DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN AĞIRLIKLI UZAYLARDA BİR YAKLAŞIM

Şaziye ALTINTAŞ

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran 2012

KABUL:

Şaziye ALTINTAŞ tarafından hazırlanan "DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN AĞIRLIKLI UZAYLARDA BİR YAKLAŞIM" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 19/06/2012

Başkan: Doç. Dr. Tülin COŞKUN (BEÜ) ....

Üye : Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI (AÜ) ....

Üye :Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (BEÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2012

Prof. Dr. Özden ÖZEL GÜVEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Şaziye ALTINTAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN AĞIRLIKLI UZAYLARDA BİR YAKLAŞIM

Şaziye ALTINTAŞ

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tülin COŞKUN

Haziran 2012, 95 sayfa

Bu tezde ilk bölüm; tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Bu bölümde bazı fonksiyon uzaylarının genel özellikleri tanıtılmıştır.

İkinci bölümde ise doğrusal pozitif operatörlerin genel özellikleri verilerek $C[a,b]$, $C_\rho(\mathbb{R}^m)$, $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzaylarında Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde $C[a,b]$ ve $C_\rho[0,\infty)$ uzayları için klasik anlamda süreklilik modülünün genel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, C_{2m} uzayı tanımlanarak bu uzayın bir alt uzayı olan C_{2m}^0 uzayında Korovkin tipli bir teoremin varlığı kanıtlanarak C_{2m} uzayında benzer bir teoremin geçerli olmadığı kanıtlanmıştır. Daha sonra C_{2m}^0 ağırlık uzayında süreklilik modülü tanımlanarak bu uzaydaki fonksiyonlara literatürde Gadjiev-İbragimov operatörü olarak bilinen operatörle

ÖZET (devam ediyor)

yaklaşım yapılmıştır. Gadjiev-İbragimov operatörünün n.momenti için bir eşitlik kanıtlanarak süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Doğrusal Pozitif Operatör, Korovkin Teoremi, Gadjiev-İbragimov Operatörü, Süreklilik Modülü, Ağırlıklı Süreklilik Modülü

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

AN APPROXIMATION FOR SEQUENCES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS IN WEIGHTED SPACES

Şaziye ALTINTAŞ

Bulent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Tülin COŞKUN
June 2012, 95 pages

The first chapter in this thesis is devoted to fundamental definitions and theorems In this chapter general properties of some function spaces are presented.

In the second chapter general properties of linear positive operators are given, and approximation theorems for Korovkin Type in spaces $C[a,b], C_\rho(\mathbb{R}^m)$ and $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ are introduced.

In the third chapter, general properties of classical modulus of continuity for spaces $C[a,b]$ and $C_\rho[0,\infty)$ are given.

In the fourth chapter; by defining space C_{2m}, in the subspace C_{2m}^0 of C_{2m} the existence of the theorem for Korovkin type is proved. However, it is established that in space C_{2m} an analogous theorem is invalid. By defining modulus of continuity in weighted space C_{2m}^0,

ABSTRACT (continued)

approximation to the functions in the space C_{2m}^{0} is examined via Gadjiev-Ibragimov operators which are known in literature. An equality for n.th moment of Gadjiev-Ibragimov operator is proved and approximation speed is studied by the modulus of continuity.

Key Words: Linear Positive Operator, Korovkin Theorem, Gadjiev-Ibragimov Operators, Modulus of Continuity, Weighted Modulus of Continuity.

Science Code : 403.03.01

TEŞEKKÜR

Araştırma süresi boyunca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan her an beni destekleyen değerli görüş ve önerileriyle bana yol gösteren tezin her aşamasında büyük emeği geçen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Tülin COŞKUN' a (BEÜ), tezin hazırlanması ve yazılması konusunda her türlü yardımı sunan yakın ilgisi ve sevgisiyle bana destek olan hocam Sayın Arş. Gör. Dr. Nazmiye GÖNÜL' e (BEÜ), ve bu çalışmalar esnasında bana güç veren Kuzey Rüzgar ALTINTAŞ, Erkan ALTINTAŞ ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

No Sayfa

EKLER DİZİNİ

No Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(a_n)	:	Gerçel sayılar dizini
$\|\cdot\|$	:	Norm
$C[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\rho(x)$	:	Ağırlık fonksiyonu
$B_\rho(\mathbb{R})$	:	Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lvert f(x)\rvert \leq M_f \cdot \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	:	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayından olan sürekli fonksiyonların uzayı
$\|\cdot\|_{C[a,b]}$	:	$C[a,b]$ uzayında norm
$\|\cdot\|_\rho$	:	$B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayında norm
$\|L\|_{X\to Y}$	:	X normlu uzayından Y normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$L(f,x)$	:	Operatör
$L_n(f,x)$	:	Operatör dizisi
$\|L(f,x)\|_{C[a,b]}$	:	$C[a,b]$'de tanımlı doğrusal pozitif operatörlerinin normu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisinin en çok uygulaması olan dalı yaklaşımlar teorisidir. E_1ve E_2 doğrusal normlu fonksiyon uzayları $E_1 \subset E_2$ ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan doğrusal pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda $f \in E_1$ olmak üzere $A_n f \in E_2$ olacağından $(A_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi E_2 uzayında bir dizidir. O halde yaklaşım problemi $(A_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin E_2 normuna göre f ye yakınsamasının araştırılmasıdır. Yani hangi koşullar altında $\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_{E_2} = 0$, $(f \in E_1)$ eşitliğinin sağlanacağı araştırılmalıdır.

Bu alanda Weierstrass, P. P. Korovkin, H. Bohman ve T. Popoviciu önemli çalışmalar yapmış olup doğrusal pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığını belirlemek için basit ve kolayca kontrol edilebilecek kriterler oluşturmuşlardır. Bu yöntem gereği doğrusal pozitif bir (L_n) operatörler dizisinin kapalı ve sınırlı bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $m = 0,1,2$ olmak üzere x^m şeklindeki üç test fonksiyonu için düzgün yakınsamanın geçerli olmasıdır.

Oysa Szasz, Gadjiev-İbragimov operatörleri gibi birçok operatör sınırsız aralıklarda tanımlandığından bunların ancak ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özellikleri incelenebilmektedir.

1974 yılında A.D. Gadjiev C_ρ ağırlıklı uzayından B_ρ uzayına dönüşüm yapan (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisinin $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlamasına rağmen

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliğini sağlaması gerekmediğini kanıtlamıştır. Yine Gadjiev bu çalışmasında yaklaşımın geçerli olduğu C_ρ nun uygun bir alt uzayını oluşturmuştur.

Bu çalışmada ilk bölüm bazı fonksiyon uzaylarının genel özellikleri tanıtılmaya ayrılmıştır. İkinci ve üçüncü bölümde ise doğrusal pozitif operatörlerin genel özellikleri verilerek $C[a,b]$, $C_\rho(\mathbb{R}^m)$, uzaylarında Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilmiştir. $C[a,b]$ ve $C_\rho[0,\infty)$ uzayları için klasik anlamda süreklilik modülünün genel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, C_{2m} tanımlanarak bu uzayın bir alt uzayı olan C_{2m}^0 uzayında Korovkin tipli bir teoremin varlığı kanıtlanarak C_{2m} uzayında benzer bir teoremin geçerli olmadığı kanıtlanmıştır. C_{2m}^0 ağırlık uzayında süreklilik modülü tanımlanarak bu uzaydaki fonksiyonlara literatürde Gadjiev-İbragimov operatörü olarak bilinen operatörle yaklaşım yapılmıştır. Gadjiev-İbragimov operatörünün n.momenti için bir eşitlik kanıtlanarak süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı araştırılmıştır.

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. 1.1 kesimdeki tanım ve teoremler (Coşkun E 2002) den alınmıştır.

Tanım 1.1.1

$D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{R}$ dönüşümüne D üzerinde *gerçel değerli bir fonksiyon* denir.

Tanım 1.1.2

$\mathbb{N}_0$ dan $\mathbb{R}'$ ye olan dönüşümlere *gerçel sayıların bir dizisi* adı verilir. Dizi için (a_n) gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 1.1.3

(a_n) gerçel sayıların bir dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var ve her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

oluyorsa (a_n) dizisi a gerçel sayısına *yakınsaktır* denir.

Tanım 1.1.4

Her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı varsa (a_n) dizisine *sınırlıdır* denir.

Teorem 1.1.1 (Bolzano Weierstrass Teoremi)

(a_n) sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda (a_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Tanım 1.1.5

$D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in D$ olsun.

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna a noktasında *süreklidir* denir. D nin her noktasında sürekli olan fonksiyona *D üzerinde sürekli fonksiyon* denir (Coşkun 2002).

Tanım 1.1.6

$f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı var ve $|x - y| < \delta$ olan her $x, y \in D$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna D kümesi üzerinde *düzgün süreklidir* denir.

Teorem 1.1.2

Kapalı ve sınırlı aralıkta tanımlı sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir.

Teorem 1.1.3

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [a, b]$ için sürekli ise f, bu aralıkta maksimum ve minimum değerini alır.

Tanım 1.1.8

$f: D \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu için

$\|f\| := sup\{|f(x)|: x \in D\} = \sup_{x \in D} |f(x)|$

$\|f\| := sup\{|f(x)|: x \in D\} = \sup_{x \in D} |f(x)|$

şeklinde tanımlı negatif olmayan $\|f\|$ gerçel sayısına f'nin *normu* denir.

Tanım 1.1.9

Bir $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f(D)$ görüntü kümesi sınırlı ise f fonksiyonuna *sınırlıdır* denir.

Teorem 1.1.4

$f, g: D \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda aşağıdaki koşullar geçerlidir.

i) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

ii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$

iii)$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Tanım 1.1.10

Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu durumda (f_n) dizisine $D \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi adı verilir.

Tanım 1.1.11

$n \in \mathbb{N}$ için $f_n: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$sayısı var ve her $x \in D, n \geq N$ için

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisine, D üzerinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir.

Teorem 1.1.5

Gerçel sayılar kümesinin bir E alt kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir (f_n) dizisi verilsin. Her $x \in E$ ve $n \geq p$ için

$|f_n(x) - f(x)| < a_n$

eşitsizliği sağlanacak şekilde sabit bir p doğal sayısı ve sıfıra yakınsayan bir (a_n) sayı dizisi bulunabiliyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna E üzerinde *düzgün yakınsar* denir.

Uyarı 1.1.1

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu durumda (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul
$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$
olmasıdır.

1.2 KAPALI ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYI

Tanım 1.2.1

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanmış ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonlar uzayına *sonlu aralıkta sürekli fonksiyonlar uzayı* denir. $C[a, b]$ ile gösterilir ve kısaca $C[a, b] = \{f : f, \text{her } x \in [a, b] \text{ için sürekli}\}$ şeklinde ifade edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.2.2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve f, [a, b]'de sürekli olsun.
$C[a, b]$ uzayında norm;
$\|f\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$
şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.2.1

$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ şeklinde tanımlı fonksiyon açıkça norm koşullarını sağlar (Coşkun 1997).

Önerme 1.2.2

$\big(f_n(x)\big) \subset C[a,b]$ olsun. $f_n(x)$ fonksiyon dizisinin $g(x)$ 'e düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul her
$x \in [a,b]$ ve $M > 0$ olmak üzere sıfıra yakınsayan bir ε_n dizisi için,
$|f_n(x) - g(x)| < M\varepsilon_n$
olmasıdır (Coşkun 1997).

1.3. SONSUZ BÖLGEDE TANIMLI SÜREKLİ VE SINIRLI FONKSİYON UZAYLARI

Tanım 1.3.1

ρ, ℝ'de tanımlı artan ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ olsun.
Ayrıca ρ fonksiyonu $\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$ koşulunu sağlasın. ℝ'de
$|f(x)| \leq M_f\,\rho(x)$
eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B\rho(\mathbb{R})$ *uzayı* denir ve kısaca

$$B\rho(\mathbb{R}) = \big\{f: \forall x \in \mathbb{R}\ için\ |f(x)| \leq M_f\,\rho(x), f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big\} \tag{1.3}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3.2

$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayına $C_\rho(\mathbb{R})$ *uzayı* denir. Bu uzay,
$C_\rho(\mathbb{R}) = \big\{f: f \in B_\rho(\mathbb{R})\text{ve } f, \mathbb{R}'\text{de sürekli}\big\}$
şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).
$B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına *'Ağırlık Uzayları'* denir.

Tanım 1.3.3

$B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ ağırlıklı uzaylar için norm;

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \tag{1.4}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.3.1

Bu çalışmada kısalık olması bakımından $B_\rho(\mathbb{R}) = B_\rho$ ve $C_\rho(\mathbb{R}) = C_\rho$ gösterimleri kullanılacaktır.

Önerme 1.3.1

Her $n \in \mathbb{N}$ için B_ρ uzayında $\big(f_n(x)\big) \subset B_\rho$ fonksiyonlar dizisi tanımlansın. (f_n) fonksiyonlar dizisinin B_ρ uzayında sıfır fonksiyonuna yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul ε_n sıfır dizisi olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon_n \rho(x)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.3.2

$f \in B_\rho(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $\|f\|_\rho$ ifadesi sonludur.

BÖLÜM 2

LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

Bu bölümde doğrusal pozitif operatörlerin genel yapısı tanıtılarak, ilk bölümde verilen $C[a,b], C_\rho(\mathbb{R}^m), B_\rho(\mathbb{R}^m)$fonksiyon uzaylarında tanımlı doğrusal pozitif operatör dizilerinin normları tanımlanacak ve Korovkin tipli yaklaşım teoremi kanıtlanacaktır.

2.1. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1.1

X ve Y iki fonksiyon uzayı, $L: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f,x) = g(x) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $g \in Y$ bulunuyorsa L*'ye 'operatördür'* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Örnek 2.1.1

Aşağıda verilen dört örnek birer operatördür.

a) $L_1(f,x) = f(x) \Leftrightarrow L_1 = \mathrm{I}$ birim operatördür.

b) $L_2(f,x) = f(x) + 1$

c) $L_3(f,x) = \int_a^x f(t)dt$

d) $L_4(f,x) = \int_a^b f(t)e^{-ix}dt$

Burada L_3 operatörü *'integral operatörü'* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2

X, Y doğrusal uzaylar $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.
$L: X \to Y$ operatörü için,
$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$
eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne *'doğrusaldır'* denir (Altomare and Campite 1994).

Uyarı 2.1.1

L doğrusal bir operatör olsun.

$$\begin{aligned} L(0, x) &= L(f(t) - f(t), x) \\ &= L(f(t), x) - L(f(t), x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $L(0, x) = 0$'dır (Coşkun 1997).

Tanım 2.1.3

$X^+ \coloneqq \{f: f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}, Y^+ \coloneqq \{g: g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$
iki fonksiyon uzayı olsun. $L: X \to Y$ operatörü için,
$L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L'ye *'pozitif operatördür'* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 2.1.2

L doğrusal pozitif operatörü negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür. Şöyle ki; $f(x) \leq 0$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $-f(x) \geq 0$ olur.
L pozitif olduğundan
$L(-f, x) \geq 0$
dır. L doğrusal olduğundan
$-L(f, x) \geq 0$
olur. O halde $L(f, x) \leq 0$'dır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 2.1.3

Doğrusal pozitif operatörler monotondurlar.
Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için
$f(x) - g(x) \leq 0$
olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için
$(f - g)(x) \leq 0$
eşitsizliği bulunur. Uyarı 2.1.2'den $L(f - g, x) \leq 0$ olduğundan $L(f\,, x) - L(g, x) \leq 0$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise
$L(f\,, x) \leq L(g, x)$
olması demektir.

Tanım 2.1.4

$A_2(f, x) = \int_a^b f(t)\, K(t, x) dt$
ve $K(t, x)$; t değişkenine göre sürekli bir fonksiyon olsun. $K(t, x)$ fonksiyonuna A_2 *operatörünün çekirdeği* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 2.1.2

$A_2(f, x) = \int_a^b f(t)\, K(t, x) dt$ olmak üzere $K(t, x)$; t değişkenine bağlı sürekli bir fonksiyon olsun. A_2'nin pozitif operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $K(t, x)$ çekirdeğinin pozitif olmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.1.5

X, Y normlu uzaylar ve $L\colon X \to Y$ doğrusal bir operatör olsun.
Her $f \in X$ için $\|L(f, x)\|_Y \leq C\|f\|_X$ oluyorsa L'ye *sınırlı operatör* ve bu C sabitlerinin infimumuna da '*L operatörünün normu'* denir.
$\|L\|_{X\to Y} = inf\{C\colon \|L(f, x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$
şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Örnek 2.1.2

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal bir operatör olsun.

$\|L\|_{X\to Y} = inf\{C: \|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$

eşitliği norm koşullarını sağlar.

Çözüm:

N1) $\|L\|_{X\to Y} = 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için en az bir C_n vardır. Öyle ki

$C_n \leq \frac{1}{n}$ ve

$$\begin{aligned} 0 \leq \|L(f,x)\|_Y &\leq C_n\|f\|_X \\ &\leq \frac{1}{n}\|f\|_X \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

olduğundan her $f \in X$ için,

$\|L(f,x)\| = 0$

olur. Bu ise $L(f,x) = 0$ olması demektir. O halde $L = 0$ operatörüdür.

$L = 0$ olsun. Her $f \in X$ için $L(f,x) = 0$ olacağından,

$\|L(f,x)\|_Y = 0$ yani $\|L\|_{X\to Y} = 0$ elde edilir.

N2) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\alpha L\|_{X\to Y} &= inf\{C: \|(\alpha L)(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\} \\ &= |\alpha| inf\left\{\frac{C}{|\alpha|}: |\alpha|\|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\right\} \\ &= |\alpha| inf\left\{\frac{C}{|\alpha|}: \|L(f,x)\|_Y \leq \frac{C}{|\alpha|}\|f\|_X\right\} \\ &= |\alpha|\|L\|_{X\to Y} \end{aligned}$$

eşitliği açıkça sağlanır.

N3)

$$\begin{aligned} \|(L_1 + L_2)(f,x)\|_Y &= \|L_1(f,x) + L_2(f,x)\|_Y \\ &\leq \|L_1(f,x)\|_Y + \|L_2(f,x)\|_Y \\ &\leq C_1\|f\|_X + C_2\|f\|_X \\ &= (C_1 + C_2)\|f\|_X \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$\|(L_1 + L_2)\|_{X\to Y} = inf\{C = C_1 + C_2: \|(L_1 + L_2)(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$

$$
\begin{aligned}
&\leq inf\{C = C_1 + C_2 : \|L_1(f,x)\|_Y \leq C_1\|f\|_X, \|L_2(f,x)\|_Y \leq C_2\|f\|_X\} \\
&\leq inf\{C_1 : \|L_1(f,x)\|_Y \leq C_1\|f\|_X\} + inf\{C_2 : \|L_2(f,x)\|_Y \leq C_2\|f\|_X\} \\
&= \|L_1\|_{X\to Y} + \|L_2\|_{X\to Y}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece $\|L\|_{X\to Y}$ ifadesinin norm koşullarını sağladığı gösterilmiş olur.

Uyarı 2.1.4

X ve Y normlu uzaylar ve $L : X \to Y$ doğrusal pozitif operatör olsun. $f \in X$ olmak üzere $\|f\|_X \neq 0$ olsun. Bu durumda L'nin normu;

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \tag{2.4}$$

biçiminde de tanımlanabilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

i) $\|L\|_{X\to Y} = inf\{C : \|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$ olmak üzere; her $f \in X$ için $\frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq C$ olduğundan,

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq inf\{C : \|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\} \tag{2.5}$$

olur. O halde,

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X\to Y}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) İnfimum tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $f_\varepsilon \in X$ vardır öyle ki;

$\left\|L\left(f_\varepsilon, x\right)\right\|_Y \geq (\|L\|_{X\to Y} - \varepsilon)\|f_\varepsilon\|_X$ olur.O halde $\frac{\|L(f_\varepsilon,x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} - \varepsilon$ eşitsizliği her ε için sağlanır. $\varepsilon \to 0$ olarak alınırsa;

$\frac{\|L(f_\varepsilon,x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y}$ olur.

$\|f\|_X \neq 0$ olan $f \in X$ fonksiyonları üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f_\varepsilon, x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} \tag{2.6}$$

eşitsizliği elde edilir. *i* ve *ii*'den;

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Uyarı 2.1.5

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal pozitif operatör olsun. $g \in X$ ve $\|g\|_X = 1$ olmak üzere,

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g, x)\|_Y \tag{2.7}$$

eşitliği geçerlidir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \|L\|_{X\to Y} &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \\ &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| \frac{1}{\|f\|_X} L(f,x) \right\|_Y \\ &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| L\left(\frac{f}{\|f\|_X}, x \right) \right\|_Y \end{aligned}$$

olacağından $\frac{f}{\|f\|_X} = g$ olarak alınırsa, $\|g\|_x = 1$ olur.

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g, x)\|_Y$$

eşitsizliği elde edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 2.1.3

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ tanımlı, doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda;

$$|L(f,x)| \leq L(|f|,x) \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

2.2. $C[a,b]$, C_ρ ve B_ρ UZAYLARINDA TANIMLI OPERATÖRLERİN NORMLARI

Önerme 2.2.1

$X = Y = C[a,b]$ olmak üzere L operatörü f'nin $[a,b]$ aralığı dışındaki değerlerinden bağımsız ise,

$\|L\|_{C[a,b]\to C[a,b]} = \|L(1,x)\|_{C[a,b]}$

olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 2.2.2

$X = Y = C[a,b]$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı dışındaki değerlerine bağımlı ise,

$$\|L\|_{C[a,b]\to C[a,b]} \leq M\|L(1,x)\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği geçerlidir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Sonuç 2.2.1

$L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatörü sınırlıdır. Yani

$$\|L(f,x)\| \leq \|L\|_{C_\rho\to B_\rho} \|f\|_\rho \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten;

$$\|L\|_{C_\rho\to B_\rho} = \sup_{\|f\|_\rho\neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_\rho}{\|f\|_\rho} = \|L(\rho,x)\|_\rho$$

olur. $\|f\|_\rho \neq 0$ olan her $f \in C_\rho$ için,

$$\frac{\|L(f,x)\|_\rho}{\|f\|_\rho} \leq \|L(\rho,x)\|_\rho$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu ise $\|L(f,x)\|_\rho \leq \|L(\rho,x)\|_\rho \|f\|_\rho$ eşitsizliğinin sağlanması demektir.

Önerme 2.2.6

$L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda $f \in C_\rho$ olmak üzere $\|L(f,x)\|_\rho \leq M\|f\|_\rho$ eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$ olmasıdır (Coşkun 1997).

Kanıt:

$L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif bir operatör ve $f \in C_\rho$ olsun. Bu durumda $L(f,x) \in B_\rho$olup her $x \in \mathbb{R}$ için $|L(f,x)| \leq M\rho(x)$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\rho \in C_\rho$ olduğundan $L(\rho,x) \leq M\rho(x)$olur. L pozitif ve $\rho \geq 1$ olduğundan $L(\rho,x) \geq 0$ olup her $x \in \mathbb{R}$ için $L(\rho,x) \leq M\rho(x)$ olur.
Buradan $\frac{L(\rho,x)}{\rho(x)} \leq M$ ve $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(\rho,x)}{\rho(x)} \leq M$ olacağından açıkça
$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M < \infty$
elde edilir. Yani $L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatör $\|L(f,x)\| \leq M\|f\|_\rho$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda
$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$ olur.
Şimdi herhangi bir L operatörü için
$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$
eşitsizliği geçerli olsun. Bu durumda operatörün doğrusal pozitifliği ve monotonluğunu kullanarak her $f \in C_\rho$ için

$$\begin{aligned}
|L(f,x)| &\leq L(|f|,x) \\
&= L\left(\frac{|f|\rho(t)}{\rho(t)}, x\right) \\
&\leq L\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|f|}{\rho(t)}\rho(t), x\right) \\
&= \|f\|_\rho L(\rho,x)
\end{aligned}$$

olacağından her iki taraf $\rho(x)$ e bölünüp supremumu alınırsa

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|L(f,x)|}{\rho(x)} \leq \|f\|_{\rho} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(\rho,x)}{\rho(x)}$$

eşitsizliği geçerli olup

$$\|L(f,x)\|_{\rho} \leq \|f\|_{\rho} \|L(g,x)\|_{\rho}$$

olur. Buradan

$$\|L(f,x)\|_{\rho} \leq M\|f\|_{\rho}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

2.3 $\boldsymbol{C[a,b]}$ UZAYINDA KOROVKİN TOEREMİ

Teorem 2.3.1

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi her $x \in [a,b]$ için

$$I_1: \lim_{n\to\infty} \|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} = 0 \quad (2.18)$$

$$I_2: \lim_{n\to\infty} \|L_n(t,x) - x\|_{C[a,b]} = 0 \quad (2.19)$$

$$I_3: \lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2,x) - x^2\|_{C[a,b]} = 0 \quad (2.20)$$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa bu durumda $[a,b]$ de sürekli ve a da soldan b de sağdan sürekli tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Korovkin 1960).

Kanıt:

f fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|f(x)| \leq M \quad (2.21)$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$,$t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.22}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $x, t \in [a,b]$ olduğunda da
$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$
eşitsizliği doğrudur. Çünkü f fonksiyonu $[a,b]$ de süreklidir.
$t \notin [a,b]$ ve $x \in [a,b]$ olduğunda ise yukarıdaki eşitsizlik; f fonksiyonu a'da soldan, b'de sağdan sürekli olduğu için doğrudur. (2.21) ve (2.22) eşitsizlikleri yardımıyla her
$t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a,b]$ için,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{2.23}$$

eşitsizliği vardır. Gerçekten

$|t-x| < \delta$ olduğunda $\frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2 > 0$ olduğu için (2.23) eşitsizliği sağlanır.
$|t-x| \geq \delta$ için $\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$ olacağından; en az bir $M > 0$ için,

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$$

eşitsizliği geçerli olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq 2M \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \\ &< \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan her $f \in C[a,b]$ için L_n operatörü doğrusal olduğundan $\varepsilon > 0$ için (2.23) eşitsizliği elde edilir.

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = \|L_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]}$$

$$= \|L_n(f(t) - f(x), x) + f(x)[L_n(1,x) - 1]\|_{C[a,b]}$$

$$\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)[L_n(1,x) - 1]\|_{C[a,b]}$$

$$\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \max_{x\in[a,b]}|f(x)|\|[L_n(1,x) - 1]\|_{C[a,b]} \quad (2.24)$$

eşitsizliği elde edilir. Açıkça I_1 gereği $\varepsilon_n \to 0$ dizisi olmak üzere

$$\|[L_n(1,x) - 1]\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

olur. Böylece Önerme 2.1.3 den (2.24) eşitsizliği

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]}\varepsilon_n$$

şeklinde bir eşitsizliğe dönüşür.
Şimdi $\|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]}$ normu için ihtiyaç duyulan bir eşitsizlik kanıtlanacaktır.

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon$$

olduğundan L_n operatörünün doğrusallığı ve monotonluğu kullanılarak

$$L_n(|f(t) - f(x)|, x) \leq L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon, x\right)$$

$$= L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2, x\right) + L_n(\varepsilon, x)$$

$$= \varepsilon\, L_n(1,x) + L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t^2 - 2tx + x^2, x)\right)$$

$$= \varepsilon\, L_n(1,x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n(t^2 - 2tx + x^2, x)$$

$$= \varepsilon\, L_n(1,x) + \frac{2M}{\delta^2}\left(L_n(t^2,x) - L_n(2tx,x) + L_n(x^2,x)\right)$$

$$= \varepsilon(\, L_n(1,x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2}\,[L_n(t^2,x) - x^2 + x^2 - 2x(L_n(t,x) - x) -$$

$2x2+x2Ln1,x-1+x2+\varepsilon$

eşitsizliğine ulaşılır. Şimdi de $C[a,b]$ uzayında tanımlı olan maksimum normu dikkate alınırsa Önerme 2.1.3 den

$$\|L_n(f(t) - f(x),x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in(a,b)}|L_n(f(t) - f(x),x)|$$

$$\leq \max_{x\in(a,b)} L_n(|f(t) - f(x)|,x)$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik yardımıyla

$$\|L_n(f(t) - f(x),x)\|_{C[a,b]} \leq \max_{x\in[a,b]}\Big\{\varepsilon(L_n(1,x) - 1) + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\,[|L_n(t^2,x) - x^2| - 2x$$
$$(|L_n(t,x) - x|) + x^2(|L_n(1,x) - 1|)\,]\,\}$$

$$\leq \varepsilon\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left[\|L_n(t^2,x) - x^2\|_{C[a,b]} + 2x\|L_n(t,x) - x\|_{C[a,b]} + \right.$$

$x2Ln1,x-1Ca,b$

$$\leq \varepsilon\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\|L_n(t^2,x) - x^2\|_{C[a,b]} + 2a\|L_n(t,x) - x\|_{C[a,b]} +$$
$$b^2\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]}$$

olacağından I_1, I_2, I_3 den

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \lim_{n\to\infty}\|L_n(f(t) - f(x),x)\| \leq 0$$

ve $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\|L_n(f(t) - f(x),x)\| \leq 0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği kanıtlanmış olur. Bu ise teoremin kanıtını tamamlar.

2.4 $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ UZAYINDA KOROVKİN TEOREMİ

Tanım 2.4.1

$\rho; \mathbb{R}^m$ üzerinde tanımlı sürekli ve her $x \in \mathbb{R}^m$ için $\rho(x) \geq 1$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$ ve M_f sayısının f fonksiyonuna bağlı sabit sayı olduğu kabul edilsin. Bu durumda
$|f(x)| \leq M_f \rho(x)$
eşitsizliğini gerçekleyen fonksiyonların uzayına $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayı denir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995), (Coşkun T 2002).

Tanım 2.4.2

$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonların uzayına $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayı denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.4.3

$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzaylarında norm;

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 2.4.1

$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayları doğrusal normlu uzaylardır.

Önerme 2.4.2

$C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayına tanımlı L operatörünün normu için;

$$\|L\|_{C_\rho \to B_\rho} = \|L(\rho, x)\|_\rho$$

eşitliği geçerlidir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 2.4.3

$C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayına tanımlı doğrusal pozitif operatörler sınırlıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Teorem 2.4.1

$m \geq 1, \rho(x) = 1 + \|x\|^2$ ve (A_n); $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ den $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayına tanımlı doğrusal pozitif operatör dizisi olsun. Bu durumda $j = 1,2,3, \dots, m$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(1, x) - 1\|_\rho = 0 \quad . \tag{2.25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_n\left(t_j, x\right) - x_j\right\|_\rho = 0 \tag{2.26}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2\|_\rho = 0 \tag{2.27}$$

şeklindeki $m + 2$ koşulu sağlayan bir (A_n) operatör dizisi için

$$\|A_n(f^*, x) - f^*\|_\rho \to 1$$

koşulunu sağlayan bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R}^m)$ fonksiyonu vardır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

(A_n) operatör dizisi $n \in \mathbb{N}$ için $x^* = \left(\frac{\|x\|+1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{\|x\|+1}{\sqrt{m}}\right)$ olmak üzere

$$A_n(f,x) = \begin{cases} f(x) + \dfrac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}[f(x^*) - f(x)]\,; & \|x\| \le n \text{ için} \\ f(x) \qquad ; & \|x\| > n \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça (A_n) operatörler dizisi doğrusal ve pozitiftir. A_n operatörünün C_ρ uzayından B_ρ uzayına dönüşüm yaptığı gösterilecek olup hazırlık olarak aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığı gösterilecektir.

$$\|A_n(f,x)\|_\rho \le \|f\|_\rho \|A_n(\rho,x)\|_\rho$$

$\|x\| > n$ için ispat açık olup $\|x\| \le n$ alınsın.

$x^* = \left(\frac{\|x\|+1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{\|x\|+1}{\sqrt{m}}\right)$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \|x^*\|^2 &= m\frac{(\|x\|+1)^2}{m} \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\| + 1 \end{aligned}$$

bulunur.

$(\rho(x) = 1 + \|x\|^2)$ olduğundan $\|x\| \le n$ için

$$A_n(\rho,x) = \rho(x) + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}[\rho(x^*) - \rho(x)]$$

$$= \rho(x) + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}[\|x^*\|^2 - \|x\|^2]$$

$$= \rho(x) + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}[1 + 2\|x\| + \|x\|^2 - \|x\|^2]$$

$$= \rho(x) + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}[1 + 2\|x\|]$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$\frac{2\|x\|}{1+2n^2} < 1$ olduğundan

$$A_n(\rho, x) \leq \rho(x) + (1 + \|x\|^2) + 1$$
$$= 3\rho(x)$$

eşitsizliği bulunur.

A_n lerin C_ρ uzayından B_ρ uzayına giden bir dönüşüm olduğunu gösterebilmek için alınan her $f \in C_\rho$ için $A_n(f, x) \in B_\rho$ olduğu gösterilmelidir. Önerme 2.1.3 den

$$|A_n(f, x)| \leq A_n(|f|, x)$$

$$= A_n\left(\frac{|f|}{\rho(t)}\rho(t), x\right)$$

$$\leq \|f\|_\rho A_n(\rho, x)$$

$$\leq 2\|f\|_\rho \rho(x)$$

eşitsizliği elde edilir. $M_f = 2\|f\|_\rho$ alınırsa $A_n(f, x) \in B_\rho$ elde edilmiş olur. Bu aşamada verilen A_n operatörlerinin teoremin $(2.25), (2.26), (2.27)$ şartlarını sağladığı gösterilecektir.

i) $t = 1$ için

$$A_n(1, x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}[1(x^*) - 1(x)], \|x\| \leq n \text{ için} \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \|x\| > n \text{ için} \end{cases}$$

eşitliğinden kolayca

$$A_n(1, x) = 1$$

olduğu görülür. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(1,x) - 1\|_\rho = 0$$

olması demektir.

ii) $t = x_j$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_n(t_i,x) - x_j\right\| = 0$$

olduğu gösterilecektir. $\|x\| \leq n$ için

$$A_n(t_i,x) = x_j + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}\left[x_j^* - x_j\right]$$

$$= x_j + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}\left[\frac{1+\|x\| - \sqrt{mx_j}}{\sqrt{m}}\right]$$

$$\leq x_j + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}2(1+\|x\|)$$

olup böylece

$$A_n(t_i,x) - x_j \leq \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2}2(1+\|x\|)$$

$$\frac{A_n(t_i,x) - x_j}{1+\|x\|^2} \leq \frac{2(1+\|x\|)}{1+2n^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\|x\| \leq n$ olduğundan

$$\frac{A_n(t_i,x) - x_j}{1+\|x\|^2} \leq \frac{2(1+n)}{1+2n^2}$$

olur $x \in \mathbb{R}^m$ üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{A_n(t_i, x) - x_j}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{2(1+n)}{1+2n^2}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\|A_n(t_i, x) - x_j\right\|_\rho \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+n)}{1+2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_n(t_i, x) - x_j\right\|_\rho = 0$$

olduğu görülür. Yani (2.26) koşulu sağlanır.

iii) Şimdi (2.27) koşulunun sağlandığını gösterelim.

$$x^* = \left(\frac{\|x\| + 1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{\|x\| + 1}{\sqrt{m}}\right)$$

olduğundan

$$\|x^*\|^2 = m\left(\frac{1 + \|x\|}{\sqrt{m}}\right)^2 = (1 + \|x\|)^2$$

şeklinde bulunur. Bu durumda

$$A_n(\|t\|^2, x) = \|x\|^2 + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}\left[\|x^*\|^2 - \|x\|^2\right]$$

$$= \|x\|^2 + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}\left[(\|x\| + 1)^2 - \|x\|^2\right]$$

$$A_n(\|t\|^2, x) = \|x\|^2 + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}\left[1 + 2\|x\|\,\right]$$

eşitliği sağlanır ve böylece

$$\frac{A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} = \frac{1 + 2\|x\|}{1 + 2n^2}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğin $x \in \mathbb{R}^m$ için önce supremumu ve sonra $n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{1 + 2n}{1 + 2n^2}$$

ve böylece

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \|A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2\|_\rho \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2n}{1 + 2n^2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu ise

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2\|_\rho = 0$$

olması demektir. Böylece (2.27) koşulu sağlanmış olur. Şimdi;

$$f^*(x) = \|x\|^2 cos\pi\|x\|$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Öncelikle f^* ın C_ρ nun elemanı olduğu gösterilmelidir. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f^*(x)| &= |\|x\|^2 cos\pi\|x\|| \\ &\leq \|x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 1 \end{aligned}$$

olduğundan $M_f = 1$ olmak üzere $f^* \in B_\rho$ ve f^* sürekli olduğundan $f^* \in C_\rho$ dur.

$\|x^*\|^2 = (1 + \|x\|)^2$

ve

$cos\pi(1 + \|x\|) = cos\pi 1 cos\pi\|x\|$

$$= -cos\pi\|x\|$$

olduğundan $\|x\| \leq n$ için

$$A_n(f^*, x) = f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}[f^*(x^*) - f^*(x)]$$

$$= f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}[\|x^*\|^2 cos(\pi\|x^*\|) - \|x\|^2 cos(\pi\|x\|)]$$

$$= f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}[(1 + \|x\|)^2\ cos\pi(1 + \|x\|) - \|x\|^2 cos(\pi\|x\|)]$$

eşitliği dikkate alınmalıdır. Dolayısıyla

$$A_n(f^*, x) = f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}[-(1 + \|x\|)^2 cos(\pi\|x\|) - \|x\|^2 cos(\pi\|x\|)]$$

$$= f^*(x) - \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}[(1 + \|x\|)^2 + \|x\|^2]cos(\pi\|x\|)$$

olur. Böylece

$$A_n(f^*, x) - f^*(x) = -\frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2}[(1 + \|x\|)^2 + \|x\|^2]cos(\pi\|x\|)$$

yazılır ve mutlak değeri alınırsa;

$$\frac{|A_n(f^*,x) - f^*(x)|}{1 + \|x\|^2} = \frac{1}{1 + 2n^2}[(1 + \|x\|)^2 + \|x\|^2]cos(\pi\|x\|)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin $x \in \mathbb{R}^m$ için supremumu alınırsa

$$\underset{x\in\mathbb{R}^m}{Sup} \frac{|A_n(f^*,x) - f^*(x)|}{1 + \|x\|^2} = \underset{x\in\mathbb{R}^m}{Sup} \frac{1 + 2\|x\| + 2\|x\|^2}{1 + 2n^2} cos\pi\|x\|$$

$$= \frac{1 + 2n + 2n^2}{1 + 2n^2}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f^*,x) - f^*(x)\|_\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2n + 2n^2}{1 + 2n^2}$$

$$= 1$$

sonucu elde edilir. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f^*,x) - f^*(x)\|_\rho \neq 0$$

olması demektir. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

BÖLÜM 3

SÜREKLİLİK MODÜLÜ YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZININ HESABI

Bu bölümde operatörlerin yaklaşım hızını hesaplamak için kullanılan yöntemlerden biri olan süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülünün özellikleri verilecektir.

3.1 $\boldsymbol{C[a,b]}$ UZAYINDA SÜREKLİLİK MODÜLÜ

$L_n(f;x)$ keyfi bir doğrusal pozitif operatörler dizisi olmak üzere $\|L_n(f)-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$ olması $L_n(f;x)$ in $f(x)$ e düzgün olarak yaklaştığını gösterir. Yaklaşma hızı $\alpha_n\to 0$, $(n\to\infty)$ olmak üzere, $\|L_n(f;x)-f(x)\|<c\alpha_n$ olacak şekilde α_n lerin belirlenmesiyle hesaplanır. α_n ler L_n operatörü ve f fonksiyonuna bağlı olarak değişirler. Yaklaşma hızı problemi olarak adlandırılan bu hesaplama sonlu aralıkta genel olarak $\omega(f;\delta)$ şeklinde gösterilen '*Süreklilik Modülü*' yardımıyla yapılır (Ispir 2001).

Tanım 3.1.1

$f\in C[a,b]$ olsun. $\forall\,\delta>0$ için

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|t-x|\leq\delta}}|f(t)-f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun '*Süreklilik Modülü*' denir.

Önerme 3.1.1

$f\in C[a,b]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $\omega(f,\delta) \geq 0$.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ için $\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2)$.

iii) Her $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,m\delta) \leq m\,\omega(f,\delta)$.

iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega(f,\delta)$.

v) $\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0$.

vi) $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f, |t-x|)$.

vii) $|f(t)-f(x)| \leq (1+\frac{|t-x|}{\delta})\,\omega(f,\delta)$.

3.2 $C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ UZAYINDA SÜREKLİLİK MODÜLÜNÜN ÖZELLİKLERİ

$C_\rho[0,\infty)$ dan olan ve $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty$ koşulunu gerçekleyen fonksiyonların uzayını $C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.2.1

$f \in C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ olmak üzere

$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x\geq 0\\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$ şeklinde tanımlı $\omega(f,\delta)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun '*Ağırlıklı Süreklilik Modülü*' denir (Gadjiev and Aral 2007).

Uyarı 3.2.1

Burada $\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x\geq 0\\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$ anlamlıdır. Gerçekten;

$|f(x+h)-f(x)|$ ifadesini belirleyelim. $f(x)$, $f(x+h) \in C_\rho[0,\infty)$ olduğundan $|f(x)| \leq M_f\,\rho(x)$ ve $\rho(x) = 1+x^2$ seçimi ile $\frac{|f(x)|}{1+x^2} \leq M_f$ dir.

Benzer şekilde ;

$|f(x+h)| \leq M_f\,\rho(x+h)$ olacağından $\frac{|f(x+h)|}{1+(x+h)^2} \leq M_f$ dir.

Üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h)| + \ |f(x)|$$

$$= \frac{|f(x+h)|}{1+(x+h)^2}[1+(x+h)^2] + \frac{|f(x)|}{1+x^2}(1+x^2)$$

olur. Buradan

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M_f[(1+(x+h)^2) + (1+x^2)]$$

elde edilir.

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a+b)^2 \leq 4(a^2+b^2)$ olup $a = x \,, b = h$ için

$(x+h)^2 \ \leq 4(x^2+h^2)$ dir. O halde

$$(1+(x+h)^2) + (1+x^2) \leq 1 + 4(x^2+h^2) + 1 + x^2$$

$$\leq 1 + 4(x^2+h^2) + 1 + x^2 + 3 + h^2$$

$$= 5 + 5(x^2+h^2)$$

$$= 5(1 + x^2 + h^2)$$

$$\leq 5(1 + x^2 + h^2 + x^2h^2)$$

$$= 5(1+x^2)(1+h^2)$$

olur. Böylece $(1+(x+h)^2) + (1+x^2) \ \leq 5(1+x^2)(1+h^2)$ elde edilir. Buradan

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M_f 5(1+x^2)(1+h^2)$$

bulunur. Dolayısıyla;

$|f(x+h)-f(x)| \leq C_f(1+x^2)(1+h^2)$

olduğundan her $f \in C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ için

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x\geq 0\\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

ifadesi mevcuttur.

Önerme 3.2.2

$f \in C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü için aşağıdaki özellikler geçerlidir (Holhoş,2008).

i) Her $f \in C_{\rho,K_f}$ için $\omega(f,\delta) \geq 0$.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2)$.

iii) Her $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,m\delta) \leq 4m(1+\delta^2)\omega(f,\delta)$.

iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f,\lambda\delta) \leq 4(\lambda+1)(1+\delta^2)\omega(f,\delta)$.

v) Her $f \in C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ için $\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0$.

vi) Her $f \in C_{\rho,K_f}$ için $|f(t)-f(x)| \leq (1+x^2)(1+|t-x|^2)\,\omega(f,|t-x|)$.

eşitsizliği geçerlidir.Ayrıca (vi) eşitsizliği yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

vii) $|f(t)-f(x)| \leq 4(1+x^2)(1+|t-x|^2)(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^2)\,\omega(f,\delta)$.

İspat:

i) $(1+x^2) > 0$, $(1+h^2) > 0$ ve

$|f(x+h)-f(x)| \geq 0$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan açıkça

$\omega(f,\delta) \geq 0$ dır.

ii)$\delta_1 \leq \delta_2$ için $|h| \leq \delta_2$ bölgesi , $|h| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyüktür. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden

$\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2)$ dir.

iii)$\omega(f,\delta) = \sup\limits_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$

ifadesinde $x+h=t$ dönüşümü yapılırsa

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{t,x\geq 0 \\ |t-x|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

elde edilir. O halde

$$\omega(f,m\delta) = \sup_{\substack{t,x\geq 0 \\ |t-x|\leq m\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

şeklinde olacaktır.

$|t-x| \leq m\delta$ için $-m\delta \leq t-x \leq m\delta$ olacağından

$t = x + mh$ seçilirse $|h| \leq \delta$ olup

$$\omega(f,m\delta) = \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+mh)-f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)}$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$f(x+mh)-f(x) = \left|\sum_{k=1}^{m} [f(x+kh)-f(x+(k-1)h]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |f(x+kh)-f(x+(k-1)h|$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{|f(x+kh) - f(x+(k-1)h|}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)} (1+h^2)(1+(x+(k-1)h))$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki tarafın (1+x^2)(1+$(mh)^2$) ifadesine bölünmesiyle

$$\frac{|f(x+mh) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|f(x+kh) - f(x+(k-1)h|}{(1+h^2)\left(1+\left((k-1)h\right)^2\right)} \frac{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)}{(1+x^2)(1+(mh)^2)}$$

elde edilir.

Her iki tarafın $|h| \leq \delta$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\omega(f, m\delta) \leq \omega(f, \delta)(1+\delta^2) \sum_{k=1}^{m} \frac{(1+(x+(k-1)h)^2)}{(1+x^2)(1+(mh)^2)}$$

bulunur. Diğer yandan

$$1+(x+(k-1)h)^2 \leq 1+4\left(x^2+\left((k-1)h\right)^2\right)$$

$$\leq 1+4\left(x^2+\left((k-1)h\right)^2\right)+3$$

$$\leq 4\left(1+x^2+\left((k-1)h\right)^2\right)$$

dir. $k-1 \leq m$ olduğundan

$$1+(x+(k-1)h)^2 \leq 4(1+x^2+(mh)^2)$$

$$\leq 4(1+x^2+(mh)^2+x^2(mh)^2)$$

$$= (1+x^2)(1+(mh)^2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Yani,

$$\frac{(1+(x+(k-1)h)^2)}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \leq 4$$

dır. Böylece

$$\omega(f, m\delta) \leq 4\,(1+\delta^2)\,\omega(f,\delta)$$

bulunur.

iv)$\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\![\lambda]\!]$ ile gösterilirse
$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!]+1$ eşitsizliklerinin geçerliği olduğu açıktır. Bu eşitsizliklerde (ii) özelliği gereği

$$\omega(f, \lambda\delta) \leq \omega(f, ([\![\lambda]\!]+1)\delta) \tag{3.1}$$

yazılabilir.

$([\![\lambda]\!]+1) \in \mathbb{N}$ olduğundan (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanarak

$$\begin{aligned}\omega(f, \lambda\delta) &\leq \omega(f, ([\![\lambda]\!]+1)\delta)\\ &\leq 4([\![\lambda]\!]+1)(1+\delta^2)\,\omega(f,\delta)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[\![\lambda]\!]+1 \leq \lambda + 1$
olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$\omega(f, \lambda\delta) \leq 4(1+\lambda)(1+\delta^2)\,\omega(f,\delta)$$

elde edilir.

v)$f \in C_{\rho,K_f}[0,\infty)$ olduğundan f fonksiyonu için $[0,\infty)$ da süreklilik ve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty$$

durumu geçerlidir.

Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir x_0 bulunur ki tüm $x > x_0$ noktaları ve her $h > 0$ için

$$\left|\frac{f(x)}{\rho(x)} - K_f\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left|\frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - K_f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. O halde

$$\omega(f\,,\delta\,) = \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{\rho(x+h)}\right|$$

$$= \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x+h) - f(x) - \rho(x+h)K_f + \rho(x+h)K_f}{\rho(x+h)}\right|$$

$$\leq \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x+h) - \rho(x+h)K_f}{\rho(x+h)}\right| + \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x) - \rho(x+h)K_f}{\rho(x+h)}\right|$$

$$= \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - K_f\right| + \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\frac{\rho(x)}{\rho(x+h)} - K_f\right|$$

olacaktır. ρ monoton artan olduğundan $\frac{\rho(x)}{\rho(x+h)} < 1$ olup

$$\omega(\,f,\delta\,) \leq \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x+h)}{\rho(x+h)} - K_f\right| + \sup_{\substack{x>0 \\ |h|\leq\delta}} \left|\frac{f(x)}{\rho(x)} - K_f\right|$$

yazılabilir. Buradan

$$\omega(f\,,\delta\,) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

O halde, $\delta \longrightarrow 0$ iken $\omega(f\,,\delta\,) \longrightarrow 0$ dır.

vi) $\omega(f\ ,\delta\ )$ ifadesinde δ=$|t-x|$ seçilirse,

$$\omega(f,|t-x|)\ =\sup_{x,t\geq 0}\frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^2)(1+|t-x|^2)}$$

$$\geq\frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^2)(1+|t-x|^2)}$$

yazılabilir. Açıkça

$$\frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^2)(1+|t-x|^2)}\leq\ \omega(\ f,|t-x|)$$

eşitsizliği geçerli olup

$$|f(t)-f(x)|\leq(1+x^2)(1+|t-x|^2)\ \omega(f\ ,|t-x|)$$

sonucuna ulaşılır.

vii) (vi) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)|\leq(1+x^2)(1+|t-x|^2\omega\left(f\ ,\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Ayrıca $\frac{|t-x|}{\delta}\in\mathbb{R}^+$ olup (iv) özelliğinden

$$\omega\left(\ f,\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)\leq 4(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^2)\ \omega(f\ ,\delta\ )$$

eşitsizliği doğrudur. Böylece

$$|f(t)-f(x)|\leq 4(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+x^2)(1+|t-x|^2)(1+\delta^2)\omega(f\ ,\delta\ )$$

bulunur.

BÖLÜM 4

AĞIRLIKLI C_{2m} UZAYINDAN OLAN FONKSİYONLARA BİR YAKLAŞIM

C_{2m} uzayı tanımlanarak bu uzayın bir alt uzayı olan C_{2m}^0 uzayında Korovkin tipli teoremi varlığı kanıtlanarak C_{2m} uzayında benzer bir teoremin geçerli olmadığı kanıtlanacaktır. C_{2m}^0 ağırlık uzayında süreklilik modülü tanımlanarak bu uzaydaki fonksiyonlara literatürde Gadjiev-İbragimov operatörü olarak bilinen operatörle yaklaşım yapılacaktır. Son kesimde Gadjiev-İbragimov operatörünün n.momenti için bir eşitlik kanıtlanarak süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı araştırılacaktır. Bu bölüm hazırlanırken (Coşkun 2012)'nin çalışmasından yararlanılmıştır.

4.1 C_{2m} UZAYINDA KOROVKİN TİPLİ TEOREMLER

Tanım 4.1.1

$m \in \mathbb{N}, B_{2m} = B_{2m}(0,\infty)$ uzayı ; $[0,\infty)$ yarı ekseni üzerinde tanımlı ve M_f yalnızca f 'e bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^{2m})$$

eşitsizliğini sağlayan tüm fonksiyonların uzayıdır.

Uyarı 4.1.1

B_{2m} doğrusal bir uzay olup

$$\|f\|_{2m} = \sup_{x \geq 0} \frac{|f(x)|}{1 + x^{2m}}$$

ile normlu bir uzaydır. Gerçekten

N1) Her $f \in B_{2m}$ için

$$\|f\|_{2m} = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \geq 0} \frac{|f(x)|}{1 + x^{2m}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in [0, \infty) \text{ için } \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}} = 0 \text{ olur.}$$

Her $x \in [0, \infty)$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $1 + x^{2m} \geq 1$ olduğundan $|f(x)| = 0$ bulunur. Böylece $f(x) = 0$ olduğu açıktır.

N2) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere mutlak değer ve supremum tanımından açıkça

$$\|\lambda f\|_{2m} = \sup_{x\geq 0} \frac{|\lambda f(x)|}{1 + x^{2m}}$$

$$= |\lambda| \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$= |\lambda| \|f\|_{2m}$$

eşitliği elde edilir.

N3) Her $f, g \in B_{2m}$ için yine supremum ve mutlak değerin özelliklerinden

$$\|f + g\|_{2m} = \sup_{x\geq 0} \frac{|(f+g)(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$= \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)+g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|+|g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x\geq 0} \frac{|g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$= \|f\|_{2m} + \|g\|_{2m}$$

eşitliği sağlanır.

Böylece $\|f\|_{2m} = \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}}$ ifadesinin norm koşullarını sağladığı görülür.

Tanım 4.1.2

B_{2m} uzayına ait bütün sürekli fonksiyonların uzayı $C_{2m} := C_{2m}\,[0,\infty)$ olsun.Bu uzayın bir alt uzayı

$$C_{2m}^{0} := \left\{ f \in C_{2m} : \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^{2m}} = K_f = 0 < \infty \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 4.1.1

(L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi

$(L_n) = C_{2m} \to B_{2m}$ ve $\upsilon = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^{\upsilon m}, x) - f(x^{\upsilon m})\|_{2m} = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlansın.

Bu durumda her bir $f \in C_{2m}^{0}$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{2m} = 0$$

olur.

Kanıt:

Kabul edelim ki $f \in C_{2m}^{0}$ olsun. Bu durumda C_{2m}^{0} uzayının tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir x_0' bulunabilir ki

$x > x_0'$ için

$$|f\ (x)| < \ \varepsilon(1 + x^{2m})$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{x \to \infty} (1 + x^{2m}) = \infty$$

olduğundan $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir x_0'' sayısı bulunabilir ki $x > x_0''$ için

$$(1 + x^{2m}) > \frac{1}{\varepsilon}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu durumda

$$x_0 := max(x_0', x_0'')$$

seçilirse tüm $x > x_0$ lar için

$|f\ (x)| < \ \varepsilon(1 + x^{2m})$ ve $(1 + x^{2m}) > \frac{1}{\varepsilon}$

bulunur. Şimdi de

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \ ; & 0 \leq x \leq x_0 \\ lineer; & x \in \ ]x_0, x_1] \\ 0; & x > x_1 \end{cases}$$

şeklinde g fonksiyonu tanımlansın. Burada x_0 sayısı $x_1 > x_0$ olan $|g(x)| \leq |f(x_0)|$ eşitsizliğini sağlayan bir gerçel sayısı olsun.

$$\|f - g\|_{2m} \leq \sup_{x > x_1} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + x^{2m}} + \sup_{x \in \ ]x_0, x_1]} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + x^{2m}}$$

$$= \sup_{x > x_1} \frac{|f(x)|}{1 + x^{2m}} + \sup_{x \in \ ]x_0, x_1]} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + x^{2m}}$$

$$\leq 2 \sup_{x>x_1} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x\in\,]x_0,x_1]} \frac{|f(x_0)|}{1+x^{2m}}$$

$$\leq 2\varepsilon + |f(x_0)| \frac{1}{1+x_0^{2m}}$$

$$\leq 2\varepsilon + \varepsilon(1+x_0^{2m}) \frac{1}{1+x_0^{2m}}$$

$$\leq 3\varepsilon$$

bulunur.

L_n operatörleri C_{2m} uzayından B_{2m}'e dönüşüm yaptığından teoremin kabulleri yardımıyla

$$\|L_n\|_{2m} = \|L_n(1+x^{2m},x\|_{2m}$$

$$= \|L_n(1,x) + L_n(x^{2m},x)\|_{2m}$$

$$= \|L_n(1,x) - (1+x^{2m}) + (1+x^{2m}) + L_n(x^{2m},x)\|_{2m}$$

$$\leq \|L_n(1,x) - 1\|_{2m} + \|L_n(x^{2m},x) - x^{2m}\|_{2m} + \|1+x^{2m}\|_{2m}$$

$$< 3$$

olacağından

$$\|L_n\|_{2m} = \|L_n(1+x^{2m},x\|_{2m} < 3$$

bulunur. Bu eşitsizlikleri kullanarak her $f \in C_{2m}^0$ için

$$\|L_n f - f\|_{2m} = \|L_n(f-g+g,x) + g(x) - g(x) - f(x)\|_{2m}$$

$$\leq \|L_n(f-g,x)\|_{2m} + \|L_n(g,x) - g(x)\|_{2m} + \|f-g\|_{2m}$$

$$\leq \|f-g\|_{2m}\|L_n\|_{2m} + \|L_n(g,x) - g(x)\|_{2m} + \|f-g\|_{2m}$$

$$\leq \|f-g\|_{2m}\ [\|L_n\|_{2m}+1]+\|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m}$$

$$\leq 12\varepsilon+\|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m} \tag{4.1}$$

olur. Ayrıca

$$\|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m}=\sup_{x\geq 0}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$\leq \sup_{x\in[0,x_1]}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}+\sup_{x>x_1}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$=\sup_{x\in[0,x_1]}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}+\sup_{x>x_1}\frac{|L_n(g,x)|}{1+x^{2m}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

$$\mu(x_0):=\max_{x\in[0,x_0]}|f(x)|$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\sup_{x>x_1}g(x)\leq \mu(x_0)$$

olur. Böylece

$$\|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m}\ \leq \sup_{x\in[0,x_1]}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}+\sup_{x>x_1}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$<\sup_{x\in[0,x_1]}|L_n(g,x)-g(x)|+\sup_{x>x_1}|L_n(g,x)|$$

$$\leq \sup_{x\in[0,x_1]}|L_n(g,x)-g(x)|+\sup_{x>x_1}\frac{\mu(x_0)}{1+x^{2m}}$$

olacaktır. Lemma 4.1.1 gereği

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(g,x) - g(x)\|_{2m} = 0 \tag{4.2}$$

olduğundan (4.2) ifadesi (4.1) de yerine yazılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x) - f(x)\|_{2m} = 0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.[Gadjiev'in (Gadjiev 1974, 1976) kaynaklarındaki Korovkin tipi teoremlere benzer olarak aşağıdaki teoremde ifade edildiği gibi C_{2m} uzayında da Korovkin tipli bir teorem geçerli değildir.]

Teorem 4.1.2

(L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi

$(L_n): C_{2m} \to B_{2m}$ ve $\upsilon = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^{\nu m}, x) - x^{\nu m}\|_{2m} = 0$$

koşulları sağlansın. Bu durumda en az bir $f^* \in C_{2m}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f^*, x) - f^*(x)\|_{2m} \neq 0$$

olur.

Kanıt :

(L_n) operatörler dizisi şu şekilde tanımlansın:

$$L_n(f,x) = \begin{cases} f(x) + \dfrac{1+x^2}{1+2n^{2m}}[f(x+1) - f(x)] & ; \quad x \leq n \text{ ise} \\ f(x) & ; \quad x > n \text{ ise} \end{cases}$$

(L_n) operatör dizisi açıkça doğrusal ve pozitiftir. Gerçekten; $f, g \in C_{2m}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. Öncelikle

$$L_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha L_n(f, x) + \beta L_n(g, x)$$

eşitsizliği gösterilecektir.

$x > n$ için eşitlik açıktır.

$x \leq n$ olsun.

$$L_n(\alpha f + \beta g, x) = (\alpha f + \beta g)(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}[(\alpha f + \beta g)(x+1) - (\alpha f + \beta g)(x)]$$

$$= \alpha f(x) + \beta g(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}[\alpha f(x+1) + \beta g(x+1) - \alpha f(x) - \beta g(x)]$$

$$= \alpha \left[f(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}[f(x+1) - f(x)] \right] + \beta \left[g(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}[g(x+1) - \right.$$

gx

$$= \alpha L_n(f, x) + \beta L_n(g, x)$$

olduğundan L_n operatörü doğrusaldır.

Pozitiflik için $f \in C_{2m}$ ve $f(x) \geq 0$ olsun.

$x > n$ için

$$L_n(f, x) = f(x) \geq 0$$

olur.

$x \leq n$ için

$$L_n(f,x) = f(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}[f(x+1) - f(x)]$$

$$= f(x)\left[1 - \frac{1+x^2}{1+2n^2}\right] + \frac{1+x^2}{1+2n^2} f(x+1) \geq 0$$

bulunur. Bu operatör C_{2m} den B_{2m} e dönüşüm yapar. Bunun için $\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere

$$\|L_n\| = \|L_n(\rho, \mathrm{x})\| \leq \mu_\rho \|\rho\|$$

olacak şekilde μ_ρ bulunduğu gösterilmelidir. Operatörün tanımından

$$L_n(\rho,x) = \begin{cases} \rho(x) + \dfrac{1+x^2}{1+2n^2}[\rho(x+1) - \rho(x)] \ ; & x \leq n \quad ise \\ \rho(x) \ ; & x > n \quad ise \end{cases}$$

olacağından

$x > n$ için $L_n(\rho,x) = \rho(x)$ ve

$$\|\rho(x)\|_{2m} = \sup_{x \geq 0} \frac{|\rho(x)|}{1 + x^{2m}} = 1$$

olduğundan $\mu_\rho = 1$ olmak üzere

$$\|L_n\|_{2m} \leq \mu_\rho \|\rho\|$$

bulunur. Benzer şekilde

$x \leq n$ için

$$L_n(\rho,x) = \rho(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}[\rho(x+1) - \rho(x)]$$

$$\leq \rho(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}\left[(x+1)^{2m} - x^{2m}\right]$$

$$\leq \rho(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}\left[(x+1)^{2m}\right]$$

$$\leq \rho(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2}\left[2^{2m}(x^{2m}+1)\right]$$

$$\leq \rho(x)[1+2^{2m}]$$

olur.

$\mu_\rho = 1 + 2^{2m}$ olmak üzere L_n operatörünün C_{2m} uzayından B_{2m} uzayına dönüşüm yaptığı

gösterilmiş olur. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^{\nu m}, x) - x^{\nu m}\|_{2m} = 0$$

şeklindeki üç koşulun sağlandığı gösterilmelidir. Operatörün tanımından

$\nu = 0$ için $\|L_n(1,x) - 1\|_{2m} \leq \left\|1 + \frac{1+x^2}{1+2n^2}[1-1] - 1\right\|_{2m} + \|1-1\|_{2m} = 0$ olur.

$\nu = 1$ için

$$\|L_n(t^m, x) - x^m\|_{2m} = \left\|x^m + \frac{1+x^2}{1+2n^{2m}}\left[(x+1)^m - x^m\right] - x^m\right\|_{2m}$$

$$\leq \left\|\frac{1+x^2}{1+2n^{2m}}(x+1)^m\right\|_{2m}$$

$$\leq \left\|\frac{1+x^2}{1+2n^{2m}}2^m(x^m+1)\right\|_{2m}$$

$$\leq \|2^m(x^m+1)\|_{2m}$$

$$= 2^m \sup_{x \le n} \frac{x^m + 1}{x^{2m} + 1}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_{2m} = 0$$

bulunur. Son olarak

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^{2m}, x) - x^{2m}\|_{2m} = 0$$

eşitliği gösterilecektir.

$$\|L_n(t^{2m}, x) - x^{2m}\|_{2m} = \left\| x^{2m} + \frac{1 + x^2}{1 + 2n^{2m}} [(x+1)^{2m} - x^{2m}] - x^{2m} \right\|_{2m}$$

$$\le \left\| \frac{1 + x^2}{1 + 2n^{2m}} (x+1)^{2m} \right\|$$

$$\le \left\| \frac{1 + x^2}{1 + 2n^{2m}} 2^{2m} (1 + x^{2m}) \right\|$$

$$\le 2^{2m} \sup_{x \le n} \frac{1 + x^{2m}}{2n^{2m} + 1}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathrm{L_n}(t^{2m}, x) - x^{2m} \|_{2m} = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$f^* = x^{2m} cos\pi x$$

olarak tanımlanırsa

$f^*(x) = x^{2m} cos\pi x$

$\leq (1 + x^{2m}) cos\pi x$

$\leq (1 + x^{2m})$

olduğundan açıkça $f^* \in C_{2m}$ dir. $\mu_{f^*} = 1$ olarak alınırsa

$|f^*(x)| \leq \mu_{f^*}(1+x^{2m})$ dir.

$x^{2m} cos\pi x$ sürekli olduğundan $f^* \in C_{2m}$ olur.
$x > n$ için durum açıktır.
$x \leq n$ için

$$L_n(f^*, x) = f^*(x) + \frac{1 + x^2}{1 + 2n^{2m}} [f^*(x + 1) - f^*(x)]$$

$$= x^{2m} cos\pi x + \frac{1+x^2}{1+2n^{2m}} [(x + 1)^{2m} cos\pi(x + 1) - x^{2m} cos\pi x]$$

$$\leq x^{2m} cos\pi x + \frac{1 + x^2}{1 + 2n^{2m}} [2^{2m} (x^{2m} + 1) \, cos\pi(x + 1) - x^{2m} cos\pi x]$$

$$= x^{2m} \cos\pi x + \frac{1+x^2}{1+2n^{2m}} [2^{2m} (x^{2m} + 1) \, (cos\pi x cos\pi - sin\pi x sin\pi) -$$

$x2mcos\pi x$

$$= x^{2m} cos\pi x - \frac{1+x^2}{1+2n^{2m}} [2^{2m} (x^{2m} + 1) \, cos\pi x + x^{2m} cos\pi x]$$

$$= x^{2m} cos\pi x - \frac{1+x^2}{1+2n^{2m}} cos\pi x [2^{2m} (x^{2m} + 1) \, + x^{2m}]$$

olur.

$$\|L_n \, (f^*, x \,) - \, f^*(x) \, \|_{2m} = \left\| \frac{1 + x^2}{1 + 2n^{2m}} \cos\pi x [2^{2m} (x^{2m} + 1) \, + x^{2m}] \right\|_{2m}$$

$$= \sup_{x \leq n} \frac{1+x^2}{1+2n^{2m}} \cos\pi x [2^{2m}(x^{2m}+1) + x^{2m}]$$

$$= \frac{1+n^2}{1+2n^{2m}} [2^{2m}(n^{2m}+1) + \mathrm{n}^{2m}]$$

$$= \frac{1+n^2}{1+2n^{2m}} [n^{2m}(2^{2m}+1) + 2^{2m}]$$

$$= (2^{2m}+1) \frac{1+n^2}{1+2n^{2m}} n^{2m} + 2^{2m} \frac{1+n^2}{1+2n^{2m}}$$

$$> (1+n^2)n^{2m} \frac{(2^{2m}+1)}{1+2n^{2m}}$$

$$> \frac{(1+n^2)n^{2m}}{1+2n^{2m}}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n\ (f^*, x) - f^*(x)\|_{2m} = \infty$$

bulunur. Böylece bir $f^* \in C_{2m}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|\ L_n\ (f^*, x\ ) - f^*(x)\ \|_{2m} \neq 0$$

olduğu gösterilmiş olup kanıt tamamlanmış olur.

Şimdi ağırlıklı süreklilik modülü tanımı kullanılarak ağırlıklı normda doğrusal pozitif operatörler dizisinin yakınsaklığı incelenecektir.

Tanım 4.1.3

$f \in C_{2m}^0$ olsun. Bu durumda

$$\omega(f, \delta)_{2m} = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

ifadesine ağırlıklı süreklilik modülü denir.

Bir $f \in C_{2m}$ fonksiyonu için süreklilik modülü Achiser tarafından kanıtlanmıştır. Genelde $\delta \to 0$,için $f \in C_{2m}$ fonksiyonunun süreklilik modülü 0'a yaklaşmaz. Ancak (Gadjiev 1999)'in de kanıtlandığı gibi her $f \in C_2^0$ fonksiyonu için

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f,\delta)_{2m} = 0$$

dır.

4.2 C_{2m}^0 AĞIRLIKLI UZAYINDA SÜREKLİLİK MODÜLÜNÜN ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde öncelikle çalışacağımız C_{2m}^0 uzayında yaklaşım için gerekli olan süreklilik modülünün özellikleri incelenecektir.

Önerme 4.2.1

$f \in C_{2m}^0$ olsun. Bu durumda

i. $\omega(f,\delta)_{2m} \geq 0$
ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f,\delta_1)_{2m} \leq \omega(f,\delta_2)_{2m}$
iii. $\forall\, m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,m\delta) \leq 2^{2m}(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$
iv. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq 2^2(\lambda+1)(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$
v. $\forall f \in C_{2m}^0$ için $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f,\delta)_{2m} = 0$
vi. $|f(t)-f(x)| \leq (1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})\,\omega(f,|t-x|)_{2m}$
vii. $|f(t)-f(x)| \leq 2^{2m}(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$

özellikleri geçerlidir.

Kanıt:

i.) $\omega(f,\delta)_{2m} = \sup\limits_{\substack{x\geq 0\\ |h|\geq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$

ifadesinde

$(1 + x^{2m}) \geq 0$, $(1 + h^{2m}) \geq 0$ ve

$|f(x + h) - f(x)| \geq 0$ olduğundan

$\omega(f, \delta)_{2m} \geq 0$ dır.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ olsun.$|h| \leq \delta_2$ bölgesi , $|h| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyüktür. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden

$$\sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \geq \delta_1}} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + h^{2m})} \leq \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \geq \delta_2}} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + h^{2m})}$$

olacağından

$$\omega(f, \delta_1)_{2m} \leq \omega(f, \delta_2)_{2m}$$

bulunur.

iii) Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f, \delta)_{2m} = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + h^{2m})}$$

ifadesinde $x + h = t$ denirse

$$\omega(f, \delta)_{2m} = \sup_{\substack{t, x \geq 0 \\ |t - x| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + (t - x)^{2m})}$$

elde edilir. O halde

$$\omega(f, m\delta)_{2m} = \sup_{\substack{t, x \geq 0 \\ |t - x| \leq m\delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + (t - x)^{2m})}$$

olacaktır.

$|t-x| \leq \; m\delta \Longrightarrow \; -m\delta \; \leq t-x \; \leq \; m\delta$

$t = x + mh$ seçilirse $|h| \leq \delta$ olup

$$\omega(f, m\delta)_{2m} = \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+mh)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})}$$

yazılabilir. Diğer yandan her $f \in C_{2m}^{0}$ için

$$\begin{aligned} f(x+mh)-f(x) &= f(x+h)-f(x)+f(x+2h)-f(x+h)+f(x+3h)- \\ &\quad f(x+2h)+\cdots+f(x+mh)-f(x+(m-1)h) \\ &= \sum_{k=1}^{m}[f(x+kh)-f(x+(k-1)h] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$f(x+mh)-f(x) = \left|\sum_{k=1}^{m}[f(x+kh)-f(x+(k-1)h]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}|f(x+kh)-f(x+(k-1)h|$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{|f(x+kh)-f(x+(k-1)h|}{(1+h^{2m})(1+(x+(k-1)h)^{2m})}(1+h^{2m})(1+(x+(k-1)\mathrm{h})^{2m}$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki tarafın (1+x^{2m})(1+$(mh)^{2m}$) ifadesine bölünmesiyle

$$\frac{|f\;(x+mh\,)\text{-}\;f(x)|}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})} \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{|f(x+kh)-f(x+(k-1)h|}{(1+h^{2m})(1+(k-1)h)^{2m})}\frac{(1+h^{2m})(1+(x+(k-1)h)^{2m})}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})}$$

elde edilir. $|h| \leq \delta$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\omega(f,m\delta)_{2m} \leq \omega(f,\delta)_{2m}(1+\delta^{2m})\sum_{k=1}^{m}\frac{1+(x+(k-1)h)^{2m}}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$1+(x+(k-1)h)^{2m} \leq 1+2^{2m}\left(x^{2m}+\left((k-1)h\right)^{2m}\right)$$

$$\leq 2^{2m}+2^{2m}\left(x^{2m}+\left((k-1)h\right)^{2m}\right)$$

$$= 2^{2m}\left(1+x^{2m}+\left((k-1)h\right)^{2m}\right)$$

dir. $k-1 \leq m$ olduğundan

$$1+(x+(k-1)h)^{2m} \leq 2^{2m}(1+x^{2m}+(mh)^{2m})$$

$$\leq 2^{2m}(1+x^{2m}+(mh)^{2m}+x^{2m}(mh)^{2m})$$

$$= 2^{2m}(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})$$

yazılabilir. Yani,

$$\frac{1+(x+(k-1)h)^{2m}}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})} < 2^{2m}$$

dır. Böylece

$$\omega(f,m\delta)_{2m} \leq 2^{2m}(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$$

bulunur.

iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq 2^{2}(\lambda+1)(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$

$\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ sayısının tam kısmını $[\![\lambda]\!]$ ile gösterirsek $[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!]+1$ eşitsizliklerinin geçerliği olduğu açıktır. Bu eşitsizliklerde (ii) özelliği gereği

$\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq \omega(f,((\llbracket\lambda\rrbracket+1)\delta)_{2m}$

yazılabilir. ($\llbracket\lambda\rrbracket + 1) \in \mathbb{N}$) olduğundan bu eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanarak

$$\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq \omega(f,((\llbracket\lambda\rrbracket+1)\delta)_{2m}$$

$$\leq 2^{2m}(\llbracket\lambda\rrbracket+1)(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$$

bulunur. Ayrıca $\forall\lambda\in\mathbb{R}^+$ için $\llbracket\lambda\rrbracket+1\leq \lambda+1$ olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$\omega(\mathrm{f},\lambda\delta)_{2m} \leq 2^{2m}(1+\lambda)(1+\delta^{2m})\,\omega(\mathrm{f},\delta)_{2m}$$

elde edilir.

v) Her $f \in C_{2m}^0$ için $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)_{2m} = 0$ olduğundan C_{2m}^0 ın tanımından verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left|\frac{f(x)}{1+x^{2m}} - K_f\right| < \varepsilon \tag{4.3}$$

$$\left|\frac{f(x+h)}{1+(x+h)^{2m}} - K_f\right| < \varepsilon \tag{4.4}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde her $x > x_0$ için $x_0 > 0$ sayısı bulunabilir.

$$\left|\frac{f(x+h)}{1+(x+h)^{2m}} - K_f\right| = \left|\frac{f(x+h) - K_f - K_f(x+h)^{2m}}{1+(x+h)^{2m}}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x+h) - K_f - K_f\sum_{j=1}^{2m} x^{2m-j}h^j\binom{2m}{j}}{1+(x+h)^{2m}}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x+h) - K_f}{1+(x+h)^{2m}}\right| + \frac{hK_f\sum_{j=1}^{2m} x^{2m-j}h^{j-1}\binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}}$$

$$\leq sup\left|f(x+h)-K_f\right| + \frac{\delta K_f \sum_{j=1}^{2m} \; x^{2m-j} h^{j-1}\binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}}$$

$$< \varepsilon + \delta K_f \, sup \frac{\sum_{j=1}^{2m} \; x^{2m-j} h^{j-1}\binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}}$$

olur.

Aynı zamanda her $f \in C[0, x_0]$ için

$$\sup_{\substack{0\leq x\leq x_0 \\ |h|\leq\delta}} |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon$$

sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Böylece (4.3) ve (4.4) den

$$\omega(f,\delta)_{2m} = \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{\left|f(x+h)-f(x)-K_f+K_f\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$\leq \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{\left|f(x+h)-K_f\;\right| + \left|\;K_f-f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$\leq \varepsilon + \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{\left|K_f-f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$< \varepsilon + \frac{\delta K_f \, sup \sum_{j=1}^{2m} \; x^{2m-j} h^{j-1}\binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}} + \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{\left|K_f-f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$< 2\varepsilon + \frac{\delta K_f \, sup \sum_{j=1}^{2m} \; x^{2m-j} h^{j-1}\binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}} + \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{\left|K_f-f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

(4.3) eşitsizliğinden

$$< 3\varepsilon \; + \frac{(x+h)^{2m}}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})} K_f \delta$$

$$< 3\varepsilon + \frac{2^{2m}(x^{2m} + h^{2m})}{(1 + x^{2m})(1 + h^{2m})} K_f\ \delta$$

$$< 3\varepsilon + 2^{2m}\left(\frac{x^{2m}}{1 + x^{2m}} + \frac{h^{2m}}{1 + h^{2m}}\right) K_f \delta$$

$$\leq 3\varepsilon + 2^{2m} 2\ K_f\ \delta$$

olur. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f, \delta)_{2m} = 0$$

bulunur.

vi.Kanıt:

$|f(t) - f(x)| \leq (1+x^{2m})(1+|t - x|^{2m})\omega(\text{ f},\ |t - x|)_{2m}$

$\omega(\text{ f}, \delta\ )_{2m}$ ifadesinde $\delta=|t - x|$ seçilirse

$$\omega(\text{ f}, |t - x|)_{2m} = \sup_{x,t \geq 0} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + |t - x|^{2m})}$$

$$\geq \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + |t - x|^{2m})} \leq \omega(\text{ f}, |t - x|)_{2m}$$

olduğu görülür. Böylece

$|f(t) - f(x)| \leq (1 + x^{2m})(1 + |t - x|^{2m}\ \omega(\text{ f}, |t - x|)_{2m}$

eşitsizliği elde edilir.

vii.Kanıt:

(vi) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m}\omega\left(f,\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)_{2m}$$

yazılabilir. Ayrıca $\frac{|t-x|}{\delta} \in \mathbb{R}^{+}$ olup (iv) özelliğinden dolayı

$$\omega\left(f,\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)_{2m} \leq 2^{2m}(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$$

dır.

$$|f(t)-f(x)| \leq 2^{2m}(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$$

bulunur.

Pozitif doğrusal operatörlerde C_{2m}^{0} uzayında fonksiyonların yaklaşımlarının derecesinin hatası için $\delta \to 0$ iken $\omega(f,\delta)_{2m}$ in 0' a yaklaşması kullanılır. Bundan sonraki kesimde Gadjiev-İbragimov olarak bilinen pozitif doğrusal operatörler dizisi tanıtılacaktır.

4.3 C_{2m}^{0} UZAYINDA GADJİEV İBRAGİMOV OPERATÖRÜYLE YAKLAŞIM

İlk olarak literatürde Gadjiev İbragimov operatörü olarak bilinen operatör verilecektir.

$x,t,u \in [0,\infty)$ olmak üzere $K_n(x,t,u)$ fonksiyon dizisi için aşağıdaki koşullar sağlansın.

1°) Her $K_n\,(x,t,u)$ fonksiyonu x ve t nin $[0,\infty)$ aralığındaki her değerine karşılık u ya göre tam analitik fonksiyonlar.

2°)$\forall\, n \in \mathbb{N}$ ve $\forall\, x \in [0,\infty)$ için $K_n(x,0,0)=1$

3°)$\nu, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,\infty)$ olmak üzere

$$\left\{(-1)^{\nu}K_n\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}\ (x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right\} \geq 0$$

4°) $\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = -nx \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}$

eşitliğini sağlayan ve $(n+m) \in \mathbb{N}$ olacak şekilde ν den bağımsız bir m sayısı vardır.Bu fonksiyon dizisi yardımıyla Gadjiev İbragimov operatörü tanımlanabilir.$\big(\vartheta_n(t)\big)$ ve $\big(\psi_n(t)\big)$ dizileri $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar dizisi olmak üzere $\forall\, t \in [0,\infty)$ için $\vartheta_n(0)=0, \psi_n(t) > 0$ olsun. Ayrıca pozitif sayıların bir (α_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\psi_n(0)} = 0$ olsun.

$K_n\big(x,t,\vartheta_n(t)\big)$ tam analitik fonksiyon olarak Taylor serisi şeklinde yazılabilir.$\big(\vartheta_n(t) - \alpha n \psi n t$ nin kuvvetlerine göre Taylor açılımı yazılırsa t$=0$ ve $\vartheta n0=0$ olduğundan $-\alpha n \psi n0$ ın kuvvetlerine göre seriye açılmış olur.

$$K_n\big(x,t,\vartheta_n(t)\big) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{t=0\\ u=\alpha_n\psi_n(0)}} \frac{\big(\vartheta_n(t) - \alpha_n\psi_n(t)\big)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$K_n\big(x,t,\vartheta_n(t)\big)$ yukarıdaki koşulları sağlamak üzere Gadjiev-İbragimov operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanabilir (Gadjiev 1976).

Önerme 4.3.1

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{n^2\psi_n(0)}\right) K_n^{(\upsilon)}\big(x,0,\psi_n(0)\big) \frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^{\upsilon}}{\upsilon!} \tag{4.5}$$

(4.5) eşitliğiyle verilen operatörde aşağıdaki özel seçimler yapılırsa özel operatörler elde edilir.

1) $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ ve $K_n(x,t,u) = \left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^n$ olarak alınmasının ardından $t=0$ ve $u = \alpha_n\psi_n(0)$ alınırsa Bernstein operatörü olarak bilinen operatöre ulaşılır. Gerçekten

$$K_n{}'(x,t,u) = (-1)n\left(\frac{x}{1+t}\right)\left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^{n-1}$$

$$K_n''(x,t,u) = (-1)^2 n\left(\frac{x}{1+t}\right)^2 (n-1)\left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$K_n{}^{\nu}(x,t,u) = (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots\big(n-(\nu-1)\big)\left(\frac{x}{1+t}\right)^{\nu}\left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^{n-\nu}$$

$$= (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\left(\frac{x}{1+t}\right)^{\nu}\left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^{n-\nu}$$

olur. Böylece $t=0$ ve $u=\alpha_n\psi_n(0)$ için

$$K_n{}^{(\nu)}\,(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}} = (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)x^{\nu}(1-\alpha_n\psi_n(0)x)^{n-\nu}$$

olur. Dolayısıyla

$x\in[0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

elde edilir. Şöyle ki

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{n^2\frac{1}{n}}\right)K_n{}^{(\upsilon)}\left(x,0,n\frac{1}{n}\right)\frac{\left(-n\frac{1}{n}\right)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)(-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\,x^{\nu}\left[1-n\frac{1}{n}x\right]^{n-\nu}\frac{(-1)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{\upsilon!}\right)x^{\upsilon}(1-x)^{n-\upsilon}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

bulunur. O halde Bernstein operatörü elde edilmiş olur.

2) $\alpha_n = n\,, \psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$

olarak seçilirse; yine

$K_n\,(x,t,u) = \left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^n$ olmak üzere

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}$$

Bernstein-Chlodowsky operatörü elde edilir.

Gerçekten $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$ alınırsa

$$K_n{}^{\nu}(x,t,u) = (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\left(\frac{x}{1+t}\right)^{\nu}\left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^{n-\nu}$$

olacağından $t = 0$ ve $u = \alpha_n\psi_n(0)$ için

$$\mathrm{K_n}^{(\nu)}\,(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}} = (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)(x)^{\nu}[1-\alpha_n\psi_n(0)x]^{n-\nu}$$

$$= (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)x^{\nu}\left[1-n\frac{1}{nb_n}x\right]^{x-\nu}$$

$$= (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)x^{\nu}\left[1-\frac{1}{b_n}x\right]^{x-\nu}$$

olacaktır. Böylece

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\frac{1}{nb_n}}\right)(-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\,x^{\nu}\left[1-\frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}\frac{\left(-n\frac{1}{nb_n}\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!}\left[1-\frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left[1-\frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{b_n \nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left[1-\frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}\right)$$

eşitliği geçerli olduğundan Bernstein-Cholodowsky polinomu elde edilmiş olur (Coşkun 2000, Doğru 2006).

Örnek 4.3.2

$x \in [0,1]$ olmak üzere $f(x)=\frac{x^3+1}{e^{2x}}$ fonksiyonu için $K_n\,(x,t,u)=[1-ux]^n \alpha_n=n$ ve $\psi_n(0)=n+1$ alınarak yapılan yaklaşımı veren program örneği ve yaklaşımın grafiği Şekil 4.1 de verilmiştir.

```
> restart;
> with(plots):
> f:=x->(x^3+1)/exp(2*x);
```

$$f := x \to \frac{x^3+1}{\mathbf{e}^{(2\,x)}}$$

```
> printf(`Dizinin eleman sayısını giriniz.\n`);m := scanf(`%d`)[1];
Dizinin eleman sayısını giriniz.
> 50
```

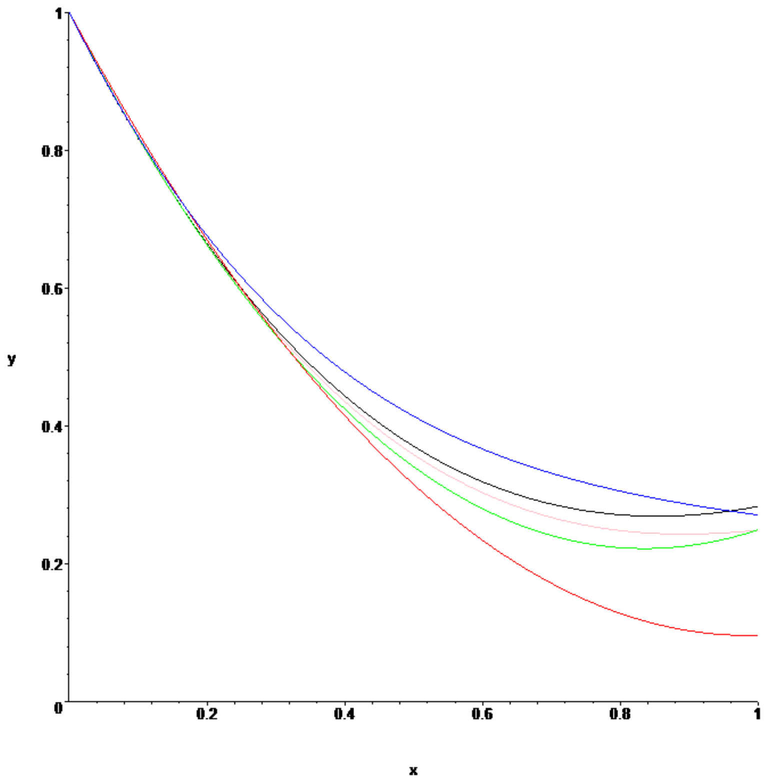
$m := 50$

```
> printf(`Toplamın mertebesini giriniz.\n`);t := scanf(`%d`)[1];
Toplamın mertebesini giriniz.
> 30
```

$t := 30$

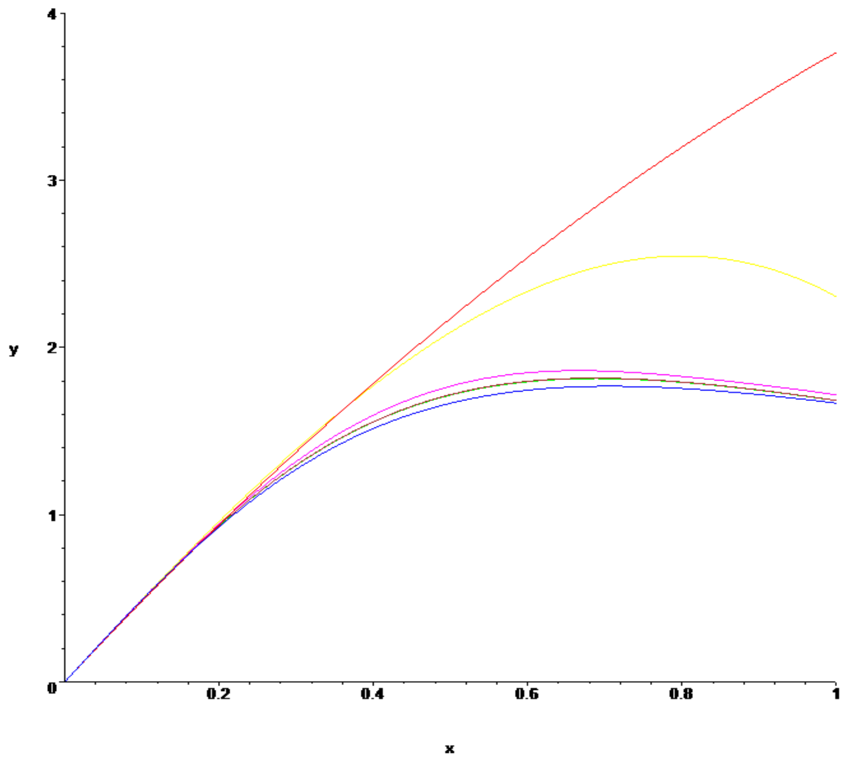
```
> for n from 1 to m do
> g:=u->(1-u*x)^n:
> L[n](f,x):=evalf(simplify(sum(f(v/((n^2)*(n+1)))*((D@@v)(g)(n*(n+1)))*
```

```
((-n*(n+1))^v)/v!,v=0..t))):
> end do:
> p1:=plot(f(x),x=0..1,y=0..1,color=blue):
> p2:=plot(L[2](f,x),x=0..1,y=0..1,color=red):
> p3:=plot(L[3](f,x),x=0..1,y=0..1,color=green):
> p4:=plot(L[4](f,x),x=0..1,y=0..1,color=pink):
> p5:=plot(L[5](f,x),x=0..1,y=0..1,color=black):
> display([p1,p2,p3,p4,p5]);
```



Şekil 4.1 $f(x) = \frac{x^3+1}{e^{2x}}$ fonksiyonuna $n = 50$ ve $m = 30$ için yaklaşımı veren grafik.

Benzer şekilde $x \in [0,1]$ olmak üzere $f(x) = \frac{5x}{2x^2+1}$ fonksiyonu için $\mathrm{K}_n\ (x,t,u) = [1-ux]^n$, $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = n+1$ alınarak yapılan yaklaşımın grafiği de Şekil 4.2 de verilmiştir.



Şekil 4.2 $f(x) = \frac{5x}{2x^2+1}$ fonksiyonuna $n = 50$ ve $m = 20$ için yaklaşımı veren grafik.

Şimdi Lemma 4.3.2 de kullanılacak bir eşitlik kanıtlanacaktır.

Lemma 4.3.1

Her N doğal sayısı için $C_{k,N}$ pozitif sabitler ve $C_{N,N} = 1$ olmak üzere

$$L_n(t^N, x) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^k \frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{nk} \frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{N-k}} x^k \quad (4.6)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt:

Kanıt tümevarım yoluyla yapılacaktır.Gadjiev-İbragimov operatörü tanımı nedeniyle N=1için $L_n(t^N, x) = \frac{\alpha_n}{n} x$ dir.

Gerçekten ,

$$L_n(t\,,x) = \sum_{k=1}^{1}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^1 \frac{n}{n}\frac{C_{1,1}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{N-N}}x^k$$

$$= \frac{\alpha_n}{n}x$$

benzer şekilde N=2 için

$$L_n(t^2,x) = \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n+m}{n}x^2 + \frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}x$$

dir. Gerçekten;

$$L_n(t^2,x) = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^k \frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{N-k}}x^k$$

$$= \frac{\alpha_n}{n}x\frac{C_{1,2}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{2-1}} + \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n(n+m)}{n^2}\frac{C_{2,2}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{2-2}}x^2$$

$$= \frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{2-1}}x + \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{(n+m)}{n}x^2$$

bulunur. Kabul edelim ki (4.6) eşitliği her p doğal sayısı için geçerli olsun. Bu durumda p+1 için de (4.6) eşitliğinin doğru olduğu gösterilirse ispat biter.

Her v doğal sayısı için a_j bir sabit olmak üzere

$$v^{p+1} = v(v-1)\dots(v-p) + \sum_{j=1}^{p} v^j\ aj$$

eşitliği geçerli olduğundan (4.7) eşitliği vardır.

$$\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^{p+1} = \frac{v(v-1)\dots(v-p)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1}} + \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^j \frac{aj}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-j}} \tag{4.7}$$

Gadjiev-İbragimov operatöründe

$f(t) = t^{p+1}$

alınırsa (4.7) eşitliği yardımıyla

$$L_n(t^{p+1},x) = \sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^{p+1} K_n{}^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty}\left[\frac{v(v-1)\dots(v-p)}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}} + \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^j \frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}}\right]$$

$$K_n{}^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty}\frac{v(v-1)\dots(v-p)}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}} K_n{}^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^v \frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}} K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \frac{1}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}}\sum_{v=0}^{\infty} K_n{}^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{(v-p-1)!} +$$

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^v K_n{}^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$v < p+1$ için faktöriyel tanımlı olmadığından toplam $(p+1)$ den başlatılırsa;

$$L_n(t^{p+1},x) = \frac{1}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}}\sum_{v=p+1}^{\infty} K_n{}^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{(v-p-1)!} +$$

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}} L_n\,(t^j,x)$$

olur. Burada $K_n^{(v)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))$ fonksiyonuna 4°) özelliği uygulanırsa eşitliğin her $p\in\mathbb{N}$ için doğru olduğu kabulü yardımıyla

$$L_n(t^{p+1},x)=(-1)^{p+1}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{p+1}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+pm)}{n^{p+1}}K_{n+(p+1)m}\,(x,0,0)x^{p+1}$$
$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-j}}\left[\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{j-k}}x^k\right]$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{p+1}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+pm)}{n^{p+1}}x^{p+1}+\sum_{j=1}^{p}a_j\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}$$
$$\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-k}}x^k$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{p+1}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+pm)}{n^{p+1}}x^{p+1}$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-k}}x^k\sum_{j=k}^{p}a_j$$

eşitliğine ulaşılır. Burada

$$C_{k,p+1}$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-k}}x^k\sum_{j=k}^{p}a_j\,, & eğer\ 1\le k\le p \text{ ise}\\ 1, & eğer\ k=p+1 \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $N=p+1$ için eşitlik kanıtlanmış olur.

Tanım 4.3.1

Gadjiev-İbragimov operatörünün n. momenti

$$T_{N,n}(x)=\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{N}K_n^{(v)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{v}}{v!}$$

eşitliğiyle verilir.

Lemma 4.3.2

Her $x \in [0, \infty)$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ sayısı için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\left|T_{N,n}(x)\right| = (x + x^2 + \cdots + x^N)O\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)$$

Kanıt:

$T_{N,n}(x)$ in tanımından

$$T_{N,n}(x) = \sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right)^N K_n{}^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{N}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^N (-x)^{N-v}\binom{N}{v} K_n{}^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \left[\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^0 (-x)^N\binom{N}{0} + \left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^1 (-x)^{N-1}\binom{N}{1} + \cdots\right.$$
$$\left. + \left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^N (-x)^{N-N}\binom{N}{N}\right] K_n{}^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$T_{N,n}(x) = (-x)^N + \binom{N}{1}L_n(t, x)(-x)^{N-1} + \binom{N}{2}L_n(t^2, x)(-x)^{N-2} + \cdots$$
$$+ \binom{N}{N-1}L_n(t^{N-1}, x)(-x)^{N-1} + \binom{N}{N}L_n(t^N, x) \qquad (4.7)$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 4.3.1 de t^N yerine x^j alınarak $\big(n^2\psi_n(0)\big)^{j-N}$ çarpanı elde edilir. ($j = 1,2, \dots, (N-1)$ olmak üzere). Böylece $n \to \infty$ için $L_n(f, x)$ operatörleri 0'a yakınsar. (4.7) de x^N parantezine alınırsa

$$x^N\left[(-1)^N + \binom{N}{1}(-1)^{N-1} + \binom{N}{2}(-1)^{N-2} + \cdots + \binom{N}{N-1}(-1) + \binom{N}{N}\right]$$

$$= x^N \sum_{k=0}^{N} (-1)^{N-k} \binom{N}{k} = 0$$

eşitliği geçerlidir. $T_{N,n}(x)$ de bazı l sabitleri için $\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^l$ terimleri sabit olmak üzere $n^2\psi_n(0) \to \infty$ iken ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1

$f \in C_{2m}^0$ ve $\omega(f, \delta)_{2m}$ bu fonksiyonların ağırlıklı süreklilik modülü olsun. Bu durumda yeterince büyük n'ler için

$$\sup_{x \geq 0} \frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + x^{2m+1})} \leq \widetilde{c_m}\, \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n^2\psi_n(0)}}\right)_{2m}$$

Kanıt:

$$P_{v,n}(x) = K_n^{(v)}(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)) \frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^v}{v!}$$

olarak tanımlansın. Operatörün tanımı gereği

$L_n(1,x) = 1$ olduğundan $P_{v,n}(x) \geq 0$ olur. Böylece

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leq \sum_{v=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right) - f(x) \right| P_{v,n}(x) \tag{4.8}$$

eşitsizliği geçerlidir. Gerçekten

$$|L_n(f,x) - f(x)| = |L_n(f,(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)|$$

$$= |\, L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)|$$

$$= |L_n(f(t) - f(x), x) + f(x)(L_n(1,x) - 1|$$

$$\leq |L_n(f(t) - f(x), x) + |f(x)||\, (L_n(1,x) - 1|$$

$$\leq L_n(|(f(t)-f(x)\,|,x)+|f(x)||\,(1-1|$$

$$= L_n(|(f(t)-f(x)\,|,x)|$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)-f(x)\right| K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)-f(x)\right| P_{v,n}(x)$$

olacaktır. Süreklilik modülünün

$$|f(t)-f(x)| \leq 2^{2m}(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^{2m})\,\omega(\mathrm{f},\delta)_{2m}$$

özelliği gereği t yerine $\frac{v}{n^2\psi_n(0)}$ alınırsa, δ_n pozitif sayı dizisi olmak üzere

$$\left|f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)-f(x)\right| \leq 2^{2m}(1+x^{2m})(1+\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|^{2m})(1+\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n})(1+{\delta_n}^{2m})\,\omega(f,\delta_n)_{2m}$$

(4.9)

eşitsizliği bulunur. (4.9) eşitsizliğine Hölder eşitsizliği uygulanırsa ; (4.8) ve (4.9) dan

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leq \sum_{v=0}^{\infty} 2^{2m}\,(1+\,x^{2m})\,(1+\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|^{2m})(1+\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n})$$

$$(1+{\delta_n}^{2m})\,\omega(\mathrm{f},\delta_n)_{2m}P_{v,n}(x)$$

her iki taraf $1+x^{2m}$ e bölünürse Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{1+x^{2m}} \leq 2^{2m}(1+{\delta_n}^{2m})\,\omega(\mathrm{f},\delta_n)_{2m}\sum_{v=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\right)$$

$$\left(1+\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}\right)P_{v,n}(x)$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{v=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\right]\left[1+\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}\right]P_{v,n}(x)=\sum_{v=0}^{\infty}\left(1+\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}+\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}\right)P_{v,n}(x)$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}$$

$$=1+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+T_{2m}(x)+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}$$

$$\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}$$

$$=1+T_{2m}(x)+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m}$$

$$\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m+1}\frac{1}{\delta_n}$$

$$=1+T_{2m}(x)+\left[\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}{}^{2}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|^{2}\right]^{\frac{1}{2}}1\,\frac{1}{\delta_n}$$

$$+\left[\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}{}^{2m}(x)\left(\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}{}^{2m}(x)\left(\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m+1}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Buradan

$$\left[\sum_{v=0}^{\infty} P^{-1-4m}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\delta_n} \leq 1 + T_{2m}(x) + T_2^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\delta_n} + T_{2m}^{\frac{1}{2}} T_{2m+2}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\delta_n}$$

bulunur.

Lemma 4.3.2 yardımıyla

$$\frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{1 + x^{2m}} \leq$$

$$2^{2m}(1 + \delta_n{}^{2m})\, \omega(\mathrm{f}, \delta_n)_{2m} \left\{1 + (x + \cdots + x^{2m}) \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} + \frac{1}{\delta_n}(x + x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n^2 \psi_n(0)\right)^{\frac{1}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\delta_n}(x + \ldots + x^{2m+2})^{\frac{1}{2}} (x + \cdots + x^{2m})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} \right\}$$

bulunur. Son olarak

$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{n^2 \psi_n(0)}}$ seçilirse $n \to \infty$ için $\delta_n \to 0$ olur ve böylece yeterince büyük n'ler için $\delta_n < 1$ olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{1 + x^{2m}} \leq 2^{2m} \left(1 + \left(\frac{1}{n^2 \psi_n(0)}\right)^m\right) \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n^2 \psi_n(0)}}\right)_{2m}$$

$$\left\{1 + (x + \cdots + x^{2m}) \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2 \psi_n(0)}})}(x + x^2) \frac{1}{\left(n^2 \psi_n(0)\right)^{\frac{1}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2 \psi_n(0)}})}(x + \ldots + x^{2m+2})^{\frac{1}{2}} (x + \cdots + x^{2m})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} \right\}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$\frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + x^{2m+1})} \leq 2^{2m+1}(5 + 4m)\omega\left(f, \frac{1}{n^2 \psi_n(0)}\right)_{2m}$$

olup $\widetilde{C_m} = 2^{2m+1}(5 + 4m)$ seçilirse ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.3.1

Özel olarak $m = 1$ durumu göz önüne alınacak olursa Teorem 4.3.1 deki eşitsizlik

$$\sup_{x \geq 0} \frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{(1 + x^2)(1 + x^3)} \leq \breve{c},\ \omega\left(f, \frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)_2$$

şekline dönüşür. Burada

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$$

dizisi için

$(1 + x^2)(1 + x^3) < (1 + x^2)^3$ sağlandığından

$$\sup_{x \in [0,\gamma_n]} \frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{(1 + x^2)(1 + x^3)} \leq \breve{c},\ \omega\left(f, \frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)_2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik (Gadjiev, Ispir, 1999) daki eşitsizlikten daha iyi bir yaklaşım yapılabilecek bir eşitsizliktir.

KAYNAKLAR

Altomare F and Campite M (1994) *Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications,* Walter de Gruyter, 141-180.

Aral A (2003) Approximation by Ibragimov-Gadjiev operators in polynomial sapece. Proc.of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol.XIX, 23-44

Coşkun E (2002) *Analiz I,* Alp Yayınları, 1-200.

Coşkun T (1997) Some Properties of Linear Positive Operators in the Weighted Spaces of Unbounded Functions. *Common. Fac. Sci. Univ. Ank. Series* 47: 175-191.

Coşkun T (2000) Weighted approximation of continuous functions by sequences of linear positive operators.*Proc.Indian Acad. Sci, (Math. Sci),* 110(4): 357-362.

Coşkun T (2002) On The weighted approximation of unbounded continuous functions by sequences of linear positive operators. *Indian J. P.Ap Math.,* 34(3): 477-485.

Coşkun T (2012) On The Order of Weighted Approximation By Positive Linear Operators. *Turk.J. Math.,* 36(1): 113-120.

Doğru O (2008) Approximation properties of a generalization of positive linear operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 342: 161-170.

Gadjiev A D (1974) The Convergence Problem for a Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets and Theorems Analogous To That of P.P. Korovkin Engl.translated. *Sov. Math. Dokl*., 15: 1433- 1436.

Gadjiev A D (1976) On P.P. Korovkin type theorems. *Mathem. Zametki,* 20(5): 995-998

Gadjiev A D and Ibragimov I I (1970) On a sequence of linear positive operators. *Sov. Math. Dokl.,* 11(4): 1092-1095.

Gadjiev A D and Ispir N (1999) On a sequence of linear positive operators in weight spaces. *Proc.of IMM of IMM of Azerbaijan AS,Vol.XI(XIX)*, 45-56.

Gadjiev A D and Aral A (2007) The estimates of approximation by using new type of weighted modulus of continuity, *Comput. Math. Appl*., 54:127-135.

Grossman M W (1974) Note on a Generalized Bohman-Korovkin Theorem. *J. Math. Anal. Appl*., 45: 1-12.

Haaser N B and Sullivan J A (1991) *Real Analysis*. Dover Publications, *INC*, New York.

Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A (1995) *Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1-53

Hermann T (1977) Approximation Of Unbounded Functions on Unbounded interval. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaria*, 29: 3-4.

Holhoş A (2008) The rate of convergence of positive linear operators in weighted spaces, *Automat. Comput. Appl. Math*., 17(2): 239-246.

Hsu L C (1961) Approximation of Non-bounded Continuous Functions By Certain Sequences Of Linear Positive Operators or Polynomials. *Studia Math*, 21:1-10.

Ispir N (2001) On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces. *Turkish J. Math*., 25: 355-365.

Korovkin P P (1960) Linear Operators and Approximation Theory. *Hindustan Publishing Corp*., 219: 1-20.

Zhou D X (1994) Weighted Approximation by Szasz-Mirakjan Operators, *J. Approx. Theory*, 76: 393-402.

EK AÇIKLAMALAR A

I $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3+1}{e^{2x}}}$ FONKSİYONUNA GENELLEŞTİRİLMİŞ GADJİEV İBRAGİMOV OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIMI VEREN PROGRAM ÖRNEĞİ

EK A

$$g := u \rightarrow (1 - u\,x)^n$$

$$L_1(f, x) := 3.333333333\ x$$

$$L_2(f, x) := 4.931506849\ x - 1.167988464\ x^2$$

$$L_3(f, x) := 4.992295840\ x - 0.5512964731\ x^2 - 2.138056946\ x^3$$

$$L_4(f, x) := 4.998437988\ x - 0.2808111229\ x^2 - 3.720813009\ x^3 + 0.2318292039\ x^4$$

$$L_5(f, x) := 4.999555595\ x - 0.1599289154\ x^2 - 4.789344739\ x^3 + 0.2552051246\ x^4 + 0.7584847136\ x^5$$

$$L_6(f, x) := 4.999842535\ x - 0.09919072921\ x^2 - 5.551183036\ x^3 + 0.2202157137\ x^4 + 1.843699474\ x^5 - 0.05123663630\ x^6$$

$$L_7(f, x) := 4.999934924\ x - 0.06559339897\ x^2 - 6.120457137\ x^3 - 0.2433266239\ x^7 - 0.09164807398\ x^6 + 0.1784157659\ x^4 + 2.993289854\ x^5$$

$$L_8(f, x) := 4.999969859\ x - 0.04557154310\ x^2 - 6.561511076\ x^3 - 0.7669029624\ x^7 + 0.01199241547\ x^8 - 0.1120669495\ x^6 + 0.1423853210\ x^4 + 4.098102051\ x^5$$

$$L_9(f, x) := 4.999984758\ x + 0.07466896402\ x^9 - 0.03292130893\ x^2 - 6.913053397\ x^3 - 1.515247805\ x^7 + 0.02994287818\ x^8 - 0.1179734251\ x^6 + 0.1137916490\ x^4 + 5.118985352\ x^5$$

$$L_{10}(f, x) := 4.999991736\ x + 0.2897500683\ x^9 - 0.02454525169\ x^2 - 7.199702485\ x^3 - 2.417353034\ x^7 + 0.04747838632\ x^8 - 0.002899610960\ x^{10} - 0.1154377743\ x^6 + 0.09163106255\ x^4 + 6.046600578\ x^5$$

$$L_{11}(f, x) := 4.999995257\ x + 0.6764030861\ x^9 - 0.02233335925\ x^{11} - 0.01878278093\ x^2 - 7.437840133\ x^3 - 3.412442309\ x^7 + 0.06153934963\ x^8 - 0.009320738920\ x^{10} - 0.1086123276\ x^6 + 0.07450808492\ x^4 + 6.883861319\ x^5$$

$$L_{12}(f, x) := 4.999997146\ x + 1.236967152\ x^9 - 0.1030055177\ x^{11} - 0.01469012902\ x^2 - 7.638779899\ x^3 - 4.454843694\ x^7 + 0.07139710526\ x^8 - 0.01817582421\ x^{10} - 0.09996758555\ x^6 + 0.06120782295\ x^4 + 7.638278560\ x^5 + 0.0007157517242\ x^{12}$$

$$L_{13}(f, x) := 0.006568412617\ x^{13} + 4.999998214\ x + 1.956544193\ x^9 - 0.2777257497\ x^{11} - 0.01170425115\ x^2 - 7.810581124\ x^3 - 5.512297621\ x^7 + 0.07742456890\ x^8 - 0.02799319908\ x^{10} - 0.09087295728\ x^6 + 0.05078713323\ x^4 + 8.318620352\ x^5 + 0.002818240982\ x^{12}$$

$$L_{14}(f,x) := 0.03511045955\ x^{13} + 4.999998843\ x + 2.812216161\ x^9 - 0.5737522058\ x^{11} - 0.009475207697\ x^2 - 7.959137633\ x^3 - 6.562890076\ x^7 + 0.08036437399\ x^8 - 0.0001792250123\ x^{14} - 0.03758203087\ x^{10} - 0.08204250432\ x^6 + 0.04254145354\ x^4 + 8.933488196\ x^5 + 0.006525322909\ x^{12}$$

$$L_{15}(f,x) := 0.1074306554\ x^{13} + 4.999999228\ x + 3.778838731\ x^9 - 1.007491892\ x^{11} - 0.007777771776\ x^2 - 8.088857682\ x^3 - 7.592229046\ x^7 + 0.08098542625\ x^8 - 0.0008358517228\ x^{14} - 0.04618894321\ x^{10} - 0.07381716548\ x^6 + 0.03595042311\ x^4 + 9.490757913\ x^5 + 0.01164404426\ x^{12} - 0.001908914270\ x^{15}$$

$$L_{16}(f,x) := 0.2476565717\ x^{13} + 4.999999472\ x + 4.832214791\ x^9 - 1.585356829\ x^{11} - 0.006462542544\ x^2 - 8.203103344\ x^3 - 8.591232771\ x^7 + 0.07995169517\ x^8 - 0.002241202392\ x^{14} - 0.05343776257\ x^{10} - 0.06633172414\ x^6 + 0.03062966190\ x^4 + 9.997410795\ x^5 + 0.01776076445\ x^{12} + 0.00004535050220\ x^{16} - 0.01160489245\ x^{15}$$

$$L_{17}(f,x) := 0.4786578839\ x^{13} + 4.999999630\ x + 5.950598011\ x^9 - 2.305896623\ x^{11} - 0.005427774641\ x^2 - 8.304482926\ x^3 - 9.554505059\ x^7 + 0.07779033807\ x^8 + 0.0005498476605\ x^{17} - 0.004547313507\ x^{14} - 0.05921587341\ x^{10} - 0.05961069191\ x^6 + 0.02629365969\ x^4 + 10.45953665\ x^5 + 0.02440791218\ x^{12} + 0.0002445343587\ x^{16} - 0.03974052768\ x^{15}$$

$$L_{18}(f,x) := 0.8197150202\ x^{13} - 0.00001156741218\ x^{18} + 4.999999736\ x + 7.115230198\ x^9 - 3.162111573\ x^{11} - 0.004602554558\ x^2 - 8.395050652\ x^3 - 10.47917683\ x^7 + 0.07490042112\ x^8 + 0.003746533537\ x^{17} - 0.007768386386\ x^{14} - 0.06357159660\ x^{10} - 0.05362246970\ x^6 + 0.02272862850\ x^4 + 10.88240702\ x^5 + 0.03116399646\ x^{12} + 0.0007452678205\ x^{16} - 0.1011819190\ x^{15}$$

$$L_{19}(f,x) := 1.285403485\ x^{13} - 0.00007081560252\ x^{18} + 4.999999808\ x + 8.310361604\ x^9 - 4.143467746\ x^{11} - 0.003936433127\ x^2 - 8.476446163\ x^3 - 11.36409207\ x^7 + 0.07157475780\ x^8 + 0.01419885922\ x^{17} - 0.0001572877009\ x^{19} - 0.01180743002\ x^{14} - 0.06663910256\ x^{10} - 0.04830951619\ x^6 + 0.01977301160\ x^4 + 11.27057121\ x^5 + 0.03769688914\ x^{12} + 0.001694465970\ x^{16} - 0.2136136633\ x^{15}$$

$$L_{20}(f,x) := 1.885376558\ x^{13} - 0.0002417897090\ x^{18} + 4.999999858\ x + 9.523020227\ x^{9}$$
$$- 5.237471689\ x^{11} - 0.003392856662\ x^{2} - 8.549993941\ x^{3}$$
$$+ 0.2969105746\ 10^{-5}\, x^{20} - 12.20924012\ x^{7} + 0.06802316373\ x^{8}$$
$$+ 0.03958387679\ x^{17} - 0.001187291150\ x^{19} - 0.01649805968\ x^{14}$$
$$- 0.06858927492\ x^{10} - 0.04360484427\ x^{6} + 0.01730355426\ x^{4} + 11.62795386\ x^{5}$$
$$+ 0.04377162172\ x^{12} + 0.003205201392\ x^{16} - 0.3958923779\ x^{15}$$

$$L_{21}(f,x) := 2.624705299\ x^{13} - 0.0006089265819\ x^{18} + 4.999999894\ x + 10.74267962\ x^{9}$$
$$- 6.430817524\ x^{11} - 0.002944900591\ x^{2} - 8.616775468\ x^{3}$$
$$+ 0.00002034718293\ x^{20} - 13.01536118\ x^{7} + 0.06439281478\ x^{8}$$
$$+ 0.09067725811\ x^{17} - 0.004934115427\ x^{19} - 0.02164358957\ x^{14}$$
$$- 0.06960012992\ x^{10} - 0.03944077001\ x^{6} + 0.01522532668\ x^{4} + 11.95794490\ x^{5}$$
$$+ 0.04924022819\ x^{12} + 0.005339563932\ x^{16} - 0.6665455058\ x^{15}$$
$$- 0.9813082411\ 10^{54}\, x^{21}$$

$$L_{22}(f,x) := 3.504505894\ x^{13} - 0.001263478987\ x^{18} + 4.999999919\ x + 11.96090497\ x^{9}$$
$$- 7.710176652\ x^{11} - 0.002572436339\ x^{2} - 8.677682449\ x^{3}$$
$$+ 0.00007693730524\ x^{20} - 13.78367323\ x^{7} + 0.06078462907\ x^{8}$$
$$+ 0.1809345240\ x^{17} - 0.01495165225\ x^{19} - 0.02704630436\ x^{14}$$
$$- 0.06984049086\ x^{10} - 0.03575329884\ x^{6} + 0.01346453630\ x^{4} + 12.26347888\ x^{5}$$
$$+ 0.05402480469\ x^{12} + 0.008106244811\ x^{16} - 1.042607882\ x^{15}$$
$$+ 0.6125728969\ 10^{59}\, x^{22} - 0.1271149248\ 10^{57}\, x^{21}$$

$$L_{23}(f,x) := 4.522670902\ x^{13} - 0.002289544266\ x^{18} + 4.999999938\ x + 13.17101715\ x^{9}$$
$$- 9.062711415\ x^{11} - 0.002260211909\ x^{2} - 8.733456648\ x^{3}$$
$$+ 0.0002125989340\ x^{20} - 14.51568330\ x^{7} + 0.05726587816\ x^{8}$$
$$+ 0.3257847908\ x^{17} - 0.03694794942\ x^{19} - 0.03252604253\ x^{14}$$
$$- 0.06946205977\ x^{10} - 0.03248408143\ x^{6} - 0.2207225245\ 10^{64}\, x^{23}$$
$$+ 0.01196331000\ x^{4} + 12.54710318\ x^{5} + 0.05809984716\ x^{12} + 0.01146778636\ x^{16}$$
$$- 1.538842593\ x^{15} + 0.8378011426\ 10^{61}\, x^{22} - 0.7968217176\ 10^{58}\, x^{21}$$

$$L_{24}(f,x) := 5.674593143\ x^{13} - 0.003753352352\ x^{18} + 4.999999952\ x + 14.36779201\ x^{9}$$
$$- 10.47638607\ x^{11} - 0.001996527681\ x^{2} - 8.784720104\ x^{3}$$
$$+ 0.0004801304674\ x^{20} - 15.21305793\ x^{7} + 0.05387964878\ x^{8}$$
$$+ 0.5418027764\ x^{17} - 0.07900780778\ x^{19} + 0.6080897195\ 10^{68}\, x^{24}$$
$$- 0.03792993207\ x^{14} - 0.06859652034\ x^{10} - 0.02958104185\ x^{6}$$
$$- 0.3178650753\ 10^{66}\, x^{23} + 0.01067587410\ x^{4} + 12.81103594\ x^{5}$$
$$+ 0.06147664759\ x^{12} + 0.01535237003\ x^{16} - 2.167310967\ x^{15}$$
$$+ 0.5550025020\ 10^{63}\, x^{22} - 0.3237514528\ 10^{60}\, x^{21}$$

$$L_{25}(f,x) := 6.953822706\ x^{13} - 0.005697154668\ x^{18} + 4.999999962\ x + 15.54720034\ x^{9} - 11.94013446\ x^{11} - 0.001772307625\ x^{2} - 8.831998328\ x^{3} + 0.0009403099301\ x^{20} - 15.87753466\ x^{7} + 0.05065182891\ x^{8} + 0.8458893183\ x^{17} - 0.1515756871\ x^{19} + 0.9198303567\ 10^{70}\ x^{24} - 0.04313580612\ x^{14} - 0.06735548008\ x^{10} - 0.02699830578\ x^{6} - 0.2219171111\ 10^{68}\ x^{23} + 0.009565732849\ x^{4} + 13.05721495\ x^{5} - 0.1432444167\ 10^{73}\ x^{25} + 0.06419068115\ x^{12} + 0.01966641822\ x^{16} - 2.937221962\ x^{15} + 0.2384457325\ 10^{65}\ x^{22} - 0.9629539039\ 10^{61}\ x^{21}$$

$$L_{26}(f,x) := 8.352631116\ x^{13} - 0.008137448455\ x^{18} + 4.999999970\ x + 16.70618766\ x^{9} - 13.44392968\ x^{11} - 0.001580437924\ x^{2} - 8.875738313\ x^{3} + 0.001655675715\ x^{20} - 16.51086234\ x^{7} + 0.04759621197\ x^{8} + 1.254544882\ x^{17} + 0.3060740314\ 10^{77}\ x^{26} - 0.2672295993\ x^{19} + 0.6750942738\ 10^{72}\ x^{24} - 0.04805159397\ x^{14} - 0.06583188659\ x^{10} - 0.02469578409\ x^{6} - 0.1005385142\ 10^{70}\ x^{23} + 0.008603565845\ x^{4} + 13.28733871\ x^{5} - 0.2270848385\ 10^{75}\ x^{25} + 0.06629199074\ x^{12} + 0.02430584580\ x^{16} - 3.854984833\ x^{15} + 0.7501856216\ 10^{66}\ x^{22} - 0.2244144993\ 10^{63}\ x^{21}$$

$$L_{27}(f,x) := 9.862476871\ x^{13} - 0.01106649373\ x^{18} + 4.999999976\ x + 17.84249043\ x^{9} - 14.97878911\ x^{11} - 0.001415289447\ x^{2} - 8.916322661\ x^{3} + 0.002684492576\ x^{20} - 17.11476157\ x^{7} + 0.04471819821\ x^{8} + 1.783279740\ x^{17} + 0.5074779092\ 10^{79}\ x^{26} - 0.4403018491\ x^{19} - 0.6148290093\ 10^{81}\ x^{27} + 0.3217099273\ 10^{74}\ x^{24} - 0.05261245026\ x^{14} - 0.06410209982\ x^{10} - 0.02263861001\ x^{6} - 0.3336637926\ 10^{71}\ x^{23} + 0.007765647426\ x^{4} + 13.50290094\ x^{5} - 0.1748091331\ 10^{77}\ x^{25} + 0.06783817965\ x^{12} + 0.02916500696\ x^{16} - 4.924396750\ x^{15} + 0.1849484346\ 10^{68}\ x^{22} - 0.4281213720\ 10^{64}\ x^{21}$$

$$L_{28}(f,x) := 11.47437758\ x^{13} - 0.01445590161\ x^{18} + 4.999999981\ x + 18.95448396\ x^{9} - 16.53673855\ x^{11} - 0.001272368529\ x^{2} - 8.954080767\ x^{3} + 0.004075866850\ x^{20} - 17.69089913\ x^{7} + 0.04201746310\ x^{8} + 2.446174159\ x^{17} + 0.4088904136\ 10^{81}\ x^{26} - 0.6864086599\ x^{19} - 0.1064163518\ 10^{84}\ x^{27} + 0.1123455274\ 10^{76}\ x^{24} - 0.05677684356\ x^{14} - 0.06222815127\ x^{10} - 0.02079653856\ x^{6} - 0.8678729666\ 10^{72}\ x^{23} + 0.007032648365\ x^{4} + 0.1188710068\ 10^{86}\ x^{28} + 13.70521957\ x^{5} - 0.8742354510\ 10^{78}\ x^{25} + 0.06888950739\ x^{12} + 0.03414315592\ x^{16} - 6.146910216\ x^{15} + 0.3732349113\ 10^{69}\ x^{22} - 0.6894733525\ 10^{65}\ x^{21}$$

$$L_{29}(f,x) := 13.17919924\ x^{13} - 0.01826122042\ x^{18} + 4.999999984\ x + 20.04105746\ x^{9}$$
$$- 18.11075221\ x^{11} - 0.001148058533\ x^{2} - 8.989297748\ x^{3} + 0.005866455108\ x^{20}$$
$$- 0.2248413268\ 10^{90}\,x^{29} - 18.24087232\ x^{7} + 0.03948987076\ x^{8} + 3.255582254\ x^{17}$$
$$+ 0.2141531299\ 10^{83}\,x^{26} - 1.021944892\ x^{19} - 0.8957366530\ 10^{85}\,x^{27}$$
$$+ 0.3075375069\ 10^{77}\,x^{24} - 0.06052238215\ x^{14} - 0.06025993599\ x^{10}$$
$$- 0.01914336447\ x^{6} - 0.1847795878\ 10^{74}\,x^{23} + 0.006388719890\ x^{4}$$
$$+ 0.2144080759\ 10^{88}\,x^{28} + 13.89546118\ x^{5} - 0.3205117471\ 10^{80}\,x^{25}$$
$$+ 0.06950560024\ x^{12} + 0.03914865771\ x^{16} - 7.521938929\ x^{15}$$
$$+ 0.6357261563\ 10^{70}\,x^{22} - 0.9590696259\ 10^{66}\,x^{21}$$

$$L_{30}(f,x) := 14.96787507\ x^{13} - 0.02242671789\ x^{18} + 4.999999987\ x + 21.10151170\ x^{9}$$
$$- 19.69467968\ x^{11} - 0.001039426510\ x^{2} - 9.022221643\ x^{3} + 0.008078804881\ x^{20}$$
$$- 0.4219468315\ 10^{92}\,x^{29} - 18.76619995\ x^{7} + 0.03712883829\ x^{8} + 4.221962208\ x^{17}$$
$$+ 0.4209768399\ 10^{94}\,x^{30} + 0.8225360449\ 10^{84}\,x^{26} - 1.463588415\ x^{19}$$
$$- 0.4903580285\ 10^{87}\,x^{27} + 0.6891439561\ 10^{78}\,x^{24} - 0.06384183025\ x^{14}$$
$$- 0.05823721282\ x^{10} - 0.01765638616\ x^{6} - 0.3320132157\ 10^{75}\,x^{23}$$
$$+ 0.005820788007\ x^{4} + 0.1882040820\ 10^{90}\,x^{28} + 14.07466160\ x^{5}$$
$$- 0.9212993301\ 10^{81}\,x^{25} + 0.06974335779\ x^{12} + 0.04410136148\ x^{16}$$
$$- 9.047172917\ x^{15} + 0.9350090514\ 10^{71}\,x^{22} - 0.1172950416\ 10^{68}\,x^{21}$$

$$L_{31}(f,x) := 16.83156614\ x^{13} - 0.02688983739\ x^{18} + 4.999999989\ x + 22.13547562\ x^{9}$$
$$- 21.28316782\ x^{11} - 0.0009440770603\ x^{2} - 9.053069240\ x^{3} + 0.01072111441\ x^{20}$$
$$- 0.3856144808\ 10^{94}\,x^{29} - 19.26831816\ x^{7} + 0.03492630227\ x^{8} + 5.353810820\ x^{17}$$
$$+ 0.8207530914\ 10^{96}\,x^{30} + 0.2477561047\ 10^{86}\,x^{26} - 2.027845550\ x^{19}$$
$$- 0.1969343402\ 10^{89}\,x^{27} + 0.1303148460\ 10^{80}\,x^{24} - 0.06673954800\ x^{14}$$
$$- 0.05619136321\ x^{10} - 0.01631592616\ x^{6} - 0.5150135367\ 10^{76}\,x^{23}$$
$$+ 0.005318005718\ x^{4} - 0.7870474994\ 10^{98}\,x^{31} + 0.1074990585\ 10^{92}\,x^{28}$$
$$+ 14.24374335\ x^{5} - 0.2168004662\ 10^{83}\,x^{25} + 0.06965571954\ x^{12}$$
$$+ 0.04893358205\ x^{16} - 10.71888370\ x^{15} + 0.1208642448\ 10^{73}\,x^{22}$$
$$- 0.1279309036\ 10^{69}\,x^{21}$$

$$L_{32}(f,x) := 18.76177507\ x^{13} - 0.03158503860\ x^{18} + 4.999999991\ x + 23.14283837\ x^{9}$$
$$- 22.87158211\ x^{11} - 0.0008600408305\ x^{2} - 9.082030852\ x^{3} + 0.01378808145\ x^{20}$$
$$- 0.2294334472\ 10^{96}\, x^{29} - 19.74857938\ x^{7} + 0.03287339745\ x^{8} + 6.657679618\ x^{17}$$
$$+ 0.7797572620\ 10^{98}\, x^{30} + 0.6109997422\ 10^{87}\, x^{26} - 2.730656919\ x^{19}$$
$$- 0.6203997397\ 10^{90}\, x^{27} + 0.2126999215\ 10^{81}\, x^{24} - 0.06922844817\ x^{14}$$
$$- 0.05414690070\ x^{10} - 0.01510491007\ x^{6} - 0.7019195046\ 10^{77}\, x^{23}$$
$$+ 0.004871324761\ x^{4} - 0.1591952429\ 10^{101}\, x^{31} + 0.1478975162\ 10^{103}\, x^{32}$$
$$+ 0.4506268595\ 10^{93}\, x^{28} + 14.40353040\ x^{5} - 0.4305046423\ 10^{84}\, x^{25}$$
$$+ 0.06929103311\ x^{12} + 0.05359009580\ x^{16} - 12.53220767\ x^{15}$$
$$+ 0.1392697425\ 10^{74}\, x^{22} - 0.1258894878\ 10^{70}\, x^{21}$$

$$L_{33}(f,x) := 20.75042266\ x^{13} - 0.03644690418\ x^{18} + 4.999999993\ x + 24.12369412\ x^{9}$$
$$- 24.45593088\ x^{11} - 0.0007856886750\ x^{2} - 9.109274232\ x^{3} + 0.01726248927\ x^{20}$$
$$- 0.1002206133\ 10^{98}\, x^{29} - 20.20825343\ x^{7} + 0.03096092811\ x^{8} + 8.138251439\ x^{17}$$
$$+ 0.4825334547\ 10^{100}\, x^{30} + 0.1271500362\ 10^{89}\, x^{26} - 3.587073073\ x^{19}$$
$$- 0.1600378825\ 10^{92}\, x^{27} + 0.3049582905\ 10^{82}\, x^{24} - 0.07132747920\ x^{14}$$
$$- 0.05212274532\ x^{10} - 0.01400850102\ x^{6} - 0.2807574829\ 10^{107}\, x^{33}$$
$$- 0.8524599736\ 10^{78}\, x^{23} + 0.004473158468\ x^{4} - 0.1570067357\ 10^{103}\, x^{31}$$
$$+ 0.3099616851\ 10^{105}\, x^{32} + 0.1482103211\ 10^{95}\, x^{28} + 14.55476079\ x^{5}$$
$$- 0.7377894058\ 10^{85}\, x^{25} + 0.06869283117\ x^{12} + 0.05802748650\ x^{16}$$
$$- 14.48140128\ x^{15} + 0.1447177610\ 10^{75}\, x^{22} - 0.1128592161\ 10^{71}\, x^{21}$$

$$L_{34}(f,x) := 22.78989556\ x^{13} - 0.04141250727\ x^{18} + 4.999999994\ x + 25.07829726\ x^{9}$$
$$- 26.03279395\ x^{11} - 0.0007196650242\ x^{2} - 9.134947818\ x^{3} + 0.02111721249\ x^{20}$$
$$- 0.3435705744\ 10^{99}\, x^{29} - 20.64853004\ x^{7} + 0.02917969009\ x^{8} + 9.798459115\ x^{17}$$
$$+ 0.2193059684\ 10^{102}\, x^{30} + 0.5405256589\ 10^{111}\, x^{34} + 0.2283458365\ 10^{90}\, x^{26}$$
$$- 4.611001907\ x^{19} - 0.3483737768\ 10^{93}\, x^{27} + 0.3894922601\ 10^{83}\, x^{24}$$
$$- 0.07305959835\ x^{14} - 0.05013328672\ x^{10} - 0.01301378478\ x^{6}$$
$$- 0.6089430343\ 10^{109}\, x^{33} - 0.9332233451\ 10^{79}\, x^{23} + 0.004117114636\ x^{4}$$
$$- 0.1009099864\ 10^{105}\, x^{31} + 0.3169342978\ 10^{107}\, x^{32} + 0.3992105434\ 10^{96}\, x^{28}$$
$$+ 14.69809737\ x^{5} - 0.1110458665\ 10^{87}\, x^{25} + 0.06789987666\ x^{12}$$
$$+ 0.06221310170\ x^{16} - 16.56006556\ x^{15} + 0.1369275280\ 10^{76}\, x^{22}$$
$$- 0.9293723593\ 10^{71}\, x^{21}$$

$$L_{35}(f,x) := 24.87307192\ x^{13} - 0.04642310108\ x^{18} + 4.999999995\ x + 26.00702610\ x^{9}
- 27.59925679\ x^{11} - 0.0006608357595\ x^{2} - 9.159183438\ x^{3} + 0.02531738592\ x^{20}
- 0.1058646736\ 10^{116}\, x^{35} - 0.9647260548\ 10^{100}\, x^{29} - 21.07052227\ x^{7}
+ 0.02752068589\ x^{8} + 11.63963114\ x^{17} + 0.7824260977\ 10^{103}\, x^{30}
+ 0.1211918822\ 10^{114}\, x^{34} + 0.3600966942\ 10^{91}\, x^{26} - 5.815024705\ x^{19}
- 0.6544064933\ 10^{94}\, x^{27} + 0.4482574601\ 10^{84}\, x^{24} - 0.07445017732\ x^{14}
- 0.04818926356\ x^{10} - 0.01210949974\ x^{6} - 0.6447335990\ 10^{111}\, x^{33}
- 0.9298269809\ 10^{80}\, x^{23} + 0.003797782533\ x^{4} - 0.4764974940\ 10^{106}\, x^{31}
+ 0.2112798274\ 10^{109}\, x^{32} + 0.9074436719\ 10^{97}\, x^{28} + 14.83413697\ x^{5}
- 0.1488494931\ 10^{88}\, x^{25} + 0.06694637557\ x^{12} + 0.06612381086\ x^{16}
- 18.76133973\ x^{15} + 0.1189382728\ 10^{77}\, x^{22} - 0.7079659080\ 10^{72}\, x^{21}$$

$$L_{36}(f,x) := 26.99333038\ x^{13} - 0.05142522545\ x^{18} + 4.999999996\ x + 26.91035345\ x^{9}
- 29.15285055\ x^{11} - 0.0006082471334\ x^{2} - 9.182098566\ x^{3} + 0.02982254655\ x^{20}
- 0.2451118156\ 10^{118}\, x^{35} - 0.2286215021\ 10^{102}\, x^{29} - 21.47527038\ x^{7}
+ 0.02597526328\ x^{8} + 13.66165224\ x^{17} + 0.2286845703\ 10^{105}\, x^{30}
+ 0.1327159252\ 10^{116}\, x^{34} + 0.5056257714\ 10^{92}\, x^{26} - 7.210274515\ x^{19}
- 0.1079316552\ 10^{96}\, x^{27} + 0.4693415333\ 10^{85}\, x^{24} - 0.07552577568\ x^{14}
+ 0.2114404555\ 10^{120}\, x^{36} - 0.04629848618\ x^{10} - 0.01128580605\ x^{6}
- 0.4452509687\ 10^{113}\, x^{33} - 0.8500957010\ 10^{81}\, x^{23} + 0.003510562067\ x^{4}
- 0.1766725518\ 10^{108}\, x^{31} + 0.1035166448\ 10^{111}\, x^{32} + 0.1779947184\ 10^{99}\, x^{28}
+ 14.96341839\ x^{5} - 0.1797343404\ 10^{89}\, x^{25} + 0.06586228737\ x^{12}
+ 0.06974469963\ x^{16} - 21.07806532\ x^{15} + 0.9551441947\ 10^{77}\, x^{22}
- 0.5019526539\ 10^{73}\, x^{21}$$

$$L_{37}(f,x) := 29.14454692\ x^{13} - 0.05637133614\ x^{18} + 4.999999996\ x + 27.78882287\ x^{9}
- 30.69149785\ x^{11} - 0.0005610931737\ x^{2} - 9.203798223\ x^{3} + 0.03458862084\ x^{20}
- 0.2773282013\ 10^{120}\, x^{35} - 0.4675201092\ 10^{103}\, x^{29} - 21.86374597\ x^{7}
+ 0.02453519972\ x^{8} + 15.86312965\ x^{17} + 0.5641480972\ 10^{106}\, x^{30}
+ 0.9483758190\ 10^{117}\, x^{34} + 0.6393908807\ 10^{93}\, x^{26} - 8.806368844\ x^{19}
- 0.1584746694\ 10^{97}\, x^{27} + 0.4507267831\ 10^{86}\, x^{24} - 0.07631321885\ x^{14}
+ 0.5050437083\ 10^{122}\, x^{36} - 0.04446642755\ x^{10} - 0.01053408846\ x^{6}
- 0.2260697602\ 10^{115}\, x^{33} - 0.7181686094\ 10^{82}\, x^{23} + 0.003251525989\ x^{4}
- 0.5367267391\ 10^{109}\, x^{31} + 0.3983425314\ 10^{112}\, x^{32} + 0.3065185196\ 10^{100}\, x^{28}
+ 15.08642911\ x^{5} - 0.1973779536\ 10^{90}\, x^{25} + 0.06467368450\ x^{12}
+ 0.07306778896\ x^{16} - 23.50292333\ x^{15} + 0.7134823267\ 10^{78}\, x^{22}
- 0.3330176217\ 10^{74}\, x^{21} - 0.4314791822\ 10^{124}\, x^{37}$$

$$L_{38}(f,x) := 31.32108277\ x^{13} - 0.06122005989\ x^{18} + 4.999999997\ x + 28.64302953\ x^{9}$$
$$- 32.21346435\ x^{11} - 0.0005186896481\ x^{2} - 9.224376586\ x^{3} + 0.03956968085\ x^{20}$$
$$- 0.2048389518\ 10^{122}\, x^{35} - 0.8393058561\ 10^{104}\, x^{29} - 22.23685630\ x^{7}$$
$$+ 0.02319274853\ x^{8} + 18.24155829\ x^{17} + 0.1200959856\ 10^{108}\, x^{30}$$
$$+ 0.4984221824\ 10^{119}\, x^{34} + 0.7351213063\ 10^{94}\, x^{26} - 10.61138805\ x^{19}$$
$$- 0.2095095725\ 10^{98}\, x^{27} + 0.3997913400\ 10^{87}\, x^{24} + 0.9010013393\ 10^{128}\, x^{38}$$
$$- 0.07683892282\ x^{14} + 0.5897957205\ 10^{124}\, x^{36} - 0.04269670466\ x^{10}$$
$$- 0.009846788150\ x^{6} - 0.9017506585\ 10^{116}\, x^{33} - 0.5640535400\ 10^{83}\, x^{23}$$
$$+ 0.003017308145\ x^{4} - 0.1376396073\ 10^{111}\, x^{31} + 0.1256193507\ 10^{114}\, x^{32}$$
$$+ 0.4698468327\ 10^{101}\, x^{28} + 15.20361128\ x^{5} - 0.1987312779\ 10^{91}\, x^{25}$$
$$+ 0.06340312890\ x^{12} + 0.07609083461\ x^{16} - 26.02854696\ x^{15}$$
$$+ 0.4984085962\ 10^{79}\, x^{22} - 0.2077197052\ 10^{75}\, x^{21} - 0.1062246668\ 10^{127}\, x^{37}$$

$$L_{39}(f,x) := 33.51776636\ x^{13} - 0.06593616814\ x^{18} + 4.999999997\ x + 29.47360471\ x^{9}$$
$$- 33.71731548\ x^{11} - 0.0004804531419\ x^{2} - 9.243918350\ x^{3} + 0.04471943290\ x^{20}$$
$$- 0.1113098473\ 10^{124}\, x^{35} - 0.1341043664\ 10^{106}\, x^{29} - 22.59544836\ x^{7}$$
$$+ 0.02194065845\ x^{8} + 20.79347998\ x^{17} + 0.2244321352\ 10^{109}\, x^{30}$$
$$+ 0.2058410539\ 10^{121}\, x^{34} + 0.7746564464\ 10^{95}\, x^{26} - 12.63189091\ x^{19}$$
$$- 0.2517633453\ 10^{99}\, x^{27} + 0.3295207864\ 10^{88}\, x^{24} - 0.1927550988\ 10^{133}\, x^{39}$$
$$+ 0.2284208030\ 10^{131}\, x^{38} - 0.07712841538\ x^{14} + 0.4498189944\ 10^{126}\, x^{36}$$
$$- 0.04099146929\ x^{10} - 0.009217259164\ x^{6} - 0.2948244261\ 10^{118}\, x^{33}$$
$$- 0.4140613025\ 10^{84}\, x^{23} + 0.002805012380\ x^{4} - 0.3045992941\ 10^{112}\, x^{31}$$
$$+ 0.3344339465\ 10^{115}\, x^{32} + 0.6483505582\ 10^{102}\, x^{28} + 15.31536673\ x^{5}$$
$$- 0.1847375911\ 10^{92}\, x^{25} + 0.06207004452\ x^{12} + 0.07881623754\ x^{16}$$
$$- 28.64761294\ x^{15} + 0.3271331123\ 10^{80}\, x^{22} - 0.1223254158\ 10^{76}\, x^{21}$$
$$- 0.1279172766\ 10^{129}\, x^{37}$$

$$L_{40}(f,x) := 35.72987114\ x^{13} - 0.07049034890\ x^{18} + 4.999999998\ x + 30.28120346\ x^{9}$$
$$- 35.20187815\ x^{11} - 0.0004458841453\ x^{2} - 9.262499892\ x^{3} + 0.04999243076\ x^{20}$$
$$- 0.4754257420\ 10^{125}\, x^{35} - 0.1928651885\ 10^{107}\, x^{29} - 22.94031304\ x^{7}$$
$$+ 0.02077217497\ x^{8} + 23.51463350\ x^{17} + 0.3732569504\ 10^{110}\, x^{30}$$
$$+ 0.6969162760\ 10^{122}\, x^{34} + 0.7534023441\ 10^{96}\, x^{26} - 14.87295946\ x^{19}$$
$$- 0.2772134268\ 10^{100}\, x^{27} + 0.2537290521\ 10^{89}\, x^{24} - 0.5028077743\ 10^{135}\, x^{39}$$
$$+ 0.2833886927\ 10^{133}\, x^{38} - 0.07720601130\ x^{14} + 0.2524737084\ 10^{128}\, x^{36}$$
$$- 0.03935172444\ x^{10} - 0.008639645788\ x^{6} - 0.8138531203\ 10^{119}\, x^{33}$$
$$- 0.2854327733\ 10^{85}\, x^{23} + 0.002612137915\ x^{4} - 0.5917366856\ 10^{113}\, x^{31}$$
$$+ 0.7683900425\ 10^{116}\, x^{32} + 0.8130420467\ 10^{103}\, x^{28} + 15.42206150\ x^{5}$$
$$+ 0.4228742308\ 10^{137}\, x^{40} - 0.1595109976\ 10^{93}\, x^{25} + 0.06069107304\ x^{12}$$
$$+ 0.08125007921\ x^{16} - 31.35291427\ x^{15} + 0.2025913346\ 10^{81}\, x^{22}$$
$$- 0.6826729817\ 10^{76}\, x^{21} - 0.1006388255\ 10^{131}\, x^{37}$$

$$L_{41}(f,x) := 37.95309091\ x^{13} - 0.07485884196\ x^{18} + 4.999999998\ x + 31.06649466\ x^{9}$$
$$- 36.66620693\ x^{11} - 0.0004145533076\ x^{2} - 9.280190270\ x^{3} + 0.05534502497\ x^{20}$$
$$- 0.1665051282\ 10^{127}\, x^{35} - 0.9520541593\ 10^{141}\, x^{41} - 0.2520188219\ 10^{108}\, x^{29}$$
$$- 23.27218897\ x^{7} + 0.01968102942\ x^{8} + 26.40009350\ x^{17}$$
$$+ 0.5586822769\ 10^{111}\, x^{30} + 0.1992459212\ 10^{124}\, x^{34} + 0.6803434188\ 10^{97}\, x^{26}$$
$$- 17.33826592\ x^{19} - 0.2816229250\ 10^{101}\, x^{27} + 0.1833729018\ 10^{90}\, x^{24}$$
$$- 0.6421335419\ 10^{137}\, x^{39} + 0.2297869346\ 10^{135}\, x^{38} - 0.07709460619\ x^{14}$$
$$+ 0.1114119114\ 10^{130}\, x^{36} - 0.03777757989\ x^{10} - 0.008108777737\ x^{6}$$
$$- 0.1938981294\ 10^{121}\, x^{33} - 0.1855478451\ 10^{86}\, x^{23} + 0.002436517924\ x^{4}$$
$$- 0.1022980770\ 10^{115}\, x^{31} + 0.1549770868\ 10^{118}\, x^{32} + 0.9339867854\ 10^{104}\, x^{28}$$
$$+ 15.52402965\ x^{5} + 0.1134106625\ 10^{140}\, x^{40} - 0.1286097308\ 10^{94}\, x^{25}$$
$$+ 0.05928040518\ x^{12} + 0.08340128409\ x^{16} - 34.13741711\ x^{15}$$
$$+ 0.1188235568\ 10^{82}\, x^{22} - 0.3622669413\ 10^{77}\, x^{21} - 0.5828815889\ 10^{132}\, x^{37}$$

$$L_{42}(f,x) := 40.18351388\ x^{13} - 0.07902298921\ x^{18} + 4.999999998\ x + 31.83015309\ x^{9}$$
$$- 38.10955414\ x^{11} - 0.0003860902051\ x^{2} - 9.297052073\ x^{3} + 0.06073607146\ x^{20}$$
$$- 0.4924813649\ 10^{128}\, x^{35} - 0.2623188354\ 10^{144}\, x^{41} - 0.3016075852\ 10^{109}\, x^{29}$$
$$- 23.59176621\ x^{7} + 0.01866142010\ x^{8} + 29.44439720\ x^{17}$$
$$+ 0.7596628386\ 10^{112}\, x^{30} + 0.4916715528\ 10^{125}\, x^{34} + 0.5734651673\ 10^{98}\, x^{26}$$
$$- 20.03015561\ x^{19} - 0.2655584853\ 10^{102}\, x^{27} + 0.1249085863\ 10^{91}\, x^{24}$$
$$- 0.5361702641\ 10^{139}\, x^{39} + 0.1372079781\ 10^{137}\, x^{38} - 0.07681556067\ x^{14}$$
$$+ 0.4032043432\ 10^{131}\, x^{36} - 0.03626845806\ x^{10} - 0.007620080414\ x^{6}$$
$$- 0.4055292084\ 10^{122}\, x^{33} - 0.1141687788\ 10^{87}\, x^{23} + 0.002276268759\ x^{4}$$
$$- 0.1591463261\ 10^{116}\, x^{31} + 0.2781467081\ 10^{119}\, x^{32} + 0.9896479557\ 10^{105}\, x^{28}$$
$$+ 15.62157667\ x^{5} + 0.1489728457\ 10^{142}\, x^{40} - 0.9728349114\ 10^{94}\, x^{25}$$
$$+ 0.2200919010\ 10^{146}\, x^{42} + 0.05785008403\ x^{12} + 0.08528090464\ x^{16}$$
$$- 36.99430406\ x^{15} + 0.6622668177\ 10^{82}\, x^{22} - 0.1833518320\ 10^{78}\, x^{21}$$
$$- 0.2654848598\ 10^{134}\, x^{37}$$

$$L_{43}(f,x) := 42.41759631\ x^{13} - 0.08296873990\ x^{18} + 4.999999998\ x + 32.57285320\ x^{9}$$
$$- 39.53134365\ x^{11} - 0.0003601741179\ x^{2} - 9.313142169\ x^{3} + 0.06612742884\ x^{20}$$
$$- 0.1257373319\ 10^{130}\, x^{35} - 0.3541475340\ 10^{146}\, x^{41} - 0.3328574894\ 10^{110}\, x^{29}$$
$$- 23.89968976\ x^{7} + 0.01770798864\ x^{8} + 32.64165842\ x^{17}$$
$$+ 0.9458560042\ 10^{113}\, x^{30} + 0.1065107914\ 10^{127}\, x^{34} + 0.4533066325\ 10^{99}\, x^{26}$$
$$- 22.94974050\ x^{19} - 0.2336563227\ 10^{103}\, x^{27} + 0.8049443775\ 10^{91}\, x^{24}$$
$$- 0.5226671526\ 10^{150}\, x^{43} - 0.3297772584\ 10^{141}\, x^{39} + 0.6444421595\ 10^{138}\, x^{38}$$
$$- 0.07638865188\ x^{14} + 0.1232522833\ 10^{133}\, x^{36} - 0.03482325947\ x^{10}$$

$- 0.007169497969\ x^6 - 0.7547094596\ 10^{123} x^{33} - 0.6671771336\ 10^{87} x^{23}$
$+ 0.002129747784\ x^4 - 0.2248879848\ 10^{117} x^{31} + 0.4491956136\ 10^{120} x^{32}$
$+ 0.9730388850\ 10^{106} x^{28} + 15.71498245\ x^5 + 0.1279873996\ 10^{144} x^{40}$
$- 0.6932616994\ 10^{95} x^{25} + 0.6225757347\ 10^{148} x^{42} + 0.05641027922\ x^{12}$
$+ 0.08690151991\ x^{16} - 39.91700630\ x^{15} + 0.3518310042\ 10^{83} x^{22}$
$- 0.8875229534\ 10^{78} x^{21} - 0.9918813089\ 10^{135} x^{37}$

$$
\begin{aligned}
L_{44}(f, x) := {} & 44.65213631\ x^{13} - 0.08668614058\ x^{18} + 4.999999999\ x + 33.29526420\ x^9 \\
& - 40.93114781\ x^{11} - 0.0003365264208\ x^2 - 9.328512335\ x^3 + 0.07148427601\ x^{20} \\
& + 0.1275446667\ 10^{155} x^{44} - 0.2818306177\ 10^{131} x^{35} - 0.3128194570\ 10^{148} x^{41} \\
& - 0.3407761298\ 10^{111} x^{29} - 24.19656279\ x^7 + 0.01681579366\ x^8 \\
& + 35.98566927\ x^{17} + 0.1085783255\ 10^{115} x^{30} + 0.2053127854\ 10^{128} x^{34} \\
& + 0.3374345019\ 10^{100} x^{26} - 26.09699928\ x^{19} - 0.1927270136\ 10^{104} x^{27} \\
& + 0.4923995835\ 10^{92} x^{24} - 0.1516855163\ 10^{153} x^{43} - 0.1595854795\ 10^{143} x^{39} \\
& + 0.2483312129\ 10^{140} x^{38} - 0.07583207426\ x^{14} + 0.3252486375\ 10^{134} x^{36} \\
& - 0.03344049536\ x^{10} - 0.006753427213\ x^6 - 0.1263762410\ 10^{125} x^{33} \\
& - 0.3714151389\ 10^{88} x^{23} + 0.001995518223\ x^4 - 0.2909464812\ 10^{118} x^{31} \\
& + 0.6588529995\ 10^{121} x^{32} + 0.8924178482\ 10^{107} x^{28} + 15.80450389\ x^5 \\
& + 0.8102032037\ 10^{145} x^{40} - 0.4671641050\ 10^{96} x^{25} + 0.8632509059\ 10^{150} x^{42} \\
& + 0.05496953213\ x^{12} + 0.08827673642\ x^{16} - 42.89922623\ x^{15} \\
& + 0.1786508604\ 10^{84} x^{22} - 0.4119090981\ 10^{79} x^{21} - 0.3130518136\ 10^{137} x^{37}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{45}(f, x) := {} & 46.88424835\ x^{13} - 0.09016883106\ x^{18} + 4.999999999\ x + 33.99804617\ x^9 \\
& - 42.30866724\ x^{11} - 0.0003149042759\ x^2 - 9.343209823\ x^3 + 0.07677528139\ x^{20} \\
& + 0.3795217407\ 10^{157} x^{44} - 0.5621032957\ 10^{132} x^{35} - 0.2036538651\ 10^{150} x^{41} \\
& - 0.3198980127\ 10^{159} x^{45} - 0.3253465545\ 10^{112} x^{29} - 24.48294968\ x^7 \\
& + 0.01598028326\ x^8 + 39.46998972\ x^{17} + 0.1155989965\ 10^{116} x^{30} \\
& + 0.3560787968\ 10^{129} x^{34} + 0.2374200804\ 10^{101} x^{26} - 29.47088023\ x^{19} \\
& - 0.1496431373\ 10^{105} x^{27} + 0.2867937181\ 10^{93} x^{24} - 0.2158655403\ 10^{155} x^{43} \\
& - 0.6337102073\ 10^{144} x^{39} + 0.8084938013\ 10^{141} x^{38} - 0.07516247546\ x^{14} \\
& + 0.7535396183\ 10^{135} x^{36} - 0.03211839363\ x^{10} - 0.006368660759\ x^6 \\
& - 0.1921771888\ 10^{126} x^{33} - 0.1975163347\ 10^{89} x^{23} + 0.001872319731\ x^4 \\
& - 0.3469703881\ 10^{119} x^{31} + 0.8846218635\ 10^{122} x^{32} + 0.7670279666\ 10^{108} x^{28} \\
& + 15.89037717\ x^5 + 0.4036246551\ 10^{147} x^{40} - 0.2986866952\ 10^{97} x^{25} \\
& + 0.7833932651\ 10^{152} x^{42} + 0.05353497374\ x^{12} + 0.08942077948\ x^{16} \\
& - 45.93495241\ x^{15} + 0.8692370274\ 10^{84} x^{22} - 0.1837155552\ 10^{80} x^{21} \\
& - 0.8530303961\ 10^{138} x^{37}
\end{aligned}
$$

$L_{46}(f,x) := 49.11133873\ x^{13} - 0.09341356121\ x^{18} + 4.999999999\ x + 34.68184716\ x^{9}$
$- 43.66371314\ x^{11} - 0.0002950953833\ x^{2} - 9.357277835\ x^{3} + 0.08197265264\ x^{20}$
$+ 0.5539734887\ 10^{159}\, x^{44} - 0.1008643437\ 10^{134}\, x^{35} - 0.1043635727\ 10^{152}\, x^{41}$
$- 0.9753920333\ 10^{161}\, x^{45} - 0.2910043265\ 10^{113}\, x^{29} - 24.75937884\ x^{7}$
$+ 0.01519726747\ x^{8} + 43.08802593\ x^{17} + 0.1147417795\ 10^{117}\, x^{30}$
$+ 0.5607815853\ 10^{130}\, x^{34} + 0.1584285966\ 10^{102}\, x^{26} - 33.06940429\ x^{19}$
$- 0.1097828929\ 10^{106}\, x^{27} + 0.1594859348\ 10^{94}\, x^{24} - 0.2011217495\ 10^{157}\, x^{43}$
$- 0.2126416137\ 10^{146}\, x^{39} + 0.2272777705\ 10^{143}\, x^{38} - 0.07439501658\ x^{14}$
$+ 0.1553479961\ 10^{137}\, x^{36} - 0.03085498325\ x^{10} - 0.006012338008\ x^{6}$
$- 0.2674865910\ 10^{127}\, x^{33} - 0.1005924238\ 10^{90}\, x^{23} + 0.001759043673\ x^{4}$
$- 0.3836842717\ 10^{120}\, x^{31} + 0.1094681607\ 10^{124}\, x^{32} + 0.6203767386\ 10^{109}\, x^{28}$
$+ 15.97281983\ x^{5} + 0.1650317017\ 10^{149}\, x^{40} - 0.1817428616\ 10^{98}\, x^{25}$
$+ 0.5241208923\ 10^{154}\, x^{42} + 0.05211251684\ x^{12} + 0.09034816312\ x^{16}$
$- 49.01846824\ x^{15} + 0.8247741631\ 10^{163}\, x^{46} + 0.4061923340\ 10^{85}\, x^{22}$
$- 0.7890877900\ 10^{80}\, x^{21} - 0.2040830358\ 10^{140}\, x^{37}$

$L_{47}(f,x) := 51.33108219\ x^{13} - 0.09641973816\ x^{18} + 4.999999999\ x + 35.34730093\ x^{9}$
$- 44.99619178\ x^{11} - 0.0002769135931\ x^{2} - 9.370755957\ x^{3} + 0.08705209341\ x^{20}$
$+ 0.5295561396\ 10^{161}\, x^{44} - 0.1643425611\ 10^{135}\, x^{35} - 0.4390275270\ 10^{153}\, x^{41}$
$- 0.1459408580\ 10^{164}\, x^{45} - 0.2448612919\ 10^{114}\, x^{29} - 25.02634531\ x^{7}$
$+ 0.01446289121\ x^{8} + 46.83309801\ x^{17} + 0.1066717110\ 10^{118}\, x^{30}$
$+ 0.8082777350\ 10^{131}\, x^{34} + 0.1005674085\ 10^{103}\, x^{26} - 36.88976622\ x^{19}$
$- 0.7635387093\ 10^{106}\, x^{27} + 0.8489277294\ 10^{94}\, x^{24} - 0.1381846879\ 10^{159}\, x^{43}$
$- 0.6161486836\ 10^{147}\, x^{39} + 0.5609941052\ 10^{144}\, x^{38} - 0.07354344820\ x^{14}$
$+ 0.2881310127\ 10^{138}\, x^{36} - 0.02964816110\ x^{10} - 0.005681902817\ x^{6}$
$- 0.3430842637\ 10^{128}\, x^{33} - 0.4917527444\ 10^{90}\, x^{23} - 0.2186082610\ 10^{168}\, x^{47}$
$+ 0.001654712272\ x^{4} - 0.3954704344\ 10^{121}\, x^{31} + 0.1255856376\ 10^{125}\, x^{32}$
$+ 0.4739272650\ 10^{110}\, x^{28} + 16.05203251\ x^{5} + 0.5702693047\ 10^{150}\, x^{40}$
$- 0.1055344507\ 10^{99}\, x^{25} + 0.2760825369\ 10^{156}\, x^{42} + 0.05070702481\ x^{12}$
$+ 0.09107342729\ x^{16} - 52.14435556\ x^{15} + 0.2575408591\ 10^{166}\, x^{46}$
$+ 0.1826842346\ 10^{86}\, x^{22} - 0.3270227194\ 10^{81}\, x^{21} - 0.4344775563\ 10^{141}\, x^{37}$

$L_{48}(f,x) := 53.54139990\ x^{13} - 0.09918900951\ x^{18} + 4.999999999\ x + 35.99502530\ x^{9}$
$- 46.30609099\ x^{11} - 0.0002601952237\ x^{2} - 9.383680519\ x^{3} + 0.09199268943\ x^{20}$
$+ 0.3733992386\ 10^{163}\, x^{44} - 0.2450440215\ 10^{136}\, x^{35} - 0.1561063095\ 10^{155}\, x^{41}$
$- 0.1430458538\ 10^{166}\, x^{45} - 0.1945425553\ 10^{115}\, x^{29} - 25.28431321\ x^{7}$
$+ 0.01377360840\ x^{8} + 50.69849824\ x^{17} + 0.9326593714\ 10^{118}\, x^{30}$
$+ 0.1073425161\ 10^{133}\, x^{34} + 0.6089589144\ 10^{103}\, x^{26} - 40.92843219\ x^{19}$
$- 0.5049674691\ 10^{107}\, x^{27} + 0.4335272969\ 10^{95}\, x^{24} - 0.7476754270\ 10^{160}\, x^{43}$
$- 0.1567737392\ 10^{149}\, x^{39} + 0.1232226025\ 10^{146}\, x^{38} - 0.07262019603\ x^{14}$

$$+ 0.4852263697\ 10^{139} x^{36} - 0.02849574483\ x^{10} - 0.005375066866\ x^{6}$$
$$- 0.4078969973\ 10^{129} x^{33} - 0.2312413689\ 10^{91} x^{23} - 0.6986869756\ 10^{170} x^{47}$$
$$+ 0.5956843284\ 10^{172} x^{48} + 0.001558460968\ x^{4} - 0.3816889825\ 10^{122} x^{31}$$
$$+ 0.1342649761\ 10^{126} x^{32} + 0.3431085631\ 10^{111} x^{28} + 16.12820060\ x^{5}$$
$$+ 0.1701839237\ 10^{152} x^{40} - 0.5863023165\ 10^{99} x^{25} + 0.1194022894\ 10^{158} x^{42}$$
$$+ 0.04932245937\ x^{12} + 0.09161093214\ x^{16} - 55.30749409\ x^{15}$$
$$+ 0.3947607817\ 10^{168} x^{46} + 0.7922974313\ 10^{86} x^{22} - 0.1310015594\ 10^{82} x^{21}$$
$$- 0.8321632242\ 10^{142} x^{37}$$

$$L_{49}(f, x) := 55.74043874\ x^{13} - 0.1017248854\ x^{18} + 4.999999999\ x + 36.62562101\ x^{9}$$
$$- 47.59346826\ x^{11} - 0.0002447959607\ x^{2} - 9.396084932\ x^{3} + 0.09677674368\ x^{20}$$
$$+ 0.2073870546\ 10^{165} x^{44} - 0.3366164945\ 10^{137} x^{35} - 0.4794268899\ 10^{156} x^{41}$$
$$- 0.1034480407\ 10^{168} x^{45} - 0.1464304294\ 10^{116} x^{29} - 25.53371791\ x^{7}$$
$$+ 0.01312615736\ x^{8} + 54.67754051\ x^{17} + 0.7697415677\ 10^{119} x^{30}$$
$$+ 0.1321207597\ 10^{134} x^{34} + 0.3526310669\ 10^{104} x^{26} - 45.18123269\ x^{19}$$
$$- 0.3184416767\ 10^{108} x^{27} + 0.2128527768\ 10^{96} x^{24} - 0.3322089359\ 10^{162} x^{43}$$
$$- 0.3549831198\ 10^{150} x^{39} + 0.2435024359\ 10^{147} x^{38} - 0.07163645143\ x^{14}$$
$$+ 0.7477374398\ 10^{140} x^{36} - 0.02739551416\ x^{10} - 0.005089777894\ x^{6}$$
$$- 0.4518479426\ 10^{130} x^{33} - 0.1048012102\ 10^{92} x^{23} - 0.1096521554\ 10^{173} x^{47}$$
$$+ 0.1947643485\ 10^{175} x^{48} + 0.001469523434\ x^{4} - 0.3463708765\ 10^{123} x^{31}$$
$$+ 0.1343837741\ 10^{127} x^{32} + 0.2361186062\ 10^{112} x^{28} + 16.20149563\ x^{5}$$
$$+ 0.4460044327\ 10^{153} x^{40} - 0.3123503639\ 10^{100} x^{25} + 0.4365513144\ 10^{159} x^{42}$$
$$- 0.1668684131\ 10^{177} x^{49} + 0.04796200930\ x^{12} + 0.09197470017\ x^{16}$$
$$- 58.50305784\ x^{15} + 0.3965048460\ 10^{170} x^{46} + 0.3319478276\ 10^{87} x^{22}$$
$$- 0.5080834094\ 10^{82} x^{21} - 0.1447118596\ 10^{144} x^{37}$$

$$L_{50}(f, x) := 57.92655195\ x^{13} - 0.1040324002\ x^{18} + 4.999999999\ x + 37.23967086\ x^{9}$$
$$- 48.85844050\ x^{11} - 0.0002305882352\ x^{2} - 9.407999971\ x^{3} + 0.1013895764\ x^{20}$$
$$+ 0.9460467696\ 10^{166} x^{44} - 0.4285085415\ 10^{138} x^{35} - 0.1293122907\ 10^{158} x^{41}$$
$$- 0.5893978881\ 10^{169} x^{45} - 0.1047328240\ 10^{117} x^{29} - 25.77496819\ x^{7}$$
$$+ 0.01251753769\ x^{8} + 58.76360196\ x^{17} + 0.6016720168\ 10^{120} x^{30}$$
$$+ 0.1514929187\ 10^{135} x^{34} + 0.1957301884\ 10^{105} x^{26} + 0.4805229892\ 10^{181} x^{50}$$
$$- 49.64345009\ x^{19} - 0.1919661463\ 10^{109} x^{27} + 0.1006714363\ 10^{97} x^{24}$$
$$- 0.1248019548\ 10^{164} x^{43} - 0.7231472689\ 10^{151} x^{39} + 0.4368775233\ 10^{148} x^{38}$$

$$- 0.07060226335\ x^{14} + 0.1061476873\ 10^{142}\, x^{36} - 0.02634524309\ x^{10}$$
$$- 0.004824192106\ x^{6} - 0.4685010245\ 10^{131}\, x^{33} - 0.4585943819\ 10^{92}\, x^{23}$$
$$- 0.1127977457\ 10^{175}\, x^{47} + 0.3127937486\ 10^{177}\, x^{48} + 0.001387218818\ x^{4}$$
$$- 0.2966243043\ 10^{124}\, x^{31} + 0.1264350224\ 10^{128}\, x^{32} + 0.1548831622\ 10^{113}\, x^{28}$$
$$+ 16.27207652\ x^{5} + 0.1040219533\ 10^{155}\, x^{40} - 0.1599102846\ 10^{101}\, x^{25}$$
$$+ 0.1378730347\ 10^{161}\, x^{42} - 0.5578620651\ 10^{179}\, x^{49} + 0.04662820251\ x^{12}$$
$$+ 0.09217829806\ x^{16} - 61.72650893\ x^{15} + 0.2939130802\ 10^{172}\, x^{46}$$
$$+ 0.1345748486\ 10^{88}\, x^{22} - 0.1910799067\ 10^{83}\, x^{21} - 0.2302630821\ 10^{145}\, x^{37}$$

ÖZGEÇMİŞ

Şaziye Altıntaş 1985'de Bartın'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bartın'da tamamladı, 2003 yılında AİBÜ Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümünde öğrenime başladı. 2007 yılında "şeref" derecesi ile mezun olarak 2009 yılında BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına kabul edildi. Halen Bartın Üniversitesi Bartın Meslek Yüksekokulunda Öğretim Görevlisi olarak çalışmakta olup, BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında öğrenimini sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Bartın Üniversitesi
Bartın Meslek Yüksekokulu
74200 /BARTIN
Tel : 0 (378) 2279939-129
E-posta : saziye_74@hotmail.com