RASYONEL ÇEKİRDEKLİ POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Arzu Aylin BOSTANCI

Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Doktora Tezi

Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK

Mart 2013

KABUL:

Arzu Aylin BOSTANCI tarafından hazırlanan "RASYONEL ÇEKİRDEKLİ POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLERİ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 22/03/2013

Başkan: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN (BEÜ) ....

Üye : Prof. Dr. Erdal COŞKUN (BEÜ) ....

Üye : Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI (AÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (BEÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Melih GÖCEN (BEÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım .../.../2013

Prof. Dr. Özden ÖZEL GÜVEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Arzu Aylin BOSTANCI

ÖZET

Doktora Tezi

RASYONEL ÇEKİRDEKLİ POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Arzu Aylin BOSTANCI

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN
Mart 2013, 143 sayfa

I kapalı bir aralık olmak üzere $L^2(I)$ üzerinde k çekirdekli T_I integral operatörü

$$T_I f(s) = \int_I k(s,t) f(t) dt \qquad (\mathrm{f} \in L^2(I), \mathrm{s} \in \mathrm{I})$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu tezde bazı özel çekirdekli integral operatörlerin pozitif ve negatif özdeğer sayıları bulunmuş ve bu özdeğerler yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Bölüm 1 ve Bölüm 2 içinde gerekli hazırlık bilgileri verilmiştir. Bölüm 3 içinde rasyonel ve analitik çekirdekli bazı integral operatörlerin pozitif ve negatif özdeğer sayıları teorik olarak bulunmuştur. Bölüm 4' de belirli nümerik yöntemler kullanılarak rasyonel ve analitik çekirdekli bazı integral operatörlerin özdeğerleri yaklaşık olarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İntegral Operatörler, Özdeğerler, Özdeğer Sayıları, Ritz Yöntemi

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INTEGRAL OPERATORS WITH RATIONAL KERNELS

Arzu Aylin BOSTANCI

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Yüksel SOYKAN

March 2013, 143 pages

For a closed interval I, let T_I be the integral operator on $L^2(I)$ with kernel k;

$$T_I f(s) = \int_I k(s,t) f(t) dt \qquad (\mathrm{f} \in L^2(I), \mathrm{s} \in \mathrm{I}).$$

In this thesis, the numbers of positive and negative eigenvalues of integral operators with some special kernels are found and these eigenvalues are calculated approximately.

In Chapter 1 and Chapter 2, we give the necessary preliminary results for the thesis. In Chapter 3, the numbers of positive and negative eigenvalues of some integral operators with rational and analytic kernels are found theoretically. In Chapter 4, the eigenvalues of some integral operators with rational and analytic kernels are calculated approximately by using certain numerical methods.

Keywords: Integral Operators, Eigenvalues, Numbers of Eigenvalues, Ritz Method

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması sırasında tüm çalışmalarımı titizlikle takip eden Değerli Hocam Sayın Doç. Dr. Yüksel SOYKAN'a, tez çalışmam sırasında bilgilerinden sürekli faydalandığım ve danışman hocamın yurt dışında olduğu sürece desteğini hiç esirgemeyen Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN'e, tez inceleme komite toplantılarında ve diğer zamanlarda bilgilerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Erdal COŞKUN ve Sayın Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'a, çalışmalarımı her konuda destekleyen hem bilgi hem manevi yönden her zaman yanımda olan Dr. Nazmiye GÖNÜL'e, yine bu zorlu süreçte desteklerini esirgemeyen Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde görev yapan tüm idareci ve öğretmen arkadaşlarıma, başından beri her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$Ad(k)$: $k(s,t)$ çekirdeği için kabul edilebilir aralık

$k(s,t)$: T integral operatörünün çekirdeği (kerneli)

$L^2(I)$: Karesi integrallenebilen Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların uzayı

$L_e^2(I)$: Karesi integrallenebilen Lebesgue ölçülebilir çift fonksiyonların uzayı

$L_o^2(I)$: Karesi integrallenebilen Lebesgue ölçülebilir tek fonksiyonların uzayı

M^* : M nin adjointi

$N^+(T)$: T nin pozitif özdeğer sayısı

$N^-(T)$: T nin negatif özdeğer sayısı

$\lambda(T)$: T nin özdeğerleri

$\lambda^+(T)$: T nin pozitif özdeğerleri

$\lambda^-(T)$: T nin negatif özdeğerleri

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu kısımda Young (1990), Reddy (1998), Robert (1998), Soykan (2012) kaynaklarından yararlanılmıştır.

1.1 NOTASYON VE HAZIRLIK BİLGİLERİ

Tanım 1.1.1 *V bir vektör uzayı ve $M \subset V$ boş olmayan bir küme olsun.*

(i) *M kümesinin bütün sonlu alt kümelerinin, lineer birleşimlerinin tamamının kümesine M nin gereni (spanı) denir ve SpM ile gösterilir.*
(ii) *Eğer M lineer bağımsız ve $SpM = V$ ise M ye V uzayının bir tabanı denir.*
(iii) *V sonlu bir tabana sahip ise, V uzayına sonlu boyutludur denir ve eğer bu tabanın eleman sayısı k ise $dimV = k$ olarak yazılır. Eğer V böyle sonlu bir tabana sahip değil ise, V uzayına sonsuz boyutludur denir.*

Tanım 1.1.2 *V ve W aynı F skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir $T : V \to W$ dönüşümü her $\alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in V$ için*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özelliğini sağlarsa veya buna denk olarak $\forall \alpha \in F$ ve $x, y \in V$ için

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y) \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

özelliğini sağlarsa T' ye bir lineer dönüşüm denir.

Tanım 1.1.3 *V bir vektör uzayı ve $T \in L(V)$ olsun. Bir $\alpha \in F$ skaleri için*

$$T(x) = \lambda x$$

denkleminin sıfırdan farklı $x \in V$ çözümüne sahip ise λ ya T nin bir özdeğeri denir ve sıfırdan farklı böyle bir x çözümüne özvektör adı verilir.

$$\operatorname{Ker}(T-\lambda I)=\{x\in V : Tx=\lambda x\}\subset V$$

altuzayına özuzay denir.

Tanım 1.1.4 *V, W vektör uzayları ve $T \in L(V, W)$ olsun.*

(i) *T nin görüntü kümesi* $\operatorname{Im} T = T(V)$ *dir ve T nin rankı $r(T) = \dim(\operatorname{Im} T)$ sayısıdır.*
(ii) *T nin kerneli (çekirdeği)*

$$\operatorname{Ker} T=\{x\in V : T(x)=0\}=T^{-1}(\{0\})$$

dir ve T nin sıfırlılığı $n(t) = \dim(\operatorname{Ker} T)$ sayısıdır. $r(T)$ rankı ve $n(T)$ sıfırlılığı ∞ değerine sahip olabilir.
(iii) *Eğ*er *$r(T)$ sonlu ise T sonlu ranka sahiptir denir; yani sonlu ranka sahip lineer bir operatör görüntü kümesi sonlu boyutlu olan bir lineer operatördür.*

Tanım 1.1.5 *H ve K kompleks Hilbert uzayları ve $T \in B(H, K)$ olsun. Her $x \in H$ ve her $y \in K$ için*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

olacak şekilde bir tek $T^* \in B(K, H)$ operatörü vardır.

Tanım 1.1.6 *$\mathcal{H}$ ve $\mathcal{K}$ kompleks Hilbert uzayları ve $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ise o zaman Tanım 1.1.5 içinde elde edilen T^* operatörüne T nin adjointi denir.*

Tanım 1.1.7 *$1 \le p < \infty$ ve (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere $L^p(X)$ uzayı*

$$L^p(X)=\left\{f : f \text{ ölçülebilirdir ve } \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

ile tanımlanmaktadır.

Tanım 1.1.8 *$\mathcal{H}$ bir kompleks Hilbert uzayı ve $T \in B(\mathcal{H})$ olsun. Eğer*

$$TT^*=T^*T=I$$

ise T operatörüne uniter operatör denir.

Tanım 1.1.9 *X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer X içindeki her sınırlı (x_n) dizisi için Y içindeki (Tx_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise T ye kompakttır denir.*

Teorem 1.1.10 *$\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $T \in B(\mathcal{H})$ ise o zaman T kompakttır ancak ve ancak T^* kompakttır.*

1.2 FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ

$\Delta_{a,b} = \{(s,t) : a \leq s, t \leq b\} = [a,b] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$

kümesi, $\mathbb{R}^2$ düzlemi içinde bir karedir.
$k : \Delta_{a,b} \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $u \in L^2[a,b]$ için

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt \tag{1.1}$$

ile bir $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlanmaktadır. f fonksiyonu bilinen ve u da bilinmeyen olarak kabul edilir ise o zaman (1.1) formundaki denkleme birinci tipten Fredholm integral denklemi adı verilir.
Benzer şekilde $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(s) = u(s) - \mu \int_a^b k(s,t)u(t)dt \qquad s \in [a,b] \tag{1.2}$$

formundaki integral denklemine ikinci tipten Fredholm integral denklemi adı verilir. Burada k ya denklemin çekirdeği denir. Bu, lineer bir operatörün sıfır uzayını göstermek için kullanılan çekirdek teriminin farklı bir kullanımıdır.

$$Tu(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt \tag{1.3}$$

ile tanımlı $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ operatörüne bir (k çekirdekli ya da k çekirdeğinin ürettiği) Fredholm integral operatörü veya kısaca bir integral operatör adı verilir. Aynı zamanda, (1.1) denklemi operatör formunda

$$Tu = f \tag{1.4}$$

veya

$$(I - \mu T)\, u = f \tag{1.5}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 1.2.1 *V bir vektör uzayı olsun ve $T \in L(V)$ olsun. Bir $\mu \in F$ skaleri için $v - \mu T v = 0$ denklemini sıfırdan farklı bir $v \in V$ çözümüne sahip ise bu μ ye T nin bir karakteristik değeri denir ve bu denklemin sıfırdan farklı her $v \in V$ çözümüne μ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör adı verilir.*

Bu tanımdan herhangi bir T için

(i) $\mu = 0$ noktası T nin bir karakteristik değeri olamaz

(ii) $\mu \neq 0$, T nin bir karakteristik değeridir ancak ve ancak $\lambda = \mu^{-1}$, T nin bir özdeğeridir.

Teorem 1.2.2 *T, $k(s,t)$ çekirdekli bir kompakt integral operatörü olsun. Sabitlediğimiz herhangi bir $\mu \in \mathbb{C}$ için ikinci tipten (1.2) Fredholm integral denklemi Fredholm alternatifini sağlar. Yani;*

(i) μ, T nin bir karakteristik değeri değildir ve denklem verilen her bir $f \in L^2[a,b]$ için bir tek $u \in L^2[a,b]$ çözümüne sahiptir.

(ii) μ, T nin bir karakteristik değeridir ve (1.5) ifadesine karşılık gelen homojen denklem sıfırdan farklı çözümlere sahiptir ve bununla birlikte homojen olmayan denklem çözümlere sahiptir ancak ve ancak $Ker(I - \overline{\mu} T^*)$ altuzayına ortogonaldir.

Üstteki teoremdeki (i) ve (ii) yi daha detaylı olarak yazarsak;

(i) $v - \mu T v = 0$ denklemi sıfırdan farklı bir $v \in L^2[a,b]$ çözümüne sahip değildir ve her bir $f \in L^2[a,b]$ için

$$f(s) = u(s) - \mu \int_a^b k(s,t) u(t) dt \qquad s \in [a,b] \tag{1.6}$$

integral denklemi bir tek $u \in L^2[a,b]$ çözümüne sahiptir.

(ii) $v - \mu T v = 0$ denklemi sıfırdan farklı bir $v \in L^2[a,b]$ çözümüne sahiptir ve ayrıca homojen

$$0 = u(s) - \mu \int_a^b k(s,t) u(t) dt \qquad s \in [a,b]$$

denklemi sıfırdan farklı $u \in L^2[a,b]$ çözümlerine sahiptir ve bu durumda homojen olmayan olmayan (1.6) denklemi çözümlere sahiptir ancak ve ancak

$$0 = v(s) - \overline{\mu} \int_a^b \overline{k(t,s)} v(t) dt \qquad s \in [a,b]$$

yi sağlayan her $v \in L^2[a,b]$ için

$$\int_a^b f(t) \overline{v(t)} dt = 0$$

olur.

Sonuç 1.2.3 *$k(s,t)$ bir L^2 çekirdeği ise k nın ürettiği integral operatörü T ise o zaman herhangi bir $\mu \in \mathbb{C}$ için ikinci tipten bir Fredholm integral denklemi Fredholm alternatifini sağlar.*

Tanım 1.2.4 *Açık bir $E \subseteq \mathbb{C}^2$ kümesi için $(z,w) \in E$ olduğunda $(w,z) \in E$ oluyor ise E ye simetrik küme denir. E üzerinde tanımlı kompleks değerli bir k fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar ise, E üzerinde bir simetrik analitik çekirdek olarak isimlendirilir;*

(i) k, E üzerinde süreklidir.
(ii) Her $(z,w) \in E$ için $k(z,w) = \overline{k(w,z)}$ dir.
(iii) k, E nin tüm noktalarında birinci değişkene göre analitiktir.

Tanım 1.2.5 *$[a,b] \times [a,b]$ üzerinde tanımlı kompleks değerli ölçülebilir bir k fonksiyonu eğer*

$$\int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 \, ds dt < \infty$$

özelliğini sağlar ise, o zaman k ya bir L^2 çekirdeği adı verilir.

Tanım 1.2.6 *$k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ bir L^2 çekirdeği olsun. Yani*

$$\int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 \, ds dt < \infty$$

sağlansın. O zaman

$$Tu(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt$$

ile tanımlı $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ operatörü bir Hilbert-Schmidt operatörüdür ve bu nedenle kompakttır.

Teorem 1.2.7

$$Tu(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt$$

ile verilen L^2 çekirdekli $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ operatörünün $T^* : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ adjointi her $v \in L^2[a,b]$ için

$$T^*v(s) = \int_a^b \overline{k(t,s)}v(t)dt$$

formülü ile verilir.

Teorem 1.2.7 den T^*, çekirdeği $\overline{k(t,s)}$ olan bir integral operatördür. Ayrıca, T^* nin L^2 çekirdekli bir operatör olduğu görülür.

Tanım 1.2.8 *$I = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ olmak üzere $k : I \times I \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonu*

$$\int_I \int_I |k(s,t)|^2 \, dsdt < \infty$$

koşulunu sağlasın. Böylece k çekirdekli $T_I : L^2(I) \to L^2(I)$ integral operatörü

$$T_I f(s) = \int_I k(s,t) f(t) dt$$

olarak tanımlanır. T_I kompakttır ve T_I nın T_I^* adjointi

$$k^*(t,s) = \overline{k(s,t)}$$

olmak üzere k^* çekirdekli bir integral operatörüdür.

Eğer

$$k(t,s) = \overline{k(s,t)}$$

ise k ya hermisyendir denir. Özel olarak k reel-değerli ve hermisyen, yani $k(s,t) = k(t,s)$ ise k ya simetriktir denir. Bu durumda T_I bir self-adjoint operatördür. Hangi I aralığında çalıştığımız açık ise T_I yerine kısaca T yazarız.

Tanım 1.2.9 *T kompleks bir $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı bir simetrik lineer operatör olsun. Buna göre her $f \in \mathcal{H}$ için eğer $\langle Tf, f \rangle \geq 0$ ise T pozitiftir denir ve $T \geq 0$ olarak yazılır. Genel olarak, T ve S, $\mathcal{H}$ üzerinde iki sınırlı simetrik lineer operatör olmak üzere eğer $T - S \geq 0$ ise $T \geq S$ denir. Eğer $-T \geq 0$ ise T operatörüne negatiftir denir ve $T \leq 0$ olarak yazılır.*

Tanım 1.2.10 *Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı simetrik bir T operatörü eğer pozitif ve birebir ise kesinlikle pozitif olarak adlandırılır ve $T > 0$ olarak yazılır.*

Tanım 1.2.11 *Eğer T ve S bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde kompakt pozitif operatörler ve $T \geq S$ ise S kesin pozitif olduğunda T kesin pozitiftir.*

Tanım 1.2.12 *Eğer I, $I \times I \subseteq E$ olacak şekilde (sınırlı) kapalı bir reel aralık ise I, k için kabul edilebilir olarak adlandırılır. Bu durumda k çekirdekli T integral operatörü, $L^2(I)$ üzerinde kompakt ve simetriktir.*

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1 TEMEL ESASLAR

T, bir H Hilbert uzayı üzerinde simetrik k çekirdekli herhangi bir integral operatörü olsun. k için kabul edilebilir tüm aralıkların kümesini göstermek için $Ad(k)$, T nin (kesinlikle) pozitif özdeğerlerinin sayısı için $N^+(k, I)$, T nin negatif özdeğerlerinin sayısı için $N^-(k, I)$ notasyonlarını kullanacağız. I aralığının belli olduğu durumda kısaca

$N^+(k, I) = N^+(T)$ ve $N^-(k, I) = N^-(T)$

yazarız. Kompakt simetrik T operatörünün pozitif özdeğerleri

$$\lambda_1^+(T) \geq \lambda_2^+(T) \geq \lambda_3^+(T) \geq \cdots$$

azalan sıralaması içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $(\lambda_n^+(T))$ ile gösterilir ve kompakt simetrik T operatörünün negatif özdeğerleri

$$\lambda_1^-(T) \leq \lambda_2^-(T) \leq \lambda_3^-(T) \leq \cdots$$

artan sıralama içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $\left(\lambda_n^-(T)\right)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.1 *$\mathcal{H}$ ve $\mathcal{H}_1$ Hilbert uzayları ve $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ kompakt bir lineer operatör olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{H}$ için*

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle f, \psi_n\rangle \phi_n$$

formunda T için bir genişleme vardır (Little 1987). Burada (ψ_n), $\mathcal{H}$ içinde ortonormal bir dizidir ve (ϕ_n), $\mathcal{H}_1$ içinde bir ortonormal dizidir ve $(s_n(T))$ sıfıra azalarak yaklaşan negatif olmayan bir reel sayılar dizisidir ve T nin yaklaşım (approximation) sayıları olarak adlandırılır. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ ve T nin pozitif olduğu durumda s_n ler T nin özdeğerleridir.

Uyarı 2.1.2

(i) Eğer T bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde kesinlikle pozitif kompakt lineer bir operatör ise, o zaman $\overline{ranT} = \mathcal{H}$ ve böylece $N^+(T) = \dim H$ olur. Özellikle bir I aralığı için eğer $\mathcal{H} = L^2(I)$ ise $N^+(T) = \infty$ dır.
(ii) Eğer T ve S bir H Hilbert uzayı üzerinde kompakt pozitif operatörler ve $T \geq S$ ise S kesinlikle pozitif olduğunda T kesinlikle pozitiftir.
Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir kompakt simetrik T operatörünün özdeğerleri **Courant-Weyl** formülleri kullanılarak belirlenebilir (Riesz and Sz-Nagy 1955).

$$\begin{aligned}\lambda_n^+(T) &= \sup_{|E|=n} \inf_{f\in E, \|f\|=1} \langle Tf, f\rangle, \\ \lambda_n^+(T) &= \inf_{\left|E^\perp\right|=n-1} \sup_{f\in E, \|f\|=1} \langle Tf, f\rangle.\end{aligned}$$

Her bir formülde E, $\mathcal{H}$ nin bir alt uzayını gösterir ve E nin boyutu $|E|$ dir. Eğer T sonlu N sayıda pozitif özdeğerlere sahip ise o zaman $n > N$ için her bir formülün sağ tarafı sıfır olur ve formüller her $n \geq 1$ için geçerli olacak şekilde $n > N$ için $\lambda_n^+(T) = 0$ şeklinde tanımlanabilir. $\lambda_n^-(T)$ nin belirlenmesi için formüllerde T yi $-T$ ile değiştirebiliriz. Bu, her iki durumda da sup ve inf in kendi aralarında yer değiştirmelerini verir. Pozitif özdeğerlerinin sayısı sonlu $M \geq 0$ ve negatif özdeğerlerinin sayısı sonlu $N \geq 0$ olan bir kompakt simetrik operatör A ise sırasıyla

$$\lambda_{n+M}^+(T+A) \leq \lambda_n^+(T) \text{ ve } \lambda_{n+N}^-(T+A) \geq \lambda_n^-(T) \tag{2.1}$$

ve bu nedenle

$$N^+(T+A) \leq N^+(T) + N^+(A) \text{ ve } N^-(T+A) \leq N^-(T) + N^-(A) \tag{2.2}$$

yazabiliriz (Riesz 1955). Eğer $T \geq 0$ ise ve A nın N tane negatif özdeğeri var ise o zaman $n \geq N$ için

$$\lambda_{n+N}^+(T) \leq \lambda_n^+(T+A) \leq \lambda_{n-N}^+(T) \tag{2.3}$$

olur. Özellikle, eğer $T \geq 0$ ve bu nedenle $N^-(T) = 0$ ise $N^-(T+A) \leq N$ olur.
Eğer $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ sürekli bir lineer operatör ise

$$\lambda_n^+(MTM^*) \leq \|M\|^2 \lambda_n^+(T) \tag{2.4}$$

olur ve M terslenebilir ise

$$\frac{1}{\|M^{-1}\|^2}\lambda_n^+(T) \leq \lambda_n^+(MTM^*) \leq \|M\|^2 \lambda_n^+(T) \tag{2.5}$$

olur. Bu durumda $N^+(MTM^*) = N^+(T)$ bulunur (Little 1992). Uniter bir $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ operatörü için (2.5) uygulanır ise

$$\lambda_n^+(T) = \lambda_n^+(UTU^*) \tag{2.6}$$

elde edilir.

Önerme 2.1.3 *T, bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde kompakt, simetrik bir operatör ve N bir pozitif tamsayı olsun.*
(i) *T en az N pozitif özdeğere sahiptir ancak ve ancak her $f \in E$ için*

$$\langle Tf, f\rangle \geq \delta \|f\|^2$$

olacak şekilde N boyutlu bir $E \subseteq \mathcal{H}$ alt uzayı ve $\delta > 0$ vardır.
(ii) *T en az N pozitif özdeğere sahiptir ancak ve ancak sıfırdan farklı her $f \in E$ için*

$$\langle Tf, f\rangle > 0$$

olacak şekilde N boyutlu bir $E \subseteq \mathcal{H}$ alt uzayı vardır.
(iii) *Eğer $\mathcal{H}_1$ bir Hilbert uzayı ve $M : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ sürekli bir lineer operatör ise $\mathcal{H}_1$ üzerindeki kompakt simetrik M^*TM operatörü için*

$$N^+(M^*TM) \leq N^+(T)$$

eşitsizliği sağlanır.
(iv) *Eğer M nin görüntü kümesi $\mathcal{H}$ içinde yoğun ise*

$$N^+(M^*TM) = N^+(T)$$

eşitliği sağlanır (Little 1992).

Teorem 2.1.4 ***(Mercer Teoremi)*** *I (sınırlı) kapalı bir aralık olmak üzere $k(s,t)$, $L^2(I)$ üzerinde tanımlı bir pozitif integral operatörünün çekirdeği olsun ve $k(s,t)$ nin $I \times I$ üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda, özvektörlerin bir ortonormal dizisi*

(ϕ_i), bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerin dizisi (λ_i) ve yakınsaklık mutlak ve düzgün anlamda olmak üzere, $s,t \in I$ için

$$k(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(s)\overline{\phi_i(t)}$$

dir (Riesz 1955).

Sonuç 2.1.5 *T, $L^2(I)$ üzerinde (I kapalı ve sınırlı), sürekli bir $k(s,t)$ çekirdekli, pozitif bir integral operatörü olsun. Bu durumda $s \in I$ için $k(s,s) \geq 0$ dır.*

Şimdi T operatörünün negatif ve pozitif özdeğer sayısı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.6 *$\rho > 0$ olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ olsun ve k nın, $I \times I$ üzerinde $s,t \in I$ için*

$$k(s,t) = k(-s,-t)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde sürekli bir simetrik çekirdek olduğunu varsayalım. Eğer T, $L^2(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen integral operatörü ise o zaman

(i) $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$, T nin değişmeyen alt uzaylarıdır $\left(T\left(L_e^2(I)\right) \subseteq L_e^2(I)\right.$ ve $T\left(L_o^2(I)\right) \subseteq \left.L_o^2(I)\right)$.

(ii) Eğer $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$, T nin $L_e^2(I)$ ya kısıtlanışı ise, T_e, $L^2(0,\rho)$ üzerinde $g \in L^2(0,\rho)$, $0 \leq s \leq \rho$ için

$$T_+ g(s) = \int_0^{\rho} (k(s,t) + k(s,-t))g(t)dt$$

ile verilen T_+ integral operatörüne uniter olarak denktir.

(iii) Eğer $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$, T nin $L_o^2(I)$ ya kısıtlanışı *ise,* T_o, $L^2(0,\rho)$ üzerinde $g \in L^2(0,\rho)$, $0 \leq s \leq \rho$ için

$$T_- g(s) = \int_0^{\rho} (k(s,t) - k(s,-t))g(t)dt$$

ile verilen T_- integral operatörüne uniter olarak denktir.

Uyarı 2.1.7 *Eğer $T_e \geq 0$ ve $T_o \leq 0$ ise*

$$N^+(T) = N^+(T_e) \text{ ve } N^-(T) = N^-(T_o)$$

olur.

2.2 G.LİTTLE TEOREMLERİ

Teorem 2.2.1 ***(Değişmezlik Teoremi)*** *k, simetrik bir $E \subseteq \mathbb{C}^2$ bölgesi üzerinde, simetrik analitik bir çekirdek olsun. Eğer I ve J, k için kabul edilebilir kapalı aralıklar ve $I \cap J \neq \varnothing$ ise*

$$N^+(k, I) = N^+(k, J) \text{ ve } N^-(k, I) = N^-(k, J)$$

olur. Diğer bir deyişle I ve J böyle iki aralık ise T_I ve T_J aynı sayıda pozitif ve negatif özdeğerlere sahiptir (Little 1992).

G.Little, belirli ayrık I, J aralıklarının durumunuda dahil etmek için bu teoremi genişletmiştir. İlk olarak, aşağıda verildiği gibi bir *diyagonal noktayı* tanımlamıştır.

Tanım 2.2.2 *k bazı $E \subseteq \mathbb{C}^2$ bölgesinde simetrik analitik bir çekirdek olsun. Bir $a \in \mathbb{R}$ noktası için eğer $(a, a) \in E$ ise bu a noktasına k nın bir diyagonal noktası denir.*

G. Little, *a diyagonal noktasını* kapsayan k için herhangi kabul edilebilir kapalı bir aralık I olmak üzere böyle bir a noktası için

$$N^+(k, a) := N^+(k, I)$$

tanımını yapmıştır ve benzer şekilde $N^-(k, a)$ yı tanımlamıştır. Teorem 2.2.1 den $N^+(k, a)$ ve $N^-(k, a)$ iyi-tanımlıdır.

Teorem 2.2.3 *$a < b$ olmak üzere a ve b simetrik analitik bir k çekirdeğinin diyagonal noktaları olsunlar. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığındaki her nokta k nın bir diyagonal noktası ise*

$$N^+(k, a) = N^+(k, b) \text{ ve } N^-(k, a) = N^-(k, b)$$

dir (Little 1992).

Şimdi Δ, $\mathbb{C}$ içindeki açık birim disk olmak üzere, k, $E = \Delta \times \Delta$ üzerinde simetrik analitik bir çekirdek olsun. $[-1, 1]$ içinde herhangi bir nokta k nın diyagonal bir noktası olduğundan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.2.4 *k çekirdeği, $\Delta \times \Delta$ üzerinde bir simetrik analitik çekirdek olsun. Eğer k için I ve J kabul edilebilir kapalı aralıklar ise*

$N^{+}(k, I) = N^{+}(k, J)$ *ve* $N^{-}(k, I) = N^{-}(k, J)$

olur (Little 1992).

Tanım 2.2.5 *T ve L, $I \times I$ üzerinde sırasıyla k ve l çekirdekleri ile tanımlı $L^2(I)$ üzerinde iki integral operatörü olsun. $T \geq 0$ olduğunda T nin pozitif tanımlı olduğunu söyleyeceğiz ve $k(s,t) \overset{\circ}{\geq} 0$ notasyonunu kullanacağız ve daima $s, t \in I$ olduğunu anlayacağız. Genel olarak $T \geq L$ olduğu zaman $k(s,t) \overset{\circ}{\geq} l(s,t)$ yazacağız (Little 1992).*

2.3 DENKLİKLER

ψ, $I = [a, b]$ kapalı aralığı üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun ve $c = \psi(a)$ ve $d = \psi(b)$ olmak üzere $J = [c, d]$ olsun. ψ nin kesin pozitif olduğunu ve I nın I^o iç bölgesi üzerinde sürekli türeve sahip olduğunu varsayalım. O zaman $g \in L^2(J)$, $s \in I$ için

$$Ug(s) = g(\psi(s))(\psi'(s))^{1/2}$$

ile tanımlı $U : L^2(J) \to L^2(I)$ operatörü $L^2(J)$ yi $L^2(I)$ üzerine (örten) dönüştüren bir uniter operatördür ve tersi olan $U^{-1} = U^*$ benzer şekilde (ψ^{-1} yardımı ile) $h \in L^2(I)$, $t \in J$ için

$$U^{-1}h(t) = h\left(\psi^{-1}(t)\right)\left(\left(\psi^{-1}\right)'(t)\right)^{1/2}$$

ile tanımlıdır. T_J, $L^2(J)$ üzerinde $k(s,t)$ çekirdekli bir integral operatörü ise bu durumda her $f \in L^2(I)$ için $UT_JU^*f(s)$ yi bulmaya çalışalım.

$$Tf(s) = \int k(s,t) f(t) dt$$

olduğundan

$$T_JU^*f(s) = \int k(s,t) f\left(\psi^{-1}(t)\right)\left(\left(\psi^{-1}\right)'(t)\right)^{1/2} dt$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} UT_JU^*f(s) &= \int_J \psi'(s)^{1/2} k(\psi(s), t) f(\psi^{-1}(t)) \psi^{-1'}(t)^{1/2} dt \\ &= \int_I \psi'(s)^{1/2} k(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{1/2} f(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $UT_JU^* := \psi T_I$ operatörü $L^2(I)$ üzerinde

$$\psi k(s,t) := \psi'(s)^{1/2} k(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{1/2}$$

çekirdekli bir integral operatörüdür ve bu nedenle T_J ve ψT_I tamamen aynı özdeğerlere sahiptir.

Tanım 2.3.1 *T, $L^2(J)$ üzerinde k çekirdekli integral operatörü ve T', $L^2(I)$ üzerinde k' çekirdekli integral operatörü olsun.*

(i) Sürekli ve terslenebilir lineer bir $M : L^2(J) \to L^2(I)$ operatörü için

$$T' = MTM^* \tag{2.7}$$

ise T integral operatörün T' integral operatörüne *simetrik olarak denktir* (ya da kısaca simetrik denktir) deriz.
(ii) Eğer (2.7) içindeki M uniter bir operatör ise T operatörünün T' integral operatörüne *uniter olarak denk* (ya da kısaca uniter denk) olduğunu söyleriz.
(iii)

$$T' = \psi T \tag{2.8}$$

olacak şekilde $\psi(I) = J$ ve I üzerinde $\psi' > 0$ olmak üzere yukarıdaki gibi reel değerli bir $\psi : I \to J$ fonksiyonu mevcut ise T integral operatörü T' integral operatörüne *uzamsal olarak denktir* (ya da kısaca uzamsal denktir) deriz ve $T \equiv T'$ ile gösteririz. Yani

$$k' = \psi k \tag{2.9}$$

olur.

Önerme 2.3.2

(i) Eğer T operatörü T' operatörüne uniter denk ise $\lambda_n^{\pm}(T) = \lambda_n^{\pm}(T')$ olur.
(ii) Eğer T operatörü T' operatörüne simetrik denk ise $\lambda_n^{\pm}(T) \approx \lambda_n^{\pm}(T')$ olur ve özel olarak

$$N^{\pm}(T) = N^{\pm}(T')$$

dir.

Önerme 2.3.3 *S, T sırasıyla $L^2(I)$ üzerinde*

$$\frac{1}{q(s,t)}, \frac{1}{q(s,t)-r(s,t)}$$

çekirdekli simetrik integral operatörler ve

(i) q ve r çekirdekleri $I \times I$ üzerinde sürekli,

(ii) $I \times I$ üzerinde $q(s,t) = \overline{q(t,s)}$, $r(s,t) = \overline{r(t,s)}$,

(iii) $I \times I$ üzerinde $|r(s,t)| < q(s,t)$ olsun.

Eğer I üzerinde S pozitif operatör ve r pozitif tanımlı çekirdek ise o zaman T pozitif operatördür ve $S \leq T$ dir. Ayrıca

$$\text{rank}T \geq \text{rank}S$$

dir ve her $n \geq 0$ için

$$0 \leq \lambda_n(S) \leq \lambda_n(T)$$

dir (Abbas 1997).

Önerme 2.3.4 *T operatörü $L^2(I)$ üzerinde*

$$k_0(s,t) = \frac{1}{1-st}, \qquad s,t \in I$$

çekirdekli integral operatör olsun. $-1 < a < b < 1$ olmak üzere $I = [a,b]$ ise bu durumda

$$N^+(k_0, I) = \infty \text{ ve } N^-(k_0, I) = 0$$

olur. $I \in Ad(k_0)$ verildiğinde $L^2(I)$ üzerinde tanımlı k_0 çekirdekli integral operatörü T_{0I} ile gösterilmektedir. Benzer şekilde

$$k_1(s,t) = \frac{1}{1+st}, \qquad s,t \in I$$

olarak tanımlansın. $I \in Ad(k_1)$ verildiğinde $L^2(I)$ üzerinde k_1 çekirdekli integral operatörü T_{1I} ile gösterilmektedir. Ayrıca

$$N^+(k_1, I) = \infty \text{ ve } N^-(k_1, I) = \infty$$

olur (Abbas 1997).

Önerme 2.3.5

$$k(s,t) = \frac{1}{(A-st)^{\gamma}}$$

olsun ve $A > \max\left\{\alpha^2, \beta^2\right\}$ *olmak üzere* $I = [\alpha, \beta]$ *olsun.* T, $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda* $T \geq 0$ *ve* $\gamma > 0$ *için* $N^+(T) = \infty$ *olur (Abbas 1997).*

Önerme 2.3.6 $I \in Ad\,(k)$ *olmak üzere* T *integral operatörü* $L^2(I)$ *üzerinde*

$$k\,(s,t) = \frac{1}{a + b\,(s+t) + cst}$$

çekirdekli bir integral operatörü olsun.

$$p\,(s,t) = a + b\,(s+t) + cst$$

olsun. Bu durumda

(i) $b^2 = ac$ ise o zaman $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ve $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$ olur. Bu durumda

$$a + b\,(s+t) + cst = \varepsilon(\gamma s + \delta)(\gamma t + \delta)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$k\,(s,t) = \frac{1}{\varepsilon(\gamma s + \delta)(\gamma t + \delta)}$$

olur. Bu 1 ranklı pozitif bir çekirdektir. Bu nedenle

$$N^+\,(T) = 1 \text{ ve } N^-\,(T) = 0$$

olur.

(ii) $b^2 > ac$ ise o zaman $\gamma, \delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma > 0$ olur. Bu durumda

$$a + b\,(s+t) + cst = (\gamma s + \delta)(\gamma t + \delta) - (\alpha s + \beta)\,(\alpha t + \beta)$$

olur. Dolayısıyla

$$k(s,t) = \frac{1}{q(s,t)} = \frac{1}{(\gamma s + \delta)(\gamma t + \delta) - (\alpha s + \beta)\,(\alpha t + \beta)}$$

olur. Bu durumda

$$N^+\,(T) = \infty \text{ ve } N^-\,(T) = 0$$

olur.

(iii) $b^2 < ac$ ise o zaman $\gamma, \delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma < 0$ olur. Bu durumda

$$a + b\,(s + t) + cst = \varepsilon\,[(\gamma s + \delta)(\gamma t + \delta) + (\alpha s + \beta)\,(\alpha t + \beta)]$$

olur. Dolayısıyla

$$k(s,t) = \frac{1}{q(s,t)} = \frac{1}{\varepsilon\,[(\gamma s + \delta)(\gamma t + \delta) + (\alpha s + \beta)\,(\alpha t + \beta)]}$$

olur. Bu durumda

$$N^{+}\,(T) = \infty \text{ ve } N^{-}\,(T) = \infty$$

olur (Abbas 1997).

Önerme 2.3.7 *γ pozitif bir tam sayı, φ sabit olmayan polinom olmak üzere*

$$k\,(s,t) = \frac{1}{(\varphi\,(s) + \varphi\,(t))^{\gamma}}$$

olsun.

$$\inf_{s \in I} \varphi\,(s) = \delta > 0$$

olacak şekilde I kapalı bir aralık olmak üzere $L^2(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen integral operatörü T olsun. Bu durumda $N^{+}(T) = \infty$ olmak üzere $I \in Ad\,(k)$ ve $T \geq 0$ olur (Abbas 1997).

BÖLÜM 3

ANALİTİK ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde rasyonel çekirdekli bazı integral operatörlerin özdeğer sayılarının bulunması ile ilgili önermeler verilecektir.

3.1 RASYONEL ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞER SAYILARI

Önerme 3.1.1 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

$$k(s,t) = \frac{1}{a + b(s+t) + cst + d(s^2+t^2) + est(s+t) + f(s^2t^2)}$$

olsun ve $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığını göz önüne alalım.* T, $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda bazı özel durumlarda* $N^+(T) = \infty$ *olur.*

İspat. $q(s,t)$ polinomu

$$a + b(s+t) + cst + d\left(s^2+t^2\right) + est(s+t) + f\left(s^2t^2\right)$$

formunda bir polinom olsun. λ herhangi bir reel sayı olsun. q_λ polinomunu

$$q_\lambda(s,t) = q(s-\lambda, t-\lambda)$$

şeklinde q polinomunun λ kadar ötelenmesi olarak tanımlayalım. Böylece bazı $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ ve

$$\begin{aligned}
A &= a - 2b\lambda + c\lambda^2(+2d+e) - 2f\lambda^3 \\
B &= b - c\lambda - 2d\lambda + 3e\lambda^2 - 2\lambda^3 f \\
C &= c - 4e\lambda + 4f\lambda^2 \\
D &= d - e\lambda + f\lambda^2
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} q_\lambda(s,t) &= q(s-\lambda, t-\lambda) \\ &= A + B(s+t) + Cst + D\left(s^2+t^2\right) + st(s+t)(e-2f\lambda) + f\left(s^2t^2\right) \end{aligned}$$

olur. Özel olarak $e = 2f\lambda$ seçelim. Bu durumda yeni çekirdeğimiz

$$A + B(s+t) + Cst + D\left(s^2+t^2\right) + f\left(s^2t^2\right)$$

olur. Şimdi T, $L^2(I)$ üzerinde

$$k(s,t) = \frac{1}{q(s,t)}$$

çekirdekli bir integral operatörü olsun ve I aralığı $k(s,t)$ çekirdeği için kabul edilebilir bir aralık olsun. $I_\lambda = I + \lambda$ olmak üzere $0 \in I_\lambda$ olacak şekilde λ reel sayısı seçelim. Şimdi $\psi(s) = s - \lambda$ ile tanımlı $\psi : I_\lambda \to I$ fonksiyonu seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \psi k(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}} k(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{q(\psi(s), \psi(t))} \\ &= \frac{1}{q(s-\lambda, t-\lambda)} \end{aligned}$$

olur. Böylece uzamsal denklikten

$$\lambda^{\pm}(\psi T) = \lambda^{\pm}(T)$$

olur. $I_\lambda \times I_\lambda$ üzerinde paydamız sıfırdan farklıdır. Çünkü

$$I \in Ad(k) \Longleftrightarrow (I+\lambda) \in Ad(\psi k)$$

olur. Bundan dolayı genellik kaybolmaksızın $q_\lambda(s,t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz. Bu $A > 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca çekirdeğimizi λ kadar ötelememize rağmen f reel sayısı sabit kalmıştır. Bu durumda $f = \pm 1$ gibi düşünülebilir. Şimdi elde ettiğimiz bu çekirdeğimizin özdeğer sayısını incelemeye çalışalım. Özel olarak $c \leq 0$ ve $f = -1$ durumunu inceleyelim. Bu durumda

$$\varphi(u) = \frac{a}{2} + bu + du^2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} k(s,t) &= \frac{1}{a + b(s+t) + cst + d(s^2+t^2) - s^2t^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + bs + ds^2\right) + \left(\frac{a}{2} + bt + dt^2\right) + cst - s^2t^2} \\ &= \frac{1}{\varphi(s) + \varphi(s) + cst - s^2t^2} \end{aligned}$$

olur. s^2t^2 pozitif tanımlı olduğundan Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} k(s,t) &= \frac{1}{\varphi(s)+\varphi(s)+cst-s^2t^2} \\ &\overset{\circ}{\geq} \frac{1}{\varphi(s)+\varphi(s)+cst} = l(s,t) \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} p(s,t) &= \varphi(s)+\varphi(s) \\ r(s,t) &= |c|\, st \end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$l(s,t) = \frac{1}{p(s,t)-r(s,t)}$$

olur. Şimdi $0 \in J \subset I$ şartını sağlayan herhangi bir J aralığı için L operatörü $L^2(J)$ üzerinde $l(s,t)$ çekirdekli bir integral operatörü olmak üzere

$$N^+(k,I) = N^+(l,J)$$

olur. $0 = r(0,0) < a = p(0,0)$ olduğundan dolayı $J \times J$ üzerinde $|r(s,t)| < p(s,t)$ olacak şekilde J aralığının yeterince küçük olduğunu süreklilikten dolayı varsayabiliriz. Bu nedenle Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} l(s,t) &= \frac{1}{p(s,t)-r(s,t)} \\ &\geq \frac{1}{p(s,t)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Önerme 2.3.7 den $N^+(T) = \infty$ olur. ■

Önerme 3.1.2 *$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{a+bst+c(s^4+t^4)}$$

olsun ve $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını göz önüne alalım. T, $L^2(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

olur.

İspat. $c = 0$ için Abbas (1992) çalışmalarından

$$N^{+}(T) = N^{-}(T) = \infty$$

olduğunu biliyoruz.

$c \neq 0$ için

$$k(-s,-t) = \frac{1}{a + bst + c(s^4 + t^4)} = k(s,t)$$

olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 2.1.6 dan dolayı $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$, T nin değişmez alt uzaylarıdır ve

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)]$$

çekirdekli $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ ve

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) - k(s,-t)]$$

çekirdekli $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörlerini ele alarak $T = T_e + T_o$ yazılabilir. Şimdi Önerme *2.3.3* kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a + bst + c(s^4 + t^4)} + \frac{1}{a - bst + c(s^4 + t^4)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(a + c(s^4 + t^4))}{(a + c(s^4 + t^4))^2 - b^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{1}{(a + c(s^4 + t^4)) - \dfrac{b^2s^2t^2}{a + c(s^4 + t^4)}} \\
&\overset{\circ}{\geq} \frac{1}{a + c(s^4 + t^4)} = l(s,t)
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde l ye karşılık gelen integral operatörü olsun. $\gamma = 1$ ve

$$\varphi(u) = \frac{a}{2} + cu^4$$

olmak üzere Önerme 2.3.7 den $N^{+}(L) = \infty$ olmak üzere $L \geq 0$ olur. Bu nedenle $N^{+}(T_e) = \infty$ olmak üzere $T_e \geq 0$ olur.

Şimdi $T' = -T_o$ ve $k' = -k_o$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a + c(s^4+t^4) - bst} - \frac{1}{a + c(s^4+t^4) + bst}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2bst}{(a + c(s^4+t^4))^2 - b^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{bst}{(a + c(s^4+t^4))^2 - b^2s^2t^2}
\end{aligned}$$

olur.

$$p(s,t) = \left(a + c\left(s^4+t^4\right)\right)^2 - b^2s^2t^2$$

olmak üzere

$$l(s,t) = \frac{1}{p(s,t)}$$

olsun. L, $L^2(I)$ üzerinde l ye karşılık gelen integral operatörü olsun. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
l(s,t) &= \frac{1}{(a + c(s^4+t^4))^2 - b^2s^2t^2} \\
&\overset{\circ}{\geq} \frac{1}{(a + c(s^4+t^4))^2}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\gamma = 2$ ve

$$\varphi(u) = \frac{a}{2} + cu^4$$

olmak üzere Önerme 2.3.7 den $N^+(L) = \infty$ olmak üzere $L \geq 0$ olur. Şimdi

$$Mf(s) = \sqrt{b}sf(s)$$

ile tanımlı çarpım operatörü M olsun. Böylece $MLM = T'$ olur. Önerme 2.3.2 den dolayı $T' \geq 0$ ve $N^+(T') = N^+(L) = \infty$ bulunur. $T' = -T_o$ olduğu için $T_o \leq 0$ ve $N^-(T_o) = \infty$ olur. ■

Önerme 3.1.3 *$a, b \in \mathbb{R}$ ve hepsi aynı anda 0 olmamak şartıyla*

$$k(s,t) = \frac{1}{(a + bst)^2}$$

olsun. $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığını göz önüne alalım.* T, $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda*

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

olur.

İspat. $k(s,t) = k(-s,-t)$ olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 2.1.6 den dolayı $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$, T nin değişmez alt uzaylarıdır ve

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)]$$

çekirdekli $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ ve

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) - k(s,-t)]$$

çekirdekli $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörlerini ele alarak $T = T_e + T_o$ yazılabilir. Önerme *2.3.3* kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2 + b^2s^2t^2 + 2abst} + \frac{1}{a^2 + b^2s^2t^2 - 2abst}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(a^2 + b^2s^2t^2)}{(a^2 + b^2s^2t^2)^2 - 4a^2b^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{1}{(a^2 + b^2s^2t^2) - \dfrac{4a^2b^2s^2t^2}{(a^2 + b^2s^2t^2)^2}} \\
&\overset{\circ}{\geq} \frac{1}{(a^2 + b^2s^2t^2)} = l(s,t)
\end{aligned}$$

olsun. L, $L^2(I)$ üzerinde $l(s,t)$ çekirdekli integral operatörü olsun. $l(s,t) \overset{\circ}{\geq} 0$ olduğundan buna karşılık gelen L operatörü pozitiftir. Dolayısıyla $T_e \geq 0$ ve $N^+(T_e) = \infty$ olur.

Şimdi $T' = -T_o$ ve $k' = -k_o$ olsun.

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}[-k(s,t) + k(s,-t)] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a^2 + b^2s^2t^2 + 2abst} + \frac{1}{a^2 + b^2s^2t^2 - 2abst}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4abst}{(a^2 + b^2s^2t^2)^2 - 4a^2b^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{2agst}{(a^2 + b^2s^2t^2)^2 - 4a^2b^2s^2t^2}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t)=\frac{1}{\left(a^2+b^2s^2t^2\right)^2-4a^2b^2s^2t^2}$$

çekirdekli integral operatörü olsun. Böylece

$$l(s,t)\geq\frac{1}{\left(a^2+b^2s^2t^2\right)^2}\overset{\circ}{\geq}0$$

olur. Böylece

$$Mf(s)=\sqrt{2ab}sf(s)$$

ile tanımlı M çarpım operatörünü ele alalım. Böylece $MLM=T'$ olur. Dolayısıyla Önerme 2.3.2 den $T'\geq 0$ olur ve $T'=-T_o$ olduğundan $T_o\leq 0$ ve $N^-(T_o)=\infty$ olur. Sonuç olarak

$$N^+(T)=N^-(T)=\infty$$

olur. ■

Önerme 3.1.4 *$a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ve $a>0$ olmak üzere*

$$k(s,t)=\frac{1}{a+bst+c(s^2+t^2)+d(s^4+t^4)}$$

olsun ve $\rho>0$, $I\in Ad(k)$ yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere $I=[-\rho,\rho]$ simetrik aralığını göz önüne alalım. T, $L^2(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda

$$N^+(T)=N^-(T)=\infty$$

olur.

İspat. $c=0$ için Önerme 3.1.2 den

$$N^+(T)=N^-(T)=\infty$$

olduğunu biliyoruz.

$c\neq 0$ için

$$k(-s,-t)=\frac{1}{a+bst+c(s^2+t^2)+d(s^4+t^4)}=k(s,t)$$

olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 2.1.6 dan dolayı $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$, T nin değişmez alt uzaylarıdır ve

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right]$$

çekirdekli $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ ve

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right]$$

çekirdekli $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörlerini ele alarak $T = T_e + T_o$ yazılabilir. Şimdi Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a + bst + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)} + \frac{1}{a - bst + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right)}{\left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right)^2 - b^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right) - \dfrac{b^2s^2t^2}{a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)}} \\
&\geq \frac{1}{a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)} = l(s,t)
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde l ye karşılık gelen integral operatörü olsun. $\gamma = 1$ ve

$$\varphi(u) = \frac{a}{2} + cu^2 + du^4$$

olmak üzere Önerme 2.3.7 den $N^+(L) = \infty$ olmak üzere $L \geq 0$ olur. Bu nedenle $N^+(T_e) = \infty$ olmak üzere $T_e \geq 0$ olur.

Şimdi $T' = -T_o$ ve $k' = -k_o$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4) - bst} - \frac{1}{a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4) + bst}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2bst}{\left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right)^2 - b^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{bst}{\left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right)^2 - b^2s^2t^2}
\end{aligned}$$

olur.

$$p(s,t) = \left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right)^2 - b^2s^2t^2$$

olmak üzere

$$l(s,t) = \frac{1}{p(s,t)}$$

olsun. L, $L^2(I)$ üzerinde l ye karşılık gelen integral operatörü olsun. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} l(s,t) &= \frac{1}{\left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right)^2 - b^2s^2t^2} \\ &\geq \frac{1}{\left(a + c(s^2+t^2) + d(s^4+t^4)\right)^2} \end{aligned}$$

olur. Böylece $\gamma = 2$ ve

$$\varphi(u) = \frac{a}{2} + cu^2 + du^4$$

olmak üzere Önerme 2.3.7 den $N^+(L) = \infty$ olmak üzere $L \geq 0$ olur. Şimdi

$$Mf(s) = \sqrt{b}sf(s)$$

ile tanımlı çarpım operatörü M olsun. Böylece $MLM = T'$ olur. Önerme 2.3.2 den dolayı $T' \geq 0$ ve $N^+(T') = N^+(L) = \infty$ bulunur. $T' = -T_o$ olduğu için $T_o \leq 0$ ve $N^-(T_o) = \infty$ olur. Dolayısıyla

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

olur. ■

Aşağıdaki önermede daha önce Soykan (2008 a,b) de incelen çekirdekler daha genel hale getirilmiştir.

Önerme 3.1.5 *$a, b \in \mathbb{R}$ ve hepsi aynı anda 0 olmamak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{(a+bst)^{2n}}$$

olsun. $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını göz önüne alalım. T, $L^2(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

olur.

İspat.

$$k\left(s,t\right)=\frac{1}{\left(a+bst\right)^{2n}}=\frac{1}{\left(a+b(-s)(-t)\right)^{2n}}=k\left(-s,-t\right)$$

olduğundan Teorem 2.1.6 kullanılarak $L_e^2\left(I\right)$ ve $L_o^2\left(I\right)$ uzayları T operatörünün değişmez alt uzaylarıdır. Ayrıca $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_e\left(s,t\right)=\frac{1}{2}\left[k(s,t)+k(s,-t)\right]$$

ve $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_o\left(s,t\right)=\frac{1}{2}\left[k(s,t)-k(s,-t)\right]$$

olmak üzere

$$T=T_e+T_o$$

yazılabilir. Öncelikle $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^+\left(T_e\right)=\infty$$

olduğu gösterilecektir. Daha sonra da bu operatörün negatif özdeğer sayısına bakılacaktır. $\binom{n}{r}$, n nin r li kombinasyonu olmak üzere ve

$$(s+t)^{2n}=\binom{2n}{0}s^{2n}+\binom{2n}{1}s^{2n-1}t^1+\binom{2n}{2}s^{2n-2}t^2+\ldots+\binom{2n}{2n}t^{2n}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
k_e\left(s,t\right) &= \frac{1}{2}\left[k\left(s,t\right)+k\left(s,-t\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(a+bst\right)^{2n}}+\frac{1}{\left(a-bst\right)^{2n}}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\binom{2n}{0}a^{2n}+\binom{2n}{1}a^{2n-1}bst+\ldots+\binom{2n}{2n}b^{2n}s^{2n}t^{2n}}\right]+\\
&\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\binom{2n}{0}a^{2n}-\binom{2n}{1}a^{2n-1}bst+\ldots+\binom{2n}{2n}b^{2n}s^{2n}t^{2n}}\right]\\
&\geq \frac{1}{\binom{2n}{0}a^{2n}+\binom{2n}{2}a^{2n-2}b^2s^2t^2+\ldots+\binom{2n}{2n}b^{2n}s^{2n}t^{2n}}=l(s,t)\overset{\circ}{\geq}0
\end{aligned}$$

elde edilir. $l(s,t)\overset{\circ}{\geq}0$ çekirdeğine karşılık gelen L operatörünün pozitif olmasından dolayı $T_e \geq 0$ ve $N^+\left(T_e\right)=\infty$ olduğu elde edilir. ■

Şimdi $T_o \leq 0$ ve bundan dolayı $N^-(T_o) = \infty$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $T' = -T_o$ ve $k' = -k_o$ alalım. $T^{'} \geq 0$ olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır.

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right]$$

olmak üzere $k'(s,t)$ çekirdeği

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a-bst)^{2n}} - \frac{1}{(a+bst)^{2n}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\binom{2n}{0}a^{2n} - \binom{2n}{1}a^{2n-1}bst + \ldots + \binom{2n}{2n}b^{2n}s^{2n}t^{2n}}\right] - \\
&\quad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\binom{2n}{0}a^{2n} + \binom{2n}{1}a^{2n-1}bst + \ldots + \binom{2n}{2n}b^{2n}s^{2n}t^{2n}}\right] \\
&= \frac{\binom{2n}{1}a^{2n-1}bst + \binom{2n}{3}a^{2n-3}b^3s^3t^3 + \ldots + \binom{2n}{2n-1}ab^{2n-1}s^{2n-1}t^{2n-1}}{(a+bst)^{2n}(a-bst)^{2n}} \\
&= \frac{\binom{2n}{1}a^{2n-1}bst}{(a^2-b^2s^2t^2)^{2n}} + \frac{\binom{2n}{3}a^{2n-3}b^3s^3t^3}{(a^2-b^2s^2t^2)^{2n}} + \ldots + \frac{\binom{2n}{2n-1}ab^{2n-1}s^{2n-1}t^{2n-1}}{(a^2-b^2s^2t^2)^{2n}} \\
&= l_1 + l_2 + \ldots + l_n
\end{aligned}$$

şekilde parçalanmıştır. Öncelikle l_1 çekirdeği ele alınacaktır.

$$M_1 f(s) = a^n \sqrt{\frac{\binom{2n}{1}}{a}} bsf(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
l_1(s,t) &= \frac{\binom{2n}{1}a^{2n-1}bst}{(a^2-b^2s^2t^2)^{2n}} \\
&= a^n\sqrt{\frac{\binom{2n}{1}}{a}}bs\frac{1}{(a^2-b^2s^2t^2)^{2n}}a^n\sqrt{\frac{\binom{2n}{1}}{a}}bt
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$r_1(s,t) = \frac{1}{(a^2-b^2s^2t^2)^{2n}}$$

alınırsa ve $r_1(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatör R_1 ise

$$L_1 = M_1 R_1 M_1^*$$

elde edilir. $r_1(s,t)\overset{\circ}{\geq}0$ olduğundan $N^+(R_1)=\infty$ olur ve uniter denklikden

$L_1 \geq 0$ ve $N^+(L_1)=\infty$

elde edilir. Aynı işlemler $l_2\,(s,t)$ çekirdeği için de yapılır.

$$M_2 f(s) = a^{n-1}\sqrt{\frac{\binom{2n}{3}}{a} b^3 s^3} f\,(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} l_2\,(s,t) &= \frac{a^{2n-3} b^3 s^3 t^3}{\left(a^2 - b^2 s^2 t^2\right)^{2n}} \\ &= a^{n-1}\sqrt{\frac{\binom{2n}{3}}{a} b^3 s^3} \frac{1}{\left(a^2 - b^3 s^2 t^2\right)^{2n}} a^{n-1}\sqrt{\frac{\binom{2n}{3}}{a} b^3 t^3} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$r_2(s,t) = \frac{1}{\left(a^2 - b^2 s^2 t^2\right)^{2n}}$$

alınırsa ve $r_2(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatör R_2 ise

$$L_2 = M_2 R_2 M_2^*$$

elde edilir. $r_2(s,t)\overset{\circ}{\geq}0$ olduğundan $N^+(R_2)=\infty$ olur ve uniter denklikden

$L_2 \geq 0$ ve $N^+(L_2)=\infty$

bulunur. Aynı durum $l_n\,(s,t)$ için incelenecektir.

$$M_n f(s) = \sqrt{\binom{2n}{2n-1} A}\; s^{2n-1} f\,(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} l_n\,(s,t) &= \frac{\binom{2n}{2n-1} a b^{2n-1} s^{2n-1} t^{2n-1}}{\left(a^2 - b^2 s^2 t^2\right)^{2n}} \\ &= \sqrt{\binom{2n}{2n-1} a b^{2n-1}} s^{2n-1} \frac{1}{\left(a^2 - b^2 s^2 t^2\right)^{2n}} \sqrt{\binom{2n}{2n-1} a b^{2n-1}}\; t^{2n-1} \end{aligned}$$

olur.

$$r_n(s,t) = \frac{1}{\left(a^2 - b^2 s^2 t^2\right)^{2n}}$$

alınırsa ve $r_n(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatör R_n ise

$$L_n = M_n R_n M_n^*$$

elde edilir. $r_n(s,t) \overset{\circ}{\geq} 0$ olduğundan $N^+(R_n) = \infty$ olur ve uniter denklikden

$$L_n \geq 0 \text{ ve } N^+(L_n) = \infty$$

bulunur. Böylece $l_1, l_2, ..., l_n$ çekirdeklerine karşılık gelen operatörler pozitif olduğundan k' çekirdeğine karşılık gelen T' integral operatörü pozitiftir. Bu yüzden $T' \geq 0$ ve dolayısıyla $T_o \leq 0$ olur. Buradan

$$N^-(T) = N^-(T_o) = \infty$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

elde edilir.

Önerme 3.1.6 *$c, d, e \in \mathbb{R}$ ve hepsi aynı anda 0 olmamak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{cst + ds^2t^2 + e\left(s^4 + t^4\right)}$$

olsun. $\rho > 0$, $I \in Ad\,(k)$ yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını göz önüne alalım. T, $L^2\,(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

olur.

İspat.

$$k(s,t) = k(-s,-t)$$

olduğundan dolayı Teorem 2.1.6 kullanılarak $L_e^2\,(I)$ ve $L_o^2\,(I)$ uzayları T operatörünün değişmez alt uzaylarıdır. Ayrıca $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_e\,(s,t) = \frac{1}{2}\,[k(s,t) + k(s,-t)]$$

ve $T_o : L^2_o(I) \rightarrow L^2_o(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right]$$

olmak üzere

$$T = T_e + T_o$$

yazılabilir. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{cst + ds^2t^2 + e\left(s^4+t^4\right)} + \frac{1}{-cst + ds^2t^2 + e\left(s^4+t^4\right)}\right] \\
&= \frac{e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2}{\left(e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2} \\
&= \frac{1}{e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2 - \dfrac{c^2s^2t^2}{e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2}} \geq \frac{1}{e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2}
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{1}{e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2}$$

çekirdekli bir integral operatörü olsun. $l(s,t) \overset{\circ}{\geq} 0$ olduğundan dolayı $k_e(s,t) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $T_e \geq 0$ ve $N^+(T) = \infty$ olur.

Şimdi

$$k_o(s,t) = -k'(s,t)$$

olsun.

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-cst + e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2} - \frac{1}{cst + e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2}\right] \\
&= \frac{cst}{\left(e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2}
\end{aligned}$$

olur. Buradan L,

$$l(s,t) = \frac{1}{\left(e\left(s^4+t^4\right) + ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2}$$

çekirdekli integral operatörü olsun. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} l(s,t) &= \frac{1}{\left(e\left(s^4+t^4\right)+ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2} \\ &\geq \frac{1}{\left(e\left(s^4+t^4\right)+ds^2t^2\right)^2} \\ &\overset{\circ}{\geq} 0 \end{aligned}$$

olur.

$$Mf\left(s\right) = \sqrt{c}sf\left(s\right)$$

ile tanımlı M çarpım operatörünü göz önüne alalım. Böylece $MLM^* = T'$ olur. Böylece Önerme 2.3.2 den $L \geq 0$ olduğundan $T_o \leq 0$ olur. Dolayısıyla $N^-(T) = \infty$ olur. ■

Önerme 3.1.7 *$a, c, d \in \mathbb{R}$ $a > 0$ olmak üzere*

$$k\left(s,t\right) = \frac{1}{a + cst + ds^2t^2}$$

olsun. $\rho > 0$, $I \in Ad\left(k\right)$ yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını göz önüne alalım. T, $L^2\left(I\right)$ üzerinde k ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda

$$N^+\left(T\right) = N^-\left(T\right) = \infty$$

olur.

İspat. $d = 0$ için daha önceden Abbas (1992) nin çalışmalarından

$$N^+\left(T\right) = N^-\left(T\right) = \infty$$

olduğunu biliyoruz.
$d \neq 0$ için

$$k\left(-s,-t\right) = \frac{1}{a + cst + ds^2t^2} = k\left(s,t\right)$$

olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 2.1.6 dan dolayı $L_e^2\left(I\right)$ ve $L_o^2\left(I\right)$, T nin değişmez alt uzaylarıdır ve

$$k_e\left(s,t\right) = \frac{1}{2}\left[k\left(s,t\right) + k\left(s,-t\right)\right]$$

çekirdekli $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ ve

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right]$$

çekirdekli $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörleri ele alınarak $T = T_e + T_o$ yazılabilir. Şimdi

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+cst+ds^2t^2} + \frac{1}{a-cst+ds^2t^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(a+ds^2t^2\right)}{\left(a+ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(a+ds^2t^2\right) - \dfrac{c^2s^2t^2}{\left(a+ds^2t^2\right)}} \\
&\geq \frac{1}{a+ds^2t^2} \overset{\circ}{\geq} 0
\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $T_e \geq 0$ dolayısıyla $N^+(T_e) = \infty$ olur.

Şimdi $T' = -T_o$ ve $k' = -k_o$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+ds^2t^2-cst} - \frac{1}{a+ds^2t^2+cst}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2cst}{\left(a+ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2}\right] \\
&= \frac{cst}{\left(a+ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2}
\end{aligned}$$

olur.

$$p(s,t) = \left(a+ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2$$

olmak üzere L, $L^2(I)$ üzerinde l ye karşılık gelen integral operatörü ve

$$l(s,t) = \frac{1}{p(s,t)}$$

olsun. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
l(s,t) &= \frac{1}{\left(a+ds^2t^2\right)^2 - c^2s^2t^2} \\
&\geq \frac{1}{\left(a+ds^2t^2\right)^2} \overset{\circ}{\geq} 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $N^+(L) = \infty$ olmak üzere $L \geq 0$ olur. Şimdi

$$Mf(s) = \sqrt{c}sf(s)$$

ile tanımlı çarpım operatörü M olsun. Böylece $MLM = T'$ olur. Önerme 2.3.2 den dolayı $T' \geq 0$ ve $N^+(T') = N^+(L) = \infty$ bulunur. $T' = -T_o$ olduğu için $T_o \leq 0$ ve $N^-(T_o) = \infty$ olur. ■

Önerme 3.1.8

$$k(s,t) = \frac{1}{s^2t^2 + (s-t)^2}$$

olsun. $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığını göz önüne alalım.* T, $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda*

$N^+(T) = \infty$ *ve* $N^-(T) = 0$

olur.

İspat.

$$k(-s,-t) = \frac{1}{s^2t^2 + (s-t)^2} = k(s,t)$$

olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 2.1.6 dan $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$, T nin değişmez alt uzaylarıdır ve

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right]$$

çekirdekli $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ ve

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right]$$

çekirdekli $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörleri ele alınarak $T = T_e + T_o$ yazılabilir. Şimdi Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2t^2 + (s-t)^2} + \frac{1}{s^2t^2 + (s+t)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2t^2 + s^2 + t^2 - 2st} + \frac{1}{s^2t^2 + s^2 + t^2 + 2st}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(s^2t^2 + s^2 + t^2)}{(s^2t^2 + s^2 + t^2)^2 - 4s^2t^2}\right] \\
&\geq \frac{1}{(s^2t^2 + s^2 + t^2) - \dfrac{4s^2t^2}{(s^2t^2 + s^2 + t^2)}} \\
&\geq \frac{1}{s^2t^2 + s^2 + t^2} \\
&\overset{\circ}{\geq} 0
\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $N^{+}(T_e) = \infty$ olmak üzere $T_e \geq 0$ olur.

Şimdi negatif özdeğer sayılarını inceleyelim.

$$\begin{aligned}
k_o(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2t^2 + (s-t)^2} - \frac{1}{s^2t^2 + (s+t)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2t^2 + s^2 + t^2 - 2st} - \frac{1}{s^2t^2 + s^2 + t^2 + 2st}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4st}{(s^2t^2 + s^2 + t^2)^2 - 4s^2t^2}\right] \\
&= \frac{2st}{(s^2t^2 + s^2 + t^2)^2 - 4s^2t^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{1}{(s^2t^2 + s^2 + t^2)^2 - 4s^2t^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
l(s,t) &= \frac{1}{(s^2t^2 + s^2 + t^2)^2 - 4s^2t^2} \\
&\geq \frac{1}{(s^2t^2 + s^2 + t^2)^2} \overset{\circ}{\geq} 0
\end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$Mf(s) = \sqrt{2}sf(s)$$

ile tanımlı çarpım operatörü M olsun. Böylece $MLM = T_o$ olur. Önerme 2.3.2 kullanılarak $T_o \geq 0$ ve $N^{-}(T_o) = 0$ olur. ■

Önerme 3.1.9 *$0 < \rho < 1$ ve $I = [-\rho, \rho]$ olmak üzere T, $L^2(I)$ üzerinde*

$$k(s,t) = \frac{st}{1 - st + s^2t^2}$$

çekirdekli integral operatörü olsun. Bu durumda $k(s,t)$ çekirdekli T integral operatörünün

$$N^{+}(T) = \infty \text{ ve } N^{-}(T) = 0$$

olur.

İspat.

$$k(-s,-t) = \frac{st}{1 - st + s^2t^2} = k(s,t)$$

olduğu açıktır. Bu nedenle $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$, $L^2(I)$ nın değişmez alt uzaylarıdır ve

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)]$$

çekirdekli $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ ve

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) - k(s,-t)]$$

çekirdekli $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörleri ele alarak $T = T_e + T_o$ yazılabilir. Şimdi

$$\begin{aligned} k_o(s,t) &= \frac{1}{2}[k(s,t) - k(s,-t)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{st}{1 - st + s^2t^2} - \frac{st}{1 + st + s^2t^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2s^2t^2}{(1 + s^2t^2)^2 - s^2t^2}\right] \\ &= \frac{s^2t^2}{(1 + s^2t^2)^2 - s^2t^2} \end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{1}{(1 + s^2t^2)^2 - s^2t^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Şimdi Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} l(s,t) &= \frac{1}{(1 + s^2t^2)^2 - s^2t^2} \\ &\geq \frac{1}{(1 + s^2t^2)^2} \\ &\mathring{\geq} 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$Mf(s) = s^2 f(s)$$

ile tanımlı çarpım operatörü M olsun. Böylece $MLM = T_o$ olur. Bundan dolayı $L \geq 0$ ve $N^-(L) = N^-(T_o) = N^-(T) = 0$ bulunur.

Şimdi pozitif özdeğer sayısını incelersek;

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t)+k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{st}{1-st+s^2t^2}+\frac{st}{1+st+s^2t^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2st\left(1+s^2t^2\right)}{\left(1+s^2t^2\right)^2-s^2t^2}\right] \\
&= \frac{st\left(1+s^2t^2\right)}{\left(1+s^2t^2\right)^2-s^2t^2} \\
&= \frac{st}{\left(1+s^2t^2\right)-\dfrac{s^2t^2}{1+s^2t^2}}
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{1}{\left(1+s^2t^2\right)-\dfrac{s^2t^2}{1+s^2t^2}}$$

çekirdekli integral operatörü olsun. Şimdi Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
l(s,t) &= \frac{1}{\left(1+s^2t^2\right)-\dfrac{s^2t^2}{1+s^2t^2}} \\
&\geq \frac{1}{1+s^2t^2} \\
&\overset{\circ}{\geq} 0
\end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$Mf(s) = sf(s)$$

ile tanımlı çarpım operatörü M olsun. Böylece $MLM = T_e$ olur. Bundan dolayı $L \geq 0$ olduğundan $N^+(L) = N^+(T_e) = N^+(T) = \infty$ bulunur. ■

Şimdi bu çekirdeğimizi kullanabileceğimiz daha genel bir çekirdek tanımlayarak o çekirdeğin negatif ve özdeğer sayılarını incelemeye çalışalım.

Önerme 3.1.10 *Hepsi aynı anda sıfır olmayacak şekilde* $a, c \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $0 < \rho < 1$, $I = [-\rho, \rho]$ *olmak üzere* T, $L^2(I)$ *üzerinde*

$$k(s,t) = \frac{a + cst + as^2t^2}{1 - st + s^2t^2}$$

çekirdekli integral operatörü olsun. Bu kısımda $N^+(T)$ *ve* $N^-(T)$ *yi belirleyeceğiz.*

İspat.

$$\begin{aligned} k(s,t) &= \frac{a+cst+as^2t^2}{1-st+s^2t^2} \\ &= a+\frac{(a+c)\,st}{1-st+s^2t^2} \end{aligned}$$

olur. Burada

$$k'(s,t)=\frac{st}{1-st+s^2t^2}$$

olmak üzere

$$k\,(s,t)=a+(a+c)k'(s,t)$$

olur.

$a+c=0$ $(a>0)$ ise

$$k\,(s,t)=a+(a+c)k'(s,t)=a$$

olur. Dolayısıyla

$$N^+(T)=1 \text{ ve } \; N^-(T)=0$$

olduğu kolayca görülür.

$a+c\neq 0$ için T', $L^2\,(I)$ üzerinde k' çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Önerme 3.1.9 den $N^+(T')=\infty$ ve $N^-(T')=0$ olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla $a+c>0$ için

$$N^+(T)=\infty \text{ ve } N^-(T)=0$$

elde edilir.

$a+c<0$ için ya $a=0$ ya da $a>0$ dır.

$a=0$ ise

$$k\,(s,t)=a+(a+c)k'(s,t)=(a+c)k'(s,t)$$

olur. $a+c<0$ olduğundan dolayı

$$N^+(T)=0 \text{ ve } N^-(T)=\infty$$

olur.

$a > 0$ ise $a + c < 0$ olduğundan $c < 0$ olur. Bu durumda

$$N^+(T) \leq 1 \text{ ve } N^-(T) = \infty$$

olur. T nin tam olarak bir pozitif özdeğeri olduğunu yani $N^+(T) = 1$ olduğunu iddia ediyoruz ve şimdi bu iddiamızı ispatlayacağız. Eğer $T \leq 0$ ise her $s \in I$ için $k(s,s) \leq 0$ dır. Fakat $k(0,0) = a > 0$ dır ve bu nedenle T negatif değildir ve dolayısıyla T integral operatörünün bir tane pozitif özdeğeri vardır. Yani

$$N^+(T) = 1 \text{ ve } N^-(T) = \infty$$

olur. ■

3.2 TRİGONOMETRİK VE HİPERBOLİK ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞER SAYILARI

Bu kısımda trigonometrik ve hiperbolik çekirdeklere sahip bazı integral operatörlerin özdeğer sayıları incelenmiştir.

Önerme 3.2.1

$$k(s,t) = \frac{1}{s^2t^2 - \cosh(s-t)}$$

olsun ve $\rho > 0$, $I \in Ad\,(k)$ *olacak şekilde* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığını düşünelim.* T, $L^2\,(I)$ *üzerinde* k *çekirdeğine karşılık gelen integral operatör olsun. Bu durumda*

$$N^+\,(T) = \infty \textit{ ve } N^-\,(T) = \infty$$

olur.

İspat.

$$k\,(s,t) = \frac{1}{s^2t^2 - \cosh(s-t)} = k\,(-s,-t)$$

olduğundan Teorem *2.1.6* kullanılarak $L^2_e\,(I)$ ve $L^2_o\,(I)$ uzayları T operatörünün değişmez alt uzaylarıdır. Ayrıca $T_e : L^2_e(I) \to L^2_e(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_e\,(s,t) = \frac{1}{2}\,[k(s,t) + k(s,-t)]$$

ve $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right]$$

olmak üzere

$$T = T_e + T_o$$

yazılabilir.

Öncelikle $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^+(T_e) = \infty$$

olduğu gösterilecektir. Daha sonra da bu operatörün negatif özdeğer sayısına bakılacaktır.

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2t^2 - \cosh(s-t)} + \frac{1}{s^2t^2 - \cosh(s+t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2t^2 - \cosh s\cosh t + \sinh s\sinh t} + \frac{1}{s^2t^2 - \cosh s\cosh t - \sinh s\sinh t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(s^2t^2 - \cosh s\cosh t\right)}{\left(s^2t^2 - \cosh s\cosh t\right)^2 - \left(\sinh s\sinh t\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(s^2t^2 - \cosh s\cosh t\right) - \dfrac{\left(\sinh s\sinh t\right)^2}{\left(s^2t^2 - \cosh s\cosh t\right)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{\left(s^2t^2 - \cosh s\cosh t\right) - \dfrac{\left(\sinh s\sinh t\right)^2}{\left(s^2t^2 - \cosh s\cosh t\right)}} \\
&\geq \frac{1}{s^2t^2 - \cosh s\cosh t}
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{1}{s^2t^2 - \cosh s\cosh t}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle $T_e \geq L$ olur. Dolayısıyla $L \geq 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Şimdi $0 < \delta < \rho$ seçelim ve $J = [\delta, \rho]$ olsun. O zaman $N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(l, J)$ elde edilir. $\psi(s) = \cosh^{-1} s$ olsun. Buradan $\psi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$ ve $J' = [\cosh \delta, \cosh \rho]$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}} l(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\cosh^{-1} s\right)^2 \left(\cosh^{-1} t\right)^2 - \cosh \psi(s) \cosh \psi(t)} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^2 - st} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

olur. Bu da $J' = [\cosh \delta, \cosh \rho]$ olmak üzere, $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli L_J integral operatörünün, $L^2(J')$ üzerinde

$$m(s,t) = \frac{1}{\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^2 - st}$$

çekirdekli bir integral operatörüne simetrik olarak denk olduğunu gösterir. Böylece

$$N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(\psi l, J') = N^{\pm}(m, J')$$

olur. Önerme 2.3.5 den $m \overset{\circ}{\geq} 0$ ve $N^{\pm}(m, J') = \infty$ olduğundan $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ elde edilir. Böylece $T_e \geq 0$ ve $N^{+}(T_e) = N^{+}(T) = \infty$ olur. Dolayısıyla $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^{+}(T_e) = \infty$$

olur.

Şimdi T_o operatörünün özdeğer sayısını inceleyelim. $T' = -T_o$ ve $k'(s,t) = -k_o(s,t)$ olsun. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2t^2 - \cosh(s+t)} - \frac{1}{s^2t^2 - \cosh(s-t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\sinh s \sinh t}{(s^2t^2 - \cosh s \cosh t)^2 - (\sinh s \sinh t)^2}\right] \\
&= \frac{\sinh s \sinh t}{(s^2t^2 - \cosh s \cosh t)^2 - (\sinh s \sinh t)^2} \\
&\geq \frac{\sinh s \sinh t}{(s^2t^2 - \cosh s \cosh t)^2}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{\sinh s \sinh t}{(s^2t^2 - \cosh s \cosh t)^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle $T' \geq L$ olur ve dolayısıyla $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ olduğunu göstermemiz gerekir. Şimdi $0 < \delta < \rho$ seçelim ve $J = [\delta, \rho]$ olsun. O zaman $N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(l, J)$ elde edilir. $\psi(s) = \cosh^{-1} s$ olsun. Buradan $\psi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$ ve $J' = [\cosh\delta, \cosh\rho]$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}}\, l(\psi(s), \psi(t))\, \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sinh\psi(s)\sinh\psi(t)}{\left(\left(\cosh^{-1} s\right)^2 \left(\cosh^{-1} t\right)^2 - \cosh\psi(s)\cosh\psi(t)\right)^2} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{(\cosh\psi(s))^2 - 1}\sqrt{(\cosh\psi(t))^2 - 1}}{\left(\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^2 - st\right)^2} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{s^2-1}\sqrt{t^2-1}}{\left(\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^2 - st\right)^2} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{(s^2-1)^{\frac{1}{4}} (t^2-1)^{\frac{1}{4}}}{\left(\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^2 - st\right)^2}
\end{aligned}$$

olur. Yine bu $L^2(J)$ üzerinde $l(s,t)$ çekirdekli integral operatörünün $L^2(J')$ üzerinde

$$m(s,t) = \frac{1}{\left(\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^2 - st\right)^2}$$

çekirdekli bir integral operatörüne simetrik olarak denk olduğunu gösterir. Böylece

$$\begin{aligned}
N^{\pm}(l, I) &= N^{\pm}(l, J) && \text{(değişmezlik teoreminden)} \\
&= N^{\pm}(m, J) && \text{(simetrik denklikten)}
\end{aligned}$$

olur. Böylece Önerme 2.3.5 de $\gamma = 2$ alınırsa $m(s,t) \geq 0$ ve $N^{\pm}(m, J) = 0$ olur ve buradan $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ olur. Böylece $T' \geq 0$ ve $N^{+}(T') = \infty$ olur. $T' = -T_o$ olduğundan $T_o \leq 0$ ve $N^{-}(T) = \infty$ olur. ■

Önerme 3.2.2 *$n \geq 0$ olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh(s-t)}$$

olsun ve $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ olacak şekilde $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını düşünelim. T, $L^2(I)$ üzerinde k çekirdeğine karşılık gelen integral operatör olsun. Bu durumda

$$N^{+}(T) = \infty \text{ ve } N^{-}(T) = \infty$$

olur.

İspat.

$$k(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh(s-t)} = k(-s,-t)$$

olduğundan Teorem 2.1.6 kullanılarak $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$ uzayları T operatörünün değişmez alt uzaylarıdır. Ayrıca $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right]$$

ve $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right]$$

olmak üzere

$$T = T_e + T_o$$

yazılabilir. Öncelikle $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^+(T_e) = \infty$$

olduğu gösterilecektir. Daha sonra da bu operatörün negatif özdeğer sayısına bakılacaktır.

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) + k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh(s-t)} + \frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh(s+t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)^2 - \left(\sinh s \sinh t\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right) - \dfrac{\left(\sinh s \sinh t\right)^2}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right) - \dfrac{\left(\sinh s \sinh t\right)^2}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)}} \\
&\geq \frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t}
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle $T_e \geq L$ olur. Dolayısıyla $L \geq 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Şimdi δ, $0 < \delta < \rho$ seçelim ve $J = [\delta, \rho]$ olsun. O zaman $N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(l, J)$ elde edilir. $\psi(s) = \cosh^{-1} s$ olsun. Buradan $\psi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$ ve $J' = [\cosh\delta, \cosh\rho]$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}} l(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\cosh^{-1} s\right)^{2n} \left(\cosh^{-1} t\right)^{2n} - \cosh\psi(s)\cosh\psi(t)} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^{2n} - st} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

olur. Bu da $J' = [\cosh\delta, \cosh\rho]$ olmak üzere, $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli L_J integral operatörünün, $L^2(J')$ üzerinde

$$m(s,t) = \frac{1}{\left(\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t\right)^{2n} - st}$$

çekirdekli bir integral operatörüne simetrik olarak denk olduğunu gösterir. Böylece

$$N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(\psi l, J') = N^{\pm}(m, J')$$

olur. Önerme 2.3.5 den $m \overset{\circ}{\geq} 0$ ve $N^{\pm}(m, J') = \infty$ olduğundan $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ elde edilir. Böylece $T_e \geq 0$ ve $N^{+}(T_e) = N^{+}(T) = \infty$ olur. Dolayısıyla $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^{+}(T_e) = \infty$$

olur. Şimdi T_o operatörünün özdeğer sayısını inceleyelim. $T' = -T_o$ ve $k'(s,t) = -k_o(s,t)$ olsun. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh(s+t)} - \frac{1}{s^{2n}t^{2n} - \cosh(s-t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\sinh s \sinh t}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)^2 - \left(\sinh s \sinh t\right)^2}\right] \\
&= \frac{\sinh s \sinh t}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)^2 - \left(\sinh s \sinh t\right)^2} \\
&\geq \frac{\sinh s \sinh t}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)^2}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{\sinh s \sinh t}{\left(s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t\right)^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle $T' \geq L$ olur ve dolayısıyla $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ olduğunu göstermemiz gerekir. Şimdi $0 < \delta < \rho$ seçelim ve $J = [\delta, \rho]$ olsun. O zaman $N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(l, J)$ elde edilir. $\psi(s) = \cosh^{-1} s$ olsun. Buradan $\psi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2-1}}$ ve $J' = [\cosh\delta, \cosh\rho]$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}} l(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sinh\psi(s)\sinh\psi(t)}{\left(\left(\cosh^{-1} s\right)^{2n}\left(\cosh^{-1} t\right)^{2n} - \cosh\psi(s)\cosh\psi(t)\right)^2} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{(\cosh\psi(s))^2-1}\sqrt{(\cosh\psi(t))^2-1}}{\left(\left(\cosh^{-1} s\cosh^{-1} t\right)^{2n} - st\right)^2} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{s^2-1}\sqrt{t^2-1}}{\left(\left(\cosh^{-1} s\cosh^{-1} t\right)^{2n} - st\right)^2} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}{\left(\left(\cosh^{-1} s\cosh^{-1} t\right)^{2n} - st\right)^2}
\end{aligned}$$

olur. Yine bu $L^2(J)$ üzerinde $l(s,t)$ çekirdekli integral operatörünün $L^2(J')$ üzerinde

$$m(s,t) = \frac{1}{\left(\left(\cosh^{-1} s\cosh^{-1} t\right)^{2n} - st\right)^2}$$

çekirdekli bir integral operatörüne simetrik olarak denk olduğunu gösterir. Böylece

$$\begin{aligned}
N^{\pm}(l, I) &= N^{\pm}(l, J) && \text{(değişmezlik teoreminden)} \\
&= N^{\pm}(m, J) && \text{(simetrik denklikten)}
\end{aligned}$$

olur. Böylece Önerme 2.3.5 de $\gamma = 2$ alınırsa $m(s,t) \geq 0$ ve $N^{\pm}(m, J) = 0$ olur ve buradan $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ olur. Böylece $T' \geq 0$ ve $N^{+}(T') = \infty$ olur. $T' = -T_o$ olduğundan $T_o \leq 0$ ve $N^{-}(T) = \infty$ olur. ■

Önerme 3.2.3

$$k(s,t) = \frac{1}{\cosh(s-t) + \cos(s+t)} = k(-s,-t)$$

olsun ve $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ *olacak şekilde* $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ *simetrik aralığını düşünelim.* T, $L^2(I)$ *üzerinde* k *çekirdeğine karşılık gelen integral operatör olsun. Bu durumda*

$N^{+}(T) = \infty$ *ve* $N^{-}(T) = 0$

olur.

İspat.

$$k\,(s,t) = \frac{1}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} = k\,(-s,-t)$$

olduğundan Teorem 2.1.6 kullanılarak $L_e^2\,(I)$ ve $L_o^2\,(I)$ uzayları T operatörünün değişmez alt uzaylarıdır. Ayrıca $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_e\,(s,t) = \frac{1}{2}\,[k(s,t)+k(s,-t)]$$

ve $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_o\,(s,t) = \frac{1}{2}\,[k(s,t)-k(s,-t)]$$

olmak üzere

$$T = T_e + T_o$$

yazılabilir.

Öncelikle $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^+\,(T_e) = \infty$$

olduğu gösterilecektir. Daha sonra da bu operatörün negatif özdeğer sayısına bakılacaktır.

$$\begin{aligned}
k_e\,(s,t) &= \frac{1}{2}\,[k\,(s,t)+k\,(s,-t)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}+\frac{1}{\cosh(s+t)+\cos(s-t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\,(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)^2-(\sinh s\sinh t+\sin s\sin t)^2}\right] \\
&= \frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)-\dfrac{(\sinh s\sinh t+\sin s\sin t)^2}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_e\,(s,t) &= \frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)-\dfrac{(\sinh s\sinh t+\sin s\sin t)^2}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)}} \\
&\geq \frac{1}{\cosh s\cosh t+\cos s\cos t}
\end{aligned}$$

elde edilir. L, $L^2\,(I)$ üzerinde

$$l\,(s,t) = \frac{1}{\cosh s\cosh t+\cos s\cos t}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle $T_e \geq L$ olur. Dolayısıyla $L \geq 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Şimdi δ, $0 < \delta < \rho$ seçelim ve $J = [\delta, \rho]$ olsun. O zaman $N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(l, J)$ elde edilir. $\psi(s) = \cosh^{-1} s$ olsun. Buradan $\psi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$ ve $J' = [\cosh\delta, \cosh\rho]$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}} l(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\cosh\psi(s)\cosh\psi(t) + \cos\left(\cosh^{-1} s\right)\cos\left(\cosh^{-1} t\right)} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\cos\left(\cosh^{-1} s\right)\cos\left(\cosh^{-1} t\right) + st} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

olur. Bu da $J' = [\cosh\delta, \cosh\rho]$ olmak üzere, $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli L_J integral operatörünün, $L^2(J')$ üzerinde

$$m(s,t) = \frac{1}{\cos\left(\cosh^{-1} s\right)\cos\left(\cosh^{-1} t\right) + st}$$

çekirdekli bir integral operatörüne simetrik olarak denk olduğunu gösterir. Böylece

$$N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(\psi l, J') = N^{\pm}(m, J')$$

olur. Önerme 2.3.6 dan $m \overset{\circ}{\geq} 0$ ve $N^{\pm}(m, J') = \infty$ olduğundan $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ elde edilir. Böylece $T_e \geq 0$ ve $N^{+}(T_e) = N^{+}(T) = \infty$ olur. Dolayısıyla $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla $N^{+}(T_e) = \infty$ olur. Şimdi T_o operatörünün özdeğer sayısını inceleyelim.

$$\begin{aligned}
k_o(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cosh(s-t) + \cos(s+t)} - \frac{1}{\cosh(s+t) + \cos(s-t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(\sinh s \sinh t + \sin s \sin t)}{(\cosh s \cosh t + \cos s \cos t)^2 - (\sinh s \sinh t + \sin s \sin t)^2}\right] \\
&= \frac{(\sinh s \sinh t + \sin s \sin t)}{(\cosh s \cosh t + \cos s \cos t)^2 - (\sinh s \sinh t + \sin s \sin t)^2}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$l_1(s,t) = \frac{\sinh s \sinh t}{(\cosh s \cosh t + \cos s \cos t)^2 - (\sinh s \sinh t + \sin s \sin t)^2}$$

ve

$$l_2(s,t) = \frac{\sin s \sin t}{(\cosh s \cosh t + \cos s \cos t)^2 - (\sinh s \sinh t + \sin s \sin t)^2}$$

olmak üzere

$$k_o(s,t) = l_1(s,t) + l_2(s,t)$$

olur. İlk olarak $l_1(s,t)$ çekirdeğine sahip bir L_1 integral operatörünün özdeğer sayılarını inceleyelim. Şimdi δ, $0<\delta<\rho$ seçelim ve $J=[\delta,\rho]$ olsun. Bu durumda

$$N^{\pm}(l_1,I)=N^{\pm}(l_1,J) \qquad \text{(değişmezlik teoreminden)}$$

olur. Şimdi

$$n_1(s,t)=\frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)^2-(\sinh s\sinh t+\sin s\sin t)^2}$$

çekirdeğine sahip bir integral operatörümüz N_1 olsun. Önerme *2.3.3* kullanılarak

$$\begin{aligned} n_1(s,t) &= \frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)^2-(\sinh s\sinh t+\sin s\sin t)^2} \\ &\geq \frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)^2} \\ &\overset{\circ}{\geq} 0 \end{aligned}$$

olur.

$$M_1(s,t)=\sqrt{\sinh s}f(s)$$

şeklinde bir çarpım operatörü tanımlayalım. Bu durumda $MN_1M^*=L_1$ olur. Önerme 2.3.2 kullanılarak $L_1\geq 0$ elde edilir.

İkinci olarak $l_2(s,t)$ çekirdeğine sahip L_2 integral operatörünün özdeğer sayılarını inceleyelim. Şimdi δ, $0<\delta<\rho$ seçelim ve $J=[\delta,\rho]$ olsun. Bu durumda

$$N^{\pm}(l_2,I)=N^{\pm}(l_2,J) \qquad \text{(değişmezlik teoreminden)}$$

olur.

$$n_2(s,t)=\frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)^2-(\sinh s\sinh t+\sin s\sin t)^2}$$

çekirdeğine sahip bir integral operatörümüz N_2 olsun. Önerme *2.3.3* kullanılarak

$$\begin{aligned} n_2(s,t) &= \frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)^2-(\sinh s\sinh t+\sin s\sin t)^2} \\ &\geq \frac{1}{(\cosh s\cosh t+\cos s\cos t)^2} \\ &\overset{\circ}{\geq} 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$M_2(s,t)=\sqrt{\sin s}f(s)$$

şeklinde bir çarpım operatörü tanımlayalım. Bu durumda $MN_2M^* = L_2$ olur. Önerme 2.3.2 kullanılarak $L_2 \geq 0$ elde edilir. Böylece

$L_1 \geq 0$ ve $L_2 \geq 0$

olduğundan dolayı

$T_o \geq 0$ ve $N^-(T_o) = N^-(T) = 0$

elde edilir. ■

Önerme 3.2.4 *$n \geq 0$ olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s+t)}$$

olsun ve $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ olacak şekilde $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını düşünelim. T, $L^2(I)$ üzerinde k çekirdeğine karşılık gelen integral operatör olsun. Bu durumda

$$N^+(T) = \infty \text{ ve } N^-(T) = 0$$

olur.

İspat.

$$k(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s+t)} = k(-s,-t)$$

olduğundan Teorem 2.1.6 kullanılarak $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$ uzayları T operatörünün değişmez alt uzaylarıdır. Ayrıca $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)]$$

ve $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) - k(s,-t)]$$

olmak üzere

$$T = T_e + T_o$$

yazılabilir.

Öncelikle $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$N^+ (T_e) = \infty$

olduğu gösterilecektir. Daha sonrada bu operatörün negatif özdeğer sayısına bakılacaktır.

$$
\begin{aligned}
k_e (s,t) &= \frac{1}{2} [k(s,t) + k(s,-t)] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s+t)} + \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s-t)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t - \sin s \sin t} + \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t + \sin s \sin t} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2 (s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t)}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t)^2 - (\sin s \sin t)^2} \right] \\
&= \frac{1}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t) - \dfrac{(\sin s \sin t)^2}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t)}}
\end{aligned}
$$

olur. Önerme *2.3.3* kullanılarak

$$
\begin{aligned}
k_e (s,t) &= \frac{1}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t) - \dfrac{(\sin s \sin t)^2}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t)}} \\
&\geq \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t}
\end{aligned}
$$

elde edilir. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$
l(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos s \cos t}
$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle $T_e \geq L$ olur. Dolayısıyla $L \geq 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Şimdi $-\rho < -\delta < 0$ olacak şekilde δ sayısı seçelim ve $J = [-\rho, -\delta]$ olsun. Değişmezlik teoreminden $N^{\pm}(l, I) = N^{\pm}(l, J)$ olduğunu biliyoruz. $\psi(s) = -\arccos s$ olsun. Böylece $\psi'(s) = \dfrac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$ olur. $\psi'(s)$, $J' = [\cos\rho, \cos\delta]$ üzerinde sınırlıdır.

$$
\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}} l(\psi(s), \psi(t)) \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(-\arccos s)^{2n} (-\arccos s)^{2n} + \cos\psi(s) \cos\psi(t)} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(\arccos s . \arccos t)^{2n} + st} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}
$$

olur. Burada $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli integral operatörü $L^2(J')$ üzerindeki

$$
m(s,t) = \frac{1}{(\arccos s . \arccos t)^{2n} + st}
$$

çekirdekli bir integral operatörüne simetrik olarak denk olduğunu gösterir. Böylece

$$N^{\pm}(l,I) = N^{\pm}(\psi l, J') = N^{\pm}(m, J')$$

olur. Önerme 2.3.6 dan $m \overset{\circ}{\geq} 0$ ve $N^{+}(m, J') = \infty$ olduğundan $L \geq 0$ ve $N^{+}(L) = \infty$ elde edilir. Böylece $T_e \geq 0$ ve $N^{+}(T_e) = N^{+}(T) = \infty$ olur. Dolayısıyla $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^{+}(T_e) = \infty$$

olur.

Şimdi

$$\begin{aligned} k_o(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t) - k(s,-t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s+t)} - \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s-t)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos s\cos t - \sin s\sin t} - \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos s\cos t + \sin s\sin t}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2(\sin s\sin t)}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s\cos t)^2 - (\sin s\sin t)^2}\right] \\ &= \frac{\sin s\sin t}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s\cos t)^2 - (\sin s\sin t)^2} \\ &\geq \frac{\sin s\sin t}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s\cos t)^2} \end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{1}{(s^{2n}t^{2n} + \cos s\cos t)^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Şimdi

$$M(s,t) = \sqrt{\sin s}\, f(s)$$

şeklinde bir çarpım operatörü tanımlayalım. Bu durumda $MLM = T_o$ olur. Önerme 2.3.2 kullanılarak $L \geq 0$ elde edilir. Böylece

$$T_o \geq 0 \text{ ve } N^{-}(T_o) = N^{-}(T) = 0$$

elde edilir. ∎

Önerme 3.2.5 *$B > 1$ olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{B + s^{2n}t^{2n} - \cosh(s-t)}$$

olsun ve ρ, $\rho > 0$ ve $I \in Ad(k)$ yı sağlayacak şekilde yeterince küçük olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını düşünelim. T, $L^2(I)$ üzerinde k çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda

$$N^+(T) = \infty \text{ ve } N^-(T) = \infty$$

olur.

İspat.

$$k(s,t) = \frac{1}{B + s^{2n}t^{2n} - \cosh(s-t)} = k(-s,-t)$$

olduğundan $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$ uzayları $L^2(I)$ nın değişmez alt uzaylarıdır. Ayrıca $T_e : L_e^2(I) \to L_e^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_e(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)]$$

ve $T_o : L_o^2(I) \to L_o^2(I)$ operatörünün çekirdeği

$$k_o(s,t) = \frac{1}{2}[k(s,t) - k(s,-t)]$$

olmak üzere

$$T = T_e + T_o$$

yazılabilir. Öncelikle $T_e \geq 0$ ve dolayısıyla

$$N^+(T_e) = \infty$$

olduğu gösterilecektir. Daha sonra da bu operatörün negatif özdeğer sayısına bakılacaktır.

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}[k(s,t) + k(s,-t)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{B + s^{2n}t^{2n} - \cosh(s-t)} + \frac{1}{B + s^{2n}t^{2n} - \cosh(s+t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(B + s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t)}{(B + s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t)^2 - (\sinh s \sinh t)^2}\right] \\
&= \frac{1}{(B + s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t) - \dfrac{(\sinh s \sinh t)^2}{(B + s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t)}} \\
&\geq \frac{1}{B + s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t}
\end{aligned}$$

elde edilir. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t)=\frac{1}{B+s^{2n}t^{2n}-\cosh s\cosh t}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatör olsun. Bu nedenle $T_e \geq L$ olur. Dolayısıyla $L \geq 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Şimdi δ, $0<\delta<\rho$ seçelim ve $J=[\delta,\rho]$ olsun. O zaman

$$N^{\pm}(l,I)=N^{\pm}(l,J)$$

elde edilir. $\psi(s)=\cosh^{-1}s$ olsun. Buradan $\psi'(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s^2-1}}$ ve $J'=[\cosh\delta,\cosh\rho]$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}}\, l(\psi(s),\psi(t))\,\psi'(t)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}}\,\frac{1}{B+\left(\cosh^{-1}s\right)^{2n}\left(\cosh^{-1}t\right)^{2n}-\cosh\psi(s)\cosh\psi(t)}\,\frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}\\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}}\,\frac{1}{B+\left(\cosh^{-1}s\cosh^{-1}t\right)^{2n}-st}\,\frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

$N^{\pm}(l,I)=N^{\pm}(l,J)$ olur. Bu da $J'=[\cosh\delta,\cosh\rho]$ olmak üzere, $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli L_J integral operatörünün, $L^2(J')$ üzerinde

$$m(s,t)=\frac{1}{B+\left(\cosh^{-1}s\cosh^{-1}t\right)^{2n}-st}$$

çekirdekli bir integral operatörüne uzamsal olarak denk olduğunu gösterir. Önerme 2.3.5 $A=B+\left(\cosh^{-1}s\cosh^{-1}t\right)^{2n}$ ve $\gamma=1$ alınırsa $N^{+}(m,J')=\infty$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$N^{\pm}(l,I)=N^{\pm}(\psi l,J')=N^{\pm}(m,J')=\infty$$

olur.

Şimdi T_o operatörünün özdeğer sayısını inceleyelim. $k_o(s,t)=-k'(s,t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t)-k(s,t)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{B+s^{2n}t^{2n}-\cosh(s+t)}-\frac{1}{B+s^{2n}t^{2n}-\cosh(s-t)}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\sinh s\sinh t}{\left(B+s^{2n}t^{2n}-\cosh s\cosh t\right)^2-\left(\sinh s\sinh t\right)^2}\right]\\
&= \frac{\sinh s\sinh t}{\left(B+s^{2n}t^{2n}-\cosh s\cosh t\right)^2-\left(\sinh s\sinh t\right)^2}\geq\frac{\sinh s\sinh t}{\left(B+s^{2n}t^{2n}-\cosh s\cosh t\right)^2}
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{\sinh s \sinh t}{(B + s^{2n}t^{2n} - \cosh s \cosh t)^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle L çekirdekli integral operatörünün durumunu incelememiz yeterli olacaktır. $J = [\delta, \rho]$, $0 < \delta < \rho$ ve $\psi(s) = \cosh^{-1} s$ alınırsa $\psi'(s) = \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l\,(s,t) &= \psi'\,(s)^{\frac{1}{2}}\, l\,(\psi\,(s)\,, \psi\,(t))\, \psi'\,(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sinh \psi(s) \sinh \psi(t)}{(B + (\psi\,(s))^{2n}(\psi\,(t))^{2n} - \cosh(\psi\,(s)) \cosh \psi\,(t))^2} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{(\cosh \psi(s))^2 - 1}\sqrt{(\cos \psi(t))^2 - 1}}{\left(B + (\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t)^{2n} - st\right)^2} \\
&= \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{s^2-1}\sqrt{t^2-1}}{\left(B + (\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t)^{2n} - st\right)^2} \\
&= \frac{(s^2-1)^{\frac{1}{4}}(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}{\left(B + (\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t)^{2n} - st\right)^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli L_J integral operatörünün, $J' = [\cosh \delta, \cosh \rho]$ olmak üzere

$$m(s,t) = \frac{1}{\left(B + (\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t)^{2n} - st\right)^2}$$

çekirdekli bir L' integral operatörüne uzamsal olarak denk olduğunu gösterir. Önerme 2.3.5 den $A = B + (\cosh^{-1} s \cosh^{-1} t)^{2n}$ ve $\gamma = 2$ alınırsa $m(s,t)$ çekirdekli bir integral operatörü için $L'_J \geq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $L_J \geq 0$ elde edilir. Buradan $L \geq 0$ elde edildiğinden dolayı $T_o \leq 0$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $N^-(T) = \infty$ olur. ■

Önerme 3.2.6 *$A > 1$ olmak üzere*

$$k\,(s,t) = \frac{1}{A - \cos\,(s+t)}$$

olsun ve ρ, $\rho > 0$ ve $I \in Ad\,(k)$ yı sağlayacak şekilde sıfır civarında olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığını düşünelim. T, $L^2\,(I)$ üzerinde k çekirdeğine karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu durumda

$$N^+\,(T) = N^-\,(T) = \infty$$

olur.

İspat.

$$k(s,t)=\frac{1}{A-\cos(s+t)}=\frac{1}{A-\cos(-s-t)}=k(-s,-t)$$

olur. Bu nedenle $L_e^2(I)$ ve $L_o^2(I)$, $L^2(I)$ nin değişmez alt uzaylarıdır ve

$$k_e(s,t)=\frac{1}{2}\left[k(s,t)+k(s,-t)\right]$$

çekirdekli $T_e : L_e^2(I)\rightarrow L_e^2(I)$ ve

$$k_o(s,t)=\frac{1}{2}\left[k(s,t)-k(s,-t)\right]$$

çekirdekli $T_o : L_o^2(I)\rightarrow L_o^2(I)$ operatörleri ele alınarak $T=T_e+T_o$ yazılabilir. İlk olarak $T_e\geq 0$, $N^+(T_e)=\infty$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
k_e(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,t)+k(s,-t)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A-\cos(s+t)}+\frac{1}{A-\cos(s-t)}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A-\cos s\cos t+\sin s\sin t}+\frac{1}{A-\cos s\cos t-\sin s\sin t}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(A-\cos s\cos t)}{(A-\cos s\cos t)^2-\sin^2 s\sin^2 t}\right]\\
&= \frac{1}{(A-\cos s\cos t)-\left(\sin^2 s\sin^2 t\right)/(A-\cos s\cos t)}\\
&\overset{\circ}{\geq} \frac{1}{A-\cos s\cos t}=l(s,t)
\end{aligned}$$

olur. $L, L^2(I)$ üzerinde l ye karşılık gelen integral operatörü olsun. Bu nedenle $T_e\geq L$ olur. Böylece $L\geq 0$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

Şimdi $-\rho<-\delta<0$ olacak şekilde δ sayısı seçelim ve $J=[-\rho,-\delta]$ olsun. Değişmezlik teoreminden $N^{\pm}(l,I)=N^{\pm}(l,J)$ olduğunu biliyoruz. $\psi(s)=-\arccos s$ olsun. Böylece $\psi'(s)=\dfrac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$ olur. $\psi'(s)$, $J'=[\cos\rho,\cos\delta]$ üzerinde sınırlıdır. Şimdi uzamsal denklik kullanılarak

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}}\, l(\psi(s),\psi(t))\,\psi'(t)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{A-\cos\psi(s)\cos\psi(t)}\frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}}\\
&= \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{(A-st)}\frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

olur. Burada $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli integral operatörü $L^2(J')$ üzerindeki

$$m(s,t)=\frac{1}{(A-st)}$$

çekirdekli integral operatörüne uzamsal olarak denktir. Önerme 2.3.5 de $\gamma = 1$ alınırsa bu şekilde olan bir çekirdeğin $N^+(m, J') = \infty$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla uzamsal denklikten

$$N^+(m, J') = N^+(\psi l, J') = N^+(l, J) = N^+(l, I) = \infty$$

olur.

Şimdi T_o operatörünün özdeğer sayısını inceleyelim. $T_o = -T'$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
k'(s,t) &= \frac{1}{2}\left[k(s,-t) - k(s,t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A - \cos(s-t)} - \frac{1}{A - \cos(s+t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A - \cos s \cos t - \sin s \sin t} - \frac{1}{A - \cos s \cos t + \sin s \sin t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2 \sin s \sin t}{(A - \cos s \cos t)^2 - \sin^2 s \sin^2 t}\right] \\
&= \frac{\sin s \sin t}{(A - \cos s \cos t)^2 - \sin^2 s \sin^2 t} \\
&\geq \frac{\sin s \sin t}{(A - \cos s \cos t)^2}
\end{aligned}$$

olur. L, $L^2(I)$ üzerinde

$$l(s,t) = \frac{\sin s \sin t}{(A - \cos s \cos t)^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatör olsun. Bu nedenle L çekirdekli integral operatörünün durumunu incelememiz yeterli olacaktır.

$J = [-\rho, -\delta]$, -ρ <-$\delta < 0$ ve $\psi(s) = -\arccos s$ alınırsa $\psi'(s) = \dfrac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi l(s,t) &= \psi'(s)^{\frac{1}{2}}\, l(\psi(s), \psi(t))\, \psi'(t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sin \psi(s) \sin \psi(t)}{(A - \cos(\psi(s)) \cos(\psi(t)))^2} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{1 - (\cos \psi(s))^2}\sqrt{1 - (\cos \psi(t))^2}}{(A - st)^2} \\
&= \frac{1}{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-t^2}}{(A-st)^2} \\
&= \frac{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-t^2}}{(A-st)^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu $L^2(J)$ üzerinde l çekirdekli L_j integral operatörünün, $J' = [\cos \rho, \cos \delta]$ olmak üzere

$$m(s,t) = \frac{1}{(A-st)^2}$$

çekirdekli bir L' integral operatörüne uzamsal olarak denk olduğunu gösterir. Önerme 2.3.5 den $\gamma = 2$ alınırsa $m(s,t)$ çekirdekli bir integral operatörü için $L'_J \geq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $L_J \geq 0$ elde edilir. Buradan $L \geq 0$ elde edildiğinden dolayı $T_o \leq 0$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $N^-(T) = \infty$ olur. ■

BÖLÜM 4

NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu bölümde daha önceki bölümde incelenmiş olan analitik çekirdeklere örnekler verilerek incelediğimiz bu çekirdeğe sahip integral operatörlerinin en küçük pozitif ve en büyük negatif özdeğer sayıları bulunmaya çalışılacaktır. Göcen ve Soykan (2012) bazı ortogonal polinomlar seçerek ritz yöntemiyle nümerik çalışmalar yapmıştı. Şimdi bunlara ilave olarak daha farklı polinomlar seçerek ritz yöntemiyle nümerik çalışmalar yapılmıştır. İlk olarak bu bölümde kullanılacak Ritz yöntemi ve bazı ortogonal polinomlar hakkında ön bilgi verilecektir.

4.1 RİTZ YÖNTEMİ

Çekirdeği simetrik olan, yani $k(s,t) = k(t,s)$ bağıntısını gerçekleyen aşağıdaki integral denklemini ele alalım:

$$\varphi(s) = \mu \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt, \;\; a \leq s \leq b$$

$(\psi_n(s))$, ilk n elemanı $[a,b]$ aralığı üzerinde lineer bağımsız ve $L^2(a,b)$ de tam olan bir fonksiyonlar dizisi olsun.

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s) \tag{4.1}$$

şeklindedir ve burada a_j katsayıları $\|\varphi_n\| = 1$ olacak şekilde belirlenecektir. Bu koşul altında $\langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle$ kuadratik formunun değerleri aranacaktır. İşlemler sonucunda a_j ler cinsinden yazılmış homojen lineer bir denklem sistemine ulaşılmaktadır (burada μ bir Lagrange çarpanıdır).

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\langle T\psi_i, \psi_j \right\rangle - \mu \left\langle \psi_i, \psi_j \right\rangle \right\} a_j = 0, \; i = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

(4.2) nin sıfırdan farklı bir çözümünün olması için sistemin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} \langle T\psi_1,\psi_1\rangle - \mu\langle\psi_1,\psi_1\rangle & \langle T\psi_1,\psi_2\rangle\text{-}\mu\langle\psi_1,\psi_2\rangle & \cdots & \langle T\psi_1,\psi_n\rangle - \mu\langle\psi_1,\psi_n\rangle \\ \langle T\psi_2,\psi_1\rangle - \mu\langle\psi_2,\psi_1\rangle & \langle T\psi_2,\psi_2\rangle - \mu\langle\psi_2,\psi_2\rangle & \cdots & \langle T\psi_2,\psi_n\rangle - \mu\langle\psi_2,\psi_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle T\psi_n,\psi_1\rangle - \mu\langle\psi_n,\psi_1\rangle & \langle T\psi_n,\psi_2\rangle - \mu\langle\psi_n,\psi_2\rangle & \cdots & \langle T\psi_n,\psi_n\rangle - \mu\langle\psi_n,\psi_n\rangle \end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

(4.3) denkleminin kökleri $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerini yaklaşık olarak verir. (4.1) denkleminin en büyük kökü, özdeğerlerinin en büyüğünün değerini olduğundan daha küçük olarak verir. (4.3) den μ' yü bulup ve (4.2) de yerine koyarak (4.2) sisteminin sıfırdan farklı a_j $(j = 1, 2, ..., n)$ çözümleri araştırılmaktadır. Böylece, bulunan bu a_j değerlerinin (4.1) de yerine yazılması ile elde edilen özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar yaklaşık olarak bulunmaktadır (Kythe and Puri 2002).

4.2 BAZI ORTOGONAL POLİNOMLAR

Tanım 4.2.1

$$P_n(s) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{ds^n}\left(s^2-1\right)^n$$

yardımıyla tanımlanan polinoma Legendre polinomu denir. Bir kaç Legendre polinomu

$$\begin{array}{ll} P_0(s) = 1 & P_1(s) = s \\ P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2-1\right) & P_3(s) = \frac{1}{2}\left(5s^3-3s\right) \end{array}$$

şeklinde yazılabilir (Yaşar 1988).

Ritz yönteminde, P_n, n. Legendre polinomunu göstermek üzere

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

olsun. Bu polinomlar $(-1, 1)$ aralığında ortogonal olduklarından $i \neq j$ için $\langle P_i, P_j\rangle = 0$ ve diğer durumda $\langle P_i, P_i\rangle = 2/\left(2i+1\right)$ elde edilir.

$$\begin{array}{ll} \psi_1(s) = P_0(s) = 1 & \psi_2(s) = P_1(s) = s \\ \psi_3(s) = P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2-1\right) & \psi_4(s) = P_3(s) = \frac{1}{2}\left(5s^3-3s\right) \end{array}$$

olmak üzere basit hesaplamalarla

$$\begin{array}{ll}
\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} ds = 2 & \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} s ds = 0 \\
\langle \psi_1, \psi_3 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\left(3s^2-1\right) ds = 0 & \langle \psi_1, \psi_4 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\left(5s^3-3s\right) ds = 0 \\
\langle \psi_2, \psi_2 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} s^2 ds = \tfrac{2}{3} & \langle \psi_2, \psi_3 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \tfrac{s}{2}\left(3s^2-1\right) ds = 0 \\
\langle \psi_2, \psi_4 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}s\left(5s^3-3s\right) ds = 0 & \langle \psi_3, \psi_3 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{4}\left(3s^2-1\right)^2 ds = \tfrac{2}{5} \\
\langle \psi_3, \psi_4 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(5s^3-3s\right) ds = 0 & \langle \psi_4, \psi_4 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{4}\left(5s^3-3s\right)^2 ds = \tfrac{2}{7}
\end{array}$$

eşitliklerin sağlandığı görülür.

Tanım 4.2.2

$$P_n(s) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-s^2)} \frac{d^n}{ds^n} \left(1-s^2\right)^{1+n}$$

*yardımıyla tanımlanan polinoma **Jacobi polinomu** denir. Jacobi polinomlarından ilk birkaç tanesi*

$$\begin{array}{ll}
P_0(s) = 1 & P_1(s) = 2s \\
P_2(s) == \dfrac{3}{4}\left(5s^2-1\right) & P_3(s) = s\left(7s^2-3\right)
\end{array}$$

olur.

Ritz yönteminde, P_n, n.Jacobi polinomunu göstermek üzere

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \ n = 1, \ldots, N$$

olsun. Bu polinomlar $(-1, 1)$ aralığında ortogonal olduklarından, $i \neq j$ için $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ ve diğer durumda

$$\langle P_i, P_i \rangle = \frac{8}{2n+3} \frac{\left(\Gamma(n+2)\right)^2}{n!\Gamma(n+3)}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{array}{ll}
\psi_1(s) = P_0(s) = 1 & \psi_2(s) = P_1(s) = 2s \\
\psi_3(s) = P_2(s) = \tfrac{3}{4}\left(5s^2-1\right) & \psi_4(s) = P_3(s) = s\left(7s^2-3\right)
\end{array}$$

olduğundan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$S = 1 - s^2$$

olmak üzere

$$
\begin{array}{ll}
\langle\psi_1,\psi_1\rangle = \int_{-1}^{1} Sds = \frac{4}{3} & \langle\psi_1,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1} 2Ssds = 0 \\
\langle\psi_1,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}S\left(5s^2-1\right)ds = 0 & \langle\psi_1,\psi_4\rangle = \int_{-1}^{1} S\left(7s^3-3s\right)ds = 0 \\
\langle\psi_2,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1} 4Ss^2ds = \frac{16}{15} & \langle\psi_2,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{6s}{4}\left(5s^2-1\right)Sds = 0 \\
\langle\psi_2,\psi_4\rangle = \int_{-1}^{1} 2S\left(7s^4-3s^2\right)ds = 0 & \langle\psi_3,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{9}{16}\left(5s^2-1\right)^2 Sds = \dfrac{6}{7} \\
\langle\psi_3,\psi_4\rangle = \int_{-1}^{1} S\left(7s^2-3\right)\dfrac{15s^3-3s}{4}ds = 0 & \langle\psi_4,\psi_4\rangle = \int_{-1}^{1} s^2\left(7s^2-3\right)^2 Sds = \dfrac{32}{45}
\end{array}
$$

olur.

Tanım 4.2.3

$P_n(s) = \cos(n.\cos^{-1} s), \qquad n = 0, 1, 2, ...$

yardımıyla tanımlanan polinoma 1.tip Chebyshev polinomu denir. 1.tip Chebyshev polinomlarının bazıları

$$
\begin{array}{ll}
P_0(s) = 1 & P_1(s) = s \\
P_2(s) = 2s^2 - 1 & P_3(s) = 4s^3 - 3s
\end{array}
$$

olur (Yaşar 1988).

Ritz yönteminde P_n, 1.tip Chebshyev polinomunu göstermek üzere

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

olsun. Bu polinomlar da $(-1, 1)$ aralığında ortogonal olduklarından

$$
\begin{aligned}
\langle P_i, P_j\rangle &= 0,\ i \neq j, \\
\langle P_i, P_j\rangle &= \pi,\ i = j = 0, \\
\langle P_i, P_j\rangle &= \frac{\pi}{2},\ i = j = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{array}{ll}
\psi_1(s) = P_0(s) = 1 & \psi_2(s) = P_1(s) = s \\
\psi_3(s) = P_2(s) = 2s^2 - 1 & \psi_4(s) = P_3(s) = 4s^3 - 3s
\end{array}
$$

ve

$S = \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

olmak üzere basit hesaplamalarla

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} Sds = \pi & \langle\psi_2,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} Ss\left(4s^3-3s\right)ds = 0 \\
\langle\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1} Ssds = 0 & \langle\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1} Ss(2s^2-1)ds = 0 \\
\langle\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1} S(2s^2-1)ds = 0 & \langle\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1} S(2s^2-1)^2ds = \tfrac{1}{2}\pi \\
\langle\psi_1,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} S\left(4s^3-3s\right)ds = 0 & \langle\psi_4,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} S\left(4s^3-3s\right)^2ds = \tfrac{1}{2}\pi \\
\langle\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1} Ss^2ds = \tfrac{1}{2}\pi & \langle\psi_3,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} S(2s^2-1)\left(4s^3-3s\right)ds = 0
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Tanım 4.2.4 *$s=\cos\theta$ olmak üzere*

$$P_n(s) = \frac{\sin\left[(n+1)\theta\right]}{\sin\theta}$$

yardımıyla tanımlanan $P_n(s)$ polinomuna 2. tip Chebshyev polinomu denir. 2. tip Chebshyev polinomlarından bazıları

$$
\begin{aligned}
P_0(s) &= 1 & P_1(s) &= 2s \\
P_2(s) &= 4s^2-1 & P_3(s) &= 8s^3-4s
\end{aligned}
$$

olur.

Ritz yönteminde, $P_n(s)$, 2.tip Chebshyev polinomu olmak üzere

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n=1,\ldots,N$$

olsun. Bu polinomlar $(-1,1)$ aralığında ortogonal olduklarından, $i\neq j$ için $\langle P_i,P_j\rangle=0$ ve diğer durumda

$$\langle P_i,P_j\rangle = \frac{\pi}{2},\ i=j=0,1,2,\ldots,N$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\psi_1(s) &= P_0(s) = 1 & \psi_2(s) &= P_1(s) = 2s \\
\psi_3(s) &= P_2(s) = 4s^2-1 & \psi_4 &= P_3(s) = 8s^3-4s
\end{aligned}
$$

ve

$$S=\sqrt{1-s^2}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} Sds = \tfrac{1}{2}\pi & \langle\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1} 2sSds = 0 \\
\langle\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1} (4s^2-1)\, Sds = 0 & \langle\psi_1,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} S\,(8s^3-4s)\, ds = 0 \\
\langle\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1} 4s^2Sds = \tfrac{1}{2}\pi & \langle\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1} 2s\,(4s^2-1)\, Sds = 0 \\
\langle\psi_2,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} (16s^4-8s^2)\, Sds = 0 & \langle\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1} (4s^2-1)^2\, Sds = \tfrac{1}{2}\pi \\
\langle\psi_3,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} (4s^2-1)\,(8s^3-4s)\, Sds = 0 & \langle\psi_4,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1} (8s^3-4s)^2\, Sds = \tfrac{1}{2}\pi
\end{aligned}
$$

eşitliklerin sağlandığı görülür.

4.3 RASYONEL ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ

Bu kısımda daha önceki bölümde incelenmiş olan bazı rasyonel çekirdekli integral operatörlerin özdeğerleri nümerik hesaplamalarla yaklaşık olarak hesaplanacaktır.

Örnek 4.3.1 *Daha önce yapılan çalışmalarda hepsi aynı anda* 0 *olmamak şartıyla* $a, b \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{(a+bst)^2}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

olduğu bulunmuştu.

Şimdi Ritz yöntemiyle Legendre polinomu ve Jacobi polinomu kullanılarak bu formdaki

$$k(s,t) = \frac{1}{(5+st)^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri ve en büyük negatif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(5+st)^2} dsdt = 0.16219 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{(5+st)^2} dsdt = -7.8886 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{(5+st)^2} dsdt = -7.3224 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.16219 - 2\mu & -7.8886 \times 10^{-31} \\ -7.8886 \times 10^{-31} & -7.3224 \times 10^{-3} - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$
$$= 1.3333\mu^2 - 9.3482 \times 10^{-2}\mu - 1.1876 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 8.1097 \times 10^{-2}, \ \mu_2 = -1.0983 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{8.1097 \times 10^{-2}} = 12.331 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0983 \times 10^{-2}} = -91.050
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 12.331$$

ve aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -91.050$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(5+st)^2} dsdt = 0.16219 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{(5+st)^2} dsdt = -7.8886 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{(5+st)^2} dsdt = -7.3224 \times 10^{-3} \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3t^2-1)}{(5+st)^2} dsdt = 8.836 \times 10^{-4} \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}s(3t^2-1)}{(5+st)^2} dsdt = 1.9722 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}(3s^2-1)(3t^2-1)}{(5+st)^2} dsdt = 3.5873 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
0.16219 - 2\mu & -7.8886 \times 10^{-31} & 8.836 \times 10^{-4} \\
-7.8886 \times 10^{-31} & -7.3224 \times 10^{-3} - \frac{2}{3}\mu & 1.9722 \times 10^{-31} \\
8.836 \times 10^{-4} & 1.9722 \times 10^{-31} & 3.5873 \times 10^{-4} - \frac{2}{5}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -0.53333\mu^3 + 3.7871 \times 10^{-2}\mu^2 + 4.4203 \times 10^{-4}\mu - 4.2032 \times 10^{-7} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 8.1107 \times 10^{-2},\ \mu_2 = 8.8467 \times 10^{-4},\ \mu_3 = -1.0984 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{8.1107 \times 10^{-2}} = 12.329 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{8.8467 \times 10^{-4}} = 1130.4 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-1.0984 \times 10^{-2}} = -91.042
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 12.329$

ve aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -91.042$

olur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{(5+st)^2} dsdt = 0.10753 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\,(1-s^2)}{(5+st)^2} dsdt = -1.5777 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(1-s^2)}{(5+st)^2} dsdt = -1.1618 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.10753 - \frac{4}{3}\mu & -1.5777 \times 10^{-30} \\ -1.5777 \times 10^{-30} & -1.1618 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 9.9208 \times 10^{-2}\mu - 1.2493 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 8.0649 \times 10^{-2},\ \mu_2 = -1.0892 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{8.0649 \times 10^{-2}} = 12.399 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0892 \times 10^{-2}} = -91.811
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 12.399$

ve aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -91.811$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{(5+st)^2} dsdt = 0.10753 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\,(1-s^2)}{(5+st)^2} dsdt = -1.5777 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(1-s^2)}{(5+st)^2} dsdt = -1.1618 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{4}\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{(5+st)^2} dsdt = 5.4642 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3s}{2}\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{(5+st)^2} dsdt = 7.8886 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{9}{16}\,(5s^2-1)\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{(5+st)^2} dsdt = 1.1359 \times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$
\begin{vmatrix}
0.10753 - \frac{4}{3}\mu & -1.5777 \times 10^{-30} & 5.4642 \times 10^{-2} \\
-1.5777 \times 10^{-30} & -1.1618 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu & 7.8886 \times 10^{-31} \\
5.4642 \times 10^{-2} & 7.8886 \times 10^{-31} & 1.1359 \times 10^{-3} - \frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}
$$

$$
= -1.219\mu^3 + 8.6651 \times 10^{-2}\mu^2 + 4.1429 \times 10^{-3}\mu + 3.3269 \times 10^{-5} = 0
$$

ve

$\mu_1 = -2.3710 \times 10^{-2},\ \mu_2 = -1.0892 \times 10^{-2},\ \mu_3 = 0.10569$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-2.3710 \times 10^{-2}} = -42.176 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0892 \times 10^{-2}} = -91.811 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{0.10569} = 9.4616
\end{aligned}
$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 9.4616$

olur.

Örnek 4.3.2 *Ritz yöntemi kullanılarak*

$$k(s,t) = \frac{1}{9 + 3(s+t) + s^2t^2}$$

simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri yaklaşık olarak bulunacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \; n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{9 + 3(s+t) + s^2t^2}\, dsdt = 0.47644 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{9 + 3(s+t) + s^2t^2} dsdt = -5.7189 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{9 + 3(s+t) + s^2t^2} dsdt = 1.2932 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.47644 - 2\mu & -5.7189 \times 10^{-2} \\ -5.7189 \times 10^{-2} & 1.2932 \times 10^{-2} - \dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.3333\mu^2 - 0.34349\mu + 2.8907 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.24891,\ \mu_2 = 8.7102 \times 10^{-3}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.24891} = 4.0175 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{8.7102 \times 10^{-3}} = 114.81\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 4.0175$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{9+3(s+t)+s^2t^2}\, dsdt = 0.47644 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = -5.7189 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 1.2932 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 5.7825 \times 10^{-3} \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}s\left(3t^2-1\right)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = -1.6704 \times 10^{-3} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(3t^2-1\right)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = -6.7472 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.47644 - 2\mu & -5.7189 \times 10^{-2} & 5.7825 \times 10^{-3} \\ -5.7189 \times 10^{-2} & 1.2932 \times 10^{-2} - \frac{2}{3}\mu & -1.6704 \times 10^{-3} \\ 5.7825 \times 10^{-3} & -1.6704 \times 10^{-3} & -6.7472 \times 10^{-4} - \frac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$

$$-0.53333\mu^3 + 0.13650\mu^2 - 8.9666 \times 10^{-4}\mu - 2.6074 \times 10^{-6} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.24911,\ \mu_2 = 9.0067 \times 10^{-3},\ \mu_3 = -2.1790 \times 10^{-3}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.249\,11} = 4.\,014\,3 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{9.\,006\,7 \times 10^{-3}} = 111.\,03 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-2.\,179\,0 \times 10^{-3}} = -458.\,93
\end{aligned}
$$

olur. Yine aranan pozitif özdeğer yaklaşık

$$\lambda^+ = 4.\,014\,3$$

olarak bulunmaktadır.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 0.31377 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\,(1-s^2)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = -7.4025 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(1-s^2)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 2.0565 \times 10^{-2}
\end{aligned}
$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$
\begin{vmatrix}
0.31377 - \frac{4}{3}\mu & -7.4025 \times 10^{-2} \\
-7.4025 \times 10^{-2} & 2.0565 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu
\end{vmatrix}
$$

$$= 1.4222\mu^2 - 0.36211\mu + 9.7298 \times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.25190,\ \mu_2 = 2.7159 \times 10^{-3}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.25190} = 3.9698 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2.7159 \times 10^{-3}} = 368.2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 3.9698$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 0.31377 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\,(1-s^2)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = -7.4025 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(1-s^2)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 2.0565 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{4}\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 0.16765 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3s}{2}\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = -2.6585 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{9}{16}\,(5s^2-1)\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 1.1412 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
0.31377 - \frac{4}{3}\mu & -7.4025 \times 10^{-2} & 0.16765 \\
-7.4025 \times 10^{-2} & 2.0565 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu & -2.6585 \times 10^{-2} \\
0.16765 & -2.6585 \times 10^{-2} & 1.1412 \times 10^{-3} - \frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= 2.9675 \times 10^{-2}\mu + 0.312\mu^2 - 1.219\mu^3 - 1.3881 \times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = -7.7432 \times 10^{-2},\ \mu_2 = 4.4712 \times 10^{-3},\ \mu_3 = 0.32891$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-7.7432 \times 10^{-2}} = -12.915 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{4.4712 \times 10^{-3}} = 223.65 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{0.328\,91} = 3.0403
\end{aligned}$$

olur. Yine aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 3.0403$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 0.371\,35 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = -8.819\,6 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2} dsdt = 3.036\,3 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.371\,35 - \frac{1}{2}\pi\mu & -8.819\,6 \times 10^{-2} \\ -8.819\,6 \times 10^{-2} & 3.036\,3 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.467\,4\mu^2 - 0.631\,01\mu + 3.496\,8 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.250\,07,\ \mu_2 = 5.667\,2 \times 10^{-3}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.250\,07} = 3.998\,9 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{5.667\,2 \times 10^{-3}} = 176.45
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 3.9989$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2}dsdt = 0.37135 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2}dsdt = -8.8196\times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2}dsdt = 3.0363\times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2}dsdt = 0.13679 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2s(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2}dsdt = -2.8112\times 10^{-2} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(4s^2-1)(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{9+3(s+t)+s^2t^2}dsdt = 3.074\times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$
\begin{vmatrix}
0.37135-\frac{1}{2}\pi\mu & -8.8196\times 10^{-2} & 0.13679 \\
-8.8196\times 10^{-2} & 3.0363\times 10^{-2}-\frac{1}{2}\pi\mu & -2.8112\times 10^{-2} \\
0.13679 & -2.8112\times 10^{-2} & 3.074\times 10^{-4}-\frac{1}{2}\pi\mu
\end{vmatrix}
$$

$$
= -3.8758\mu^3 + 0.99195\mu^2 + 2.4947\times 10^{-2}\mu - 1.8223\times 10^{-4} = 0
$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.27844,\ \mu_2 = 5.9361\times 10^{-3},\ \mu_3 = -2.8446\times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.27844} = 3.5914 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{5.9361\times 10^{-3}} = 168.46 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-2.8446\times 10^{-2}} = -35.154
\end{aligned}
$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 3.5914$

olur.

Örnek 4.3.3 *Daha önce yapılan çalışmalarda hepsi aynı anda* 0 *olmamak şartıyla* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{1}{a + bst + cs^2t^2}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$$N^+(T) = N^-(T) = \infty$$

olduğu bulunmuştu.

Şimdi Ritz yöntemiyle Legendre polinomi ve Jacobi polinomu kullanılarak bu formdaki

$$k(s,t) = \frac{1}{7 + 4st + s^2t^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri ve en büyük negatif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{7 + 4st + s^2t^2} dsdt = 0.58275 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{7 + 4st + s^2t^2} dsdt = -3.1554 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{7 + 4st + s^2t^2} dsdt = -3.6684 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.58275-2\mu & -3.1554\times10^{-30} \\ -3.1554\times10^{-30} & -3.6684\times10^{-2}-\dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$
$$= 1.3333\mu^2 - 0.31513\mu - 2.1378\times10^{-2} = 0$$

haline gelir. Buradan

$\mu_1 = 0.29138,\ \mu_2 = -5.5027\times10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{0.29138} = 3.4319 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{-5.5027\times10^{-2}} = -18.173 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 3.4319$

ve aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -18.173$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} \langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 0.58275 \\ \langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{t}{7+4st+s^2t^2}dsdt = -3.1554\times10^{-30} \\ \langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{st}{7+4st+s^2t^2}dsdt = -3.6684\times10^{-2} \\ \langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 4.4636\times10^{-3} \\ \langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}s\left(3t^2-1\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 9.8608\times10^{-31} \\ \langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(3t^2-1\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 1.7480\times10^{-3} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.58275 - 2\mu & -3.1554 \times 10^{-30} & 4.4636 \times 10^{-3} \\ -3.1554 \times 10^{-30} & -3.6684 \times 10^{-2} - \frac{2}{3}\mu & 9.8608 \times 10^{-31} \\ 4.4636 \times 10^{-3} & 9.8608 \times 10^{-31} & 1.7480 \times 10^{-3} - \frac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$

$$= -0.53333\mu^3 + 0.12838\mu^2 + 8.0135 \times 10^{-3}\mu - 3.6637 \times 10^{-5} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.29146,\ \mu_2 = 4.2832 \times 10^{-3},\ \mu_3 = -5.5027 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{0.29146} = 3.431 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4.2832 \times 10^{-3}} = 233.47 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{-5.5027 \times 10^{-2}} = -18.173 \end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 3.431$

ve aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -18.173$

olur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 0.38552 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\left(1-s^2\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = -3.1554\times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\left(1-s^2\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = -5.8544\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.38552-\dfrac{4}{3}\mu & -3.1554\times 10^{-30} \\ -3.1554\times 10^{-30} & -5.8544\times 10^{-2}-\frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 0.33316\mu - 2.2570\times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.28914,\ \mu_2 = -5.4886\times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.28914} = 3.4585 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-5.4886\times 10^{-2}} = -18.220
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 3.4585$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -18.220$

olur. Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 0.38552 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\left(1-s^2\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = -3.1554\times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\left(1-s^2\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = -5.8544\times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\dfrac{3}{4}\left(1-s^2\right)\left(5t^2-1\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 0.19729 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\dfrac{6s}{4}\left(1-s^2\right)\left(5t^2-1\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 2.761\times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{9}{16}\left(5s^2-1\right)\left(5t^2-1\right)\left(1-s^2\right)}{7+4st+s^2t^2}dsdt = 5.7422\times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.38552-\frac{4}{3}\mu & -3.1554\times10^{-30} & 0.19729 \\ -3.1554\times10^{-30} & -5.8544\times10^{-2}-\frac{16}{15}\mu & 2.761\times10^{-30} \\ 0.19729 & 2.761\times10^{-30} & 5.7422\times10^{-3}-\frac{6}{7}\mu \end{vmatrix}$$

$$5.895\,1\times10^{-2}\mu+0.293\,73\mu^2-1.219\mu^3+2.149\,1\times10^{-3}=0$$

haline gelir ve

$\mu_1=-8.4468\times10^{-2},\ \mu_2=-5.488\,1\times10^{-2},\ \mu_3=0.38031$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{-8.4468\times10^{-2}}=-11.839 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{-5.4884\times10^{-2}}=-18.22 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{0.38031}=2.6294 \end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+=2.6294$

olur.

Örnek 4.3.4 *Daha önceki çalışmalarda* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *ve* $a>0$ *olmak üzere*

$$k(s,t)=\frac{1}{a+bst+c\left(s^4+t^4\right)}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho>0,\ I\in Ad\left(k\right)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I=[-\rho,\rho]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^2\left(I\right)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$N^+\left(T\right)=N^-\left(T\right)=\infty$

olduğu bulunmuştu. Şimdi Ritz yöntemi kullanılarak

$$k(s,t)=\frac{1}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)}$$

simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri ve en büyük negatif özdeğeri yaklaşık olarak bulunacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)}\, dsdt = 1.029\,3 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -6.310\,9 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -3.509\,3 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.029\,3 - 2\mu & -6.310\,9 \times 10^{-30} \\ -6.310\,9 \times 10^{-30} & -3.509\,3 \times 10^{-2} - \dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$
$$= 1.333\,3\mu^2 - 0.616\,01\mu - 3.612\,1 \times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.514\,66,\ \mu_2 = -5.264\,0 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.514\,66} = 1.943 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-5.264\,0 \times 10^{-2}} = -18.997
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.943$$

ve aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -18.997$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)}\, dsdt = 1.0293 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -3.5093 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -6.9751 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}s\left(3t^2-1\right)}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 8.8747 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(3t^2-1\right)}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 9.5534 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
1.0293 - 2\mu & -6.3109 \times 10^{-30} & -6.9751 \times 10^{-2} \\
-6.3109 \times 10^{-30} & -3.5093 \times 10^{-2} - \frac{2}{3}\mu & 8.8747 \times 10^{-31} \\
-6.9751 \times 10^{-2} & 8.8747 \times 10^{-31} & 9.5534 \times 10^{-3} - \frac{2}{5}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -0.53333\mu^3 + 0.25914\mu^2 + 1.1807 \times 10^{-2}\mu - 1.7435 \times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.52674,\ \mu_2 = 1.1790 \times 10^{-2},\ \mu_3 = -0.05264$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.52674} = 1.8985 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{1.1790 \times 10^{-2}} = 84.818 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-0.05264} = -18.997
\end{aligned}$$

olur. Yine aranan en küçük pozitif özdeğer yaklaşık

$\lambda^{+} = 1.8985$

ve en büyük negatif özdeğer ise

$$\lambda^- = -18.997$$

olarak bulunmaktadır.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 0.73273 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\left(1-s^2\right)}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 0 \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\left(1-s^2\right)}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -6.8212 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.73273 - \frac{4}{3}\mu & 0 \\ 0 & -6.8212 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 0.69063\mu - 4.9981 \times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.54956,\ \mu_2 = -6.3949 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.54956} = 1.8196 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-6.3949 \times 10^{-2}} = -15.637
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 1.8196$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -15.637$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{3+2st+3(s^4+t^4)} dsdt = 0.73273 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t(1-s^2)}{3+2st+3(s^4+t^4)} dsdt = 0 \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st(1-s^2)}{3+2st+3(s^4+t^4)} dsdt = -6.8212 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{4}(5t^2-1)(1-s^2)}{3+2st+3(s^4+t^4)} dsdt = 0.23419 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3s}{2}(5t^2-1)(1-s^2)}{3+2st+3(s^4+t^4)} dsdt = 2.3666 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{9}{16}(5s^2-1)(5t^2-1)(1-s^2)}{3+2st+3(s^4+t^4)} dsdt = -5.7087 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
0.73273 - \frac{4}{3}\mu & 0 & 0.23419 \\
0 & -6.8212 \times 10^{-2} \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu & 2.3666 \times 10^{-30} \\
0.23419 & 2.3666 \times 10^{-30} & -5.7087 \times 10^{-3} - \frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -1.219\mu^3 + 0.66103\mu^2 + 6.3386 \times 10^{-2}\mu + 4.0264 \times 10^{-5} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.62549,\ \mu_2 = -6.3949 \times 10^{-4},\ \mu_3 = -8.2577 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.62549} = 1.5987 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-6.3949 \times 10^{-4}} = -1563.7 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-8.2577 \times 10^{-2}} = -12.110
\end{aligned}$$

olur. Yine aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 1.598\,7$

ve aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -12.110$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \dots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 0.843\,64 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 0 \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -9.306\,9 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.843\,64 - \frac{1}{2}\pi\mu & 0 \\ 0 & -9.306\,9 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.467\,4\mu^2 - 1.179\,0\mu - 7.851\,7 \times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.537\,08,\ \mu_2 = -5.925\,0 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.537\,08} = 1.\,861\,9 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-5.\,925\,0 \times 10^{-2}} = -16.\,878
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.\,861\,9$$

ve en büyük negatif özdeğer

$$\lambda^- = -16.\,878$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 0.843\,64 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 0 \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = -9.\,306\,9 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(4t^2-1\right)\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 0.122\,59 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2s\left(4t^2-1\right)\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 1.\,577\,7 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(4s^2-1\right)\left(4t^2-1\right)\sqrt{1-s^2}}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)} dsdt = 5.\,437\,6 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
0.843\,64 - \frac{1}{2}\pi\mu & 0 & 0.122\,59 \\
0 & -9.\,306\,9 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu & 1.\,577\,7 \times 10^{-30} \\
0.122\,59 & 1.\,577\,7 \times 10^{-30} & 5.\,437\,6 \times 10^{-3} - \frac{1}{2}\pi\mu
\end{vmatrix}$$
$$= -3.\,875\,8\mu^3 + 1.\,865\,4\mu^2 + 0.140\,53\mu + 9.\,717\,3 \times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve

$$\mu_1 = 0.548\,26,\ \mu_2 = -7.\,718\,2 \times 10^{-3},\ \mu_3 = -5.\,924\,9 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.548\,26} = 1.\,824\,0 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-7.\,718\,2\times 10^{-3}} = -129.\,56 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-5.\,924\,9\times 10^{-2}} = -16.\,878
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.\,824\,0$$

ve en büyük negatif özdeğer

$$\lambda^- = -16.\,878$$

olur.

Örnek 4.3.5 *Daha önce yapılan çalışmalarda hepsi aynı anda sıfır olmayacak şekilde $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{a+bst+as^2t^2}{1-st+s^2t^2}$$

formundaki çekirdekler incelenmişti. $\rho>0$, $I\in Ad\,(k)$ yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere $I=[-\rho,\rho]$ simetrik aralığı göz önüne alınarak $L^2\,(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen T integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayıları incelenmişti. Sonuç olarak $a>0$, $b<0$ ve $a+b<0$ olduğunda

$$N^+(T)=1 \text{ ve } N^-(T)=\infty$$

olduğu bulunmuştu. Şimdi Ritz yöntemiyle bu formdaki

$$k(s,t) = \frac{2-4st+2s^2t^2}{1-st+s^2t^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri ve en büyük negatif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n=1,2,\cdots,N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2-4st+2s^2t^2}{1-st+s^2t^2} dsdt = 7.3834 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(2-4st+2s^2t^2)\, t}{1-st+s^2t^2} dsdt = -2.5244 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(2-4st+2s^2t^2)\, st}{1-st+s^2t^2} dsdt = -0.80362
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 7.3834 - 2\mu & -2.5244 \times 10^{-29} \\ -2.5244 \times 10^{-29} & -0.80362 - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.3333\mu^2 - 3.315\mu - 5.9334 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 3.6917, \;\; \mu_2 = -1.2054$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{3.6917} = 0.27088 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.2054} = -0.8296
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.27088$$

ve en büyük negatif özdeğer

$$\lambda^- = -0.8296$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2-4st+2s^2t^2}{1-st+s^2t^2}dsdt = 7.3834\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(2-4st+2s^2t^2\right)t}{1-st+s^2t^2}dsdt = -2.5244\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(2-4st+2s^2t^2\right)st}{1-st+s^2t^2}dsdt = -0.80362\\
\langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}dsdt = -0.20586\\
\langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}s\left(3t^2-1\right)\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}dsdt = 2.8399\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(3t^2-1\right)\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}dsdt = -6.0678\times 10^{-2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$
\begin{vmatrix}
7.3834-2\mu & -2.5244\times 10^{-29} & -0.20586\\
-2.5244\times 10^{-29} & -0.80362-\frac{2}{3}\mu & 2.8399\times 10^{-29}\\
-0.20586 & 2.8399\times 10^{-29} & -6.0678\times 10^{-2}-\frac{2}{5}\mu
\end{vmatrix}
$$

$$
= -0.53333\mu^3+1.2451\mu^2+2.6028\mu+0.39409=0
$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 3.7054,\ \mu_2 = -0.16543,\ \mu_3 = -1.2054$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{3.7054} = 0.26988\\
\lambda_2 &= \frac{1}{-0.16543} = -6.0449\\
\lambda_3 &= \frac{1}{-1.2054} = -0.8296
\end{aligned}
$$

olur. Yine aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 0.26988$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -0.8296$

olur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{2 - 4st + 2s^2t^2}{1 - st + s^2t^2} \sqrt{1 - s^2} \right) dsdt = 5.897 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\,(2 - 4st + 2s^2t^2)}{1 - st + s^2t^2} \sqrt{1 - s^2} dsdt = -5.0487 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(2 - 4st + 2s^2t^2)}{1 - st + s^2t^2} \sqrt{1 - s^2} dsdt = -1.9378
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 5.897 - \frac{1}{2}\pi\mu & -5.0487 \times 10^{-29} \\ -5.0487 \times 10^{-29} & -1.9378 - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.4674\mu^2 - 6.219\,1\mu - 11.427 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 3.7541,\ \mu_2 = -1.2336$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{3.7541} = 0.26638 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.233\,6} = -0.81064
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 0.26638$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-}=-0.81064$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2-4st+2s^2t^2}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}\right)dsdt=5.897\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2t\,(2-4st+2s^2t^2)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=-5.0487\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{4st\,(2-4st+2s^2t^2)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=-1.9378\\
\langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(4t^2-1)\,(2-4st+2s^2t^2)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=1.61\\
\langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2s\,(4t^2-1)\,(2-4st+2s^2t^2)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=8.8352\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(4s^2-1)\,(4t^2-1)\,(2-4st+2s^2t^2)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=-0.37695
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
5.897-\frac{1}{2}\pi\mu & -5.0487\times 10^{-29} & 1.61\\
-5.0487\times 10^{-29} & -1.9378-\frac{1}{2}\pi\mu & 8.835\,2\times 10^{-29}\\
1.61 & 8.8352\times 10^{-29} & -0.37695-\frac{1}{2}\pi\mu
\end{vmatrix}$$

$$=-3.875\,8\mu^3+8.838\,8\mu^2+24.366\mu+9.330\,5=0$$

haline gelir ve

$\mu_1=4.001\,8,\ \mu_2=-0.487\,63,\ \mu_3=-1.233\,7$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-0.487\,63}=-2.050\,7\\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.233\,7}=-0.810\,57\\
\lambda_3 &= \frac{1}{4.001\,8}=0.249\,89
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+}=0.249\,89$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -0.810\,57$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2 - 4st + 2s^2t^2}{1 - st + s^2t^2}\left(1 - s^2\right) dsdt = 5.0595 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\,(2 - 4st + 2s^2t^2)}{1 - st + s^2t^2}\left(1 - s^2\right) dsdt = -5.0487 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(2 - 4st + 2s^2t^2)}{1 - st + s^2t^2}\left(1 - s^2\right) dsdt = -1.3367
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 5.0595 - \dfrac{4}{3}\mu & -5.0487 \times 10^{-29} \\ -5.0487 \times 10^{-29} & -1.3367 - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 3.614\,5\mu - 6.763 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 3.7946,\ \mu_2 = -1.2532$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{3.7946} = 0.26353 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.2532} = -0.79796
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 0.26353$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -0.79796$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2-4st+2s^2t^2}{1-st+s^2t^2}\left(1-s^2\right) dsdt = 5.0595 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}\left(1-s^2\right) dsdt = -5.0487\times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}\left(1-s^2\right) dsdt = -1.3367 \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\frac{\left(5t^2-1\right)\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}\left(1-s^2\right) dsdt = 2.2878 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{3s}{2}\frac{\left(5t^2-1\right)\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}\left(1-s^2\right) dsdt = 7.5731\times 10^{-29} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{9}{16}\frac{\left(5s^2-1\right)\left(5t^2-1\right)\left(2-4st+2s^2t^2\right)}{1-st+s^2t^2}\left(1-s^2\right) dsdt = -0.260\,14
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
5.0595-\frac{4}{3}\mu & -5.0487\times 10^{-29} & 2.2878 \\
-5.0487\times 10^{-29} & -1.3367-\frac{16}{15}\mu & 7.573\,1\times 10^{-29} \\
2.2878 & 7.5731\times 10^{-29} & -0.260\,14-\frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= 12.32\mu + 2.728\,2\mu^2 - 1.219\mu^3 + 8.7557 = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = -1.2527,\ \mu_2 = -1.2178,\ \mu_3 = 4.7085$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-1.2527} = -0.79828 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.2178} = -0.82115 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{4.708\,5} = 0.21238
\end{aligned}$$

olur. Yine aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 0.212\,38$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^{-} = -0.79828$

olur.

Örnek 4.3.6 *Daha önce yapılan çalışmalarda hepsi aynı anda sıfır olmayacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$k(s,t) = \frac{a + bst + as^2t^2}{1 - st + s^2t^2}$$

formundaki çekirdekler incelenmişti. $\rho > 0$, $I \in Ad\,(k)$ yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere $I = [-\rho, \rho]$ simetrik aralığı göz önüne alınarak $L^2\,(I)$ üzerinde k ya karşılık gelen T integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayıları incelenmişti. Sonuç olarak $a = 0$ ve $b < 0$ olduğunda

$N^{+}(T) = 0$ *ve* $N^{-}(T) = \infty$

olduğu bulunmuştu. Şimdi Ritz yöntemiyle bu formdaki

$$k(s,t) = \frac{-5st}{1 - st + s^2t^2}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en büyük negatif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st}{1-st+s^2t^2}dsdt = -1.5416\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(-5st)\,t}{1-st+s^2t^2}dsdt = 7.5731\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(-5st)\,st}{1-st+s^2t^2}dsdt = -2.009
\end{aligned}$$

dir. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} -1.5416-2\mu & 7.5731\times 10^{-29} \\ 7.5731\times 10^{-29} & -2.009-\frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.3333\mu^2+5.0457\mu+3.0971 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = -0.77081,\ \mu_2 = -3.0136$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-0.77081} = -1.2973\\
\lambda_2 &= \frac{1}{-3.0136} = -0.33183
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -0.33183$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st}{1-st+s^2t^2}dsdt = -1.5416\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(-5st)\,t}{1-st+s^2t^2}dsdt = 7.5731\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(-5st)\,st}{1-st+s^2t^2}dsdt = -2.009\\
\langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)(-5st)}{1-st+s^2t^2}dsdt = -0.51464\\
\langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}s\left(3t^2-1\right)(-5st)}{1-st+s^2t^2}dsdt = 6.9420\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(3t^2-1\right)(-5st)}{1-st+s^2t^2}dsdt = -0.15169
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} -1.5416-2\mu & 7.5731\times10^{-29} & -0.51464 \\ 7.5731\times10^{-29} & -2.009-\dfrac{2}{3}\mu & 6.9420\times10^{-29} \\ -0.51464 & 6.9420\times10^{-29} & -0.15169-\dfrac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$

$$= -0.53333\mu^3 - 2.2205\mu^2 - 1.8276\mu + 6.2297\times10^{-2} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 3.277\,2\times10^{-2},\ \mu_2 = -1.1828,\ \mu_3 = -3.0134$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{3.2772\times10^{-2}} = 30.514 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{-1.1828} = -0.84545 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{-3.0134} = -0.33185 \end{aligned}$$

olur. Aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -0.33185$

olur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1,\ldots,N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j\psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1P_0(s) + a_2P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt = -0.96539 \\ \langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st.2t}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt = 1.5777\times10^{-30} \\ \langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st.4st}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt = -0.48445 \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} -0.96539-\frac{1}{2}\pi\mu & 1.5777\times10^{-30} \\ 1.5777\times10^{-30} & -0.48445-\frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.4674\mu^2+2.2774\mu+0.46768=0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1=-0.30841,\ \mu_2=-0.61459$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{-0.30841}=-3.2424 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{-0.6145}=-1.6271 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^-=-1.6271$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} \langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=-0.96539 \\ \langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st.2t}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=1.5777\times10^{-30} \\ \langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st.4st}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=-0.48445 \\ \langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st\left(4t^2-1\right)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=-1.2109 \\ \langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2s\left(4t^2-1\right)\left(-5st\right)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=2.5244\times10^{-28} \\ \langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{-5st\left(4s^2-1\right)\left(4t^2-1\right)}{1-st+s^2t^2}\sqrt{1-s^2}dsdt=-0.94237 \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} -0.96539-\frac{1}{2}\pi\mu & 1.5777\times10^{-30} & -1.2109 \\ 1.5777\times10^{-30} & -0.48445-\frac{1}{2}\pi\mu & 2.5244\times10^{-28} \\ -1.2109 & 2.5244\times10^{-28} & -0.94237-\frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= -3.8758\mu^3-5.9025\mu^2-0.57757\mu+0.26961=0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.16366,\ \mu_2 = -0.30841,\ \mu_3 = -1.3782$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.16366} = 6.1102\\ \lambda_2 &= \frac{1}{-0.30841} = -3.2424\\ \lambda_3 &= \frac{1}{-1.3782} = -0.72558\end{aligned}$$

olur. Aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -0.72558$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-5st\,(1-s^2)}{1-st+s^2t^2} dsdt = -0.68465\\ \langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-5st.2t\,(1-s^2)}{1-st+s^2t^2} dsdt = 1.2622 \times 10^{-29}\\ \langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(1-s^2)\,(-5st)}{1-st+s^2t^2} dsdt = -3.3418\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} -0.68465 - \frac{4}{3}\mu & 1.2622 \times 10^{-29} \\ 1.2622 \times 10^{-29} & -3.3418 - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 5.186\mu + 1.4222\mu^2 + 2.2880 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = -3.1330,\ \mu_2 = -0.51350$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-3.1330} = -0.31918 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-0.51350} = -1.9474
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -0.31918$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-5st\,(1-s^2)}{1-st+s^2t^2} dsdt = -0.68465 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-5st.2t\,(1-s^2)}{1-st+s^2t^2} dsdt = 1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(1-s^2)\,(-5st)}{1-st+s^2t^2} dsdt = -3.3418 \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-\frac{15}{4}st\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{1-st+s^2t^2} dsdt = -0.94723 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-\frac{15}{2}s^2t\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{1-st+s^2t^2} dsdt = 1.5146 \times 10^{-28} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-\frac{45}{16}st\,(5s^2-1)\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{1-st+s^2t^2} dsdt = -0.65035
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
-0.68465 - \frac{4}{3}\mu & 1.2622 \times 10^{-29} & -0.94723 \\
1.2622 \times 10^{-29} & -3.3418 - \frac{16}{15}\mu & 1.5146 \times 10^{-28} \\
-0.94723 & 1.5146 \times 10^{-28} & -0.65035 - \frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= 1.5104 - 5.3701\mu^2 - 1.219\mu^3 - 4.3768\mu = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = -3.1331,\ \mu_2 = -1.5306,\ \mu_3 = 0.25838$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{-3.1331} = -0.31917\\ \lambda_2 &= \frac{1}{-1.5306} = -0.65334\\ \lambda_3 &= \frac{1}{0.25838} = 3.8703\end{aligned}$$

olur. Yine aranan en büyük negatif özdeğer

$$\lambda^- = -0.31917$$

olur.

4.4 TRİGONOMETRİK VE HİPERBOLİK ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ

Bu kısımda trigonometrik ve hiperbolik çekirdeklere sahip bazı integral operatörlerin özdeğerleri nümerik hesaplamalarla incelenmiştir.

Örnek 4.4.1 *Ritz yöntemi kullanılarak*

$$k(s,t) = \frac{1}{7+\cosh(s+t)}$$

simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün en küçük pozitif özdeğeri ve en büyük negatif özdeğeri yaklaşık olarak bulunacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1,\ldots,N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j\psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1P_0(s) + a_2P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.47873 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -3.1554\times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -7.1360\times 10^{-3}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.47873 - 2\mu & -3.1554\times 10^{-30} \\ -3.1554\times 10^{-30} & -7.1360\times 10^{-3} - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$1.3333\mu^2 - 0.30488\mu - 3.4162\times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.23937,\ \mu_2 = -1.0704\times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.23937} = 4.1776 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0704\times 10^{-2}} = -93.423
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 4.1776$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -93.423$

bulunur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.47873 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -3.1554\times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -7.1360\times 10^{-3} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3t^2-1)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -4.2939\times 10^{-3} \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}s(3t^2-1)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 1.9722\times 10^{-31} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}(3s^2-1)(3t^2-1)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -1.8221\times 10^{-5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.47873 - 2\mu & -3.1554 \times 10^{-30} & -4.2939 \times 10^{-3} \\ -3.1554 \times 10^{-30} & -7.1360 \times 10^{-3} - \dfrac{2}{3}\mu & 1.9722 \times 10^{-31} \\ -4.2939 \times 10^{-3} & 1.9722 \times 10^{-31} & -1.8221 \times 10^{-5} - \dfrac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$

$$= -0.53333\mu^3 + 0.121\,93\mu^2 + 1.3843 \times 10^{-3}\mu + 1.9382 \times 10^{-7} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.23947,\ \mu_2 = -1.4178 \times 10^{-4},\ \mu_3 = -1.0704 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{0.239\,47} = 4.1759 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{-1.4178 \times 10^{-4}} = -7053.2 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{-1.0704 \times 10^{-2}} = -93.423 \end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 4.1759$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -93.423$

olur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.32202 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\left(1-s^2\right)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\left(1-s^2\right)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -1.1402 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.32202 - \frac{4}{3}\mu & -6.3109 \times 10^{-30} \\ -6.3109 \times 10^{-30} & -1.1402 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 0.32829\mu - 3.6717 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.24152,\ \mu_2 = -1.0689 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.24152} = 4.1404 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0689 \times 10^{-2}} = -93.554
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 4.1404$

ve en büyük negatif özdeğer

$\lambda^- = -93.554$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.32202 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t(1-s^2)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st(1-s^2)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -1.1402 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{4}(5t^2-1)(1-s^2)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.15388 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3s}{2}(5t^2-1)(1-s^2)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 9.8608 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{9}{16}(5s^2-1)(5t^2-1)(1-s^2)}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -1.8913 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistem

$$\begin{vmatrix}
0.32202 - \frac{4}{3}\mu & -6.3109 \times 10^{-30} & 0.15388 \\
-6.3109 \times 10^{-30} & -1.1402 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu & 9.8608 \times 10^{-31} \\
0.15388 & 9.8608 \times 10^{-31} & -1.8913 \times 10^{-3} - \frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= 2.9026 \times 10^{-2}\mu + 0.27870\mu^2 - 1.219\mu^3 + 2.7693 \times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = -6.8945 \times 10^{-2},\ \mu_2 = -1.0689 \times 10^{-2},\ \mu_3 = 0.30826$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-6.8945 \times 10^{-2}} = -14.504 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0689 \times 10^{-2}} = -93.554 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{0.30826} = 3.244
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 3.244$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.3781 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -1.6801 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.3781 - \frac{1}{2}\pi\mu & -6.3109 \times 10^{-30} \\ -6.3109 \times 10^{-30} & -1.6801 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.4674\mu^2 - 0.56753\mu - 6.3525 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.24071, \ \mu_2 = -1.0696 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.24071} = 4.1544 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0696 \times 10^{-2}} = -93.493
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 4.1544$$

en büyük negatif özdeğer

$$\lambda^- = -93.493$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.3781 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -1.6801 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 0.11706 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2s(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = 1.1833 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(4s^2-1)(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{7+\cosh(s+t)} dsdt = -2.1915 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
0.3781 - \frac{1}{2}\pi\mu & -6.3109 \times 10^{-30} & 0.11706 \\
-6.3109 \times 10^{-30} & -1.6801 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu & 1.1833 \times 10^{-30} \\
0.11706 & 1.1833 \times 10^{-30} & -2.1915 \times 10^{-3} - \frac{1}{2}\pi\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -3.8758\mu^3 + 0.88606\mu^2 + 3.2747 \times 10^{-2}\mu + 2.4415 \times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve

$$\mu_1 = 0.2618,\ \mu_2 = -1.0696 \times 10^{-2},\ \mu_3 = -2.2496 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.2618} = 3.8197 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0696 \times 10^{-2}} = -93.493 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-2.2496 \times 10^{-2}} = -44.452
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 3.8197$$

olur.

Örnek 4.4.2 *Daha önce yapılan çalışmalarda*

$$k(s,t) = \frac{1}{s^2t^2 + \cosh(s-t)}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho > 0,\ I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$$N^+(T) = \infty \text{ ve } N^-(T) = 0$$

olduğu bulunmuştu. Şimdi Ritz yöntemiyle bu formdaki

$$k(s,t) = \frac{1}{5 + \cosh(s-t)}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.63010 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = 1.2068 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.63010 - 2\mu & -6.3109 \times 10^{-30} \\ -6.3109 \times 10^{-30} & 1.2068 \times 10^{-2} - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.333\,3\mu^2 - 0.444\,2\mu + 7.604 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.31506, \ \mu_2 = 1.8102 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.31506} = 3.1740 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{1.8102 \times 10^{-2}} = 55.243
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 3.1740$

bulunur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{5+\cosh(s-t)} dsdt = 0.63010 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{5+\cosh(s-t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{5+\cosh(s-t)} dsdt = 1.2068 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3t^2-1)}{5+\cosh(s-t)} dsdt = -7.1932 \times 10^{-3} \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}s(3t^2-1)}{5+\cosh(s-t)} dsdt = -3.4513 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}(3s^2-1)(3t^2-1)}{5+\cosh(s-t)} dsdt = 8.8521 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
0.63010 - 2\mu & -6.3109 \times 10^{-30} & -7.1932 \times 10^{-3} \\
-6.3109 \times 10^{-30} & 1.2068 \times 10^{-2} - \frac{2}{3}\mu & -3.4513 \times 10^{-31} \\
-7.1932 \times 10^{-3} & -3.4513 \times 10^{-31} & 8.8521 \times 10^{-5} - \frac{2}{5}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -0.533\,33\mu^3 + 0.177\,80\mu^2 - 3.\,046\,4 \times 10^{-3}\mu + 4.\,869\,4 \times 10^{-8} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.31526, \ \mu_2 = 1.5999 \times 10^{-5}, \ \mu_3 = 1.8102 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.31526} = 3.1720\\ \lambda_2 &= \frac{1}{1.5999\times 10^{-5}} = 62504\\ \lambda_3 &= \frac{1}{1.8102\times 10^{-2}} = 55.243\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^{+} = 3.1720$$

olur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1,\ldots,N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j\psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1P_0(s) + a_2P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = 0.498\,41\\ \langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2t\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = -3.155\,4\times 10^{-30}\\ \langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{4st\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = 2.852\,9\times 10^{-2}\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.498\,41 - \frac{1}{2}\pi\mu & -3.155\,4\times 10^{-30}\\ -3.155\,4\times 10^{-30} & 2.852\,9\times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.467\,4\mu^2 - 0.827\,71\mu + 1.421\,9\times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.317\,30,\ \mu_2 = 1.816\,2\times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.317\,30} = 3.\,151\,6\\ \lambda_2 &= \frac{1}{1.\,816\,2\times 10^{-2}} = 55.\,06\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 3.\,151\,6$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = 0.498\,41\\ \langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2t\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = -3.\,155\,4\times 10^{-30}\\ \langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{4st\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = 2.\,852\,9\times 10^{-2}\\ \langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = 0.150\,95\\ \langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{2s(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = -5.\,916\,5\times 10^{-31}\\ \langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(4s^2-1)(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{5+\cosh(s-t)}dsdt = -3.\,209\,3\times 10^{-3}\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.498\,41-\frac{1}{2}\pi\mu & -3.\,155\,4\times 10^{-30} & 0.150\,95\\ -3.\,155\,4\times 10^{-30} & 2.\,852\,9\times 10^{-2}-\frac{1}{2}\pi\mu & -5.\,916\,5\times 10^{-31}\\ 0.150\,95 & -5.\,916\,5\times 10^{-31} & -3.\,209\,3\times 10^{-3}-\frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$
$$= -3.\,875\,8\mu^3 + 1.\,292\,3\mu^2 + 1.\,611\,3\times 10^{-2}\mu - 6.\,956\,9\times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve

$$\mu_1 = 0.344\,00,\ \mu_2 = 1.\,816\,2\times 10^{-2},\ \mu_3 = -0.028\,73$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.344\,00} = 2.\,907\,0\\ \lambda_2 &= \frac{1}{1.\,816\,2\times 10^{-2}} = 55.\,06\\ \lambda_3 &= \frac{1}{-0.028\,73} = -34.\,807\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 2.9070$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1 - s^2}{5 + \cosh(s - t)} dsdt = 0.42486 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t(1 - s^2)}{5 + \cosh(s - t)} dsdt = -3.1554 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st(1 - s^2)}{5 + \cosh(s - t)} dsdt = 1.9418 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.42486 - \dfrac{4}{3}\mu & -3.1554 \times 10^{-30} \\ -3.1554 \times 10^{-30} & 1.9418 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 0.47907\mu + 8.2499 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.31865, \ \mu_2 = 1.8204 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.31865} = 3.1382 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{1.8204 \times 10^{-2}} = 54.933
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 3.1382$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1 - s^2}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.42486 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\left(1 - s^2\right)}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = -3.1554 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\left(1 - s^2\right)}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = 1.9418 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{4}\left(5t^2 - 1\right)\left(1 - s^2\right)}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.20029 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3s}{2}\left(5t^2 - 1\right)\left(1 - s^2\right)}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = -1.9722 \times 10^{-31} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{9}{16}\left(5s^2 - 1\right)\left(5t^2 - 1\right)\left(1 - s^2\right)}{5 + \cosh(s-t)} dsdt = -2.9232 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistem

$$\begin{vmatrix}
0.42486 - \frac{4}{3}\mu & -3.1554 \times 10^{-30} & 0.20029 \\
-3.1554 \times 10^{-30} & 1.9418 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu & -1.9722 \times 10^{-31} \\
0.20029 & -1.9722 \times 10^{-31} & -2.9232 \times 10^{-3} - \frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -1.219\mu^3 + 0.40648\mu^2 + 3.7120 \times 10^{-2}\mu - 8.0309 \times 10^{-4} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.40468,\ \mu_2 = 1.8204 \times 10^{-2},\ \mu_3 = -8.9429 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.40468} = 2.4711 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{1.8204 \times 10^{-2}} = 54.933 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-8.9429 \times 10^{-2}} = -11.182
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 2.4711$

olur.

Örnek 4.4.3 *Daha önce yapılan çalışmalarda*

$$k(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s+t)}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho > 0,\ I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$$N^+(T) = \infty \text{ ve } N^-(T) = 0$$

olduğu bulunmuştu. Şimdi Ritz yöntemiyle bu formdaki

$$k(s,t) = \frac{1}{1 + \cos(s+t)}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(s+t)} ds dt = 1.3863 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{1+\cos(s+t)} ds dt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{1+\cos(s+t)} ds dt = 3.4374 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.3863 - 2\mu & -6.3109 \times 10^{-30} \\ -6.3109 \times 10^{-30} & 3.4374 \times 10^{-2} - \dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.3333\mu^2 - 0.99295\mu + 4.7653 \times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.69317,\ \mu_2 = 5.1561 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.69317} = 1.4426 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{5.1561 \times 10^{-2}} = 19.395
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 1.4426$

bulunur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(s+t)} dsdt = 1.3863 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{1+\cos(s+t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{1+\cos(s+t)} dsdt = 3.4374 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}(3t^2-1)}{1+\cos(s+t)} dsdt = -0.24387 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}s(3t^2-1)}{1+\cos(s+t)} dsdt = 1.5284 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{4}(3s^2-1)(3t^2-1)}{1+\cos(s+t)} dsdt = 4.3766 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
1.3863 - 2\mu & -6.3109 \times 10^{-30} & -0.24387 \\
-6.3109 \times 10^{-30} & 3.4374 \times 10^{-2} - \frac{2}{3}\mu & 1.5284 \times 10^{-30} \\
-0.24387 & 1.5284 \times 10^{-30} & 4.3766 \times 10^{-2} - \frac{2}{5}\mu
\end{vmatrix}$$
$$= -0.533\,33\mu^3 + 0.455\,53\mu^2 - 0.022\,87\mu + 4.\,125\,7 \times 10^{-5} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.800\,69,\ \mu_2 = 5.\,156\,1 \times 10^{-2},\ \mu_3 = 1.\,873\,8 \times 10^{-3}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.800\,69} = 1.\,2489 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{5.\,156\,1 \times 10^{-2}} = 19.395 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{1.\,873\,8 \times 10^{-3}} = 533.\,67
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.2489$$

bulunur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 1.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(1+\cos(s+t))} dsdt = 1.6070 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(1+\cos(s+t))} dsdt = -1.8933 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(1+\cos(s+t))} dsdt = 4.4765 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

iç çarpımları hesaplanır. Bunlar (4.3) sisteminde yazıldığında sistem

$$\begin{vmatrix} 1.6070 - \pi\mu & -1.8933 \times 10^{-29} \\ -1.8933 \times 10^{-29} & 4.4765 \times 10^{-2} - \dfrac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 4.9348\mu^2 - 2.664\,9\mu + 7.1937 \times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu eşitlik çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.51152,\ \mu_2 = 2.8498 \times 10^{-2}$

bulunur. Çekirdeğe karşılık gelen özdeğerlerin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.51152} = 1.9550 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2.8498 \times 10^{-2}} = 35.09
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. En küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 1.9550$

olarak bulunur.

Yine (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. 1.tip Chebyshev polinomları kullanılarak sırasıyla aşağıdaki işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(1+\cos(s+t))} dsdt = 1.6070 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(1+\cos(s+t))} dsdt = -1.8933 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(1+\cos(s+t))} dsdt = 4.4765 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t^2-1}{\sqrt{1-s^2}\,(1+\cos(s+t))} dsdt = -0.91192 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{s(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(1+\cos(s+t))} dsdt = 1.1044 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2s^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(1+\cos(s+t))} dsdt = 0.47202
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
1.6070 - \pi\mu & -1.8933 \times 10^{-29} & -0.91192 \\
-1.8933 \times 10^{-29} & 4.4765 \times 10^{-2} - \frac{\pi}{2}\mu & 1.1044 \times 10^{-29} \\
-0.91192 & 1.1044 \times 10^{-29} & 0.47202 - \frac{\pi}{2}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= 6.5153\mu^2 - 6.4615 \times 10^{-2}\mu - 7.7516\mu^3 - 3.2706 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu denklem çözüldüğünde

$\mu_1 = -1.7841 \times 10^{-2},\ \mu_2 = 2.8498 \times 10^{-2},\ \mu_3 = 0.82985$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-1.7841\times 10^{-2}} = -56.051 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2.8498\times 10^{-2}} = 35.09 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{0.82985} = 1.205
\end{aligned}$$

elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.205$$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1,\ldots,N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j\psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1P_0(s) + a_2P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)}dsdt = 1.2177 \\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)}dsdt = -1.2622\times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)}dsdt = 0.10733
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.2177-\frac{1}{2}\pi\mu & -1.2622\times 10^{-29} \\ -1.2622\times 10^{-29} & 0.10733-\frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.4674\mu^2 - 2.0814\mu + 0.13070 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.77523,\ \mu_2 = 6.8329\times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.775\,23} = 1.2899 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{6.8329 \times 10^{-2}} = 14.635
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.2899$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)} dsdt = 1.2177 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)} dsdt = 0.10733 \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)} dsdt = -0.16624 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2s(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)} dsdt = -2.761 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4s^2-1)(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{1+\cos(s+t)} dsdt = 4.3194 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi haline gelir ve

$$\begin{vmatrix}
1.217\,7 - \frac{1}{2}\pi\mu & -1.2622 \times 10^{-29} & -0.16624 \\
-1.2622 \times 10^{-29} & 0.10733 - \frac{1}{2}\pi\mu & -2.761 \times 10^{-30} \\
-0.16624 & -2.761 \times 10^{-30} & 4.3194 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -3.8758\mu^3 + 3.3760\mu^2 - 0.25179\mu + 2.6791 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.78991,\ \mu_2 = 6.8328 \times 10^{-2},\ \mu_3 = 1.2807 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.78991} = 1.2660 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{6.8328 \times 10^{-2}} = 14.635 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{1.2807 \times 10^{-2}} = 78.082
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 1.2660$

olur.

Çözüm 4 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$\varphi_n(s) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - s^2}{1 + \cos(s+t)} dsdt = 1.0868 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t(1 - s^2)}{1 + \cos(s+t)} dsdt = -1.8933 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st(1 - s^2)}{1 + \cos(s+t)} dsdt = 8.5179 \times 10^{-2}
\end{aligned}
$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$
\begin{vmatrix}
1.0868 - \frac{4}{3}\mu & -1.8933 \times 10^{-29} \\
-1.8933 \times 10^{-29} & 8.5179 \times 10^{-2} - \frac{16}{15}\mu
\end{vmatrix}
= 1.4222\mu^2 - 1.272\,8\mu + 9.2573 \times 10^{-2} = 0
$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.81509,\ \mu_2 = 7.9858 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.81509} = 1.2269 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{7.9858 \times 10^{-2}} = 12.522
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 1.2269$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-s^2}{1+\cos(s+t)} dsdt = 1.0868 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\left(1-s^2\right)}{1+\cos(s+t)} dsdt = -1.8933\times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\left(1-s^2\right)}{1+\cos(s+t)} dsdt = 8.5179\times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3}{4}\left(5t^2-1\right)\left(1-s^2\right)}{1+\cos(s+t)} dsdt = 6.3997\times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3s}{2}\left(5t^2-1\right)\left(1-s^2\right)}{1+\cos(s+t)} dsdt = -3.9443\times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{9}{16}\left(5s^2-1\right)\left(5t^2-1\right)\left(1-s^2\right)}{1+\cos(s+t)} dsdt = -3.4503\times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$
\begin{vmatrix}
1.0868-\frac{4}{3}\mu & -1.8933\times 10^{-29} & 6.3997\times 10^{-2} \\
-1.8933\times 10^{-29} & 8.5179\times 10^{-2}-\frac{16}{15}\mu & -3.9443\times 10^{-30} \\
6.3997\times 10^{-2} & -3.9443\times 10^{-30} & -3.4503\times 10^{-3}-\frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}
$$

$$
= 1.0861\mu^2 - 7.0588\times 10^{-2}\mu - 1.219\mu^3 - 6.6826\times 10^{-4} = 0
$$

haline gelir ve

$\mu_1 = -8.3771\times 10^{-3},\ \mu_2 = 7.9854\times 10^{-2},\ \mu_3 = 0.81950$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-8.3771\times 10^{-3}} = -119.37 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{7.985\,4\times 10^{-2}} = 12.523 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{0.81950} = 1.2203
\end{aligned}
$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 1.2203$

olur.

Örnek 4.4.4 *Daha önce yapılan çalışmalarda*

$$k\left(s,t\right)=\frac{1}{s^2t^2+\cosh\left(s-t\right)}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho>0,\ I\in Ad\left(k\right)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I=\left[-\rho,\rho\right]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^2\left(I\right)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$N^+\left(T\right)=\infty$ *ve* $N^-\left(T\right)=0$

olduğu bulunmuştu. Şimdi Ritz yöntemiyle bu formdaki

$$k(s,t)=\frac{1}{s^2t^2+\cosh\left(s-t\right)}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s)=P_{n-1}(s),\ n=1,\ldots,N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s)=\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s)=a_1P_0(s)+a_2P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{s^2t^2+\cosh\left(s-t\right)}dsdt=2.9624\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{t}{s^2t^2+\cosh\left(s-t\right)}dsdt=-1.2622\times10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{st}{s^2t^2+\cosh\left(s-t\right)}dsdt=0.15668
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 2.9624-2\mu & -1.2622\times10^{-29}\\ -1.2622\times10^{-29} & 0.15668-\dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$=1.3333\mu^2-2.2883\mu+0.46415=0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 1.4812,\ \mu_2 = 0.23502$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.4812} = 0.67513 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.23502} = 4.2550
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 0.67513$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 2.9624 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.15668 \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3t^2-1)}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -0.18388 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}s(3t^2-1)}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -1.9722 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}(3s^2-1)(3t^2-1)}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 3.7756 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
2.9624 - 2\mu & -1.2622 \times 10^{-29} & -0.18388 \\
-1.2622 \times 10^{-29} & 0.15668 - \frac{2}{3}\mu & -1.9722 \times 10^{-30} \\
-0.18388 & -1.9722 \times 10^{-30} & 3.7756 \times 10^{-3} - \frac{2}{5}\mu
\end{vmatrix}$$
$$= -0.53333\mu^3 + 0.92035\mu^2 - 0.17176\mu - 3.5452 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 1.5094,\ \mu_2 = 0.23502,\ \mu_3 = -1.8739 \times 10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.5094} = 0.66251 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.23502} = 4.2550 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-1.8739 \times 10^{-2}} = -53.365
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.66251$$

olur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 2.4156 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -2.5244 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.40604
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 2.4156 - \frac{1}{2}\pi\mu & -2.5244 \times 10^{-29} \\ -2.5244 \times 10^{-29} & 0.40604 - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.4674\mu^2 - 4.4322\mu + 0.98083 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 1.5378,\ \mu_2 = 0.25849$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.5378} = 0.65028 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.25849} = 3.8686
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.65028$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 2.4156 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -2.5244 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.40604 \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.41520 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2s(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(4s^2-1)(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -7.8226 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
2.4156 - \frac{1}{2}\pi\mu & -2.5244 \times 10^{-29} & 0.41520 \\
-2.5244 \times 10^{-29} & 0.40604 - \frac{1}{2}\pi\mu & -1.2622 \times 10^{-29} \\
0.41520 & -1.2622 \times 10^{-29} & -7.8226 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -3.8758\mu^3 + 6.769\,1\mu^2 - 0.92318\mu - 0.14672 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 1.5807,\ \mu_2 = 0.25849,\ \mu_3 = -9.2649 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.5807} = 0.63263 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.25849} = 3.8686 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-9.2649 \times 10^{-2}} = -10.793
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.63263$$

olur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(1-s^2)}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 2.0975 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t\,(1-s^2)}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = -2.5244 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st\,(1-s^2)}{s^2t^2 + \cosh(s-t)} dsdt = 0.29517
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 2.0975 - \dfrac{4}{3}\mu & -2.5244 \times 10^{-29} \\ -2.5244 \times 10^{-29} & 0.29517 - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 2.6309\mu + 0.61912 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 1.5732, \ \mu_2 = 0.27672$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.5732} = 0.63565 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.27672} = 3.6138
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 0.63565$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{s^2t^2+\cosh(s-t)} dsdt = 2.0975 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t(1-s^2)}{s^2t^2+\cosh(s-t)} dsdt = -2.5244 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{4st(1-s^2)}{s^2t^2+\cosh(s-t)} dsdt = 0.29517 \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{4}(5t^2-1)(1-s^2)}{s^2t^2+\cosh(s-t)} dsdt = 0.73599 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{3s}{2}(5t^2-1)(1-s^2)}{s^2t^2+\cosh(s-t)} dsdt = -6.3109 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{9}{16}(5s^2-1)(5t^2-1)(1-s^2)}{s^2t^2+\cosh(s-t)} dsdt = -7.5267 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
2.0975 - \frac{4}{3}\mu & -2.5244 \times 10^{-29} & 0.73599 \\
-2.5244 \times 10^{-29} & 0.29517 - \frac{16}{15}\mu & -6.3109 \times 10^{-30} \\
0.73599 & -6.3109 \times 10^{-30} & -7.5267 \times 10^{-2} - \frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= 0.24514\mu + 2.148\mu^2 - 1.219\mu^3 - 0.20649 = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = -0.33607,\ \mu_2 = 0.27672,\ \mu_3 = 1.8214$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-0.33607} = -2.9756 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.27672} = 3.6138 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{1.8214} = 0.54903
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 0.54903$

olur.

Örnek 4.4.5 *Daha önce yapılan çalışmalarda*

$$k(s,t) = \frac{1}{s^{2n}t^{2n} + \cos(s+t)}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho > 0$, $I \in Ad(k)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I = [-\rho, \rho]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^2(I)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$$N^+(T) = \infty \text{ ve } N^-(T) = 0$$

olduğu bulunmuştu. Şimdi Ritz yöntemiyle bu formdaki

$$k(s,t) = \frac{1}{s^2t^2 + \cos(s+t)}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır.

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \; n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 3.0949 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -3.786\,5 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 0.16667
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 3.0949 - 2\mu & -3.786\,5 \times 10^{-29} \\ -3.786\,5 \times 10^{-29} & 0.16667 - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.3333\mu^2 - 2.3966\mu + 0.51583 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 1.5475,\ \mu_2 = 0.25001$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.5475} = 0.6462 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.25001} = 3.9998
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 0.6462$

bulunur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 3.0949 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -3.786\,5 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 0.16667 \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}(3t^2-1)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -0.50943 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}s(3t^2-1)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 2.9582 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{4}(3s^2-1)(3t^2-1)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 8.1164 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
3.0949 - 2\mu & -3.7865 \times 10^{-29} & -0.50943 \\
-3.7865 \times 10^{-29} & 0.16667 - \frac{2}{3}\mu & 2.9582 \times 10^{-30} \\
-0.50943 & 2.9582 \times 10^{-30} & 8.1164 \times 10^{-2} - \frac{2}{5}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -0.53333\mu^3 + 1.066\,9\mu^2 - 0.22784\mu - 1.3874 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 1.756\,4,\ \mu_2 = 0.25000,\ \mu_3 = -5.9245 \times 10^{-3}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.7564} = 0.56935 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.25000} = 4.0 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-5.9245 \times 10^{-3}} = -168.79
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.56935$$

bulunur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 1.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \; n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(s^2t^2 + \cos(s+t))} dsdt = 3.6078 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(s^2t^2 + \cos(s+t))} dsdt = -2.5244 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(s^2t^2 + \cos(s+t))} dsdt = 0.21651
\end{aligned}$$

iç çarpımları hesaplanır. Bunlar (4.1) sisteminde yazıldığında sistem

$$\begin{vmatrix} 3.6078 - \pi\mu & -2.5244 \times 10^{-29} \\ -2.5244 \times 10^{-29} & 0.21651 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 4.9348\mu^2 - 6.3473\mu + 0.78112 = 0$$

haline gelir ve bu eşitlik çözüldüğünde

$$\mu_1 = 1.1484, \; \mu_2 = 0.13783$$

bulunur. $k\left(s,t\right)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.1484} = 0.87078 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.1378} = 7.2553
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. En küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.87078$$

olarak bulunur.

Yine (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Chebyshev polinomları kullanılarak sırasıyla aşağıdaki işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\left(s^2t^2+\cos\left(s+t\right)\right)}dsdt = 3.6078 \\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\left(s^2t^2+\cos\left(s+t\right)\right)}dsdt = -2.5244\times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\left(s^2t^2+\cos\left(s+t\right)\right)}dsdt = 0.21651 \\
\langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t^2-1}{\sqrt{1-s^2}\left(s^2t^2+\cos\left(s+t\right)\right)}dsdt = -1.9967 \\
\langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{s(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(s^2t^2+\cos\left(s+t\right))}dsdt = 2.5244\times 10^{-29} \\
\langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2s^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(s^2t^2+\cos\left(s+t\right))}dsdt = 0.99066
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
3.6078-\pi\mu & -2.5244\times 10^{-29} & -1.9967 \\
-2.5244\times 10^{-29} & 0.21651-\frac{\pi}{2}\mu & 2.5244\times 10^{-29} \\
-1.9967 & 2.5244\times 10^{-29} & 0.99066-\frac{\pi}{2}\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -7.7516\mu^3 + 14.859\mu^2 - 1.2525\mu - 8.9355\times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu denklemi çözüldüğünde

$$\mu_1 = 1.8249,\ \mu_2 = 0.13783,\ \mu_3 = -4.5829\times 10^{-2}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.8249} = 0.54798 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.13783} = 7.2553 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-4.5829 \times 10^{-2}} = -21.82
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.54798$$

olarak bulunur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \; n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 2.7046 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -2.5244 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 0.52175
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 2.7046 - \frac{1}{2}\pi\mu & -2.5244 \times 10^{-29} \\ -2.5244 \times 10^{-29} & 0.52175 - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.4674\mu^2 - 5.0679\mu + 1.4111 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.33215, \; \mu_2 = 1.7218$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.332\,15} = 3.0107\\ \lambda_2 &= \frac{1}{1.7218} = 0.58079\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 0.58079$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2+\cos(s+t)}dsdt = 2.7046\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2+\cos(s+t)}dsdt = -2.5244\times 10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2+\cos(s+t)}dsdt = 0.52175\\
\langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2+\cos(s+t)}dsdt = -0.28272\\
\langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2s(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2+\cos(s+t)}dsdt = -6.3109\times 10^{-30}\\
\langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4s^2-1)(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{s^2t^2+\cos(s+t)}dsdt = 4.2985\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi haline gelir ve

$$\begin{vmatrix} 2.7046-\frac{1}{2}\pi\mu & -2.5244\times 10^{-29} & -0.28272\\ -2.5244\times 10^{-29} & 0.52175-\frac{1}{2}\pi\mu & -6.3109\times 10^{-30}\\ -0.28272 & -6.3109\times 10^{-30} & 4.2985\times 10^{-2}-\frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= -3.8758\mu^3 + 8.0668\mu^2 - 2.3089\mu + 1.8953\times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 1.7407,\ \mu_2 = 0.33216,\ \mu_3 = 8.4576\times 10^{-3}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{1.740\,7} = 0.57448\\ \lambda_2 &= \frac{1}{0.33216} = 3.0106\\ \lambda_3 &= \frac{1}{8.4576\times 10^{-3}} = 118.24\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 0.57448$

olur.

Çözüm 4 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - s^2}{s^2 t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 2.4029 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t(1 - s^2)}{s^2 t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -5.0487 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st(1 - s^2)}{s^2 t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 0.41507
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 2.4029 - \dfrac{4}{3}\mu & -5.0487 \times 10^{-29} \\ -5.0487 \times 10^{-29} & 0.41507 - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 3.1165\mu + 0.99737 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 1.8022,\ \mu_2 = 0.38913$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{1.8022} = 0.55488 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.38913} = 2.5698
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 0.55488$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - s^2}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 2.4029 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t(1 - s^2)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -5.0487 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st(1 - s^2)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 0.41507 \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3}{4}(5t^2 - 1)(1 - s^2)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = 0.2171 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3s}{2}(5t^2 - 1)(1 - s^2)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{9}{16}(5s^2 - 1)(5t^2 - 1)(1 - s^2)}{s^2t^2 + \cos(s+t)} dsdt = -2.7688 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 2.4029 - \frac{4}{3}\mu & -5.0487 \times 10^{-29} & 0.2171 \\ -5.0487 \times 10^{-29} & 0.41507 - \frac{16}{15}\mu & -1.2622 \times 10^{-29} \\ 0.2171 & -1.2622 \times 10^{-29} & -2.7688 \times 10^{-2} - \frac{6}{7}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.6319\mu^2 - 0.71833\mu - 1.219\mu^3 - 4.7178 \times 10^{-2} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = -5.4514 \times 10^{-2}, \ \mu_2 = 0.38909, \ \mu_3 = 1.8244$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-5.4514 \times 10^{-2}} = -18.344 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.38909} = 2.5701 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{1.8244} = 0.54813
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 0.54813$

olur.

Örnek 4.4.6 *Daha önce yapılan çalışmalarda*

$$k\left(s,t\right)=\frac{1}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}$$

formundaki çekirdek incelenmişti. $\rho>0,\ I\in Ad\left(k\right)$ *yı sağlayacak kadar küçük olmak üzere* $I=\left[-\rho,\rho\right]$ *simetrik aralığı göz önüne alınarak* $L^{2}\left(I\right)$ *üzerinde* k *ya karşılık gelen* T *integral operatörünün pozitif ve negatif özdeğer sayısının*

$$N^{+}\left(T\right)=\infty \ \textit{ve}\ N^{-}\left(T\right)=0$$

olduğu bulunmuştu.

Şimdi Ritz yöntemiyle bu formdaki

$$k(s,t)=\frac{1}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}$$

çekirdeğine karşılık gelen integral operatörünün en küçük pozitif özdeğeri bulunmaya çalışılacaktır .

Çözüm 1 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s)=P_{n-1}(s),\ n=1,\ldots,N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s)=\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s)=a_1P_0(s)+a_2P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt=1.2663\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt=-1.2622\times10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{st}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt=5.4780\times10^{-2}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.2663-2\mu & -1.2622\times10^{-29} \\ -1.2622\times10^{-29} & 5.4780\times10^{-2}-\dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.3333\mu^2-0.95376\mu+6.9368\times10^{-2}=0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.63317,\ \mu_2 = 8.2170\times10^{-2}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.63317}=1.5794\\ \lambda_2 &= \frac{1}{8.2170\times10^{-2}}=12.170\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 1.5794$

bulunur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt = 1.2663\\
\langle T\psi_1,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt = -1.2622\times10^{-29}\\
\langle T\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{st}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt = 5.4780\times10^{-2}\\
\langle T\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt = -0.23383\\
\langle T\psi_2,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{2}s\left(3t^2-1\right)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt = 1.0847\times10^{-30}\\
\langle T\psi_3,\psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(3t^2-1\right)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)}dsdt = 4.5689\times10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.2663-2\mu & -1.2622\times10^{-29} & -0.23383 \\ -1.2622\times10^{-29} & 5.4780\times10^{-2}-\dfrac{2}{3}\mu & 1.0847\times10^{-30} \\ -0.23383 & 1.0847\times10^{-30} & 4.5689\times10^{-2}-\dfrac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$

$$= -0.53333\mu^3+0.44242\mu^2-3.4873\times10^{-2}\mu+1.7417\times10^{-4}=0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.74201,\ \mu_2 = 8.2172 \times 10^{-2},\ \mu_3 = 5.3560 \times 10^{-3}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.74201} = 1.3477 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{8.2172 \times 10^{-2}} = 12.170 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{5.3560 \times 10^{-3}} = 186.71
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 1.3477$

bulunur.

Çözüm 2 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 1.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = 1.4614 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = 7.0969 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

iç çarpımları hesaplanır. Bunlar (4.3) sisteminde yazıldığında sistem

$$\begin{vmatrix} 1.4614 - \pi\mu & -1.2622 \times 10^{-29} \\ -1.2622 \times 10^{-29} & 7.0969 \times 10^{-2} - \dfrac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 4.9348\mu^2 - 2.5185\mu + 0.10371 = 0$$

haline gelir ve bu eşitlik çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.46518,\ \mu_2 = 4.5179 \times 10^{-2}$

bulunur. Çekirdeğe karşılık gelen özdeğerlerin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.46518} = 2.1497 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4.5179 \times 10^{-2}} = 22.134\end{aligned}$$

olarak elde edilir. En küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 2.1497$

olarak bulunur.

Yine (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. 1.tip Chebyshev polinomları kullanılarak sırasıyla aşağıdaki işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = 1.4614 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = 7.0969 \times 10^{-2} \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t^2-1}{\sqrt{1-s^2}\,(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = -0.84503 \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{s(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = 9.0719 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2s^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(\cosh(s-t)+\cos(s+t))} dsdt = 0.45194
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.4614 - \pi\mu & -1.262\,2 \times 10^{-29} & -0.84503 \\ -1.2622 \times 10^{-29} & 7.096\,9 \times 10^{-2} - \frac{\pi}{2}\mu & 9.0719 \times 10^{-30} \\ -0.84503 & 9.0719 \times 10^{-30} & 0.45194 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix}$$

$$= -7.751\,6\mu^3 + 6.1863\mu^2 - 0.17947\mu - 3.8047 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve bu denklemi çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.76705,\ \mu_2 = 4.5180 \times 10^{-2},\ \mu_3 = -1.4163 \times 10^{-2}$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.76705} = 1.3037 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{4.5180 \times 10^{-2}} = 22.134 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-1.4163 \times 10^{-2}} = -70.607
\end{aligned}$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.3037$$

olarak bulunur.

Çözüm 3 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için 2.tip Chebshyev polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 1.1167 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 0.17195
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.1167 - \frac{1}{2}\pi\mu & -1.2622 \times 10^{-29} \\ -1.2622 \times 10^{-29} & 0.17195 - \frac{1}{2}\pi\mu \end{vmatrix}$$

$$= 2.4674\mu^2 - 2.0242\mu + 0.19202 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.71091,\ \mu_2 = 0.10947$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.710\,91} = 1.4066 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.109\,47} = 9.1349
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$$\lambda^+ = 1.4066$$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 1.1167 \\
\langle T\psi_1, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 0.17195 \\
\langle T\psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = -0.18031 \\
\langle T\psi_2, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2s(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = -3.9443 \times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4s^2-1)(4t^2-1)\sqrt{1-s^2}}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 5.9529 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix}
1.1167 - \frac{1}{2}\pi\mu & -1.2622 \times 10^{-29} & -0.18031 \\
-1.2622 \times 10^{-29} & 0.17195 - \frac{1}{2}\pi\mu & -3.9443 \times 10^{-30} \\
-0.18031 & -3.9443 \times 10^{-30} & 5.9529 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}\pi\mu
\end{vmatrix}$$

$$= -3.8758\mu^3 + 3.3265\mu^2 - 0.37105\mu + 5.8402 \times 10^{-3} = 0$$

haline gelir ve

$$\mu_1 = 0.72995,\ \mu_2 = 0.10947,\ \mu_3 = 1.8858 \times 10^{-2}$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.72995} = 1.3700 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.10947} = 9.1349 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{1.8858 \times 10^{-2}} = 53.028
\end{aligned}$$

olur. Yine aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^+ = 1.3700$

olur.

Çözüm 4 Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Jacobi polinomlar sistemi seçilmektedir.

$\psi_n(s) = P_{n-1}(s),\ n = 1, \ldots, N$

(4.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$\varphi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-s^2}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 1.0001 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\left(1-s^2\right)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = -1.2622 \times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\left(1-s^2\right)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 0.13718
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (4.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 1.0001 - \dfrac{4}{3}\mu & -1.2622 \times 10^{-29} \\ -1.2622 \times 10^{-29} & 0.13718 - \frac{16}{15}\mu \end{vmatrix}$$

$$= 1.4222\mu^2 - 1.2497\mu + 0.13719 = 0$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.75011,\ \mu_2 = 0.12860$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.75011} = 1.3331 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.12860} = 7.776
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 1.3331$

olur.

Şimdi aynı örnek için (4.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\langle T\psi_1, \psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-s^2}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 1.0001 \\
\langle T\psi_1, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2t\,(1-s^2)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = -1.2622\times 10^{-29} \\
\langle T\psi_2, \psi_2\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4st\,(1-s^2)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 0.13718 \\
\langle T\psi_1, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3}{4}\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 3.4163\times 10^{-2} \\
\langle T\psi_2, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3s}{2}\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = -3.1554\times 10^{-30} \\
\langle T\psi_3, \psi_3\rangle &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{9}{16}\,(5s^2-1)\,(5t^2-1)\,(1-s^2)}{\cosh(s-t)+\cos(s+t)} dsdt = 5.6769\times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3) sistemi

$$
\begin{vmatrix}
1.0001-\frac{4}{3}\mu & -1.2622\times 10^{-29} & 3.4163\times 10^{-2} \\
-1.\,2622\times 10^{-29} & 0.13718-\frac{16}{15}\mu & -3.1554\times 10^{-30} \\
3.4163\times 10^{-2} & -3.1554\times 10^{-30} & 5.6769\times 10^{-3}-\frac{6}{7}\mu
\end{vmatrix}
$$

$$
= 1.0792\mu^2 - 0.12344\mu - 1.219\mu^3 + 6.1873\times 10^{-4} = 0
$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 5.2521\times 10^{-3},\ \mu_2 = 0.1286,\ \mu_3 = 0.75146$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{5.2521\times 10^{-3}} = 190.4 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{0.1286} = 7.776 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{0.75146} = 1.3307
\end{aligned}
$$

olur. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda^{+} = 1.3307$

olur.

4.4 TABLO İLE İNCELEME

Bir önceki kısımda yapılan nümerik çalışmaların sonuçlarının daha net görülmesi açısından elde ettiğimiz sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 Özdeğer sonuçları.

$k(s,t)$	Legendre		Jacobi		1.Tip Chebyshev		2.Tip Chebyshev	
	n=2	n=3	n=2	n=3	n=2	n=3	n=2	n=3
$\frac{1}{(5+st)^2}$	12.331	12.329	12.399	9.4616				
$\frac{1}{9+3(s+t)+s^2t^2}$	4.0175	4.0143	3.9698	3.0403			3.9989	3.5914
$\frac{1}{7+4st+s^2t^2}$	3.4319	3.431	3.4585	2.6294				
$\frac{1}{3+2st+3\left(s^4+t^4\right)}$	1.943	1.8985	1.8196	1.5987			1.8619	1.8240
$\frac{1}{7+\cosh\left(s+t\right)}$	4.1776	4.1759	4.1404	3.244			4.1544	3.8197
$\frac{1}{5+\cosh\left(s-t\right)}$	3.1740	3.1720	3.1382	2.4711			3.1516	2.9070
$\frac{1}{1+\cos(s+t)}$	1.4426	1.2489	1.2269	1.2203	1.9550	1.205	1.2899	1.2660
$\frac{1}{s^2t^2+\cosh\left(s-t\right)}$	0.6751	0.6625	0.6356	0.5490			0.6502	0.6326
$\frac{1}{s^2t^2+\cos\left(s+t\right)}$	0.6462	0.5693	0.5548	0.5481	0.8707	0.5479	0.5807	0.5744
$\frac{1}{\cosh\left(s-t\right)+\cos(s+t)}$	1.5794	1.3477	1.3331	1.3307	2.1497	1.3037	1.4066	1.37
$\frac{2-4st+2s^2t^2}{1-st+s^2t^2}$	0.2708	0.2698	0.2635	0.2123			0.2663	0.2498
$\frac{-5st}{1-st+s^2t^2}$	-0.331	-0.331	-0.319	-0.319			-1.6271	-0.7255

KAYNAKLAR

Abbas M A Al (1997) *Integral Operators With Rational Kernels*, PHD. Thesis, University of Manchester, Department of Mathematics, UK.

Kythe P K and Puri P (2002) *Computational Methods for Linear İntegral Equations,* Birkhauser, Boston.

Little G (1987) Asymptotic Estimates of the Eigenvalues of Certain Positive Fredholm Operators, *II Math. Proc. Camp. Phil. Soc. 101*, pp. 575-592.

Little G (1992) The Spectral Type of A Symmetric Analytic Kernel, *Bull London Math. Soc.* 24, pp. 169-175.

Melih G, Yüksel S (2012) *On Numerical Calculations of Eigenvalues Using Ritz Method,* Applied Mathematical Sciences, 6 (40): 1973-1990.

Reddy D (1998) *Introductory Functional Analysis*, Springer Verlag, New York.

Riesz F and Sz-Nagy B (1955) *Functional Analysis*, Ungar, New York.

Soykan Y (2012) *Fonksiyonel Analiz,* Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Soykan Y, Göcen M ve Bostancı A A (2008a) *On the Eigenvalues of Integral Operators,* Applied Mathematical Sciences, 2 (44): 2165-2171.

Soykan Y, Göcen M ve Bostancı A A (2008b) *On the Numbers of Eigenvalues of Integral Operators,* Int. J. Contemp. Math. Scienves, 3 (25): 1233-1243.

Yaşar İ B (1988) *Uygulamalı Matematik*, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Young N (1990) *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, UK.

ÖZGEÇMİŞ

Arzu Aylin BOSTANCI 1980'de KARABÜK' de doğdu; İlk, orta ve lise öğrenimini aynı şehirde tamamladı; 1997 yılında Atatürk Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'ne girdi; 2001'de mezun olduktan sonra matematik öğretmeni olarak değişik okullarda çalıştı; 2007 yılında ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programını tamamladıktan sonra 2008 yılında BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Anadolu Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi
ZONGULDAK

Tel : 0 372 253 20 10
E-posta : arzuaylin78@gmail.com