STOKES DENKLEMİ VE SCHUR OPERATÖRÜ

Ceren DEMİREL

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Mart 2013

KABUL:

Ceren DEMİREL tarafından hazırlanan "STOKES DENKLEMİ VE SCHUR OPERATÖRÜ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 08/03/2013

Başkan: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN (BEÜ) ....

Üye : Prof. Dr. Yüksel AYAZ (BEÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Melih GÖCEN (BEÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım .../.../2013

Prof. Dr. Özden ÖZEL GÜVEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Ceren DEMİREL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STOKES DENKLEMİ VE SCHUR OPERATÖRÜ

Ceren DEMİREL

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN
Mart 2013, 39 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konu ile ilgili bazı hazırlayıcı sonuçlar veriyoruz.

İkinci bölümde, Stokes problemini tanıtıyoruz.

Üçüncü bölümde, uzatılmış dikdörtgensel bölgeler için inf-sup koşulundaki en iyi sabit incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, LBB koşulunun bölge geometrisine bağımlılığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İnf-sup koşulu (LBB), Stokes denklemi, sınır problemi, sonlu elemanlar, Schur operatörü.

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

STOKES EQUATION AND SCHUR OPERATOR

Ceren DEMİREL

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Yüksel SOYKAN

March 2013, 39 pages

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, we give the necessary preliminary results.

In the second chapter, we introduced the Stokes problem.

In chapter 3, we investigate the best constant in the inf-sup condition for elongated rectangular domains.

In chapter 4, we investigate the domain geometry dependence of the LBB condition.

Keywords: İnf-sup condition (LBB), Stokes equation, boundary problem, eigenvalue problem, Schur complement.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması sırasında tüm çalışmalarımı titizlikle takip eden Değerli Hocam Sayın Doç. Dr. Yüksel SOYKAN'a tez sırasında değerli vaktini esirgemeden bana ayıran Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN'e , başından beri her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

CFD	:	Computational fluid dynamics
FE	:	Hız-Basınç çifti
H	:	Hilbert Uzayı
$H_k \ \Omega$	:	k. Mertebeden tüm genelleşmiş türevleri $L_2 \ \Omega$ ait tüm fonksiyonların oluşturduğu küme
LBB	:	Ladyzhenskaya-Babushka-Brezzi
$L_2 \ \Omega$	:	Ω bölgesinde Lebesgue anlamında karesi integrallenebilen tüm fonksiyonlar cümlesi
Δ	:	Diverjans
∇	:	Gradiyent
$\lVert\cdot\rVert$	:	Norm
$.,.$	:	İç çarpım
ϕ	:	Özfonksiyon
ψ	:	Özfonksiyon
$\lambda_{\min}$	:	Minimal Özdeğer
V	:	Vektör Uzayı
$W^{k,p}$	:	Sobolev Uzayı

KAYNAKLAR

Aristov P P and Chizhonkov E V (1995a) On *the Constant in the LBB Condition for Rectangular Domains.* Report No. 9534 (September 1995), Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, The Netherlands.

Aristov P P and Chizhonkov E V (1995b) *On the Constant in the LBB Condition for Rectangular Domains*. Report No. 9535, Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, The Netherlands.

Babuška I (1973) The finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.* 179-192.

Boffi D, Brezzi F and Gastaldi L (1997) On the convergence of eigenvalues for mixed formulations. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*. 25: 131-154.

Boffi D, Brezzi F and Gastaldi L (2000) On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form. *Math. Comp*. 69: 141-158.

Braess D (1997) *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendugenin der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Bramble J H and Pasciak J E (1988) A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximation of elliptic problems. *Math. Comp*. 50: 1-17.

Brezzi F (1974) On the existence, uniqueness and approximation of the saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *Numer. Math*. 179-192.

Brezzi F and Fortin M (1991) Mixed and hybrid finite element methods. *Springer Series in Comp. Math.*,15,Springer-Verlag, New York.

Chizhonkov E V (1994) Application of the Cosserat spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes Problem. *Russ. Journal of Number. Analysis and Math. Modeling*., 9 (3): 191-199.

Chizhonkov E V (1995) *On the Constant in the LBB Condition for Ring Domains*. Report No. 9537 (october 1995), Dept. Of Math.Univ. of Nijmegen, The Netherlands.

Chizhonkov E V (1996) On the convergence of the artifical compressibility method. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.,* Moscow Univ. Math. Bull., 2: 13-20.

Chizhonkov E V and Ol'shanskii M A (2000) On the Domain Geometry Dependence of the LBB Condition. Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 34 (5): 935-951.

BÖLÜM 1

NOTASYON VE HAZIRLIK BİLGİLERİ

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.
$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla reel ve kompleks sayılar cismidir ve bu tezde ikisi için $\mathbb{F}$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 1.0.1 *Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine* ***başlangıç değer problemi*** *denir. Verilen şartlara da* ***başlangıç şartları*** *denir.*

Tanım 1.0.2 *Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine* ***sınır değer problemi*** *denir. Verilen şartlara da* ***sınır şartları*** *denir.*

Tanım 1.0.3 *Bir X vektörü üzerinde bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen, her x, $y \in X$ ve α bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel-değerli bir fonksiyona* ***norm*** *denir:*

(i) $\|x\| \geq 0$
(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)
Üzerinde bir norm tanımlanmış X vektör uzayına bir **normlu uzay** adı verilir. Normlu uzaylar $(X, \|.\|)$ ya da X ile gösterilir.

Tanım 1.0.4 *Bir V vektör uzayı üzerinde* ***iç çarpım****, her $x, y, z \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için*

(i) $(x, x) \geq 0$,
(ii) $(x, x) = 0 \iff x = 0$
(iii) $(\lambda x, y) = \lambda \, (x, y)$

(iv) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(v) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

özelliklerini sağlayan bir $(.,.) : V \times V \to \mathbb{F}$ dönüşümüdür. Mesela $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olan $C\,[0,1]$ karmaşık vektör uzayı üzerinde

$$(f, g) = \int_0^1 f\,(t)\,\overline{g}\,(t)\,dt$$

formülü bir iç çarpım tanımlar.

Teorem 1.0.5 *V üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, V üzerinde*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

ile indirgenen bir norm tanımlar.

Tanım 1.0.6 *Üzerindeki iç çarpımın indirgediği normdan üretilen metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına* ***Hilbert uzayı*** *denir. Hilbert uzayı genelde H harfi ile gösterilir.*

Uyarı 1.0.7 *Genel olarak, bir iç çarpım uzayının Hilbert uzayı olması gerekmez fakat fonksiyonel analizde bir temel teorem her X iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı haline getirilebilmesini garanti eder. Böyle bir H Hilbert uzayına X in tamlanışı denir.*

Teorem 1.0.8 *$\mathcal{H}$ ve $\mathcal{K}$ kompleks Hilbert uzayları olsun. $T \in B\,(\mathcal{H},\mathcal{K})$ olsun. Her $x \in \mathcal{H}$ ve her $y \in \mathcal{K}$ için*

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir tek $T^* \in B\,(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operatörü vardır.

Tanım 1.0.9 *$\mathcal{H}$ ve $\mathcal{K}$ kompleks Hilbert uzayları ise ve $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ise o zaman (1.1) içinde elde edilen T^* operatörüne T nin adjointi denir.*

Tanım 1.0.10 *(Self-adjoint) $A : H \longrightarrow H$, $\forall g \in H$ için $\langle A, f, g\rangle = \langle f, A^*, g\rangle$ koşulunu sağlayacak şekilde bir A^* operatörü varsa; A^* operatörüne A operatörünün eşleniği denir.*

Tanım 1.0.11 *$(X,\ \|.\|_X), (Y,\ \|.\|_Y)$ normlu vektör uzayları ve $T : X \longrightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için*

$$\|T\,(x)\|_Y = \|x\|_X$$

ise T ye izometri (norm koruyan dönüşüm) denir.

X normlu lineer uzayı üzerinde I birim lineer operatörü bir izometridir.

Tanım 1.0.12 *$f_m(x)$ ve $f_n(x)$ bir (a,b) aralığında reel değerli ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer*

$$\langle f_n(x)\,,\ f_m(x)\rangle = \int_a^b f_n(x)\, f_m(x)\, dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \text{ için} \\ 1; & n = m \text{ için} \end{cases}$$

*eşitliği sağlanıyor ise $f_m(x)$ ve $f_n(x)$ fonksiyonuna (a,b) aralığı üzerinde **ortonormaldir** denir. $(-a,a)$ aralığında $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$ fonksiyonları ortonormal fonksiyonlardır.*

Tanım 1.0.13 *X bir iç çarpım uzayı olsun. $\{e_n\}$ X içinde bir dizi olsun. Her $m,n \in \mathbb{N}$ için*

$$\langle e_m, e_n\rangle = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

*sağlanırsa $\{e_n\}$ dizisine **ortonormal dizi** denir.*

Tanım 1.0.14 *$[a,b]$ aralığında tanımlanan herhangi sayıdaki sürekli fonksiyonlar ailesi $\{\phi_1(x), \phi_2(x), ...\}$ olsun. Bu ailenin herhangi iki elemanı olan $\phi_m(x)$ ve $\phi_n(x)$ fonksiyonları $m \neq n$ olmak üzere*

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\,.\phi_n(x)\,.r(x)\, dx = 0$$

*eşitliğini sağlıyor ise bu fonksiyonlar **ortogonaldir**. $\{\phi_m(x)\}$ fonksiyon ailesine den $[a,b]$ aralığında $r(x)$ fonksiyonuna **ortogonal sistem** denir.*

Tanım 1.0.15 *∇ diferansiyel vektör operatörü,*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial x} k$$

*kısmi türevleri olarak tanımlanır. Skaler fonksiyon olan $f(x,y,z)$, her noktada tanımlı ve türevlenebilir ise, ∇ vektör operatörü skaler alanlar için uygulanan ve sonucu ∇f olan bir vektör alanı olabilir. Bu da f in **gradyantı** olarak adlandırılır.*

Tanım 1.0.16 *$F(x,y)$ bir vektör alanı ise $\operatorname{div} F(x,y) = \nabla.F(r)$ olarak yazılabilir. İki boyutlu olarakta;*

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j\right).\left(F_1(x,y)\, i + F_2(x,y)\, j\right), \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{aligned}$$

dir. Bu $F(x, y)$ *vektörü alanına uygulanacak* ∇ *vektör operatörü skaler ürün olarak elde edilir. Bir vektör alanının* div *skaler bir vektör alanıdır.*

BÖLÜM 2

STOKES PROBLEMİ

Bu bölümde Olshanskii ve Chizhonkov (2000), Chizhonkov ve Ol'shanskii (2000) den yararlanacağız ve diğer bölümlerde ele alınacak problemleri tanıtacak ve gerekli ön bilgileri vereceğiz.

$n = 2, 3$ olmak üzere sınırlı bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde Stokes problemi adı verilen hız-basınç değişkenli bir sınır-değer problemini gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f && \Omega \text{ içinde} \\ \operatorname{div} u &= 0 && \Omega \text{ içinde} \\ u &= 0 && \partial\Omega \text{ içinde.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Üstteki denklemin $n = 2$ için açık yazılışı

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2) \\ -\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \end{bmatrix}$$

dır. $\nabla = \text{grad}$ olmak üzere (2.1) denklemleri $f(x)$ dış kuvveti ile yönlendirilen sıkıştırılamaz, (incompressible) yapışkan (viscous), homojen (homogeneous), ve izotropik bir sıvının (küçük hızlarda) yavaş hareketini tanımlar. Bilinmeyenler,

$$u = (u_1(x), u_2(x), ..., u_s(x))$$

ile verilen $u = u(x)$ akışkan hızı (fluid velocity) vektör fonksiyonudur ve

$$\int_\Omega p(x)dx = 0$$

integral koşulunu sağlayan skaler $p = p(x)$ basınç (pressure) fonksiyonudur.

Sınırda sıfır durumları, kural gereği şunu söyler: Bu hareket, tamamen akışkanla dolmuş katı duvarlarla örülü hareketsiz bir hacim içinde yer alır. Yukarıdaki bu model (örnek) problem, hesaplanabilir hidrodinamikler (computational hydrodynamics) içindeki uygulamalarda büyük bir çeşitliliğe sahiptir.

(2.1) probleminin iyi konulmuşluğunun ve onun yaklaşık çözümünün gösterilmesinde önemli bir rolü

$$\mu = \mu(\Omega)$$

sayısı oynar. Bu sayı sadece $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ bölgesine bağlıdır ve

$$\mu = \mu(\Omega) = \inf_{p \in P} \sup_{u \in U} \frac{|(p, \operatorname{div} u)|}{\|u\|_1 \|p\|_0} \tag{2.2}$$

olarak tanımlıdır.

Burada

$$(\phi, \psi) = \int_\Omega \phi \psi d\Omega$$

dir ve U,

$$\|u\|_1 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} = (\nabla u, \nabla u)^{1/2}$$

ile birlikte

$$U = H_0^1(\Omega)^n = (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$$

olarak tanımlı hız uzayıdır ve P,

$$\|p\|_0 = \|p\|_{L^2(\Omega)} = (p, p)^{1/2}$$

ile birlikte

$$P = \{p : p \in L^2(\Omega),\ (p, 1) = \int_\Omega p d\Omega = 0\}$$

olarak tanımlı basınç uzayıdır.

Parçalı Lipschitz sınırına sahip sınırlı bağlantılı bölgeler için (D'yakonov 1989, Girault and Raviart 1986), $\mu > 0$ dır ve (2.1) probleminin genelleştirilmiş $(u, p) \in U \times P$ çözümü aşağıdaki yaklaşımları sağlar:

$$\|f\|_{-1} = \sup_{u \in U} \frac{|(f, u)|}{\|u\|_1}$$

olmak üzere,

$$\|p\|_0 \leq 2\mu^{-1} \|f\|_{-1} \tag{2.3}$$

ve

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_{-1} \tag{2.4}$$

dir. Tanımdan

$$\|\nabla p\|_{-1} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}} \frac{|(p, \mathrm{div}\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1}$$

dir.

$\mu(\Omega)$, Nečas eşitsizliği olarak bilinen

$$\mu(\Omega)\,\|p\|_0 \leq \|\nabla p\|_{-1}\,, \quad \forall p \in P \tag{2.5}$$

eşitsizliğindeki optimal sabittir.

γ_h nin nereden elde edildiğini görelim. U_h ve P_h sırasıyla U ve P nin bazı FE yaklaşımları olduğunu kabul edelim. $\mathbf{U}_h \subset \mathbf{U}$ ve $P_h \subset P$ alalım. (2.1) in ayrık kısmını şu şekilde ifade edebiliriz: $\{\mathbf{U}_h,\ P_h\ \}$ den herhangi herhangi bir $\{\mathbf{v}_h, q_h\}$ için

$$\begin{aligned}(\nabla\mathbf{u}_h, \nabla v_h) - (p_h, \mathrm{div}\mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), && (2.6)\\ (\mathrm{div}\mathbf{u}_h, q_h) &= 0. && (2.7)\end{aligned}$$

olacak şekilde $\{\mathbf{U}_h, P_h\}$ den $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$ bulunuz. (2.7) nin iyi-konulmuşluğu için ve $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$ nin kararlılığı (stability) için,

$$\inf_{q_h\in P_h}\ \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{U}_h} = \frac{|(q_h, \mathrm{div}\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1\,\|q_h\|_0} = \gamma_h \geq \gamma(\Omega) > 0 \tag{2.8}$$

eşitsizliğin geçerli olduğu iyi bilinmektedir (Babuška 1973, Brezzi 1974). Burada $\gamma(\Omega)$, h ağ (mesh) parametresinden bağımsız pozitif bir sabittir.

Tezimiz boyunca eğer kesrin paydasında $\|\mathbf{x}\|$ varsa $x\neq 0$ ise $\sup_{\mathbf{x}}$ ve $\inf_{\mathbf{x}}$ alınacaktır.

(2.8) koşulu çoğunlukla LBB ya da $\inf - \sup$ koşulu olarak adlandırılır ve keyfi $\mathbf{U}_h$ ve P_h, FE uzay ikilisi tarafından sağlanmaz.

(2.8) in sağlanmadığına dair bir örnek veremek istersek, aynı üçgenleme hem basınç hem de hız sistemi için kullanılırsa parçalı lineer sürekli elemanlar ($P_1^n \times P_1$ çifti) (2.8) yi sağlamaz. Bu konudaki detaylı bilgi için (Gunsburger 1989) kaynağına bakınız. (2.8) koşulu ayrık (discrete) çözümler için yakınsaklık ve hesapları kanıtlamada çok önemlidir.

(2.3) ve (2.4) ye benzer olarak

$$\|\mathbf{f}\|_{-1} = \sup_{v\in U} \frac{|\langle\mathbf{f}, v\rangle|}{\|v\|_1}$$

olmak üzere

$$\|p_h\|_0 \leq 2\gamma_h^{-1} \|\mathbf{f}\|_{-1} \tag{2.9}$$

ve

$$\|\mathbf{u}_h\|_1 \leq \|\mathbf{f}\|_{-1} \tag{2.10}$$

dir ve ayrıca

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_1 + \|p_h - p\|_0 \leq 3(1 + \gamma_h^{-1})(\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1 + \inf_{q \in P_h} \|p - q_h\|_0)$$

eşitsizliği sağlanır (Brezzi and Fortin 1991). Boffi et al. (1997) den görüldüğü gibi, (2.8) koşulu çekirdekteki eliptiklik ile beraber (2.9) ve (2.10) için gerekli bir koşuldur. Ayrıca (2.7) yi çözmek için kullanılan bir çok tekrarlamalı (iterative) yöntemin yakınsaklık oranı γ_h ye bağlıdır (Bramble and Pasciak 1988, Chizhonkov 1994, Langer and Queck 1986, Schafer and Turek 1996). Örneğin (2.7) için, en etkili yöntemlerden birisi olarak kabul edilen, Uzawa- CG algoritması

$$\kappa = \frac{1 - \gamma_h}{1 + \gamma_h} \tag{2.11}$$

asimptotik yakınsaklık oranına sahiptir. Bu nedenle küçük bir γ_h için (2.7) nin daha zayıf cebirsel özelliklerinin elde edilebileceği beklenebilir.

Ayrıca, günümüz eşlenik gradientlerin Uzawa metodu, Stokes probleminin nümerik çözümünde en etkili yöntemlerden birisi olarak kabul edilmektedir ve

$$\kappa(\mu) = \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$$

asimtotik yakınsaklık oran çarpanına sahiptir (Langer and Queck 1986).

μ üzerinde benzer bir bağlılık (dependence) Poisson denkleminin temel eleman tekrarlı çözümünü içeren (2.1) denkleminin diğer metotların kullanımındaki yakınsaklık oranı için verilmiştir (Chizhonkov 1994, 1996).

μ sabiti onun γ_h ayrık benzeri (analoğu) ile yakından ilişkilidir (Girault and Raviart 1986).

μ sabitinin, LBB (Ladyzhenskaya, Babouska ve Brezzi) ya da $\inf - \sup$ koşulu olarak bilinen, γ_h ayrık benzeri (2.1) denklemi için sonlu eleman metodunun tasarı analizinde çok önemlidir.

2.1 LBB KOŞULU VE NEČAS EŞİTSİZLİĞİ

Hız için uyumlu ve uyumsuz sınırlı elementleri (finite elements) dikkate alıyoruz. İlk olarak $h > 0$ için $\mathbf{U}_h \subset \mathbf{U}$ ve $P_h \subset P$ olacak şekilde $\mathbf{U}_h$ ve P_h, FE alt uzaylarını göz önüne alalım.
Bu durumda ihtiyacımız olan tek varsayım P_h için aşağıdaki standart yaklaşım hipotezidir:

- **A1.** Her bir $q \in P \cap H^1(\Omega)$ için, q ve h bağımsız C ile,

$$\|q - q_h\|_0 \leq Ch \|q\|_{H^1(\Omega)} \tag{2.12}$$

olacak şekilde bir $q_h \in P_h$ fonksiyonu vardır.

Uyumsuz ($U_h \nsubseteq U$) durumunda, u_h nin Ω nın T alt bölümlerinin her bir τ elamanı üzerinde bir polinom olarak alıyoruz. Böylece,

$$(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) = \sum_{\tau \in T} (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\tau$$

olarak tanımlamak gelenekseldir. Doğal olarak,

$$\|\mathbf{u}_h\|_1 = (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)^{\frac{1}{2}}$$

örgü bağımlı bir normdur, (p_h, divu_h) iç çarpımı benzer şekilde tanımlanır. Uyumsuz durumunda, iki varsayıma daha gereksinim duyarız. Bunlar Poisson probleminin çözümü için ve Poisson probleminin bir ayrık çözümünün yakınsaklık kabulü için tam eliptik regülerliklerdir.

- **A2.** Herbir $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)^n$ için ve

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \mathbf{f} \quad &, \quad \Omega \text{ içinde} \\ \phi = 0 \quad &, \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{aligned} \tag{2.13}$$

nin ϕ çözümü için $\phi \in \mathbf{U} \cap H^2(\Omega)^n$ dir ve

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)^n} \leq c \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)^n}$$

elde edilir.

- **A3.** $\mathbf{f} = -\nabla q$ olmak üzere $\phi \in \mathbf{U} \cap H^2(\Omega)$, (2.13) nin bir çözümü ise ve

  $(\nabla\phi_h, \nabla\mathbf{v}_h) = (q, \mathrm{div}\mathbf{v}_h), \qquad \forall\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h$

  nin bir çözümü $\phi_h \in \mathbf{U}_h$ ise bu durumda $h \to 0$ için $\omega(h) \to 0$ olmak üzere

  $$\|\phi - \phi_h\|_1 \leq \omega(h) \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \tag{2.14}$$

  dir.

Önceki varsayım bazı kısıtlamalar getirir, (Grisvard 1985). Bir örnek olarak, köşesiz bir parçalı düzgün sınıra sahip sınırlı bölgeler için geçerlidir. İkinci varsayım genellikle yaklaşım sonuçları için ve Stang Lemmasına (Strang and Fix 1973) göre tutarlılık özellikleri içindir.

Eğer $\mathbf{U}_h$ daki fonksiyonların elemanların kenarlarında sürekli akışkanlıkları varsa standart argümanlardan, (Braess 1997), tutarlılık elde edilir çünkü bu durumda herbir $\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h$ ve $q \in H^1(\Omega)$ için

$$\sum_{\tau\in T}\sum_{e\in\partial\tau}\int_e (\mathbf{v}_h.n)q ds = 0$$

dir ve böylece

$$(q, \mathrm{div}\,\mathbf{v}_h) = -(\nabla q, \mathbf{v}_h)$$

bulunur. Bunlar için örnekler Crouzeix-Raviart elemanlarıdır (Crouzeix-Raviart Brezzi and Fortin (1991)) ya da $(\tilde{Q}_2)^n\times\ Q^0$ dört kenarlı elemanlardır (Rannacher and Turek (1992)).

Önerme 2.1.1

$$\mu(\Omega) = \inf_{q\in P\cap H^1(\Omega)} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}} \frac{|(q, \mathrm{div}\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0}$$

dir.

Kanıt. $P \cap H^1(\Omega) \subset P$ den

$$\mu(\Omega) \leq \inf_{q\in P\cap H^1(\Omega)} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}} \frac{|(q, \mathrm{div}\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} \tag{2.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $P \cap H^1(\Omega)$, P içinde yoğun olduğundan (Kobelkov 1977),

$$\mu(\Omega) \geq \inf_{q\in P\cap H^1(\Omega)} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}} \frac{|(q, \mathrm{div}\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} \tag{2.16}$$

bulunur.□

Teorem 2.1.2 *Yukarıda* $\mathbf{U}_h$ *ve* P_h *için verilen varsayımlar altında*

$$\gamma(\Omega) \leq \mu(\Omega) \tag{2.17}$$

dir.

Kanıt. Önerme 2.1.1 den

$$\gamma(\Omega) \leq \inf_{q \in P \cap H^1(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}} \frac{|(q, \text{div}\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} \tag{2.18}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi $q \in P \cap H^1(\Omega)$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ ele alalım. Yeterince küçük h için

$$\max(Ch, \omega(h)) \|q\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon \|q\|_0 \tag{2.19}$$

dir. Burada C, (2.12) deki sabittir ve $\omega(h)$, (2.14) daki sabittir. Böylece $A1$ yaklaşım hipotezinden dolayı

$$\|q - q_h\|_0 \leq \varepsilon \|q\|_0$$

olacak şekilde $q_h \in P_h$ seçebiliriz. O halde

$$\begin{aligned} \gamma(\Omega) &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{|(q_h, \text{div}\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q_h\|_0} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{|(q_h, \text{div}\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q_h\|_0} + \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{|(q_h - q, \text{div}\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q_h\|_0} \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{|(q, \text{div}\,\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q\|_0} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.20}$$

elde ederiz.

Uyumlu FE durumunda $\mathbf{U}_h \subset \mathbf{U}$ olduğundan, $\varepsilon \in (0,1)$ seçiminden ve (2.20) den

$$\gamma(\Omega) \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}} \frac{|(q, \text{div}\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0}$$

ve buradan da (2.18) elde edilir.

Uyumsuz hız elamanları durumunda, (2.20) dan

$$\gamma(\Omega) \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{|(q, \text{div}\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q\|_0} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \tag{2.21}$$

bulunur.

(Aşağıdaki (2.24)-(2.25) den) verilen bir q için (2.21) içindeki supremumun $\hat{\mathbf{v}}_h$ için maksimuma ulaştığı görülür ve bu

$$(\nabla \hat{\mathbf{v}}_h, \nabla \mathbf{v}_h) = (q, \text{div}\mathbf{v}_h), \qquad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h$$

problemini çözer. $\mathbf{U}$ dan $\hat{\mathbf{u}}$ ile $\hat{\mathbf{u}}_h$ birlikte

$$(\nabla \hat{\mathbf{v}}, \nabla \mathbf{v}) = (q, \mathrm{div}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}$$

yi çözer. A2 kabulünden $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{U} \cap H^2(\Omega)^n$ bulunur. Bu nedenle (2.14), (2.19), (2.5) ve (2.25) den

$$\begin{aligned}
\|\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}_h\|_1 &\leq \omega(h) \|\hat{\mathbf{v}}\|_{H^2(\Omega)^n} \\
&\leq c\omega(h) \|\nabla q\|_{L_2(\Omega)^n} \\
&\leq c\varepsilon \|q\|_0 \\
&\leq c\mu(\Omega)^{-1}\varepsilon \|\nabla q\|_{-1} \\
&= c_1\varepsilon \|\hat{\mathbf{v}}\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\gamma(\Omega) &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{|(q, \mathrm{div}\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q\|_0} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\
&= \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{|(q, \mathrm{div}\hat{\mathbf{v}}_h)|}{\|\hat{\mathbf{v}}_h\|_1 \|q\|_0} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\
&\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{|(q, \mathrm{div}\hat{\mathbf{v}})|}{(1-c_1\varepsilon)\|\hat{\mathbf{v}}\|_1 \|q\|_0} + \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{|(q, \mathrm{div}(\hat{\mathbf{v}}_h - \hat{\mathbf{v}})|}{(1-c_1\varepsilon)\|\hat{\mathbf{v}}\|_1 \|q\|_0} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\
&\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)(1-c_1\varepsilon)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}} \frac{|(q, \mathrm{div}\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} + \frac{c_1\varepsilon}{1-c_1\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

bulunur.

$q \in P \cap H^1(\Omega)$ ve ε nın keyfi seçiminden (2.18) kanıtlanmış olur. □

2.2 SCHUR TAMAMLAYICILARI (SCHUR COMPLEMENTS)

Bu kısımda Schur tamamlayıcıları adı verilen operatörlerini tanıtacağız.

(2.1) problemini aşağıdaki denk formda tekrar yazabiliriz

$$\begin{aligned}
u &= (\Delta)_0^{-1}(\mathrm{grad}\, p - f) \\
A_0 p &= \mathrm{div}(\Delta)_0^{-1}\, \mathrm{grad}\, p = \mathrm{div}(\Delta)_0^{-1} f
\end{aligned}$$

dir. Burada $\mathbf{g} \in \mathbf{U}^{-1}$ için $(\Delta)_0^{-1}\mathbf{g}$ ifadesi $\Delta v = \mathbf{g}$ olacak şekilde $v \in \mathbf{U}$ vektör fonksiyonu gösterir, yani Δ_0^{-1}, $\mathbf{U}$ üzerinde bir $\mathbf{g}$ fonksiyoneli verildiğinde $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}$ olacak şekilde $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ bulma problemi olan vektör Poisson problemi için çözüm operatörüdür.

$A_0 : P \to P$ operatörüne (2.1) problemindeki operatör için Schur tamamlayıcısı denir. Bu operatör analizde sıklıkla kullanılan ve Stokes probleminin (Mikhlin 1967, 1973, Crouzeix 1974) çözümünün araştırılmasında çok önemli özelliklere sahiptir. Örneğin, bu öperatörün özeşlenikliği, pozitif tanımlılığı, spektrumunun ayrıklığı ve P içinde özdeğer fonksiyonlarının ortonormal sayılabilir bir sisteminin tamlığının varlığı (yani ortonormal tabanın varlığı) bu özelliklerden bazılarıdır.

$A_0 p = \varphi$ sisteminin çözümüne dayalı metodlar bir anlamda en iyisi olarak düşünülmektedir (D'yakonov 1989). Özellikle, Uzawa algoritmasının çeşitli değişiklikleri (veya sınırlama metodu) (Langer and Queck 1986), $A_0 p = \varphi$ nin çözüm metodlarına örneklemelerdir.

A_0 operatörünün minimum özdeğeri ile (2.2) deki μ sabiti arasındaki ilişki bizim amacımız için önemlidir. Burada $W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ dır.

Önerme 2.2.1 *$q \in P$ ve $v = (\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q \in \mathbf{U}$ için*

$$(A_0 q, q) = \|v\|_1^2 = \sup_{u \in U} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_1^2} \tag{2.23}$$

dir.

Kanıt. $q \in W_2^1(\Omega) \cap P$ için

$$\begin{aligned}
(A_0 q, q) &= \big(\operatorname{div}(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, q\big) = -\big((\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, \operatorname{grad} q\big) \\
&= -\big((\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, \Delta(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q\big) \\
&= (-\Delta v, v)\big|_{v=(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q} \\
&= \|v\|_1^2 = \sup_{u \in U} \frac{(-\Delta v, u)}{\|u\|_1^2} \\
&= \sup_{u \in U} \frac{(\operatorname{grad} q, u)^2}{\|u\|_1^2} = \sup_{u \in U} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_1^2}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

bulunur. $W_2^1(\Omega)$ fonksiyonlar kümesi P içinde her yerde yoğundur (Dafermos 1968), bu nedenle

$$(A_0 q, q) = \|v\|_1^2 = \sup_{u \in U} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_1^2} \tag{2.25}$$

denklemlerinin kapanışının iyi tanımlandığı elde edilir (yani üstteki eşitsizlikte limit alırsak yine eşitsizlikler sağlanır).

Böylece, keyfi bir $q \in P$ ve $v = (\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q \in \mathbf{U}$ için (2.25) eşitlikleri sağlanır.□

Özellikle (2.2) ve (2.25) den, A_0 operatörünün minimal özdeğeri $\lambda_{\min}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(A_0) &= \inf_{p\in P} \frac{(A_0 p, p)}{\|p\|_0^2} \\
&= \inf_{p\in P} \sup_{u\in U} \frac{(p, \mathrm{div} u)^2}{\|u\|_1^2 \|p\|_0^2} \\
&= \mu^2
\end{aligned}$$

dir. A_0 operatörünün minimum özdeğeri ile μ sabiti arasındaki ilişkiyi bu ilişkiyi bir önerme olarak verebiliriz.

Önerme 2.2.2 *A_0 operatörünün minimal özdeğeri $\lambda_{\min}$ olmak üzere*

$$\lambda_{\min}(A_0) = \mu^2 \tag{2.26}$$

dir.

Ayrıca, A_p ve A_m operatörlerini tanımlamaya ihtiyacımız olacak. A_0 operatörüne benzer olan bu operatörler Stokes denkleminin Schur tamamlayıcılarıdır. Fakat bu operatörler hız için başka (farklı) sınır koşullarını içerir.
Bu kısım da şimdi Ω bölgesinin

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_i < L_i, \ i = 1, 2\} \tag{2.27}$$

dikdörtgen bölgesi olduğunu kabul edeceğiz. $\partial\Omega$ üzerindeki teğet ve normal vektörü sırası ile n ve τ ile göstereceğiz.

$$U_p = \{u \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^2 : \ \partial\Omega \text{ üzerinde } u.n = 0 \text{ dır}\}$$

ve

$$U_m = \{u = (u_1, u_2) \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^2 : \ u_1 = 0 \text{ ve } \partial\Omega \text{ üzerinde } (0, u_2).n = 0 \text{ dır}\}$$

kümelerini tanımlayalım.

$$A_p = \mathrm{div}(\Delta)_p^{-1} \,\mathrm{grad}$$

ile tanımlı $A_p : P \to P$ operatörünü göz önüne alalım. Burada $g \in U_p^{-1}$ için $(\Delta)_p^{-1} g$ ifadesi $\forall u \in U_p$ için

$$-(\nabla v, \nabla u) = (g, u) \tag{2.28}$$

olacak şekilde $v \in U_p$ vektör fonksiyonunu gösterir. (2.28) eşitliği

$$u.n = 0, \qquad \frac{\partial(u.\tau)}{\partial n} = 0 \quad (\partial\Omega \text{ üzerinde})$$

formundaki sınır koşulları ile vektör Poisson denkleminin genelleştirilmiş bir çözümünün tanımıdır. Bir başka ifade ile Δ_p^{-1},

$$\begin{array}{rl} \Delta \mathbf{u} = g & , \quad \Omega \text{ üzerinde} \\ u.n = 0, \qquad \dfrac{\partial(u.\tau)}{\partial n} = 0 & , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{array}$$

problemindeki operatörün çözümüdür.

Önerme 2.2.3 *P üzerinde A_p birim operatördür yani E birim operatör olmak üzere*

$$A_p \equiv E$$

dir.

Kanıt. (Ol'shanskii 1997). □

Benzer bir yolla, bu sınır koşulları ile Stokes problemini göz önüne alıyoruz.
(2.23) de olduğu gibi keyfi bir $q \in P$ ve $v = (\Delta)_p^{-1} \operatorname{grad} q$ için

$$(A_p q, q) = \|v\|_1^2 = \sup_{u \in U_P} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_1^2} \tag{2.29}$$

bulunur.
(2.29) den

$$\sup_{u \in U_P} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2}$$

ifadesi içindeki supremum, $v = \Delta_p^{-1} \operatorname{grad} q$ fonksiyonunda maximuma ulaşır.

$$A_m = \operatorname{div}(\Delta)_m^{-1} \operatorname{grad}$$

ile tanımlı $A_m : P \to P$ operatörünü göz önüne alalım. Burada $g \in U_m^{-1}$ için $(\Delta_m)^{-1} g$ ifadesi $\forall u \in U_m$ için

$$-(\nabla v, \nabla u) = (g, u) \tag{2.30}$$

olacak şekilde $v \in U_m$ vektör fonksiyonunu gösterir ve

$$U_m = \{u = (u_1, u_2) : u \in (W_2^1(\Omega)^2),\ \partial\Omega \text{ üzerinde } u_1 = 0,\ (0, u_2).n = 0\ \}$$

dir. (2.30) eşitliği

$$x_2 = 0,\ L_2 \text{ için } u = 0, \quad \text{ve } u.n = 0, \quad \text{ve } x_1 = 0,\ L_1 \text{ için } \frac{\partial\,(u.\tau)}{\partial n} = 0 \tag{2.31}$$

formundaki karışık tipli sınır koşulları ile vektör Poisson denklemini için genelleştirilmiş bir çözümünün tanımına karşılık gelir. Bu durumda da, keyfi bir $q \in P$ için

$$(A_m q, q) = \sup_{u \in U_m} \frac{(q, \mathrm{div} u)^2}{\|u\|_1^2}$$

eşitliği doğrudur. Üstte verdiğimiz (2.31) sınır koşulu ile A_m operatörünü Bölüm 3 de kullanacağız.

(2.31) yerine, (farklı bir sınır koşulu ile)

$$\begin{array}{lll} u_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 & , & x_1 = 0,\ L_1 \text{ için} \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 0 & , & x_2 = 0,\ L_2 \text{ için} \end{array} \tag{2.32}$$

sınır koşulu ile A_m operatörünü Bölüm 3 de kullanacağız.

2.3 TEZDE KANITLANACAK SONUÇLAR

Eğer

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_i < L_i,\ i = 1, 2\}$$

ve $\ell = \max(L_1/L_2, L_2/L_1)$ ise $\mu(\Omega)$ için

$$\mu(\Omega) = O(\ell^{-1}), \quad \ell \to \infty \tag{2.33}$$

ile verilen asimtotik sonucun geçerli olduğu Bölüm 3 de kanıtlanacaktır ve aşağıdaki

$$\frac{1}{2\sqrt{15}}\ell^{-1} \leq \mu(\Omega) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ell^{-1} \tag{2.34}$$

eşitsizliklerin sağlandığı Bölüm 4 de kanıtlanacaktır.

Eğer Ω,

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < R_1 < |x| < R_2\}, \qquad R_2/R_1 = 1 + \delta,\ \delta > 0$$

halkasal bölgesi ise o zaman $\delta \in (0, 1]$ için

$$\mu(\Omega) \leq \sqrt{\frac{7}{6}\frac{\delta}{2}} \tag{2.35}$$

ve

$$\mu(\Omega) \sim \frac{\delta}{2\sqrt{3}},\ \delta \to 0 \tag{2.36}$$

olduğu Bölüm 4 de kanıtlanacaktır.

BÖLÜM 3

UZATILMIŞ DİKDÖRTGENSEL BÖLGELERDE INF-SUP KOŞULU CİNSİNDEN EN İYİ SABİT

Bu bölümde Olshanskii ve Chizhonkov (2000) den yararlanacağız ve eğer

$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_i < L_i,\ i = 1, 2\}$

ve $\ell = \max(L_1/L_2, L_2/L_1)$ ise $\mu(\Omega)$ için

$$\mu(\Omega) = O(\ell^{-1}), \quad \ell \to \infty \tag{3.1}$$

ile verilen asimtotik sonucun geçerli olduğunu kanıtlayacağız.
ℓ için $\ell = L_1/L_2$ olduğunu kabul edebiliriz.
(3.1) asimptotik sonucunu, A_i $(i = 0, p, m)$ operatörlerinin minimal özdeğerleri ile ilgili olan aşağıdaki önermeden elde edeceğiz.

Önerme 3.0.1 *$\ell \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde ℓ den bağımsız $\theta_i > 0$, $(i = 1, 2)$ sabitleri vardır:*

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \lambda_{\min}(A_p) \leq \lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m) \leq \theta_2 \frac{1}{\ell^2}. \tag{3.2}$$

Aşağıdaki iki kısımda (3.2) bağıntısını kanıtlayacağız.

$\lambda(A_p) = 1$ ve $\mu^2 = \lambda_{\min}(A_0)$

eşitliklerini kullanacağız.

3.1 ÜST SINIR

(2.27) ile verilen Ω dikdörtgensel bölgesinde

$A_m p = \lambda p$

spektral problemini göz önüne alalım, yani

$$-\triangle u + \operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} u = \lambda p \tag{3.3}$$

denklem sistemlerini sağlayan ve $u = (u_1, u_2) \in U_m$ için

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \qquad (x_2 = 0, L_2 \text{ için}) \tag{3.4}$$

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \qquad (x_1 = 0,\ L_1 \text{ için}) \tag{3.5}$$

sınır koşullarının model kümesini sağlayan λ özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen $p \in P$ öz fonksiyonlarını bulalım.

(3.3)-(3.4) problemi, değişkenlerinin ayrılması metodu ile bulunabilen analitik bir çözüme sahiptir (Fourier Metodu) (Aristov and Chizhonkov 1995a).

Önerme 3.1.1 *(3.3)-(3.4) problemindeki A_m operatörü, $t = \pi \frac{L_2}{L_1}$ olmak üzere,*

$$\lambda(A_m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sinh t}\right) \tag{3.6}$$

özdeğerlerine sahiptir.

Kanıt.

$$b = \frac{L_2}{2}$$

için $\Omega = (0, L_1) \times (-b, b)$ bölgesinde $A_m p = \lambda p$ spektral problemini göz önene alalım. (2.27) başlangıç bölgesinin bu ötelemesi özdeğerleri değiştirmez fakat hesabı etkili bir şekilde kolaylaştırır. $r = \pi / L_1$ alalım.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}\sin r x_1 \left[b\frac{\sinh rb}{\cosh rb}\cosh r x_2 - x_2 \sinh r x_2 \right] \\
u_2 &= -\frac{1}{2}\cos r x_1 \left[b\frac{\cosh rb}{\sinh rb}\sinh r x_2 - x_2 \cosh r x_2 \right] \\
p &= \cos r x_1 \cosh r x_2
\end{aligned}$$

fonksiyonları (3.3)-(3.4) bağıntılarını sağlar ve (3.6) ile verilen özdeğerlere sahiptir.□

Önerme 3.1.2 *Herhangi bir Ω dikdörtgensel bölgesi için*

$$\lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. A_0 ve A_m operatörlerinin spektralarının alt sınırlarının fonksiyonel tanımının

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(A_0) &= \inf_{p\in P}\sup_{u\in U}\frac{(p,\mathrm{div}u)^2}{\|u\|_U^2\,\|p\|_P^2}\\
\lambda_{\min}(A_m) &= \inf_{p\in P}\sup_{u\in U_m}\frac{(p,\mathrm{div}u)^2}{\|u\|_U^2\,\|p\|_P^2}
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi istenilen $U\subset U_m$ den elde edilir.□

(3.2) eşitsizliğindeki üst sınır aşağıdaki önermeden elde edilir.

Önerme 3.1.3

$$\Omega=\{(x_1,x_2)\,|0<x_i<L_i\quad,i=1,2\}$$

bölgesinde, $\theta_2=\pi^2/12$ *olmak üzere,* $\ell=L_1/L_2\geq 1$ *cinsinden*

$$\lambda_{\min}(A_0)\leq\theta_2\frac{1}{\ell^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Önerme 3.1.1 ve Önerme 3.1.2 den,

$$t=\pi\frac{L_2}{L_1}=\frac{\pi}{\ell}$$

olmak üzere,

$$\lambda_{\min}(A_0)\leq\lambda_{\min}(A_m)\leq\lambda(A_m)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{\sinh t}\right)$$

elde edilir.

$$\left(1-\frac{t}{\sinh t}\right)\leq\frac{\pi^2}{12}\frac{1}{\ell^2}$$

olduğunu gösterelim.

$$\sinh t=t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+.....$$

seri açılımına sahip olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{t}{\sinh t}\right) &\leq \left(1-\frac{t}{t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+...}\right)=\frac{t^2}{2.3!}.\left(\frac{1+\frac{t^2.3!}{5!}+\frac{t^4 3!}{7!}+...}{1+\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}+...}\right)\\
&\leq \frac{t^2}{12}=\frac{\pi^2}{12}.\frac{1}{\ell^2}
\end{aligned}$$

bulunur.□

3.2 ALT SINIR

Açıklamalarda karışıklıktan kaçınmak için bu kısımda tartışmamızı $\Omega = (0, \pi\ell) \times (0, \pi)$ dikdörtgensel bölgesini ele alacağız.

Önerme 3.2.1 *Yukarıda tanımlanan Ω bölgesinde, $\theta_1 = \frac{1}{60}$ olmak üzere, $\ell \geq 1$ cinsinden,*

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \leq \lambda_{\min}(A_0) \tag{3.7}$$

sağlanır.

Kanıt. İstenilen (3.7) eşitsizliği keyfi bir $p \in P$ fonksiyonu için

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \sup_{U_P} \frac{(p, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2} \leq \sup_{U} \frac{(p, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2} \tag{3.8}$$

ile verilen eşitsizlikten elde edilir.

Gerçektende, her $p \in P$ üzerinden kesin alt sınırı alınarak (3.8) eşitsizliğinin sağ tarafında ki $\lambda_{\min}(A_0)$ değeri elde edilir ve $\lambda_{\min}(A_p) = 1$ $(A_p \equiv E)$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafında verileni elde ederiz.

O halde (3.8) eşitsizliğini ispat etmek yeterlidir.

P deki fonksiyonların

$$\begin{aligned}
\Xi &= \{\psi_m : \psi_m = d_m \cos\frac{m_1 x_1}{\ell} \cos m_2 x_2\} \\
d_m &= \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{sign} m_1)(1 + \operatorname{sign} m_2)}}{\pi.\sqrt{\ell}}
\end{aligned}$$

ile verilen ortonormal tabanlarını göz önüne alalım. Burada m_i $(i = 1, 2)$ ler, $\max\{m_1, m_2\} > 0$ olacak şekilde $0, 1, 2...$ değerlerini alır ve $m = (m_1, m_2)$ bir multiindex (iki değişkenli indeks) dir. İlk olarak P içinde derecesi M olan keyfi trigonometrik polinomlar için, M den bağımsız bir θ sabiti ile, (3.8) yi kanıtlayacağız.

$$p = \textstyle\sum_{m=0}^{M} p_m \psi_m, \quad p_0 = 0, \quad \psi_m \in \Xi$$

formunda bir p fonksiyonu düşünelim.

$$\sup_{u \in U_P} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2}$$

ifadesindeki üst sınır, $\hat{u} = \Delta_p^{-1}\nabla p$ fonksiyonunda maximuma ulaşır. Ayrıca

$\operatorname{div}\hat{u} = p$

dir, çünkü A_p birim operatörüne denktir. Bu durumda yukarıda seçilen p ye karşılık gelen $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ vektör fonksiyonu aşağıdaki formda yazılabilir:

$\hat{u}_k = \sum_{m=0}^{M} b_m^k p_m \phi_m^k, \quad k = 1, 2.$

Burada

$$\begin{aligned} b_m^1 &= \frac{m_1}{\ell\,(m_1^2\ell^{-2} + m_2^2)} \\ b_m^2 &= \frac{m_2}{\ell\,(m_1^2\ell^{-2} + m_2^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_m^1 &= d_m \sin\frac{m_1 x_1}{\ell}\cos m_2 x_2 \\ \phi_m^2 &= d_m \cos\frac{m_1 x_1}{\ell}\sin m_2 x_2 \end{aligned}$$

dir. Böylelikle (3.8) eşitsizliğini ispatlamak için, $M, \ell, \hat{u}$ dan bağımsız kesin pozitif $c_1, c_2 < \infty$ sabitleri için,

$$(p, \operatorname{div}\hat{u})^2 \le c_1\,(p, \operatorname{div} u)^2, \quad \|u\|_U^2 \le c_2\ell^2\,\|\hat{u}\|_U^2 \tag{3.9}$$

eşitsizliği doğru olacak şekilde bir $u \in U$ oluşturmak yeterlidir.
İndislerin

$$\begin{aligned} M_1 &= \{m : m_1 \ge m_2\} \\ M_2 &= \{m : m_1 < m_2\} \end{aligned}$$

kümelerini düşünelim. $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ dir ve herhangi bir m indeksi için $m \in M_i$ olacak şekilde bir $i \in \{1, 2\}$ vardır.
p fonksiyonunu iki ortogonal parçanın toplamı olarak yeniden gösterelim:

$p^{(i)} = \sum_{m\in M_i} p_m\psi_m, \quad i = 1, 2.$

Burada ve daha sonra $\max(m_1, m_2) > M$ için $p_m = 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

$\operatorname{div}\hat{u} = p = p^{(1)} + p^{(2)}$

olduğundan

$$\left|\left(p^{(i)}, p\right)\right| \ge \frac{1}{2}\,|(p,p)| = \frac{1}{2}\,|(\operatorname{div}\hat{u}, p)| \tag{3.10}$$

olacak şekilde bir $i \in \{1, 2\}$ vardır.

(3.10) eşitsizliği $i = 1$ için sağlansın. Bu durumda $u = (u_1, u_2) \in U$ vektör fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$u_1 = \sum_{m \in M_1} \frac{\ell}{m_1} p_m \phi_m^1 - \sum_m \frac{\ell}{m_1} \rho_m^{(1)} \phi_m^1, \qquad u_2 \equiv 0$$

diğer durumlarda,

$$u_2 = \sum_{m \in M_2} \frac{1}{m_2} p_m \phi_m^2 - \sum_m \frac{1}{m_2} \rho_m^{(2)} \phi_m^2, \qquad u_1 \equiv 0.$$

Burada $\rho_m^{(1)}$ ve $\rho_m^{(2)}$ katsayıları daha sonra tanımlanacaktır.

Keyfi bir m_i için, bundan daha büyük en küçük çift doğal sayıyı $C(m_i)$ $(i = 1, 2)$ ile gösterelim. Eğer (3.10) eşitsizliği $i = 1$ için sağlanır ise, keyfi bir $m = (m_1, m_2)$ indeksine, $\overline{m_1} = m_1, \overline{m_2} = m_2 \,(\operatorname{mod} C(m_1))$ olmak üzere $\overline{m} = (\overline{m_1}, \overline{m_2})$ indeksini karşılık getiriyoruz, ve $\rho_m^{(1)}$ katsayılarını

$$\rho_m^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\rho_{\overline{m}} & \text{eğer } \overline{m} \in M_1, m_2 < 3C(m_1) \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

formülleri ile tanımlıyoruz. Eğer (3.10) eşitsizliği $i = 2$ için sağlanır ise, $m = (m_1, m_2)$ keyfi indeksine $\tilde{m}_2 = m_2, \tilde{m}_1 = m_1 \,(\operatorname{mod} C\,(m_2))$ olmak üzere $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ indeksini karşılık getiriyoruz, ve $\rho_m^{(2)}$ katsayılarını

$$\rho_m^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\rho_{\tilde{m}} & \text{eğer } \tilde{m} \in M_2, m_1 < 3C(m_2) \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

formülleri ile tanımlıyoruz.

Yukarıda oluşturulan u, derecesi $3(M+2)$ yi geçmeyen ve $u|_{\partial\Omega} = 0$ olan bir trigonometrik polinomdur.

$\|u\|_U$ ve $|(p, \operatorname{div} u)|$ yi hesaplayalım. Bunu yaparken $\{\phi_m^1\}$ ve $\{\phi_m^2\}$ fonksiyon sistemlerinin L_2 deki iç çarpıma göre ortonormal olmalarından ve u, $\hat{u}$ ve p fonksiyonlarının normlarının bunlara karşılık gelen Fourier katsayılarının terimleri içinde kesin olarak ifade edilişlerinden yararlanacağız.

$i = 1, 2$ için

$$\rho^{(i)} = \sum_m \rho_m^{(i)} \phi_m^1$$

diyelim ve iki durumu ayrı ayrı ele alalım.

ilk durumda, $\overline{m} \in M_1$ ve $5m_1 \geq m_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\|_P^2 &= \left\| p^{(1)} \right\|_P^2 - 2\left(p^{(1)}, \rho^{(1)}\right) + \left\| \rho^{(1)} \right\|_P^2 = \frac{1}{3}\left\| p^{(1)} \right\|_P^2 + \left\| \rho^{(1)} \right\|_p^2 \\
&\leq \frac{2}{3}\left\| p^{(1)} \right\|_P^2 \leq \frac{2}{3}\|p\|_P^2 = \frac{2}{3}\|\operatorname{div}\hat{u}\|_P^2 \leq \frac{2}{3}\|\hat{u}\|_U^2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur. Burada

$$\left(p^{(1)}, \rho^{(1)}\right) = \sum_{m\in M_1} p_m \rho_m^{(1)} = \frac{1}{3}\sum_{m\in M_1} p_m^2 = \frac{1}{3}\left\| p^{(1)} \right\|_P^2$$

ve

$$\left\| \rho^{(1)} \right\|_P^2 = \sum_m \left[\rho^{(1)}\right]^2 = 3\sum_{m\in M_1} \frac{1}{9} p_m^2 = \frac{1}{3}\left\| p^{(1)} \right\|_P^2$$

bağıntılarını kullandık. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_m \frac{\ell}{m_1}\rho_m^{(1)}\phi_m^{(1)} \right) \right\|_P^2 &= \ell^2 \sum_m \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\rho_m\right)^2 \\
&\leq \ell^2 \frac{1}{9}\sum_{m\in M_1}\left(1+3^2+5^2\right)\, p_m^2 \\
&= \frac{35}{9}\left\| p^{(1)} \right\|_P^2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\|_P^2 &\leq \ell^2\left[\left\| p^{(1)} \right\|_P^2 - 2\left(p^{(1)}, \rho^{(1)}\right) + \frac{35}{9}\left\| p^{(1)} \right\|_P^2 \right] \\
&= \frac{38}{9}\ell^2 \left\| p^{(1)} \right\|_P^2 \leq \frac{38}{9}\ell^2\|\hat{u}\|_U^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur.

$$\left|\left(p, p^{(1)}\right)\right| \geq \frac{1}{2}\left|(p, \operatorname{div}\hat{u})\right|$$

olduğundan ve $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{2}}$ için

$$\begin{aligned}
\left|\left(p, \rho^{(1)}\right)\right| &= \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{M} p_m p_{\bar{m}} \leq \frac{\varepsilon}{6}\sum_{m=0}^{M} p_m^2 + \frac{1}{6\varepsilon}\sum_{m=0}^{M} p_{\bar{m}}^2 \leq \frac{\varepsilon}{3}\sum_{m\in M_1} p_m^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{m\in M_1} p_m^2 \\
&= \frac{2}{\sqrt{6}}\left|\left(p, p^{(1)}\right)\right|
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|(p, \operatorname{div} u)\right| &= \left|\left(p, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right| = \left|\left(p, p^{(1)} - \rho^{(1)}\right)\right| \\
&\geq \left|\left(p, p^{(1)}\right)\right| - \left|\left(p, \rho^{(1)}\right)\right| \\
&\geq \left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left|\left(p, p^{(1)}\right)\right| \\
&\geq \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}\left|(p, \operatorname{div}\hat{u})\right|
\end{aligned}$$

elde ederiz.

İkinci durumda $\tilde{m} \in M_2$ ve $4m_2 \geq m_1$ olmak üzere benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\|_P^2 &\leq \frac{38}{9} \frac{1}{\ell} \left\| \hat{u} \right\|_U^2, \\
\left\| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\|_P^2 &\leq \left\| p^{(2)} \right\|_P^2 + \left\| \rho^{(2)} \right\|_P^2 \leq \frac{2}{3} \left\| \hat{u} \right\|_U^2, \\
\left| (p, \operatorname{div} u) \right| &\geq \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}} \left| (p, \operatorname{div} \hat{u}) \right|
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde ederiz.

(3.11)-(3.13) eşitsizliklerinden, $\ell \geq 1$ koşulu altında (3.9) hesaplamaları, $c_1 = 12$ ve $c_2 = 5$ sabitleri ile, sağlanır. c_1 ve c_2, M polinomunun derecesine bağlı olmadığı için, (3.8) eşitsizliği, $\theta = (c_1, c_2)^{-1}$ sabiti ile, her sonlu trigonometrik polinom için doğrudur. Ve böyle polinomların P içinde her yerde yoğun olduğu için teoremin kanıtı (3.8) de kapanış alınarak tamamlanır.□

3.3 TEMEL SONUÇ

Önceki kısımlarda elde edilen hesaplamalardan aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.3.1 *Bir*

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < L_i, \ i = 1, 2\}$$

dikdörtgen bölgesi için,

$$\ell = \max \left(L_1/L_2, \ L_2/L_1 \right)$$

olsun. Buna göre

$$\mu = \inf_{p \in P} \sup_{u \in U} \frac{|(p, \operatorname{div} u)|}{\|u\|_1 \|p\|_0}$$

ile tanımlı μ sabit sayısı

$$\ell = O\left(\ell^{-1}\right), \quad \ell \longrightarrow \infty$$

asimptotik bağıntısını sağlar.

Kanıt. $\ell = L_1/L_2 \geq 1$ için Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.2.1 den, ℓ cinsinden

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \leq \lambda_{\min}(A_0) \leq \theta_2 \frac{1}{\ell^2}$$

eşitsizliğini elde edilir ve buradan

$$\lambda_{\min}(A_0) = \mu^2$$

bulunur.

Ayrıca sabitlenmiş bir dikdörtgen için, bir $\alpha \neq 0$ çarpanı ile kenarların eş zamanlı daralması (genişlemesi) A_0 operatörünün özdeğerini değiştirmez. Bu, (2.23),

$$(A_0 q, q) = \sup_{u \in U} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_1^2}$$

içindeki bağımsız değişkenlerin değiştirirlmesinden ve α^2 ile bölümün sadeleştirilmesinden elde edilir. Ayrıca, $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki keyfi bir φ açısı ile dikdörtgenin rotasyonuda (döndürülmeside) benzer sonuçları verir.

Böylece $(0, \ell) \times (0, 1)$ ve $(0, 1) \times (0, \ell^{-1})$ bölgeleri için A_0 operatörünün özdeğerlerinin kümesi herhangi bir ℓ için çalışır (aynıdır). Buna göre $\ell = L_1/L_2 \geq 1$ için istenilen kanıtlanmış olur. $\ell = L_2/L_1 \geq 1$ için kanıt benzer şekilde yapılır.$\square$

BÖLÜM 4

LBB KOŞULUNU BÖLGE GEOMETRİSİNE BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde Chizhonkov ve Ol'shanskii (2000) den yararlanacağız.
Eğer

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_i < L_i,\ i = 1, 2\}$$

ve $\ell = \max(L_1/L_2, L_2/L_1)$ ise

$$\frac{1}{2\sqrt{15}}\ell^{-1} \leq \mu(\Omega) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ell^{-1} \tag{4.1}$$

eşitsizliklerin sağlandığını kanıtlayacağız ve Ω,

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < R_1 < |x| < R_2\}, \qquad R_2/R_1 = 1 + \delta,\ \delta > 0$$

halkasal bölgesi ise o zaman $\delta \in (0, 1]$ için

$$\mu(\Omega) \leq \sqrt{\frac{7}{6}\frac{\delta}{2}} \tag{4.2}$$

ve

$$\mu(\Omega) \sim \frac{\delta}{2\sqrt{3}},\ \delta \to 0 \tag{4.3}$$

olduğunu kanıtlayacağız.

4.1 ŞERİT BÖLGESİ İÇİN HESAPLAMALAR

Bu kısımda (4.1) yi hesaplayacağız. (4.1) hesaplaması $A_i(i = 0, p, m)$ operatörlerinin minimal özdeğer hesaplamalarından elde edilir. A_p nin tüm özedeğerlerinin 1 yani $\lambda(A_p) = 1$ olduğunu ve $\mu(\Omega)^2 = \lambda_{\min}(A_0)$ olduğunu biliyoruz. (4.1) yi ℓ cinsinden aşağıdaki teoremde olduğu gibi ifade edebiliriz.

Teorem 4.1.1

$$\frac{1}{60}\frac{1}{\ell^2}\lambda_{\min}(A_p) \leq \lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m) \leq \frac{\pi^2}{12}\frac{1}{\ell^2} \tag{4.4}$$

Kanıt.

$\lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m)$ eşitsizliği $\mathbf{U} \subset \mathbf{U}_m$ gömmesinden ve

$$\lambda_{\min}(A_0) = \inf_{q \in P} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}} \frac{(q, \mathrm{div}\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|_1^2 \|q\|_0^2}, \quad \lambda_{\min}(A_m) = \inf_{q \in P} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}_m} \frac{(q, \mathrm{div}\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|_1^2 \|q\|_0^2}$$

ile verilen Rayleigh kuralından elde edilir. $\frac{1}{60}\frac{1}{\ell^2}\lambda_{\min}(A_p) \leq \lambda_{\min}(A_0)$ eşitsizliğinin kanıtı oldukça tekniktir ve (Olshanskii and Chizonkov (2000)) de bulunabilir.

Şimdi

$$\lambda_{\min}(A_m) \leq \frac{\pi^2}{12}\frac{1}{\ell^2} \tag{4.5}$$

nin kanıtını verelim.

Ω nın (2.27) deki gibi tanımlandığını varsayarak $A_m p = \lambda_p$ özdeğer problemini göz önüne alalım. Yardımcı fonksiyon olarak

$$\mathbf{u} = \triangle_m^{-1}\nabla_p$$

alırsak problemi yeniden formüle edebiliriz:

(2.32) deki sınır koşullarına göre bazı $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_m$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} -\triangle\mathbf{u} + \nabla_p = 0, \\ \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = \lambda_p \end{cases} \tag{4.6}$$

denklemini sağlayan λ özdeğerlerini ve $p \in P$ öz fonksiyonlarını bulunuz.

(4.6), (2.32) nin tüm çözümleri değişkenlerin bölünmesi metoduyla bulunabilir (Aristov and Chizhonkov 1995b). Burada A_m operatörünün özdeğerinin, $t = \pi\frac{L_2}{L_1}$ olmak üzere

$$\bar{\lambda}\left(A_m\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sinh t}\right)$$

olduğunu belirtmek yeterlidir. Gerçekten, $b = L_1/2$ olmak üzere $\Omega = (0, L_1) \times (-b, b)$ bölgesini göz önüne alalım.

Orjinal dikdörtgenin bu değişimi özdeğerleri değiştirmez ancak hesaplamaları sadeleştirir.

Dahası, $r = \pi/L_1$ dersek, doğrudan yerine koyarak

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\sin rx_1 \left[b\frac{\sinh rb}{\cosh rb}\cosh rx_2 - x_2 \sinh rx_2\right], \\ u_2 &= -\frac{1}{2}\cos rx_1 \left[b\frac{\cosh rb}{\sinh rb}\sinh rx_2 - x_2 \cosh rx_2\right], \\ p &= \cos rx_1 \cosh rx_2 \end{aligned}$$

fonksiyonların, $\bar{\lambda}(A_m)$ özdeğeriyle birlikte,(4.6), (2.32) yi sağladığı görülür.
$\lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m)$ olduğundan,

$$t = \pi L_2/L_1 = \pi/\ell$$

olmak üzere,

$$\lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m) \leq \bar{\lambda}(A_m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sinh t}\right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sinh t}\right) &= \frac{t^2}{2.3!}\frac{1 + \frac{t^2 3!}{5!} + \frac{t^4 3!}{7!} + ...}{1 + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + ...} \\ &\leq \frac{\pi^2}{12}\frac{1}{\ell^2} \end{aligned}$$

olduğundan (4.5) elde edilir.□

4.2 HALKA BÖLGESİ İÇİN HESAPLAMALAR

Bu kısımda Ω yi $R_2/R_1 = 1 + \delta$, $\delta > 0$ olmak üzere

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < R_1 < |\mathbf{x}| < R_2\} \tag{4.7}$$

halkası olarak kabul ediyoruz. (2.26) ile verilen $\mu(\Omega)^2 = \lambda_{\min}(A_0)$ bağlantısı hala geçerli olduğu için $A_0 p = \lambda p$ özdeğer problemini göz önüne alıyoruz.

Teorem 4.2.1 *$s = R_2/R_1 > 1$ olsun ve (r, φ) yi R^2 de kutupsal koordinatlar olarak alalım. Bu durumda $A_0 p = \lambda_p$ probleminin tüm özdeğerleri*

$$\{1\} \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$$

ye aittir. Burada $m = 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \left\{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{s^2-1}{s^2+1}\frac{1}{\ln s}}\right)\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left(s^{m+1} - s^{m-1}\right)\sqrt{m^2-1}}{\sqrt{\left(s^{2(m+1)}-1\right)\left(s^{2(m-1)}-1\right)}}\right)\right\} \\ \mathcal{L}_2 &= \left\{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{s^2-1}{s^2+1}\frac{1}{\ln s}}\right)\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left(s^{m+1} - s^{m-1}\right)\sqrt{m^2-1}}{\sqrt{\left(s^{2(m+1)}-1\right)\left(s^{2(m-1)}-1\right)}}\right)\right\} \end{aligned}$$

dir. $\lambda = 1$ özdeğeri sonsuz katlılıktadır ve bunlara karşılık gelen öz fonksiyonlar

$$p_k(r, \varphi) = \frac{\pi k r}{R_2 - R_1}\cos \pi k \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} - \frac{1}{r}\sin \pi k \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} + C_k, \qquad k = 1, 2, ..$$

dir. Herbir $\lambda \neq 1$ *özdeğerinin katlılığı ikidir ve bunlara karşılık gelen öz fonksiyonlar,* $\alpha_m(\varphi) = \cos(m\varphi)$ *veya* $\alpha_m(\varphi) = \sin(m\varphi)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} p^1(r,\varphi) &= r\left(1 \mp \left[\frac{R_1}{r}\right]^2 \sqrt{\frac{s^4-1}{4\ln s}}\right)\alpha_1(\varphi), \\ p^m(r,\varphi) &= r^m\left(1 \mp \left[\frac{R_1}{r}\right]^{2m} s^{m-1}\sqrt{\frac{m-1}{m+1}\frac{s^{2(m+1)}-1}{s^{2(m-1)}-1}}\right)\alpha_m(\varphi),\ m = 2,3,... \end{aligned}$$

dir.

Kanıt. Teoremin kanıtı $[u_1,u_2,p] = \sum_j \left[u_1^j(r), u_2^j(r), p^j(r)\right]\exp\{\mathbf{i}j\varphi\}$ temsiline ve $A_0p = \lambda_p$ nın $u_1^j(r), u_2^j(r)$ ve $p^j(r)$ için mümkün olan ayrı diferensiyel problemler olarak ayrıştırılmasına dayanır.

$A_0p = \lambda p$ özdeğer problemini ele alalım. $\mathbf{u} = \triangle_0^{-1}\nabla p$ yardımcı fonksiyonunu uygulayarak problemi şu şekilde yeniden formüle ederiz: Bazı $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} -\triangle\mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \mathrm{div}\mathbf{u} = \lambda p \end{cases}$$

yi sağlayan λ özdeğerini ve $p \in P$ özfonksiyonunu bulalım.Kutupsal koordinat sisteminde özdeğer problemini tekrar yazalım: $u = u_1$, $v = u_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} - \frac{u}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial\varphi}\right] &= \lambda p, \end{aligned} \tag{4.8}$$

dir.

$\lambda = 1$ için teorem, herhangi k tamsayısı için (4.8) de

$$p_k = \frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{1}{r}u_k$$

ve

$$u_k = \sin\pi k\frac{r-R_1}{R_2-R_1},\ v_k(r) = 0$$

fonksiyonları yerine koyularak kontrol edilir.

Ayrıca bazı $\lambda \neq 1$ ye karşılık gelen bir p öz fonksiyonunu ve u, v yardımcı fonksiyonlarını düşünelim. φ için periyodik sınır koşulları aşağıdaki temsili kullanmamıza olanak sağlar:

$$[u,v,p] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}[u_m(r), v_m(r), p_m(r)]\exp\{im\varphi\}.$$

$\exp\{im\varphi\}$ exponent sistemi $L^2([0,2\pi])$ içinde ortogonal (dikey) olduğu için, (4.8) dan,

$$u_m(R_2) = v_m(R_2) = u_m(R_1) = v_m(R_1) = 0 \tag{4.9}$$

sınır koşulları ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}u_m - \frac{u_m}{r^2} - \frac{2im}{r^2}v_m - p'_m &= 0, &(4.10)\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_m}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}v_m - \frac{v_m}{r^2} + \frac{2im}{r^2}u_m - \frac{im}{r}p_m &= 0, &(4.11)\\
\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_m) + imv_m\right] &= \lambda p_m &(4.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. $m = 0$ harmonik durumu için ($v_0 = 0$ alıp (4.11) yi kullanarak) λ için tek mümkün değerin $\lambda = 1$ olduğu görülür. Bu nedenle $m \neq 0$ durumunu göz önüne alacağız. u_m ve v_m yok ederek (4.10) ve (4.12) den

$$(\lambda - 1)\triangle_r p_m = 0$$

elde edilir.Böylece C_+, C_- nın keyfi sabitler olmak üzere

$$p_m(r) = \frac{1}{2m}\left(C_+r^m + C_-r^{-m}\right) \tag{4.13}$$

bulunur. (4.10) ve (4.11) den

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}u_m - \frac{u_m}{r^2} - \frac{2im}{r^2}v_m &= \frac{1}{2}\left[C_+r^{m-1} - C_-r^{-m-1}\right],\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_m}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}v_m - \frac{v_m}{r^2} + \frac{2im}{r^2}u_m &= \frac{i}{2}\left[C_+r^{m-1} + C_-r^{-m-1}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.$\omega_+ = u_m + iv_m$ diyelim. m parametreli bir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega_\pm}{\partial r}\right) - \frac{(m\mp1)^2}{r^2}\omega_\pm &= +C_\pm r^{\pm m-1}, &(4.14)\\
\omega_\pm(R_1) &= \omega_\pm(R_2) = 0
\end{aligned}$$

sınır değer problemi elde ederiz.

İlk olarak $m = 1$ durumunu göz önüne alalım.

$$A_+ = \frac{C_+}{4\ln\frac{R_2}{R_1}}\left(R_1^2 - R_2^2\right),\ B_+ = \frac{C_+}{4\ln\frac{R_2}{R_1}}\left(R_2^2\ln R_1 - R_1^2\ln R_2\right)$$

ve

$$A_- = -\frac{C_-}{4}\frac{1}{R_1^2+R_2^2},\ B_- = -\frac{C_-}{4}\frac{(R_1R_2)^2}{R_1^2+R_2^2}$$

olmak üzere

$$\omega_+ = A_+ \ln r + B_+ + \frac{C_+}{4} r^2, \ \omega_- = A_- r^2 + B_- r^2 + \frac{C_-}{4}$$

elde ederiz. (4.12) de

$$u_m = (\omega_+ + \omega_-)/2, \ iv_m = (\omega_+ - \omega_-)/2$$

yerine konularak

$$\frac{C_+}{8}\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + 2r^2\right) - \frac{C_-}{4}\frac{1}{R_1^2 + R_2^2}\left(2r^2 - R_1^2 - R_2^2\right) = \frac{\lambda}{2}\left(C_+ r^2 + C_-\right)$$

bulunur. r^0 ve r^2 fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan mümkün olan değerler sadece, $(s = R_2/R_1 > 1)$,

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}\frac{1}{\ln s}}\right) \tag{4.15}$$

dir. Ayrıca,

$$p_1(r) = Cr\left(1 \mp \left[\frac{R_1}{r}\right]^2 \sqrt{\frac{s^4 - 1}{4\ln s}}\right)$$

buluruz. Aynı sonuç $m = -1$ durumu için de geçerlidir. Böylece (4.8) daki λ değerleri

$$\begin{aligned} p^1(r, \varphi) &= \frac{1}{2} p_1(r)\left(\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)\right), \\ p^2(r, \varphi) &= \frac{1}{2i} p_1(r)\left(\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)\right) \end{aligned}$$

öz fonksiyonlarına karşılık gelen özdeğerlerdir. $|m| > 1$ için problem (4.14) nin çözümü

$$\begin{aligned} A_+ &= -\frac{C_+}{4m}\frac{R_2^{2m} - R_1^{2m}}{R_2^{2(m-1)} - R_1^{2(m-1)}}, \quad B_+ = -\frac{C_+}{4m}\frac{\left(R_1^2 - R_2^2\right)\left(R_1 R_2\right)^{2(m-1)}}{R_2^{2(m-1)} - R_1^{2(m-1)}} \\ A_- &= -\frac{C_-}{4m}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^{2(m+1)} - R_1^{2(m+1)}}, \quad B_- = -\frac{C_-}{4m}\frac{\left(R_1^{2m} - R_2^{2m}\right)\left(R_1 R_2\right)^2}{R_2^{2(m+1)} - R_1^{2(m+1)}} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \omega_+ &= A_+ r^{m-1} + B_+ r^{-(m-1)} + \frac{C_+}{4m} r^{m+1}, \\ \omega_- &= A_- r^{m+1} + B_- r^{-(m+1)} + \frac{C_-}{4m} r^{-(m-1)}, \end{aligned}$$

dır. Benzer değerlendirmelerle olası değerlerin

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\left(s^{m+1} - s^{m-1}\right)\sqrt{m^2 - 1}}{\sqrt{\left(s^{2(m+1)} - 1\right)\left(s^{2(m-1)} - 1\right)}}\right)$$

ve

$$p_m(r) = Cr^k \left(1 \mp \left[\frac{R_1}{r} \right]^{2k} s^{k-1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \frac{s^{2(k+1)}-1}{s^{2(k-1)}-1}} \right), \; k = |m| > 1$$

olduğu sonucuna ulaşılır.□

Uyarı 4.2.2 *Eğer R_2 sabit ve $R_1 \to 0$ (yani $s \to \infty$) ise her $\lambda \neq 1$ için $\lambda \to \frac{1}{2}$ dir. Böylece bir çember için Crouzeix (1974) ün sonucu yeniden elde edilir.*

Sonuç 4.2.3 *(4.7) de verilen Ω için*

$$\mu(\Omega) \leq \sqrt{\frac{7}{6} \frac{\delta}{2}}, \; \delta \in (0,1] \tag{4.16}$$

ve

$$\mu(\Omega) \backsim \frac{\delta}{2\sqrt{3}}, \; \delta \to 0 \tag{4.17}$$

dir.

Kanıt.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{s^2-1}{s^2+1} \frac{1}{\ln s}} \right)$$

özdeğerini göz önüne alalım. $s = 1 + \delta$ olarak alırsak $\delta \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{s^2-1}{s^2+1} \frac{1}{\ln s}} &= \frac{2\delta + \delta^2}{2 + 2\delta + \delta^2} \frac{1}{\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} \ldots} \\ &\geq \frac{2+\delta}{2 + \delta + \frac{7}{6}\delta^2} \geq 1 - \frac{7}{12}\delta^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \mu(\Omega)^2 &= \lambda_{\min}(A_0) \leq \bar{\lambda} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{7}{12}\delta^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{7}{12}\delta^2 \right) \right) = \frac{7}{24}\delta^2 \end{aligned}$$

bulunur .Böylece $\mu(\Omega)$ için hesaplama kanıtlanmıştır.

Şimdi, $\mu(\Omega)$ için (4.17) asimptotik yaklaşımını kanıtlayacağız. Bunu kanıtlamak için, $\delta \to 0$ olduğunda $s = 1 + \delta$ yazarız ve özdeğerlerin tanımındaki fonksiyonlar için δ ya göre Taylor açılımını hesaplarız. Böylece

$$\frac{2\delta + \delta^2}{2 + 2\delta + \delta^2} \frac{1}{\ln(1+\delta)} = 1 - \frac{1}{3}\delta^2 + \ldots$$

ve $m = 2, 3, \ldots$ için

$$\begin{aligned}\frac{\left((1+\delta)^{m+1} - (1+\delta)^{m-1}\right)^2 (m^2-1)}{\left((1+\delta)^{2(m+1)} - 1\right)\left((1+\delta)^{2(m-1)} - 1\right)} &= \frac{4 + 4(2m-1)\delta + (8m^2 - 12m + 5)\delta^2 + \ldots}{4 + 4(2m-1)\delta + \frac{28m^2 - 36m + 15}{3}\delta^2 + \ldots} \\ &= 1 - \frac{m^2}{3}\delta^2 + \ldots\end{aligned}$$

bulunur. Bu açılımı kullanarak $\lambda_{\min}$ için, $\delta \to 0$ olduğunda

$$\lambda_{\min}(A_0) \sim \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}\delta^2}\right) \sim \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{6}\delta^2\right)\right) = \frac{\delta^2}{12}$$

elde ederiz.□

Uyarı 4.2.4 $\lambda \sim c\delta^2$ *asimptotik davranışı Teorem 4.2.1 içinde tanımlanan* $\mathcal{L}_2$ *kümesindeki tüm özdeğerleri için geçerlidir.*

KAYNAKLAR

Aristov P P and Chizhonkov E V (1995a) On *the Constant in the LBB Condition for Rectangular Domains.* Report No. 9534 (September 1995), Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, The Netherlands.

Aristov P P and Chizhonkov E V (1995b) *On the Constant in the LBB Condition for Rectangular Domains*. Report No. 9535, Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, The Netherlands.

Babuška I (1973) The finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.* 179-192.

Boffi D, Brezzi F and Gastaldi L (1997) On the convergence of eigenvalues for mixed formulations. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*. 25: 131-154.

Boffi D, Brezzi F and Gastaldi L (2000) On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form. *Math. Comp*. 69: 141-158.

Braess D (1997) *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendugenin der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Bramble J H and Pasciak J E (1988) A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximation of elliptic problems. *Math. Comp*. 50: 1-17.

Brezzi F (1974) On the existence, uniqueness and approximation of the saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *Numer. Math*. 179-192.

Brezzi F and Fortin M (1991) Mixed and hybrid finite element methods. *Springer Series in Comp. Math.*,15,Springer-Verlag, New York.

Chizhonkov E V (1994) Application of the Cosserat spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes Problem. *Russ. Journal of Number. Analysis and Math. Modeling*., 9 (3): 191-199.

Chizhonkov E V (1995) *On the Constant in the LBB Condition for Ring Domains*. Report No. 9537 (october 1995), Dept. Of Math.Univ. of Nijmegen, The Netherlands.

Chizhonkov E V (1996) On the convergence of the artifical compressibility method. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, Moscow Univ. Math. Bull., 2: 13-20.

Chizhonkov E V and Ol'shanskii M A (2000) On the Domain Geometry Dependence of the LBB Condition. Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 34 (5): 935-951.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Cosserat E F (1901) Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique.*C. R. Acad. Sci.,* Paris, 133: 326-329.

Crouzeix M (1974) Étude d'une méthode de linéarisation. Résolution des équations de Stokes stationaires. Application aux equations des Navier-Stokes stationaires, *Cahiers de l'IRIA* 139-244.

Dafermos C M (1968) Some remarks on Korn's inequality. *Z. Angew. Math. Phys*. 19: 913-920.

D'yakonov E G (1989) *Minimization of Computational Work. Asymptotically Optimal Algorithms for Elliptic Problems [in Russıan],* Nauka, Mascow.

Girault V and Raviart P A (1986) *Finite element methods for Navier-Stokes equations.* Springer-Velag, Berlin.

Grisvard P (1985) *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman, Boston.

Gunsburger M (1989) *Finite element methods for viscous incompressible flows. A. Guide to the theory, practice and algorithms*. Academic Press, London.

Horgan C O and Payne L E (1971) On inequqlities of Korn, Friedrichs and Babuska-Aziz. *Arch. Ration. Mech. Anal*. 40: 384-402

Kobelkov G M (1977) On equivalent norms in L_2. *Anal. Math.* 3: 177-186.

Langer U and Queck W (1986) On the convergence factor of Uzawa's algorithm. *J.Comp. Appl. Math.* 15: 191-202.

Mikhlin C G (1967) Further investigation of the Cosserat spectrum. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom*. [Vestnik Leningrad. Univ. Mat.], 7 (2): 96-102.

Mikhlin S G (1973) The spectrum of an operator pencil of the elasticity theory. *Uspekhi Mat. Nauk* 43-82; English translation in *Russian Math. Surveys*, 28.

Olshanskii M A (1973) Stokes problem with model boundary conditions. *Sbornik: Mathematics,*188: 603-620.

Ol'shanskii M A (1997) Stokes problem with model boundary conditions. *Mat. Sb.*[Russian Acad. Sci. Sb. Math.], 188 (4): 127-144.

Olshanskii M A and Chizhonkov E V (2000) On the optimal constant in the inf-sup condition for rectangle. *Matematicheskie Zametki* 67: 387-396.

Olshanskii M A and Chizhonkov E V (2000) On the Best Constant in the inf-sup Condition for Elengated Rectengular Domains. Mathematical Notes, 67 (3): 325-332.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Parlett B N (1980) *The Symmetrical Eigenvaluve Problem*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Rannacher R and Turek S (1992) A simple nonconforming quadrilateral Stokes element. *Numer. Methods Partial Differential Equation,* 8: 97-111.

Silvester D and Wathen A (1994) Fast iterative solution of stabilized Stokes systems part II: Using block preconditioners. *SIAMJ. Numer. Anal*. 31: 1352-1367.

Schafer M and Turek S (1996) Benchmark computations of laminar flow around cylinder, in Flow Simulation with High-Performance computers II, E. H. Hirschel Ed.,*Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 52: 547-566.

Strang G and Fix G I (1973) *An analysis of the finite element methods*. Prentice-Hall, New-York.

Turek S (1999) Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic approach in view of computational aspects. *LNCSE 6*, Springer, Heidelberg.

Turek S and Becker C (1998) Featflow*: Finite element software for the incompressible Navier-Stokes equations: User Manval*, *Release* 1.1. Univ. of Heidelberg.

ÖZGEÇMİŞ

Ceren DEMİREL 1983’de Zonguldak da doğdu; İlk, orta ve lise öğrenimini aynı şehirde tamamladı; 2002 yılında Gazi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'ne girdi; 2007'de mezun olduktan sonra Ankara Seviye Dergisi Dershanelerinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı; Daha sonra 2009 yılında Zonguldak Murat Dershanesinde görevine devam etti. 2009 yılında girdiği BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Bahçelievler Mahallesi Funda Sokak
Ata Apt. 6/12 Site/ZONGULDAK

Tel : 0 530 697 10 45
Eposta : cerendemirel_@hotmail.com