

**PARÇACIK FİZİĞİNDE  
MODERN KALUZA-KLEİN TEORİLERİ**

**Pelin TEKTAŞ**

**Bülent Ecevit Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalında  
Yüksek Lisans Tezi  
Olarak Hazırlanmıştır**

**ZONGULDAK  
Haziran 2012**

**KABUL:**

Pelin TEKTAŞ tarafından hazırlanan “PARÇACIK FİZİĞİNDE MODERN KALUZA KLEİN TEORİLERİ” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 22/06/2012

Başkan : Doç. Dr. İnanç ŞAHİN (BEÜ)



Üye : Doç. Dr. Banu ŞAHİN (BEÜ)



Üye : Doç. Dr. Yusuf KAYA (BEÜ)



---

**ONAY:**

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2012



Prof. Dr. Özden ÖZEL GÜVEN  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”*

*P. Jettan*  
Pelin TEKTAŞ

## ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

### **PARÇACIK FİZİĞİNDE MODERN KALUZA-KLEİN TEORİLERİ**

**Pelin TEKTAŞ**

**Bülent Ecevit Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. İnanç ŞAHİN  
Haziran 2012, 107 sayfa**

Bu tez çalışmasında ek boyutları içeren modern Kaluza-Klein teorilerinin parçacık fiziğinde meydana getirdikleri modifikasyonların neler olduğu incelenmiş ve sonuçları tartışılmıştır. Kaluza ve Klein'nın elektromanyetik kuvvet ile gravitasyonel kuvveti birleştirmek için geliştirmiş oldukları ek boyut fikri parçacık fiziğine uygulanmış ve modern Kaluza-Klein teorileri ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada modern Kaluza-Klein teorilerinden en iyi bilinen iki tanesi, Randall-Sundrum (RS) bükülmüş ek boyut modeli ve Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali (ADD) düz ek boyutlar modeli ele alınmıştır. Bu tez çalışmasının ilk parçasında, gravitasyonel kuvvetin temel teorisi olan Genel Görelilik teorisi ve parçacık fiziğinin temel teorisi olan Standart Model anlatılmıştır. İkinci parçasında ise, RS ve ADD modellerinin basitçe Planck ölçeği ile zayıf ölçek arasındaki büyük farklılığın sebebinin anlaşılabilmesi olarak tanımlanan hiyerarşi probleminin getirdikleri çözümler tartışılmış ve bu modellerin parçacık fiziği fenomenolojisi açısından çeşitli öngörülleri belirlenmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Kaluza-Klein teorileri, ADD modeli, RS modeli

**Bilim Kodu:** 404.02.01



## **ABSTRACT**

**M.Sc. Thesis**

### **MODERN KALUZA-KLEIN THEORIES IN PARTICLE PHYSICS**

**Pelin TEKTAŞ**

**Bulent Ecevit University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Physics**

**Thesis Advisor: Assoc. Prof. İnanç ŞAHİN**

**June 2012, 107 pages**

In this thesis, modifications in particle physics generated by modern Kaluza-Klein theories are examined and their consequences are discussed. The idea of extra dimension proposed by Kaluza and Klein, which was used to unify electromagnetic and gravitational forces has been applied to particle physics and as a consequence modern Kaluza-Klein theories have been arisen. In this study, two of the best known modern Kaluza-Klein theories namely, Randall-Sundrum model of warped extra dimensions and Arkani-Hamed, Dimoupolos, Dvali model of flat extra dimensions have been treated. In the first part of this thesis, General Theory of Relativity and Standart Model which are the fundamental theories of gravity and particle physics have been presented. In the second part, solutions provided by RS and ADD models to hierarchy problem which is simply defined as the inexplicable disparity of the Planck scale and the weak scale, have been discussed and some predictions of these models on particle physics phenomenology have been identified.

**Key Words:** Kaluza-Klein theories, ADD model, RS model

**Science Code:** 404.02.01



## TEŐEKKÖR

Bu tez alıőmasının yűrűtűlmesinde beni yűnlendiren, bilgi ve tecrűbelerinden yararlanma űansını vererek bu aőamaya gelmemde yardımcı olan saygıdeęer danıőman hocam Doç. Dr. İnanç űAHİN' e (BEű) ve desteęini esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Banu űAHİN' e (BEű) sonsuz teőekkűrlerimi sunarım.

Yűksek Lisans çalıőmam boyunca her an yanımda olan, beni her zaman destekleyen aileme ve arkadaşlarım Cűneyt YILMAZ ve Esra AŐKAROęLU' na teőekkűr ederim.





## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL.....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xiii
EK AÇIKLAMALAR DİZİNİ.....	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	xvii
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2 GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ .....	3
2.1 EŞDEĞERLİK PRENSİBİ .....	3
2.1.1 Eşdeğerlik Prensibinden Çıkan Sonuçlar .....	4
2.2 EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ .....	5
2.2.1 Einstein Alan Denklemlerinin Newton Limitinden Yararlanılarak Türetilmesi .....	5
2.2.2 Einstein Alan Denklemlerinin Eylem Prensibi İle Türetilmesi .....	10
2.3 LİNEER EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİ .....	13
2.3.1 Düzlem Gravitasyonel Dalgalar.....	18
2.3.2 Gravitasyonel Dalganın Üretilmesi.....	23
2.4 SKALER-TENSÖR TEORİLER .....	28
2.4.1 Brans-Dicke Teorisi .....	31
2.4.2 Konformal Dönüşümler.....	32
2.5 EK BOYUTLARDA EYLEM .....	35
BÖLÜM 3 PARÇAÇIK FİZİĞİNDE TEMEL ETKİLEŞMELER .....	39
3.1 STANDART MODEL .....	39

## İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
3.2 ELEKTROZAYIF ETKİLEŞMELERİN STANDART MODELİ .....	40
BÖLÜM 4 PLANCK BİRİMLERİ .....	53
4.1 YÜKSEK BOYUTLARDA KÜRELER .....	53
4.2 YÜKSEK BOYUTLARDA GRAVİTASYONEL ALANLAR .....	55
4.3 GRAVİTASYON VE PLANCK UZUNLUKLARI .....	57
4.4 GRAVİTASYONEL POTANSİYELLER.....	59
4.5 FARKLI BOYUTLARDA PLANCK UZUNLUĞU .....	60
4.6 GRAVİTASYONEL SABİT VE KOMPAKTLAŞTIRMA .....	61
BÖLÜM 5 MODERN KALUZA-KLEİN TEORİLERİ .....	65
5.1 KALUZA-KLEİN TEORİSİ.....	65
5.1.1 Kaluza' nın Teorisi.....	66
5.1.2 Klein' nın Modifikasyonu .....	68
5.2 MODERN PARÇACIK FİZİĞİNDE EK BOYUTLARA GİRİŞ .....	72
5.3 ARKANİ-HAMED, DİMOPOULOS, DVALİ MODELİ.....	78
5.4 RANDALL-SUNDRUM MODELİ .....	82
BÖLÜM 6 SONUÇLAR .....	95
KAYNAKLAR .....	97
EK AÇIKLAMALAR A NEWTON LİMİTİ .....	99
EK AÇIKLAMALAR B TENSÖR YOĞUNLUKLARI .....	103
ÖZGEÇMİŞ .....	107

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 $M_b$ zemin uzay-zamanından $M_p$ fiziksel uzay-zamanına gönderilen difeomorfizm. ....	15
2.2 $C_{12} = 0$ olduğu durumda gravitasyonel dalganın test cisimlerine etkisi. ....	22
2.3 $C_+ = 0$ olduğu durumda gravitasyonel dalganın test cisimlerine etkisi. ....	23
2.4 Sağ elli polarize gravitasyonel dalganın test cisimlerine etkisi. ....	23
2.5 $(t, \vec{x})$ noktasındaki gravitasyonel dalga geçmiş zaman ışık konisi. ....	25
2.6 Gravitasyonel dalga kaynağı. ....	26
4.1 5-boyutlu uzay-zaman tasviri. ....	62
5.1 Kare kuyu içindeki bir parçacık durumu. ....	75
5.2 Ek boyutun tasviri. ....	77
5.3 $S_1/Z_2$ orbifoldu. ....	78
5.4 $e^- e^+ \rightarrow \gamma G_{\mu\nu}$ süreci için Feynman diyagramları. ....	81
5.5 TeV ve Planck duvarları üzerinde Kaluza-Klein gravitonları. ....	94



## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Temel fermiyon aileleri. ....	41
3.2 Temel fermiyon ve skaler bozon alanlarının zayıf izospin, zayıf hiperyük ve elektrik yükleri. ....	42
5.1 $J_1(x_n) = 0$ bağıntısının ilk birkaç kökü. ....	93



## EK AÇIKLAMALAR DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Ek A Newton Limiti .....	99
Ek B Tensör Yoğunlukları .....	103





## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$A_\mu$	:	Foton alanı
$B^n$	:	n-boyutlu içi dolu küre
$b$	:	Taban kuark
$c$	:	Tılsımlı kuark
$d$	:	Aşağı kuark
$F_{\mu\nu}$	:	Elektromanyetik alan tensörü
$G_{\mu\nu}$	:	Einstein tensörü
$G$	:	Newton çekim sabiti
$g_{\mu\nu}$	:	Metrik tensör
$H$	:	Higgs alanı
$h_{\mu\nu}$	:	Pertürbasyon tensörü
$J_1(x_n)$	:	Bessel fonksiyonu
$L_H$	:	Hilbert lagranjiyeni
$\ell_P$	:	Planck uzunluğu
$L^Y$	:	Yukawa Lagranjiyeni
$m_H$	:	Higgs bozonunun kütlesi
$\bar{M}_{Pl}$	:	İndirgenmiş Planck kütlesi
$m_{Pl}$	:	Planck kütlesi
$M_*$	:	Yüksek boyutlarda Planck skalası
$r_c$	:	Çember şeklinde bükülmüş ek boyutun yarıçapı
$R$	:	Ricci skaleri
$R_{\mu\nu}$	:	Ricci tensörü
$R^\alpha_{\nu\rho\sigma}$	:	Riemann tensörü
$s$	:	Garip kuark

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

$S_H$	:	Hilbert eylemi
$S^{n-1}$	:	n-boyutlu içi dolu kürenin dış kabuğu
$S_M$	:	Madde için eylemi
$S_\lambda$	:	Skaler alan için eylem
$T_{\mu\nu}$	:	Enerji-momentum tensörü
$t_{Pl}$	:	Planck zamanı
$t$	:	Üst kuark
$u$	:	Yukarı kuark
$V_n$	:	n-boyutlu kompakt uzayın hacmi
$\Gamma_{\mu\nu}^\beta$	:	Christoffel sembolü
$\Gamma(x)$	:	Gama fonksiyonu
$\eta^{\sigma\lambda}$	:	Minkowski uzayında metrik tensör
$\theta_w$	:	Weinberg açısı
$\lambda$	:	Skaler alan
$\nu_e$	:	Elektron nötrinosu
$\nu_\mu$	:	Müon nötrinosu
$\nu_\tau$	:	Tau nötrinosu
$\rho_m$	:	Kütle yoğunluğu
$\Phi_g$	:	Gravitasyonel potansiyel
$\chi_n(y)$	:	Kaluza-Klein gravitonlarının dalga fonksiyonu
$\square$	:	D'Alembertian operatörü

## **KISALTMALAR**

CERN	:	The European Organization of Nuclear Research
LHC	:	Large Hadron Collider
ATLAS	:	A Toroidal LHC Apparatus
CMS	:	Compact Muon Selenoid

## **SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)**

- ADD : Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali Modeli  
RS : Randall-Sundrum Modeli  
SM : Standart Model



## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Einstein'nin Genel Görelilik kuramına ek uzaysal boyutlar ekleyerek teoriyi genişletme fikri ilk olarak 1921 yılında Theodor Kaluza tarafından önerilmiştir. 1926 yılında Oskar Klein tarafından geliştirilen Kaluza'nın teorisi günümüzde Kaluza-Klein teorisi adıyla bilinmektedir. Kaluza-Klein teorisinin temel amacı, iki temel kuvvet olan gravitasyonel kuvvet ile elektromanyetik kuvveti birleştirmektir. Bu birleştirme denemesi 5 boyutlu uzay-zamanda gerçekleştirilmiştir. Kaluza-Klein teorisi Genel Görelilik ile Kuantum Mekaniği'nin birleştirilmesini sağlayamadığı, yeni öngörülerde bulunamadığı ve daha sonraki yıllarda anlaşılan güçlü ve zayıf çekirdek kuvvetlerini içermediğinden dolayı terk edilmiştir. 1980'li yıllarda Sicim teorilerinin ortaya çıkması ile birlikte ek boyut fikri tekrar gündeme gelmiştir. Ancak bu teoriler günümüz deneylerinin ulaşabileceğinin ötesinde çok küçük ek boyutları içerirler. Günümüz deneylerinin ulaşabileceği ölçüde büyük ek boyutların modern parçacık fiziğine uygulanması 1990'lı yıllarda I. Antoniadis, N Arkani-Hamed, S. Dimopoulos ve G.R. Dvali 'nin öncü çalışmaları ile olmuştur. Ek boyutlar, çok sayıdaki araştırmacının standart model bağlamında çözülemeyen pek çok problemin çözülmesinde ek boyut fikrini bir araç olarak kullanması ile birlikte, yeni bir paradigmaya dönüşmüştür. Ek boyutları içeren teorilerin sağladığı en önemli başarı hiyerarşi problemi olarak bilinen probleme getirdikleri çözümdür. Hiyerarşi problemi basitçe, Planck ölçeği ile zayıf ölçek arasındaki büyük farklılığın sebebinin anlaşılabilmesi olarak tanımlanabilir. Ek boyutları içeren farklı modeller vardır. Bunlardan en iyi bilinenleri: ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali) düz ek boyutlar modeli, RS (Randall-Sundrum) bükülmüş ek boyutlar modeli olarak sıralanabilir.

Standart model günümüzde parçacık fiziğinin temel teorisi olarak kabul edilmektedir. Ancak standart modeli parçacık fiziğinde ulaşılacak son nokta, parçacık fiziğinin nihai teorisi olarak görmek doğru olmayacaktır. Standart modelin birçok öngörüsünün deneylerle doğrulanmış olmasına karşın, modelde cevabı olmayan noktalar ve problemler mevcuttur. Bu nedenle, standart modelin yerini alacak olan daha temel bir teorinin var olduğuna ilişkin görüş ve

alışmalar çok yaygındır. Standart model ötesindeki yeni fizik arayışlarında, ek boyutları içeren modeller önemli bir yer tutar. Ek boyutların keşfedilmesinde, günümüze kadar yapılmış en yüksek enerjili arpıştırıcı olan CERN LHC büyük umut vaat etmektedir. LHC arpıştırıcısının ATLAS ve CMS dedektör çalışma gruplarının fizik programları içerisinde, ek boyutların deneysel olarak araştırılması bulunmaktadır.

Bu tez çalışmasında, ek boyutlar fikrini içeren parçacık fiziğindeki modern Kaluza-Klein teorilerinden ADD ve RS modelleri incelenecek ve bu teorilerin parçacık fiziğinde meydana getirdikleri modifikasyonların neler olduğu ve parçacık fiziği fenomenolojisi açısından sonuçları tartışılacaktır. Ayrıca bu çalışmasında  $\hbar$  ve  $c$ ' nin büyüklüklerinin 1 olduğu birim sistemi kullanılmıştır

## BÖLÜM 2

### GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ

Gravitasyonel kuvvetle ilgili ilk kuram Isaac Newton tarafından 1686 yılında ortaya atılmıştır. Newton' un gravitasyon teorisi bazı doğa olaylarını açıklamakta yetersiz kalmıştır. 1915 yılında Albert Einstein genel görelilik kuramı ile gravitasyonun temel teorisini açıklamıştır. Bu kuram bugüne kadar gravitasyonel kuvvet için gerçekleştirilmiş olan deneylerle ve gözlemlerle uyumluluk göstermiş bir teoridir. Genel görelilik teorisinin temeli eşdeğerlik prensibine dayanmaktadır.

#### 2.1 EŞDEĞERLİK PRENSİBİ

Eşdeğerlik prensibi Einstein alan denklemlerinin altyapısını oluşturan bir prensiptir. Eşdeğerlik prensibinin tanımı basitçe şöyledir: Düzgün bir kütle çekim alanında serbest düşmekte olan bir laboratuarda bulunan bir gözlemciye göre, fizik yasaları kütle çekimi yokmuş gibi davranır ve böyle bir laboratuarda fizik yasalarına dayanılarak kütle çekiminin varlığı gösterilemez. Eşdeğerlik prensibinin formel tanımı aşağıda verilen üç madde ile ifade edilir:

- i. Uzay-zamanda bir başlangıç noktasına bırakılmış ve bir başlangıç hızı verilmiş yüksüz bir test cisminin yörüngesi, cismin iç yapısından ve kompozisyonundan bağımsızdır.
- ii. Herhangi bir lokal non-gravitasyonel test deneyinin sonucu, serbest düşen laboratuvarın hızından bağımsızdır.
- iii. Herhangi bir lokal non-gravitasyonel test deneyinin sonucu, evrenin neresinde ve ne zaman gerçekleştirildiğinden bağımsızdır.



Dış alanlardaki inhomojenlikler ile olan bağlaşımı ihmal edilebilecek ölçüde küçük, öz kütle çekim enerjisi ihmal edilebilen ve elektriksel olarak nötral bir cisime “ yüksüz test cismi ” denir.

İzole edilmiş ve hacmi boyunca, dış alanlardaki inhomojenliklerin ihmal edilebileceği ölçüde küçük boyutlu serbest düşen laboratuarlarda gerçekleştirilen ve öz kütle çekim etkilerinin ihmal edilebilir olduğu deneylere “ non-gravitasyonel test deneyi ” denir.

### 2.1.1 Eşdeğerlik Prensibinden Çıkan Sonuçlar

Eşdeğerlik prensibinden çıkan sonuçlar alan denklemlerinin yazımında önemli yol göstericilerdir. Eşdeğerlik prensibinin sonuçları aşağıdaki şekilde ifade edilir:

- i. Lokal olarak, özel göreliliğin geçerli olması ve serbest düşen cisimlerin eylemsiz kabul edilmesi eşdeğerlik prensibinden çıkan bir sonuçtur. Çünkü, gravitasyonel yükün sıfır olduğu durumda parçacıklar bulunamaz. Bu durumda, kendisine göre gravitasyonel ivmenin ölçülebileceği koordinat çerçevesi yoktur. Tek yapabileceğimiz serbest düşen cisimleri eylemsiz almaktır. Bu ilke sonucu jeodezik denkleminde:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{00} = -2\Phi \quad (2.1)$$

bulunur (Ek açıklamalar A). Bu ifade, Einstein alan denklemlerinin elde edilmesinde yol göstericidir.

- ii. Kovaryanslık prensibi, Eşdeğerlik prensibinin ve de fizik yasalarının koordinat seçiminden bağımsız olmasının bir sonucudur. Lokal olarak uzayın küçük bir bölgesine inildiğinde özel görelilik kuralları geçerlidir. Özel göreliliğin tüm denklemlerinin kovaryant halde yazımı bize genel göreliliğin denklemlerini verir. Tüm kısmi türevler kovaryant türevlerle yer değiştirilir. Böylece bir lokal bölge üzerindeki alanlar tüm manifold üzerine genişletilmiş olur.
- iii. Eşdeğerlik prensibine göre gravitasyonel alan ile tüm alanlar bağışımıdır. Bu bağlaşım sabiti, ayar alanlarının enerjilerinin eşdeğer oldukları kütleler kadardır.

Gravitasyonel alan diğer kuvvet taşıyıcı alanlarla bağışlımlı olduğu gibi kendi kendisi ile de bağışlımlıdır. Buradan çıkan sonuç ise gravitasyonel alan denklemlerinin non-lineer denklemler olmasıdır.

- iv. Kütle çekiminin bir eğri uzay-zaman fenomeni olduğu eşdeğerlik prensinden çıkan bir sonuçtur. Eşdeğerlik prensini sağlayan makul her kütle çekim teorisi bir metrik teori olmalıdır. Bir metrik kütle çekim teorisinde uzay-zaman bir  $g$  metriği ile tasvir edilir. Test cisimlerinin dünya çizgileri bu metriğin jeodezikleridir ve Lokal Lorentz çerçeveleri olarak adlandırılan serbest düşen lokal çerçevelerde fiziğin non-gravitasyonel yasaları özel göreliliğin yasalarına indirgenir.

## 2.2 EINSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ

Bu tez çalışmasında gravitasyonel alan denklemlerinin türetilmesinde iki yol kullanılmıştır. İlk yol, eşdeğerlik prensibinin sonuçlarından ve Newton limitinden faydalanarak ve deneme yanılma metodu ile alan denklemlerinin belirlenmesi yoludur. İkinci yol ise gravitasyonel alan denklemlerini eylem prensibi ile elde etmektir.

### 2.2.1 Einstein Alan Denklemlerinin Newton Limitinden Yararlanılarak Türetilmesi

Einstein, Newton'un gravitasyon teorisindeki Poisson denkleminin yerini alacak daha genel bir alan denklemi yazabilmek için yola çıkar. Poisson denklemi:

$$\nabla^2 \Phi_g = 4\pi G \rho_m \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada  $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$  3' lü Laplacian,  $\Phi_g$  gravitasyonel potansiyel ve  $\rho_m$  kütle yoğunluğudur. Poisson denklemi incelendiğinde sol tarafta gravitasyonel potansiyele etki eden ikinci mertebe diferansiyel olduğu ve sağ tarafta ise kütleyi içeren bir dağılım olduğu görülür. Poisson denklemine bakarak eğri uzayda bir genelleme yazabilmek için tensörler kullanılır. Kütle yoğunluğunun tensörel genellemesinin enerji-momentum tensörü olduğu kolayca tahmin edilebilir. Newton limiti uygulandığı durumda Poisson denklemi:

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (2.3)$$

şeklinde olur. Alan denklemlerinin Newton limiti alındığında (2.3) denklemi elde edilmelidir. (2.3) denkleminde görüldüğü gibi gravitasyonel potansiyel metrik tensör ile temsil edilmektedir. Bu eşdeğerlik prensibinden de beklenen bir sonuçtur.

Bu çalışmada örnek olarak başlıca üç öneri ele alınmıştır. Yeni alan denklemlerini yazarken ilk akla gelen türev işlemi  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$  kovaryant D'Alembertian operatörüdür. Bu sebeple alan denklemi olarak

$$\square g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

denklemi önerilebilir. Ancak metrik uygunluk şartı gereği metrik tensörün kovaryant türevi sıfır olduğundan bu öneri geçerli olamaz. En doğru tercih metriğin ikinci türevini içinde bulunduran Riemann eğrilik tensörüdür. Riemann eğrilik tensörü uzayın eğriliği hakkında bilgi veren tensördür ve

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (2.5)$$

formundadır. Burada  $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$  Christoffel sembolüdür. Christoffel sembolü

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (2.6)$$

şeklinindedir. Ancak Riemann tensörü enerji-momentum tensörü ile aynı dereceden bir tensör değildir. Enerji-momentum tensörüne uygunluk olması açısından Ricci tensörü kullanılmalıdır. Ricci tensörü Riemann eğrilik tensöründen elde edilir ve

$$R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlıdır.

Gravitasyonel alan denklemi olarak aşağıdaki denklemi önerelim:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Burada  $\kappa$  bir sabittir. Eğri uzay-zamanda enerji-momentumun korunumu

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.9)$$

şeklinde yazılır. (2.8) denkleminin kovaryant türevi alındığında

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.10)$$

şeklini alır. Ancak bu koşul Ricci tensörü üzerine kuvvetli bir sınırlama getirir ki genel olarak sağlanması beklenmez. Bianchi özdeşlikleri

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2} \nabla_\sigma R = \nabla^\mu R_{\mu\sigma} \quad (2.12)$$

şeklindedir. Burada  $R$  Ricci skaleridir ve

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlıdır. (2.10) ve (2.12) denklemlerinden Ricci skalerinin sabit olduğu sonucu çıkar. Ancak (2.8) alan denkleminde göre bu durum  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$  sabit ise mümkündür. Bu ise fiziksel bir uzay-zaman tarif etmez.

Son olarak ise gravitasyonel alan denklemleri için

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

şeklinde başka bir öneri yapılır. (2.14) denkleminin kovaryant türevi alındığında (2.12) denkleminde sifıra özdeş olduğu görülür. Buradan görüleceği gibi enerji-momentum

korunumunu sağlamaktadır. Bundan dolayı (2.14) denkleminin doğru gravitasyonel alan denklemi olduğu kabul edilebilir. (2.14) denkleminde tam olarak emin olabilmek için denklemin Newton limiti alınıp başta da belirtilen Poisson denklemi elde edilmelidir.

(2.14) alan denklemi metrik tensör ile kontrakte edildiğinde

$$R = -\kappa T \quad (2.15)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Buradan yola çıkarak alan denklemlerinin

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (2.16)$$

formunda da yazılabildiği görülür.

Düşük hız limiti dikkate alındığında  $T_{00}$  terimi tüm diğer  $T_{ij}$  terimlerinden çok büyüktür. Bu sebeple

$$T = g^{00} T_{00} \quad (2.17)$$

şeklinde alınır. Zayıf gravitasyonel alan yaklaşımı altında metrik tensör

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

şeklinde ayrılabilir. Burada  $h_{\mu\nu}$  pertürbasyon tensörüdür. Newton limitinde  $T$  skaleri

$$T = -T_{00} \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. (2.19) eşitliği (2.16) denkleminin  $\mu = 0$ ,  $\nu = 0$  bileşeninde yerine yazıldığında

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2} T_{00} \quad (2.20)$$

şeklinde bulunur. Ricci tensörünün Newton limiti alındığında

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \partial^i \partial_i h_{00} \quad (2.21)$$

ifadesi bulunur. Buna göre Newton limiti altında gravitasyonel alan denklemi

$$\partial^i \partial_i h_{00} = -\kappa T_{00} \quad (2.22)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $h_{00} = -2\Phi_g$  ve  $T_{00} = \rho$  şeklindedir. Bu denklem tam olarak Poisson denklemi ile aynı formdadır. Ancak  $\kappa = 8\pi G$  alınmalıdır. Böylece önerilmiş olan (2.14) denkleminin doğru gravitasyonel alan denklemi olduğunu söylenir.

Madde yokken  $T_{\mu\nu} = 0$  olduğundan Einstein alan denklemi (2.16) denkleminde

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.23)$$

şeklinde elde edilir.

Einstein alan denklemlerini

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

şeklinde yazarız. Burada

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.25)$$

Einstein tensörü olarak adlandırılır.

Bu denklemler uzay zamanın eğriliğinin enerji-momentumun varlığına nasıl tepki gösterdiğini anlatır. Einstein alan denklemleri simetrik (0,2) tipi tensörlerden oluştuğundan 10 tane

bağımsız denklem verir. (2.12)' deki Bianchi özdeşliği dikkate alındığında bağımsız denklem sayısı 6' ya indirgenir.

### 2.2.2 Einstein Alan Denklemlerinin Eylem Prensibi İle Türetilmesi

Einstein alan denklemlerini eylem prensibi ile türeten ilk kişi Hilbert'dir ve bu nedenle bu eyleme Hilbert eylemi denir. Eylem bir Lagrange yoğunluğunun uzay-zaman üzerinden integrali şeklinde tanımlanır. Hilbert eylemi;

$$S_H = \int d^4x L_H \quad (2.26)$$

şeklindedir. Burada Lagrange yoğunluğuna lagranjiyen de denilmektedir. Alan denklemlerinin türetilmesi için eylemin metriğe göre varyasyonu alınır. Eylem koordinat dönüşümü altında invariant olmalıdır.  $x \rightarrow x'$  koordinat dönüşümü altında

$$d^4x \rightarrow \det\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right) d^4x'$$

şeklinde dönüşür. Eylemin koordinat dönüşümü altında değişmez olması için  $L_H \rightarrow \det^{-1}\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right) L_H$  şeklinde bir dönüşümü olmalıdır. Öyleyse  $L_H$  ağırlığı -1

olan bir tensör yoğunluğu olmalıdır.  $L_H = \sqrt{-g} \times skaler$  şeklinde alınabilir çünkü metrik tensörün ağırlığı -2' dir (ek açıklama B) ve bir skaler koordinat dönüşümü altında invariantır. Metriğin ikinci türevini içeren ve skaler olarak ilk akla gelen Ricci skaleridir. Lagranjiyen

$$L_H = \sqrt{-g} R \quad (2.27)$$

şeklinde alınır. (2.26)' deki Hilbert eylemi

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.28)$$

halini alır. (2.28)'daki eylemin ters metriğe göre varyasyonu

$$\delta S_H = \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) \quad (2.29)$$

şeklindedir. Varyasyon alındığında eylem

$$\delta S_H = \int d^4x \left\{ (\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\} \quad (2.30)$$

halini alır. İntegranttaki üçüncü terim aranan formdadır. İntegrantta bulunan ikinci terimin üçüncünün formunda yazılabilmesi için  $\delta R_{\mu\nu}$  hesaplanmalıdır. Bunun için ilk olarak Christoffel sembolünün varyasyonu hesaplanmalıdır. Christoffel sembolü bir tensör olamamasına rağmen varyasyonu

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}{}' - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \quad (2.31)$$

şeklinde yazılan (1,2) tipi bir tensördür. Christoffel sembolünün varyasyonun tensör olması kovaryant türevinin alınmasını sağlar. Bu türev

$$\nabla_{\lambda} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} = \partial_{\lambda} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (2.32)$$

şeklindedir. (2.32) bağıntısı ve Riemann tensörünün tanımı yardımıyla

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu} \delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} \quad (2.33)$$

formunda yazılabildiği gösterilebilir. (2.30) varyasyonun ikinci terimi (2.33) eşitliği kullanılarak

$$\int d^4x \sqrt{-g} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} = \int dx^n \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} \left[ g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu}) - g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \right] = 0 \quad (2.34)$$

şeklinde elde edilir.

Varyasyondaki ilk terimin hesaplanması için determinantın bazı özellikleri kullanılır. A bir matris ve  $A = \ln B$  şeklinde tanımlanırsa  $\det e^A = e^{TrA}$ ,  $\det B = e^{Tr \ln B}$  ve  $\delta(\det B) = \det B Tr(\delta BB^{-1})$  şeklindedir. Buradan yola çıkarak  $\sqrt{-g}$  varyasyonu alındığında



$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.35)$$

şeklindedir. (2.30) varyasyonun ilk teriminde (2.35) eşitliği kullanılarak

$$\int d^4x\delta\sqrt{-g}R = -\int d^4x\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R \quad (2.36)$$

şeklinde elde edilir.

(2.34) ve (2.36) eşitlikleri (2.30) varyasyonunda yerine yazılırsa,

$$\delta S_H = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

olarak bulunur. Bu varyasyonun sıfır olması koşulundan vakum Einstein alan denklemi elde edilir.

Madde olan ortamda Einstein alan denklemlerini elde etmek için eylemi

$$S = \frac{1}{8\pi G}S_H + S_M \quad (2.38)$$

şeklinde yazarak eyleme  $S_M$  madde eylemini eklemek mümkündür. Yazılan eyleme göre varyasyon hesaplandığında

$$\delta S = \int d^4x\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\left\{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right\}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.39)$$

halini alır. Varyasyonun sıfır olması koşulu ile enerji-momentü tensörü

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.40)$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde Einstein alan denklemleri Hilbert eylemi ile elde edilmiş olur.

## 2.3 LİNEER EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİ

Bu bölümde gravitasyonel alanların zayıf olduğu ve zamanla değişebilir olduğu durumlarda alan denklemleri incelenecektir. Yapılması gerekenler non-lineer Einstein alan denklemlerindeki terimleri gravitasyonel alanların zayıf olma koşuluna göre elde etmektir.

Gravitasyonel alanın zayıf olması durumu Minkowski uzay-zamanı üzerine  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  şeklinde olan bir pertürbasyonun eklenmesi ile

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ; \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.41)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada  $\eta_{\mu\nu}$  Minkowski uzayının metrik tensörüdür ve  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$  şeklindedir. Pertürbasyonun çok küçük olmasından dolayı burada indis indirme ve kaldırma işlemi  $\eta_{\mu\nu}$  ile yapılabilir.

Zayıf gravitasyonel alan koşulu altında  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  olduğundan dolayı pertürbasyonun karesi ve diğer üst mertebeli terimleri,  $h^{\mu\nu}$  yanında ihmal edilir. Bu sebeple alan denklemleri  $h^{\mu\nu}$  pertürbasyonuna göre lineer olmalıdır. Einstein alan denklemlerini lineer olarak yazılabilmek için ilk olarak Christoffel sembolünde metrik tensörün (2.41) formunda yazılmasıyla

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\beta\lambda} (\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}) \quad (2.42)$$

şeklinde elde edilir. Christoffel sembolünün kareleri  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  olmasından dolayı ihmal edilir ve Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\sigma\mu} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\rho\mu} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\rho\nu}) \quad (2.43)$$

halini alır. Ricci tensörü ise

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \quad (2.44)$$

şeklinde elde edilir. Burada D'Alembertian operatörü zayıf alan yaklaşımından dolayı  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$  şeklindedir. Ricci skaleri ise

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (2.45)$$

şeklini alır. Ricci tensörü ve skaleri Einstein tensöründe yerine yazıldığında

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\mu h^\rho_\nu + \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) \quad (2.46)$$

bulunur. Ortamda ve boşlukta lineer Einstein alan denklemleri ise

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.47)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.48)$$

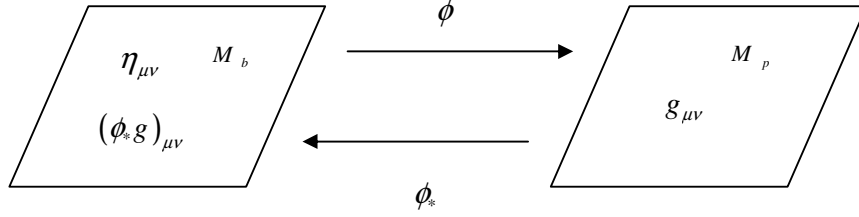
şeklinde olur. Burada Ricci tensörü (2.44) eşitliğindeki ve Einstein tensörü ise (2.46) eşitliğindeki gibi tanımlıdır. Gravitasyonel alanın zayıf olması  $T_{\mu\nu}$  enerji-momentum tensörününde zayıf olması anlamına gelir. Bu sebeple enerji-momentum korunumu zayıf alan yaklaşımında

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.49)$$

şeklinde yazılabilir.

Metrik tensörün  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  şeklindeki ayrımı koordinatları tek olarak belirlemez. Dolayısıyla koordinat seçiminde bir serbestlik vardır. Bu serbestliğe ayar serbestliği denir. Bu serbestlikten yola çıkarak pertürbasyon için bir ayar dönüşümü elde edilebilir. Şimdi bu ayar dönüşümü için bir formülasyon kurmaya çalışalım.  $M_b$  arkaplan uzay-zamanı ve  $M_p$  fiziksel

uzay-zamanı tasvir eden iki manifold olsun. Bu iki manifold arasında  $\phi: M_b \rightarrow M_p$  şeklinde bir difeomorfizm düşünelim (Şekil 2.1).



Şekil 2.1  $M_b$  zemin uzay-zamanından  $M_p$  fiziksel uzay-zamanına gönderilen difeomorfizm.

$M_b$  üzerinde  $\eta_{\mu\nu}$  Minkowski metriği bulunurken  $M_p$  üzerinde Einstein denklemlerine uyan başka bir  $g_{\mu\nu}$  metriği bulunsun.  $\phi$  difeomorfizmi tensörleri arkaplan ve fiziksel uzay-zaman arasında geri yada ileri taşımayı sağlar. Lineerleştirilmiş teorimizi düz uzay-zaman arkaplanı üzerinde kullanmak istediğimizden dolayı fiziksel metriğin geriçekilmiş (pullback)  $(\phi_* g)_{\mu\nu}$  ile ilgileniyoruz. Pertürbasyon düz metrik ile geriçekilmiş  $(\phi_* g_{\mu\nu})$  metriği arasındaki fark olarak tanımlanır:

$$h_{\mu\nu} = (\phi_* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \quad (2.50)$$

Eğer  $M_p$  üzerindeki gravitasyonel alanlar zayıfsa bu durumda bazı  $\phi$  difeomorfizmleri için  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  olacaktır. Böylece ilgimizi yalnızca bu koşulu sağlayan difeomorfizmler ile sınırlandıracağız. Bu durumda  $g_{\alpha\beta}$ 'nin  $M_p$  üzerinde Einstein denklemlerine uyması demek  $h_{\mu\nu}$ 'nin  $M_b$  üzerinde lineer denklemlere uyması demektir.  $M_b$  üzerinde  $\xi^\mu(x)$  alanını düşünelim. Bu vektör alanı bir parametrelili  $\psi_\varepsilon: M_b \rightarrow M_b$  difeomorfizmler ailesi üretsinsin. Yeterince küçük  $\varepsilon$  için eğer  $\phi$  (2.50) ile tanımlanan bir difeomorfizm ise bu durumda  $\varepsilon$  ile parametrize edilen pertürbasyonlar ailesi

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = [(\phi \circ \psi_\varepsilon)_* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (2.51)$$

şeklinde yazılır. (2.50) bağıntısı yardımıyla ve  $\varepsilon$ 'nin çok küçük bir parametre olmasından

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} &= h_{\mu\nu} + \psi_{\varepsilon^*} \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\
&= \psi_{\varepsilon^*} h_{\mu\nu} + \varepsilon L_{\xi} \eta_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

olarak elde edilir. Burada  $L_{\xi}$  Lie türevidir. Lie türevi

$$L_V g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} \tag{2.53}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $V$  bir vektör alanıdır. (2.53) eşitliği (2.52) pertürbasyon ifadesinde yerleştirildiğinde ayar dönüşümü

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = h_{\mu\nu} + 2\varepsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} \tag{2.54}$$

şeklinde elde edilir. Burada kovaryant türevin en düşük mertebede kısmi türev olduğu kullanılmıştır.

(2.54) ayar dönüşümü Riemann eğrilik tensörünün varyasyonuna uygulandığında

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \tag{2.55}$$

olduğu görülür. Bu dönüşümler Riemann tensörünü değişmez bırakır. Bu sonuca göre elde edilen gerçekten bir ayar dönüşümüdür.

$g_{\mu\nu}$  metrik tensörü 16 bileşene sahiptir. Fakat metrik tensör simetrik olduğu için yalnızca 10 tane bileşeni bağımsızdır. Ancak bu 10 bileşenin tümü fiziksel değildir. 4 tanesi koordinat seçimine bağlı olarak değişmektedir. Gelişigüzellikten kurtulmak için bir ayar seçimi yapılır. Bu ayar seçimi

$$\square x^{\mu} = 0 \tag{2.56}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ayar seçimine harmonik ayar denir. Harmonik ayar

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \tag{2.57}$$

şeklinde de ifade edilir. Gravitasyonel alanların zayıf olması durumunda bu ayar koşulu:

$$\partial_{\mu} h_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2} \partial_{\lambda} h = 0 \quad (2.58)$$

halini alır. (2.58)' deki ayar koşuluna “ Einstein ayarı veya de Donder ayarı ” denir. (2.47) ve (2.48)' de ki lineer alan denklemlerine (2.58) ayar koşulu uygulandığında

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.59)$$

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.60)$$

denklemleri elde edilir. (2.59) ve (2.60) denklemleri de Donder ayar seçimi sonrası ortamdaki ve vakumdaki lineer Einstein alan denklemleridir.

Lineer alan denklemlerini daha basit bir hale indirgeye bilmek için zıt-iz pertürbasyon ile alan denklemleri yazılabilir. Zıt-iz pertürbasyon

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (2.61)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Zıt-iz pertürbasyon denilme sebebi ise

$$\bar{h} = -h \quad (2.62)$$

şeklinde olmasındandır. Zıt-iz pertürbasyona göre de Donder ayarı

$$\partial_{\mu} \bar{h}_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (2.63)$$

şeklinde dir. De Donder ayarı ve zıt-iz pertürbasyon altında lineer Einstein alan denklemleri

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.64)$$

halini alır.

(2.64) alan denklemlerine bakıldığında sade bir hale geldiği görülmektedir. Bu denklemlerin çözümü rahatlıkla yapılabilir.

### 2.3.1 Düzlem Gravitasyonel Dalgalar

De Donder ayarı ve zıt-iz pertürbasyon koşulları ile elde edilen vakum lineer Einstein alan denklemlerini çözmek basit bir hal almıştır çünkü  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  denklemi  $\partial_\sigma \partial^\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  şeklinde ikinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin düzlem dalga çözümü:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (2.65)$$

şeklinde gravitasyonel dalgalarıdır. Burada  $C_{\mu\nu}$  gravitasyonel dalganın genliğidir.  $\partial_\sigma \partial^\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  denkleminde (2.65) gravitasyonel dalga çözümü yerleştirildiğinde

$$k^2 C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} = 0 \quad (2.66)$$

şeklinde elde edilir. (2.66) eşitliğinden

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \quad (2.67)$$

olduğu görülür. Buradan çıkan sonuç ise gravitasyonel dalganın ışık hızı ile hareket ettiğidir.

$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}$  10 bileşen içerir. De Donder ayarı seçildiğinde

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \rightarrow C^{\mu\nu} k_\mu = 0 \quad (2.68)$$

koşulu bulunur.  $C^{\mu\nu}k_\mu = 0$  eşitliği 4 bağımsız denklem içerir.  $\bar{h}^{\mu\nu}$  tensörü, de Donder ayarı seçimi ile 6 bağımsız bileşene indirgenir. Harmonik ayar koşulu ayar serbestliğini sınırlamasına rağmen hala bir miktar serbestlik kalmıştır.  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu$  tipindeki koordinat dönüşümleri için eğer  $\square\zeta^\mu = 0$  koşulu mevcutsa bu dönüşüm ailesi harmonik ayar koşulunu bozmazlar. Bu durumda,  $\square\zeta^\mu = 0$  sağlanacak şekildeki ayar serbestliği, harmonik ayar seçimi sonrasında dahi mevcuttur.  $\square\zeta^\mu = 0$  denklemi,  $\zeta^\mu$  için bir dalga denklemi verir. Bu dalga denklemi için

$$\zeta^\mu = B^\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (2.69)$$

çözümü seçildikten sonra ayar serbestliği tamamen yitirilmiş olacaktır.

Arta kalan serbestlik gravitasyonel dalgayı tasvir eden  $C^{(eski)}_{\mu\nu}$  katsayılarından  $C^{(yeni)\mu}_\mu = 0$  ve  $C^{(yeni)}_{0\nu} = 0$  olacak şekilde yeni  $C^{(yeni)}_{\mu\nu}$  katsayılarına geçmemizi mümkün kılar. Bu öneri ile 4 bağımsız denklem elde edilir. Bundan dolayı  $C_{\mu\nu}$  2 bağımsız parametreye indirgenmiş olur (Carroll 2004). Seçilmiş olan  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu$  koordinat dönüşümünü (2.54)' de elde edilmiş olan gravitasyonel dalganın dönüşümüne uygularsak

$$h_{\mu\nu}^{(yeni)} = h_{\mu\nu}^{(eski)} - \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu \quad (2.70)$$

şeklinde dönüşür. Bu dönüşüm altında zıt-iz pertürbasyon ise

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(yeni)} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(eski)} - \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \zeta^\lambda \quad (2.71)$$

şeklinde dönüşür. (2.71) denkleminde  $\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}$  ve  $\zeta^\mu = B^\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}$  çözümleri yerleştirildiğinde

$$C_{\mu\nu}^{(yeni)} = C_{\mu\nu}^{(eski)} - ik_\mu B_\nu - ik_\nu B_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\lambda B^\lambda \quad (2.72)$$

$C_{\mu\nu}^{(yeni)}$  ve  $C_{\mu\nu}^{(eski)}$  katsayıları arasında bir ilişki elde edilmiş olur.



Gravitasyonel dalganın z yönünde ilerlediği durum incelensin. z yönünde ilerleyen gravitasyonel dalganın dalga vektörü  $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$  şeklindedir. Daha önce elde edilen  $C_\mu^\mu = 0$ ,  $C_{0\mu} = 0$  ve  $C^{\mu\nu}k_\mu = 0$  denklemleri ile  $C_{\mu\nu}$  genliği

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

şeklinde elde edilir. Daha önce de bahsedildiği gibi  $C_{\mu\nu}$  genliği 2 bağımsız parametre içermektedir.

Gravitasyonel dalganın fiziksel etkilerini görebilmek için test cisimleri üzerine etkisi incelenir. Gravitasyonel dalganın etkilerini koordinat bağımsız inceleyebilmek için birbirine yakın test cisimlerinin jeodeziklerinde meydana gelen değişiklikler incelenir. Jeodezik üzerinde meydana gelen değişiklik ise

$$\frac{\nabla^2 S^\mu}{\partial \tau^2} = R_{\nu\rho\sigma}^\mu U^\nu U^\rho S^\sigma \quad (2.74)$$

şeklindeki jeodezik sapma denklemi ile bulunur. Burada  $U^\nu$  4 boyutlu hız vektörü ve  $S^\mu$  jeodeziklerin ayrılmasını gösteren vektördür. Bir jeodezik üzerinde hareket eden cisim için uzay-zamanda bir değişiklik söz konusu olursa (2.74) denklemi iki jeodezik arasındaki sapmayı ifade eder. Burada test cisimleri çok yavaş hareket etsin. Bu durumda test cisimlerinin dörtlü hız vektörü

$$U^\nu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.75)$$

şeklindedir. Test cisimleri çok yavaş hareket ettiğinden (2.74) jeodezik sapma denklemi

$$\frac{\nabla^2 S^\mu}{\partial \tau^2} = R_{00\sigma}^\mu S^\sigma \quad (2.76)$$

halini alır.  $R_{\mu 00\sigma}$  Riemann tensörü

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma} \quad (2.77)$$

şeklindedir. (2.77) eşitliğinde bulunan Riemann tensörü ve çok yavaş hareket eden cisimler için  $\tau \cong t$  yaklaşımı (2.76)'de bulunan jeodezik sapma denkleminde yerine yerleştirilirse

$$\frac{\partial^2 S^\mu}{\partial t^2} = \frac{1}{2} S^\sigma (\partial_0 \partial_0 h_\sigma^\mu) \quad (2.78)$$

şeklinde elde edilir. z yönünde ilerleyen dalga için  $C_{3\nu} = 0$  olduğundan

$$\frac{\partial^2 S^3}{\partial t^2} = 0 \quad (2.79)$$

ifadesi elde edilir. Buradan test cisimlerinin enine hareket edeceği görülür.

İlk olarak  $C_{12} = 0$  olduğu durumu incelenirse (2.78) denklemi

$$\frac{\partial^2 S^1}{\partial t^2} = S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{C_{11}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (2.80)$$

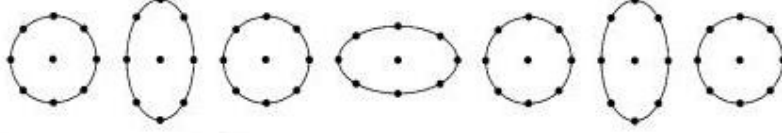
$$\frac{\partial^2 S^2}{\partial t^2} = S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -\frac{C_{11}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (2.81)$$

şeklini alır. (2.90) ve (2.91) denklemlerinin iterasyon yöntemi kullanılarak elde edilen birinci mertebe çözümleri

$$S^1 = S^1(0) \left( 1 + \frac{C_{11}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (2.82)$$

$$S^2 = S^2(0) \left( 1 - \frac{C_{11}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (2.83)$$

şeklinde bulunur (Şekil 2.2). Burada  $S^1(0)$   $t=0$  anlamında değil sıfırıncı mertebe anlamındadır.



Şekil 2.2  $C_{12} = 0$  olduğu durumda gravitasyonel dalganın test cisimlerine etkisi.

$C_{12} = 0$  olduğu durumda test cismine gravitasyonel dalga etkiğinde şekildeki gibi bir salınım hareketi yapar. Burada test cisimleri + şeklinde bir salınım yaptıklarından  $C_+ = C_{11}$  tanımlamasını yapılır.

$C_{11} = 0$  olduğu durumda (2.76) jeodezik sapma denklemi

$$\frac{\partial^2 S^1}{\partial t^2} = S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{C_{12}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial^2 S^2}{\partial t^2} = S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{C_{12}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (2.85)$$

şeklini alır. (2.84) ve (2.85) denklemlerinin iterasyon yöntemi ile birinci mertebe çözümleri

$$S^1 = S^1(0) + \frac{C_{12}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2(0) \quad (2.86)$$

$$S^2 = S^2(0) + \frac{C_{12}}{2} e^{ik_\sigma x^\sigma} S^1(0) \quad (2.87)$$

şeklinde bulunur(Şekil 2.3).



Şekil 2.3  $C_+ = 0$  olduğu durumda gravitasyonel dalganın test cisimlerine etkisi.

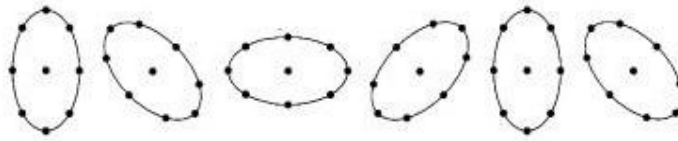
$C_+ = 0$  olduğu durumda test cismine gravitasyonel dalga etkidiğinde şekil 2.3' deki gibi bir salınım hareketi yapar. Burada test cisimleri  $\times$  şeklinde bir salınım yaptıklarından  $C_\times = C_{12}$  tanımlaması yapılır.  $C_+$  ve  $C_\times$  nicelikleri, gravitasyonel dalganın iki bağımsız lineer polarizasyon modlarının bir ölçüsüdür.

İki durum üst üste bindiğinde çözüm

$$C_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + iC_\times) \quad (2.88)$$

$$C_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - iC_\times) \quad (2.89)$$

şeklindedir. Bu şekilde sağ ve sol eli dairesel polarizasyon modlarını tanımlanırız. Şekil 2.4' de sağ eli polarize dalganın test cisimlerine etkisi görülmektedir.



Şekil 2.4 Sağ eli polarize gravitasyonel dalganın test cisimlerine etkisi.

### 2.3.2 Gravitasyonel Dalganın Üretilmesi

De Donder ayarı ve zıt-iz pertürbasyon koşulu uygulanan lineer Einstein alan denklemlerinin çözümü gravitasyonel dalganın üretilmesi hakkında bilgi verecektir. Lineer Einstein alan

denklemleri  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$  şeklindedir ve bu denklemi çözebilmek için Green fonksiyonu kullanılır. Green fonksiyonunun denklemi

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma) \quad (2.90)$$

şeklindedir. Burada, D'Alembertian operatörü  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$  olarak tanımlıdır. (2.90) green fonksiyonun çözümleri gecikmiş (retarded) green fonksiyonu ve ilerlemiş(advanced) green fonksiyonu şeklindedir. Gecikmiş green fonksiyonu zamanda ileri yönde ilerlemeye karşılık gelirken, ilerlemiş green fonksiyonu ise zamanda geri yönde ilerlemeye karşılık gelir.  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$  denklemi için Green fonksiyonu ile çözümü

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G \int G_x(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y^\sigma \quad (2.91)$$

şeklinde yazılır. Burada  $G(x^\sigma - y^\sigma)$  dalga fonksiyonu için gecikmiş Green fonksiyonudur ve

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|\bar{x} - \bar{y}|} \delta[|\bar{x} - \bar{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) \quad (2.92)$$

şeklindedir.  $\theta$  fonksiyonu

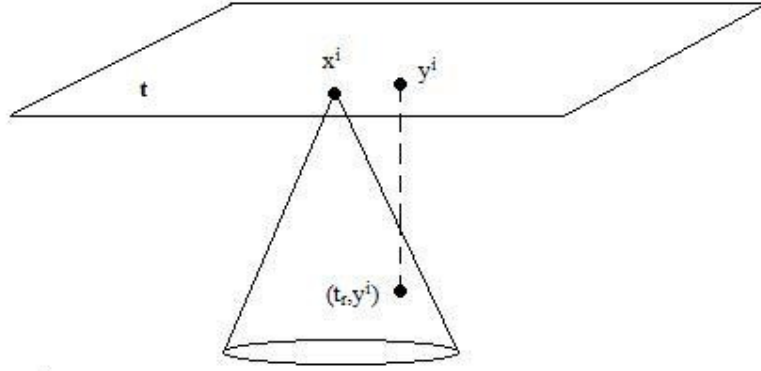
$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > y^0 \\ 0 & x^0 \leq y^0 \end{cases} \quad (2.93)$$

şeklinde tanımlıdır. (2.91) ifadesinde  $y^0$  üzerinden integral alınırsa,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = 4G \int \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\bar{x} - \bar{y}|, \bar{y}) d^3 y \quad (2.94)$$

olduğu bulunur. Burada  $t = x^0$  olarak tanımlanmıştır. Gravitasyonel dalganın ortaya çıktığı an  $t_r = t - |\bar{x} - \bar{y}|$  şeklindedir.  $(t, \bar{x})$  noktasındaki gravitasyonel dalga geçmiş zaman ışık konisi

üzerindeki  $(t, \vec{x} - \vec{y})$  noktasındaki enerji ve momentum kaynaklarının etkilerinin bir toplamıdır (Şekil 2.5).



Şekil 2.5  $(t, \vec{x})$  noktasındaki gravitasyonel dalga geçmiş zaman ışık konisi.

Gravitasyonel dalganın salınım olaylarını inceleyebilmek için Fourier dönüşümleri kolaylık sağlayacaktır bu nedenle  $\phi(t, \vec{x})$  fonksiyonunun Fourier dönüşümleri

$$\tilde{\phi}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \phi(t, \vec{x}) \quad (2.95)$$

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \vec{x}) \quad (2.96)$$

şeklindedir. Pertürbasyonun Fourier dönüşümü

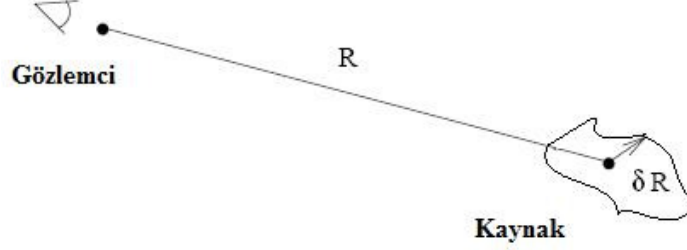
$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \quad (2.97)$$

şeklinde olur. (2.97) denkleminde (2.94)' de ifade edilen pertürbasyon yerleştirilip düzenlendiğinde

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = 4G \int d^3 y e^{i\omega|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \quad (2.98)$$

halini alır.

Genel bir çözüm elde edebilmek için gravitasyonel dalga kaynağını oldukça uzak, izole ve yavaş hareket ettiği (nonrelativistik) durum gözönüne alınsın(Şekil 2.6). Bu koşullar altında yaklaşımlar daha kesin yapılacaktır.



Şekil 2.6 Gravitasyonel dalga kaynağı.

Burada  $\delta R \ll R$  olduğundan

$$T_V = \delta R \quad T_C \gg \delta R \quad (2.99)$$

$$\lambda \gg \delta R \quad \omega^{-1} \gg \delta R \quad (2.100)$$

şeklinde alınır. Burada T kaynağın periyodudur. Buradan  $|\vec{x} - \vec{y}| \approx R$  ve  $e^{i\omega|\vec{x} - \vec{y}|} \cong e^{i\omega R}$  şeklinde elde edilir ve bu koşullarda  $e^{i\omega R}$  terimi sabit olduğundan integral dışına alınır. Pertürbasyon

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4G \frac{e^{i\omega R}}{R} \int d^3 y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y}) \quad (2.101)$$

halini alır.  $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 0$  de Donder ayarının Fourier dönüşümü alındığında frekans uzayında

$$\bar{h}^{0\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{i\omega} \partial_i \left( \bar{h}^{i\nu}(\omega, \vec{x}) \right) \quad (2.102)$$

şeklinde elde edilir. Buradan görüldüğü gibi  $\bar{h}^{ij}$  uzaysal parçalarını bulmak yeterlidir.  $\bar{h}^{ij}$  bilindiği takdirde  $\bar{h}^{0\nu}$  (2.102)' den elde edilir.

Pertürbasyon ifadesinin tam ifadesini bulabilmek için (2.101) denkleminin içinde bulunan enerji-momentum tensörünü elde etmek yeterlidir. Enerji-momentumun korunumu  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  denkleminde bulunan  $T^{\mu\nu}$  ifadesinin Fourier dönüşümünü alındığında

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_\mu \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 0 \quad (2.103)$$

şeklinde olur. Enerji-momentum korunumundan

$$\partial_k \tilde{T}^{kv} = -i\omega \tilde{T}^{0v} \quad (2.104)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla, (2.101) eşitliğindeki integral terimi

$$\int d^3 y \tilde{T}^{ij}(\omega, \vec{y}) = -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j T^{00}(t, \vec{y}) d^3 y \quad (2.105)$$

ifadesine indirgenir. Kuadropol moment tensörü

$$q_{ij} = 3 \int y^i y^j T^{00}(t, \vec{y}) d^3 y \quad (2.106)$$

şeklinde tanımlanır. (2.105) ve (2.106) deki sonuçları (2.101) ifadesinde yerlerine yazarsak frekans uzayındaki pertürbasyon

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, \vec{x}) = -\frac{2G\omega^2}{3} \frac{e^{i\omega r}}{R} \tilde{q}_{ij}(\omega) \quad (2.107)$$

şeklinde elde edilir. (2.107)' de bulunan pertürbasyona tekrar bir Fourier dönüşümü uygulanırsa pertürbasyon koordinat uzayında

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{3R} \frac{d^2}{dt^2} q_{ij}(t_r) \quad (2.108)$$



haline gelir. Görüldüğü gibi, yayılan gravitasonel dalga enerji yoğunluğunun kuadrupol momentinin ikinci türevi ile orantılıdır. Bu durumun aksine, elektromanyetik dalgaya gelen katkı dipol momenttendir ve bu nedenle elektromanyetik dalga gravitasyonel dalgadan daha güçlüdür.

## 2.4 SKALER-TENSÖR TEORİLER

Skaler-tensör teoriler Pascual Jordan tarafından Hilbert eylemine  $\lambda$  skaler alanı ekleyerek geliştirilmiş alternatif bir teoridir. Skaler-tensör teorilerde eylem

$$S = S_{IR} + S_{\lambda} + S_M \quad (2.109)$$

şeklinde üç bileşenden oluşur. Burada  $S_{IR}$  gravitasyonel eylemi,  $S_{\lambda}$  skaler alan için eylemi ve  $S_M$  ise madde için eylemi göstermektedir. Bu bileşenler

$$S_{IR} = \int dx^4 \sqrt{-g} f(\lambda) R, \quad (2.110)$$

$$S_{\lambda} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} h(\lambda) g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \lambda) (\partial_{\nu} \lambda) - U(\lambda) \right], \quad (2.111)$$

$$S_M = \int dx^4 \sqrt{-g} \hat{L}_M(g_{\mu\nu}, \psi_i) \quad (2.112)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\lambda$  skaler alandır.  $f(\lambda)$ ,  $h(\lambda)$  ve  $U(\lambda)$  teoriyi belirleyen fonksiyonlardır. Burada  $f(\lambda)$  Newton çekim sabiti  $G$ ' nin tersi ile orantılıdır. Böylece  $G$  sabiti aslında sabit değil ve uzay-zaman boyunca değişmektedir.

Skaler-tensör teoriler için alan denklemlerini elde edebilmek için (2.110), (2.111) ve (2.112) eylemlerinin metriğe göre varyasyonları alınmalıdır.

İlk olarak (2.110) eyleminin varyasyonu alındığında

$$\delta S_{\text{IR}} = \int dx^4 \sqrt{-g} f(\lambda) \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4 x \sqrt{-g} f(\lambda) \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad (2.113)$$

şeklinde elde edilir. (2.113) eşitliğinin ilk kısmı aranılan formdadır. İkinci kısmı ele alınır.  $\delta R_{\mu\nu}$  ifadesinin metriğe göre varyasyon şeklinde yazılabilmesi için

$$\delta R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} \quad (2.114)$$

$$\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[ g_{\lambda\mu} \nabla_{\nu} (\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu} \nabla_{\mu} (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\sigma} (\delta g^{\alpha\beta}) \right] \quad (2.115)$$

ifadeleri kullanılır. (2.114) ve (2.115) eşitlikleri yardımı ile

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma} (g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda} \delta g^{\lambda\sigma} \quad (2.116)$$

şeklinde elde edilir. (2.116) eşitliği (2.113) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{IR}} = & \int dx^4 \sqrt{-g} f(\lambda) \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int d^4 x \sqrt{-g} f(\lambda) \left[ \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma} (g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda} \delta g^{\lambda\sigma} \right] \end{aligned} \quad (2.117)$$

halini alır. (2.117) eylemindeki son iki terimde iki kere kısmi integrasyon gerçekleştirilir ve yüzey terimleri atılırsa,

$$\delta S_{\text{IR}} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ f(\lambda) G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (2.118)$$

ifadesine ulaşılır. (2.109) eyleminin varyasyon ifadesinde ilk olarak  $\delta S_{\text{IR}}$  elde edilmiştir.  $S_{\lambda}$  ve  $S_M$  eylemlerinin varyasyonları skaler alan ve madde alanları için enerji-momentum tensörlerini verecektir. Bu sonuca göre (2.109) ifadesinin varyasyonu

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ f(\lambda) G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f - \nabla_\mu \nabla_\nu f + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(\lambda)} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(M)} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (2.119)$$

halini alır. Eylemin metriğe göre varyasyonu sıfır olduğundan

$$G_{\mu\nu} = f^{-1}(\lambda) \left( \nabla_\mu \nabla_\nu f - g_{\mu\nu} \square f + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(\lambda)} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(M)} \right) \quad (2.120)$$

denklemi elde edilir. (2.120) skaler alanlar için Einstein alan denklemdir. (2.120) denkleminde bulunan  $T_{\mu\nu}^{(\lambda)}$  enerji-momentum tensörünü elde edebilmek için (2.111) ifadesinin varyasyonunun hesaplanması gerekmektedir. (2.111) denkleminin varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta S_\lambda = \int dx^4 (\delta \sqrt{-g}) & \left[ -\frac{1}{2} h(\lambda) g^{\mu\nu} (\partial_\mu \lambda) (\partial_\nu \lambda) - U(\lambda) \right] \\ & + \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} h(\lambda) \delta g^{\mu\nu} (\partial_\mu \lambda) (\partial_\nu \lambda) \right] \end{aligned} \quad (2.121)$$

şeklindedir. Burada  $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$  olduğundan (2.121) ifadesi

$$\begin{aligned} \delta S_\lambda = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} & \left[ -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left( -\frac{1}{2} h(\lambda) g^{\mu\nu} (\partial_\mu \lambda) (\partial_\nu \lambda) - U(\lambda) \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} h(\lambda) (\partial_\alpha \lambda) (\partial_\beta \lambda) \right] \end{aligned} \quad (2.122)$$

şeklinde elde edilir. Buradan skaler alan için enerji-momentum tensörü

$$T_{\alpha\beta}^{(\lambda)} = g_{\alpha\beta} \left( -\frac{1}{2} h(\lambda) g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \lambda) (\nabla_\nu \lambda) - U(\lambda) \right) + h(\lambda) (\nabla_\alpha \lambda) (\nabla_\beta \lambda) \quad (2.123)$$

şeklinde bulunur. Skaler alan için kovaryant türevin kısmi türeve eşit olduğuna dikkat ediniz.

Skaler alan sabit olduğunda  $f(\lambda) = \frac{1}{16\pi G}$  olarak verilir. Eğer  $\lambda$  uzay-zaman bağılılığı

içeriyorsa Newton sabitinin uzay-zamana bağlı olduğu yorumu yapılır. Bu değişimi kontrol eden dinamik  $\lambda$  için hareket denklemi tarafından belirlenir. Hareket denklemi  $\lambda$ ' ya göre varyasyon alınarak,

$$h\Box\lambda + \frac{1}{2}h'g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\lambda\nabla_{\nu}\lambda - U' + f'R = 0 \quad (2.124)$$

şeklinde elde edilir.

#### 2.4.1 Brans-Dicke Teorisi

Brans-Dicke teorisi bir skaler-tensör teoridir. Bu teoride gravitasyonel sabitin zamanla değiştiği fikrinden yola çıkılır. Teori 1961 yılında Robert H. Dicke ve Carl H. Brans tarafından geliştirilmiştir. (2.109) eyleminde yer alan fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlayarak bu teori kurulabilir:

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{16\pi} \quad (2.126)$$

$$h(\lambda) = \frac{\omega}{8\pi\lambda} \quad (2.127)$$

$$U(\lambda) = 0. \quad (2.128)$$

Burada  $\omega$  bir sabittir. Skaler-tensör teori eyleminde (2.126), (2.127) ve (2.128) eşitliklerini yerlerine yerleştirildiğinde Brans-Dicke eylemi

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\lambda}{16\pi} R - \frac{\omega}{16\pi\lambda} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu}\lambda)(\partial_{\nu}\lambda) \right] \quad (2.129)$$

şeklindedir. Brans-Dicke teorisinde skaler alan kütesidir fakat  $\omega \rightarrow \infty$  limitinde alanlar dinamik değildir ve teori bu limit altında genel görelilik teorisine dönüşmelidir. Güneş sistemi testlerinde  $\omega$ 'nın  $\omega > 500$  olması gerektiği sonucu çıkmaktadır.

## 2.4.2 Konformal Dönüşümler

Konformal dönüşümler metriği yerel olarak ölçeklendirmektedir ve ışıksal dönüşümleri değişmez bırakır. Burada konformal metrik tensör

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = 16\pi\tilde{G}f(\lambda)g_{\mu\nu} \quad (2.130)$$

şeklindedir. Burada  $\tilde{G}$  konformal dönüşüm altında Newton sabitidir. (2.130) metrik tensörün determinanı aşağıdaki şekildedir:

$$g = \frac{1}{(16\pi\tilde{G}f)^4} \tilde{g}. \quad (2.131)$$

Ricci skalerinin konformal dönüşümü

$$R \rightarrow \omega^2 \tilde{R} + 2(n-1) \tilde{g}^{\alpha\beta} \omega (\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \omega) - n(n-1) \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \omega \tilde{\nabla}_\beta \omega \quad (2.132)$$

şeklindedir. Burada  $\omega = (16\pi\tilde{G}f(\lambda))^{1/2}$  şeklinde tanımlıdır. (2.130) ve (2.131) eşitlikleri (2.110) eyleminde yerine yazılıp (2.132) dönüşümü de uygulandığında eylemin son hali

$$S_{JR} = \int \frac{d^4x \sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi\tilde{G}} \left[ \tilde{R} - \frac{3}{2} f^{-2}(\lambda) \tilde{g}^{\alpha\beta} \left( \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right)^2 (\tilde{\nabla}_\alpha \lambda) (\tilde{\nabla}_\beta \lambda) \right] \quad (2.133)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi konformal çerçevede Ricci skaler  $\lambda$ 'nın bir fonksiyonu ile çarpılmamıştır. Konformal çerçevede Einstein denklemleri konformal metriğe göre konvansyonel formu aldığından, bu çerçeveye bazen Einstein çerçevesi de denir.  $g_{\mu\nu}$  metriğine orijinal çerçeve Jordan çerçevesi adını alır.

Şimdi ise (2.111)' de yer alan  $S_\lambda$  eylemi konformal dönüşüm altında ele alındığında

$$S_\lambda = \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi\tilde{G}} \left( -\frac{h}{2} \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}}{f} (\tilde{\nabla}_\alpha \lambda)(\tilde{\nabla}_\beta \lambda) - \frac{U(\lambda)}{16\pi\tilde{G}f^2(\lambda)} \right) \quad (2.134)$$

şeklinde elde edilir. İlk olarak (2.110) ve (2.111) eylemleri incelenirse

$$S_{\mathcal{R}} + S_\lambda = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left( \frac{\tilde{R}}{16\pi\tilde{G}} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} (\tilde{\nabla}_\alpha \lambda)(\tilde{\nabla}_\beta \lambda) K(\lambda) - \frac{U(\lambda)}{(16\pi\tilde{G})^2 f^2(\lambda)} \right) \quad (2.135)$$

formunda olduğu görülür. Burada  $K(\lambda)$

$$K(\lambda) = \frac{1}{(16\pi\tilde{G})f^2} [fh + 3(f')^2] \quad (2.136)$$

şeklinde tanımlıdır. (2.135) eylemine bakıldığında yeni bir skaler alan tanımı yapılabileceği görülmektedir ve yeni skaler alan

$$\phi = \int K^{1/2} d\lambda \quad (2.137)$$

olarak alınır. (2.135) eyleminde (2.137) skaler alanı yerleştirildiğinde eylem

$$S_{\mathcal{R}} + S_\lambda = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left( \frac{\tilde{R}}{16\pi\tilde{G}} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} (\tilde{\nabla}_\alpha \phi)(\tilde{\nabla}_\beta \phi) - V(\phi) \right) \quad (2.138)$$

formunu alır. Burada  $V(\phi) = \frac{U(\lambda(\phi))}{(16\pi\tilde{G})^2 f^2(\lambda(\phi))}$  şeklinde tanımlıdır. Son olarak ise madde

durumunu ekleyebilmek için enerji-momentum tensörünün konformal dönüşüm altındaki formuna bakılmalıdır. Konformal dönüşüm altındaki enerji-momentum tensörü aşağıdaki şekildedir:

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = (16\pi\tilde{G}f)^{-1} T_{\mu\nu}^{(m)}. \quad (2.139)$$

Madde eyleminin  $\phi$  skaler alanına göre varyasyonu alındığında

$$\frac{\delta S_m}{\delta\phi} = -\frac{1}{2f} \frac{df}{d\phi} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}^{(m)} \sqrt{-\tilde{g}} \quad (2.140)$$

şeklinde elde edilir. (2.138)' de Einstein çerçevesindeki eylemin metriğe göre varyasyonu alındığında integrantın ilk terimi konformal dönüşüm altında Einstein tensörünü verecektir.  $S_\lambda$ 'nin varyasyonu ise

$$\delta S_\lambda = \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{2} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} \left[ \tilde{g}_{\mu\nu} \left( -\frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}}{2} (\tilde{\nabla}_\alpha \phi)(\tilde{\nabla}_\beta \phi) - V(\phi) \right) - (\tilde{\nabla}_\mu \phi)(\tilde{\nabla}_\nu \phi) \right] \quad (2.141)$$

şeklinindedir. (2.141) varyasyon ifadesinden  $\phi$  skaler alanı için enerji momentum tensörü

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(\phi)} = \tilde{g}_{\mu\nu} \left( -\frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}}{2} (\tilde{\nabla}_\alpha \phi)(\tilde{\nabla}_\beta \phi) - V(\phi) \right) - (\tilde{\nabla}_\mu \phi)(\tilde{\nabla}_\nu \phi) \quad (2.142)$$

formunda elde edilir. Buradan konformal dönüşüm altında Einstein alan denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi\tilde{G} \left[ \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} + \tilde{T}_{\mu\nu}^{(\phi)} \right]. \quad (2.143)$$

(2.143)' de elde edilen hareket denklemi metriğe göre hareket denklemdir. Şimdi ise  $\phi$  alanına göre hareket denklemi elde edilmek istenirse (2.109) eyleminin  $\phi$  alanına göre varyasyonu alınmalıdır. (2.138) eyleminin integrant ifadesinde ilk terimden varyasyona katkı gelmeyecektir. Sadece  $S_\lambda$  eyleminin varyasyonunu almak yeterlidir.  $S_\lambda$  eyleminin  $\phi$  alanına göre varyasyonu

$$\delta S_\lambda = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left( \tilde{\square}\phi - \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} \right) \delta\phi \quad (2.144)$$

şeklindedir. Madde eyleminin  $\phi$  skaler alanına göre varyasyonu (2.140) eşitliğinde gösterilmiştir. Toplam varyasyonda (2.140) ve (2.144) varyasyon ifadeleri yerleştirildiğinde  $\phi$  skaler alanı için hareket denklemi

$$\tilde{\square}\phi - \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = \frac{1}{2f} \frac{df}{d\phi} \tilde{T}^{(m)} \quad (2.145)$$

şeklinde elde edilir.

## 2.5 EK BOYUTLARDA EYLEM

Einstein alan denklemleri elde edilirken 4-boyutlu uzay-zaman da ele alınmıştır. Fakat ek boyutlar olduğu durumda gravitasyonel alan denklemlerinin nasıl olacağı bu bölümde ele alınmaktadır. Ek boyutlarda metrik aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$ds^2 = G_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + b^2(x) \gamma_{ij}(y) dy^i dy^j \quad (2.146)$$

Burada  $x^\mu$  4 boyutlu uzay-zamanı,  $y^i$  ek uzay boyutları için koordinatları ve  $\gamma_{ij}(y)$  ek boyutların oluşturduğu manifoldun metrik tensörünü göstermektedir. (A=0,1,2,3,5...)

Ek boyutların varlığı durumunda eylem

$$S = \int d^{4+d}x \sqrt{-G} \left[ \frac{R[G_{AB}]}{16\pi G_{4+d}} + \hat{L}_M \right] \quad (2.147)$$

şeklindedir. Burada G metrik tensörün determinanı ve  $G_{4+d}$  ek boyutlarda Newton' un gravitasyon sabitidir. (2.147) eylemi 4 boyutlu uzay-zaman ve ek boyutun bileşenlerine göre ayrılmak istenirse



$$\sqrt{-G} = b^d \sqrt{-g} \sqrt{\gamma} \quad (2.148)$$

$$R[G_{AB}] = R[g_{\mu\nu}] + b^{-2} R[\gamma_{ij}] - 2db^{-1} g^{\mu\sigma} \nabla_\mu \nabla_\sigma b - d(d-1) b^{-2} g^{\mu\sigma} (\nabla_\mu b)(\nabla_\sigma b) \quad (2.149)$$

ayrışımından yararlanılır. Burada  $\nabla_\mu$ , 4-boyutlu  $g_{\mu\nu}$  metriğine eşlik eden kovaryant türevidir. (2.148) ve (2.149) ifadeleri (2.147)' de yer alan eylem ifadesinde yerlerine yerleştirildiğinde

$$S = \int dx^{4+d} b^d \sqrt{-g} \sqrt{\gamma} \left\{ \frac{1}{16\pi G_{4+d}} (R[g_{\mu\nu}] + b^{-d} R[\gamma_{ij}] - 2db^{-1} g^{\mu\sigma} \nabla_\mu \nabla_\sigma b - d(d-1) b^{-2} g^{\mu\sigma} (\nabla_\mu b)(\nabla_\sigma b)) + \hat{L}_M \right\} \quad (2.150)$$

halini alır. Burada ek boyutların oluşturduğu manifoldun maksimal simetrik olduğu kabul edilmektedir. Bu kabule göre  $R[\gamma_{ij}]$  bir sabittir. Ek boyutların maksimal simetrik olduğu kabulü (2.150) eyleminde ek boyutlar üzerinden integralin kolayca alınmasını sağlar. İntegrasyon sonrasında (2.150) eylemi

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\nu}{16\pi G_{4+d}} (b^d R[g_{\mu\nu}] + b^{d-2} R[\gamma_{ij}] + d(d-1) b^{d-2} g^{\mu\sigma} (\nabla_\mu b)(\nabla_\sigma b)) + b^d \hat{L}_M \right\} \quad (2.151)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\nu$   $b=1$  iken ek boyutların hacmidir ve  $\nu = \int d^d y \sqrt{\gamma}$

şeklinindedir. Ayrıca  $\kappa = \frac{R[\gamma_{ij}]}{d(d-1)}$  şeklinde eğrilik parametresi tanımlanırsa (2.151) eylemi

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\nu}{16\pi G_{4+d}} (b^d R[g_{\mu\nu}] + b^{d-2} d(d-1) \kappa + d(d-1) b^{d-2} g^{\mu\sigma} (\nabla_\mu b)(\nabla_\sigma b)) + \nu b^d \hat{L}_M \right\} \quad (2.152)$$

halini alır. Ek boyutların varlığı durumundaki (2.145) eylemi 4-boyutlu uzay zamanda (2.152) eylemine indirgenmiştir. (2.152) eylemi Hilbert eylemi ile kıyaslandığında

$$\frac{1}{16\pi G_4} = \frac{\nu}{16\pi G_{4+d}} \quad (2.153)$$

şeklinde bulunur. Buradan, Newton' un gravitasyon sabitinin 4+d boyutlu uzay-zamanda ek boyutların hacmine bağlı olarak değiştiği sonucu elde edilmiştir.

Eylemin daha konvansyonel bir formda görünmesi için aşağıdaki değişken değişimi ve konformal dönüşüm uygulanır:

$$\beta(x) = \ln b(x) \quad (2.154)$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2d\beta} g_{\mu\nu} \quad (2.155)$$

Bu dönüşüm ile metrik tensörün determinanı

$$\sqrt{-g} = e^{-2d\beta} \sqrt{-\tilde{g}} \quad (2.156)$$

halini alır. (2.152) eylem ifadesinde (2.132) ve (2.156) eşitlikleri yerleştirildiğinde eylem

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \frac{\nu}{16\pi G_{4+d}} \left( \tilde{R} + d(d-1)\kappa e^{-(d+2)\beta} - \frac{d}{2}(d+2)\tilde{g}^{\mu\sigma}(\tilde{\nabla}_\mu\beta)(\tilde{\nabla}_\sigma\beta) \right) + \nu e^{-d\beta} \hat{L} \right\} \quad (2.157)$$

şeklinde elde edilir. (2.157) eylemine bakıldığında skaler-tensör teoriler için yazılan eylemle aynı formdadır. Değişkenler bir kez daha değiştirilir ve kanonik olarak normalize edilmiş  $\phi$

skaler alanına  $\phi = \sqrt{\frac{d(d+2)}{2}} \bar{M}_{pl} \beta$  şeklinde geçilirse (burada  $\bar{M}_{pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G_4}}$  indirgenmiş

Planck kütesidir.) (2.157) eylemi

$$\begin{aligned}
S = \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \frac{1}{16\pi G_4} R[\tilde{g}_{\mu\nu}] + \frac{1}{2} d(d-1) \kappa \bar{M}_{Pl}^{-2} e^{-\sqrt{\frac{2(d+2)}{d}} \frac{\phi}{\bar{M}_{Pl}}} \right. \\
\left. - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\mu \phi)(\tilde{\nabla}_\nu \phi) + \nu e^{-\sqrt{\frac{2d}{(d+2)} \frac{\phi}{\bar{M}_{Pl}}} \hat{L}_M \right\}
\end{aligned} \tag{2.158}$$

formunu alır. Burada  $\phi$  skaler alanına dilaton veya radion adı verilir. (2.158) eylemine bakıldığında ek boyutlarda kendiliğinden skaler alanlar ortaya çıkmış olduğu görülmektedir.

## BÖLÜM 3

### PARÇACIK FİZİĞİNDE TEMEL ETKİLEŞMELER

#### 3.1 STANDART MODEL

Standart Model (SM) teorisi 1970 ile 1973 yılları arasında S. Weinberg ve A.Salam tarafından geliştirilmiştir. Bugüne kadar parçacık fiziğinde gerçekleştirilmiş deneylerle uyumluluk göstermiş bir teoridir. SM' e Weinberg-Salam Modeli de denilmektedir. SM, bu zamana kadar bulunan tüm temel parçacıkların birbiri ile etkileşmelerini açıklayan bir teoridir. Ayrıca SM' in doğada bulunan dört temel kuvvetin birleştirilmesinde önemli bir katkısı bulunmaktadır. SM ile dört temel kuvvet birleştirilemese de elektromanyetik ve zayıf kuvvetlerin birleştirilmesi kısmen de olsa başarılabilmektedir.

SM kuantum mekaniği ve özel görelilik kuramını içeren kuantum alan teorisini temel alan bir ayar modelidir. Teoride parçacıklar Fock uzayında operatörler şeklinde temsil edilirler. Parçacıkların serbest hareketlerini ve birbirleriyle olan etkileşmelerini betimleyen nicelik lagrange yoğunluğudur. Bu çalışmada lagrange yoğunluğu lagranjiyen olarak adlandırılacaktır. Lagranjiyen kinetik ve potansiyel olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Kinetik terimi, parçacıkların serbest hareket enerjilerini içerir. Potansiyel terimi ise parçacıkların birbirleri ile olan etkileşimlerini içerir ve etkileşme lagranjiyeni olarak da adlandırılır. Kuantum alan teorisi etkileşme lagranjiyeni ifadesini vermemektedir. Etkileşme lagranjiyenini belirleyebilmek için başka bir teori daha gerekmektedir. Etkileşme lagranjiyeninin bulunmasında “ayar teorileri” olarak bilinen teoriler önemli bir araçtır. Ayar teorisi SM ile uyumludur. Bu teoriler lagranjiyenin ayar dönüşümleri altında değişmez kalması fikrine dayanmaktadır. Ayar dönüşümleri eylemi değişmez bırakmaktadır.

Ayar dönüşümleri global ayar ve yerel ayar dönüşümleri olmak üzere ikiye ayrılır. Global ayar dönüşümlerinde dönüşüm uzay zamandan bağımsızdır. Yerel ayar dönüşümünde ise dönüşüm uzay-zamanın bir fonksiyonu şeklindedir. Bu herhangi bir  $\psi$  alanı için:

$$\psi \rightarrow \psi \exp(i\theta), \quad \theta \in R \quad \text{Global ayar dönüşümü} \quad (3.1)$$

$$\psi \rightarrow \psi \exp(i\theta(x)) \quad \text{Yerel ayar dönüşümü} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Lagranjiyenin ayar dönüşümleri altında değişmez kalması Noether teoremi nedeniyle korunumlu nicelikler meydana getirir. Bu durumdan yola çıkarak, global ayar simetrisi yük korunum yasasını ortaya çıkartır. Yerel ayar simetrisinin varlığı ise gözlemlenebilir kuvvetlerin varlığına yol açar. Tüm temel etkileşmelerin bu şekilde elde edilebileceğine inanılmaktadır.

SM' de temel parçacıkların birbirleriyle olan etkileşmeleri yerel ayar simetrisi ile ele alınır. U(1) grubu elektromanyetik ve SU(2) grubu zayıf kuvvetlerin ayar grubudur. Kuvvetli etkileşmeleri de modele dahil etmek istersek SU(3) ayar grubu ele alınmalıdır. Buna göre SM'in ayar simetrisi  $U_Y(1) \times SU_L(2) \times SU_C(3)$  şeklindedir.

### 3.2 ELEKTROZAYIF ETKİLEŞMELERİN STANDART MODELİ

Elektrozayıf etkileşmelerin standart modeli, üç lepton ve üç kuark ailesi arasında elektromanyetik ve zayıf etkileşmeleri açıklayan bir modeldir. Modelin ayar grubu  $U_Y(1) \times SU_L(2)$  ayar grubudur. Model üç lepton ve üçkuark ailesini, kuvvet taşıyıcı parçacıkları olan  $W^+$ ,  $W^-$ , Z ve  $\gamma$  bozonlarını ve tüm parçacıklara kütle kazandıran Higgs skaler bozonunu içermektedir.

Çizelge 3.1 Temel fermiyon aileleri.

	<i>1. Aile</i>	<i>2. Aile</i>	<i>3. Aile</i>
<b>Leptonlar</b>	$\Psi_L^1 = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$ $\Psi_R^1 = e_R$	$\Psi_L^2 = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$ $\Psi_R^2 = \mu_R$	$\Psi_L^3 = \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$ $\Psi_R^3 = \tau_R$
<b>Kuarklar</b>	$q_L^1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ $u_R, d_R$	$q_L^2 = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$ $c_R, s_R$	$q_L^3 = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$ $t_R, b_R$

Çizelge 2.1’ de görüldüğü gibi temel fermiyon aileleri farklı multipler ile gösterilir. Sol-elli fermiyonlar dupletler ile, sağ-elli fermiyonlar ise singletler ile gösterilir. Tüm lepton ve kuark çeşnisinin bir de antiparçacıkları mevcuttur. Model de antiparçacıkları ile birlikte toplam dört adet skaler bozon mevcuttur. Skaler bozon alanları bir izospin dupletidir ve

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ile gösterilir.

Model de yer alan temel fermiyon ve skaler bozon alanlarının izospin, hiperyük ve elektrik yükleri çizelge 3.2 ile verilmiştir. Zayıf izospin, hiperyük ve elektrik yükleri birbirine Gell-Mann-Nishijima formülü ile bağlıdır:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad Y = B + S. \quad (3.4)$$

S: Acayıplık katsayısı

B: Baryon sayısı

$I_3$ : Zayıf izospin

Y: Zayıf hiperyük

Q: Elektrik yükü

Çizelge 3.2 Temel fermiyon ve skaler bozon alanlarının zayıf izospin, zayıf hiperyük ve elektrik yükleri.

			$I^w$	$I_3^w$	$Y$	$Q$
$\Psi_L^1$	$\Psi_L^2$	$\Psi_L^3$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	0	0	-2	-1
$q_L^1$	$q_L^2$	$q_L^3$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$u_R$	$c_R$	$t_R$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d_R$	$s_R$	$b_R$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
		$\Phi$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	+1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Başlangıçta elektrozayıf etkileşmelerin lagranjiyeni, lepton, kuark ve skaler bozon alanlarının kinetik terimlerini, skaler bozonların etkileşmelerini içeren Yukawa teriminden oluşmaktadır.

Birinci fermiyon ailesi için bu lagranjiyen

$$L_0 = L_0^l + L_0^q + L_0^s + L_0^Y \quad (3.5)$$

$$L_0^l = i\bar{\Psi}_L^1 \partial \Psi_L^1 + i\bar{e}_R \partial e_R \quad (3.6)$$

$$L_0^q = i\bar{q}_L^1 \partial q_L^1 + i\bar{u}_R \partial u_R + i\bar{d}_R \partial d_R \quad (3.7)$$

$$L_0^s = (\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (3.8)$$

$$L_0^Y = -f_e (\bar{\Psi}_L^1 \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger \Psi_L^1) - f_d (\bar{q}_L^1 \Phi d_R + \bar{d}_R \Phi^\dagger q_L^1) - f_u (\bar{q}_L^1 \Phi^c u_R + \bar{u}_R \Phi^c q_L^1) \quad (3.9)$$

şeklindedir. Burada,

$L_0^l$  : Lepton alanlarının kinetik terimi,

$L_0^q$  : Kuark alanlarının kinetik terimi,

$L_0^s$  : Skaler bozonların kinetik ve potansiyel terimi,

$L_0^Y$  : Yukawa terimidir.

C üst indisi ise yük eşlenik anlamındadır.

(3.5) lagranjiyeni  $U_Y(1) \times SU_L(2)$  global ayar dönüşümü altında değişmez. Bu lagranjiyen içerisinde temel fermiyonların kütle terimleri yazılmaz. Çünkü kütle terimi  $U_Y(1) \times SU_L(2)$  global ayar simetrisine uymaz. Skaler bozonların potansiyel ifadesine bakıldığında kütle terimine benzer bir ifade olmasına rağmen Klein-Gordan lagranjiyeninde bulunan kütle terimine göre eksi işareti farkı olduğu anlaşılır.

Temel fermiyon ve skaler bozon alanları için  $U_Y(1) \times SU_L(2)$  yerel ayar dönüşümleri

$$\Psi'_L = \exp\left(-i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}(x)\right) \exp\left(i \frac{g'}{2} \theta(x)\right) \Psi_L \quad (3.10)$$

$$\Psi'_R = \exp(i g' \theta(x)) \Psi_R \quad (3.11)$$

$$\Phi' = \exp\left(-i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}(x)\right) \exp\left(-i \frac{g'}{2} \theta(x)\right) \Phi \quad (3.12)$$

biçiminde elde edilir. (3.5) lagranjiyeni yerel ayar dönüşümleri altında değişmez değildir. Yerel ayar simetrisini bozan terimler kısmi türevi içeren terimlerdir. Lagranjiyenin yerel ayar dönüşümü altında değişmez kalabilmesi için kovaryant türevin tanımlanması gerekmektedir.  $\partial_\mu$  kısmi türevleri alanlar ile aynı şekilde dönüşen  $D_\mu$  kovaryant türevleri ile yer değiştirmelidir.  $D_\mu$  kovaryant türevi  $\Phi$ ,  $\Psi_{1L}$  ve  $q_{1L}$  alanlarının kinetik terimlerinde

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu + i \frac{g'}{2} Y B_\mu \quad (3.13)$$



biçiminde,  $e_R$ ,  $u_R$  ve  $d_R$  alanlarının kinetik terimlerinde ise,

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y B_\mu \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanır.  $\vec{A}_\mu$  ve  $B_\mu$  alanları yerel ayar değişmezliğini sağlayabilmek için teoriye koyulmuştur.  $\vec{A}_\mu$  ve  $B_\mu$  alanları yerel ayar dönüşümleri altında

$$\vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu + \partial_\mu \vec{\alpha}(x) + g \vec{\alpha} \times \vec{A}_\mu \quad (3.15)$$

$$B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \theta(x) \quad (3.16)$$

biçiminde dönüşürler. Kovaryant türevi ile dahil edilen yeni alanların kinetik terimlerini lagranjiyene eklemek gerekir.  $\vec{A}_\mu$  ve  $B_\mu$  alanlarının kinetik terimlerini içeren lagranjiyen

$$L_0^V = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} \quad (3.17)$$

biçiminde yazılır. Burada;

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (3.18)$$

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu - g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \quad (3.19)$$

şeklindedir.  $F_{\mu\nu}$  ve  $\vec{G}_{\mu\nu}$  tensörlerinin yerel ayar dönüşümleri;

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

$$\vec{G}_{\mu\nu} \rightarrow \vec{G}_{\mu\nu} + g (\vec{\alpha} \times \vec{G}_{\mu\nu}) \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilir. Tüm bu ayar dönüşümleri dikkate alındığında lagranjiyen

$$L = i\bar{\Psi}_L \mathcal{D}\Psi_L^1 + i\bar{e}_R \mathcal{D}e_R + i\bar{q}_L^1 \mathcal{D}q_L^1 + i\bar{u}_R \mathcal{D}u_R + i\bar{d}_R \mathcal{D}d_R \quad (3.22)$$

$$+ (D_\mu \Phi^\dagger)(D^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 + L_0^Y + L_0^V$$

şeklinde yazılır. Burada  $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$  olarak kullanılmaktadır.

(3.22) lagranjiyeni yerel ayar dönüşümü altında invaryanttır. Bu lagranjiyen lepton, kuark ve skaler ayar bozonlarının kütle terimini içermemektedir. Ancak elektron ve u kuarkın kütleli parçacıklar olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, karşılaşılan problem kendiliğinden simetri kırılması ve Higgs mekanizması ile çözümlenir.

$L_0^S$  lagranjiyeninde yer alan skaler alanların potansiyel terimi ele alınırsa:

$$V(\Phi^\dagger, \Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (3.23)$$

şeklinindedir. Burada vakumun  $\Phi^\dagger$ ,  $\Phi^0$ ,  $\Phi^{\dagger*}$ ,  $\Phi^{0*}$  alanları ile dolu olduğu kabul edilir.  $V(\Phi^\dagger, \Phi)$  potansiyelini minimum yapan değerler aranmaktadır. Potansiyelin minimum olduğu taban durumu, potansiyelin türevinin sıfır olması koşulundan bulunabilir:

$$\frac{\partial V(\Phi^\dagger, \Phi)}{\partial \Phi} = 0. \quad (3.24)$$

Potansiyelin

$$\Phi^\dagger = \Phi^0 = \Phi^{\dagger*} = \Phi^{0*} = 0 \quad (3.25)$$

da bir yerel minimumu ve

$$\Phi^- \Phi^+ + |\Phi^0|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (3.26)$$

üzerinde minimumu vardır.  $\Phi^\dagger$ ,  $\Phi^0$ ,  $\Phi^{\dagger*}$ ,  $\Phi^{0*}$  alanları fiziksel alanlara karşılık gelmez. Fiziksel alanlar bu alanları bir karışımıdır. Yeni  $\bar{\xi}$ , H alanlarını

$$\Phi = \exp\left(i\frac{\bar{\tau}\cdot\bar{\xi}}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \eta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.27)$$

olacak şekilde seçersek potansiyelin minimum olduğu durumda  $\bar{\xi} = 0$  ve  $H(x) = 0$  şeklinde olacaktır. Bu durumda  $\bar{\xi}$  ve  $H(x)$  alanları fizikseldir ve taban durumundaki dejenereliği ortadan kalkar.

Yeni alanların tanımlanması ile  $U_Y(1) \times SU_L(2)$  simetrisi kırılır. Geriye sadece  $U_{em}(1)$  simetrisi kalır. Simetri kırılması hiçbir dış etken olmadan gerçekleştiğinden “kendiliğinden simetri kırılması” adı verilmektedir. Yeni tanımlanan  $\bar{\xi}$  bozonlarına Goldstone bozonları ve H bozonuna Higgs bozonu adı verilir.

Kütle terimleri  $U_Y(1) \times SU_L(2)$  yerel ayar simetrisine uymamaktadır. Ortaya çıkan kendiliğinden simetri kırılması başlangıçta kütesiz olarak alınan fermionların ve ayar bozonlarının kütle kazanmasını sağlamaktadır. Elektromanyetik kuvvet çok uzun erimli olduğundan ayar bozonu olan foton kütesizdir. Zayıf kuvvet ise çok kısa erimli olduğundan ayar bozonları kütleli olmalıdır. Ayar bozonlarının üçünün kütleli olması nedeniyle lagranjiyenin toplam serbestlik derecesi üç derece artar. Ancak lagranjiyenin toplam serbestlik derecesi değişmemelidir. Bu durumu ortadan kaldırmak için bir ayar seçimi yapılır.

$$\Phi' = \exp\left(-i\frac{\bar{\tau}\cdot\bar{\xi}}{2}\right)\Phi \quad (3.28)$$

şeklinde ayar dönüşümü seçilsin. Bu ayar seçimine üniter ayarı denir. Üniter ayar seçimi kütesiz Goldstone bozonlarını yok eder ve ayar bozonları kütle kazanır. Üniter ayar seçimi ile skaler alan

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta + H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

şeklini alır. Üniter ayar seçimi sonrası yeni alanlar “ ' ” indisi ile gösterilir. Ancak bundan sonra “ ' ” indisi aksi söylenmediği sürece kullanılmayacaktır ve alanlar üniter ayar seçimi altında alınacaktır. Skaler bozonların kinetik terimi;

$$(D_\mu \Phi^\dagger)(D^\mu \Phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}(\eta + H)^2 \left[ \frac{g^2}{4} \bar{A}_\mu \cdot \bar{A}^\mu + \frac{g'^2}{4} (B_\mu B^\mu) - \frac{gg'}{2} A_\mu^3 B^\mu \right] \quad (3.30)$$

şeklinde elde edilir. (3.30) lagranjiyeninde bulunan bozon alanları olan  $A_\mu^i$  ( $i=1,2,3$ ) ve  $B_\mu$  alanları fiziksel alanlar değildir. Fiziksel alanlar (kütle özdurumları) bu alanların bir karşımıdır.

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad (3.31)$$

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \quad (3.32)$$

$$Z_\mu = A_\mu^3 \cos(\theta_w) - B_\mu \sin(\theta_w) \quad (3.33)$$

$$A_\mu = A_\mu^3 \sin(\theta_w) + B_\mu \cos(\theta_w) \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\sin(\theta_w) = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad (3.35)$$

$$\cos(\theta_w) = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad (3.36)$$

şeklindedir.  $\theta_w$  Weinberg açısı veya zayıf karışım açısı adını alır.  $W_\mu^\pm$  ve  $Z_\mu$  fiziksel bozonları zayıf kuvvetin taşıyıcı bozonları olan, W ve Z bozonları olarak adlandırılır.  $A_\mu$  ise elektromanyetik kuvvetin taşıyıcı bozonu olan fotondur. (3.30) kinetik teriminin yeni fiziksel alanlara göre son hali;

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi^\dagger)(D^\mu \Phi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \left(\frac{g\eta}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}\right)^2 Z_\mu Z^\mu \\ &+ \frac{1}{2}(H^2 + 2\eta H) \left( \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{(g^2 + g'^2)}{4} Z_\mu Z^\mu \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

şeklini alır. Buradan ayar bozonlarının kütleleri;

$$m_W = \frac{g\eta}{2}, \quad m_Z = \frac{\eta\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}, \quad m_A = 0 \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.37) ifadesine bakıldığında W ve Z bozonunun Higgs bozonu ile üçlü ve dörtlü etkileşmeleri görülmektedir.

Üçlü ayar seçimi sonrasında skaler bozonların potansiyel terimine bakıldığında;

$$V(\Phi^\dagger, \Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 = \frac{-\mu^2}{4\lambda} + \mu^2 H^2 + (\eta\lambda) H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 \quad (3.39)$$

olduğu görülür. Bu ifadeden Higgs bozonunun kendisi ile ikili, üçlü ve dörtlü etkileşmeleri görülmektedir.

Skaler Klein-Gordon lagranjyeni göz önüne alındığında Higgs bozonunun kütle terimi (3.39) ifadesinden

$$m_H = \sqrt{2}\mu \quad (3.40)$$

şeklinde alınır.

Ayar bozonlarının birbirleri ile etkileşmelerini içeren  $L_0^V$  kinetik terimi üç parça halinde yazıldığında

$$L_0^V = L_1 + L_2 + L_3. \quad (3.41)$$

$$L_1 = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^i A_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

$$L_2 = -\frac{1}{2} g \varepsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k A_i^{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

$$L_3 = -\frac{1}{4} g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} A_\mu^j A_\nu^k A_l^\mu A_m^\nu. \quad (3.44)$$

halini alır.  $F_{\mu\nu}$  elektromanyetik alan tensörüdür.  $A_{\mu\nu}^i$  ise

$$A_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i \quad (3.45)$$

şeklinde tanımlanır.  $L_0^V$  lagranjiyeni fiziksel alanlar cinsinden tanımlanmalıdır. Bu nedenle alanların alan tensörleri aşağıdaki şekilde verilir:

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.46)$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu. \quad (3.47)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu. \quad (3.48)$$

Burada  $W$ ,  $W^-$  anlamında kullanılmıştır. Yapılan tüm tanımlamaları  $L_0^V$  lagranjiyenine yerleştirildiğinde:

$$L_1 = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \quad (3.49)$$

$$L_2 = -igW^{\mu\dagger}W^\nu \left( \sin\theta_w A_{\mu\nu} + \cos\theta_w Z_{\mu\nu} \right) - ig \left( W^\mu W_{\mu\nu}^\dagger - W^{\mu\dagger} W_{\mu\nu} \right) \left( \sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu \right) \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} L_3 = & -\frac{1}{2}g^2 \left( W_\mu^\dagger W^\mu W_\nu^\dagger W^\nu - W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger W^\nu W_\nu \right) \\ & - g^2 W_\mu^\dagger W^\mu \left( \sin^2\theta_w A_\nu A^\nu + \cos^2\theta_w Z_\nu Z^\nu + 2\sin\theta_w \cos\theta_w A_\nu Z^\nu \right) \\ & + g^2 W_\mu^\dagger W_\nu \left[ \sin^2\theta_w A^\mu A^\nu + \cos^2\theta_w Z^\mu Z^\nu + \sin\theta_w \cos\theta_w \left( A^\mu Z^\nu + A^\nu Z^\mu \right) \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

şeklinde elde edilir.

Üç lepton ve üç kuark ailelerinin kinetik terimleri:

$$L^f = L^l + L^q. \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} L^l = & \sum_{j=1}^3 i\bar{\Psi}_L^j \partial \Psi_L^j + \sum_{j=1}^3 i\bar{\Psi}_R^j \partial \Psi_R^j + \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{\nu}_{\mu L} & \bar{\nu}_{\tau L} \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} W_\mu^- + h.c. \\ & + \left( \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \begin{pmatrix} \bar{e} & \bar{\mu} & \bar{\tau} \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} A_\mu - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{\nu}_{\mu L} & \bar{\nu}_{\tau L} \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} Z_\mu \\ & - \sqrt{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} \bar{e} & \bar{\mu} & \bar{\tau} \end{pmatrix} \gamma^\mu \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w + \frac{Y_5}{2} \right) \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} Z_\mu \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
L^g = & (\bar{u} \quad \bar{d} \quad \bar{s} \quad \bar{c} \quad \bar{b} \quad \bar{t}) i\partial \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \\ t \end{pmatrix} - \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \quad \bar{c}_L \quad \bar{t}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W_\mu^- + h.c. \\
& - \frac{2}{3} \left( \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t}) \gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} A_\mu + \frac{1}{3} \left( \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) (\bar{d} \quad \bar{s} \quad \bar{b}) \gamma^\mu \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} A_\mu \\
& - \sqrt{g^2 + g'^2} (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t}) \gamma^\mu \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right) - \frac{\gamma_5}{2} \right] \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} Z_\mu \\
& - \sqrt{g^2 + g'^2} (\bar{d} \quad \bar{s} \quad \bar{b}) \gamma^\mu \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) + \frac{\gamma_5}{2} \right] \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} Z_\mu
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Burada h.c. solunda bulunan ifadesinin hermitsel eşleniği anlamında kullanılmıştır. “L” veya “R” alt indisi bulunmayan fermiyon alanlarının, hem sol hemde sağ elli durumları anlaşılmalıdır.

Üç lepton ve üç kuark ailesi için Yukawa lagranjyeni

$$\begin{aligned}
L^Y = & -f_e (\bar{\Psi}_L^1 \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger \Psi_L^1) - f_\mu (\bar{\Psi}_L^2 \Phi \mu_R + \bar{\mu}_R \Phi^\dagger \Psi_L^2) - f_\tau (\bar{\Psi}_L^3 \Phi \tau_R + \bar{\tau}_R \Phi^\dagger \Psi_L^3) \\
& - f_d (\bar{q}_L^1 \Phi d_R + \bar{d}_R \Phi^\dagger q_L^1) - f_u (\bar{q}_L^1 \Phi^c u_R + \bar{u}_R \Phi^{c\dagger} q_L^1) - f_s (\bar{q}_L^2 \Phi s_R + \bar{s}_R \Phi^\dagger q_L^2) \\
& - f_c (\bar{q}_L^2 \Phi^c c_R + \bar{c}_R \Phi^{c\dagger} q_L^2) - f_b (\bar{q}_L^3 \Phi b_R + \bar{b}_R \Phi^\dagger q_L^3) - f_t (\bar{q}_L^3 \Phi^c t_R + \bar{t}_R \Phi^{c\dagger} q_L^3) \\
& - f_{ds} (\bar{q}_L^1 \Phi s_R + \bar{s}_R \Phi^\dagger q_L^1) - f_{db} (\bar{q}_L^1 \Phi b_R + \bar{b}_R \Phi^\dagger q_L^1) - f_{uc} (\bar{q}_L^1 \Phi^c c_R + \bar{c}_R \Phi^{c\dagger} q_L^1) \\
& - f_{ut} (\bar{q}_L^1 \Phi^c t_R + \bar{t}_R \Phi^{c\dagger} q_L^1) - f_{sd} (\bar{q}_L^2 \Phi d_R + \bar{d}_R \Phi^\dagger q_L^2) - f_{sb} (\bar{q}_L^2 \Phi b_R + \bar{b}_R \Phi^\dagger q_L^2)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -f_{cu}(\bar{q}_L^2 \Phi^c u_R + \bar{u}_R \Phi^{c\dagger} q_L^2) - f_{ct}(\bar{q}_L^2 \Phi^c t_R + \bar{t}_R \Phi^{c\dagger} q_L^2) - f_{bd}(\bar{q}_L^3 \Phi d_R + \bar{d}_R \Phi^\dagger q_L^3) \\
& -f_{bs}(\bar{q}_L^3 \Phi s_R + \bar{s}_R \Phi^\dagger q_L^3) - f_{ub}(\bar{q}_L^3 \Phi^c u_R + \bar{u}_R \Phi^{c\dagger} q_L^3) - f_{uc}(\bar{q}_L^3 \Phi^c c_R + \bar{c}_R \Phi^{c\dagger} q_L^3) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Yukawa lagranjyeninde farklı lepton aileleri için etkileşme terimleri bulunmamaktadır. Ancak kuark ailelerinin çapraz terimleri bulunmaktadır. Bunu nedeni lepton aileleri için bu tür çapraz terimlerin lepton sayısının korunumu ile yasaklanmış olmasıdır.

## BÖLÜM 4

### PLANCK BİRİMLERİ

#### 4.1 YÜKSEK BOYUTLARDA KÜRELER

Üç-top  $B^3$

$$B^3(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \quad (3 \text{ boyutlu içi dolu küre}) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlıdır.  $B^3$ 'ün dış kabuğu  $S^2$  ile gösterilir ve iki-küre adını alır:

$$S^2(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2. \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) tanımlarının n boyutta genellemesi

$$B^n(R) : x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2 \leq R^2 \quad (4.3)$$

$$S^{n-1}(R) : x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2 = R^2 \quad (4.4)$$

şeklinde olacaktır.  $S^1$ 'in hacmi 2-boyutlu uzayda uzunluk,  $S^2$ 'nin hacmi ise 3-boyutlu uzayda alan vermektedir.  $S^1$  ve  $S^2$  kürelerinin hacimleri sırasıyla

$$Vol(S^1(R)) = 2\pi R \quad (4.5)$$

$$Vol(S^2(R)) = 4\pi R^2 \quad (4.6)$$

şeklindedir. Birim kürenin hacmi ile kürenin hacmi arasındaki ilişki

$$Vol(S^{n-1}(R)) = R^{n-1}Vol(S^{n-1}) \quad (4.7)$$

şeklindedir. Bu durumda birim kürelerin hacmi ile ilgilenilmesi yeterlidir. (4.7) denkleminin açık ifadesinin elde edilebilmesi için  $S^{n-1}$ ' in hacminin hesaplanması gereklidir.  $S^{n-1}$ ' in hacmini hesaplayabilmek için  $\mathbb{R}^n$  ele alınmalıdır.  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kartezyen koordinatlar ve  $r$  radyal koordinat olsun.  $r$  n-boyutlu kürenin yarıçapı olmak üzere

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlıdır. Aşağıdaki integral hesaplamada yardımcı olacaktır:

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} dx^1 dx^2 \dots dx^n e^{-r^2} \quad (4.9)$$

(4.8) eşitliği (4.9) integralinde yerine yazılır ve eksponansiyel terim parçalara ayrılırsa,  $I_n$  n tane Gaussiyen integralinin çarpımı şeklinde yazılır:

$$I_n = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-x_i^2} = (\sqrt{\pi})^n = \pi^{n/2} \quad (4.10)$$

İntegrali bir başka şekilde de alabiliriz. Hacmi  $dr$  kalınlığındaki küre kabuklarına bölüp, bu kabukların hacimleri toplanabilir.  $dr$  kalınlığındaki bir küresel kabuğun hacmi  $Vol(S^{n-1}(r))dr$  kadar olduğundan,

$$I_n = \int_0^{\infty} dr Vol(S^{n-1}(r)) e^{-r^2} \quad (4.11)$$

şeklinde olur. (4.7) ifadesi (4.11) integralinde yerine yazıldığında

$$I_n = \frac{Vol(S^{n-1})}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (4.12)$$

elde edilir. Burada  $\Gamma$ , gama fonksiyonudur. (4.10) ve (4.12) integrallerinden elde edilen sonuçlar eşitlendiğinde  $S^{n-1}$  birim küresinin hacmi

$$Vol(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir. (4.7) ifadesinde (4.13) eşitliği yerine yazıldığında

$$Vol(S^{n-1}(R)) = R^{n-1} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (4.14)$$

formunda olur. n-boyutlu içi dolu birim kürenin hacmi ise

$$Vol(B^n) = \int_0^1 Vol(S^{n-1}(r)) dr \quad (4.15)$$

şeklindedir. (4.15) integralinde (4.14) ifadesi yerine yazılıp hesaplanırsa, n-boyutlu içi dolu birim kürenin hacmi

$$Vol(B^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilir.

## 4.2 YÜKSEK BOYUTLARDA GRAVİTASYONEL ALANLAR

Bu bölümde herhangi bir sayıda uzaysal boyut için nokta bir gravitasyonel yükün oluşturduğu gravitasyonel alan hesaplanacaktır. Bu hesaplamanın yapılabilmesi için Gauss yasası ve

diverjans teoremi kullanılacaktır. Bu nedenle Gauss yasasının ve diverjans teoreminin yüksek boyutlarda geçerli olduğu gösterilmelidir.

Lineer Einstein denklemleri bölümünde metrik pertürbasyonun sağladığı  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$  denklemi elde edilmişti. Bu denklem kovaryant formdadır ve tüm boyutlar için geçerlidir. Burada  $T_{00} = \rho$  ve  $\bar{h}_{00} = -4\Phi$  şeklinde olması gerektiği bölüm 2' den bilinmektedir. Ayrıca gravitasyonel alan  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$  şeklinde tanımlıdır. Bu tanımlar lineer Einstein alan denkleminde yerine yazıldığında

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \quad (4.17)$$

şeklinde gravitasyonel alan için Gauss yasası elde edilir. Bu Gauss yasasının tüm boyutlar için geçerli olduğunu ispatlar.

Şimdi ise diverjans teoremi incelenecektir.  $\mathbb{R}^n$  uzayının n-boyutlu altuzayı  $V^n$  olsun ve  $\partial V^n$  ise bu altuzayın sınırı olsun.  $\vec{g}$  alanı  $\mathbb{R}^n$ ' deki bir vektör alanı ise

$$\int_{V^n} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \int_{\partial V^n} \vec{g} \cdot d\vec{A} \quad (4.18)$$

şeklinde olur. Burada  $\vec{A}$ ,  $\partial V^n$  üzerindeki ortogonal yüzey elemanıdır. (4.18) eşitliği diverjans teoreminin n-boyutta genellemesidir.

N uzaysal boyutun olduğu bir uzayda noktasal gravitasyonel bir yükün gravitasyonel alanını hesaplayalım. M kütleli  $S^{n-1}(r)$  küresinin merkezine yerleştirilmiş olsun.  $B^n(r)$  kürenin sınırlandığı hacim olmak üzere Gauss yasası

$$\int_{B^n} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \int_{B^n} dV \rho \quad (4.19)$$

şeklinde alınabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integral ifadesi toplam kütle verir. Sol taraf ise diverjans teoremini kullanarak

$$\int_{S^{n-1}(r)} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM \quad (4.20)$$

şeklinde elde edilir. Gravitasyonel alanın  $S^{n-1}(r)$  üzerinde sabit olduğu kabul edilirse (4.20) integral ifadesi

$$\rho(r) \text{Vol}(S^{n-1}(r)) = -4\pi GM \quad (4.21)$$

şeklinde elde edilir. (4.14) eşitliği (4.21)' de yerine yazıldığında, n-boyutta gravitasyonel alan

$$g(r) = -\frac{2G\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2-1}} \frac{M}{r^{n-1}} \quad (4.22)$$

şeklinde elde edilir. n=3 için gravitasyonel alanın ters kare yasası elde edileceği (4.22) denkleminde aşikardır.

### 4.3 GRAVİTASYON VE PLANCK UZUNLUKLARI

Gravitasyon genel görelilik kuramı ile açıklanmaktadır fakat gravitasyonel alanlar Newton limiti altında Newton' un gravitasyon teorisine indirgenmektedir. Yüksek boyutlarda Planck uzunluğu ve onun gravitasyonel sabitle olan ilişkisi incelenirken Newton' un gravitasyon teorisini kullanmak büyük kolaylık sağlar. Newton' un gravitasyon teorisine göre 4 boyutlu uzay-zamanda aralarında  $r$  kadar uzaklık olan  $m_1$  ve  $m_2$  kütleli iki parçacık birbirlerine

$$|\vec{F}^{(4)}| = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (4.23)$$

kadar çekim kuvveti uygularlar. Burada evrensel çekim sabiti olan  $G$ ' nin sayısal değeri deneysel olarak belirlenir ve bu değer  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{N.m^2}{(kg)^2}$  şeklinde ölçülmüştür.  $G$ ' nin birimi,

$$[G] = [Kuvvet] \frac{L^2}{M^2} = \frac{ML}{T^2} \frac{L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2} \quad (4.24)$$

şeklindedir ve buradan G' nin değeri  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg.s^2}$  olarak da yazılabilir. Burada L uzunluk birimi, M kütle birimi ve T ise zaman birimidir.  $c$  ve  $\hbar$ ' nin birimleri,

$$[c] = \frac{L}{T} \quad (4.25)$$

$$[\hbar] = \frac{ML^2}{T} \quad (4.26)$$

şeklindedir.

Gravitasyon teorisi çalışmalarında doğal bir birim sistemi kullanmak uygun olacağından temel birimler olan uzunluk, kütle ve zaman kullanarak  $c$ ,  $\hbar$  ve G sabitlerinin değerini 1 yapacak şekilde yeni bir birim sistemi tanımlanır. Bu yeni birim sistemi Planck uzunluğu  $\ell_p$ , Planck zamanı  $t_{pl}$  ve Planck kütlesi  $m_{pl}$  olarak adlandırılır. Yeni birim sisteminde  $c$ ,  $\hbar$  ve G sabitleri

$$G = 1 \frac{\ell_{pl}^3}{m_{pl} t_{pl}^2} \quad (4.27)$$

$$c = 1 \frac{\ell_{pl}}{t_{pl}} \quad (4.28)$$

$$\hbar = 1 \frac{m_{pl} \ell_{pl}^2}{t_{pl}} \quad (4.29)$$

şeklindedir. Planck uzunluğu  $\ell_{pl}$ , Planck zamanı  $t_{pl}$  ve Planck kütlesi  $m_{pl}$  temel birim sistemindeki değerleri (4.27), (4.28) ve (4.29) eşitliklerinden

$$\ell_{Pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,61 \times 10^{-33} \text{ cm} \quad (4.30)$$

$$t_{Pl} = \frac{\ell_{Pl}}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,4 \times 10^{-44} \text{ s} \quad (4.31)$$

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,17 \times 10^{-5} \text{ g} \quad (4.32)$$

şeklinde elde edilir. (4.30) ve (4.31) eşitliklerinde elde edilen değerler çok küçüktür ve kuantum gravitenin etkilerinin önemli olduğu değerlerdir.  $m_{Pl}$  Planck kütlesi küçük bir kütle olarak elde edilmesine karşın temel parçacıkların kütleleri ile kıyaslandığında oldukça büyük bir değerdir.

#### 4.4 GRAVİTASYONEL POTANSİYELLER

Yüksek boyutlarda gravitasyonel sabitlerin nasıl değiştiğini inceleyebilmek için Newton' un gravitasyon teorisini kullanmak yeterlidir. Birim test parçacığına etki eden gravitasyonel alanın test parçacığına uyguladığı kuvvet  $\vec{g}$  olsun.  $\Phi_g$  gravitasyonel potansiyel olmak üzere

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi_g \quad (4.33)$$

olarak tanımlanır.  $\Phi_g$  gravitasyonel potansiyelinin birimi (4.33) denkleminde

$$\frac{[Kuvvet]}{M} = \frac{[\Phi_g]}{L} \Rightarrow [\Phi_g] = \frac{[Enerji]}{M} \quad (4.34)$$

şeklinde bulunur. Gravitasyonel potansiyelin birimi tüm boyutlar için aynı şekildedir (Zwiebach 2004). (4.33) denklemini, statik gravitasyonel alanda kapalı bir yol boyunca hareket eden bir parçacık için gravitasyonel alana karşı yapılan işin sıfır olduğunu ifade eder. (4.17) eşitliğinden 4-boyut uzay-zamanda noktasal bir kütle için  $\Phi_g$  gravitasyonel potansiyeli



$$\Phi_g^{(4)} = -\frac{GM}{r} \quad (4.35)$$

şeklinde elde edilir. (2.2)' de yer alan Poisson denklemi  $\nabla^2\Phi_g^{(4)} = 4\pi G\rho_m$  şeklindedir. Poisson denklemi 4-boyutta doğru olmasına karşın diğer boyutlarda modifikasyon gerektirir. Poisson denkleminin her bir teriminin birimi incelendiğinde  $\rho_m$  kütle yoğunluğunun birimi boyuta bağlılık gösterir ancak  $\phi_g^{(n)}$  potansiyelinin birimi bütün boyutlarda aynıdır. Bu nedenle  $G$ ' nin birimi de boyuta bağlılık göstermek zorundadır. n-boyutta Poisson denklemi

$$\nabla^2\Phi_g^{(n)} = 4\pi G^{(n)}\rho_m \quad (4.36)$$

şeklindedir. Burada  $G^{(n)}$  n boyuttaki Newton sabitini göstermektedir.

#### 4.5 FARKLI BOYUTLARDA PLANCK UZUNLUĞU

Planck uzunluğu  $c$ ,  $\hbar$  ve  $G$  nicelikleri ile elde edilmektedir. Farklı boyutlarda Planck uzunluğunun elde edilebilmesi için  $G^{(n)}$ ' nin istenilen boyuta göre biriminin bilinmesi gerekmektedir. (4.36) denkleminin sağ tarafı tüm boyutlar için aynıdır. (4.36) denklemi 4 ve 5 boyut için yazılıp eşitlendiğinde

$$\left[G^{(5)}\right]\frac{M}{L^4} = \left[G^{(4)}\right]\frac{M}{L^3} \quad \Rightarrow \quad \left[G^{(5)}\right] = L\left[G^{(4)}\right] \quad (4.37)$$

şeklinde elde edilir. (4.30) eşitliğinden  $\left[G^{(4)}\right]$  niceliğinin  $c$ ,  $\hbar$  ve  $L$ ' ye göre birimi yazıldığında

$$\left[G^{(4)}\right] = \frac{[c]^3 L^2}{[\hbar]} \quad (4.38)$$

şeklindedir. (4.37)' da elde edilen sonuç (4.38) eşitliğinde yerine yazılırsa  $\left[G^{(5)}\right]$

$$[G^{(5)}] = \frac{[c]^3 L^3}{[\hbar]} \quad (4.39)$$

formunu alır. Buradan 5-boyutta Planck uzunluğu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$(\ell^{(5)})^3 = \frac{G^{(5)} \hbar}{c^3}. \quad (4.40)$$

5-boyutlu Planck uzunluğu 4-boyutlu Planck uzunluğuna bağlılığı ise,

$$(\ell_{Pl}^{(5)})^3 = (\ell_{Pl})^2 \frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} \quad (4.41)$$

şeklindedir. (4.41) denkleminin n-boyuta genellemesi,

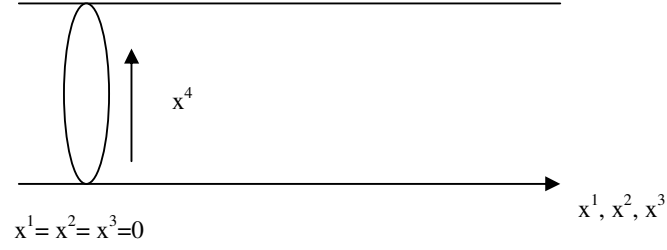
$$(\ell_{Pl}^{(n)})^{n-2} = (\ell_{Pl})^2 \frac{G^{(n)}}{G^{(4)}} \quad (4.42)$$

şeklinde olacaktır.

#### 4.6 GRAVİTASYONEL SABİT VE KOMPAKTLAŞTIRMA

Ek boyutların yapısı hakkında ilk olarak düşünülen çok küçük hacimli ve eğrilerek kompakt bir uzay olduklarıdır. Böylelikle 4-boyutlu uzay-zaman da gözlemlenemezler. Ek boyutların varlığı kabul edilirse bulunması gereken ilk nicelik efektif Planck uzunluğudur. Efektif Planck uzunluğunu elde edebilmek için gravitasyonel sabitler ek boyutların varlığı durumunda incelenmelidirler.

İlk olarak 5-boyutlu uzay-zaman ele alınmıştır. Beşinci boyut R yarıçaplı bir çember olsun. Çok küçük hacimli ve kompakt eğri bir ek boyutun varlığında 5 boyutlu temel gravitasyonel sabit hesaplanırsa, ek boyutun büyüklüğünden de katkı gelmesi beklenmektedir.



Şekil 4.1 5-boyutlu uzay-zaman tasviri.

Şekil 4.1' de  $(x^1, x^2, x^3)$  3-boyutlu uzay-zamanı göstermektedir ve  $x^4$  ise çevresi  $(2\pi R)$  olan kompaktlaştırılmış ek boyuttur. Bir kütle tarafından meydana getirilen potansiyeli inceleyebilmek için toplam kütlesi  $M$  olan düzgün bir halka  $x^1 = x^2 = x^3 = 0$  çemberi çevresine sarılır ve  $x^4$  yönü boyunca sabit bir kütle dağılımı elde edilir. Böylece potansiyel elde edilir. Burada potansiyel  $x^4$  koordinatından bağımsızdır. Toplam  $M$  kütlesi

$$M = 2\pi Rm \quad (4.43)$$

şeklindedir ve burada  $m$  birim uzunluk başına kütledir. Beş boyutta kütle yoğunluğu

$$\rho^{(5)} = m\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \quad (4.44)$$

formundadır. Burada  $[\rho^{(5)}] = M/L^5$  birimindedir.  $\rho^{(5)}$  kütle yoğunluğunun tüm uzaya göre integrali alındığında toplam kütleleri vermesi gerekmektedir. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^1 dx^2 dx^3 \int_0^{2\pi R} dx^4 \rho^{(5)} = m2\pi R \quad (4.45)$$

elde edilir. Efektif olarak 4-boyutlu uzay-zamanda bir gözlemci için kütle yoğunluğu aşağıdaki şekildedir:

$$\rho^{(4)} = M\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3). \quad (4.46)$$

Böyle bir gözlemci için kütle noktasaldır ve  $x^1 = x^2 = x^3 = 0$  noktasına yerleşmiştir. (4.44) ve (4.46) denklemleri karşılaştırıldığında  $\rho^{(5)}$  kütle yoğunluğu

$$\rho^{(5)} = \frac{1}{2\pi R} \rho^{(4)} \quad (4.47)$$

şeklinde elde edilir. (4.49) ile elde edilen kütle yoğunluğu (4.38) Poisson denkleminde yerine yazılırsa 5-boyutta Poisson denklemi

$$\nabla_{(5)}^2 \Phi_g^{(5)} = 4\pi G^{(5)} \rho_m^{(5)} = \frac{4\pi G^{(5)} \rho_m^{(4)}}{2\pi R} \quad (4.48)$$

haline gelir. Kütle dağılımı  $x^4$  koordinatından bağımsız olduğundan  $\phi_g^{(5)}$ , de bağımsız olur ve Laplacian 4 boyutlu hale gelir. 4-boyutlu efektif gravitasyonel potansiyel 5-boyutlu olana eşittir. (4.48) denklemi bu sonuçlar dikkate alınarak 4-boyutlu potansiyel denklemi ile kıyaslandığında

$$G^{(4)} = \frac{G^{(5)}}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad \frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = 2\pi R = \ell_c \quad (4.49)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\ell_c$  ek boyutun uzunluğudur. 5-boyutlu uzay-zaman ile 4-boyutlu uzay-zaman arasında gravitasyonel sabitlerin nasıl bir değişikliğe uğradığı elde edilmiştir. (4.49) denkleminin birden çok ek boyutun olduğu duruma genellemesi aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{G^{(n)}}{G^{(4)}} = (\ell_c)^{n-4}. \quad (4.50)$$

Burada  $\ell_c$  her bir ek boyutun ortak olan uzunluğudur. Eğer ek boyutlar farklı yarı çaplı çemberlerden oluşuyorsa, her bir ek boyut için  $\ell_c$  uzunlukları hesaplanıp çarpımı denklemin sağ tarafına yazılır.

Bu bölümde belirli varsayımlar ve yaklaşımlar altında Newton çekim sabitinin yüksek boyutlarda nasıl değiştiği incelendi. Bölüm 2.5' de ise aynı inceleme hiçbir yaklaşım yapılmaksızın tam olarak gerçekleştirilmişti. Elde edilen sonuç bölüm 2.5' deki ile karşılaştırılırsa, ilginç bir şekilde, her iki sonucun aynı olduğu görülür. Buna göre, bu bölümde yaptığımız yaklaşımlar elde edilen sonucun tamlığını etkilememiştir.

## BÖLÜM 5

### MODERN KALUZA-KLEİN TEORİLERİ

#### 5.1 KALUZA-KLEİN TEORİSİ

1900' lü yılların başlarında doğada iki temel kuvvetin varlığı bilinmekteydi. Bu kuvvetler elektromanyetik kuvvet ve gravitasyonel kuvvetti. 1864 yılında J. C. Maxwell elektromanyetizmayı tam anlamıyla açıklayan teoriyi ortaya koymuştur. 1905' de A. Einstein' ın özel görelilik kuramını yayımlaması ile elektromanyetizmanın özel görelilik kuramı ile uyumluluğu görülmüştür. 1907 yılında H. Minkowski özel görelilik kuramında uzay ve zamanın Lorentz dönüşümleri altındaki bağıllığından yola çıkarak 4-boyutlu uzay-zamanı tanımlamış ve elektromanyetizmanın 4-boyuttaki ifadelerini elde etmiştir. Gravitasyonun temel teorisi 1915 yılında A. Einstein tarafından genel görelilik kuramı ile açıklanmıştır. Bildiğimiz gibi genel görelilik kuramı 4-boyutlu yarı-Riemann uzayında tanımlı bir kuramdır.

1915 yılından sonra iki kuvveti birleştirme çalışmaları başlamıştır. İlk deneme 1918 yılında H. Weyl tarafından yapılmıştır. Weyl genel görelilik kuramını Riemann olmayan manifoldlara genişletmeye çalışmış fakat uzayın yapısını değiştirmek doğru sonuçlar vermemiştir ve birleştirme de başarısız olmuştur. 1919 yılında gerçekleştirilen ikinci bir denemede ise T. Kaluza genel görelilik kuramında olduğu gibi yarı-Riemann bir manifold kullanmış fakat farklı olarak ek bir boyut daha ekleyerek elektromanyetizmayı dahil etmiştir. Kaluza'nın 1919 yılında Einstein'a gönderdiği makalesi iki yıllık incelemenin ardından 1921 yılında yayımlanmıştır. Kaluza' nın fikri iyi olmasına rağmen başarılı bir sonuç elde edememiştir. Üçüncü deneme; O. Klein tarafından 1926 yılında yapılmıştır. Klein, Kaluza' nın ek boyut fikrinden yola çıkarak farklı bir metrik ile birleştirmeyi gerçekleştirmiştir. Klein' nın teoriye olan katkısından dolayı Kaluza' nın ek boyutlardaki teorisine “ Kaluza-Klein teorisi ” denir.

### 5.1.1 Kaluza' nın Teorisi

Kaluza teorisinde elektromanyetizmayı genel görelilik teorisine beşinci bir boyut ekleyerek birleştirmeye çalışmıştır. Teoride iki temel varsayım bulunmaktadır. Birinci varsayım, teori 5-boyutlu uzay-zamandan oluşmaktadır. İkinci varsayım ise; tüm tensör nicelikler beşinci boyuttan bağımsızdır(Kaluza 1921). Eğer tensörler beşinci boyuta bağlı olsaydı 4-boyutlu uzay-zamanda beşinci boyutun etkisi gözlemlenirdi. Bu ifadenin matematiksel eşdeğeri

$$\partial_5 g_{AB} = 0 \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada  $g_{AB}$  5-boyutlu uzay-zamanın metrik tensörüdür ( $A=0,1,2,3,5$  ve  $g_{AB} = (g_{\mu\nu}, g_{\mu 5}, g_{55})$  şeklindedir.). Kaluza'nın almış olduğu 5 boyutlu metrik tensör

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} & kA_0 \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & kA_1 \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} & kA_2 \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} & kA_3 \\ kA_0 & kA_1 & kA_2 & kA_3 & \phi \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklindedir. Burada  $A_\mu$  vektör alan,  $\phi$  ise skaler alanı tanımlamaktadır ve k sabittir. 5-boyutlu uzay-zamanda jeodezik denklemi

$$\frac{d^2 x^A}{ds^2} + \Gamma_{BD}^A \frac{dx^B}{ds} \frac{dx^D}{ds} = 0 \quad (5.3)$$

şeklindedir. Jeodezik denklemi

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{BD}^\mu \frac{dx^B}{ds} \frac{dx^D}{ds} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2 x^5}{ds^2} + \Gamma_{BD}^5 \frac{dx^B}{ds} \frac{dx^D}{ds} = 0 \quad (5.5)$$

şeklinde iki ayrı bileşen olarak ele alınabilir. Kaluza 'nın elde ettiği sonuçlara ulaşabilmek için (5.4) denklemini incelemek yeterlidir. (5.4) denklemi daha açık bir şekilde ele alındığında

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{55}^\mu \left( \frac{dx^5}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{5\nu}^\mu \frac{dx^5}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (5.6)$$

şeklinde yazılabilir. (5.6) ifadesinde bulunan Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{55}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi) \quad (5.7)$$

$$\Gamma_{5\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu 5} (\partial_\nu \phi) + \frac{1}{2} k g^{\mu\alpha} (\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir. Burada lineer yaklaşım altında hesaplamalar yapılmıştır. (5.6) ifadesine (5.7) ve (5.8) eşitlikleri yerleştirildiğinde

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi) \left( \frac{dx^5}{ds} \right)^2 + g^{\mu\alpha} k (\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \frac{dx^5}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (5.9)$$

halini alır. Burada  $A_\mu$  vektör alanını elektromanyetizmadan vektör potansiyel olarak tanımladığımızda ve  $k \frac{dx^5}{ds} \rightarrow \frac{e}{m}$  şeklinde tanımlandığında (5.9) eşitliğinin sağ tarafında bulunan ikinci terim Lorentz kuvvetini vermektedir.

Kaluza' nın (5.2) de almış olduğu metrik tensör dikkatli bir şekilde incelendiğinde burada bulunan  $g_{\mu\nu}$  bileşenleri 4-boyutlu uzay-zamanda simetrik spin-2 tensör alanına,  $g_{55} = \phi$  Brans-Dicke teorisinden gelen kütsüz spin-0 skaler alanına ve  $g_{\mu 5}$  ise elektromanyetizma teorisinden kütsüz spin-1 vektör alanına karşılık gelmektedir.

Kaluza elektromanyetizmayı beşinci boyutta ekleyerek gravitasyon ile (5.9) denklemindeki gibi birleştirebileceğini düşünmüştür fakat bu basit düşünce doğru bir sonuç vermemiştir.



Kaluza' nın teorisinde metrik tensör iyi tanımlı değildir. Bu nedenle teori doğru bir sonuç vermez sadece yol gösterici olarak tezimizde anlatılmıştır.

### 5.1.2 Klein' nın Modifikasyonu

Klein Kaluza' nın ek boyut fikrinden yola çıkmış ve yeni bir metrik tensör tanımlayarak iki teoriyi birleştirmeye çalışmıştır. Klein' nın almış olduğu varsayımlar Kaluza tarafından da kabul edilmiştir. Kaluza metrik tensörü

$$\tilde{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{00} + kA_0A_0 & g_{01} + kA_0A_1 & g_{02} + kA_0A_2 & g_{03} + kA_0A_3 & kA_0 \\ g_{01} + kA_0A_1 & g_{11} + kA_1A_1 & g_{12} + kA_1A_2 & g_{13} + kA_1A_3 & kA_1 \\ g_{02} + kA_0A_2 & g_{12} + kA_1A_2 & g_{22} + kA_2A_2 & g_{23} + kA_2A_3 & kA_2 \\ g_{03} + kA_0A_3 & g_{13} + kA_1A_3 & g_{23} + kA_2A_3 & g_{33} + kA_3A_3 & kA_3 \\ kA_0 & kA_1 & kA_2 & kA_3 & k \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

şeklinde almıştır. Ters metrik tensör ise  $\tilde{g}^{AB}\tilde{g}_{AD} = \delta_B^D$  ifadesi yardımıyla

$$\tilde{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} & -A^0 \\ g^{01} & g^{11} & g^{12} & g^{13} & -A^1 \\ g^{02} & g^{12} & g^{22} & g^{23} & -A^2 \\ g^{03} & g^{13} & g^{23} & g^{33} & -A^3 \\ -A^0 & -A^1 & -A^2 & -A^3 & \frac{1}{k} + A_\mu A^\mu \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

şeklinde hesaplanır. (3.11) ifadesinin determinanı

$$\tilde{g} = kg \quad (5.12)$$

şeklinde elde edilir. (5.12) determinanı  $A_\mu$  vektör alanlarından bağımsızdır. Jeodezik denklemini inceleyebilmek için ilk olarak Christoffel sembolleri hesaplanır. 5-boyutlu uzay-zamanda Christoffel sembolleri

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{k}{2} A_\nu F_\mu^\lambda + \frac{k}{2} A_\mu F_\nu^\lambda \quad (5.13)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu 5}^{\lambda} = \frac{k}{2} F_{\mu}^{\lambda} \quad (5.14)$$

$$\tilde{\Gamma}_{55}^{\lambda} = 0 = \tilde{\Gamma}_{55}^{\lambda} = \Gamma_{\lambda 5}^{\lambda} \quad (5.15)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \frac{k}{2} A_{\lambda} F_{\mu}^{\lambda} \quad (5.16)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu 5}^5 = \frac{k}{2} A_{\lambda} F_{\mu}^{\lambda} \quad (5.17)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^5 = \frac{1}{2} (\nabla_{\mu} A_{\nu} + \nabla_{\nu} A_{\mu}) - \frac{k}{2} A^{\alpha} (A_{\nu} F_{\mu\alpha} + A_{\mu} F_{\nu\alpha}) \quad (5.18)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $F_{\mu\alpha} \equiv \partial_{\mu} A_{\alpha} - \partial_{\alpha} A_{\mu}$  olarak tanımlanır. Bir önceki bölümde yapıldığı gibi elde edilen Christoffel sembolleri jeodezik denkleminde yerine yazıldığında jeodezik denklemi aşağıdaki hali alır:

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = \frac{1}{2} k (A_{\mu} F_{\nu}^{\lambda} + A_{\nu} F_{\mu}^{\lambda}) \left( \frac{dx^5}{ds} \right)^2 + k F_{\mu}^{\lambda} \frac{dx^5}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds}. \quad (5.19)$$

(5.19) ifadesinde eşitliğin sağındaki ikinci terim Lorentz kuvveti ile aynı formdadır.

Beşinci boyutun koordinat dönüşümü

$$x^5 \rightarrow \bar{x}^5 = x^5 + \zeta(x^{\mu}) \quad (5.20)$$

şeklinindedir. Burada  $\zeta(x^{\mu})$  keyfi skaler bir alandır. Buradan

$$\delta dx^5 = d\bar{x}^5 - dx^5 = d\zeta(x^{\mu}) = (\partial_{\nu} \zeta) dx^{\nu} \quad (5.21)$$

şeklinde elde edilir. 5-boyutlu uzay-zaman da metrik

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B \\
&= \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2\tilde{g}_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + \tilde{g}_{55} dx^5 dx^5
\end{aligned} \tag{5.22}$$

formundadır. (5.22) ifadesinde (5.10) metrik bileşenleri yerlerine yazıldığında

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + kA_\mu A_\nu dx^\mu dx^\nu + 2kA_\mu dx^\mu dx^5 + k(dx^5)^2 \tag{5.23}$$

halini alır. Herhangi bir koordinat dönüşümü metriği değişmez bırakacaktır.

$$\delta ds^2 = 0 \tag{5.24}$$

şeklinde olabilmesi için  $A_\mu$  vektör alanının dönüşümü

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \zeta \tag{5.25}$$

şeklinde elde edilir. Bu ise, elektromanyetizmadaki vektör potansiyelin ayar dönüşümü ile aynı formdadır.

Kaluza-Klein teorisi için 5-boyutlu uzay-zaman da eylem:

$$S_{KK} = \int \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} d^5 x. \tag{5.26}$$

(5.12) eşitliği (5.26) eyleminde yerine yazıldığında

$$S_{KK} = \sqrt{k} \int \sqrt{-g} \tilde{R} d^5 x \tag{5.27}$$

halini alır. Ricci skalerini elde edebilmek için ilk olarak Ricci tensörleri bulunmalıdır. 5-boyutlu uzay-zamanda Ricci tensörü (5.4) denklemi yardımıyla

$$\tilde{R}_{AB} = \partial_A \tilde{\Gamma}_{AD}^D - \partial_D \tilde{\Gamma}_{AB}^D + \tilde{\Gamma}_{AE}^D \tilde{\Gamma}_{BD}^E - \tilde{\Gamma}_{DE}^D \tilde{\Gamma}_{AB}^E \tag{5.28}$$

şeklinde elde edilir. Ricci tensörleri 5-boyutlu uzay-zamanda

$$\tilde{R}_{55} = -\frac{1}{4}k^2 F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \quad (5.29)$$

$$\tilde{R}_{\mu 5} = -\frac{1}{2}k \nabla_{\lambda} F_{\mu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}k^2 A_{\mu} F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \quad (5.30)$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}k^2 A_{\mu} A_{\nu} F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} \left[ A_{\mu} \nabla_{\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} + A_{\nu} \nabla_{\lambda} F_{\mu}{}^{\lambda} \right] + \frac{1}{4}k \left[ F_{\nu}{}^{\lambda} F_{\mu\lambda} + F_{\mu}{}^{\lambda} F_{\nu\lambda} \right] \quad (5.31)$$

şeklindedir. 5-boyutlu uzay-zamanda Ricci skaleri ise

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{AB} \tilde{R}_{AB} \quad (5.32)$$

formülüyle verilir. (5.29), (5.30) ve (5.31) şeklinde hesaplanan Ricci tensörleri (5.32) Ricci skalerinde yerlerine yerleştirildiğinde, Ricci skaleri

$$\tilde{R} = R + \frac{1}{4}k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.33)$$

halini alır. Burada R 4-boyutlu uzay-zamana ait Ricci skaleridir.

(5.33) eşitliği ile verilen Ricci Skaleri (5.27) eyleminde yerine yazıldığında

$$S_{KK} = \sqrt{k} \int \sqrt{-g} \left[ R + \frac{1}{4}k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] d^5 x \quad (5.34)$$

elde edilir. Bu ifadeye Kaluza' nın ikinci varsayımı uygulandığında eylem

$$S_{KK} = \sqrt{k} \int \sqrt{-g} \left[ R + \frac{1}{4}k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] d^4 x \int dx^5 \quad (5.35)$$

halini alır. (5.35) eyleminde ki ilk terim beklenildiği gibi gravitasyonel alan için Hilbert eylemini, ikinci terim ise serbest elektromanyetik alan için eylemi verir.

(5.35) eylemine dikkatle bakıldığında 5. boyutun uzunluğunun bir çarpan halinde geldiği gözükür. 5. boyutun sonsuz bir altuzay olduğu kabul edilirse bu durum eylemin ıraksamasına yol açar. Bunu önlemek için, Klein 5. boyutun sonlu yarıçaplı bir çember olarak kırıldığını varsaydı (Klein 1926). Klein bu çemberin yarıçapının Planck uzunluğu ölçeğinde olduğunu kabul etti. Bu kabul Kaluza'nın ikinci varsayımını da gerekçeli kılmıştır.

Kaluza-Klein teorisi matematiksel açıdan iyi sonuçlar vermesine rağmen elektromanyetizma ve gravitasyonel kuvvet arasındaki büyüklük farkını açıklayamaması, fiziksel olarak test edilebilir bir öngörüsü bulunmaması ve gravitasyonel kuvvet ile elektromanyetik kuvveti birleştirmesi sırasında kuantum mekaniğine yer vermemesi nedeni ile başarısız bir birleştirme teorisi olarak tarihteki yerini almıştır.

## **5.2 MODERN PARÇACIK FİZİĞİNDE EK BOYUTLARA GİRİŞ**

Parçacık fiziğinin temel teorisinin Standart Model (SM) olduğu bilinmektedir fakat SM' in de cevaplandıramadığı bazı sorular vardır. Bu nedenden dolayı yeni teoriler geliştirilmektedir. Bu tür çalışmalara “yeni fizik” denilmektedir. Günümüzde yeni fizik çalışmaları çok fazladır fakat bu tezde sadece Modern Kaluza-Klein Teorileri ele alınmıştır. Bu teorilere Kaluza-Klein teorisindeki ek boyut fikrinden yola çıkıldığı için “ Modern Kaluza-Klein teorileri ” denilmektedir.

Modern Kaluza-Klein teorileri SM ile açıklanamayan bazı eksikliklerin açıklanmasını sağlar. Bu eksikliklerin başında hiyerarşi probleminin açıklanması gelir. Hiyerarşi problemi elektrozayıf ölçek 1 TeV iken gravitasyonel etkileşme ölçeği olan Planck skalasının yaklaşık  $10^{19}$  GeV olması ve aradaki büyüklük farkının nedeni şeklinde tanımlanır.

Modern Kaluza-Klein teorileri Kaluza-Klein teorisi tipinde yani kompakt ve sonlu ek boyutları içeren teorilerdir. Bu teorilere başlamadan önce basit durumları göz önüne alarak ek boyutlar hakkında fikir edinilmesi doğru bir yaklaşım olacaktır. 5-boyutlu düz uzay-zamanda hareket eden kütleli spin-0 bir parçacığı ele alalım. Metrik tensörün aşağıdaki genellemesi düşünülür:

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Ek boyutun uzaysal mı yoksa zamansal mı olduğu başlangıçta bilinmemektedir. 5-boyutlu uzay-zamanda parçacığın momentumunun karesi

$$p^2 = 0 = g_{AB} p^A p^B = p_0^2 - \vec{p}^2 \pm p_5^2 \quad (5.37)$$

şeklinindedir. Burada  $p_0$  parçacığın enerjisi,  $\vec{p}$  parçacığın 3-boyutlu uzaydaki momentumu ve  $p_5$  ise momentumun beşinci boyuttaki bileşenidir. 4-boyutlu uzay-zamanda momentumunun karesi parçacığın kütlelerini vermektedir. Bu bilgiden yola çıkarak

$$m^2 = p^\mu p_\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 = \pm p_5^2 \quad (5.38)$$

ifadesi elde edilir. (5.38) eşitliğinden ek boyutun uzaysal olması gerektiği sonucu çıkar çünkü ek boyutun zamansal olması sanal kütle kavramına yol açar. Bu nedenle (5.36) metrik tensörü

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

halinde olmalıdır.

5-boyutlu uzay-zamanda kütleli spin-0 parçacığın hareket denklemi Klein-Gordon denklemdir. 5-boyutlu uzay-zamanda Klein-Gordon denklemi

$$\partial_A \partial^A \Phi = (\partial_\mu \partial^\mu - \partial_y^2) \Phi(x, y) = 0 \quad (5.40)$$

şeklindedir. Burada  $y$  beşinci boyut koordinatı ve  $x$  ise 4-boyutlu uzay-zaman koordinatı olarak tanımlanmıştır. Koordinatları bu şekilde ayırmak (5.40) denkleminin çözümünü

$$\Phi(x, y) = \sum_n \phi_n(x) \chi_n(y) \quad (5.41)$$

şeklinde yazma imkanı sağlar. (5.41) ile tanımlanan ifadeye Kaluza-Klein ayrışımı denir. (Burada çözümün  $n$  değerleri üzerinden kesikli alınması ileride anlaşılacaktır.) (5.41) çözümü (5.40) denkleminde yerleştirildiğinde

$$\sum_n \left[ \chi_n(y) \partial_\mu \partial^\mu \phi_n(x) - \phi_n(x) \partial_y^2 \chi_n(y) \right] = 0 \quad (5.42)$$

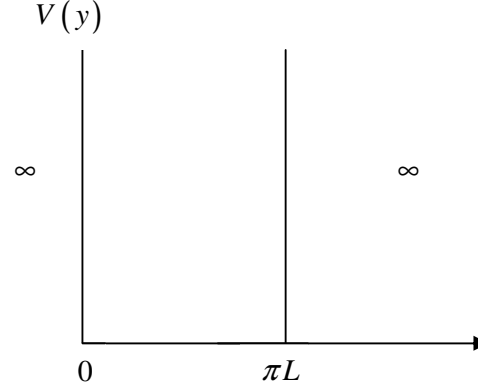
şeklinde elde edilir. (5.42) denkleminde ek boyutun ifadesi tek boyutta Schrödinger denklemi ile benzerlik göstermektedir. Tek boyutta zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$\partial_y^2 \psi(y) = -2mE \psi(y) \quad (5.43)$$

şeklindedir. ( Burada (5.43) denkleminde yer alan  $2mE \rightarrow m^2$  mertebesindedir. ) Ek boyutun  $\pi L$  uzunluğunda düz bir uzay olduğunu kabul edelim. Bu durumda ek boyutta hareket eden

$$\text{parçacığın davranışı } V(y) = \begin{cases} 0; & 0 \leq y \leq \pi L \\ \infty; & y < 0, y > \pi L \end{cases} \quad \text{potansiyelinde hareket eden bir parçacığın}$$

davranışına benzerdir.



Şekil 5.1 Kare kuyu içindeki bir parçacık durumu.

Kuantum mekaniğinden bilindiği gibi kare kuyu içindeki bir parçacığın enerjisi

$$E_n = \frac{n^2}{2mL^2} \quad (5.44)$$

şeklinde kuantumludur ve dalga fonksiyonu,

$$\chi_n(y) = N \sin\left(\frac{ny}{L}\right) \quad (5.45)$$

şeklinde verilir. Bu çözüm Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa,

$$\partial_y^2 \chi_n = -\frac{n^2}{L^2} \chi_n \quad (5.46)$$

olduğu bulunur.  $\frac{n}{L} \equiv m_n$  olarak tanımlayalım. (5.42) denkleminde (5.46) ifadesi yerine yazıldığında

$$\sum_n \chi_n(y) [\partial_\mu \partial^\mu + m_n^2] \phi_n(x) = 0 \quad (5.47)$$



halini alır. Eğer  $n$ ' nin her bir değeri için  $m_n$  terimi  $\phi_n(x)$  Klein-Gordon alanının kütle terimi olarak yorumlanırsa  $n$  indisinin her bir değeri için kütleli Klein-Gordon denklemini elde ederiz. Görüldüğü gibi 5 boyutlu uzay-zamandaki  $\Phi(x, y)$  alanı 4 boyutlu uzay-zamanda kütleli birçok  $\phi_n(x)$  alanları meydana getirmiştir.  $\phi_n(x)$  alanlarının topluluğuna “Kaluza-Klein kulesi” adı verilir.

Şimdi Kaluza-Klein ayrışımının Klein-Gordon eylemine uygulanmasını görelim. 5-boyutlu uzay-zamanda Klein-Gordon denklemi için lagranjiyen ifadesi kullanılarak eylem yazılırsa

$$S = \int d^4x \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{1}{2} \partial_A \Phi \partial^A \Phi \quad (5.48)$$

şeklinde dir. Burada  $\partial_A \Phi \partial^A \Phi = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \partial_y \Phi \partial_y \Phi$  şeklinde tanımlıdır.

$\Phi(x, y) = \sum_n \phi_n(x) \chi_n(y)$  Kaluza-Klein ayrışımı eylemde gerçekleştirilir, (5.46) ve

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \chi_n(y) \chi_m(y) = \delta_{nm} \quad (5.49)$$

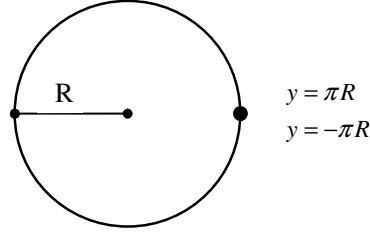
$$\chi_n(y) (\partial_y \chi_m(y)) \Big|_{y_1}^{y_2} = 0 \quad (5.50)$$

eşitlikleri kullanılırsa eylem,

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \sum_n (\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - m_n^2 \phi_n^2) \quad (5.51)$$

şeklinde elde edilir. (5.49) ve (5.50) eşitliklerinin  $y_1 = 0$  ve  $y_2 = \pi L$  için sağladıkları açıktır. (5.51) eyleminde kütleli spin-0 skaler alanı için lagranjiyen elde edilmiştir. Burada kütle terimi ek boyuttan gelmektedir. Buradan ek boyutun Kaluza-Klein kulesi kazandığı sonucu çıkmaktadır. Fakat  $\chi_0(y) = \sin(0) = 0$  olması nedeniyle kütleli çözümlerin ( $n=0$  modu) bulunmadığı görülür.

(5.49) ve (5.50) eşitliklerinin sağlanması ve Kaluza-Klein kütlelerinin elde edilmesi için ek boyutun  $[0, \pi L]$  aralığında sınırlandırılması tek seçenek değildir. Ek boyutun bükülerek bir çember oluşturduğu durumdaki periyodik sınır şartları da (5.49) ve (5.50) eşitliklerinin sağlanması için yeterlidir. Ek boyutun  $R$  yarıçaplı bir çember olarak kompaktlaşmış olduğunu kabul edelim (Şekil 5.2).



Şekil 5.2 Ek boyutun tasviri.

$y = -\pi R$  ve  $y = \pi R$  noktaları aynıdır; yani periyodik sınır şartları  $\chi_n(y) = \chi_n(y + 2\pi R)$  mevcuttur. Schrödinger denkleminin bu periyodik sınır şartları altındaki çözümleri,

$$\chi_n(y) = A_n \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + B_n \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.52)$$

formundadır. Buna göre Kaluza-Klein kütleleri ise  $m_n = \frac{n}{R}$  şeklindedir. Periyodik sınır şartında da kütleler ile ekstra boyutun büyüklüğü ters orantılıdır. Ancak burada  $n=0$  “kütlesiz mod” mevcuttur. Şimdi bu sınır şartını da biraz modifiye edelim.  $-\pi R \leq y \leq \pi R$  aralığında  $y \rightarrow -y$  şeklindeki parite gönderimini tanımlayalım. Bu parite işlemini  $Z_2$  ile gösterelim.  $Z_2$  ile birlikte  $y \rightarrow y + 2\pi R$  öteleme işlemi birlikte vurulursa bu aralıkta iki tane sabit nokta olduğu görülür. Bunlar;  $y=0$  ve  $y=\pi R$  noktalarıdır. Bu durumda artık özfonksiyonlar, kesikli  $Z_2$  parite simetrisine uymalıdır. Dolayısıyla  $Z_2$ -çift  $\sim \cos\left(\frac{ny}{R}\right)$  veya  $Z_2$ -tek  $\sim \sin\left(\frac{ny}{R}\right)$  olmak üzere iki tip çözüm vardır. Sadece  $Z_2$ -çift durumlar sıfır moda sahiptir. Bu geometri  $S_1/Z_2$  ile gösterilir ve orbifold 'a verilebilecek en basit örnektir

(Şekil.5.3). Bir orbifold, üzerindeki farklı noktaları kesikli bir simetri ile özdeşleştirilmiş bir manifold'tur.



Şekil 5.3  $S_1/Z_2$  orbifoldu.

Burada konunun basitçe anlaşılabilmesi için kütleli spin-0 parçacıklar durumu ele alınmıştır. Lineer Einstein denklemleri bölümünde metrik pertürbasyonun sağladığı denklemi (2.64) olarak bulmuştuk. Bu denklemin 5-boyutlu uzay-zamana genellemesini

$$\square \bar{h}_{MN} = 0 \quad M, N=0, 1, 2, 3, 5 \quad (5.53)$$

şeklinde olduğu aşikardır. Bu denklemden görülmektedir ki gravitonun her bir bileşeni bir Klein-Gordon alanı gibi davranmaktadır. Buna göre, Kaluza-Klein ayrışımının gravitonlar için gerçekleştirilmesi ve Kaluza-Klein kulelerinin elde edilmesi, Klein-Gordon alanı için izlenen yola benzerdir.

### 5.3 ARKANI-HAMED, DİMOPOULOS, DVALİ MODELİ

Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali (ADD) Modeli 1999 yılında hiyerarşi problemini çözmek amacıyla önerilmiş olan bir modeldir. ADD modelinde SM'de bulunan tüm parçacıkların “ 3-duvar ” adı verilen 4-boyutlu hiperyüzeyin üzerinde bağlı durumda oldukları, gravitonun ise,  $d$  ek boyut sayısı olmak üzere,  $4+d$  boyutlu “ büyük uzay-zaman (bulk) ” adı verilen uzay-zamanda yayılabildiği kabul edilir. SM parçacıklarının bağlı bulunduğu 3-duvar ek boyutlar için bir başlangıç hiperyüzeyidir ve  $y=0$  duvarın bulunduğu ek boyut koordinatıdır. Hiyerarşi problemini çözebilmek için 4-boyutlu uzay-zamanda ölçülen Planck skalası  $\bar{M}_{pl}$  ve  $4+d$

boyutlu büyük uzay-zaman temel skalası  $M_*$  arasındaki ilişkiyi inceleyelim. İlk olarak (4.44) eşitliğinde (4.52) ifadesi yerine yazılırsa

$$\left(l_{pl}^{(n)}\right)^{d+2} = (l_{pl})^2 (l_c)^d \quad (5.54)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $(l_c)^d = V_d$  d-boyutlu kompakt uzayın hacmidir ve  $n = d + 4$  şeklindedir. (4.32)' de yer alan Planck uzunluğu  $l_{pl}$  ve (4.34)' de bulunan Planck kütlesi  $m_{pl}$  (5.54) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\bar{M}_{pl}^2 = V_d M_*^{d+2} \quad (5.55)$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir. Burada  $M_*$  yüksek boyutlarda Planck skalasıdır. ADD modelinde ek boyutların geometrik yapısı tüm yarıçapları R olan kompakt bir torus ( $T^d$ ) şeklinde ele alınır. Buna göre  $V_d = (2\pi R)^d$  şeklinde olacaktır. Bu sonucu (5.55) eşitliğinde yerine yazarsak  $\bar{M}_{pl}$  değeri bilindiğinden ve  $M_* \sim TeV$  mertebesinde alınırsa R' nin büyüklüğü elde edilir.

Newton' un gravitasyon teorisinden gravitasyonel kuvvetin  $F_{grav} \sim \frac{1}{r^2}$  ile orantılı olduğu bilinmektedir. Burada r iki kütle arasındaki mesafedir. Newton'un teorisi 3-boyutlu uzayda bu şekilde sonuç vermektedir.  $r \gg R$  durumunda ek boyutlar görünmez ve uzay 4-boyutlu uzay-zaman olarak görülür. Bu durum da  $F_{grav} \sim \frac{1}{r^2}$  şeklinde olacaktır. Fakat  $r \ll R$  durumunda (4+d) boyutlu uzay-zamanda (4.19) gauss yasası yardımıyla  $F_{grav} \sim \frac{1}{r^{2+n}}$  şeklinde olacaktır.

İlk olarak d=1 durumu ele alınırsa, bu koşul altında  $R \sim 10^8 m$  şeklinde bulunur. Bu mesafe dünya ile güneş arasındaki mesafe kadardır. Eğer böyle bir durum söz konusu olsaydı Newton yasasında ek boyutların etkisi de görülürdü. Fakat böyle bir durum söz konusu değildir. Buradan ADD modelinde  $d = 1$  durumunun alınamayacağı sonucu elde edilir.  $d = 2$  olduğu durumda  $R \sim 100_{\mu m}$  şeklindedir.  $d = 2$  durumu Newton çekim yasasından sapmalar hakkında

yapılan masa üstü deneylerinde bulunan üst limitlerin mertebesinde bir sonuç vermektedir(Hoyle vd. 2004).  $d = 1$  ve  $d = 2$  koşullarının incelenmesi, ADD modelinde ek boyutların sayısının  $d \geq 2$  alt limitinde olması gerektiği sonucunu vermiştir.

Kaluza-Klein graviton durumlarının duvar üzerinde bulunan SM alanları ile etkileşmeleri incelenmek istenirse Feynman kuralları yardımıyla bazı sonuçlar elde edilir. Bu sonuçlar:

- i. Graviton Kaluza-Klein kulesindeki tüm durumlar duvar üzerinde SM madde ile aynı şiddette, sıradan sıfır-mod graviton ile aynı olacak şekilde bağlaşır; yani, bağlaşım göre en düşük mertebede

$$L = -\frac{1}{\bar{M}_{Pl}^d} \sum G_d^{\mu\nu} T_{\mu\nu} . \quad (5.56)$$

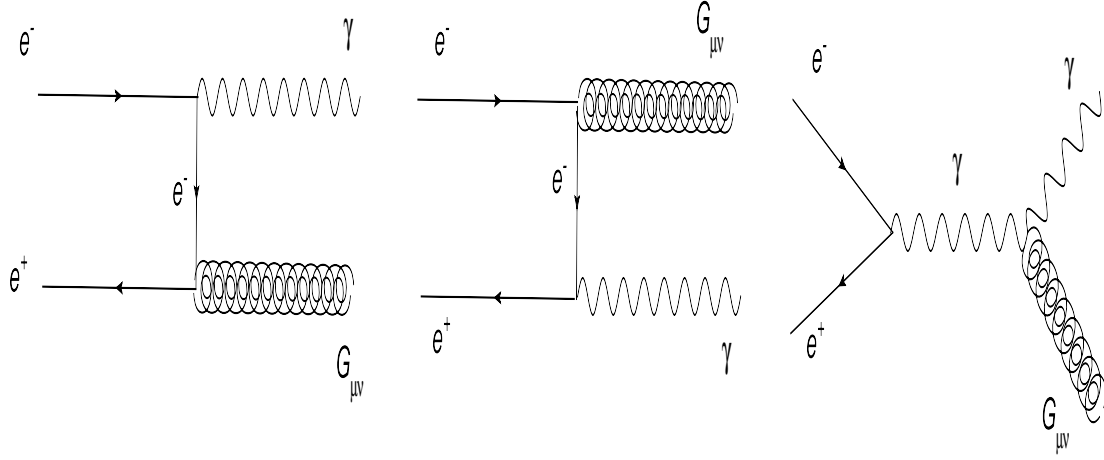
Burada  $G_d^{\mu\nu}$  üniter ayardaki Kaluza-Klein graviton alanları ve  $T_{\mu\nu}$  SM duvar alanlarının enerji momentum tensörüdür.

- ii. En az iki ek boyut olduğundan vektör alanları  $G_d^{\mu i}$ , lerin veya onların bir lineer karışımlarının SM parçacıkları ile bağlaşmasını bekleriz. Bu türden bağlaşmaların SM duvarının  $y=0$ ' da durması sebebi ile simetri argümanlarından sıfır olması gerekir.
- iii. Benzer şekilde,  $G_d^{ij}$  skaler alanlarının bir kombinasyonlarının SM alanlar ile bağlaşmasını bekleriz. Burada Kaluza-Klein skaler kulesi  $\sim \frac{T_\mu^\mu}{\bar{M}_{Pl}}$  ile bağlaşır. Bu bağlaşım, üst kuark ve ayar bozonları haricinde SM alanları için çok küçüktür.

ADD modelinin amacı zayıf ölçek ile gerçek temel ölçek arasındaki hiyerarşi problemini kaldırmaktı ve bu amaca  $n \geq 2$  alt limiti altında ulaşılmıştır. Fakat bu durum yeni bir hiyerarşinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Yeni hiyerarşi  $RM_* \sim \left( \frac{\bar{M}_{Pl}^2}{M_*^2} \right)^{1/d}$  yaklaşımından

dolayı  $\frac{1}{R}$  ile  $M_*$  arasında çok büyük değer farklılığıdır.

Buraya kadar ADD modeli ile hiyerarşi problemine bir çözüm aranmıştır. Şimdi ise ADD modelindeki ek boyutların çarpıştırıcılarda nasıl gözlemlenebileceği incelenecektir. İlk işaret iki SM parçacığının çarpışması sırasında graviton Kaluza-Klein kulesi emisyonudur. Örneğin,  $e^-e^+ \rightarrow \gamma G_{\mu\nu}$  sürecini ele alalım. Bu süreçte SM alanları Kaluza-Klein graviton kulesi yayarlar (şekil 5.4).



Şekil 5.4  $e^-e^+ \rightarrow \gamma G_{\mu\nu}$  süreci için Feynman diyagramları.

Gravitonların etkileşmesi çok zayıf olduğundan dedektörde saçılmaz veya bozunmazlar bundan dolayı ancak varlıkları kayıp enerjiden anlaşılır. Her birinin ayrı kütleleri haricinde tüm graviton Kaluza-Klein durumları aynı tesir kesidini verir ve kinematik izinli tüm Kaluza-Klein durum katkıları toplanmalıdır. Kaluza-Klein gravitonu tek başına büyük bir tesir kesiti vermese de çok sayıda Kaluza-Klein gravitonlarının oluşturduğu Kaluza-Klein kulesi üzerinden toplam potansiyel olarak büyük olacaktır.

ADD modellerinde graviton Kaluza-Klein kulelerinin etkilerinin görülmesinin bir başka yolu daha vardır: gravitonlar çarpışan SM parçacıkları arasında değiş tokuş yaparlar ve bu süreçlerde gravitonların değiş tokuşundan da katkı gelir. Bu duruma  $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$  veya  $q\bar{q} \rightarrow gg$  süreçleri örnek oluşturabilir. Burada da Kaluza-Klein kulesinden gelen katkı tesir kesitini değiştirebilecek ölçüde önemli olabilir. Graviton emisyonu sürecinde anlatıldığı gibi burada da tek bir Kaluza Klein gravitonunun genliğe katkısı az olmakla birlikte çok sayıda durumun toplamı büyük olabilmektedir. Graviton emisyonundan farklı olarak burada Kaluza Klein durumları toplamı kinematik sınırlamaya uğramaz. Buradaki bir problem Kaluza Klein

durumları toplamının  $d > 1$  için ıraksak olmasıdır. Buna uygun bir çözüm, toplamı  $M_*$  civarında kesmektir. Bu anlamlıdır çünkü Enerji  $\sim M_*$  kütle skalasını geçtiğinde ADD modelindeki gravitonlar kuvvetli bir şekilde bağlaşır ve pertürbasyon teorisi geçerliliğini yitirir. Literatürde bunu detaylı olarak tarif eden pek çok çalışma vardır. Fakat hepsinde graviton değiş tokuşunun etkisi SM alanlarını içeren operatörler üretir:

$$L = \frac{4\lambda}{\Lambda_H^4} T_{\mu\nu}^i T_f^{\mu\nu}. \quad (5.57)$$

Burada  $\Lambda_H \sim M_*$  kesim ölçeği,  $\lambda = \pm 1$  ve  $T_{i,f}^{\mu\nu}$  ilk ve son durumdaki SM alanlarının enerji momentum tensörleridir. Bu 8 boyuttan bir noktasal etkileşmedir ve spin-2 gravitonların değiş tokuşu nedeniyle konvansiyonel olmayan bir tensör yapısına sahiptir. SM süreçlerine graviton değiş tokuşundan gelen katkılar beklenen değerlerden önemli sapmalar meydana getirebilir (Atağ vd. 2009) (Atağ vd. 2010).

#### 5.4 RANDALL-SUNDRUM MODELİ

Randall-Sundrum(RS) modeli hiyerarşi problemini çözebilmek için oluşturulmuş ve ADD modelinden önemli farklılıkları olan bir modeldir. RS modelinde  $S^1/Z_2$  orbifoldu üzerinde kompaktlaştırılmış yalnızca bir ek boyut vardır. RS modelinde  $\phi = 0$  ve  $\phi = \pi r_c$  orbifoldun sabit noktalarıdır ve bu iki nokta üzerinde birer tane 3-duvar bulunmaktadır.  $\phi = 0$ ’ de bulunan duvara “ Planck duvarı ” ve  $\phi = \pi r_c$ ’ de bulunan duvara ise “ TeV veya SM duvarı ” denir(Rizzo 2004). Bütün SM parçacıkları TeV duvarı üzerinde hapsolmuş durumdadırlar fakat graviton ek boyuta yayılmaktadır. İki 3-duvar üzerinde bulunan alanların metrik tensörleri

$$g_{\mu\nu}^{SM} \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi) \quad (5.58)$$

$$g_{\mu\nu}^{Pl} \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0) \quad (5.59)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $G_{MN}$  5-boyutlu uzay-zaman metriğidir. (5.58) ve (5.59) ile tanımlı olan 3-duvarların üzerinde Poincare' değişmezliği bulunmaktadır.

Şimdi 5-boyutlu uzay-zamanda Einstein alan denklemlerini elde edebilmek için eylem ifadesi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$S = S_g + S_{SM} + S_{Pl}. \quad (5.60)$$

Burada  $S_g$ ,  $S_{SM}$  ve  $S_{Pl}$  eylemleri

$$S_g = \int d^4x \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \sqrt{-G} (-\Lambda + 2M_*^3 R) \quad (5.61)$$

$$S_{SM} = \int d^4x \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \delta(\phi - \pi) \sqrt{-g_{SM}} (L_{SM} - V_{SM}) \quad (5.62)$$

$$S_{Pl} = \int d^4x \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \delta(\phi) \sqrt{-g_{Pl}} (L_{Pl} - V_{Pl}) \quad (5.63)$$

şeklinindedir. RS modelinde hem 3-duvar üzerinde hem de büyük uzay-zaman da boş uzayın enerji yoğunluğuna sahip olduğu kabul edilir.  $S_g$  eylemindeki  $\Lambda$  büyük uzay-zamanın vakum enerji yoğunluğunu ve  $S_{SM}$  ve  $S_{Pl}$  eylemlerindeki  $V_{SM}$  ve  $V_{Pl}$  buldukları duvar üzerindeki vakum enerji yoğunluklarını göstermektedir. Ayrıca  $M_*$  5-boyutlu büyük uzay-zamanın Planck skalasıdır.

İlk olarak (5.60) eyleminin parçacıkların olmadığı (vakum) durumda çözümünü inceleyelim. (5.60) eyleminden klasik 5-boyutlu uzay-zaman için Einstein denklemlerini belirleyebilmek için eylemin varyasyonu alındığında



$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \int d\phi \left( -\Lambda \delta\sqrt{-G} + 2M_*^3 \delta(\sqrt{-GR}) \right) \\
&+ \int d^4x \int d\phi \delta(\phi - \pi) \left( -V_{SM} \delta\sqrt{-g_{SM}} \right) \\
&+ \int d^4x \int d\phi \delta(\phi) \left( -V_{Pl} \delta\sqrt{-g_{Pl}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.64}$$

ifadesi bulunur. Burada  $\delta\sqrt{-G}$  ve  $\delta(\sqrt{-GR})$  ifadeleri hesaplandığında aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$\delta\sqrt{-G} = -\frac{1}{2}\sqrt{-G}G_{MN}\delta G^{MN} \tag{5.65}$$

$$\delta(\sqrt{-GR}) = \sqrt{-G} \left( R_{MN} - \frac{1}{2}RG_{MN} \right) \delta G^{MN}. \tag{5.66}$$

(5.65) ve (5.66) eşitlikleri (5.64) ifadesine yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \left( \frac{1}{2}\sqrt{-G}G_{MN}\delta G^{MN} \Lambda + 2M_*^3\sqrt{-G} \left( R_{MN} - \frac{1}{2}RG_{MN} \right) \delta G^{MN} \right) \\
&+ \int d^4x \int d\phi \delta(\phi - \pi) \frac{1}{2}\sqrt{-g_{SM}} g_{SM\mu\nu} \delta g_{SM}^{\mu\nu} V_{SM} \\
&+ \int d^4x \int d\phi \delta(\phi) \frac{1}{2}\sqrt{-g_{Pl}} g_{Pl\mu\nu} \delta g_{Pl}^{\mu\nu} V_{Pl} = 0
\end{aligned} \tag{5.67}$$

halini alır. (5.58) ve (5.59) eşitliklerinde tanımlı olan iki tane 3-duvarların üzerindeki metrik tensörlerin varyasyonu

$$\delta g_{SM}^{\mu\nu} = \delta G(x^\mu, \phi = \pi)^{MN} \delta^{M\mu} \delta^{N\nu} \tag{5.68}$$

$$\delta g_{PI}^{\mu\nu} = \delta G(x^\mu, \phi = 0)^{MN} \delta^{M\mu} \delta^{N\nu} \quad (5.69)$$

şeklinde yazılabilir. (5.67) eşitliğinde (5.68) ve (5.69) ifadeleri yerlerine yerleştirildiğinde eylemin varyasyonu,

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-G} G_{MN} \Lambda + 2M_*^3 \sqrt{-G} \left( R_{MN} - \frac{1}{2} R G_{MN} \right) \right. \\ \left. + \delta(\phi - \pi) \frac{1}{2} V_{SM} \sqrt{-g_{SM}} g_{SM\mu\nu} \delta^{M\mu} \delta^{N\nu} \right. \\ \left. + \delta(\phi) \frac{1}{2} V_{PI} \sqrt{-g_{PI}} g_{PI\mu\nu} \delta^{M\mu} \delta^{N\nu} \right\} \delta G^{MN} = 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

formunu alır. Buradan 5 boyutlu Einstein alan denklemleri

$$\begin{aligned} \sqrt{-G} \left( R_{MN} - \frac{1}{2} R G_{MN} \right) = -\frac{1}{2M_*^3} \left\{ \Lambda \sqrt{-G} G_{MN} + V_{SM} \sqrt{-g_{SM}} g_{SM\mu\nu} \delta^{M\mu} \delta^{N\nu} \delta(\phi - \pi) \right. \\ \left. + V_{PI} \sqrt{-g_{PI}} g_{PI\mu\nu} \delta^{M\mu} \delta^{N\nu} \delta(\phi) \right\} \end{aligned} \quad (5.71)$$

şeklinde elde edilir. 5 boyutlu Einstein alan denklemlerinin,  $x_\mu$  doğrultularında 4-boyutlu uzay-zamanda Poincare' değişmezliğine uyan bir çözümü aranmaktadır. Bu duruma uyan bir metrik

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (5.72)$$

formundadır. Burada  $r_c$  çember şeklinde olan ek boyutun kompaktlaştırma yarıçapıdır.  $r_c$ 'nin  $x$ 'den bağımsız olması 4-boyutlu Poincare' değişmezliğinden sağlanır. (5.72) şeklinde önerilmiş olan metrik de bulunan  $\sigma(\phi)$  fonksiyonunu bulabilmek için (5.72) metriği (5.71) Einstein alan denklemlerinde yerine yazılır. Einstein tensörü

$$R_{MN} - \frac{1}{2}RG_{MN} = \begin{pmatrix} -f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6(\sigma')^2 \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

şeklindedir. Burada  $f_1 = \frac{e^{-2\sigma}}{r_c^2} (6(\sigma')^2 - 3\sigma'')$  şeklindedir.  $\sqrt{-G}$ ,  $\sqrt{-g_{SM}}$  ve  $\sqrt{-g_{Pl}}$

determinantları

$$\sqrt{-G} = r_c e^{-4\sigma(\phi)} \quad (5.74)$$

$$\sqrt{-g_{SM}} = e^{-4\sigma(\phi)} = \sqrt{-g_{Pl}} \quad (5.75)$$

şeklinde elde edilir. (5.71) Einstein alan denkleminde (5.73), (5.74) ve (5.75) ifadelerini yerlerine yerleştirerek ve  $M = N = 5$  için,

$$6(\sigma'(\phi))^2 = -\frac{\Lambda}{4M_*^3} r_c^2 \quad (5.76)$$

şeklinde bir denklem elde edilir.  $M = \mu$  ve  $N = \nu$  için ise,

$$\frac{3\sigma''(\phi)}{r_c^2} = \frac{V_{SM}}{4M_*^3} \delta(\phi - \pi) + \frac{V_{Pl}}{4M_*^3} \delta(\phi) \quad (5.77)$$

şeklinde bir sonuç elde edilir. (5.76) denkleminin  $\phi \rightarrow -\phi$  orbifold simetrisine göre çözümü

$$\sigma(\phi) = r_c |\phi| \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M_*^3}} = r_c |\phi| k \quad (5.78)$$

şeklindedir. Çözümün anlamlı olabilmesi için  $\Lambda < 0$  olmalıdır ve negatif vakum enerjisi iki 3-duvar arasında bulunan uzay-zamanın bir AdS<sub>5</sub> (Anti De Sitter) uzayı olduğunu gösterir.

Burada  $k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M_*^3}}$  şeklinde tanımlanır ve Planck skalası mertebesinde bir sabittir. (5.77)

diferansiyel denkleminin çözümünden ise

$$V_{SM} = -V_{Pl} = -24M_*^3 k \quad (5.79)$$

eşitliği elde edilir. Büyük uzayın vakum enerjisi  $\Lambda$  ise  $k$  sabiti cinsinden

$$\Lambda = -24M_*^3 k^2 \quad (5.80)$$

şeklinde yazılır. (5.78) çözümü (5.72)' de yerine yazılırsa,

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (5.81)$$

metriği elde edilir.  $e^{-2kr_c|\phi|}$  çarpanı ek boyutun çok hızlı değişen bir fonksiyonudur ve “bükülme çarpanı” (warped factor) adını alır. Bu sebeple RS modeline bükülmüş ek boyut modeli de denir.

Şimdi (5.81) metriği ile tarif edilen uzay-zaman üzerinde yayılan bir pertürbasyonu düşünelim. Bu durumda metrik

$$ds^2 = e^{-2T(x)|\phi|} (\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu + T^2(x) d\phi^2 \quad (5.82)$$

şeklinde olur. Burada  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , Minkowski uzayı çevresindeki tensörel dalgalanmaları temsil eder ve 4-boyutlu efektif teorideki fiziksel gravitondur. (5.81) metriği (5.82) metriğinin lokal halidir. Bunun sebebi ise, her düzgün 4-boyutlu

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x) \quad (5.83)$$

metrik tensörünün lokal olarak Minkowski metrik tensörünü vermesine ve reel  $T(x)$  fonksiyonun lokal olarak sabit olmasına dayanır. Kompaktlaştırma yarıçapı  $r_c$ ,  $T(x)$  alanının

vakum beklenen değerine eşittir.  $T(x)$  alanının  $r_c$  vakum beklenen değerinde kararlaştırılmış olduğu Goldberger ve Wise tarafından gösterilmiştir (Goldberger ve Wise 1999). Bundan sonra ki işlemler de  $T(x) = r_c$  şeklinde alınacaktır.

Gravitasyonel etkileşmelerin ölçeğini bulabilmek için 5-boyutlu uzay-zamanın 4-boyutlu uzay-zamanda görünen etkisi incelenmelidir. Gravitasyonun 4-boyutlu efektif teorisi, (5.82) metriğinin (5.61) eyleminde yerine yerleştirmesi ile kurulur. Sadece (5.61) eyleminde eğrilik skalerini içeren terimle ilgilenmek yeterlidir:

$$S_{Ef} \supset \int dx^4 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} 2M_*^3 R. \quad (5.84)$$

(5.82) metriği matris formunda

$$G_{MN}(x, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{00} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{01} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{02} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{03} & 0 \\ e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{01} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{11} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{12} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{13} & 0 \\ e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{02} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{12} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{22} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{23} & 0 \\ e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{03} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{13} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{23} & e^{-2kr_c|\phi|} \bar{g}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_c^2 \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

şeklinde yazılır.  $\sqrt{-G}$  ifadesini bulabilmek için (5.85) matrisinin determinanı hesaplanıp yerine yazıldığında

$$\sqrt{-G} = e^{-4r_c k|\phi|} r_c \sqrt{-\bar{g}} \quad (5.86)$$

formunda bulunur. (5.85) eşitliğinin yardımıyla Ricci skaleri ise

$$R = -32k^2 + e^{2kr_c|\phi|} \bar{R} \quad (5.87)$$

şeklinde hesaplanır. Burada  $\bar{R}$ ,  $\bar{g}_{\mu\nu}$  metriğinin meydana getirdiği Ricci skaleridir. (5.86) ve (5.87) eşitlikleri (5.84) eyleminde yerlerine yazıldığında eylem

$$S_{Ef} \supset \int dx^4 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} \left( -e^{-4r_c k |\phi|} r_c 64 M_*^3 k^2 \right) + \int dx^4 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2 M_*^3 \sqrt{-g} e^{-2r_c k |\phi|} r_c \bar{R} \quad (5.88)$$

şeklinde elde edilir. Burada birinci integral ifadesinde bulunan parantez halindeki integrant ifadesi sabittir ve bu sabit terimi bir kozmolojik sabite karşılık gelir. 5-boyuttaki eğrilik terimi 4-boyutta efektif olarak bir kozmolojik sabit üretmiştir. Burada gravitasyonel etkileşmelerin incelendiği için (5.88)' de ikinci integral ifadesi ile ilgilenecektir:

$$S_{Ef} \supset \int dx^4 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2 M_*^3 \sqrt{-g} e^{-2r_c k |\phi|} r_c \bar{R}. \quad (5.89)$$

Efektif alanların yalnızca  $x$ 'e bağlı olması nedeniyle (Kaluza' nın yaklaşımı)  $\phi$  integrali kolaylıkla alınır ve (5.84) eyleminin son hali aşağıdaki şekilde olur:

$$S_{Ef} \supset \frac{2M_*^3}{k} (1 - e^{-2r_c k \pi}) \int dx^4 \sqrt{-g} \bar{R}. \quad (5.90)$$

(5.90) eylemi ile (2.26) Hilbert eylemi ile karşılaştırıldığında

$$\bar{M}_{Pl}^2 = \frac{M_*^3}{k} (1 - e^{-2kr_c \pi}) \quad (5.91)$$

şeklinde bir sonuç elde edilir. Burada  $\bar{M}_{Pl}$  indirgenmiş Planck kütesidir. (5.91) denklemi dikkatli bir şekilde ele alındığında  $\bar{M}_{Pl}$ ,  $M_*^3$  ve  $k$  niceliklerinin karşılaştırılabilecek mertebede oldukları sonucu çıkar. (5.81) metriğine göre Ricci skaleri hesaplandığında

$$R = -20k^2 \quad (5.92)$$

şeklinde elde edilir. (5.92) Ricci skaleri çok küçük olursa kuantum gravite etkileri ortaya çıkacaktır. Bu model kuantum graviteyi içermediğinden  $k$  niceliği üzerine bir sınırlama konulmalıdır. RS modelinin yıkılmaması için  $|R| \leq M_*^2$  şeklinde bir koşul öngörülür. (5.91) eşitliğinde eksponansiyel olan terim çok küçük olmasından dolayı ihmal edilir ve (5.91) eşitliği yaklaşık olarak,

$$\bar{M}_{Pl}^2 \approx \frac{M_*^3}{k} \quad (5.93)$$

ifadesine indirgenir.  $|R| \leq M_*^2$  sınırlaması ve (5.93) eşitliği yardımıyla  $\frac{k}{\bar{M}_{Pl}} \leq 0,1$  sınırını ortaya çıkar. Bu sınır yalnızca çok küçük bir hiyerarşi meydana getirir. RS modelinin felsefesine göre eylemdeki tüm boyutlu niceliklerin kütle ölçeği  $M_* \sim \bar{M}_{Pl} \sim k$  olacaktır. Dolayısıyla bir ince ayar yoktur. Diğer taraftan bükülme faktörü ek boyut boyunca bu nicelikleri tekrar ölçeklendirir. Bunun anlamı eğer eylem  $\bar{M}_{Pl}$  mertebesinde bir  $m$  gibi kütle parametresi varsa, bunun değeri SM duvarı üzerinde eğrilme faktörü kadar indirgenmiş olacaktır yani bu  $m$  kütlesi  $e^{-kr_c\pi} m$  olarak ölçülür. Eğer  $r_c k \approx 11$  ise bu bükülme faktörü  $10^{18} GeV$  mertebesindeki bir kütleyi SM duvarı üzerinde  $1 TeV$  ' e indirger. (Goldberger ve Wise 1999) Dolayısıyla zayıf skalanın  $\bar{M}_{Pl}$  ' ye oranı bir bükülme faktörü ile açıklanır ve bunun dışında hiçbir yerinde böyle büyük bir oran gözükmez.  $r_c k \approx 11$  değeri kararlı bir konfügurasyon tarafından sağlanır. (Goldberger ve Wise 1999) Buradan hiyerarşi problemi için çok doğru bir çözüm elde edildiği sonucu çıkar.

SM duvarı üzerinde Higgs alanının eylemini örnek olarak madde ortamında bükülme faktörünün nasıl çalıştığı incelenecektir. Higgs alanı için (5.62) eylemi

$$S_{SM} \supset \int dx^4 \sqrt{-g_{SM}} \left\{ g_{SM}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right\} \quad (5.94)$$

şeklinde olur. Burada  $\lambda$  dördümlü bağlaşım ve  $v_0$  higgs alanının vakum beklenen değeridir.  $v_0$  kütle boyutunda bir niceliktir. (5.58)' de bulunan SM duvarı üzerindeki metrik tanımından metrik tensör

$$g_{SM\mu\nu} = e^{-2kr_c\pi} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (5.95)$$

şeklinde olur ve  $\sqrt{-g_{SM}}$  determinant ifadesi ise

$$\sqrt{-g_{SM}} = e^{-4kr_c\pi} \sqrt{-\bar{g}} \quad (5.96)$$

şeklinde elde edilir. (5.94) eyleminde (5.95) ve (5.96) eşitlikleri yerleştirildiğinde, eylem

$$S_{SM} \supset \int dx^4 \sqrt{-\bar{g}} \left\{ e^{-2kr_c\pi} \bar{g}_{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - e^{-4kr_c\pi} \lambda \left( |H|^2 - \nu_0^2 \right)^2 \right\} \quad (5.97)$$

formunu alır. Kanonik olarak normalize edilmiş Higgs alanını elde etmek için alanı  $H \rightarrow e^{kr_c\pi} h$  şekline ölçeklendirilmelidir. (5.97) eyleminde bu ölçeklendirme yapıldığında eylem

$$S_{SM} \supset \int dx^4 \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \bar{g}^{\mu\nu} D_\mu h^\dagger D_\nu h - \lambda \left( |h|^2 - e^{-2kr_c\pi} \nu_0^2 \right)^2 \right\} \quad (5.98)$$

şeklinde olur. Buradan SM duvarı üzerinde vakum beklenen değerinin  $\nu_0$  değil de  $e^{-kr_c\pi} \nu_0$  şeklinde indirgeneceği ve TeV ölçeğinde olacağı sonucu çıkar. Buradan da görüleceği gibi bu Planck duvarı üzerindeki herhangi bir  $m_0$  kütle parametresi SM duvarı üzerinde indirgenmiş fiziksel bir  $m$  kütlelerine karşılık gelmektedir. Bu durumun genel matematiksel ifadesi ise

$$m \equiv e^{-kr_c\pi} m_0 \quad (5.99)$$

şeklindedir.

Şimdi ise gravitasyonel modlarla ilişkili parametreler detaylı bir şekilde belirlenecektir. Gravitonlar her ne kadar tensörel yapıda olsalar da kütleleri ve dalga fonksiyonları RS büyük uzay-zamanındaki skaler alan durumuna özdeşdir. Eğri uzay-zamanda Klein-Gordon denklemi,

$$\square \Phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = 0 \quad (5.100)$$

şeklindedir. D'Alembertian operatörü açık bir şekilde yazıldığında (5.100) denklemi aşağıdaki şekilde olacaktır:



$$\square\Phi = g^{AB}\partial_A\partial_B\Phi - g^{AB}\Gamma_{AB}^C\partial_C\Phi. \quad (5.101)$$

(5.101) denklemini daha açık hale getirebilmek için (5.81) metriğini kullanarak Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned} \Gamma_{50}^0 &= -k & \Gamma_{00}^5 &= ke^{-2ky} \\ \Gamma_{51}^1 &= -k & \Gamma_{11}^5 &= ke^{-2ky} \\ \Gamma_{52}^2 &= -k & \Gamma_{22}^5 &= ke^{-2ky} \\ \Gamma_{53}^3 &= -k & \Gamma_{33}^5 &= ke^{-2ky} \end{aligned} \quad (5.102)$$

şeklinde elde edilir. Burada Christoffel sembollerinin diğer bileşenleri sıfır olduğundan yazılmamıştır ve  $y = r_c\phi$  şeklinde tanımlanmıştır. (5.101) denkleminde (5.102)' de elde edilen Christoffel sembolleri yerine yazıldığında, (5.101) denklemi

$$\square\Phi = e^{2ky}\partial_\mu\partial^\mu\Phi - \partial_y^2\Phi + 4k\partial_y\Phi = 0 \quad (5.103)$$

halini alır. Burada (5.41) denkleminde olduğu gibi Kaluza-Klein ayrışımı yapılırsa, (5.103) eşitliği

$$\mathcal{X}_n(y)e^{2ky}\partial_\mu\partial^\mu\phi_n(x) - \phi_n(x)\partial_y^2\mathcal{X}_n(y) + 4k\phi_n(x)\partial_y\mathcal{X}_n(y) = 0 \quad (5.104)$$

şeklinde elde edilir. SM duvarı üzerinde görünen  $\phi_n(x)$  alanının kütleli olması için  $\partial_\mu\partial^\mu\phi_n(x) = -m_n^2\phi_n(x)$  olması gerekir çünkü 5-boyutlu uzay-zamandaki kütesiz  $\Phi(x, y)$  alanı Kaluza-Klein ayrışımı ile birlikte 4-boyutlu uzay-zamanda kütleli  $\phi_n(x)$  alanı meydana getirmelidir.  $\partial_\mu\partial^\mu\phi_n(x) = -m_n^2\phi_n(x)$  eşitliğini (5.104) denkleminde kullanırsak

$$-e^{2ky}\partial_y(e^{-4ky}\partial_y\mathcal{X}_n(y)) = m_n^2\mathcal{X}_n(y) \quad (5.105)$$

denklemini elde edilir. (5.105) denkleminde bakıldığında  $k \rightarrow 0$  durumunda (5.46) denkleminde indirgenir. (5.105) denkleminin için çözüm  $J_2$  ve  $Y_2$  Bessel fonksiyonlarının bir lineer bileşimi olarak elde edilir. Bu durumda Kaluza-Klein durumlarının kütleleri

$$m_n = kx_n e^{-kr_c \pi} \quad (5.106)$$

şeklindedir. Burada  $x_n$ ,  $J_1(x_n) = 0$  denkleminin kökleridir (Çizelge 5.1).

Çizelge 5.1  $J_1(x_n) = 0$  bağıntısının ilk birkaç kökü.

$x_0 = 0$	$x_2 = 7,01559$	$x_4 = 13,32369$	$x_6 = 19,61586$
$x_1 = 3,83171$	$x_3 = 10,173447$	$x_5 = 16,47063$	$x_7 = 22,76008$

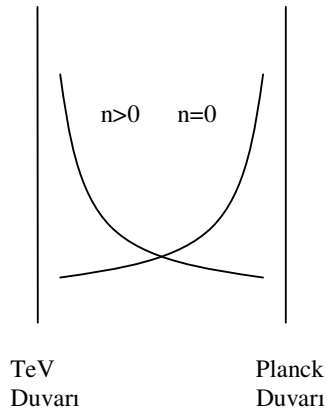
RS modelinde çizelge 5.1' den de anlaşılacağı gibi kütleli moddan sonra ki Kaluza-Klein durumlarının kütleleri birbirinden çok aralıktır. İlk kütleli Kaluza-Klein durumu yaklaşık TeV mertebesindedir. Bu nedenle RS modelinin etkileri çok yüksek enerjilerde ortaya çıkar.

5-boyutlu Hilbert eyleminde Kaluza-Klein durumları için dalga fonksiyonları yerine yazılırsa Kaluza-Klein gravitonlarının SM alanları ile SM duvarı üzerinde nasıl bağlaştığı bulunur:

$$L = - \left( \frac{G_0^{\mu\nu}}{\bar{M}_{Pl}} + \sum_{n>0} \frac{G_n^{\mu\nu}}{\Lambda_\pi} \right) T_{\mu\nu}. \quad (5.107)$$

Burada  $\Lambda_\pi = \bar{M}_{Pl} e^{-kr_c \pi}$  olarak tanımlıdır ve TeV mertebesindedir. Burada gravitonun sıfır modunun ADD modelinde olduğu gibi bağlaştığı görülür. Fakat yüksek Kaluza-Klein modlar ortak bükülme çarpanı nedeniyle eksponansiyel olarak büyümüş bağlaşımlara sahiptirler. Dolayısıyla zayıf skalada, zayıf skala ölçüsünde bağlaşımları olan Kaluza-Klein gravitonları mevcut olmalıdır. RS modelinde hiyerarşiyi bozmayacak şekilde değiştirilebilecek iki tane serbest parametre vardır. Bu parametrelerden biri en hafif uyarılmış Kaluza-Klein durumunun kütlesi  $m_1$  ve diğeri ise  $k/\bar{M}_{Pl}$  oranıdır.

RS modelinde sıfır modunun bağlaşımının çok zayıf olduğu fakat diğer Kaluza-Klein durumlarının bağlaşımının çok daha kuvvetli olduğu sonuçları elde edildi. Bu iki durumu tam olarak açıklayabilmek için (5.106) denkleminin çözümlerine bakılmalıdır. Çözümler  $J_2$  ve  $Y_2$  Bessel fonksiyonlarının lineer bileşimleri olarak elde edildiğinden sıfır modunda ( $x_0 = 0$ ) ve  $x_n$ ' nin sıfırdan farklı değerleri alındığı durumlarda bu çözümler çok farklı davranışlara sahiptir. Şekil 5.5' de sıfır modunda 5 boyutlu dalga fonksiyonunun Planck duvarının yakınında hızlıca yükseldiği görülmektedir fakat SM duvarında ise çok küçüktür. Diğer Kaluza-Klein durumları ise Şekil 5.5' de görüldüğü gibi sıfır moduna göre tam ters bir davranış sergiler.



Şekil 5.5 TeV ve Planck duvarları üzerinde Kaluza-Klein gravitonları.

## BÖLÜM 6

### SONUÇLAR

ADD ve RS modellerinin her ikisinin de temel motivasyonunu, hiyerarşi problemi olarak bilinen zayıf ölçek ile Planck ölçeği arasındaki büyük farklılığın ortadan kaldırılması oluşturmaktadır. Ancak 5.3 bölümünde gösterildiği gibi, ADD modeli bu problemi çözmeye karşın,  $1/R$  ile  $M_*$  arasında yeni büyük bir hiyerarşinin ortaya çıkmasına neden olur. Bu sebeple ADD modelinin hiyerarşi probleminin çözümünde tam olarak başarılı olduğu söylenemez. Öte yandan RS modeli zayıf ölçek ile Planck ölçeği arasındaki yaklaşık  $10^{15}$  GeV mertebesindeki hiyerarşiyi ortadan kaldırır ve Planck ölçeği ile kompaktlaştırma ölçeği  $\mu_c \equiv 1/r_c$  arasında yalnızca 12 mertebesinde çok küçük bir yeni hiyerarşi üretir. Bu sonuç, hiyerarşi probleminin çözümü açısından büyük bir başarıdır.

ADD modeli yaklaşık mm mertebesinde ( $\leq 100\mu m$ ) büyük ek boyutların varlığını öngörmekte ve eV mertebesindeki kütle farklarıyla sıralanmış gravitonlardan oluşan Kaluza-Klein kulesini içermektedir. Bu nedenle, ADD modelinde gravitonlar nispeten düşük enerjili olan astrofiziksel reaksiyonlara da katkı verirler ve model üzerinde kuvvetli astrofiziksel ve kozmolojik sınırlamalar mevcuttur. RS modelinde ise, Kaluza-Klein uyarılmış durumlarının kütleleri birbirinden çok aralıktır. İlk kütleli Kaluza-Klein durumu yaklaşık TeV mertebesinde bir kütleyle sahiptir. Bu nedenle RS modelinin etkileri çok yüksek enerjilerde ortaya çıkar ve ADD modelinden farklı olarak astrofiziksel ve bazı kozmolojik sınırlamalara maruz kalmazlar.

Büyük Hadron Çarpıştırıcısı (LHC) yüksek enerjili protonlar üreten ve ışınlılığının  $L=10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  değerine ulaşması beklenen bir hızlandırıcıdır. LHC bu nedenle yüksek istatistikli veri sağlar ve ek boyutların keşfedilmesinde büyük umut vaat etmektedir. RS ve ADD modellerinin LHC'deki fenomenolojileri birbirinden farklıdır. ADD modelinde her uyarılmış Kaluza-Klein durumu Planck ölçeğinin tersi ile orantılı bir sabitle bağlanır ve bu

durumların LHC'deki deneylerde gözlenebilir olmalarının anahtarı bu durumların çok katlı olmalarıdır (Kaluza-Klein kulesi). Öte yandan RS modelinde yaklaşık olarak zayıf ölçek mertebesindeki Kaluza-Klein kütle ayrışmaları için LHC'de yalnızca az sayıda uyarılmış durum kinematik olarak erişilebilir olacaktır. Ancak bu uyarılmış durumların madde ile bağlaşımları, Planck ölçeğinin tersi ile değil de zayıf ölçeğin tersi ile orantılıdır. Buna göre her bir durum ayrı olarak gözlenebilir.

## KAYNAKLAR

- Arkani-Hamed N, Dimopoulos S ve Dvali G R** (1998) The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter, *Physics Letters B*, 429: 263-272.
- Atağ S, İnan S C ve Şahin İ** (2009) Extra Dimension in Photon-Induced Two Lepton Final State at the CERN LHC, *Physical Review D*,80.075009
- Atağ S, İnan S C ve Şahin İ** (2010) Extra Dimension in  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  Process at the CERN-LHC, *JHEP*, 09(2010)042
- Carroll S** (2004) *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison & Wesley.
- Davoudiasl H, Hewett J L ve Rizzo T G** (2000) Phenomenology of the Randall-Sundrum Gauge Hierarchy Model, *Physical Review Letters*, 84:s.2080-2083.
- Goldberger W D ve Wise M B** (1999) Bulk Fields in the Randall-Sundrum Compactification Scenario, *Physical Review D*,60:107505.
- Hoyle C D, Kapner D J, Heckel B R, Adelberger E G, Gundlach J H, Schmidt U ve Swanson H E** (2004) Sub-millimeter Tests of the Gravitational Inverse-square Law, *Physical Review D*,70: 1418-1421.
- Kaluza T** (1921) On The Unity Problems in Physics, *Sitzungsber Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse* 966.
- Klein O** (1926) Quantum Theory and Five Dimensional theory of relativity, *Z. F.Physik* 37, 895.
- Randall L ve Sundrum R** (1999) A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *Physical Review Letters*,83:3370-3373.
- Rizzo T G** (2004) *Pedagogical Introduction to Extra Dimensions*, SLAC-Pub-10753.
- Zwiebach B** (2004) *A First Course in String Theory*, Cambridge, University Press.



**EK AÇIKLAMALAR A**  
**NEWTON LİMİTİ**





## NEWTON LİMİTİ

Newton'un gravitasyon teorisi tam olarak doğru bir gravitasyon teorisi olmasa da bir limit halinde doğruluğu olan bir teoridir. Bu limit ise Newton limiti olarak adlandırılır. Newton limiti;

- i. parçacıklar ışık hızına göre düşük hızlarda hareket etmeli,
- ii. parçacıklara etkiyen gravitasyonel alan zayıf olmalı,
- iii. gravitasyonel alan statik olmalı

şeklinde tanımlanır. Bu ifadelerin matematiksel eşdeğerleri

$$\frac{dt}{d\tau} \gg \frac{dx^i}{d\tau} \quad (1.1)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad |h^{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.2)$$

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.3)$$

şeklindedir. Burada  $\tau$  öz zamandır. Einstein alan denklemlerini elde ederken Newton limiti çok yol göstericidir. Genel görelilik teorisinin Newton limiti Newton'un çekim teorisini vermelidir. Bir örnek olarak jeodezik denklemi Newton limiti altında ele alınabilir. Jeodezik denklemi

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1.4)$$

şeklindedir. (1.1) Düşük hız limiti (1.4) jeodezik denkleminde uygulandığında, jeodezik denklemi

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1.5)$$

halini alır. (1.5) denkleminde bulunan Christoffel sembolü Newton limitleri altında

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00} \quad (1.6)$$

şeklinde elde edilir. (1.6)' da bulunan Christoffel sembolü (1.5)' deki jeodezik denkleminde yerine yazıldığında, jeodezik denklemi

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}(\partial_{\lambda}h_{00})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (1.7)$$

şeklinde olur.  $\mu = 0$  durumunda (1.7) denklemi ele alındığında

$$\frac{dt}{d\tau} = \text{sabit} \quad (1.8)$$

sonucu elde edilir.  $\mu = i$  bileşeni için (1.7) denklemi

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (1.9)$$

halini alır. (1.9) denkleminde elde edilen sonuç Newton' un gravitasyonel teorisindeki  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$  denklemi ile aynı formdadır. Buradan  $h_{00} = -2\Phi$  olması gerektiği sonucu çıkar. Buradan çıkan en önemli sonuç jeodezik denkleminin Newton limit altında Newton' un gravitasyon teorisi vermesidir. Newton' un gravitasyon teorisi tam olarak doğru bir teori olmamasına rağmen belirli limitler altında doğru olarak çalışmaktadır.

**EK AÇIKLAMALAR B**  
**TENSÖR YOĞUNLUKLARI**



## TENSÖR YOĞUNLUKLARI

$$D_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{(y)} = \left| \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right|^n \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial y^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial y^{\nu_n}} D_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{(x)} \quad (1.1)$$

şeklinde dönüşen bir niceliğe ağırlığı n olan bir tensör yoğunluğu denir. Metrik tensörün determinanı bir tensör yoğunluğudur.  $x \rightarrow x'$  dönüşümü ile metrik tensör

$$g_{\mu' \nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu \nu} \quad (1.2)$$

şeklinde dönüşür. (1.2) de yazılmış olan metrik tensörün determinanı alındığında

$$\begin{aligned} \det(g_{\mu' \nu'}) &= \det \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \right) \det(g_{\mu \nu}) \\ &= \det^2 \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) \det(g_{\mu \nu}) \\ &= \det^{-2} \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right) \det(g_{\mu \nu}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

şeklinde elde edilir. Böylece metrik tensörün determinantının dönüşümü bulunmuş olur. Görüldüğü gibi metrik tensörün determinanı ağırlığı -2 olan bir tensör yoğunluğudur.



## **ÖZGEÇMİŞ**

PELİN TEKTAŞ 1988'de Bursa'da doğdu; ilk öğrenimini Sakarya'da, orta öğrenimini ise Bursa'da tamamladı; İznik Şehit Sedat Pelit Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2005 yılında ZKÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'ne girdi; 2010'da "iyi" derece ile mezun olduktan sonra aynı yıl içerisinde girdiği Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programını sürdürmektedir.

### **ADRES BİLGİLERİ**

Adres : Müşküle Köyü  
İznik/BURSA

Tel : (224) 766 30 54

E-posta : pelin\_tektas@hotmail.com