i\left(\varphi\sigma a_{ij}\right) w(\partial_j w) dxdt \\ &\geq \int_D s\lambda^2\varphi\sigma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j w) dxdt - C \int_D s\lambda^3\varphi \left|\nabla w\right| |w| \, dxdt, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$I_4 = -\int_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt, \tag{2.27}$$

$$|I_5| \leq C \left| \int_D s\lambda^2\varphi \times s\lambda^2\varphi\sigma w^2 dxdt \right| \leq C \int_D s^2\lambda^4\varphi^2 w^2 dxdt. \tag{2.28}$$

Buna göre $(2.23) - (2.28)$ den

$$\begin{aligned} & \int_D s\lambda^2\varphi\sigma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\partial_i w\right)\left(\partial_j w\right) dxdt - \int_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma^2 w^2 dxdt \\ \leq\ & C \int_D \left| f e^{s\varphi} s\lambda^2\varphi\sigma w \right| dxdt + C \int_D s^2\lambda^4\varphi^2 w^2 dxdt + C \int_D s\lambda^3\varphi \left|\nabla w\right| |w| \, dxdt \\ \leq\ & C \int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt + C \int_D s^2\lambda^4\varphi^2 w^2 dxdt + C \int_D \lambda^2 \left|\nabla w\right|^2 dxdt \end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir. Son eşitsizlik,

$$\begin{aligned} s\lambda^3\varphi\left|\nabla w\right|\left|w\right| &= \left(s\lambda^2\varphi\left|w\right|\right)\left(\lambda\left|\nabla w\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}s^2\lambda^4\varphi^2w^2+\frac{1}{2}\lambda^2\left|\nabla w\right|^2 \end{aligned}$$

yardımıyla

$$\int\limits_D s\lambda^3\varphi\left|\nabla w\right|\left|w\right|dxdt \leq \frac{1}{2}\int\limits_D \left(s^2\lambda^4\varphi^2w^2+\lambda^2\left|\nabla w\right|^2\right)dxdt$$

eşitsizliğinin ve ayrıca

$$\begin{aligned} \left|fe^{s\varphi}s\lambda^2\varphi\sigma w\right| &\leq \frac{1}{2}f^2e^{2s\varphi}+\frac{1}{2}s^2\lambda^4\varphi^2\sigma^2w^2 \\ &\leq \frac{1}{2}f^2e^{2s\varphi}+Cs^2\lambda^4\varphi^2w^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğinin bir sonucudur.

Son olarak, (2.29) eşitsizliğinin 2 ile çarpılıp (2.22) eşitsizliği ile toplamı dikkate alınırsa, (1.3) ten ve $\sigma_0 \equiv \inf_{(x,t)\in Q}\sigma(x,t) > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\int\limits_D s^3\lambda^4\varphi^3\sigma_0^2w^2dxdt+(\sigma_0\sigma_1-C\varepsilon)\int\limits_D s\lambda^2\varphi\left|\nabla w\right|^2dxdt \\ &+\left(\varepsilon-\frac{C}{\lambda}\right)\int\limits_D\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_tw\right|^2dxdt \\ \leq\ & C\int\limits_D f^2e^{2s\varphi}dxdt+C\int\limits_D\left(s\lambda\varphi+\lambda^2\right)\left|\nabla w\right|^2dxdt \\ &+C\int\limits_D\left(s^3\lambda^3\varphi^3+s^2\lambda^4\varphi^2\right)w^2dxdt \end{aligned} \tag{2.30}$$

elde edilir. Bundan dolayı, ilk olarak $\varepsilon > 0$ sayısı $(\sigma_0\sigma_1 - C\varepsilon) > 0$ olacak şekilde yeteri kadar küçük seçilir ve sonra $\lambda > 0$ sayısı $\left(\varepsilon-\frac{C}{\lambda}\right) > 0$ olacak şekilde yeteri kadar büyük seçilirse, (2.30) un sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler sol tarafa dahil edilebilir ve bu durumda

$$\int\limits_D s^3\lambda^4\varphi^3w^2dxdt+\int\limits_D s\lambda^2\varphi\left|\nabla w\right|^2dxdt+\int\limits_D\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_tw\right|^2dxdt \leq C\int\limits_D f^2e^{2s\varphi}dxdt \tag{2.31}$$

elde edilir. $w = ue^{s\varphi}$ olduğundan

$$\int\limits_D\left(\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_tu\right|^2+s\lambda^2\varphi\left|\nabla u\right|^2+s^3\lambda^4\varphi^3u^2dxdt\right)e^{2s\varphi}dxdt \leq C\int\limits_D f^2e^{2s\varphi}dxdt \tag{2.32}$$

olur.

Ayrıca, $t \in [0,T]$ için $D \cap \{t\} \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin sınırının sonlu sayıda düzgün yüzeyden ibaret olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\partial_i \partial_j u$ terimlerini, bir eliptik denklem için önsel (apriori) kestirimden yararlanarak aşağıdaki şekilde Carleman kestirimine dahil edebiliriz. (2.9), (2.10) eşitliklerinden ve $|A_1(x,t)| \leq Cs\lambda^2\varphi$ eşitsizliğinden Q da

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j w\right|^2 \leq C\left(|\partial_t w|^2 + s^2\lambda^2\varphi^2 |\nabla w|^2 + s^4\lambda^4\varphi^4 w^2 + |f|^2 e^{2s\varphi}\right)$$

elde edilir. Bundan dolayı (2.31) den her büyük $s > 0$ ve $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} &\int_D \frac{1}{s\varphi}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j w\right|^2 dxdt \\ \leq\ & C\int_D \left(\frac{1}{s\varphi}|\partial_t w|^2 + s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3 w^2\right) dxdt + C\int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ \leq\ & C\int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt \end{aligned} \tag{2.33}$$

olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j\left(\frac{w}{\sqrt{\varphi}}\right) &= \frac{\partial_i\partial_j w}{\sqrt{\varphi}} - \frac{\partial_i\partial_j\varphi}{2\varphi^{\frac{3}{2}}}w \\ &\quad -\frac{1}{2\varphi^{\frac{3}{2}}}\left\{(\partial_j w)(\partial_i\varphi) + (\partial_i w)(\partial_j\varphi)\right\} + \frac{3}{4\varphi^{\frac{5}{2}}}(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi)w, \\ 1 &\leq i,j \leq n \end{aligned} \tag{2.34}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j\frac{w}{\sqrt{\varphi}} &= \frac{g}{\sqrt{\varphi}} - \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j\varphi}{2\varphi^{\frac{3}{2}}}w \\ &\quad + \frac{3}{4\varphi^{\frac{5}{2}}}w\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) - \frac{1}{\varphi^{\frac{3}{2}}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i w)(\partial_j\varphi) \end{aligned}$$

olup, burada

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j w$$

olarak alınmıştır. Her $t \in [0,T]$ için $w(.,t) \in H_0^1(D \cap \{t\}$ olduğundan, eliptik denklem için Dirichlet problemi için genel önsel (apriori) kestirim uygulandığında (Gilbarg and

Trudinger 2001),

$$
\begin{aligned}
&\int_{D\cap\{t\}} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\partial_i\partial_j\left(\frac{w}{\sqrt{\varphi}}\right)\right|^2 (x,t)dx \\
\leq\ & C\int_{D\cap\{t\}} \frac{g(x,t)^2}{\varphi}dx + C\int_{D\cap\{t\}} \frac{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j w\right|^2}{\varphi^3} |w(x,t)|^2 dx \\
&+C\int_{D\cap\{t\}} \frac{w(x,t)^2}{\varphi^5}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\partial_i\varphi\right)\left(\partial_j\varphi\right)\right|^2 dx \\
&+C\int_{D\cap\{t\}} \frac{1}{\varphi^3}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\partial_i w\right)\partial_j\varphi\right|^2 dx
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.34) ten

$$
\begin{aligned}
\int_{D\cap\{t\}} \frac{1}{\varphi}\left|\partial_i\partial_j w(x,t)\right|^2 dx \ \leq\ & C\int_{D\cap\{t\}} \left\{\left|\partial_i\partial_j\left(\frac{w}{\sqrt{\varphi}}\right)\right|^2\right. \\
&+\frac{\left|\partial_i\partial_j\varphi\right|^2}{\varphi^3}w^2 + \frac{1}{\varphi^3}\left(\left|\partial_j w\right|^2\left|\partial_i\varphi\right|^2 + \left|\partial_i w\right|^2\left|\partial_j\varphi\right|^2\right) \\
&\left.+\frac{1}{\varphi^5}\left(\left|\partial_i\varphi\right|^2\left|\partial_j\varphi\right|^2 w^2\right)\right\}(x,t)dx
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

olur.

$\partial_i\varphi = \lambda(\partial_i d)\varphi$ ve $\partial_i\partial_j\varphi = \lambda(\partial_i\partial_j d)\varphi + \lambda^2(\partial_i d)(\partial_j d)\varphi$

olduğundan, $\lambda > 1$ için

$$
\begin{aligned}
\left|\partial_i\varphi(x,t)\right| &\leq C\lambda\varphi(x,t), \\
\left|\partial_i\partial_j\varphi(x,t)\right| &\leq C\lambda^2\varphi(x,t), \quad 1\leq i,j\leq n, (x,t)\in\overline{D}
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

olduğu görülür. Bundan dolayı, $\varphi \geq 1$ için (2.35) ve (2.36) kestirimlerinden

$$
\begin{aligned}
\int_{D\cap\{t\}} \frac{1}{\varphi(x,t)}\left|\partial_i\partial_j w(x,t)\right|^2 dx \ \leq\ & C\int_{D\cap\{t\}} \frac{g^2(x,t)}{\varphi(x,t)}dx \\
&+C\int_{D\cap\{t\}} (\lambda^4 w^2 + \lambda^2\left|\nabla w\right|^2)(x,t)dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. t ye göre integral alınırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\int_D \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_i\partial_j w(x,t)\right|^2 dxdt \ \leq\ & C\int_D \frac{1}{s\varphi}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j w\right|^2 dxdt \\
&+C\int_{D\cap\{t\}} (\lambda^4 w^2 + \lambda^2\left|\nabla w\right|^2)dx
\end{aligned}
$$

(2.31) ve (2.33) ten, her büyük $s > 0$ ve $\lambda > 0$ için

$$\int_D \frac{1}{s\varphi} \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_i \partial_j w|^2 \, dxdt \leq C \int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt$$

elde edilir.

Böylece $u \in C_0^\infty(D)$ için Carleman kestiriminin elde edilişi tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned} e^{s\varphi} \partial_i \partial_j u &= \partial_i \partial_j w - s\lambda\varphi((\partial_i d)(\partial_j w) + (\partial_j d)(\partial_i w)) \\ &\quad + \left\{ s^2 \lambda^2 \varphi^2 (\partial_i d)(\partial_j d) - s\lambda^2 \varphi (\partial_i d)(\partial_j d) - s\lambda\varphi(\partial_i \partial_j d) \right\} w, \end{aligned}$$

olduğu dikkate alınıp, (2.31) yardımıyla kestirimin u ya göre yeniden yazılmasıyla, Carleman kestirimini ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.1 *$d \in C^2(\overline{\Omega}\ )$, $\overline{\Omega}$ da $|\nabla d| \neq 0$ ve $\beta > 0$, $0 < t_0 < T$ olmak üzere*

$$\psi(x,t) = d(x) - \beta(t - t_0)^2$$

olsun. Kabul edelim ki, ∂D düzgün ve $t \in [0,T]$ için $D \cap \{t\} \subset R^n$ bölgesinin sınırı sonlu sayıda düzgün yüzeyden meydana gelsin. Bu durumda bir $\lambda_0 > 0$ sabiti vardır öyle ki, keyfi $\lambda \geq \lambda_0$ için bir $s_0(\lambda) > 0$ sabiti aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde seçilebilir; bir $C = C(s_{0,}\lambda_0) > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\begin{aligned} &\int_D \left\{ \frac{1}{s\varphi} \left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_i \partial_j u|^2 \right) + s\lambda^2 \varphi |\nabla u|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 \right\} e^{2s\varphi} dxdt \\ \leq\ & C \int_D |Lu|^2 e^{2s\varphi} dxdt \qquad (2.38) \end{aligned}$$

eşitsizliği her $s > s_0$ ve

$$u \in H^{2,1}(Q), \quad suppu \subset D \qquad (2.39)$$

şartlarını sağlayan her u için sağlanır.

(2.38) deki $C > 0$ sabiti $maks_{1<i,j<n} \|a_{ij}\|_{C_1(\overline{Q})}, \|b_i\|_{L^\infty(Q)}$ ve $\|c\|_{L^\infty(Q)}$ ya sürekli olarak bağımlıdır. Bu bağımlılık Teorem (2.9) ve (2.10)'da da aynıdır.

Burada belirtelim ki ;

1. Yoğunluk özelliğinden (yani, (2.39) u sağlayan herhangi bir u ya bir $u_n \in C_0^\infty(D)$ dizisi ile yaklaşım yapılabileceğinden) $u_n \in C_0^\infty(D)$ için elde edilen (2.38) kestirimi, (2.39) u sağlayan her u için Carleman kestirimine dönüştürülür.

2. $\inf_{(x,t)\in Q}\tilde{\psi}(x,t) > 0$ olmak üzere $\tilde{\psi}(x,t) = d(x) - \beta(t-t_0)^2 + c_0$ olması durumunda, ispat tamamlanmıştır. $c_0 = 0$ olması durumunda, $e^{2s\varphi} = e^{2se^{\lambda\psi}} = \exp(2(se^{-\lambda c_0})e^{\lambda\tilde{\psi}})$ olacağından $s_0(\lambda)$ yı $s_0(\lambda)e^{\lambda c_0}$ ile değiştirmek suretiyle $c_0 = 0$ durumu bir önceki duruma indirgenebilir.

Böylece Teorem 2.2.1 elde edilir. $suppu \subset D$ şartı sağlanmasa bile, her bir kısmi integrasyon sonucu ortaya çıkan sınırdaki integral terimlerini atmadan bir önceki durumda olduğu gibi aşağıda verilen Carleman kestirimi ispatlanabilir (Yamamoto 2009).

Teorem 2.2.2 *$d \in C^2(\overline{\Omega}\ )$, $\overline{\Omega}$ da $|\nabla d| \neq 0$ ve $\beta > 0$, $0 < t_0 < T$ olmak üzere*

$$\psi(x,t) = d(x) - \beta(t-t_0)^2$$

olsun. Kabul edelim ki, ∂D düzgün ve $t \in [0,T]$ için $D \cap \{t\} \subset R^n$ bölgesinin sınırı sonlu sayıda düzgün yüzeyden meydana gelsin. Bu durumda bir $\lambda_0 > 0$ sabiti vardır öyle ki, keyfi $\lambda \geq \lambda_0$ için bir $s_0(\lambda) > 0$ sabiti aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde seçilebilir; bir $C = C(s_{0,}\lambda_0) > 0$ sabiti vardır öyle ki, her $s > s_0$ ve her $u \in H^{2,1}(D)$ için,

$$\int_D \left\{ \frac{1}{s\varphi}\left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^n |\partial_i\partial_j u|^2 \right) + s\lambda^2\varphi\, |\nabla u|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3 u^2 \right\} e^{2s\varphi} dxdt$$

$$\leq\ C\int_D |Lu|^2\, e^{2s\varphi}dxdt + Ce^{C(\lambda)s}\int_{\partial D} \left(|\nabla_{x,t}u|^2 + |u|^2 \right) dSdt \qquad (2.40)$$

sağlanır.

2.3 GLOBAL CARLEMAN KESTİRİMİ

Bölüm 2.1 ve Bölüm 2.2'de, $\Omega \times (0,T)$ ile aynı olmak zorunda olmayan bir D bölgesinde Carleman kestirimleri ispat edilmiş olup ters problemlerdeki uygulamalarda (bkz. Bölüm 3) D bölgesi φ yardımıyla verilir. Bir başka deyişle Bölüm 2.2'deki Carleman kestirimini uygularken, ilk olarak φ seçilmeli daha sonra ters problemleri ilgilendiren sonuçların geçerli olduğu D bölgesi belirlenmelidir.

Bu bölümde, kompakt supporta sahip olmayan fonksiyonlar için $\Omega\times(0,T)$ üzerinde geçerli olan bir global Carleman kestirimi ifade edilecektir (Imanuvilov 1995).

$\omega \subset \Omega$ herhangi bir alt bölge olsun. Q da

$$Lu(x,t) \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u - \sum_{k=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u - c(x,t)u = f \tag{2.41}$$

parabolik denklemi ve $\partial\Omega \times (0,T)$ sınırında

$$l_1(x)\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + l_2(x)u = 0 \tag{2.42}$$

sınır şartı verilsin. Burada a_{ij} ye göre konormal türev $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\partial_i u\right)\nu_j$ olarak tanımlıdır. (1.3) e ek olarak

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C^1(\overline{Q}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \\ b_i, c &\in L^\infty(Q), \quad 1 \le i,j \le n \end{aligned}$$

olduğunu kabul edelim, ayrıca $l_1, l_2 \in C^2(\partial\Omega)$ ve

$$\partial\Omega \text{ üzerinde, ya } l_1 > 0 \text{ ya da } l_1 = 0 \text{ ve } l_2 = 1 \tag{2.43}$$

olsun.

Global Carleman kestirimi için özel bir ağırlık fonksiyonuna ihtiyaç vardır. Böyle bir ağırlık fonksiyonunun varlığı ispatlanmıştır (Fursikov and Imanuvilov 1996, Imanuvilov 1995, Imanuvilov et al. 2009).

Lemma 2.3.1 *ω_0 bölgesi, $\overline{\omega_0} \subset \omega$ olacak şekilde Ω nın herhangi bir sabitlenmiş alt bölgesi olsun. Bu durumda*

$$d(x) > 0, \quad x \in \Omega, \quad d|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\nabla d(x)| > 0, \quad x \in \overline{\Omega\backslash\omega_0} \tag{2.44}$$

olacak şekilde bir $d \in C^2(\overline{\Omega}\ )$ fonksiyonu vardır.

Örnek 2.3.1 *: $\Omega = \{x : |x| < 1\}$ ve $0 \in \omega_0$ olsun. Bu durumda $d(x) = 1-|x|^2$ fonksiyonu* (2.44) *te belirtilen şartları sağlar.*

$\lambda > 0$ olmak üzere

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{\lambda d(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda d(x)} - e^{2\lambda \|d\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)} \tag{2.45}$$

ve ayrıca

$$\sigma_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{C^1(\overline{Q})} + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L^\infty(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \|c\|_{L^\infty(Q)}, \quad \sigma_3 = \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{C^1(\overline{Q})} \tag{2.46}$$

olsun.

Global Carleman kestirimi aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.3.2 *Bir $\lambda_0 > 0$ sabiti vardır öyle ki, keyfi $\lambda \geq \lambda_0$ için bir $s_0(\lambda) \geq 0$ sabiti aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde seçilebilir;*
bir $C = C(s_0,\lambda_0) > 0$ sabiti vardır öyle ki, her $s > s_0$ ve (2.42) yi sağlayan her $u \in H^{2,1}(Q)$ için,

$$\int_Q \left\{ \frac{1}{s\varphi} \left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_i \partial_j u|^2 \right) + s\lambda^2 \varphi |\nabla u|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 \right\} e^{2s\alpha} dxdt$$

$$\leq \ C \int_Q |Lu|^2 e^{2s\alpha} dxdt + C \int_{\omega \times (0,T)} s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 e^{2s\alpha} dxdt$$

sağlanır. Burada $C > 0$ sabiti σ_2 ve λ_0 a sürekli bağımlı ve s den bağımsız olup, λ_0 sabiti σ_3 e sürekli bağımlıdır.

(2.45) eşitliklerinden, her $k \geq 0$ için

$$\lim_{t \downarrow 0} \varphi(x,t)^k e^{2s\alpha(x,t)} = \lim_{t \uparrow T} \varphi(x,t)^k e^{2s\alpha(x,t)} = 0$$

olur ve $t = 0$, $t = T$ civarında $e^{2s\alpha(x,t)}$ ağırlık fonksiyonu, $C > 0$ olmak üzere $\exp(-\frac{C}{t(T-t)})$ fonksiyonunun aynı dereceden hali gibi davranış gösterir. Ağırlık fonksiyonunun bu özelliği nedeniyle $t = 0$ ve $t = T$ değerleri için u nun sıfır olması şartına ihtiyaç yoktur. Ayrıca, Carleman kestirimi için u nun $\partial\Omega \times (0,T)$ yan sınırında (2.42) koşulunu sağlaması yeterlidir. Bu nedenle bu Carleman kestirimi $\Omega \times (0,T)$ bölgesinde tanımlı kompakt supporta sahip olmayan u için geçerlidir.

Herhangi bir $\Gamma \subset \partial\Omega$ sınır bölgesinde aşırı belirgin verilerin verilmesi durumunda başka bir ağırlık fonksiyonuna ihtiyaç duyulur (Imanuvilov 1995, Imanuvilov and Yamamoto 1998).

Lemma 2.3.3 *$\Gamma \neq \emptyset$, $\Gamma \subset \partial\Omega$ herhangi bir (relatif) açık alt küme olsun. Bu durumda, eğer $a_{ij} \in C^1(\overline{Q}\ )$, $1 \leq i,j \leq n$ (1.2) ve (1.3) ü sağlarsa*

$$\begin{aligned} d_0(x) &> 0, \quad x \in \Omega, \quad |\nabla d_0(x)| > 0, \quad x \in \overline{\Omega} \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i(d_0)(x)\nu_j(x) &\leq 0, \quad x \in \partial\Omega \backslash \Gamma, \quad 0 < t < T \end{aligned} \tag{2.47}$$

olacak şekilde bir $d_0 \in C^2(\overline{\Omega}\ )$ fonksiyonu vardır.

(1.2) ve (1.3) ü sağlayan her a_{ij} için d_0 fonksiyonu (2.47) yi sağlar, bir başka deyişle d_0 fonksiyonu a_{ij} nin seçimine bağlı değildir.

$$\varphi_0(x,t) = \frac{e^{\lambda d_0(x)}}{t(T-t)}, \qquad \alpha_0(x,t) = \frac{e^{\lambda d_0(x)} - e^{2\lambda \|d_0\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)} \tag{2.48}$$

olarak tanımlansın.

Örnek 2.3.2 *$(.,.)$, $\mathbb{R}^n$ de iç çarpım olmak üzere, keyfi olarak sabitlenmiş bir $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ için*

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}, \\ \Gamma &= \{x \in \partial\Omega : (x - x_0, \nu(x)) \geq 0\} \end{aligned}$$

ve $i \neq j$ ise $a_{ij} = 0$ ve $a_{ii} = 1$ özel durumu ele alındığında $d_0(x) = |x - x_0|^2$ olarak alınabilir.

Teorem 2.3.4 *Bir $\lambda_0 > 0$ sabiti vardır öyle ki, keyfi $\lambda \geq \lambda_0$ için bir $s_0(\lambda) \geq 0$ sabiti aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde seçilebilir;*
bir $C = C(s_0,\lambda_0) > 0$ sabiti vardır öyle ki, her $s > s_0$ ve (2.42) yi sağlayan her $u \in H^{2,1}(Q)$ için,

$$\begin{aligned} &\int_Q \left\{ \frac{1}{s\varphi_0} \left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_i \partial_j u|^2 \right) + s\lambda^2\varphi_0 |\nabla u|^2 + s^3\lambda^4\varphi_0^3 |u|^2 \right\} e^{2s\alpha_0} dxdt \\ \leq\ & C\int_Q |Lu|^2 e^{2s\alpha_0} dxdt + Ce^{C(\lambda)s} \int_{\Gamma\times(0,T)} \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2 \right) dSdt \end{aligned}$$

sağlanır. Burada $C > 0$ sabiti σ_2 ve λ_0 a sürekli bağımlı ve s den bağımsız olup, λ_0 sabiti σ_3 e sürekli bağımlıdır.

Ayrıca $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ için ∇u nun ortogonal bileşeni olmak üzere $\Gamma \times (0, T)$ üzerinde

$$|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu teoremin ispatı $Pw = e^{s\alpha}L(e^{-s\alpha}w)$ operatörünün (2.11) ve (2.12) de tanımlandığı gibi P_1 ve P_2 şeklinde ayrılmasına dayanmaktadır. Aslında Bölüm 2.2'deki ispat, Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.4'ün ispatlarından yararlanılarak yapılmıştır.

BÖLÜM 3

CARLEMAN KESTİRİMLERİNİN PARABOLİK DENKLEMLERE UYGULAMALARI

3.1 CAUCHY PROBLEMİ İÇİN ŞARTLI KARARLILIK

Bu bölümde Carleman kestiriminin bir uygulaması olarak, parabolik denklem için teklik ve şartlı kararlılık incelemeleri için Teorem 2.2.2'de verilen Carleman kestiriminin lokal versiyonundan yararlanılacaktır. Carleman kestiriminin lokal versiyonu kullanılırken bir kesme (cut-off) fonksiyonunun tanımlanması ve Carleman kestiriminin kısmi diferensiyel denklemin bir çözümü ile kesme fonksiyonunun çarpımına uygulanması gerekmektedir.

$\Gamma \subset \partial\Omega$, $\partial\Omega$ nın keyfi bir alt sınırı olsun. Yani Γ, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\rho > 0$ olmak üzere boş kümeden farklı bir $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\} \cap \partial\Omega$ kümesini içersin.

Parabolik denklem için bir Cauchy problemi ele alınacaktır:

$$(Lu)(x,t) \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u - \sum_{k=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u - c(x,t)u = f, \quad (x,t) \in Q \tag{3.1}$$

$$u|_{\Gamma\times(0,T)} = g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A}|_{\Gamma\times(0,T)} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i u)\nu_j = h \tag{3.2}$$

burada $a_{ij}, 1 \le i,j \le n$ (1.2) ve (1.3) ü sağlar ve

$$b_i, c \in L^\infty(Q), \quad 1 \le i,j \le n \tag{3.3}$$

olduğu kabul edilir.

Cauchy problemi. u, (3.1) *denklemini sağlaması durumunda, bir* $D \subset Q$ *bölgesinde* $u|_{\Gamma\times(0,T)}$ *ve* $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}|_{\Gamma\times(0,T)}$ *koşulları yardımıyla* u *nun bulunması problemi.*

Uygun bir kesme fonksiyonu tanımlanıp, problem kompakt supporta sahip fonksiyonlara indirgemek amacıyla Cauchy şartlarında verilen fonksiyonlar (Cauchy dataları) uygun bir

Sobolev uzayına genişletilerek, u için $\Gamma \times (0,T)$ üzerinde verilen fonksiyonlar (datalar) ile bir kararlılık kestirimi elde etmek için bir lokal Carleman kestirimi (Teorem 2.2.1) uygulanabilir. Bu yöntem genel bir yöntem olup, diğer tipteki kısmi diferensiyel denklemler için de geçerlidir (Isakov 2006). Teorem 2.2.1'in uygulanmasıyla aşağıdaki önerme ispatlanabilir (Isakov 2006, Teorem 3.2.2).

Önerme 3.1.1 *$d \in C^2(\overline{\Omega}\ )$ ve $\overline{\Omega}$ da $|\nabla d(x)| \neq 0$, $t_0 \in (0,T)$ olmak üzere $\psi(x,t) = d(x) - \beta(t-t_0)^2$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere*

$$Q(\varepsilon) = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) : \psi(x,t) > \varepsilon\}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca $\Gamma \subset \partial\Omega$ alt sınırı için

$$\overline{Q(0)} \subset Q \cup (\Gamma \times (0,T))$$

olsun. Bu durumda her küçük $\varepsilon > 0$ için

$$F_0 = \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} + \|g\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} + \|h\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} + \|h\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))}$$

olmak üzere

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q(\varepsilon))} \leq C\,\|u\|^{1-\theta}_{H^{1,0}(Q)} F_0^{\theta} + CF_0$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $\theta \in (0,1)$ sabitleri vardır.

Önerme 3.1.1, $\Gamma \times (0,T)$ bölgesinde verilen fonksiyonlar ile $Q(\varepsilon)$ bölgesindeki çözüm için bir kestirim verir ve $Q(\varepsilon)$ ve Γ, $d(x)$ fonksiyonu ile belirlidir. Bir başka deyişle Önerme 3.1.1, keyfi bir Γ alt sınırı için, verilen bir bölgedeki çözüm için kestirim yapmak amacıyla kullanılamaz. Ayrıca, Teorem 2.2.1 kompakt supporta sahip fonksiyonlar için kullanıldığından, kompakt support elde etmek için bazı genişlemelere ihtiyaç duyulur. Bu nedenle, kompakt supporta sahip olmayan fonksiyonlar için bir Carleman kestiriminin verildiği Teorem 2.2.2'den yararlanarak daha keskin bir kestirim gösterilecektir. Üstelik bu durumda kararlılık için alt bölgenin seçimi daha esnek olacaktır.

Teorem 3.1.2 *(Şartlı Kararlılık) $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\partial\Omega$ nın boş kümeden farklı keyfi bir alt sınırı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega \cup \Gamma$, $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$, $\partial\Omega$ nın boş kümeden farklı açık bir alt kümesi ve $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \subsetneqq \Gamma$ olacak şekilde keyfi sınırlı bir Ω_0 bölgesi için*

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{2,1}(\Omega_0\times(\varepsilon,T-\varepsilon))} \leq\ & C\,\|u\|^{1-\theta}_{H^{1,0}(Q)} \left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \|h\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\right)^{\theta} \\ & + C\left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \|h\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\right) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $\theta \in (0,1)$ sabitleri vardır.

Yukarıdaki teoremde, $\Gamma \times (0,T)$ üzerinde $u, \nabla u$ verildiğinde (Cauchy şartlarından), bir $(\varepsilon, T-\varepsilon)$ zaman aralığında $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}$ alt bölgesinde u için kestirim yapılmaktadır. (3.4) kestiriminden, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, $Lu = 0$ ve $\Gamma \times (0,T)$ üzerinde $u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu_a} = 0$ için $\Omega \times (0,T)$ bölgesinde çözümün tekliği elde edilir.

Bu bir çeşit iç kestirimdir ve genellikle iç kestirimler Hölder tipinde kararlılıkları ifade eder. Teorem 3.1.2'de u için bir kestirim yapmak için bir önsel (apriori) sınırın, $\|u\|_{H^{1,0}(Q)}$, kabul edilmesi gerekir. (3.4) kestirimine bir şartlı kararlılık kestirimi denir.

İspat. Önerme 3.1.1'den farklı olarak, burada bir Γ alt sınırı ve bir Ω_0 alt bölgesi verilmiş ve $\Gamma \times (0,T)$ üzerinde verilen Cauchy şartları yardımıyla $\Omega_0 \times (\varepsilon, T-\varepsilon)$ bölgesinde çözüm için bir kestirim yapılması istenmektedir. Ω_0 ve Γ nın geometrik yapısından dolayı, uygun bir φ ağırlık fonksiyonunun yani $d(x)$ in seçilmesi gerekir. Bunun için ilk olarak sınırı düzgün olan sınırlı bir Ω_1 bölgesi

$$\Omega \subsetneqq \Omega_1, \quad \overline{\Gamma} = \overline{\partial\Omega \cap \Omega_1}, \quad \partial\Omega \backslash \Gamma \subset \partial\Omega_1 \tag{3.5}$$

olacak şekilde seçilir. Burada Ω_1, $\partial\tilde{\Omega} \cap \overline{\Omega} = \Gamma$ olmak üzere Ω ve $\tilde{\Omega}$ bölgelerinin birleşimi ile $\Omega_1 \backslash \overline{\Omega}$ boş kümeden farklı bir açık küme içerecek şekilde oluşturulur. $\overline{\omega_0} \subset \Omega_1 \backslash \overline{\Omega}$ olarak seçilip Lemma 2.3.1'in uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} d(x) &> 0, \quad x \in \Omega_1, \quad d(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_1 \\ |\nabla d(x)| &> 0, \quad x \in \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{3.6}$$

özelliklerini sağlayan $d \in C^2(\overline{\Omega_1})$ seçilir.

$\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1$ olduğundan

$$\left\{ x \in \Omega_1 : d(x) > \frac{4}{N} \|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} \right\} \cap \overline{\Omega} \supset \Omega_0 \tag{3.7}$$

olacak şekilde yeterince büyük bir $N > 1$ seçilebilir. Ayrıca $\beta > 0$

$$2\beta\varepsilon^2 > \|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} > \beta\varepsilon^2 \tag{3.8}$$

olacak şekilde seçilmiştir.

$t_0 \in \left[\sqrt{2}\varepsilon, T-\sqrt{2}\varepsilon\right]$ keyfi olarak sabitlensin. Sabitlenmiş bir $\lambda > 0$ büyük parametresi ve $\psi(x,t) = d(x) - \beta(t-t_0)^2$ için $\varphi(x,t) = e^{\lambda\psi(x,t)}$ ve $\mu_k = \exp\left(\lambda\left(\frac{k}{N}\|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} - \frac{\beta\varepsilon^2}{N}\right)\right)$, $k = 1,2,3,4$ ve $D = \left\{(x,t) : x \in \overline{\Omega}, \varphi(x,t) > \mu_1\right\}$ olsun. Bu durumda

$$\Omega_0 \times \left(t_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}, t_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}\right) \subset D \subset \overline{\Omega} \times \left(t_0 - \sqrt{2}\varepsilon, t_0 + \sqrt{2}\varepsilon\right) \tag{3.9}$$

olduğu gösterilebilir.

Bunun için ilk olarak, $(x,t) \in \Omega_0 \times \left(t_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}, t_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}\right)$ olsun. Bu durumda (3.7) den $x \in \overline{\Omega}$ ve $d(x) > \frac{4}{N}\|d\|_{C(\overline{\Omega_1})}$ olur ve böylece

$$d(x) - \beta(t-t_0)^2 > \frac{4}{N}\|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} - \frac{\beta\varepsilon^2}{N},$$

yani $\varphi(x,t) > \mu_4$ elde edilir, bu ise tanımdan $(x,t) \in D$ olmasını gerektirir.

İkinci olarak, $(x,t) \in D$ olduğu kabul edilirse $d(x) - \beta(t-t_0)^2 > \frac{1}{N}\|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} - \frac{\beta\varepsilon^2}{N}$ olur ve böylece

$$\|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} - \frac{1}{N}\|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} + \frac{\beta\varepsilon^2}{N} > \beta(t-t_0)^2$$

elde edilir. (3.8) in uygulanmasıyla $2\left(1-\frac{1}{N}\right)\beta\varepsilon^2 + \frac{\beta\varepsilon^2}{N} > \beta(t-t_0)^2$, yani $2\beta\varepsilon^2 > \beta(t-t_0)^2$ elde edilir. Böylece (3.9) un doğru olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial D &\subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ \Sigma_1 &\subset \Gamma \times (0,T), \quad \Sigma_2 = \{(x,t) : x \in \Omega, \varphi(x,t) = \mu_1\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

olur. $(x,t) \in \partial D$ olsun. Bu durumda $x \in \overline{\Omega}$ ve $\varphi(x,t) \geq \mu_1$ olur. $x \in \partial\Omega$ ve $x \in \Omega$ durumları ayrı ayrı ele alınacaktır. İlk olarak $x \in \Omega$ olsun. $\varphi(x,t) > \mu_1$ ise (x,t), D nin bir iç noktası olacağından, $x \in \Omega$ ise $\varphi(x,t) = \mu_1$ dir.

İkinci olarak $x \in \partial\Omega$ olsun. $x \in \partial\Omega \backslash \Gamma$ ise (3.5) teki üçüncü şarttan $x \in \partial\Omega_1$ ve (3.6) daki ikinci şarttan $d(x) = 0$ olur. Diğer taraftan $\varphi(x,t) \geq \mu_1$ olması durumunda

$$d(x) - \beta(t-t_0)^2 = -\beta(t-t_0)^2 \geq \frac{1}{N}\|d\|_{C(\overline{\Omega_1})} - \frac{\beta\varepsilon^2}{N},$$

yani $0 \leq \beta(t-t_0)^2 \leq \frac{1}{N}\left(\beta\varepsilon^2 - \|d\|_{C(\overline{\Omega_1})}\right)$ olduğu görülür, bu ise (3.8) den dolayı mümkün değildir. Böylece $x \in \Gamma$ olduğu elde edilir ve (3.9) yardımıyla (3.10) un doğru olduğu gösterilmiş olur.

D de uygun sabitlenmiş $\lambda > 0$ için Teorem 2.2.2 uygulanacaktır. Bundan sonraki kısımda $C > 0$, λ ya bağlı s den ve g, h , u nun seçiminden bağımsız genel sabitler için kullanılacaktır. $\partial D \backslash (\Gamma \times (0,T))$ üzerinde herhangi bir bilgi verilmediği için bir kesme fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ fonksiyonu $0 \leq \chi \leq 1$ ve

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1, & \varphi(x,t) > \mu_3, \\ 0, & \varphi(x,t) < \mu_2, \end{cases} \tag{3.11}$$

olacak şekilde tanımlansın ve $v = \chi u$ olsun. Bu durumda D de

$$Lv = \chi f + \chi' u - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\partial_i \chi\right)\partial_j u - \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j\chi\right)u - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i\chi\right)u$$

olur. (3.10) ve (3.11) den Σ_2 de

$$v = |\nabla v| = 0$$

olur. Böylece Teorem 2.2.2'den her $s \geq s_0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_D \left\{\frac{1}{s}\left(|\partial_t v|^2 + \sum_{i,j=1}^{n}|\partial_i\partial_j v|^2\right) + s|\nabla v|^2 + s^3|v|^2\right\} e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int_D f^2 e^{2s\varphi}dxdt + C\int_D \left|\chi' u - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\partial_i\chi\right)\partial_j u\right. \\
&\left. - \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j\chi\right)u - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i\chi\right)u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&+ Ce^{Cs}\int_{\Sigma_1}\left(|\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2 + |v|^2\right)dSdt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.11) den, eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci integral ancak $\mu_2 \leq \varphi(x,t) \leq \mu_3$ olması durumunda sıfır olmaz ve bu nedenle

$$\begin{aligned}
&\int_D \left|\chi' u - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\partial_i\chi\right)\partial_j u - \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j\chi\right)u - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i\chi\right)u\right| e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & Ce^{2s\mu_3}\|u\|^2_{H^{1,0}(Q)}
\end{aligned}$$

olur. (3.7) den ve D nin tanımından, $(x,t) \in \Omega_0 \times \left(t_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}, t_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}\right)$ ise $\varphi(x,t) > \mu_4$ olduğu direkt olarak gösterilebilir. Böylece (3.9) ve (3.11) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
&\int_D \left\{ \frac{1}{s}\left(|\partial_t v|^2 + \sum_{i,j=1}^n |\partial_i \partial_j v|^2 \right) + s|\nabla v|^2 + s^3 |v|^2 \right\} e^{2s\varphi} dxdt \\
\geq & \int_{t_0-\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}}^{t_0+\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}} \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{s}\left(|\partial_t v|^2 + \sum_{i,j=1}^n |\partial_i \partial_j v|^2 \right) + s|\nabla v|^2 + s^3 |v|^2 \right\} e^{2s\varphi} dxdt \\
\geq & \; e^{2s\mu_4} \int_{t_0-\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}}^{t_0+\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}} \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{s}\left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^n |\partial_i \partial_j u|^2 \right) + s|\nabla u|^2 + s^3 |u|^2 \right\} dxdt
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.12) den

$$\begin{aligned}
& e^{2s\mu_4} \int_{t_0-\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}}^{t_0+\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}} \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{s}\left(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^n |\partial_i \partial_j u|^2 \right) + s|\nabla u|^2 + s^3 |u|^2 \right\} dxdt \\
\leq & \; C\int_D f^2 e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{2s\mu_3} \|u\|^2_{H^{1,0}(Q)} \\
& +Ce^{Cs} \int_{\Gamma\times(0,T)} \left(|\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2 + |v|^2 \right) dSdt
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$F = \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \|h\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}$$

olarak tanımlanır ve

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\times(0,T)} |\nabla v|^2 dSdt \;\; &\leq \;\; 2\int_{\Gamma\times(0,T)} \left(\chi^2 |\nabla u|^2 + |\nabla \chi|^2 u^2 \right) dSdt \\
&\leq \;\; C\int_{\Gamma\times(0,T)} \left(|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2 \right) dSdt
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınırsa her $s \geq s_0$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0-\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}}^{t_0+\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}} \int_{\Omega_0} \left\{ |\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^n |\partial_i \partial_j u|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2 \right\} dxdt \\
\leq & \;\; Cse^{-2s(\mu_4-\mu_3)} \|u\|^2_{H^{1,0}(Q)} + Ce^{Cs}F^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sup_{s>0} se^{-s(\mu_4-\mu_3)} < \infty$ olduğundan $e^{-2s(\mu_4-\mu_3)}$ için sağ taraftan $Ce^{-s(\mu_4-\mu_3)}$ ile kestirim yapılabilir. Ayrıca C ile Ce^{Cs_0} yer değiştirilirse her $s \geq 0$ için

$$\|u\|^2_{H^{2,1}(\Omega_0\times(t_0-\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}, t_0+\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}))} \leq Ce^{-s(\mu_4-\mu_3)} \|u\|^2_{H^{1,0}(Q)} + Ce^{Cs}F^2 \tag{3.13}$$

Burada C sabiti aynı zamanda t_0 dan da bağımsızdır.

(3.13) te $\sqrt{2}\varepsilon + \frac{m\varepsilon}{\sqrt{N}} \leq T - \sqrt{2}\varepsilon \leq \sqrt{2}\varepsilon + \frac{(m+1)\varepsilon}{\sqrt{N}} \leq T$ olacak şekilde $t_0 = \sqrt{2}\varepsilon + \frac{j\varepsilon}{\sqrt{N}}$, $j = 0, 2, ..., m$ seçilip, j ye göre toplam alındığında, N nin yeterince büyük olduğu dikkate alınarak ve $\sqrt{2}\varepsilon$ ile ε yer değiştirilerek, her $s \geq 0$ için

$$\|u\|_{H^{2,1}(\Omega_0\times(\varepsilon,T-\varepsilon))} \leq Ce^{-s(\mu_4-\mu_3)} \|u\|^2_{H^{1,0}(Q)} + Ce^{Cs}F^2 \tag{3.14}$$

elde edilir.

Bu durumda ilk olarak $F = 0$ kabul edilir ve (3.14) te $s \to \infty$ için limit alınırsa $\Omega_0 \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$ da $u = 0$ olur ve Teorem 3.1.2'deki sonucun doğru olduğu görülür.

İkinci olarak $F \neq 0$ olsun. $F \geq \|u\|_{H^{2,1}(Q)}$ olması durumunda (3.14) ten $s \geq 0$ için $\|u\|_{H^{2,1}(\Omega_0\times(\varepsilon,T-\varepsilon))} \leq Ce^{Cs}F$ olur ve ispat tamamlanır. $F < \|u\|_{H^{2,1}(Q)}$ olması durumunda $s > 0$, (3.14) ün sağ tarafını minimum yapacak şekilde, yani

$$e^{-s(\mu_4-\mu_3)} \|u\|^2_{H^{1,0}(Q)} = e^{Cs}F^2$$

eşitliği sağlanacak şekilde seçilsin. $F \neq 0$ olduğundan

$$s = \frac{2}{C + \mu_4 - \mu_3} \log \frac{\|u\|_{H^{1,0}(Q)}}{F} > 0$$

olarak seçilebilir. Bu durumda (3.14) ten

$$\|u\|_{H^{2,1}(\Omega_0\times(\varepsilon,T-\varepsilon))} \leq 2C \|u\|^{\frac{C}{C+\mu_4-\mu_3}}_{H^{1,0}(Q)} F^{\frac{\mu_4-\mu_3}{C+\mu_4-\mu_3}}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.1.2'nin ispatı tamamlanır. ■

Daha iyi bir kestirim yapmak amacıyla kompakt supporta sahip olmayan fonksiyonlar için verilmiş olan Teorem 2.2.2'den yararlanılmıştır. Kompakt supporta sahip fonksiyonlar için bir Carleman kestirimi kullanılması durumunda, g ve h fonksiyonlarının $H|_{\Gamma\times(0,T)} = g$ ve $\frac{\partial H}{\partial \nu_A}|_{\Gamma\times(0,T)} = h$ olacak şekilde Q bölgesinde H fonksiyonlarına genişletilmesi gerekir. $\tilde{u} = u - H$ olarak tanımlanır ve (3.11) ile tanımlanan χ fonksiyonu kullanılırsa Cauchy problemi için Önerme 3.1.1'de verilen kararlılık kestirimi elde edilir.

3.2 TERS KATSAYI PROBLEMİ İÇİN LOKAL HÖLDER KARARLILIĞI

$$\partial_t u = \operatorname{div}(p(x)\nabla u(x,t)), \quad (x,t) \in Q \tag{3.15}$$

denklemi için bir ters katsayı problemi ele alınacaktır. $0 < t_0 < T$ herhangi sabitlenmiş bir değer ve $\Gamma_0 \equiv \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$ bir alt sınır olmak üzere $\Omega_0 \subset \Omega$ bir alt bölge olsun.

Bu durumda ele alınacak olan ters problem aşağıda tanımlanmıştır.

Ters katsayı problemi. *Ω da verilen $u(.,t_0)$ ve $u|_{\Gamma_0\times(0,T)}$, $\nabla u|_{\Gamma_0\times(0,T)}$ yardımıyla $p(x),\ x \in \Omega$ katsayısının bulunması problemi.*

Bu bölümde amaç yukarıda verilen ters katsayı problemi için teklik ve kararlılığın incelenmesidir. Bölüm 2.3'te verilen global Carleman kestirimleri ile Ω bölgesinde global Lipschitz kestirimi elde edilirken, Bölüm 2.2'de verilen lokal Carleman kestirimleri yardımıyla katsayının belirlenmesi için Hölder tipinde lokal kestirim elde edilir.

u, (3.15) denklemini ve v,

$$\partial_t v = \operatorname{div}(q(x)\nabla v(x,t)), \quad (x,t) \in Q \tag{3.16}$$

denklemini sağlasın. Bilinmeyen p, q katsayıları için uygun bir çözüm kümesi olarak, $M > 0$ herhangi bir sabit olmak üzere

$$A = \left\{ p \in C^2(\overline{\Omega}) : \overline{\Omega} \text{ da } p > 0, \|p\|_{C^2(\overline{\Omega}))} \leq M \right\} \tag{3.17}$$

tanımlansın. Yani bilinmeyen katsayılar $C^2(\overline{\Omega}\ )$-normları ile düzgün sınırlı olsun. Ayrıca u ve v çözümleri yeterince düzgün olsun, böylece t ye göre istenilen mertebeden türevleri alınabilir.

Teorem 2.2.2 ile verilen Carleman kestiriminin uygulanması için, bir ağırlık fonksiyonu ve bu ağırlık fonksiyonu tarafından belirlenen bir alt bölge tanımlanır. $x' = (x_2, ..., x_n)$, $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n$ ve bazı $\gamma > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\Omega(\delta) = \left\{ (x_1, x') : 0 < x_1 < -\frac{1}{\gamma}|x'|^2 + \frac{\delta}{\gamma} \right\} \tag{3.18}$$

olsun. $\Omega(4\delta) \subset \Omega$ ve $\Gamma_0 \subset \{x_1 = 0\}$ olduğu kabul edilsin. Verilen bir Ω için Bölüm 3.1'deki yöntem ağırlık fonksiyonu için özel bir d seçimiyle uygulanabilir, ancak burada basitlik için bölge $\Omega(\delta)$ formunda ele alınacaktır.

Ağırlık fonksiyonu

$$\varphi(x,t) = e^{\lambda\psi(x,t)}, \quad \psi(x,t) = -\gamma x_1 - |x'|^2 - \beta(t-t_0)^2 \tag{3.19}$$

olarak alınacaktır. Daha geniş bir $\Omega(\delta)$ bölgesinde kararlılığı ispatlamak için ağırlık fonksiyonu olarak, $m \in N$ olmak üzere $\psi(x,t) = -\gamma x_1 - |x'|^{2m} - \beta(t-t_0)^2$ gibi farklı seçimler de mümkündür, ancak burada (3.19) da verilen basit bir ağırlık fonksiyonu seçilmiştir.

$\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} Q(\delta) &= \left\{(x,t) : x_1 > 0, \varphi(x,t) > e^{-\lambda\delta}\right\} \\ &= \{(x,t) : x_1 > 0, \psi(x,t) > -\delta\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

olsun. Bu durumda $Q(\delta) \cap \{t = t_0\} = \Omega(\delta)$ olur. $\beta > 0$ ve $\delta > 0$,

$$\sqrt{\frac{4\delta}{\beta}} < t_0 < T - \sqrt{\frac{4\delta}{\beta}} \tag{3.21}$$

olacak şekilde seçilsin. $\Omega(4\delta) \subset \Omega$ olduğundan $Q(4\delta) \subset Q$ olur.

$$y = u - v, \quad f = p - q, \quad R = v, \quad (x,t) \in Q$$

olsun. Bu durumda

$$\partial_t y = \operatorname{div}(p\nabla y) + \operatorname{div}(f\nabla R), \quad (x,t) \in Q \tag{3.22}$$

olur. y kompakt supporta sahip olmadığından bir kesme fonksiyonunun tanımlanması gerekir. $Q(4\delta) \supset Q(3\delta) \supset Q(2\delta) \supset Q(\delta)$ olduğundan, $0 \le \chi \le 1$ ve

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in Q(2\delta), \\ 0, & (x,t) \in Q(4\delta) \backslash \overline{Q(3\delta)}, \end{cases} \tag{3.23}$$

olacak şekilde bir $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ kesme fonksiyonu vardır.

u ve v nin yeterince düzgün oluşundan

$$z_{1=}\chi\partial_t y, \quad z_{2=}\chi\partial_t^2 y$$

tanımlanabilir ve direkt hesaplamalar yardımıyla

$$\begin{aligned} \partial_t z_k - \operatorname{div}(p\nabla z_k) &= \chi \operatorname{div}(f\nabla\partial_t^k R) + (\partial_t\chi)\left(\partial_t^k y\right) - p\,(\Delta\chi)\,\partial_t^k y \\ &\quad -2p\,(\nabla\chi).\nabla\left(\partial_t^k y\right) - (\nabla p.\nabla\chi)\,\partial_t^k y, \quad k = 1,2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} G_k(\nabla_{x,t}\chi,\Delta\chi)(x,t) &= G_k(x,t)=(\partial_t\chi)\left(\partial_t^k y\right)-p\,(\Delta\chi)\,\partial_t^k y \\ &\quad -2p\,(\nabla\chi)\,.\nabla\left(\partial_t^k y\right)-(\nabla p.\nabla\chi)\,\partial_t^k y, \quad k=1,2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{x,t}\chi(x,t) &= \Delta\chi(x,t)=0 \text{ ise } G_k(x,t)=0 \\ |G_1(x,t)|+|G_2(x,t)| &\leq C\left(\sum_{k=1}^{2}\left|\partial_t^k y(x,t)\right|+\left|\nabla\partial_t^k y(x,t)\right|\right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.18) ve (3.23) ten

$$z_k=|\nabla z_k|=0, \quad (x,t)\in\partial Q(4\delta)\backslash\left(\Gamma_0\times(0,T)\right), \quad k=1,2 \tag{3.27}$$

olur.

$$\begin{aligned} F^2 &= \sum_{k=1}^{3}\left\|\partial_t^k\,(u-v)\right\|^2_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} \\ &\quad +\sum_{k=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial\nu}\partial_t^k\,(u-v)\right\|^2_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}+\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}\partial_t^k\,(u-v)\right\|^2_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Böylece, $\lambda>0$ büyük olarak sabitlenirse Teorem 2.2.2'den her büyük $s>0$ için

$$\begin{aligned} &\int_{Q(4\delta)}\left(\frac{1}{s}\sum_{i,j=1}^{n}|\partial_i\partial_j z_k|^2+s\,|\nabla z_k|^2+s^3 z_k^2\right)e^{2s\varphi}dxdt \\ &\leq C\int_{Q(4\delta)}\chi^2\left|\mathrm{div}(f\nabla\partial_t^k R)\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\ &+C\int_{Q(4\delta)}G_k^2 e^{2s\varphi}dxdt+Ce^{Cs}F^2, \quad k=1,2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\nabla z_k=(\nabla\chi)\,\partial_t^k y+\chi\nabla\partial_t^k y$$

ve

$$\partial_i\partial_j z_k=\chi\partial_i\partial_j\partial_t^k y+(\partial_i\chi)\left(\partial_j\partial_t^k y\right)+(\partial_j\chi)\left(\partial_i\partial_t^k y\right)+(\partial_i\partial_j\chi)\left(\partial_t^k y\right)$$

olduğundan her büyük $s>0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{Q(4\delta)} \chi^2 \left(\frac{1}{s} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\partial_i \partial_j \partial_t^k y\right|^2 + s\left|\nabla \partial_t^k y\right|^2 + s^3 \left|\partial_t^k y\right|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt \\
\leq\ & C \int_{Q(4\delta)} \chi^2 \left(|\nabla f|^2 + f^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{Cs} F^2 \\
& + C \int_{Q(4\delta)} \left(\frac{1}{s} \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_i \chi|^2 \left|\partial_j \partial_t^k y\right|^2 + |\partial_j \chi|^2 \left|\partial_i \partial_t^k y\right|^2 + |\partial_i \partial_j \chi|^2 \left|\partial_t^k y\right|^2 \right. \\
& \left. + G_k^2 + s|\nabla \chi|^2 \left|\partial_t^k y\right|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt, \quad k=1,2
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.23) ve (3.26) dan

$$\begin{aligned}
&\int_{Q(4\delta)} \chi^2 \left(\frac{1}{s} \sum_{i,j=1}^{n} \left|\partial_i \partial_j \partial_t^k y\right|^2 + s\left|\nabla \partial_t^k y\right|^2 + s^3 \left|\partial_t^k y\right|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt \\
\leq\ & C \int_{Q(4\delta)} \left(|\nabla(\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + Cs^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} + Ce^{Cs} F^2,
\end{aligned}$$

olduğu görülür, burada

$$\begin{cases} M_1 = \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} \left(\left\|\nabla^j \partial_t^k u\right\|_{L^\infty(Q)}^2 + \left\|\nabla^j \partial_t^k v\right\|_{L^\infty(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + M, \\ \mu_1 = e^{-2\lambda\delta} > 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Böylece her büyük $s>0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{Q(4\delta)} \chi^2 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\left|\partial_i \partial_j \partial_t^2 y\right|^2 + |\partial_i \partial_j \partial_t y|^2 \right) + s^2 \left|\nabla \partial_t^2 y\right|^2 \right. \\
& \left. + s^2 |\nabla \partial_t y|^2 + s^4 \left|\partial_t^2 y\right|^2 + s^4 |\partial_t y|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt \\
\leq\ & C \int_{Q(4\delta)} s \left(|\nabla(\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt + Cs^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} + Ce^{Cs} F^2,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

elde edilir.

$$a(x) = (u-v)(x,t_0) = y(x,t_0), \quad b(x) = v(x,t_0), \quad x \in \Omega \tag{3.30}$$

olarak tanımlanırsa (3.22) den

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\nabla b) &= \partial_t y(.,t_0) - \operatorname{div}(p\nabla a), \\
\nabla \operatorname{div}(f\nabla b) &= \nabla \partial_t y(.,t_0) - \nabla \operatorname{div}(p\nabla a), \quad x \in \Omega
\end{aligned}$$

olup, böylece

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\chi f\nabla b) &= \chi \partial_t y(.,t_0) - \chi \operatorname{div}(p\nabla a) - \nabla\chi . f\nabla b \\
\partial_i \operatorname{div}(\chi f\nabla b) &= \chi \partial_i \partial_t y(.,t_0) + (\partial_i \chi)\, \partial_t y(.,t_0) \\
&\quad - \partial_i(\chi \operatorname{div}(p\nabla a)) - \partial_i(\nabla\chi . f\nabla b)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. Ayrıca (3.23) ve (3.26) yardımıyla, (3.31) den

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(4\delta)} \left(|\mathrm{div}(\chi f \nabla b)|^2 + |\nabla \,\mathrm{div}(\chi f \nabla b)|^2\right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \\ \leq \; & C \int_{\Omega(4\delta)} \chi^2(x,t_0) \left(|\partial_t y(x,t_0)|^2 + |\nabla \partial_t y(x,t_0)|^2\right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \\ & + C M_1^2 e^{2s\mu_1} + C e^{Cs} \|a\|^2_{H^3(\Omega(4\delta))} \end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir.

$j = 0, 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left\|\chi \nabla^j (\partial_t y) e^{s\varphi}\right\|^2_{H^1(Q(4\delta))} \\ = \; & \int_{Q(4\delta)} \left(\left|\partial_t \left(\chi \nabla^j (\partial_t y) e^{s\varphi}\right)\right|^2 + \left|\nabla \left(\chi \nabla^j (\partial_t y) e^{s\varphi}\right)\right|^2 + \left|\chi \nabla^j (\partial_t y) e^{s\varphi}\right|^2 \right) e^{2s\varphi} dx dt \end{aligned}$$

için kestirim yapılırsa (3.23) ve (3.29) dan her büyük $s > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left\|\chi \nabla^j (\partial_t y) e^{s\varphi}\right\|^2_{H^1(Q(4\delta))} \\ \leq \; & \int_{Q(4\delta)} \chi^2 \left(\left|\nabla^j \left(\partial_t^2 y\right)\right|^2 + s^2 \left|\nabla^j (\partial_t y)\right|^2 + \left|\nabla^{j+1} (\partial_t y)\right|^2 \right) e^{2s\varphi} dx dt \\ & + C \int_{Q(4\delta)} \left(|\partial_t \chi|^2 + |\nabla \chi|^2\right) + \left|\nabla^j (\partial_t y)\right|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ \leq \; & C \int_{Q(4\delta)} s \left(|\chi f|^2 + |\nabla (\chi f)|^2\right) e^{2s\varphi} dx dt + C s^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} + C e^{Cs} F^2, \\ j \; = \; & 0, 1 \end{aligned}$$

olur. $\Omega(4\delta)$ bölgesinde iz teoremi uygulanır ve

$Q(4\delta) \cap \{t = t_0\} = \Omega(4\delta)$

olduğu dikkate alınırsa her büyük $s > 0$ için

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(4\delta)} \chi^2(x,t_0) \left(|\partial_t y(x,t_0)|^2 + |\nabla \partial_t y(x,t_0)|^2\right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \\ \leq \; & C \sum_{j=0}^{1} \left\|\chi \nabla^j (\partial_t y) e^{s\varphi}\right\|^2_{H^1(Q(4\delta))} \\ \leq \; & C \int_{Q(4\delta)} s \left(|\chi f|^2 + |\nabla (\chi f)|^2\right) e^{2s\varphi} dx dt + C s^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} + C e^{Cs} F^2, \\ j \; = \; & 0, 1 \end{aligned} \tag{3.33}$$

olup, (3.32) ve (3.33) ten

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(4\delta)} \left(|\operatorname{div}(\chi f \nabla b)|^2 + |\nabla \operatorname{div}(\chi f \nabla b)|^2\right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \\
\leq\ & C \int_{Q(4\delta)} s\left(|\chi f|^2 + |\nabla(\chi f)|^2\right) e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C e^{Cs}\left(F^2 + \|a\|^2_{H^3(\Omega(4\delta))}\right) + C s^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\|f\|^2_{H^1\Omega(\delta)}$ için sol taraftan kestirim yapılması gerekmektedir. Bunun için birinci mertebeden kısmi diferensiyel operatörü için $e^{2s\varphi(x,t_0)}$ ağırlık fonksiyonunun yer aldığı bir kestirime ihtiyaç duyulur.

Lemma 3.2.1

$$(P_0 g)(x) = \operatorname{div}(g \nabla b), \quad x \in \Omega(4\delta)$$

olsun ve

$$\begin{cases} \gamma \partial_1 b(x) + 2\sum_{i=2}^{n} (\partial_i b)\, x_i < 0, & x \in \overline{\Omega(4\delta)}, \\ \partial_1 b(0, x') > 0, & (0, x') \in \Gamma_0 \end{cases} \qquad (3.35)$$

kabul edilirse her büyük $s > 0$ ve $\partial\Omega(4\delta) \backslash \{x_1 = 0\}$ üzerinde $|g| = |\nabla g| = 0$ olacak şekilde her $g \in H^2(\Omega(4\delta))$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(4\delta)} s^2\left(|(\nabla g)|^2 + g^2\right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \\
\leq\ & C \int_{\Omega(4\delta)} \left(|\nabla(P_0 g)(x))|^2 + |(P_0 g)(x)|^2\right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

Genel durum aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.2.2 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sınırı düzgün olan sınırlı bir bölge ve $v = (v_1, ..., v_n)$, $\partial\Omega$ sınırının dış normal vektörü olmak üzere*

$$(P_0 g)(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \partial_j g(x) + p_0(x) g(x),$$

birinci mertebeden kısmi diferensiyel operatörü ele alınsın, burada $p_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $p_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, ..., n$ dir. $\varphi_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ fonksiyonunun

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(x) \partial_j \varphi_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega} \qquad (3.37)$$

özelliğini sağladığı kabul edilirse, her $s > s_0$ ve

$$|\nabla g| = |g| = 0, \qquad \left\{ x \in \partial\Omega : \sum_{j=1}^{n} p_j(x) v_j \geq 0 \right\} \tag{3.38}$$

özelliğini sağlayan $g \in H^2(\Omega)$ için

$$\int_\Omega s^2 \left(|(\nabla g)|^2 + g^2 \right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \leq C_1 \int_\Omega \left(|\nabla (P_0 g)|^2 + |P_0 g|^2 \right) e^{2s\varphi_0} dx$$

olacak şekilde $s_1 > 0$ ve $C_1 = C_1(s_0, \Omega) > 0$ vardır.

Bu lemmanın ispatı (Yamamoto 2009)'da verilmiştir. Lemma 3.2.2'de $\Omega = \Omega(4\delta)$, $p_j = \partial_i b$, $j = 1, ..., n$, $\varphi_0(x) = \exp(\lambda(-\gamma x_1 - |x'|^2))$ olarak alınırsa (3.35) yardımıyla (3.37) ve (3.38) elde edilir ve Lemma 3.2.1 ispatlanmış olur.

Lemma 3.2.1, χf ve $P_0 g = \mathrm{div}(g \nabla b)$ için uygulanırsa (3.34) ten her büyük $s > 0$ için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(4\delta)} s^2 \left(|\nabla (\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx &\leq C \int_{Q(4\delta)} s \left(|\nabla (\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C e^{Cs} \left(F^2 + \|a\|^2_{H^3(\Omega(4\delta))} \right) + C s^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\varphi(x,t) \leq \varphi(x,t_0), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.39}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega(4\delta)} \left(|\nabla (\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx &\leq CsT \int_{\Omega(4\delta)} \left(|\nabla (\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx dt \\ &\quad + C e^{Cs} \left(F^2 + \|a\|^2_{H^3(\Omega(4\delta))} \right) + C s^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} \end{aligned}$$

olduğu görülür ve $s > 0$ parametresi $s \geq s_0$ olacak şekilde yeterince büyük seçilirse eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim sol tarafa dahil edilebilir ve her $s \geq s_0$ için

$$\begin{aligned} & s^2 \int_{\Omega(4\delta)} \left(|\nabla (\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \\ \leq\ & C e^{Cs} \left(F^2 + \|a\|^2_{H^3(\Omega(4\delta))} \right) + C s^2 M_1^2 e^{2s\mu_1} \end{aligned}$$

olur. $F_1^2 = F^2 + \|a\|^2_{H^3(\Omega(4\delta))}$ olsun. $\Omega(\delta) \subset \Omega(4\delta)$ ve $x \in \overline{\Omega}$ için $e^{2s\varphi(x,t_0)} \geq 1$ olduğundan, (3.23) ten her $s \geq s_0$ için

$$\begin{aligned} e^{2se^{-\lambda\delta}} \int_{\Omega(\delta)} \left(|\nabla f|^2 + |f|^2 \right) dx &\leq \int_{\Omega(4\delta)} \left(|\nabla (\chi f)|^2 + |\chi f|^2 \right) e^{2s\varphi(x,t_0)} dx \\ &\leq C e^{Cs} F_1^2 + C M_1^2 e^{2s\mu_1} \end{aligned}$$

elde edilir. $\mu_2 = e^{-\lambda\delta}$ olarak tanımlanırsa her $s \geq s_0$ için

$$\int_{\Omega(\delta)} \left(|\nabla f|^2 + |f|^2\right) dx \leq Ce^{Cs}F_1^2 + CM_1^2 e^{-2s(\mu_2-\mu_1)} \tag{3.40}$$

olur, burada $\mu_2 - \mu_1 > 0$ dır. e^{Cs_0} ile C yer değiştirilirse her $s \geq s_0$ için (3.40) elde edilir. $F_1 \neq 0$ olduğu kabul edilebilir ve $s \geq 0$, (3.40) ın sağ tarafını minimum yapacak şekilde seçilebilir:

$$e^{Cs}F_1^2 = M_1^2 e^{-2s(\mu_2-\mu_1)},$$

yani

$$s = \frac{2}{C + 2(\mu_2 - \mu_1)} \log \frac{M_1}{F_1}.$$

Bu durumda (3.40) tan

$$\|f\|_{H^1(\Omega(\delta))} \leq \sqrt{2}CM_1^{\frac{C}{C+2(\mu_2-\mu_1)}} F_1^{\frac{2(\mu_2-\mu_1)}{C+2(\mu_2-\mu_1)}}$$

elde edilir. Bu kısımda elde edilenlerin sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.2.3 *u ve v sırasıyla* (3.15) *ve* (3.16) *yı sağlasın.* $0 < \delta < \delta'$ *için* $\Omega(\delta') \subset \Omega$ *ve* $\Gamma_0 \subset \{x_1 = 0\}$ *olsun.*

$$\sum_{k=0}^{2} \left(\left\|\partial_t^k u\right\|_{L^\infty(Q)} + \left\|\partial_t^k v\right\|_{L^\infty(Q)} + \left\|\nabla\partial_t^k u\right\|_{L^\infty(Q)} + \left\|\nabla\partial_t^k v\right\|_{L^\infty(Q)} \right) \leq M$$

olduğu kabul edilsin ve A ve $\Omega(\delta)$, $\delta > 0$ olmak üzere (3.17) *ve* (3.18) *ile tanımlansın. Ayrıca $b = u(.,t_0)$ veya $b = v(.,t_0)$,* (3.35) *şartlarını sağlasın. Bu durumda $\delta \in (0, \delta')$ için, p, $q \in A$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} \|p - q\|_{H^1(\Omega(\delta))} \leq\ & CM^{1-\theta} \Bigg\{ \|(u-v)(.,t_0)\|_{H^3(\Omega(\delta')} \\ & + \sum_{k=1}^{3} \left\|\partial_t^k (u-v)\right\|_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} \\ & + \sum_{k=1}^{2} \Bigg(\left\| \frac{\partial}{\partial\nu}\partial_t^k (u-v) \right\|_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} \\ & + \left\| \frac{\partial}{\partial\tau}\partial_t^k (u-v) \right\|_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} \Bigg) \Bigg\}^{\theta} \end{aligned} \tag{3.41}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $\theta \in (0,1)$ vardır.

$\Omega(\delta)$ da yapılan kestirimde daha geniş bir $\Omega(\delta')$ bölgesinde $t = t_0 > 0$ için çözüm hakkında bilgi verilmesi gerekir. Teklik için ise böyle bir geniş kümeye ihtiyaç yoktur, yani yukarıdaki yöntem teklik sonucunu verir: Eğer $u = v$, $\Gamma_0 \times (0,T)$ de $\nabla u = \nabla v$ ve $\Omega(\delta)$ da $u(.,t_0) = v(.,t_0)$ ise $x \in \Omega(\delta)$ için $p(x) = q(x)$ olur.

Bilinmeyen katsayılar ve çözümler uygun normlar ile önsel (apriori) sınırlı bir alt kümede verilmiş ise katsayılar için (3.41) kestirimi sağlanır ve (3.41), ters problem için şartlı kararlılık kestirimi olarak adlandırılır. (3.41) deki θ kuvveti M önsel sınırına bağlıdır ve $M \to \infty$ iken $\theta \to 0$ olur, yani M büyüdükçe (3.41) kestirimi zayıflar.

Uyarı 3.2.1 *Yukarıda verilen yöntem* Γ_0 *ın herhangi bir alt sınır olması durumunda Hölder tipinde bir kestirim elde etmek içindir. Diğer taraftan* $\partial\Omega \times (0,T)$ *üzerinde (sınırın tamamında) bir koşul verilmesi durumunda herhangi bir* Γ_0 *alt sınırındaki Cauchy şartı yardımıyla* (3.35) *gibi uygun pozitiflik şartı altında Lipschitz kararlılığı elde edilebilir.* $p(x)$ *katsayısını belirlemek amacıyla* Ω *üzerinde Lipschitz kararlılığını ispatlamak için Teorem* 2.3.2 *ve Teorem* 2.3.4 *ile verilen global Carleman kestirimleri uygulanabilir (Yamamoto 2009).*

KAYNAKLAR

Adams R A (1975) *Sobolev Spaces*. Academic, New York.

Bukhgeim A L and Klibanov M V (1981) Global uniqueness of a class of multidimensional inverse problems. *Sov. Math. Dokl.* 24: 244–247.

Bukhgeim A L (2000) *Introduction to the Theory of Inverse Problems*. VSP, Utrecht.

Carleman T (1939) Sur un probleme dunicite pour les systemes dequations aux derivees partielles a deux variables independentes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 2: B1–B9.

Chae D, Imanuvilov O Y and Kim S M (1996) Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions. *J. Dyn. Control Syst.*, 2: 449–483.

Egorov Y V (1986) *Linear Differential Equations of Principal Type*. Consultants Bureau, New York.

Eller M M and Isakov V (2000) Carleman estimates with two large parameters and applications. *Contemp. Math.*, 268: 117–136.

Evans L C (1997) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence RI.

Fursikov A V and Imanuvilov O Y (1996) *Controllability of Evolution Equations*. Lecture Notes Series Vol:34 Seoul National University, Korea.

Gilbarg D and Trudinger N S (2001) *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin.

Hörmander L (1963) *Linear Partial Differential Operators*. Springer, Berlin.

Hörmander L (1985) *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV*. Springer, Berlin.

Imanuvilov O Y (1995) Controllability of parabolic equations. *Sbornik Math.*, 186: 879–900.

Imanuvilov O Y, Puel J-P and Yamamoto M (2009) Carleman estimates for parabolic equations with nonhomogeneous boundary conditions. *Chinese Ann. Math.*, 30: 333–378.

Imanuvilov O Y and Yamamoto M (1998) Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate. *Inverse Problems*, 14: 1229–1245.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Isakov V (1986) A nonhyperbolic Cauchy problem for $\square_b \square_c$ and its applications to elasticity theory. *Commun. Pure Appl. Math.*, 39: 747–767.

Isakov V (1990) *Inverse Source Problems.* American Mathematical Society, Providence RI.

Isakov V (1993) Carleman type estimates in an anisotropic case and applications. *J. Diff. Eqns.*, 105: 217–238.

Isakov V (2004a) Carleman type estimates and their applications. *New Analytic and Geometric Methods in Inverse Problems*, Springer, Berlin, pp. 93–125.

Isakov V (2004b) Carleman estimates and applications to inverse problems. *Milan J. Math.*, 72: 249–271.

Isakov V (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Springer, Berlin.

Isakov V and Kim N (2008a) Carleman estimates with second large parameter for second order operators. *Some Applications of Sobolev Spaces to PDE*, Springer, Berlin, pp. 135–160.

Isakov V and Kim N (2008b) Carleman estimates with second large parameter and applications to elasticity with residual stress. *Appl. Math.*, 35: 447–465.

Klibanov M V (2000) Carleman estimates and inverse problems in last two decades. *Surveys on Solutions Methods for Inverse Problems*, Springer, New York, pp. 119-146.

Klibanov M V and Timonov A A (2004) *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications.* VSP, Utrecht.

Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P (1986) *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* American Mathematical Society, Providence RI.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow.

Tataru D (1996) Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems. *J. Math. Pures Appl.*, 75: 367–408.

Taylor M (1981) *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, Princeton NJ.

Tikhonov A N and Arsenin V Ya (1979) *Methods of Solution of Ill Posed Problems*. Nauka, Moscow.

Tikhonov A N, Arsenin V Ya and Timonov A A (1987) *Mathematical Problems of Computerized Tomography*. Nauka, Moscow.

Treves F (1970) *Linear Partial Differential Equations*. Gordon and Breach, New York.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Vladimirov V S (1984) *Equations of Mathematical Physics.* MIR, Moscow.

Yuan G and Yamamoto M (2009) Lipshitz stability in the determination of the principal part of a parabolic equation. *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 15: 525–554.

ÖZGEÇMİŞ

Sezin YILMAZ, 1986'da Zonguldak'ta doğdu; ilk ve orta öğrenimini TED Zonguldak Koleji'nde tamamladıktan sonra 2003 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. 2010 yılında Arkas Holding'de SAP-HR Danışmanı olarak çalışmaya başladı. 2011 yılında Yüksek lisans tezi nedeni ile çalışma hayatına ara verdi. Halen 2009 yılında girdiği ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : M.Kutay Cad. Fatih Sitesi
Evko Yapı Koop. 66/E Blok
Kat:1 Daire:1 67600
Kozlu / ZONGULDAK

Tel : (372) 266 07 37
E-posta : sezin_yilmaz_@hotmail.com