STOKES PROBLEMİ

2013

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VEDAT İRGE

STOKES PROBLEMİ

Vedat İRGE

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran 2013

KABUL:

Vedat İRGE tarafından hazırlanan "STOKES PROBLEMİ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 06/06/2013

Başkan: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN (BEÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali DİNLER (İSMÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (BEÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2013

Prof. Dr. Özden ÖZEL GÜVEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Vedat İRGE

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STOKES PROBLEMİ

Vedat İRGE

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN
Haziran 2013, 99 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konu ile ilgili bazı hazırlayıcı sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde, Stokes problemi, Schur tamamlayıcı operatörü, Friedrichs operatörü, inf-sup sabiti tanıtılmıştır ve problemler arasındaki bağlantı verilmiştir.

Üçüncü bölümde, konform dönüşüm aracılığıyla bazı sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bazı bölgelerin inf-sup sabitleri hesaplanmıştır ve katlı bağlantılı bölgeler için Friedrichs operatörü ve Schur tamamlayıcı operatörü arasındaki bir ilişki verilmiştir.

Beşinci bölümde, harmonik fonksiyonlar aracılığıyla Stokes akışkanları için temsil formülleri incelenmiştir.

ÖZET (devam ediyor)

Altıncı bölümde, lineer esneklik için Navier denkleminin çözümü için temsiller genelleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Stokes problemi, Schur tamamlayıcı operatörü, Friedrichs operatörü, inf-sup sabiti (LBB)

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

STOKES PROBLEM

Vedat İRGE

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Yüksel SOYKAN
June 2013, 99 pages

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, we give the necessary preliminary results.

In the second chapter, we introduced the Stokes problem, Schur complement operator, Friedrichs operator, inf-sup constant, and give connection between the problems.

In chapter 3, we give some results via conformal mapping.

In chapter 4, we estimate inf-sup constants of some domain and give a correspondence between Friedrichs operator and Schur complement operator for multiply connected domains.

In chapter 5, we investigate the representation formula for Stokes flows via harmonic functions.

ABSTRACT (continued)

In chapter 6, we generalize the representations for the solution of Navier's equation for linear elasticity.

Keywords: Stokes problem, Schur complement operator, Friedrichs operator, inf-sup constant (LBB)

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması sırasında tüm çalışmalarımı titizlikle takip eden Değerli Hocam Sayın Doç. Dr. Yüksel SOYKAN'a , tez konusunun seçiminden itibaren değerli vaktini esirgemeden bana ayıran Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN’e , başından beri her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$AL_p(\Omega)$	:	Bergman Uzayı
$\partial\Omega$	:	Ω nın sınırı
$\Delta.\ u$	:	$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}$ (Diverjans Operatörü)
Δu	:	$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}$ (Laplasyan Operatörü)
h	:	Harmonik fonksiyon
$H^m(\Omega)$	:	m. Mertebeden tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ait tüm fonksiyonların oluşturduğu küme
$(.,.)$	:	İç çarpım
LBB	:	Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi koşulu (inf-sup koşulu)
$L^2(\Omega)$	:	Ω bölgesinde Lebesgue anlamında karesi integrallenebilen tüm fonksiyonlar cümlesi
$\lambda_{\min}$	:	Minimal Özdeğer
$\nabla\ p$	:	$(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z})=\mathrm{i}\frac{\partial p}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial p}{\partial y}+\mathrm{k}\frac{\partial p}{\partial z}$ (Gradyant Operatörü)
$\nabla\times$v	:	$(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k)\times(v_1 i+v_2 j+v_3 k)$ (Rotasyon Operatörü)
$\lVert\cdot\rVert$	:	Norm
Ω	:	$\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d=2$ ya da $d=3$
ϕ	:	Özfonksiyon
ψ	:	Özfonksiyon
p	:	Basınç fonksiyonu
u	:	Hız fonksiyonu
v	:	Akışkan parametresi
$W^{m,p}(\Omega)$	:	Sobolev Uzayı

BÖLÜM 1

GİRİŞ-NOTASYON VE HAZIRLIK BİLGİLERİ

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu kısımda Spiegel (1959), Pommerenke (1991), Başkan (1996), Zsuppán (2008a) ve Soykan (2012) kaynaklarından yararlanılmıştır.

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla reel ve kompleks sayılar cismidir ve bu tezde ikisi için $\mathbb{F}$ gösterimi kullanılacaktır.

1.1 VEKTÖR KALKÜLÜS

∇ ile gösterilen vektör diferensiyel del operatörü

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \equiv i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde tanımlanır. Bu vektör operatörü olağan vektörlerinkine benzer özelliklere sahiptir. ∇ operatörü nabla olarakta bilinir.

GRADYANT. $\phi(x, y, z)$, uzayın kesin bir bölgesi içerisindeki her (x, y, z) noktasında tanımlı ve diferansiyellenebilir olsun (yani ϕ bir diferansiyellenebilir skaler alanı tanımlasın). $\nabla\phi$ ya da $\operatorname{grad}\phi$ olarak yazılan ϕ nin gradyantı

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k$$

ile tanımlanır. Dikkat edelim ki $\nabla\phi$ bir vektör alanıdır. $\nabla\phi$ nin bir a birim vektörü yönündeki bileşeni $\nabla\phi.a$ ile verilir ϕ nin a yönündeki yönlü türevi denir. Fiziksel olarak bu, a yönündeki (x, y, z) noktasında ϕ nin değişim oranıdır.

DİVERJANS. $v(x, y, z) = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ uzayın kesin bir bölgesi içerisindeki her (x, y, z) noktasında tanımlı ve diferansiyellenebilir olsun (yani v bir diferansiyellenebilir vektör alanı tanımlar). $\nabla.v$ ya da $\operatorname{div} v$ olarak yazılan v nin diverjansı

$$\begin{aligned}\nabla.v &= \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right).(v_1 i + v_2 j + v_3 k) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $A.B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ ile benzer olduğuna dikkat edelim. Ayrıca $\nabla.v \neq v.\nabla$ dır.

ROTASYON. Eğer $v(x,y,z)$ diferansiyellenebilir bir vektör alanı ise o zaman $\nabla \times v$, curl v ya da rot v olarak yazılan v nin rotasyonu

$$\begin{aligned}
\nabla \times v &= \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right) \times (v_1 i + v_2 j + v_3 k) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k \\
&= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) k
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

LAPLASYAN

Bir u skaler fonksiyonunun Laplasyanı $\Delta \mathbf{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = \nabla^2 \mathbf{u}$ dır. Bir vektör fonksiyonunun Laplasyanı bir bileşen olarak anlaşılır (kartezyen koordinatlar kullanılıyor ise).

∇ yi içeren formüller. Eğer (x,y,z) noktasında A ve B, diferansiyellenebilir vektör fonksiyonları ve ϕ ve ψ, diferansiyellenebilir skaler fonksiyonlar ise o zaman

1.$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ ya da $\operatorname{grad}(\phi + \psi) = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{grad}\psi$

2.$\nabla.(A + B) = \nabla.A + \nabla.B$ ya da $\operatorname{div}(A + B) = \operatorname{div}A + \operatorname{div}B$

3.$\nabla \times (A + B) = \nabla \times A + \nabla \times B$ ya da $\operatorname{curl}(A + B) = \operatorname{curl}A + \operatorname{curl}B$

4.$\nabla.(\phi A) = (\nabla\phi).A + \phi(\nabla.A)$

5.$\nabla \times (\phi A) = (\nabla\phi) \times A + \phi(\nabla \times A)$

6.$\nabla.(A \times B) = B.(\nabla \times A) - A(\nabla \times B)$

7.$\nabla \times (A \times B) = (B.\nabla)A - B(\nabla.A) - (A.\nabla)B + A(\nabla.B)$

8.$\nabla(A.B) = (B.\nabla)A + (A.\nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B)$

9.$\nabla.(\nabla\phi) \equiv \nabla^2\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

10.$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$, ϕ nin gradyantının rotasyonu sıfırdır.

11.$\nabla.(\nabla \times A) = 0$, A nın rotasyonunun diverjansı sıfırdır.

12.$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla.A) - \nabla^2 A$

1.2 FONKSİYON UZAYLARI

1.2.1 L^P UZAYLARI

$1 \leq p < \infty$ için $dA = dxdy$ alışılmış düzlemsel Lebesque ölçümüne göre Ω üzerinde p. kuvveti integrallenebilir fonksiyonların uzayını $L^p(\Omega)$ ile göstereceğiz. Bir $f \in L^p(\Omega)$ fonksiyonunun normu $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, dA\right)^{1/p}$ dir. $dA = dxdy$ alışılmış düzlemsel Lebesque ölçümüne göre Ω üzerinde karesi integrallenebilir olan tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayını $L^2(\Omega)$ ile göstereceğiz. $L^2(\Omega)$ üzerinde iç çarpım $f,\ g \in L^2(\Omega)$ için

$$(f, g) := \int_\Omega f\overline{g} dA$$

ile tanımlıdır ve bu iç çarpımın indirgediği metrik ile $L^2(\Omega)$ bir tam Hilbert uzayıdır. Bir $f \in L^2(\Omega)$ fonksiyonunun normu $\|f\|_2 := \left(\int_\Omega |f|^2 \, dA\right)^{1/2}$ dir.
$L_{2,0}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, Ω üzerinde sıfır integralli fonksiyonların alt uzayıdır.

1.2.2 SOBOLEV UZAYLARI

Tanım 1.2.1 *$m \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. O zaman $W^{m,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$ olan $\forall\alpha$ için*

$$D^\alpha f \in L^p(\Omega)$$

olacak şekildeki bütün $f \in L^p(\Omega)$ fonksiyonlarının uzayını gösterir. Yani,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha \text{ için } |\alpha| \leq m\}$$

dir. Burada

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i,\ D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$$

ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ standart çoklu-indeks notasyonunu kullanırız. Aşağıdaki normlar $W^{m,p}(\Omega)$ üzerinde tanımlanabilir.

(i) $p < \infty$ ise o zaman $\|f\|_{m,p}$

$$\|f\|_{m,p} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p\right]^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır.

(ii) $p = \infty$ ise o zaman $\|f\|_{m,\infty}$

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

şeklinde tanımlanır.

(iii) Eğer $p = 2$ ise o zaman $(f, g)_m$ iç çarpımı,

$$\|f\|_{m,2} = \left[\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_2^2 \right]^{1/2}$$

normu ile

$$(f, g)_m = \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha f, D^\alpha g)$$

şeklinde tanımlanır.

(iv) $p = 2$ için

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

yazarız. Yani $H^m(\Omega)$, $|\alpha| \le m$ olan $\forall \alpha$ için $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$ olacak şekildeki bütün $f \in L^p(\Omega)$ fonksiyonlarının uzayını gösterir.

Örnek 1.2.2 *Bu tanımların bazı özel durumlarını verelim.*

(i) $m = 0$,

$$\|f\|_{0,p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dA \right)^{1/p}$$

dir.

(ii) $m = p = 1$,

$$\|f\|_{1,1} = \left(\int_\Omega \left(|f| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \right) dA \right)$$

dir.

(iii) $m = 1$,

$$\|f\|_{1,p} = \left[\int_\Omega \left(|f|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^p \right) dA \right]^{1/p}$$

dir.

(iv) $m = 2$,

$$\|f\|_{2,p} = \left[\int_\Omega \left(|f|^p + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^p + \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|^p\right) dA\right]^{1/p}$$

dir.

(v) $m = 2$ için $L^2(\Omega)$ içindeki iç çarpım

$$\|f\|_2 = \left[\int_\Omega \left(|f|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2\right) dA\right]^{1/2}$$

normu ile ilişkili

$$(f,g)_2 = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) dA$$

dir.

1.2.3 HARDY UZAYLARI

Tanım 1.2.3 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, *kompleks düzlem içindeki açık birim disk ve* $1 \leq p < \infty$ *olsun.*

$$N_p(f) = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}$$

olmak üzere $H^p(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ analitik, } N_p(f) < \infty\}$ *tanımını yapalım. Benzer şekilde* $p = \infty$ *için* $H^\infty(\mathbb{D})$ *uzayı*

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \left\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ analitik, } \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty\right\}$$

ile tanımlanır. Toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında $H^p(\mathbb{D})$ *uzayı bir kompleks vektör uzaydır ve bu uzaya Hardy uzayı adı verilir.*

Burada $H^p(\mathbb{D})$ uzayının vektör uzay işlemleri $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(\alpha f)(x) = \alpha . f(x)$

ile tanımlıdır. Kolayca görüleceği gibi $1 \leq s < p < \infty$ için

$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$

dir.

Uyarı 1.2.4 *Herhangi bir $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ için ve herhangi bir $0 \leq r < 1$ için*

$$f_r(\theta) = f\left(re^{i\theta}\right) \tag{1.1}$$

ile tanımlı $f_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve ayrıca m, $[0, 2\pi]$ üzerindeki Lebesque ölçümü olmak üzere her $E \subseteq [0, 2\pi]$ için $\mu(E) = (1/(2\pi))\, m(E)$ Lebesque ölçümü ile tanımlı μ ölçümünü göz önüne alalım. O halde

$$\|f_r\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f_r|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}$$

dir. Buradan şu sonuca ulaşırız:

$f \in H^p(\mathbb{D})$ *ancak ve ancak* $N_p(f) = \sup\limits_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p < \infty.$

Önerme 1.2.5 $1 \leq p < \infty$ *için* $(H^p(\mathbb{D}), N_p)$ *bir normlu uzaydır.*

Notasyon 1.2.6 *Bazen $N_p(f)$ normu için $\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = N_p(f)$ notasyonunu da kullanacağız.*

Önerme 1.2.7 *Eğer f, $\mathbb{D}$ üzerinde analitik, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ise o zaman $f \in H^2(\mathbb{D})$ dır ancak ve ancak $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ dir. Bu durumda*

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \left\|(a_n)_{n\geq 0}\right\|_{\ell^2(\mathbb{N}_0)}$$

dir.

Teorem 1.2.8 $(H^2(\mathbb{D}), N_2)$ *bir Hilbert uzayıdır.*

$$h(f) = (a_n)_{n\geq 0}, \qquad \left(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$$

ile tanımlı $h : H^2(\mathbb{D}) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$ fonksiyonu bir Hilbert uzay izometrik izomorfizmasıdır.

Önerme 1.2.9 *N_2 normunu indirgeyen iç çarpım $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ için*

$$(f, g)_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1,\, r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\, d\theta$$

ile tanımlıdır. Bu durumda $N_2(f) = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \sqrt{(f, f)}$ olmak üzere

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1,\, r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

olur.

Sonuç 1.2.10 $f \in H^2(\mathbb{D})$, *(* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*) için*

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} &= \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \\
&= \lim_{r \to 1,\ r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta
\end{aligned}
$$

dır.

Teorem 1.2.11 *Her bir* $z_0 \in \mathbb{D}$ *için* $f \mapsto f(z_0)$ *fonksiyonu* $H^2(\mathbb{D})$ *üzerinde sınırlı lineer bir fonksiyoneldir.*

Tanım 1.2.12 $z_0 \in \mathbb{D}$ *için*

$$k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0}^n z^n = \frac{1}{1 - \overline{z_0} z}$$

ile tanımlı k_{z_0} *fonksiyonuna* $H^2(\mathbb{D})$ *içinde* z_0 *için doğuran çekirdek adı verilir.*

Açıkça, $k_{z_0} \in H^2(\mathbb{D})$ dir. Nokta değerlendirmeleri doğuran çekirdeklerle iç çarpım olarak temsil edilirler.

Teorem 1.2.13 $z_0 \in \mathbb{D}$ *ve* $f \in H^2(\mathbb{D})$ *için* $f(z_0) = (f, k_{z_0})$ *dir ve* $\|k_{z_0}\| = \left(1 - |z_0|^2\right)^{-1/2}$ *dir.*

Teorem 1.2.14 $H^2(\mathbb{D})$ *uzayı içinde* $\{f_n\} \to f$ *ise o zaman* $\mathbb{D}$ *nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgün (yakınsak) olarak* $\{f_n\} \to f$ *dir .*

1.2.4 BERGMAN UZAYLARI

Tanım 1.2.15 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *boştan farklı bir açık küme ve* $1 \le p < \infty$ *olsun.*

$$AL_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ analitik ve } \iint_{\Omega} |f(x,y)|^p \, dxdy \ < \infty \right\}$$

tanımını yapalım. Toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında $AL_p(\Omega)$ *uzayı bir kompleks vektör uzayıdır ve bu uzaya Bergman uzayı adı verilir.*

Önerme 1.2.16

$$A_p(f) = \left(\iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|^p \, dxdy \right)^{1/p}$$

ile tanımlı $A_p : AL_p(\Omega) \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ *fonksiyonu* $AL_p(\Omega)$ *üzerinde bir norm tanımlar.*

Notasyon 1.2.17 *Bazen* $A_p(f)$ *normu için*

$$\|f\|_{AL_p(\Omega)} = A_p(f)$$

notasyonunu da kullanacağız.

Teorem 1.2.18

$$(f,g) = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy$$

ile tanımlı $(.,.) : AL_2(\Omega) \times AL_2(\Omega) \to \mathbb{C}$ *fonksiyonu* $AL_2(\Omega)$ *üzerinde bir iç çarpım tanımlar ve* $(AL_2(\Omega), (.,.))$ *bir Hilbert uzayıdır.*

Önerme 1.2.19 $\Omega = \mathbb{D}$ *kompleks düzlem içindeki birim yuvar olsun.*

(a) *Eğer* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *analitik, her* $z \in \mathbb{D}$ *için* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *ise o zaman*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(x,y)|^2 \, dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi |a_n|^2}{n+1}$$

dir.

(b)

$$e_n(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} z^n, \; n = 0,1,2,...$$

dizisi $AL_2(\mathbb{D})$ *için bir ortonormal tabandır.*

Uyarı 1.2.20 $f \in AL_2(\mathbb{D})$, *her* $z \in \mathbb{D}$ *için* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *nin*

$$e_n(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} z^n, \; n = 0,1,2,...$$

tabanına göre Fourier katsayıları

$$c_n = (f, e_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}} a_n$$

dir ve Fourier serisi

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n)\, e_n$$

formundadır yani

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n)\, e_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}} a_n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} z^n$$

dir.

Önerme 1.2.21

$$h(f) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}} a_n \right)_{n \geq 0}, \qquad \left(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$$

ile tanımlı $h : AL_2(\mathbb{D}) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$ fonksiyonu bir Hilbert uzay izometrik izomorfizmasıdır.

$AL_2(\Omega)$ nin doğuran çekirdeğini $K_\Omega(z, \varsigma)$ ile göstereceğiz yani her $f \in AL_2(\Omega)$ için

$$f(z) = \int_\Omega K_\Omega(z, \varsigma)\, f(\varsigma)\, dA(\varsigma) \tag{1.2}$$

dir. $K_\Omega(z, \varsigma)$ doğuran çekirdeğine Ω bölgesinin Bergman çekirdeği denir.

Bergman çekirdeği onun birinci değişkenine göre analitiktir, ikinci değişkene göre eşlenik analitiktir ve $K_\Omega(z, \varsigma) = \overline{K_\Omega(\varsigma, z)}$ özelliğine sahiptir. $\mathbb{D}$ birim diskinin Bergman çekirdeği

$$K_{\mathbb{D}}(z, \varsigma) = \frac{1}{\pi (1 - z\overline{\varsigma})^2}$$

dir ve $g : \mathbb{D} \to \Omega$ konform dönüşümü altında

$$K_{\mathbb{D}}(z, \varsigma) = g'(z)\, K_\Omega(g(z), g(\varsigma))\, \overline{g'(\varsigma)} \tag{1.3}$$

dönüşüm formülüne sahibiz (daha detaylı bilgi için Bergman and Schiffer (1951) e bakınız).

1.2.5 BAZI DİZİ UZAYLARI

Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Bu fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz.

- $\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n)$, $n > 0$ dır.

- $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2!$, $\Gamma(4) = 3!$ ve genel olarak $\Gamma(n+1) = n!$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dir. Bu nedenle bu fonksiyona faktöriyel fonksiyon ismide verilir.

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ dir.

Gamma fonksiyonu yardımı ile bazı dizi uzaylarını tanıtacağız. Bu uzaylar sonsuz matrisler ile ilgilendiğimizde ele alınacaklar (bakınız Kısım 3.2).

$\alpha > 0$ için, dizilerin

$$\ell_{(2,-\alpha)} := \left\{ p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)^T \mid \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)} |p_n|^2 < \infty \right\}$$

uzayını ele alalım. $p, q \in \ell_{(2,-\alpha)}$ için

$$(p,q)_{-\alpha} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)} p_n \overline{q}_n$$

alışılmış iç çarpımı ile $\ell_{(2,-\alpha)}$ bir Hilbert uzayıdır ve p nin normu $\|p\|_{-\alpha} := \sqrt{(p,p)_{-\alpha}}$ ile tanımlanır. Eğer $\alpha > 0$ ve $p, q \in \ell_{(2,-\alpha)}$ için

$$p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad \text{ve} \quad q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \ \ (z \in \mathbb{D})$$

denirse $\ell_{(2,-\alpha)}$ nin iç çarpımı

$$(p,q)_{-\alpha} = \alpha \int_{\mathbb{D}} p(z) \overline{q(z)} \left(1 - |z|^2\right)^{\alpha-1} dA(z)$$

integrali ile ifade edilebilir. Bu nedenle, $\ell_{(2,-\alpha)}$, bu integralin sonlu olduğu (ve ağırlıklı Bergman uzayları olarak adlandırılan) birim disk $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı analitik fonksiyonların Hilbert uzayı ile izometriktir.

Şimdi $\alpha := 1$ için

$$(p_0, p_1, p_2, \ldots)^T \in \ell_{(2,-1)} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \in AL_2(\mathbb{D})$$

ifadesini elde ederiz.

$\alpha \geq 0$ için

$$\ell_{(2,\alpha)} := \left\{ p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)^T \mid \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\Gamma(1+\alpha)} |p_n|^2 < \infty \right\}$$

olsun. $\ell_{(2,\alpha)}$ nın iç çarpımı ($\ell_{(2,-\alpha)}$ nin iç çarpımına benzer olarak)

$$(p,q)_\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\Gamma(1+\alpha)} p_n \overline{q}_n$$

şeklinde tanımlanır. $\ell_{(2,-\alpha)}$ uzayları ağırlıklı Bergman uzaylarına karşılık gelir ve bu nedenle $\ell_{(2,\alpha)}$ da $\mathbb{D}$ üzerindeki diğer holomorfik fonksiyonların uzayına karşılık gelir.
$\alpha = 0$ durumunda $\ell_{(2,0)}$ uzayı $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayına karşılık gelir. $\alpha = 1$ için $\ell_{(2,1)}$ uzayı Dirichlet uzayına karşılık gelir.
$\alpha > 0$ olmak üzere $p \in \ell_{(2,-\alpha)}$ ve $q \in \ell_{(2,\alpha)}$ için

$$|(p,q)_0|^2 \leq (p,p)_{-\alpha} (q,q)_\alpha$$

anlamında $\ell_{(2,\alpha)}$ uzayı $\ell_{(2,-\alpha)}$ nın dualidir.

1.3 KOMPLEKS ANALİZ

Bu tezde $\mathbb{D}$ ve $\partial\mathbb{D}$, sırasıyla kompleks düzlemin merkezi orijinde olan açık birim diski ve birim çemberi gösterecektir. Yani $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ve $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dir.
Kompleks düzlemde bağlantılı açık kümeye bölge denir. Eğer bir bölgenin sınırı n tane bağlantılı ayrık alt kümeden oluşuyorsa, bölge $n-$bağlantılıdır denir. Özel olarak basit bağlantılı (1-bağlantılı) bölgenin sınırı, bir tane bağlantılı kümeden oluşur.Yani, kabaca sınır ya bir eğri ya da bir noktadır.

Tanım 1.3.1 *Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da analitiktir (ya da holomorfiktir) denir. Eğer bir f karmaşık fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f, S üzerinde analitiktir, denir.*

Tanım 1.3.2 *Bir Ω bölgesinde bire-bir ve analitik bir f fonksiyonuna, bu bölgede ünivalent, bazende schliht fonksiyon denir.*

Teorem 1.3.3 *$w = f(z)$, z_0 da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise, z_0 ın bir komşuluğunda f birebirdir.*

Teorem 1.3.4 *$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve bire-bir ise, bütün $z \in \Omega$ noktaları için $f'(z) \neq 0$ dır.*

Tanım 1.3.5 *Ω, $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in \Omega$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0 da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa (iki diferansiyellenebilir yay arasındaki açı korunuyorsa) f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in \Omega$ noktasında f konform ise f, Ω de konformdur denir.*

Teorem 1.3.6 *f, bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 da bir konform dönüşümdür.*

Teorem 1.3.7 *(Riemann Dönüşüm Teoremi): Ω en az iki sınır noktası bulunan basit bağlantılı bir bölge olsun. Ω yı $\mathbb{D} = D(0,1)$ üzerine bire-bir olarak resmeden bir f analitik fonksiyonu vardır.*

Riemann Dönüşüm Teoremi aşağıdaki formda da verilebilir:
$G \subsetneqq \mathbb{C}$ bir basit bağlantılı bölge ve $w_0 \in G$, $0 \leq \alpha < 2\pi$ ise o zaman $f(0) = w_0$ ve $\arg f'(0) = \alpha$ olacak şekilde $\mathbb{D}$ nin G üzerine bir tek f konform dönüşümü vardır.
Sadece, Riemann dönüşümünün tersi olan ve $\mathbb{D}$ içinde univalent olan $g : \mathbb{D} \to \Omega$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alacağız. Bu durumda $\Omega = g(\mathbb{D})$ bir schlicht bölgedir.
Bunun yanı sıra, Ω nın çeşitli geometrik özellikleri (sınır regülerliği, sınırlılığı vb.) Ω nın g konform dönüşümünün analitik özellikleri ile ($\partial\mathbb{D}$ üzerinde sınır davranışları, sınırlılık vb.) yakından ilişkilidir.

Tanım 1.3.8 *$[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir*

$$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğridir, denir. Yani C eğrisi, bir

$$C : \varphi(t), \; a \leq t \leq b \;\; \text{ve } \varphi, \;\; [a,b] \;\text{üzerinde sürekli} \tag{1.4}$$

parametrik temsili ile verilir. Burada $\varphi(a)$ ve $\varphi(b)$ noktalarına sırayla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir. Eğer bütün t ler için $\varphi(t) \in E$ ise $C \subset E$ yazarız. Bir φ eğrisi verildiğinde $\varphi(a) = \varphi(b)$ ise φ ya kapalı eğridir, denir. Bir kapalı eğri, ayrıca

$$C : \psi(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T} \;\; \text{ve } \psi, \; \mathbb{T} \;\text{üzerinde sürekli} \tag{1.5}$$

olarak parametreleştirilebilir.Eğer φ eğrisinin φ' türevi var ve sürekli ise φ diferansiyellenebilir eğri (yay) diye adlandırılır. φ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\varphi'(t) \neq 0$ ise φ ya düzgün eğri (regüler eğri) denir. $[a, b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç φ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda φ nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar φ' nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse φ parçalı diferansiyellenebilir eğridir, denir. φ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer her $t \in [a, b]$ için $\varphi'(t) \neq 0$ ise φ parçalı düzgün eğridir, denir. Bir φ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ oluyorsa basit eğridir denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. φ basit bir eğri ve $\varphi(a) = \varphi(b)$ ise φ ya basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

Eğer (1.4), bire-bir bir φ fonksiyonu için sağlanırsa C ye bir *Jordan yayı* denir ve eğer (1.5), bire-bir bir ψ için sağlanıyorsa C ye bir *Jordan eğrisi* denir. Böylece bir Jordan eğrisi kapalıdır oysaki bir Jordan yayı farklı uç noktalara sahiptir. Bir açık *Jordan yayı*, bir

$C : \varphi(t), a < t < b$ ve φ, (a, b) üzerinde bire-bir ve sürekli

parametrelenişine sahiptir.

Bir G bölgesinin sınırı bir J Jordan eğrisi ise G ye bir *Jordan* bölgesi denir.

$C : \varphi(t), \ a \leq t \leq b$, $\mathbb{C}$ içinde bir eğri olsun. C nin uzunluğu

$$\Lambda(C) = \sup \sum_{v=1}^{n} |\varphi(t_v) - \varphi(t_{v-1})|$$

ile tanımlanır, burada supremum, her $n \in \mathbb{N}$ için her $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışı üzerinden alınmaktadır. Eğer $\Lambda(C) < \infty$ ise C ye düzeltilebilirdir (rectifiable) denir. Eğer φ parçalı sürekli diferensiyellenebilir ise

$$\Lambda(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt$$

dir.

Caratheodory'nin teoremine göre, eğer Ω , $\mathbb{C}$ düzleminin basit bağlantılı bir bölgesi ise ve $\partial\Omega$ sınırı Jordan eğrisi (bu durumda Ω bir Jordan bölgesidir) ise o zaman g^{-1} Riemann dönüşümü Ω dan $\mathbb{D}$ ye sınıra sürekli genişler ve ayrıca g, $\mathbb{D}$ yi bir Ω Jordan bölgesi üzerine (örten) konform olarak dönüştürürse bu durumda $\partial\Omega$ sınırı düzeltilebilirdir ancak ve ancak g dönüşümünün g' türevi $H^1(\mathbb{D})$ Hardy uzayına aittir.

Tanım 1.3.9 *Eğer bir Jordan eğrisi, bazı sabit* $n = 1, 2, \ldots$ *ve* $0 < \alpha < 1$ *için,* n *kez sürekli türevlenebilir olan bir* $\omega(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ *parametrelenişine sahip ise ve* $\omega'(t) \neq 0$ *ve*

$$\left|\omega^{(n)}(t_1) - \omega^{(n)}(t_2)\right| \leq C\left|t_1 - t_2\right|^{\alpha} \tag{1.6}$$

özellikleri sağlanırsa bu Jordan eğrisi $C^{n,\alpha}$ *sınıfındandır (ya da sınıfına aittir) denir.*

(1.6) koşulu aslında α üstlü bir Hölder koşuludur.

BÖLÜM 2

STOKES PROBLEMİ VE BAZI ÖZEL OPERATÖRLER

Bu bölümde Zsuppán (2008a) dan yararlanacağız ve Stokes problemini, Schur tamamlayıcı operatörünü, Friedrichs operatörünü ve bölgelerin inf-sup sabitini tanıtacağız ve aralarındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

2.1 STOKES PROBLEMİ VE SCHUR TAMAMLAYICI OPERATÖRÜ

Ω düzlemsel bölgesi üzerinde birinci tür Stokes problemi adı verilen hız-basınç değişkenli bir sınır-değer problemini gözönüne alalım:

$$-\Delta \overrightarrow{u} + \operatorname{grad} p = \overrightarrow{f}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{u} = 0, \qquad \Omega \text{ da} \tag{2.2}$$

$$\overrightarrow{u} = 0, \qquad \partial\Omega \text{ üzerinde} \tag{2.3}$$

Burada $\nabla = \operatorname{grad}$ dır, Δ, bir skaler fonksiyonun Laplasyanıdır ve div, bir vektör fonksiyonunun alışılmış diverjansını tanımlar. Bir vektör fonksiyonunun Laplasyanı bir bileşen olarak anlaşılır (kartezyen koordinatlar kullanılıyor ise).
Üstteki formülde amaç Ω içinde sürekli olarak verilen f fonksiyonu için, Ω içinde iki kez sürekli diferansiyellenebilen, $\partial\Omega$ üzerine sürekli genişlemeye sahip olan

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)^T$$

ile tanımlı bir $\overrightarrow{u} = u(x)$ hız (velocity) vektör fonksiyonunu ve Ω içinde sürekli diferansiyellenebilen bir p basınç (pressure) fonksiyonunu bulmaktır. Dikkat edelim ki, bir normalleştirme olmaz ise p basıncı ancak bir ilave sabite bağlı olarak belirlenir.
Aynı problem varyasyonel formülü içinde de formüle edilebilir. Yani verilen bir $\overrightarrow{f} \in L^2(\Omega)^2$ (bu demektir ki f nin her bir bileşeni $L^2(\Omega)$ ya aittir) için

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})_1 + (-\operatorname{div} \overrightarrow{u}, p) = \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{v}\right), \text{her } \overrightarrow{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^2 \text{ için} \tag{2.4}$$

$$(-\operatorname{div} \overrightarrow{u}, q) = 0, \text{her } q \in L_{2,0}(\Omega) \text{ için} \tag{2.5}$$

olacak şekilde $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)^T \in W_0^{1,2}(\Omega)^2$ (bu demektir ki $\overrightarrow{u}$ nun her bir bileşeni $W_0^{1,2}(\Omega)$ ye aittir) ve $p \in L_{2,0}(\Omega)$ arıyoruz. Burada, $L^2(\Omega)$ nın $(.,.)$ iç çarpımını göz önüne alarak, vektör fonksiyonları sırasıyla $L^2(\Omega)^2$ ve $W_0^{1,2}(\Omega)^2$ uzaylarından alınmak üzere $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$ iç çarpımını ve

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})_1 := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dA$$

iç çarpımını kullanıyoruz.

$$\beta^2(\overrightarrow{u}, p) := \frac{(\operatorname{div} \overrightarrow{u}, p)^2}{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})_1 (p, p)}$$

fonksiyonelini tanımlayalım. inf-sup koşulu (ya da Ladyzhenskaya (1969), Babuska (1973), Brezzi (1974) makalelerinden dolayı LBB koşulu)

$$\inf_{0 \neq p \in L_{2,0}(\Omega)} \sup_{0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega)^2} \frac{(\operatorname{div} u, p)^2}{(u, u)_1 (p, p)} = \beta_0^2(\Omega) > 0 \tag{2.6}$$

olarak yazılır ve (2.4) ün kararlı (stable) çözümünü garantiler.

Tanım 2.1.1 $\beta_0(\Omega) > 0$ *sabitine inf-sup sabiti denir ve bu sabit sadece* Ω *nın şekline bağlıdır.*

Önerme 2.1.2 $0 < \beta_0(\Omega) \leq 1$ *dir.*

Üstteki önermenin ispatı Stoyan (1999) da bulunabilir.
Ω üzerine konulan uygun koşullar altında (2.6) nın sağlandığını görmek için Nečas (1965) makalesine bakılabilir. Girault (1986) ve Brezzi (1991) içinde bu koşulun detaylı bir çalışması bulunmaktadır.

Tanım 2.1.3 Δ_0, *homojen Dirichlet sınır değerlerine karşılık gelen vektör Laplace operatörü olmak üzere, Schur tamamlayıcısı ya da Schur tamamlayıcı operatörü*

$$\mathcal{S} = \operatorname{div} \Delta_0^{-1} \operatorname{grad} \tag{2.7}$$

ile tanımlıdır.

Stokes probleminin çözümü için Schur tamamlayıcı operatörü yardımcı olur. (2.7) operatörü Gaultier (1992), Crouzeix (1997) ve Stoyan (1999) da incelenmiştir.

$\Delta u = \mathrm{grad}\, p, \quad \mathrm{div}\, u = \lambda p$ (Ω içinde) ve $u = 0$ ($\partial\Omega$ üzerinde)

ile verilen Schur tamamlayıcı operatörünün özdeğerleri $[0,1]$ aralığındadır ve $L^2(\Omega)$ uzayının, üç ortogonal alt uzayının, bir

$$L^2(\Omega) = P_0 \oplus P_1 \oplus P_\beta \tag{2.8}$$

parçalanışı ile yakından ilişkilidir, bakınız Stoyan (1999). Burada ki ortogonallik $L^2(\Omega)$ nin iç çarpımının belirlediği ortogonalliktir.
P_0 sabit fonksiyonların bir boyutlu uzayı olmak üzere ve P_β, $(.,.)_1$ iç çarpımına göre ortogonal bir

$$W_0^{1,2}(\Omega)^2 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_\beta \tag{2.9}$$

parçalanışı ile ilişkili harmonik fonksiyonlardan oluşmak üzere, bu alt uzaylar

$$P_0 := \ker \mathrm{grad}, \quad P_1 := \mathrm{div} \ker \mathrm{rot} = \mathrm{div}\, V_1 \text{ ve } P_\beta = \mathrm{div}\, V_\beta$$

ile verilir. Burada

$$\begin{aligned} V_0 \ &: = \ker \mathrm{div} = \left\{ \overrightarrow{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^2 : \mathrm{div}\, \overrightarrow{v} = 0 \right\}, \\ V_1 \ &: = \ker rot = \left\{ \overrightarrow{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^2 : rot\, \overrightarrow{v} = 0 \right\} \end{aligned}$$

dır ve $rot\, \overrightarrow{v}$, $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ iç çarpımıdır.
(2.9) parçalanışı Crouzeix (1974) ve Velte (1990) da elde edilmiştir ve buradaki üçüncü V_β ortogonal alt uzayı karakterize edilmiştir ve ikili harmonik fonksiyonlardan oluşur (ayrıca Stoyan (1999) da Lemma 1 e bakınız). Her ikisi de Crouzeix-Velte parçalanışı olarak adlandırılır.

Önerme 2.1.4 $\Delta_0^{-1}\,\mathrm{grad}$ *operatörü* P_1 *ve* P_β *dan sırasıyla* V_1 *ve* V_β *üzerine (örten) bir izomorfizimdir ve ayrıca* div, V_1 *ve* V_β *dan* P_1 *ve* P_β *üzerine (örten) bir izomorfizmdir ve her ikisi de ortogonalliği korur.*

Üstteki önermenin ispatı Girault (1986) ve Stoyan (1999) da bulunabilir. Ayrıca Stoyan (1999) da

$$P_1 = \mathrm{div}\, V_1 = rot V_0 \perp rot V_\beta = \mathrm{div}\, V_\beta = P_\beta$$

eşitlikleri de verilmiştir.

$\mathcal{S}$ Schur tamamlayıcı operatörünün özdeğerlerine karşılık gelen özuzayları $L^2(\Omega)$ nın Crouzeix-Velte parçalanışının altuzayları ile ve ayrıca inf-sup sabitine ilişkilidir.

Sıfır ve birim özdeğeri sırasıyla P_0 sabit basınçlarına ve serbest-rotasyon hızlarının diverjansları olan P_1 basıncına karşılık gelir, böylece $\mathcal{S}_{|P_1}$ kısıtlanışı birim operatördür.

Üçüncü P_β altuzayı, $(0,1)$ de değerler alan özdeğerlere karşılık gelen $\mathcal{S}$ nin özfonksiyonları tarafından gerilir, bakınız Stoyan (1999). $\beta_0(\Omega)$, inf-sup sabitinin karesi özdeğerler arasında en küçüğüdür; λ ile birlikte $1-\lambda$, $\mathcal{S}_{|P_\beta}$ kısıtlanışının bir özdeğeridir, bakınız Velte (1996). Bu kısıtlanış operatörünün özdeğerleri için aşağıdaki önermeye sahibiz.

Önerme 2.1.5

$$\beta_0^2(\Omega) \leq \lambda\left(\mathcal{S}_{|P_\beta}\right) \leq 1-\beta_0^2(\Omega) \tag{2.10}$$

Üstteki önermenin ispatı Crouzeix (1997) ve Stoyan (1999) da bulunabilir.

Schur tamamlayıcı operatörünün özdeğer ve özuzay yapısı (özellikle inf-sup sabiti) Stokes probleminin nümerik çözümünde çok önemlidir: örneğin, Stokes problemi ile ve ayrıca ayrık Stokes, Navier-Stokes problemleri ile ilişkili kararlılık ve hata tahminleri (error estimates). İteratif metodun hızlandırılması için bu bilginin kullanımı Stoyan (2000a) da incelenmiştir. Ayrıca bakınız Dobrowolski and Stoyan (2001) ve Stoyan and Strauber (2004).

Önemine rağmen, özel bölgeler için inf-sup sabitinin kesin değerleri sadece birkaç durumda bilinmektedir: elips için Horgan (1983), üç boyutlu uzay durumunda küre için Velte (1990), (şerit boyunca periyodikliği kabul ederek) sonsuz bir şerit için Maday (1993), çember ve halka için Chizhonkov (1995) e bakınız. Birçok bölgenin inf-sup sabitleri için bazı alt ve üst sınırlar Stoyan (1999) da elde edilmiştir.

Kanal ve plaka bölgeler için sonuçlar Costabel and Dauge (2000), Dobrowolski (2003) ve Dobrowolski (2005) de elde edilmiştir ve Zimmer (1996) benzer çalışmayı içerir.

2.2 FRIEDRICHS OPERATÖRÜ

Bir başka önemli operatör Friedrichs (1937) içinde, düzlem esnekliğine (elasticity) uygulamalar için, K. Friedrichs tarafından tanıtılan Friedrichs operatörüdür.

Tanım 2.2.1 *Ω bölgesinin Friedrichs operatörü*

$$\mathcal{F} = \mathcal{P} \circ \mathcal{C} : AL_2(\Omega) \to AL_2(\Omega) \tag{2.11}$$

ile tanımlanır.

Burada $\mathcal{P}$, $L^2(\Omega)$ nın $AL_2(\Omega)$ üzerine ortogonal projeksiyonudur ve Bergman projeksiyonu olarak adlandırılır ve $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}f := \overline{f}$ ile tanımlı konjügansi (conjugacy) operatörüdür. $\mathcal{F}$ operatörü ayrıca, Bergman çekirdeği kullanılarak,

$$\mathcal{F} := AL_2(\Omega) \to AL_2(\Omega),\ \mathcal{F}(f)(z) = \int_\Omega K_\Omega(z,\varsigma)\overline{f(\varsigma)}dA(\varsigma) \tag{2.12}$$

ile verilen bir integral dönüşümü olarak ifade edilebilir.

Önerme 2.2.2 **(a)** *$\mathcal{F}$ Friedrichs operatörü eşlenik lineerdir yani $f, g \in AL_2(\Omega)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için*

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \overline{\lambda}\mathcal{F}(f) + \overline{\mu}\mathcal{F}(g)$$

dir.

(b)

$$\mathcal{T} := \mathcal{C} \circ \mathcal{F} \tag{2.13}$$

ile tanımlı $\mathcal{T}$ operatörü C-simetriktir yani

$$\mathcal{T} = \mathcal{C}\mathcal{T}^*\mathcal{C}$$

dir (bakınız Garcia (2007)). Burada $\mathcal{T}^*$, $(.,.)$ iç çarpımına göre $AL_2(\Omega)$ üzerinde tanımlı $\mathcal{T}$ operatörünün adjointini (eşleniğini) belirtir.

(c) *$\Omega = \mathbb{D}$ birim disk ise $\mathcal{F}$ Friedrichs operatörünün rankı birdir (bakınız Friedrichs (1937)) ve bu nedenle kompakttır.*

Fakat daha genel Ω bölgeleri için kompakt Friedrichs operatörü bile olmayabilir. $g : \mathbb{D} \to \Omega$ konform dönüşümünün terimleri içinde $\mathcal{F}$ nin kompaktlığı aşağıdaki Önerme 2.2.4 de olduğu gibi karakterize edilebilir.

Tanım 2.2.3 *$\mathcal{P}_{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}$ ile ilişkili Bergman projeksiyonu olmak üzere*

$$|z| \longrightarrow 1 \text{ iken } \left(1-|z|^2\right) f'(z) \longrightarrow 0$$

özelliğini sağlayan $\mathbb{D}$ üzerindeki analitik f fonksiyonların tamamının oluşturduğu uzayı $B_0(\mathbb{D})$ ile göstereceğiz. Bu uzaya küçük Bloch uzayı denir.

Aşağıdaki önerme Lin and Rochberg (1995) ten alınmıştır.

Önerme 2.2.4 (Lin-Rochberg) *Ω, $\mathbb{C}$ nin basit bağlantılı bir öz alt bölgesi ve g, $\mathbb{D}$ birim diskinden Ω üzerine (örten) bir konform dönüşümü olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$ kompakttır ancak ve ancak $\mathcal{P}_D\left(g'/\overline{g'}\right) \in B_0(\mathbb{D})$ dir.*

$\mathcal{F}$, aşağıdaki özdeğer probleminin temelindeki operatördür: Friedrichs (1937) çalışılan, her $g \in AL_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} fgdA = \mu \int_{\Omega} \overline{f}gdA \tag{2.14}$$

özelliğini sağlayan $f \in AL_2(\Omega)$ ve buna karşılık gelen $\mu \in \mathbb{C}$ yi bulmaktır çünkü $f, g \in AL_2(\Omega)$ için

$$(f, \mathcal{F}g) = (g, \mathcal{F}f) = \int_{\Omega} fgdA$$

dır, Friedrichs (1937) de Teorem 4 e bakınız. Bu özdeğer problemi, Friedrichs eşitsizliği adı verilen aşağıdaki önerme ile ilişkilidir.

Önerme 2.2.5 (Friedrichs, bakınız Friedrichs (1937)) *Ω sınırlı bölgesinin sınırı α_k, $0 < \alpha_k \leq 2\pi$, $1 \leq k \leq n$ iç açıları ile sonlu çoklukta (n) köşeli parçalı düzgün sınıra sahip olsun. O zaman her $f \in AL_{2,0}(\Omega)$ için*

$$\left|\int_{\Omega} f^2 dA\right| \leq \gamma_{\Omega} \int_{\Omega} |f|^2 dA \tag{2.15}$$

olacak şekilde pozitif bir $\gamma_{\Omega} < 1$ sabiti vardır

Bu yüzden $f \in AL_2(\Omega)$ için $\|\mathcal{F}(f)\| \leq \|f\|$ dir ve sınırlı bölge durumunda, 1 özdeş olarak birim 1 fonksiyonunu göstermek üzere, $\mathcal{F}(1) = 1$ dir. $\mathbb{C}$-lineer olan Friedrichs operatörünün karesi için

$$\left(f, \mathcal{F}^2 g\right) = (\mathcal{F}g, \mathcal{F}f) = \overline{(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)} = \overline{(g, \mathcal{F}^2 f)} = \left(\mathcal{F}^2 f, g\right)$$

bulunur ve özellikle, $\mathcal{I}$ birim operatörünü tanımlamak üzere $0 \leq \mathcal{F}^2 \leq \mathcal{I}$ yı sağlayan $AL_2(\Omega)$ üzerinde $\mathcal{F}^2$ self-adjoint olmasından

$$\left(f, \mathcal{F}^2 f\right) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}f)$$

elde ederiz. Bu yüzden ayrıca $\mathcal{F}^2$ nin karekökü tanımlanabilir ve $\mathcal{F}$ nin modülü olarak adlandırılır ve $|\mathcal{F}|$ ile gösterilir.

Friedrichs (1937) ye göre, Ω sınırlı bölgesinin $\mathcal{F}^2$ operatörü kompakt ise o zaman o, sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir, onun ilk özdeğeri 1 e eşittir (sabit 1 fonksiyonu ile gerilen özuzay) ve diğer tüm özdeğerler 1 den küçüktür, böylece bunların içinde en büyüğü, Önerme 2.2.5 den, γ sabitinin karesine eşittir.

$\mathcal{F}^2$ nin kompakt olmaması durumunda, $a_0 = \pi$ boyunca Önerme 2.2.5 in notasyonlarını kullanarak, $0 \leq k \leq n$ için $\left|\frac{\sin \alpha_k}{\alpha_k}\right|$ değerlerini içeren bir sürekli spektrum ortaya çıkar.

Friedrichs operatörünün daha başka özelliklerinin ayrıntılı bir çalışması için Lin and Rochberg (1995), Putinar and Shapiro (2000), Putinar and Shapiro (2001), Garcia (2007) ve orada verilen referanslara bakınız.

2.3 PROBLEMLER ARASINDA BAĞLANTI

Bu alt kısımda Friedrichs ve Schur tamamlayıcı operatörleri arasındaki bağlantıyı inceleyeceğiz. Bunu yapmak için bir önceki alt kısımda kullanılan notasyonları birleştirmeye ihtiyacımız var.

Reel vektör değişkenli $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)^T$ yerine $z = x_1 + x_2 i$ kompleks değişkenini kullanırız. Hız için vektör değerli $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) = (u_1(\overrightarrow{x}), u_2(\overrightarrow{x}))^T$ fonksiyonları $u(z) = u_1(z) + u_2(z)i$ kompleks değerli fonksiyonları ile yer değiştirilir. Skaler değerli fonksiyonlar (örneğin basınç için) reel değerli olanlar ile yer değiştirilir. Dahası, Nehari (1952) de olduğu gibi

$$\partial_z := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \text{ ve } \partial_{\overline{z}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

notasyonlarını kullanırız. Bu nedenle kompleks değerli bir $u = u_1 + iu_2$ fonksiyonu için diverjans ve rotasyon,

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2 \operatorname{Re} \partial_z u$$

ve

$$rot\ u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2 \operatorname{Im} \partial_z u$$

şeklinde verilir. Reel değerli bir p fonksiyonu için (kompleks değerli) gradyant

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y} = 2\partial_{\overline{z}} p$$

dir. Laplasyan $\Delta = 4\partial_z \partial_{\overline{z}} = 4\partial_{\overline{z}} \partial_z$ olarak ifade edilir.

Ω nın sınırı $W^{1,2}(\Omega)$ uzayının izi $L^2(\partial\Omega)$ da olacak kadar yeteri düzgünlükte olduğu kabul edilsin. Bu durum, parçalı C^2 düzgün sınıra sahip bölgeler için kesinlikle gerçeklenir (Adams 1975). $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{F}$ arasında bir bağlantı kurabilmek için aşağıdaki önermeye ihtiyacımız var.

Önerme 2.3.1 (bakınız Putinar and Shapiro (2001) de sonuç 2.5**)** Ω *düzlemsel bölgesinin sınırı* $W^{1,2}(\Omega)$ *uzayının izi* $L^2(\partial\Omega)$ *da olacak kadar yeteri düzgünlükte olsun.* $f \in H^2(\Omega)$ *olsun. Dirichlet problemi için çözüm:* $G \in H^2(\Omega)$, $\mathcal{F}(f)$ *nin ilkel fonksiyonu olmak üzere ve* $h \in H^2(\Omega)$ *fonksiyonu*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\overline{\zeta} f(\zeta) - \overline{G(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \Omega \text{ içinde} \\ u(\zeta) &= \overline{\zeta} f(\zeta), & \zeta \in \partial\Omega \quad \text{için} \end{aligned}$$

nin çözümü $u(z) = \overline{G(z)} + h(z)$ *dir.*

Bu gösterimi kullanarak daha önce, sınırın düzgünlüğü belirlenmeden, Costabel and Dauge (2000) de bahsedilen aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.3.2 Ω, *Önerme 2.3.1 deki gibi bir sınıra sahip bir bölge olsun. O zaman bölgenin Schur tamamlayıcı operatörü* $\mathcal{S}$ *ve Friedrichs operatörü* $\mathcal{F}$ *için*

$$2\mathcal{S} = \mathcal{I} - \mathcal{C} \circ \mathcal{F} \tag{2.16}$$

özelliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f \in H^2(\Omega)$ ve $u_0(z) = \frac{1}{2} z\overline{f(z)}$, $p_R(z) = 2\operatorname{Re} f(z)$ olsun. Buradan Ω içinde $\Delta u_0 = \nabla p_R$ (Zimmer 1996) ve

$$\mathcal{S} p_R(z) = \operatorname{div} u_0(z) = 2\operatorname{Re} \partial_z u_0(z) = \operatorname{Re} \overline{f(z)} = \frac{1}{2} p_R$$

elde edilir ama genellikle u_0 homojen sınır şartını sağlamaz.

$$\begin{aligned} \Delta H &= 0, \qquad \Omega \text{ içinde} \\ H(z) &= \overline{z} f(z), \qquad z \in \partial\Omega \text{ için} \end{aligned}$$

Dirichlet probleminin çözümünü bulalım. Önerme 2.3.1 den,

$$G'(z) = \mathcal{F}(f)(z) = \int_\Omega K_\Omega(z,\zeta)\,\overline{f(\zeta)}\,dA(\zeta)$$

olmak üzere $H = \overline{G} + h$ bulunur. Şimdi $u = u_0 - \frac{1}{2}\overline{H}$, homojen sınır değerleri ile, Ω içinde $\Delta u = \nabla p_R$ yi sağlar. Dahası

$$\operatorname{div} u(z) = \operatorname{div} u_0(z) - \operatorname{Re} \partial_z \overline{H(z)} = \frac{1}{2} p_R(z) - \operatorname{Re} G'(z)$$

diverjansını elde ederiz ve buradan

$$\mathcal{S} p_R(z) = \frac{1}{2} p_R(z) - \operatorname{Re} \mathcal{F}(f)(z) \tag{2.17}$$

buluruz.

Benzer şekilde f yi $-if$ ile yer değiştirdiğimizde $p_I = 2\operatorname{Im} f$ için

$$\mathcal{S} p_I(z) = \frac{1}{2} p_I(z) + \operatorname{Im} \mathcal{F}(f)(z) \tag{2.18}$$

bulunur. (2.17) ve (2.18) eşitliklerini birleştirerek, $f \in H^2(\Omega)$ ve $2f = p_R + ip_I$ için

$$2\mathcal{S}(f)(z) = f(z) - \overline{\mathcal{F}(f)(z)} \tag{2.19}$$

yi elde ederiz. Teoremde yer alan bölgeler için Bourdon (1987) den $H^2(\Omega)$ uzayı $AL_2(\Omega)$ nın yoğun bir alt uzayıdır ve böylece (2.19) $f \in AL_2(\Omega)$ için geçerlidir.

Uyarı 2.3.3 (a) *(2.18) ve (2.19) eşitlikleri $\frac{1}{2}\mathcal{I}$ den $\mathcal{S}$ operatörünün elde edilişini sınıra bağlı olduğunu gösterir.*

(b) *(2.16) denklemi sadece $f \in AL_2(\Omega)$ fonksiyonları uygulanırsa sağlanır. Böylece (2.17) ve (2.18) denklemleri (bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları olarak) p_R ve p_I nın harmonik olduğu durumda geçerlidir. Bu yüzden (2.16) aşağıdaki anlamda geçerlidir: (2.7) ile tanımlı $\mathcal{S}$ Schur tamamlayıcı operatörünün $\mathcal{S}_{|P_0 \oplus P_\beta}$ (bakınız (2.8)) kısıtlamasını alırız, (2.17) ve (2.18) denklemleri ile $\mathcal{S}_{|P_0 \oplus P_\beta}$ nin tanım bölgesini reel değerli (basınç) fonksiyonlarından $AL_2(\Omega)$ deki kompleks değerli fonksiyonlara genişletiriz ve böyle elde edilen operatörü yine $\mathcal{S}$ ile gösteririz. Schur tamamlayıcı operatörünü Friedrichs operatörleri yardımı ile (ve böylece konform dönüşüm yardımı ile) sadece $P_0 \oplus P_\beta$ üzerinde inceleyebiliriz.*

(c) *Teorem 2.3.2 nin üstte verdiğimiz ispatı Zsuppán (2005) de bulunabilir.* $\mathbb{D}$ *birim diskinden* Ω *üzerine olan* g *konform dönüşümünü içeren başka bir ispat Zsuppán (2004) de içerilir. Bu ispat aynı zamanda 3.2 kısmında göstereceğimiz operatörlerin matris temsillerini içerir.*

(d) $\mathcal{T}$ *nin tanımından, (2.13), ve Teorem 2.3.2 den*

$$2\mathcal{S} = \mathcal{I} - \mathcal{T}$$

elde edilir.

BÖLÜM 3

KONFORM DÖNÜŞÜMÜ YARDIMI İLE ELDE EDİLEN SONUÇLAR

Bu bölümde Zsuppán (2008a) dan yararlanacağız ve konform dönüşüm yardımı ile bazı sonuçlar elde edeceğiz.

3.1 KONFORM DÖNÜŞÜMÜN KULLANIMI

Teorem 2.3.2 deki konform dönüşümün kullanımının potansiyel faydası, Friedrichs operatörünün (2.12) tanımı içinde kapsanan, Bergman çekirdeğinin (1.3) dönüşüm özelliğinden gelir.

g, (z-düzleminin) birim yuvarından (w-düzlemi) üzerine (örten) olan konform dönüşüm olsun yani $w = g(z)$ olsun. w değişkeni ile ifade edilen (2.12) den yani

$\mathcal{F}(f)(w) = \int_{\Omega} K_{\Omega}(w,\omega)\overline{f(\omega)}dA(\omega)$

den değişken değişimi ile (yani $w = g(z)$, $\omega = g(\zeta)$ ve $dA(\omega) = |g'(\zeta)|^2 dA(\zeta)$ ile), $p(z) := f(g(z))\, g'(z)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(g(z)) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{g'(z)} K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) \frac{1}{\overline{g'(\zeta)}} \overline{f(g(\zeta))} |g'(\zeta)|^2 dA(\zeta) \\ &= \frac{1}{g'(z)} \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) \frac{g'(\zeta)}{\overline{g'(\zeta)}} \overline{p(\zeta)} dA(\zeta)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\int_{\Omega} |f|^2 dA = \int_{D} |p|^2 dA$ bulunur ve böylece f ve p nin sırasıyla Ω ve $\mathbb{D}$ üzerindeki L^2 normları eşittir.

Şimdi aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.1.1 *$\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ operatörü*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{D}}(p)(z) := g'(z)\,\mathcal{F}(f)(g(z)) = \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) \frac{g'(\zeta)}{\overline{g'(\zeta)}} \overline{p(\zeta)} dA(\zeta) \qquad (3.1)$$

ile tanımlanır.

Böylece $AL_2(\Omega)$ üzerinde tanımlanan $\mathcal{F}$ operatörü $AL_2(\mathbb{D})$ üzerinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ operatörüne birimsel olarak denktir (unitarily equivalent). Aslında bu birimsel denklik Önerme 2.2.4 ün ispatında da bulunabilir, bakınız Lin and Rochberg (1995).
$\overrightarrow{f}=0$ olmak üzere Stokes probleminin (2.1) homojen momentum denkleminin çözümleri konform dönüşüm yardımı ile de çalışılabilir. Asıl araç, Kratz ve Peyerimhoff (Kratz and Peyerimhoff 1990) içinde verdiği aşağıdaki önermedir, (ayrıca Zimmer (1996) ya bakınız).

Önerme 3.1.2 *Ω basit bağlantılı bir düzlemsel bölge ve f, Ω içinde holomorfik olsun. O zaman V_1 ve V_2 holomorfik fonksiyonları ile*

$$U(w)=\frac{1}{2}w\overline{f(w)}+V_1(w)+\overline{V_2(w)} \text{ ve } P(w)=2\operatorname{Re}f(w),$$

Ω üzerinde $\Delta U(w)=\operatorname{grad}P(w)$ homojen momentum denklemini sağlar. Dahası eğer $f(w)=-2\ V_1^{'}(w)$ ise, o zaman $\operatorname{div}U(w)=0$ dır.

Uyarı 3.1.3 *V_1 ve V_2 yi $\partial\Omega$ üzerinde homojen sınır koşulunu sağlayacak şekilde seçilirse ($w\in\partial\Omega$ için $U(w)=0$ ise) bu durumda*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}P(w) &= \operatorname{div}U(w)=2\operatorname{Re}\partial_w U(w)\\ &= \operatorname{Re}f(w)+2\operatorname{Re}V_1^{'}(w)=\frac{1}{2}P(w)+2\operatorname{Re}V_1^{'}(w)\end{aligned}$$

olur.

Şimdi, $w=g(z)$ konform dönüşümünü tekrar kullanarak $u=U\circ g$, yani

$$\begin{aligned}u(z) &:= U(g(z))=\frac{1}{2}g(z)\overline{f(g(z))}+V_1(g(z))+\overline{V_2(g(z))}\\ &= \frac{1}{2}g(z)\frac{\overline{p(z)}}{\overline{g'(z)}}+v_1(z)+\overline{v_2(z)}\end{aligned}$$

denirse, o zaman Önerme 3.1.2 ifadesini $\mathbb{D}$ birim diski üzerinde tanımlı holomorfik fonksiyonlar ile formule edilen bir başka ifadeye dönüştürebiliriz.
Zimmer (1996) da Lemma 3.7 olarak verilen bu ifadeyi bu bölümdeki notasyonlarla aşağıdaki önermede vereceğiz.

Önerme 3.1.4 *g, $\mathbb{D}$ birim diskinin Ω ü- zerine konform dönüşümü ve p dönüşümü $\mathbb{D}$ üzerinde holomorfik olsun. Ω üzerinde*

$$\Delta U=\operatorname{grad}P$$

homojen momentum denklemini ve $f = \dfrac{p \circ g^{-1}}{g' \circ g^{-1}}$ *olmak üzere buna karşılık gelen* $P = 2\operatorname{Re} f$ *basıncını sağlayan* $U = u \circ g^{-1}$ *dönüştürme fonksiyonu için* $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *fonksiyonu* v_1 *ve* v_2 *fonksiyonları* $\mathbb{D}$ *üzerinde holomorfik olmak üzere*

$$u(z) = \frac{1}{2} g(z) \overline{\left(\frac{p(z)}{g'(z)}\right)} + v_1(z) + \overline{v_2(z)} \tag{3.2}$$

formulü ile temsil edilebilir. Üstelik u,

$$\operatorname{div}\left(u \circ g^{-1}\right) \circ g = \operatorname{Re} \frac{p}{g'} + 2 \operatorname{Re} \frac{v_1'}{g'} \tag{3.3}$$

diverjansına sahiptir.

Uyarı 3.1.5 *(3.3) denklemi* $z \in \mathbb{D}$ *için*

$$\mathcal{S}P(g(z)) = \operatorname{Re} \frac{p(z)}{g'(z)} + 2 \operatorname{Re} \frac{v_1'(z)}{g'(z)}$$

olduğunu gösterir.

Önerme 3.1.6 g, *$\mathbb{D}$ nin Ω üzerine konform dönüşümü olsun ve* $p(z)$,

$$u_0(z) := \frac{1}{2} g(z) \overline{\left(\frac{p(z)}{g'(z)}\right)}$$

fonksiyonu $L^2(\partial\mathbb{D})$ *içinde sınır değerlerine sahip olacak şekilde* $\mathbb{D}$ *üzerinde holomorfik fonksiyon olsun. O zaman (3.2),* $\partial\mathbb{D}$ *üzerinde sıfır sınır değerlerine sahip olacak şekilde* $v_1, v_2 \in H^2(\mathbb{D})$ *fonksiyonları vardır.*

İspat. İhtiyaç duyulan v_1 holomorfik fonksiyonu u_0 ın sınır değerlerinin ($L^2(\partial\mathbb{D})$ nin altuzayı olarak) $H^2(\partial\mathbb{D})$ üzerine (örten) olan projeksiyonundan elde edilerek bulunabilir, bakınız Duren (1970). v_2 benzer şekilde elde edilebilir. $z \in \mathbb{D}$ için

$$v_1(z) \ : \ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1}{1 - z\overline{\zeta}} \left(-\frac{1}{2} g(\zeta) \overline{\frac{\overline{p(\zeta)}}{g'(\zeta)}}\right) |d\zeta|, \tag{3.4}$$

$$v_2(z) \ : \ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1}{1 - z\overline{\zeta}} \left(-\frac{1}{2} \overline{g(\zeta)} \frac{p(\zeta)}{g'(\zeta)} - \overline{v_1(\zeta)}\right) |d\zeta| \tag{3.5}$$

elde ederiz. Bu ispatı bitirir.

Teorem 2.3.2 nin başka bir ispatı aşağıda verilmiştir.

Şimdi (3.3) denkleminde verilen v_1 in türevi

$$
\begin{aligned}
v_1'(z) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^2}g(\zeta)\frac{\overline{p(\zeta)}}{\overline{g'(\zeta)}}|d\zeta| \\
&= \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^2}g(\zeta)\frac{\overline{p(\zeta)}}{\overline{g'(\zeta)}}d\zeta \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{1}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^2}\frac{g'(\zeta)}{\overline{g'(\zeta)}}\overline{p(\zeta)}dA(\zeta)
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir. Bu yüzden, (2.12) de tanımlanan $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ operatörü cinsinden,

$$v_1'(z) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mathbb{D}}(p)(z) \tag{3.6}$$

elde edilir. g' ile bölersek ve sonraki sonucu $\mathbb{D}$ birim diskinden Ω üzerine (örten) dönüştürürsek bu durumda $V_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{F}(f)$ elde ederiz ve buradan kolayca (2.17) elde edilir. f yerine $-if$ kullanılarak yapılan aynı hesaplamalar ile (2.18) bulunur. Böylece Önerme 2.3.1 kullanılmaksızın Teorem 2.3.2 ispatlanmış olur.

3.2 MATRİS GÖSTERİMİ

Teorem 2.3.2 nin yukarıdaki alternatif ispatının temel fikri Zimmer (1996) da orijinal olarak verilmiştir ve sadece polinom dönüşümleri için kullanılmıştır. Bu, polinom dönüşümü olmayan durum için, (3.4) ile (3.5) formüllerini kulllanmak yerine bunların kesin bir matris formulünde ki denkliklerini kullanarak Zsuppán (2004) de genelleştirilmiştir. Operatörlerin (sonlu ya da sonsuz) matris temsilinin yapısının araştırılması, problem bölgesine bağlı olarak (örneğin özdeğerlerin kendisi ve katlılığı) operatörlerin çeşitli özelliklerini ortaya koyar.

Üzerinde sonsuz bir M matrisinin rol aldığı sonsuz dizilerin uygun bir uzayını göz önüne almak zorundayız. Bu uzay, altkısım 1.2.5 de tanımlanan $\ell_{(2,-\alpha)}$ dizi uzayıdır.

$\ell_{(2,-\alpha)}$ ile ilgili bilgiler temel alınırsa, (3.4) ve (3.5) integrallerinin yerine v_1 ve v_2 Taylor serilerini kullanarak amacımıza uygun olacak şekilde bir matris formunu tanıtabiliriz.

$\mathbb{D}$ içinde $g' \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{D}$ den Ω üzerine olan konform dönüşümün

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \tag{3.7}$$

serisi ile verildiğini kabul edeceğiz. Bu durumda

$$\frac{1}{g'(z)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell z^\ell \tag{3.8}$$

olarak düzenlenebilir.

Önerme 3.2.1 *Ω, basit bağlantılı düzlemsel bir bölge olsun. $\overline{\mathbb{D}}$ nin bir açık komşuluğunda yakınsak olan (3.7) formundaki $\mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ bijektif (bire bir ve örten) konform dönüşümünü göz önüne alalım. Ayrıca, onun türevinin tersinin (3.8) ile verildiğini kabul edelim. $p(z) = \sum_{=0}^{\infty} p_n z^n \in H^2(\mathbb{D})$ olsun. Eğer*

$$v_1(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=k}^{\infty} a_m \left(\sum_{\ell=0}^{m+k} \overline{b}_{m+k-\ell}\overline{p}_\ell\right)\right\} z^k \tag{3.9}$$

$$\overline{v_2(z)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{\ell=0}^{m+k} \overline{b}_{m+k-\ell}\overline{p}_\ell\right)\right\} \overline{z}^k \tag{3.10}$$

ise (3.2) temsili ile verilen u fonksiyonu $\partial\mathbb{D}$ üzerinde sıfır sınır değerlerine sahiptir.

İspat. (3.7), (3.8) seri genişlemelerini ve (3.2) deki p fonksiyonunu u fonksiyonunda yerine yazalım. Serilerin yeniden düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2} g(z)\left(\frac{\overline{p(z)}}{\overline{g'(z)}}\right) + v_1(z) + \overline{v_2(z)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{\ell=0}^{m+k} \overline{b}_{m+k-\ell}\overline{p}_\ell\right) z^m \overline{z}^{m+k}\right\} + v_1(z) + \overline{v_2(z)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=k}^{\infty} a_m \left(\sum_{\ell=0}^{m-k} \overline{b}_{m-k-\ell}\overline{p}_\ell\right) z^m \overline{z}^{m-k}\right\} + v_1(z) + \overline{v_2(z)} \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. $\partial\mathbb{D}$ üzerinde $z\overline{z} = 1$ dir ve bu nedenle v_1 ve v_2 yi (3.9) ve (3.10) daki gibi tanımlarsak u sıfır sınır değerlerine sahiptir.

Bu ispattaki kuvvet serilerinin yakınsaklığı Nehari (1952) deki bir sonuçtan elde edilir: $|z| < R$ için $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ kuvvet serilerinin her ikisi de yakınsak ise, o zaman $c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}$ olmak üzere $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ serisi de $|z| < R$ için yakınsaktır ve $C(z) = A(z)B(z)$ dir.

Uyarı 3.2.2 *Önerme 3.2.1 de g dönüşümü üzerindeki varsayımdan, Ω nın analitik bir sınıra sahip olduğu görülür. Bu durumda, ispatta u için yukarıda adı geçen serileri yeniden düzenleyebiliriz. Bununla birlikte, bu güçlü varsayımdan kaçınılabilirdi, gerçektende eğer daha genel bölgelere karşılık gelen serinin ayrıca yakınsak olduğunu ve uygun sınır değerlerine sahip fonksiyonları tanımladığını ispatlayabilirsek bu daha genel bölgelerde de Önerme 3.2.1 in sağlandığı görülür.*

Önerme 3.2.1 de verilen v_1 holomorfik fonksiyonunun türevi için,

$$v_1' = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{m=\ell+k+1} a_m\overline{b}_{m-(\ell+k+1)}\right)\overline{p}_\ell\right)z^k \tag{3.11}$$

seri açılımı bulunur ve (3.6) kullanılarak

$$\mathcal{F}_{\mathbb{D}}(p)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{m=\ell+k+1} a_m\overline{b}_{m-(\ell+k+1)}\right)\overline{p}_\ell\right)z^k$$

elde edilir. Bu, p ve$\mathcal{F}_{\mathbb{D}}(p)$ için seri açılımlarının katsayıları arasında bir ilişki oluşturur. $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}(p)(z)$ nin serisindeki katsayıları, $p(z)$ nin serisindeki katsayıların

$$p := (p_0, p_1, p_2, \ldots)^T$$

vektörü ile

$$M = (s_{k,\ell})_{k,\ell=0}^{\infty} \tag{3.12}$$

sonsuz matrisinin çarpımından elde edilir.

$$s_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1}\overline{b}_n \tag{3.13}$$

terimleri (3.7) ve (3.8) seri açılımlarından elde edilmek üzere, M nin girişleri

$$s_{k,\ell} := (k+1)\, s_{k+\ell}$$

dir.

(3.13) ile verilen terim

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n \frac{g'(z)}{\overline{g'(z)}} dA(z) \tag{3.14}$$

şeklinde bir integral olarak da formule edilebilir.

Böylece

$$\mathcal{F}_{\mathbb{D}} : AL_2(\mathbb{D}) \longrightarrow AL_2(\mathbb{D}), \quad p \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{D}}(p)$$

eşlenik lineer dönüşümü

$$M\mathcal{C} : \ell_{(2,-1)} \longrightarrow \ell_{(2,-1)}, \qquad p \longrightarrow M\mathcal{C}p$$

(sonsuz) matris gösterimine sahiptir.

Uyarı 3.2.3

(a) *(3.13) terimleri sonlu olacak şekilde g nin konform dönüşüm olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.14) de kullanılarak*

$$|s_n| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^n \rho d\rho d\theta = \frac{2}{n+2}$$

ve böylece $k, \ell \geq 0$ *için* $|s_{k,\ell}| \leq \frac{2(k+1)}{k+\ell+2} \leq 2$ *elde edilir. Böylece* $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ *nin* M *matris temsili, mutlak değerce en çok* 1 *olabilen iyi tanımlı girişlere sahiptir.*

(b) *(3.13) ile tanımlı seriler ıraksak olacak şekilde bu seriye karşılık gelen g fonksiyonu ile verilen bölgeler vardır. Böyle bir örnek* $\mathbb{D}$ *den yarık (slit) düzlem üzerine olan*

$$g(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonudur.

Uyarı 3.2.4 *Sonuç olarak, bu kısım içindeki matris gösterimini mümkün kılacak şekilde g konform dönüşümü için bir koşulu formule edeceğiz. g konform dönüşümünün türevinin kapalı birim diskin bir açık komşuluğu üzerinde sürekliliği (böylece bölgenin sınırı analitiktir) kesinlikle bir yeterli koşuldur. Fakat bu durum kesinlikle gerekli değildir. Diğer durumları gerçekleştirebilmek için altkısım 1.2.5 de verilen sonsuz dizilerin uzaylarını göz önüne alacağız, (bu uzaylar için ayrıca bakınız Jakobsson (2002)).*

$a := (a_0, a_1, \ldots)^T$ *vektörü g nin katsayılarından (bakınız (3.7)) ve b (3.8) in katsayılarından oluşturulmuş olmak üzere ve S*

$$S(a_0, a_1, \ldots)^T = (a_1, a_2, \ldots)^T$$

ile tanımlı sola öteleme dönüşümü olmak üzere (3.13) de verilen terimler $s_n := (S^{n+1}a, b)_0$ *dir.*

Buna göre ya

$$|s_n|^2 = \left|\left(S^{n+1}a, b\right)_0\right|^2 \leq (a,a)_\alpha (b,b)_{-\alpha}$$

dir ya da

$$|s_n|^2 = \left|\left(S^{n+1}a, b\right)_0\right|^2 \leq (a,a)_{-\alpha} (b,b)_\alpha$$

dir. Böylece eğer g dönüşüm fonksiyonunun ve türevinin tersinin katsayıları ya

$a \in \ell_{(2,\alpha)}$ *ve* $b \in \ell_{(2,-\alpha)}$

ya da

$a \in \ell_{(2,-\alpha)}$ *ve* $b \in \ell_{(2,\alpha)}$

koşulunu sağlar ise (3.13) terimleri sonludur.

Teorem 2.3.2 ile birlikte bu kısımda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.5 *Uygun olarak düzgün bir g konform dönüşümü ile $\Omega = g(\mathbb{D})$ basit bağlantılı bölgesinin $\mathcal{F}$ Friedrichs operatörü ve S Schur tamamlayıcı operatörü, M sonsuz matrisi ile tanımlı olmak üzere, sırasıyla*

$M\mathcal{C}$ *ve* $\dfrac{1}{2}(\mathcal{I} - \mathcal{C}M\mathcal{C})$

eşlenik lineer ve kompleks lineer operatörlerine üniter denktir.

3.3 OPERATÖRLER İÇİN BÖLGE BAĞIMLILIĞI

Bu kısımda, $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ arasındaki üniter denkliğin kullanımından yararlanarak problem bölgesi üzerinde çalışılan operatörlerin bağlılığını inceleyeceğiz.
Ω ve $\widetilde{\Omega}$ basit bağlantılı bölgeleri ve sırasıyla bunlara karşılık gelen g ve $\widetilde{g}$ konform dönüşümleri verilsin.
$\widetilde{g} = \eta \circ g$ olacak şekilde η fonksiyonu alalım. Aslında η, Ω dan $\widetilde{\Omega}$ üzerine bir dönüşümdür. Bölgeler ile ilişkili $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ ve $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{D}}$ operatörleri (3.1) ile tanımlıdır. Böylece

$$\left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{D}} - \mathcal{F}_{\mathbb{D}}\right) p(z) = \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) \frac{g'(\zeta)}{\overline{g'(\zeta)}} \left(\frac{\eta'(g(\zeta))}{\overline{\eta'(g(\zeta))}} - 1\right) \overline{p(\zeta)} dA(\zeta)$$

bulunur. Üstteki eşitlik keyfi bir $q \in AL_2(\mathbb{D})$ nin eşleniği ile çarpılır ve $\mathbb{D}$ üzerinde integre edilir, z ve ζ değişkenlerine göre integrasyonlar değiştirilir ve $K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) = \overline{K_{\mathbb{D}}(\zeta,z)}$ boyunca Bergman çekirdeğinin (1.2) özelliği kullanılır ise

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{D}} - \mathcal{F}_{\mathbb{D}}\right) p\bar{q} dA = \int_{\mathbb{D}} \overline{p(\zeta)} \frac{g'(\zeta)}{\overline{g'(\zeta)}} \left(\frac{\eta'(g(\zeta))}{\overline{\eta'(g(\zeta))}} - 1\right) \left(\overline{\int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(\zeta,z)\, q(z)\, dA(z)}\right) dA(\zeta)$$

bulunur. Buradan

$$\left(\left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{D}}-\mathcal{F}_{\mathbb{D}}\right)p,q\right)_{\mathbb{D}}=\int_{\mathbb{D}}\overline{p(\zeta)\,q(\zeta)\frac{g'(\zeta)}{g'(\zeta)}}\left(e^{2i\arg\eta'(g(z))}-1\right)dA(\zeta)$$

ifadesine ulaşılır ve burada sol taraftaki $(.,.)_{\mathbb{D}}$, $L^2(\mathbb{D})$ nin alışılmış iç çarpımıdır ve $\mathbb{D}$ indeksi bölgenin sadece birim disk olduğunu belirtir. Ayrıca Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile sağ tarafı tahmin edebiliriz ve

$$\left|\left(\left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{D}}-\mathcal{F}_{\mathbb{D}}\right)p,q\right)_{\mathbb{D}}\right|\leq 2\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|\sin\left(\arg\eta'\left(g\left(z\right)\right)\right)\right|.\left\|p\right\|_{\mathbb{D}}.\left\|q\right\|_{\mathbb{D}}$$

elde ederiz. $q=\left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{D}}-\mathcal{F}_{\mathbb{D}}\right)p$ olsun, koordinatları tekrar değiştirelim ve basitleştirelim: $f=\dfrac{p\circ g^{-1}}{g'\circ g^{-1}}$, $p\in AL_2(\mathbb{D})$ nin $AL_2(\Omega)$ içindeki denk norm elemanı olmak üzere

$$\left\|\left(\widetilde{\mathcal{F}}-\mathcal{F}\right)f\right\|_{\Omega}\leq 2\sup_{w\in\Omega}\left|\sin\left(\arg\eta'\left(w\right)\right)\right|.\left\|f\right\|_{\Omega}$$

dir. Bu yüzden, operatör normu olarak,

$$\left\|\widetilde{\mathcal{F}}-\mathcal{F}\right\|\leq 2\sup_{w\in\Omega}\left|\sin\left(\arg\eta'\left(w\right)\right)\right| \tag{3.15}$$

bulunur. Bu yolla aşağıdakini elde ederiz.

Teorem 3.3.1 *η, Ω bölgesinin $\widetilde{\Omega}$ üzerine konform dönüşümü olsun. Bu bölgelerin Friedrichs operatörleri için (3.15) sağlanır.*

Ayrıca Teorem 2.3.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2 *η, Ω bölgesinin $\widetilde{\Omega}$ üzerine konform dönüşümü olsun. Burada her iki bölge Teorem 2.3.2 nin şartlarını sağlasın. O zaman*

$$\left\|\widetilde{\mathcal{S}}-\mathcal{S}\right\|\leq\sup_{w\in\Omega}\left|\sin\left(\arg\eta'\left(w\right)\right)\right| \tag{3.16}$$

dir.

Uyarı 3.3.3 *$w=g(z)$ noktasında $C_\rho=\{z\in\mathbb{D}:|z|=\rho\}$ çemberinin konform görüntüsündeki $\tau(w)$ birim teğet vektörü ile reel eksen arasındaki açı $\arg\left(izg'(z)\right)$ dir.*

$$\arg\widetilde{g}'(z)-\arg g'(z)=\arg\frac{\widetilde{g}'(z)}{g'(z)}=\arg\frac{iz\widetilde{g}'(z)}{izg'(z)}=\arg\widetilde{\tau}(w)-\arg\tau(w).$$

$$\left\|\widetilde{\mathcal{F}}-\mathcal{F}\right\|\leq 2\sup_{w\in\Omega}\left|\sin\left(\arg\widetilde{\tau}(w)-\arg\tau(w)\right)\right|$$

ve denk olarak

$$\left\|\widetilde{\mathcal{S}}-\mathcal{S}\right\| \leq \sup_{w\in\Omega}\left|\sin\left(\arg\widetilde{\tau}\left(w\right)-\arg\tau\left(w\right)\right)\right|$$

elde edilir. Eğer ayrıca η nün türevi sınıra göre sürekli ise (yani eğer $\partial\Omega$ her noktada sürekli bir (tanjanta) teğete sahip ise) ve Ω nın kapanışındaki dönüşüm için $\eta' \neq 0$ ise o zaman Teorem 3.3.1 deki supremum Ω nın sınırına kısıtlanabilir ve

$$\left\|\widetilde{\mathcal{F}}-\mathcal{F}\right\| \leq 2\max_{w\in\partial\Omega}\left|\sin\left(\arg\eta^{'}\left(w\right)\right)\right| \tag{3.17}$$

$$\left\|\widetilde{\mathcal{F}}-\mathcal{F}\right\| \leq 2\max_{w\in\partial\Omega}\left|\sin\left(\arg\widetilde{\tau}\left(w\right)-\arg\tau\left(w\right)\right)\right| \tag{3.18}$$

elde ederiz. Benzer bir şekilde uygun bölgeler için

$$\left\|\widetilde{\mathcal{S}}-\mathcal{S}\right\| \leq \max_{w\in\partial\Omega}\left|\sin\left(\arg\widetilde{\tau}\left(w\right)-\arg\tau\left(w\right)\right)\right| \tag{3.19}$$

bulunur.

Böylece bölgeler arasında Friedrichs operatörünün operatör normu sınıra sürekli teğeti ile bölgenin şekline sürekli olarak bağlıdır. Bölgeler için Teorem 2.3.2 nin bu bölgeler üzerinde geçerli olan ek özellikleri ile bölge üzerinde Schur tamamlayıcı operatörünün aynı sürekli bağımlılığını elde ederiz. (Operatörlerin özdeğerlerinin bölge üzerinde bağımlılığı sonuçları için sonraki 4.1 ve 4.2 kısımlarına bakınız.)
Ayrıca, bölge üzerinde M matris temsilinin girişlerinin sürekli bağlılığı da vardır.

Önerme 3.3.4 *g ve $\widetilde{g}$ sırasıyla $\mathbb{D}$ nin Ω ve $\widetilde{\Omega}$ üzerine konform dönüşümleri olsun. O zaman $k = 0, 1, 2, \ldots$ için*

$$\left|\widetilde{s}_k - s_k\right| \leq \frac{4}{k+2}\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|\sin\left(\arg\widetilde{g}^{'}\left(z\right)-\arg g^{'}\left(z\right)\right)\right| \tag{3.20}$$

dir.

İspat. $\mathbb{D}_\rho = \{z : |z| < \rho\}$ ve

$$s_k\left(\rho\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_\rho}\overline{z}^k\frac{g^{'}\left(z\right)}{\overline{g^{'}\left(z\right)}}dA\left(z\right),\ \widetilde{s}_k\left(\rho\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_\rho}\overline{z}^k\frac{\widetilde{g}^{'}\left(z\right)}{\overline{\widetilde{g}^{'}\left(z\right)}}dA\left(z\right)$$

olsun.
$\widetilde{g}^{'}\left(z\right) = \eta^{'}\left(g\left(z\right)\right).g^{'}\left(z\right)$ ifadesini kullanarak

$$\widetilde{s}_k\left(\rho\right)-s_k\left(\rho\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_\rho}\overline{z}^k\frac{g^{'}\left(z\right)}{\overline{g^{'}\left(z\right)}}\left(\frac{\eta^{'}\left(g\left(z\right)\right)}{\overline{\eta^{'}\left(g\left(z\right)\right)}}-1\right)dA\left(z\right)$$

elde edilir. Üstteki eşitlikte mutlak değer alarak ve $e^{2i\alpha}-1=2ie^{i\alpha}\sin\alpha$ ve $\eta'(g(z))=\arg\widetilde{g}'(z)-\arg g'(z)$ eşitliklerini kullanarak,

$$|\widetilde{s}_k(\rho)-s_k(\rho)|\leq\frac{4\rho^{k+2}}{k+2}\sup_{z\in\mathbb{D}_\rho}\left|\sin\left(\arg\widetilde{g}'(z)-\arg g'(z)\right)\right|$$

bulunur. Şimdi $\rho\to 1$ için limit alınarak (3.20) elde edilir.

Uyarı 3.3.5 *Önerme 3.3.4, bölge üzerinde M matrisinin girişlerinin sürekli bağlılığını gösterir. Dahası M matrisinin normunu*

$$\|M\|_*=\sup_{j,\ell}\left|\frac{j+\ell+2}{2(j+\ell)+2}[M]_{j,l}\right|=\max_{k\geq 0}\left|\frac{k+2}{4}s_k\right|$$

şeklinde tanımlarsak, o zaman Önerme 3.3.4 den

$$\left\|\widetilde{M}-M\right\|_*\leq\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|\sin\left(\arg\widetilde{g}'(z)-\arg g'(z)\right)\right| \tag{3.21}$$

bulunur.

Tabiki M üzerine etki eden $\ell_{(2,-1)}$ uzayının normunu alabiliriz ve Teorem 3.3.1 deki gibi benzer hesaplama ile $\|.\|_*$ yerine indirgenmiş matris normunda M nin sürekli bağımlılığını elde edebiliriz.

Konform dönüşümün kullanımı operatörlerin M matris temsili ve bölge arasında ek bağlantıları da ortaya koyar.

Önerme 3.3.6 *$\rho\geq 1$ bir tamsayı olsun. (3.13) terimlerini göz önüne alalım. $k\geq\rho$ için $s_k=0$ dır ancak ve ancak g, ρ. dereceden bir polinomdur. Bu durumda $M\in\mathbb{C}^{\rho\times\rho}$ nin rankı ρ dur ve $s_{\rho-1}=\frac{a_\rho}{\overline{a}_1}\neq 0$ dır.*

İspat. (3.14) den $k\geq\rho$ için $s_k=0$ varsayımından, $\ell=0,1,2,\ldots$ için

$$\int_D\overline{z}^{\rho+\ell}\frac{g'(z)}{\overline{g'(z)}}dA(z)=0$$

bulunur. Üstteki ifade ile $\sum_{\ell=0}^{\infty}|h_\ell|^2<\infty$ yi sağlayan keyfi $\left\{\overline{h}_\ell\right\}_{\ell=0}^{\infty}$ kompleks sayıları bir araya getirilirse $h(z)=\sum_{\ell=0}^{\infty}h_\ell z^\ell$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{D}}\overline{z}^{\rho}\overline{h(z)}\frac{g'(z)}{\overline{g'(z)}}dA(z)=0$$

elde edilir. Şimdi $\ell=0,1,2,\ldots$ için $h(z)=z^\ell g'(z)$ denirse

$$\int_{\mathbb{D}}\overline{z}^{\rho+\ell}g'(z)\,dA(z)=0$$

bulunur.

(3.7) den bu, $a_{\rho+\ell+1} = 0$ a denktir. (3.7) nin katsayıları $m > \rho$ için sıfırdır ve g, ρ. dereceden bir polinomdur. Tanım 3.13 den ifadenin tersi elde edilir. $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_\rho z^\rho$ olsun. (3.13) den ayrıca $s_{\rho-\ell} = \frac{a_\rho}{\overline{a}_1} \neq 0$ elde edilir. (3.12) yapısından dolayı M, ρ ranklıdır.

Uyarı 3.3.7 *g konform dönüşümü ρ. dereceden bir polinom ise o zaman birim diskin görüntüsü ρ. dereceden bir kelebek eğrisi (lemniscate) dir. Yani ρ dan verilen noktalara (kelebek eğrisinin odağı) uzaklığı bir sabit çarpım oluşturan noktaların eğrisidir.*

Bir önceki önermenin ifadesi genelleştirilebilir.

Önerme 3.3.8 *g, (3.7) de verildiği gibi olsun. M matrisi sonlu ranklıdır ancak ve ancak g kesirli rasyonel dönüşümdür.*

İspat. İlk olarak bazı $\rho \geq 0$ tamsayısı için $\operatorname{rank}(M) = \rho + 1$ olsun. M nin yapısından her $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ için, (3.13) terimleri

$$s_{\rho+\ell+1} = \sum_{n=0}^{\rho} \overline{\alpha}_n s_{\ell+n} \tag{3.22}$$

formundaki yinelemeleri sağlar. Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\rho}$ sabitlenmiş kompleks sabitlerdir. (3.14) integrallerini (3.22) de yerine yazalım. Buradan $\alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_\rho z^\rho$ olmak üzere her $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^{\rho+\ell+1} \frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^{\ell} \overline{\alpha(z)} \frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} dA(z)$$

elde edilir. Önerme 3.3.6 daki gibi bu sonuçları bir araya getirirsek, $h(z) = h_0 + h_1 z + \ldots$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^{\rho+1} \overline{h(z)} \frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \overline{\alpha(z) h(z)} \frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} dA(z) \tag{3.23}$$

elde edilir. $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ için $h(z) = z^\ell g'(z)$ denirse

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^{\rho+\ell+1} g'(z)\, dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^{\ell} \overline{\alpha(z)} g'(z)\, dA(z)$$

ya da buna denk olarak

$$a_{\rho+\ell+2} = \sum_{n=0}^{\rho} \overline{\alpha}_n a_{n+\ell+1} \tag{3.24}$$

bulunur. Bu (3.22) dekine benzer bir yinelemedir. Şimdi (3.24) ifadesini $z^{\rho+\ell+2}$ ile çarpalım ve $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ için toplayalım. (3.7) kullanılarak

$$g(z) - \sum_{n=0}^{\rho+1} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\rho} \overline{\alpha}_n z^{\rho+1-n} \left[g(z) - \sum_{m=0}^{n} a_m z^m \right]$$

elde edilir. $g(z)$ için bu denklemin çözümü

$$g(z) = a_0 + \frac{\sum_{n=1}^{\rho+1} \left[a_n - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \overline{\alpha}_{\rho+1-n+m} \right] z^n}{1 - \sum_{n=1}^{\rho+1} \overline{\alpha}_{\rho+1-n} z^n} \tag{3.25}$$

formunda bir kesirli rasyonel fonksiyonu verir. Sadece zıt yönde aynı hesaplamalar yapılarak ifadenin tersi ispatlanır.

Uyarı 3.3.9 *Önerme 3.3.6 ve 3.3.8 de ifade edilen bölgelerin özel sınıfları için M matrisi ve bu nedenle $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$ operatörleri sonlu ranklıdır. Böyle bölgelere klasik quadrature bölgeleri denir ve bunlar üzerinde geniş araştırmalar vardır, bakınız Aharonov and Shapiro (1976), Shapiro (1987), Putinar and Shapiro (2000), Putinar and Shapiro (2001). Kompleks düzlem içinde bir sınırlı Ω bölgesi verildiğinde, Ω içinde her integrallenebilir f analitik fonksiyonları için*

$$\int_{\Omega} f dA = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_k - 1} c_{kj} f^{(j)}(z_k) \tag{3.26}$$

olacak şekilde sonlu çoklukta $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \Omega$ noktaları var ise ve f den bağımsız $c_{kj} \in \mathbb{C}$ katsayıları var ise Ω ya quadrature bölge denir. (3.26) özdeşliğine quadrature özdeşliği ve $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$ tamsayısına ($c_{k,n_k-1} \neq 0$ olduğunu kabul ederek) quadrature özdeşliğinin mertebesi denir. Basit bağlantılı bir quadrature bölgesinin sınırı bir cebirsel eğridir ve bu bölümde kanıtlanan sonuçların kullanımına olanak sağlar.

Uyarı 3.3.10 *Önerme 3.3.8 in sonucu keyfi quadrature bölgeler için zaten bilinmektedir, bakınız Putinar and Shapiro (2000), (yazarlar ispatı konform dönüşüm kullanmadan yapmışlardır). İspattaki kullanım sadece basit bağlantılı bölgeler için çekirdeğin boyutunda değil onun yapısında da gözükür. Yani (3.23) ün yeniden formüle edilişinden, keyfi bir $h \in AL_2(\mathbb{D})$ için*

$$\int_D \overline{(z^{\rho+1} - \alpha(z)) h(z) \frac{g'(z)}{g'(z)}} dA(z) = 0$$

bulunur. Buradan (3.1) yardımı ile, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$z^{\ell} \left(z^{\rho+1} - \alpha(z) \right) \in \ker \mathcal{F}_{\mathbb{D}} \tag{3.27}$$

bulunur yani $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin çekirdeğinin karşıt boyutu (codimension) $\rho+1$ dir. Buradan, $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ arasındaki birimsellik (üniterlik) ve Teorem 2.3.2 kullanılarak

$$\operatorname{co}\dim\left(\ker\mathcal{F}\right)=\operatorname{co}\dim\left(\ker\left(\mathcal{I}-2\mathcal{S}\right)\right)=\rho+1$$

elde edilir. g dönüşümü (3.25) formundaki gibiyse o zaman $w\in\partial\Omega$ için $S(w)=\overline{w}$ olacak şekilde $\partial\Omega$ sınırının bir komşuluğunda holomorfik olan ve Schwarz fonksiyonu olarak adlandılıran bir tek S fonksiyonu vardır, bakınız Shapiro (1987). Özellikle $w=g(z)$ denirse

$$\left(S\circ g\right)(z)=\overline{g\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

elde ederiz. (3.25) içinde z nin yerine $\frac{1}{\overline{z}}$ kullanılarak

$$\left(S\circ g\right)(z)=\overline{a}_0+\frac{\sum_{k=0}^{\rho}\left[\overline{a}_{\rho+1-k}-\sum_{m=0}^{\rho-k}\overline{a}_m\alpha_{k+m}\right]z^k}{z^{\rho+1}-\alpha(z)}$$

bulunur. Polar koordinatlara dönüştürülmüş bölgenin Schwarz fonksiyonu yine bir rasyonel fonksiyondur ve onun paydası (3.27) anlamında incelenen operatörlerin çekirdeğini gerer. Böylece keyfi mertebeden basit bağlantılı quadrature bölgeler için $\ker\mathcal{F}$ *ve* $\ker\left(\mathcal{I}-2\mathcal{S}\right)$ *nin ifade edilişlerini elde etmiş olduk.*

Teorem 3.3.11 *$\rho\geq 0$ olmak üzere Ω, $\rho+1$ mertebeli basit bağlantılı bir quadrature bölge olsun. O zaman $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{I}-2\mathcal{S}$ operatörlerinin çekirdeği $\rho+1$ karşıt boyutuna sahiptir ve (3.27) anlamında bölgenin Schwarz fonksiyonunun paydası ile gerilir.*

Aşağıdaki önerme bölgenin alanı ve M matrisinin girişleri arasındaki bağlantıyı gösterir.

Önerme 3.3.12 *g, birim diskten sonlu alanlı bir bölge üzerine bir dönüşüm olsun. O zaman (3.13) terimlerinden en az bir tanesi $k=0,1,\ldots$ için sıfırdan farklıdır.*

İspat. Tersine her $k=0,1,\ldots$ için

$$s_k=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{z}^k\frac{g'(z)}{\overline{g'(z)}}dA(z)=0$$

olduğunu varsayalım. Önerme 3.3.6 nın ispatına benzer bir şekilde keyfi bir $h(z)\in AL_2(\mathbb{D})$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{D}}\overline{h(z)}\frac{g'(z)}{\overline{g'(z)}}dA(z)=0$$

bulunur. $g(\mathbb{D})$ sonlu alanlı olduğu için $g' \in AL_2(\mathbb{D})$ dir ve keyfi bir $\ell \geq 0$ tamsayısı için $h(z) = z^{\ell} g'(z)$ ifadesini yerine koyabiliriz. Buna göre

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^{\ell} g'(z)\, dA(z) = 0$$

elde edilir ve buradan $a_{\ell+1} = 0$ bulunur. Böylece $g'(z) = 0$ elde edilir ki bu ise imkansızdır.

Uyarı 3.3.13 *Eğer bölge sonlu alanlı değilse o zaman Önerme 3.3.12 doğru değildir, örneğin birim diskin yarı-düzlem üzerine ya da bir parabolün dışı üzerine dönüşümü için önerme doğru değildir, bakınız Zsuppán (2004). Burada bütün (3.13) terimleri sıfırdır. Daha genel olarak M matrisi ve ayrıca Friedrichs operatörü sıfır quadrature bölgeler adı verilen bölgeler için (bu nedenle bir disk durumunda olduğu gibi daha basit durumlar için) sıfırdır. Bu sınıf yarı düzlemlerden, elipslerin dışından, parabollerin dışından ve bazı dejenere durumlardan oluşur, bakınız Sakai (1981). Böyle bölgeler için $\mathcal{S} = \frac{1}{2}\mathcal{I}$ dir (çünkü genel olarak Friedrichs operatörü alanı sonlu bölgeler üzerindeki sabit fonksiyonları korur fakat sonsuz bir Ω için sabit fonksiyonlar $L^2(\Omega)$ ye ait değildir).*

3.4 OPERATÖRLERİN SPEKTRUMLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu kısımda incelenen operatörlerin spektrumları üzerine çalışacağız. Bu operatörlerin özdeğerlerinin nasıl belirleneceğini ve hesaplanacağını araştıracağız. Özellikle $\beta_0(\Omega)$ inf-sup sabiti önemlidir. inf-sup sabiti , Schur tamamlayıcı operatörü (bakınız (2.10)) un en küçük pozitif özdeğeri (2.6) nın karesidir.

Onun değerinin tam belirlenmesi sadece bölge üzerinde birkaç özel durumla mümkün olduğu için onun değerinin tam belirlenmesinden çok onun tahminleri üzerine odaklanacağız. Özellikle komplike köşeli bölgeler durumunda, çünkü böyle bölgeler için operatörler kompakt değildir ve ayrıca bir nokta spektrumuna aynı zamanda bir sürekli spektruma da sahiptir, bakınız Friedrichs (1937), Crouzeix (1974) ve Crouzeix (1997).

Birbirlerine karşılık gelen çeşitli operatörlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının nasıl bulunacağını göstereceğiz. İlk olarak (3.1) ile tanımlı $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ üzerinde çalışacağız. $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin bir $\mu \in \mathbb{C}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu $p \in AL_2(\mathbb{D})$ olsun, yani

$$\int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) \frac{g'(\zeta)}{\overline{g'(\zeta)}} \overline{p(\zeta)} dA(\zeta) = \mu p(z)$$

olsun. Hemen g' nün, 1 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olduğunu görürüz.

Aynı özdeğer problemi bir varyasyonel (değişim) formunda verilebilir: her $q \in AL_2(\mathbb{D})$ için

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{p(\zeta)\, q(\zeta)} \frac{g'(\zeta)}{\overline{g'(\zeta)}} dA(\zeta) = \mu \int_{\mathbb{D}} p(\zeta)\, \overline{q(\zeta)} dA(\zeta)$$

olacak şekilde $p \in AL_2(\mathbb{D})$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ bulunur.

$q := p$ yer değiştirmesi ve mutlak değer ile integrali hesaplayarak kolayca $|\mu| \leq 1$ elde edilir. (2.15) Friedrichs eşitsizliğinden dolayı (sınırlı bölgeler için) daha fazlasına sahibiz: 1, g' özfonksiyonuna karşılık gelen bir basit özdeğerdir, $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin diğer her özdeğerinin mutlak değeri 1 den küçüktür ve onlara karşılık gelen özfonksiyonlar $AL_2(\mathbb{D})$ nin iç çarpımına göre g' ne ortogonaldir. (Sınırsız bölgeler için $g' \notin AL_2(\mathbb{D})$ dir böylece o bir özfonksiyon değildir.)

Birimsellik özelliğinden, eğer μ, $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin bir özdeğeri ise ve $p \in AL_2(\mathbb{D})$ buna karşılık gelen özfonksiyon ise o zaman μ, $\mathcal{F}$ nin de bir özdeğeridir ve

$$f = \frac{p \circ g^{-1}}{g' \circ g^{-1}} \in AL_2(\mathbb{D})$$

buna karşılık gelen özfonksiyondur. Buna göre $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ aynı spektruma sahiptir. Basit 1 özdeğerine karşılık $\mathcal{F}$ nin özfonksiyonu, sınırlı Ω bölgesi içinde 1 özdeşlik fonksiyonudur. Diğer özdeğerlerin özfonksiyonları bu fonksiyona ortogonaldir, yani Ω bölgesi üzerinde onların integralleri sıfırdır.

Eğer $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin bir M matris temsili varsa o zaman $p \in AL_2(\mathbb{D})$ özfonksiyonunun Taylor serisi açılımının katsayılarından oluşan $p \in \ell_{(2,-1)}$ vektörü

$$M\mathcal{C}p = \mu p$$

yi sağlar, böylece o, μ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür, bakınız kısım 3.2.

Eğer $\mathcal{F}$,$\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ ve $M\mathcal{C}$ operatörlerinin spektrumuna $\mathcal{S}$ nin spektrumunu ilişkilendirebilirsek o zaman ilk olarak bunların eşlenik lineer olduğunu ve $\mathcal{S}$ nin kompleks lineer olduğunu görürüz. Eğer $f \in AL_2(\Omega)$, $\mu \in \mathbb{C}$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon ise yani

$$\mathcal{F}f = \mu f$$

ise o zaman (2.12) den,

$$\mathcal{F}\left(e^{\frac{1}{2} i \arg \mu} f\right) = |\mu|\, e^{\frac{1}{2} i \arg \mu} f$$

ve böylece (2.17) ve (2.18) kullanılarak, $p_R = 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{1}{2}i\arg\mu}f\right)$ ve $p_I = 2\operatorname{Im}\left(e^{\frac{1}{2}i\arg\mu}f\right)$ denilirse,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}p_R &= \frac{1}{2}p_R - \operatorname{Re}\left(|\mu|\, e^{\frac{1}{2}i\arg\mu}f\right) = \frac{1-|\mu|}{2}p_R,\\ \mathcal{S}p_I &= \frac{1}{2}p_I + \operatorname{Im}\left(|\mu|\, e^{\frac{1}{2}i\arg\mu}f\right) = \frac{1+|\mu|}{2}p_I\end{aligned}$$

elde edilir. Bunun anlamı $|\mu| < 1$ kompleks özdeğeri ile $\mathcal{F}$ nin bir (μ, f) özçifti $\mathcal{S}$ nin iki özçiftini verir. Burada

$$\lambda_\pm := \frac{1\pm|\mu|}{2}$$

özdeğerleri $\frac{1}{2}$ ye göre simetrik olarak yer alır ve bunlara karşılık gelen (reel değerli harmonik basınç) özfonksiyonları reeldir ve $e^{\frac{1}{2}i\arg\mu}$ çarpanı ile çarpılarak $\mathcal{F}$ nin özfonksiyonunun sanal kısmıdır. Fark, 1 basit özdeğer durumundadır, çünkü bu durumda Ω içinde $f \equiv 1$ dir ve ayrıca $\mathcal{F}1 \equiv 1$ dir. Böylece $p_R = 2\operatorname{Re} f \equiv 2$ (yani sabit basınç), 0 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyondur ama $p_I = 2\operatorname{Im} f \equiv 0$ hiçbiri için özfonksiyon değildir. Aslında bu Sonuç 2.3.3 (b) ile birlikte (2.8) Crouzeix-Velte ayrışımında gördüklerimizle aynıdır.

Elde ettiklerimizi özetleyelim:

Teorem 3.4.1 *$\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ operatörlerinin spektrumu özdeştir, üniter denk olarak onların aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonları aynıdır.*

Sonsuz M matrisi $\ell_{(2,-1)}$ üzerinde bir sınırlı operatör tanımlarsa $M\mathcal{C}$ eşlenik-lineer operatörünün spektrumu $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin spektrumu ile özdeştir.

f özfonksiyonuna karşılık gelen $\mathcal{F}$ operatörünün her $\mu \neq 1$ özdeğeri için $\mathcal{S}$ Schur tamamlayıcı operatörü iki $\lambda_\pm$ özdeğerine sahiptir. Bu özdeğerler $\lambda_\pm = \frac{1\pm|\mu|}{2} \in (0,1)$ dir ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar $p_R = 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{1}{2}i\arg\mu}f\right)$ ve $p_I = 2\operatorname{Im}\left(e^{\frac{1}{2}i\arg\mu}f\right)$ dir. $\mathcal{F}$ nin $\mu = 1$ basit özdeğeri, $\mathcal{S}$ nin $\lambda = 0$ özdeğerini verir ve her iki operatör için bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar sabit fonksiyondır.

Teorem 3.4.1 den bazı sonuçlara sahibiz.

Uyarı 3.4.2 **(a)** $\mu_2 := \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(\mathcal{F}) \setminus \{1\}\}$ *olarak tanımlansın. (2.15) Friedrichs eşitsizliğinin bir sonucu olarak* $\mu_2 = \gamma_\Omega < 1$ *dir ve Teorem 3.4.1 den* Ω *bölgesinin (2.6)* inf-sup *sabitini*

$$\beta_0^2(\Omega) = \frac{1-\mu_2}{2} = \frac{1-\gamma_\Omega}{2}$$

olarak hesaplayabiliriz. Bu önemli bir sonuçtur, fakat bu zaten biliniyordu, bakınız Stoyan (1999) ve Stoyan (2000).

(b) *Eğer Ω basit bağlantılı quadrature bölge ise (yani $\mathbb{D}$ birim diskinden Ω ye olan konform dönüşüm bir polinom ya da rasyonel fonksiyon ise) o zaman $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ ve MC sonlu karşıt boyutlu trivial olmayan bir çekirdeğe sahiptir, Önerme 3.3.8 ve bundan sonra verilen uyarılara bakınız. Böyle quadrature bölgeler için, bölge üzerine olan konform dönüşüm biliniyorsa, Stokes probleminin Schur tamamlayıcı operatörü aynı zamanda, sonlu sayıda özdeğerlere sahiptir ve bu özdeğerler MC için özdeğer problemi yardımı ile hesaplanabilirler. Sınırlı basit bağlantılı bir quadrature bölgenin en basit örneği $\mathbb{D}$ birim diskidir ve $(0,1)$ içinde $\mathcal{S}$ nin özdeğerinin sadece $\frac{1}{2}$ olduğu ve bu özdeğerin sonsuz katlı olduğu bilinmektedir (Zsuppán 2005) (bu durumda $\mathcal{F}$ nin çekirdeği 1 karşıt boyutuna sahiptir). Basit bağlantılı quadrature bölgeler için $\lambda = \frac{1}{2}$ özdeğeri sonsuz katlı bir özdeğerdir fakat $\mathcal{S}$, Teorem 3.4.1 de açıklandığı gibi $(0,1)$ içinde başka sonlu sayıda özdeğerlere sahiptir. Bu ilave özdeğerler ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar M matrisinin yardımı ile hesaplanabilir.*

(c) *Polinom dönüşüm fonksiyonu tarafından birim diskin konform dönüşümleri olarak ortaya çıkan bölgeler için Stoyan (1999) da incelenen Crouzeix-Velte altuzayının sıfıra indirgenememesi Teorem 3.4.1 in önemli bir ek sonucudur.*

Bir önceki kısımdaki önermeler ve Uyarı 3.3.13 den aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.4.3 *Schur tamamlayıcı operatörü $\mathcal{S}$, $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ spektrumuna sahiptir ancak ve ancak bölge 2. mertebeden daha küçük bir quadrature bölgedir.*

Genel bölgelerde, incelenen operatörlerin spektrumunun bölgeyi karakterize edip etmediği sorusunun cevabı Putinar and Shapiro (2000) de verilmiştir. Mertebesi bir (yani disk) ve mertebesi iki olan quadrature bölgeler için bu doğru olmasına rağmen mertebesi üç olan bölgeler için doğru değildir.

Önerme 3.4.4 (bakınız Putinar and Shapiro (2000) de Önerme 4.9 **)** *(Birimsel denk olarak) Aynı Friedrichs operatörüne sahip mertebesi üç olan quadrature bölgelerin sürekli bir ailesi vardır ve $\mathbb{C}$ nin bir afin dönüşümü ile ilişkili olan aile içinde iki bölge yoktur.*

İspat. Putinar and Shapiro (2000) de önerme 4.9 da verilmiştir.

"Afin dönüşüm" bazı $a, b \in \mathbb{C}$ için $w \mapsto aw+b$ fonksiyonu anlamındadır. Böyle dönüşümler yansıma, dönme, öteleme ve benzerlikleri içeren dönüşümlerdir. Birinden diğerine afin dönüşümü olan bölgelerin dönüşümleri birimsel (üniter) denktir.

Uyarı 3.4.5 (a) *Bu nedenle, düzlemin afin dönüşümleri olmasa bile, inf-sup sabiti bölgeyi karakterize edebilir.*

(b) *Eğer g konform dönüşümü reel katsayılara sahipse o zaman Ω bölgesi reel eksene göre simetriktir ve M de reel girişlere sahipdir. Bu durumda, $M\mathcal{C}$ için özdeğer problemi,*

$$\mathcal{D}^{-\frac{1}{2}} M \mathcal{D}^{\frac{1}{2}} w = -2\mu w$$

ya denktir ve burada $\mathcal{D}^{-\frac{1}{2}} M \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$ reel simetrik matrisi ile $\mathcal{D}^{-\frac{1}{2}} p = w$ dir. Böylece M nin bütün özdeğerleri reeldir. (Eğer bu özdeğerleri sayısal olarak hesaplarsak M yi bu forma dönüştürmek daha uygundur.)

Bir önceki uyarı bölgenin simetrik özellikleri ve çalışılan operatörlerin spekturumu arasında bir uygunluk olduğunu öne sürer.

Teorem 3.4.6 *$a_1 \neq 0$ ve $M \geq 2$ keyfi bir tamsayı olmak üzere, birim diskin birebir konform dönüşümü*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nM+1} z^{nM+1} \tag{3.28}$$

formunda olsun. Bu durumda Schur tamamlayıcı operatörünün katlılığı 1 den daha büyük olan özdeğerleri vardır.

Yukarıdaki teoremin ispatı Zsuppán (2004) te verilmiştir.

Uyarı 3.4.7 (a) *Eğer dönüşüm fonksiyonu Teorem 3.4.6 daki gibi ise o zaman $k = 0, 1, \cdots, M-1$ olmak üzere*

$$g\left(e^{ik\frac{2\pi}{M}} z\right) = e^{ik\frac{2\pi}{M}} g(z)$$

dir. Bu eşitliğin sol tarafı ilk olarak birim diski $k\frac{2\pi}{M}$ ile döndürüp sonra da onu Ω bölgesi üzerine dönüştüreceğimiz anlamına gelir. Eşitliğin sağ tarafı ilk olarak birim *diski Ω bölgesi üzerine dönüştürüp sonra da $k\frac{2\pi}{M}$ açısıyla Ω yi döndüreceğimiz anlamına gelir. Bu nedenle $k\frac{2\pi}{M}$ açısı ile Ω herbir döndürme altında değişmezdir, sonuç olarak Ω, M simetri eksenine sahiptir. Teorem 3.4.6 söyler ki simetrik bölgeler durumunda Schur tamamlayıcı operatörü simetrik ekseninin sayısına bağlı olarak katlı özdeğerlere sahiptir (bu nedenle* inf-sup *sabiti de katlı bir özdeğere sahip olabilir). Dahası $\ell_{(2,-1/2)}$ nin her bir L_k altuzayı bir ya da iki simetrik ekseni ile bağlantılı görünmektedir.*

(b) *Simetrik bölgeler üzerinde çalışılan operatörlerin özdeğerlerinin katlılığı matris temsili kullanmaksızın da incelenebilir. g, $g(0) = 0$ özelliğini sağlayan birim diskten Ω bölgesi üzerine olan konform dönüşüm olsun ve bir $0 < \theta < 2\pi$ açısını sabitleyelim ve*

$$g_\theta(z) := e^{-i\theta} g\left(e^{i\theta} z\right) \tag{3.29}$$

yi tanımlayalım. $g_\theta(z)$ fonksiyonu birim diskten, θ açısı ile orijin etrafında saat yönünde döndürülen Ω nın görüntüsü olan, Ω_θ bölgesi üzerine bir dönüşümdür. Karşılık gelen Friedrichs operatörleri için (3.1) kullanılarak bir $p \in AL_2(\mathbb{D})$ fonksiyonu için

$$\left(\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{\theta} p_\theta\right)(z) = e^{i\theta} \left(\mathcal{F}_{\mathbb{D}} p\right)\left(e^{i\theta} z\right) \tag{3.30}$$

bulunur. Eğer $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin bir μ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu p fonksiyonu ise yani $\mathcal{F}_{\mathbb{D}} p = \mu p$ ise bu durumda (3.30) dan

$$\left(\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{\theta} p_\theta\right)(z) = e^{i\theta} \mu p\left(e^{i\theta} z\right) = e^{2i\theta} \mu p_\theta(z)$$

elde edilir ki bu $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{\theta}$ nın $e^{2i\theta}\mu$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonunun p_θ fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Şimdi her $z \in \mathbb{D}$ için $g_\theta(z) = g(z)$ ise $\Omega_\theta = \Omega$ dır (Ω bölgesi θ açısı ile bir rotasyonel (dönme) simetrikliğe sahiptir) ve (3.1) den aynı zamanda $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{\theta} = \mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ elde edilir. Böylece $e^{2i\theta}\mu$ ve p_θ, $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ nin bir özçiftidir ve μ ve p özçiftine karşılık gelir. Teorem 3.4.1 den Ω bölgesinin Schur tamamlayıcı operatörü katlı özdeğerlere sahiptir çünkü $|\mu| = \left|e^{2i\theta}\mu\right|$ dir.

BÖLÜM 4

inf-sup SABİTLERİNİN YAKLAŞIMI, $\mathcal{F}$ VE $\mathcal{S}$ ARASINDA BİR İLİŞKİ

Bu bölümde Zsuppán (2008a) dan yararlanacağız ve bazı bölgelerin inf-sup sabitinin yaklaşımlarını inceleyeceğiz ve çoklu bağlantılı bölgeler için $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{S}$ arasındaki bir ilişkiyi vereceğiz (Teorem 4.5.2 ye bakınız).

4.1 inf-sup SABİTLERİNİN YAKLAŞIMI

Bir bölgenin inf-sup sabitinin tam değerinin bilgisi çok yararlıdır (Stoyan 2000). Ancak onun belirlenmesi kolay iş değildir. Genellikle inf-sup sabiti için bazı hesaplamalar yapılmak zorundadır. Özellikle alttan hesaplama önemlidir. Böyle bir hesaplama, Horgan and Payne (1983) den bir sonuç kullanılarak, örneğin Stoyan (2000) içinde yıldız-şekilli bölgeler için yapılmıştır.

Bu kısımda, böyle hesaplamaların elde edilmesi için konform dönüşümün nasıl yararlı olacağını göstereceğiz. (2.15) Friedrichs eşitsizliği için bir alternatif ile başlayacağız:

$$\int_{\Omega} u dA = 0 \tag{4.1}$$

integralini sağlayan $L^2(\Omega)$ içindeki bütün eşlenik u ve v harmonik fonksiyonları için

$$\int_{\Omega} u^2 dA \leq \Gamma_{\Omega} \int_{\Omega} v^2 dA \tag{4.2}$$

olacak şekilde Ω bölgesinin sadece şekline bağlı bir $\Gamma_{\Omega} \geq 1$ sabiti vardır, bakınız Friedrichs (1937).

u harmonik fonksiyonunun normalleştirilmesi için başka mümkün durumlarda vardır ve bu bir başka eşitsizlik verir: bazı $w_0 \in \Omega$ için

$$u(w_0) = 0 \tag{4.3}$$

eşitliğini sağlayan $L^2(\Omega)$ içindeki bütün eşlenik u ve v harmonik fonksiyonları için

$$\int_{\Omega} u^2 dA \leq \widetilde{\Gamma}_{\Omega} \int_{\Omega} v^2 dA \tag{4.4}$$

dır ve ayrıca $\Gamma_\Omega \leq \widetilde{\Gamma}_\Omega$ dır bakınız, Horgan and Payne (1983). (ortalama-değer teoreminden, disk ve $w_0 = 0$ için (4.1) ve (4.3) normalleştirmeleri aynıdır.)
Bunu Uyarı 3.4.2 ile birlikte kullanılarak

$$\gamma_\Omega = \frac{\Gamma_\Omega - 1}{\Gamma_\Omega + 1}, \tag{4.5}$$

$$\beta_0^2(\Omega) = \frac{1}{\Gamma_\Omega + 1} \tag{4.6}$$

elde edilir ve buradan ayrıca

$$\beta_0^2(\Omega) \leq \frac{1}{2} \tag{4.7}$$

bulunur. Burada eşitlik örneğin $\Omega = \mathbb{D}$ için sağlanır.
Eğer $\Omega = g(\mathbb{D})$ ise ve u, v $\mathbb{D}$ de eşlenik harmonik fonksiyonlar ise $u \circ (g^{-1})$ ve $v \circ (g^{-1})$, Ω içinde eşlenik harmonik fonksiyonlardır. Böylece Jakobsson (2002) deki gibi duruma sahibiz:

$$\Gamma_\Omega \leq \frac{\int_{\mathbb{D}} u^2 |g'|^2 dA}{\int_{\mathbb{D}} v^2 |g'|^2 dA} \leq \frac{\sup_{\mathbb{D}} |g'|^2 \int_{\mathbb{D}} u^2 dA}{\inf_{\mathbb{D}} |g'|^2 \int_{\mathbb{D}} v^2 dA} = \frac{\sup_{\mathbb{D}} |g'|^2}{\inf_{\mathbb{D}} |g'|^2} \tag{4.8}$$

dir çünkü $\Gamma_{\mathbb{D}} = 1$ dir (ve böylece $u(0) = \int_{\mathbb{D}} u dA = 0$ ise $\int_{\mathbb{D}} u^2 dA = \int_{\mathbb{D}} v^2 dA$ dır.)
Ayrıca maksimum ilkesi Nehari (1952) kullanılarak

$$\Gamma_\Omega \leq \left(\frac{\sup_{\partial\mathbb{D}} |g'|}{\inf_{\partial\mathbb{D}} |g'|} \right)^2 \tag{4.9}$$

elde edilir.
Ancak bu hesaplama sadece eğer $\partial\Omega$ sürekli teğete sahipse ve böylece Ω hiç köşeye (corner) sahip değilse (köşelerin varlığında $\sup_{\mathbb{D}} |g'|^2 = \infty$ dur) ve eğer Ω hiçbir iç uca (internal cusp) sahip değilse ($\partial\Omega$ üzerinde internal cups olması durumunda $\inf_{\mathbb{D}} |g'|^2 = 0$ dır) kullanılabilir.

Sonuç 4.1.1 *$\Omega = g(\mathbb{D})$ olsun ve konform dönüşümün g' türevi $\mathbb{D}$ nin kapanışı üzerinde sürekli ve $|g'|$, $\partial\mathbb{D}$ üzerinde pozitif alt ve üst sınıra sahip olsun. O zaman Ω bölgesinin (2.6)* inf-sup *sabiti için*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\inf_{z \in \partial\mathbb{D}} |g'(z)|}{\sup_{z \in \partial\mathbb{D}} |g'(z)|} \leq \beta_0(\Omega) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.10}$$

dir. Eşitlikler $g(z) = z$ için yani $\Omega = \mathbb{D}$ için sağlanır.

İspat.(4.6) ve (4.7) den

$$\frac{1}{2} \geq \beta_0^2(\Omega) \geq \frac{1}{1+\left(\frac{\sup_{\partial\mathbb{D}}|g'|}{\inf_{\partial\mathbb{D}}|g'|}\right)^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\inf_{\partial\mathbb{D}}|g'|}{\sup_{\partial\mathbb{D}}|g'|}\right)^2 \tag{4.11}$$

elde edilir.

Eğer $g(z) = z$ ise $g'(z) \equiv 1$ dir ve böylece bu durumda (4.11) de verilen eşitsizlikler eşitlik halini alır.

Uyarı 4.1.2 (a) *Birim diskin Ω bölgesi üzerine olan g konform dönüşümü yerine bu dönüşümün tersi olan $R(w) := g^{-1}(w)$ Riemann dönüşümü de Sonuç 4.1.1 içinde kullanılabilir ve*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\inf_{w\in\partial\Omega}|R'(w)|}{\sup_{w\in\partial\Omega}|R'(w)|} \leq \beta_0(\Omega) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.12}$$

elde edilir. Üstelik Ω nın sınırı C^2 düzgün ise ve sabitlenmiş bir $a \in \Omega$ için $R(a) = 0$, $R'(a) > 0$ ise bu durumda Riemann dönüşümü $w \in \partial\Omega$ için

$$T(w)R'(w) + \int_{\omega\in\partial\Omega} N(w,\omega)T(\omega)R'(\omega)|d\omega| = -\frac{\overline{T(w)}}{R'(a)(\overline{w}-\overline{a})^2}$$

ifadesini sağlar, bakınız Razali et al. (1997). $w = w(t)$, $\partial\Omega$ nın bir parametrelenişi ve $T(w) = \frac{w'(t)}{|w'(t)|}$, $w \in \partial\Omega$ da sınıra birim teğet olmak üzere N çekirdeği

$$N(w,\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{T(w)}{w-\omega}, & w,\omega\in\partial\Omega, w\neq\omega \\ \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\frac{w''(t)\overline{w'(t)}}{|w'(t)|^3}, & w,\omega\in\partial\Omega, w=\omega \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu sınır integral denklemi (4.12) yi nümerik olarak hesaplamak içinde kullanılabilir.

(b) *Kellogg'un (Kellogg 1931) bir teoreminden eğer Ω bir düzgün kapalı Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge ise ve $\partial\Omega$ nın s yay uzunluğunun bir fonksiyonu olarak reel eksene olan teğetinin $\phi(s)$ eğim açısı, bazı $k > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ (Lyapunov eğrisi) için Hölder koşulu adı verilen*

$$|\phi(s_1) - \phi(s_2)| \leq k|s_1 - s_2|^\alpha$$

eşitsizliğini sağlar ise o zaman $\overline{\mathbb{D}} := \mathbb{D}\cup\partial\mathbb{D}$ üzerinde $g' \neq 0$ dır ve ayrıca $\log|g'|$ fonksiyonu da $\partial\mathbb{D}$ üzerinde aynı mertebeden bir Hölder koşulu sağlar, yani bazı $K > 0$ ve $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ için

$$\left|\log\left|g'\left(e^{i\theta_1}\right)\right| - \log\left|g'\left(e^{i\theta_2}\right)\right|\right| \leq K|\theta_1 - \theta_2|^\alpha$$

dır. Şimdi $\theta \longmapsto \left|g'\left(e^{i\theta}\right)\right|$ *sürekli fonksiyonunu maksimum ve minimum yapan* θ *değerlerini sırasıyla* $\theta_{\max}$ *ve* $\theta_{\min}$ *ile gösterelim. Buna göre*

$$\log\left|\frac{g'\left(e^{i\theta_{\max}}\right)}{g'\left(e^{i\theta_{\min}}\right)}\right| = \left|\log\left|g'\left(e^{i\theta_{\max}}\right)\right| - \log\left|g'\left(e^{i\theta_{\min}}\right)\right|\right| \leq K\left|\theta_{\max}-\theta_{\min}\right|^{\alpha} \leq K\left(2\pi\right)^{\alpha}$$

bulunur ve bu nedenle

$$\left|\frac{g'\left(e^{i\theta_{\max}}\right)}{g'\left(e^{i\theta_{\min}}\right)}\right| \leq \exp\left(K\left(2\pi\right)^{\alpha}\right)$$

elde edilir. Buradan, böyle bölgelerin inf-sup *sabitinin hesabı için Sonuç 4.1.1 den,* K *bölgenin şekline (k cinsinden) bağlı olmak üzere,*

$$\beta_0\left(\Omega\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-K\left(2\pi\right)^{\alpha}\right) \tag{4.13}$$

elde edilir. Eğer g konform dönüşümünün ikinci türevi $\overline{\Omega}$ *da sürekli ise bu durumda*

$$\log g'\left(e^{i\theta_1}\right) - \log g'\left(e^{i\theta_2}\right) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} i\frac{e^{i\theta}g'\left(e^{i\theta}\right)}{g'\left(e^{i\theta}\right)}d\theta$$

olur ve her iki tarafın reel kısmı alınarak

$$\log\left|g'\left(e^{i\theta_1}\right)\right| - \log\left|g'\left(e^{i\theta_2}\right)\right| = -\int_{\theta_2}^{\theta_1}\operatorname{Im}\frac{e^{i\theta}g'\left(e^{i\theta}\right)}{g'\left(e^{i\theta}\right)}d\theta$$

bulunur. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left|\log\left|g'\left(e^{i\theta_1}\right)\right| - \log\left|g'\left(e^{i\theta_2}\right)\right|\right| &\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left|\operatorname{Im}\frac{e^{i\theta}g'\left(e^{i\theta}\right)}{g'\left(e^{i\theta}\right)}\right|d\theta \\
&\leq \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left|\operatorname{Im}\frac{e^{i\theta}g'\left(e^{i\theta}\right)}{g'\left(e^{i\theta}\right)}\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}d\theta\right)^{1-\alpha}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}1^{\frac{1}{\alpha}}d\theta\right)^{\alpha} \\
&\leq \left(\int_{0}^{2\pi}\left|\operatorname{Im}\frac{e^{i\theta}g'\left(e^{i\theta}\right)}{g'\left(e^{i\theta}\right)}\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}d\theta\right)^{1-\alpha}\left|\theta_1-\theta_2\right|^{\alpha}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu, eğer integral varsa, (4.13) deki K sabitinin,

$$K \leq \left(\int_{\partial D}\left|\operatorname{Im}\frac{zg'\left(z\right)}{g'\left(z\right)}\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|dz\right|\right)^{1-\alpha}$$

olarak hesaplanabileceğini gösterir.

(c) *Eğer Kellogg teoreminin bir başka sonucu kullanılırsa,* $\widetilde{K} > 0$ *olmak üzere,*

$$\left|\log g'\left(e^{i\theta_1}\right) - \log g'\left(e^{i\theta_2}\right)\right| \leq \widetilde{K}\left|\theta_1 - \theta_2\right|^\alpha$$

bulunur. Yine $\theta_{\max}$ *ve* $\theta_{\min}$ *yi yerine koyarak üçgen eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} \left|\left|g'\left(e^{i\theta_{\max}}\right)\right| - \left|g'\left(e^{i\theta_{\min}}\right)\right|\right| &\leq \left|g'\left(e^{i\theta_{\max}}\right) - g'\left(e^{i\theta_{\min}}\right)\right| \\ &\leq \widetilde{K}\left|\theta_{\max} - \theta_{\min}\right|^\alpha \leq \widetilde{K}\left(2\pi\right)^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $m := \left|g'\left(e^{i\theta_{\min}}\right)\right| > 0$ *olmak üzere*

$$\left|\left|\frac{g'\left(e^{i\theta_{\max}}\right)}{g'\left(e^{i\theta_{\min}}\right)}\right| - 1\right| \leq \frac{\widetilde{K}\left(2\pi\right)^\alpha}{m}$$

bulunur. Böylece, inf-sup *sabiti için*

$$\beta_0\left(\Omega\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{m + \widetilde{K}\left(2\pi\right)^\alpha}$$

elde edilir ve burada, yeterince düzgün konform dönüşüm için, (b) de olduğu gibi hesap yapılarak

$$\widetilde{K} \leq \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \left|g'\left(z\right)\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|dz\right|\right)^{1-\alpha}$$

bulunur.

(d) *Sonuç 4.1.1 in bir başka kullanımı için,* $\psi\left(\theta\right) := \phi\left(\theta\right) - \theta - \frac{\pi}{2}$ *ve* $\phi = \phi\left(\theta\right)$*,* $g\left(e^{i\theta}\right)$ *da* $\partial\Omega$ *ya teğet ve reel eksen arasındaki açı olmak üzere*

$$g'\left(z\right) = g'\left(0\right)\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\psi\left(\theta\right)d\zeta}{\zeta - z}\right),\ \zeta = e^{i\theta},\ z \in \mathbb{D}$$

temsilini kullanabiliriz. g'*, kapalı birim disk üzerinde sürekli ise*

$$g'\left(e^{i\theta}\right) = g'\left(0\right)e^{\widetilde{\psi}\left(\theta\right)}e^{i\psi\left(\theta\right)}$$

dır. Burada $\widetilde{\psi}$*,*

$$\widetilde{\psi}\left(\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(t\right)\cot\frac{\theta - t}{2}dt$$

has olmayan integralinin Cauchy esas değeri anlamında ψ *ye eşlenik fonksiyondur. Eğer* ψ*,* $0 < \alpha < 1$ *mertebeden Hölder koşulunu sağlarsa bu durumda* $\widetilde{\psi}\left(\theta\right)$ *her* θ *için vardır ve bu koşulu da sağlar. Böylece*

$$\frac{\sup_{\partial\mathbb{D}}\left|g'\right|}{\inf_{\partial\mathbb{D}}\left|g'\right|} = \frac{\sup_{0\leq\theta\leq2\pi}e^{\widetilde{\psi}\left(\theta\right)}}{\inf_{0\leq\theta\leq2\pi}e^{\widetilde{\psi}\left(\theta\right)}}$$

bulunur. inf-sup *sabitinin hesabını elde etmek için, bu ifade Sonuç 4.1.1 de yerine konulabilir. Bu hesaplamada $\partial\Omega$ ya teğet açısını belirten fonksiyon, onun eşlenik fonksiyonu aracılığıyla dolaylı olarak içerilir.*

(4.8) i genelleştirebiliriz. Bu genelleştirmeyi (4.9) un hesaplanmasında kullanacağız.

Teorem 4.1.3 *Ω ve $\widetilde{\Omega}$ düzgün sınırlara sahip bölgeler olsunlar. Ω dan $\widetilde{\Omega}$ üzerine bijektif η konform dönüşümünün türevi Ω nın kapanışı üzerinde sürekli ve $\partial\Omega$ üzerinde $|\eta'|$ pozitif alt ve üst sınıra sahip olsun. $0 \in \Omega$ ve $\eta(0) = 0$ olacak şekilde konform dönüşüm normalleştirilmiş olsun. (4.4) eşitsizliğinden $\widetilde{\Gamma}_\Omega$ ve $\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}}$ sabitleri için*

$$\frac{\inf_{\partial\Omega}|\eta'|^2}{\sup_{\partial\Omega}|\eta'|^2}\widetilde{\Gamma}_\Omega \leq \widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}} \leq \frac{\sup_{\partial\Omega}|\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega}|\eta'|^2}\widetilde{\Gamma}_\Omega \tag{4.14}$$

bulunur.

İspat. İlk olarak $0 \in \widetilde{\Omega}$ olduğunu görürüz. $\widetilde{u}$, $\widetilde{\Omega}$ da, $\widetilde{u}(0) = 0$ sağlanacak şekilde, bir harmonik fonksiyon olsun. O zaman $u = \widetilde{u} \circ \eta$, Ω da harmoniktir ve $u(0) = 0$ sağlanır. $\widetilde{u}$ ve $\widetilde{v}$

$$\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}} = \frac{\int_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{u}^2 dA}{\int_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{v}^2 dA}$$

olacak şekilde olsun. Burada $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}(0) = 0$ şeklinde normalleştirilmiştir. Böylece (4.8) ifadesine benzer olan

$$\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}} = \frac{\int_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{u}^2 dA}{\int_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{v}^2 dA} \leq \frac{\sup_\Omega|\eta'|^2}{\inf_\Omega|\eta'|^2}\frac{\int_\Omega u^2 dA}{\int_\Omega v^2 dA} \leq \frac{\sup_{\partial\Omega}|\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega}|\eta'|^2}\widetilde{\Gamma}_\Omega$$

yi elde ederiz ve bu (4.14) ifadesinin sağ tarafıdır. η dönüşümünün tersini kullanılarak hesaplarsak sol tarafını da benzer şekilde elde edebiliriz.

Uyarı 4.1.4 *Eğer $\widetilde{\Gamma}_\Omega$ için bir M üst yaklaşımına sahip ise, o zaman*

$$\Gamma_\Omega \leq \widetilde{\Gamma}_\Omega \leq M$$

bulunur yani M, Γ_Ω için de bir üst yaklaşımdır. Teorem 4.1.3 den

$$\Gamma_{\widetilde{\Omega}} \leq \widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}} \leq \frac{\sup_{\partial\Omega}|\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega}|\eta'|^2}M$$

elde edilir. (4.6) dan $\beta_0^2(\Omega) \geq \frac{1}{1+M}$ ve

$$\beta_0^2\left(\widetilde{\Omega}\right) \geq \frac{1}{1 + \frac{\sup_{\partial\Omega}|\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega}|\eta'|^2}M} \geq \frac{\inf_{\partial\Omega}|\eta'|^2}{\sup_{\partial\Omega}|\eta'|^2}\frac{1}{1+M}$$

elde edilir. Bundan dolayı, Ω bölgesinin $\inf$-$\sup$ *sabiti için bir alt yaklaşıma (sınıra) sahip isek bu durumda diğer $\widetilde{\Omega} = \eta(\Omega)$ bölgesi için de bir alt yaklaşıma (sınıra) sahibiz.*

Teorem 4.1.3 ü biraz değiştirerek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.1.5 *Ω ve $\widetilde{\Omega}$ bölgeleri düzgün sınırlara sahip olsun öyle ki Ω dan $\widetilde{\Omega}$ üzerine η bijektif konform dönüşümünün türevi Ω nın kapanışı üzerinde süreklidir ve $|\eta'|$, $\partial\Omega$ üzerinde pozitif alt ve üst sınıra sahiptir. O zaman*

$$\Gamma_{\widetilde{\Omega}} \leq \frac{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|^2} \Gamma_\Omega \tag{4.15}$$

ifadesine sahip oluruz.

İspat. $\widetilde{w} = \eta(w)$ olsun. $\widetilde{u}$, $\widetilde{\Omega}$ bölgesi üzerinde bir harmonik fonksiyon olsun ve Ω üzerinde $u := \widetilde{u} \circ \eta$ harmonik fonksiyonu için

$$0 = \int_\Omega u(w)\, dA(w) = \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{u}(\widetilde{w}) \left| \frac{1}{\eta'(\eta^{-1}(\widetilde{w}))} \right|^2 dA(\widetilde{w}) \tag{4.16}$$

özelliği sağlansın. Yani, $\widetilde{\Omega}$ bölgesi üzerinde $|\eta'(\eta^{-1}(\widetilde{w}))|^{-2}$ pozitif ağırlığı ile, $\widetilde{u}$ harmonik fonksiyonunun integrali sıfırdır. Bundan dolayı $\widetilde{u}(\widetilde{w}_0) = 0$ olacak şekilde bir $\widetilde{w}_0 \in \widetilde{\Omega}$ var olmak zorundadır. (4.3) e göre seçilen bu $\widetilde{w}_0$ için, $\widetilde{u}$ ve $\widetilde{v}$ eşlenik harmonik fonksiyonları ile,

$$\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}} = \frac{\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{u}^2 dA}{\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{v}^2 dA}$$

bulunur. (4.16) ve (4.2), (4.1) den

$$\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}} = \frac{\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{u}^2 dA}{\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{v}^2 dA} \leq \frac{\sup_\Omega |\eta'|^2}{\inf_\Omega |\eta'|^2} \frac{\int_\Omega u^2 dA}{\int_\Omega v^2 dA} \leq \frac{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|^2} \Gamma_\Omega$$

elde edilir ve ayrıca $\Gamma_{\widetilde{\Omega}} \leq \widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\Omega}}$ olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6 *Ω ve $\widetilde{\Omega}$, Teorem 4.1.5 deki gibi olsun. O zaman*

$$\beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right) \geq \frac{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|}{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|} \beta_0(\Omega)$$

dır.

İspat. (4.6) yı, Teorem 4.1.5 i ve $\dfrac{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|^2} \geq 1$ oluşunu kullanacağız.

$$\begin{aligned}
\beta_0^2\left(\widetilde{\Omega}\right) &= \frac{1}{1 + \Gamma_{\widetilde{\Omega}}} \geq \frac{1}{1 + \frac{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|^2}{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|^2} \Gamma_\Omega} \geq \frac{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|^2}{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|^2} \frac{1}{1 + \Gamma_\Omega} \\
&= \left(\frac{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|}{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|} \right)^2 \beta_0^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Örnek 4.1.7 $0 < r < R$ *olmak üzere* $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : \log r \leq \operatorname{Re} w \leq \log R,\ 0 \leq \operatorname{Im} w \leq \theta\}$ *dikdörtgenini* $\Omega = \{\widetilde{w} \in \mathbb{C} : r \leq R,\ 0 \leq \arg w \leq \theta\}$ *halka kesiti üzerine konform olarak dönüştüren* $\widetilde{w} = \eta(w) = e^{w}$ *(Nehari 1952) fonksiyonunun dönüşüm özelliklerini kullanarak Teorem 4.1.5 in bu örnekte bir açıklamasını göreceğiz.*$\eta'(w) = e^{w}$ *dir ve buradan* $|\eta'(w)|^2 = |e^{w}|^2 = e^{2\operatorname{Re} w}$ *ve* $w \in \Omega$ *için* $r^2 \leq |\eta'(w)|^2 \leq R^2$ *bulunur. Teorem 4.1.5 den ve Sonuç 4.1.6 dan*

$$\Gamma_{\widetilde{\Omega}} \leq \Gamma_{\Omega}\frac{R^2}{r^2} \text{ ve } \beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right) \geq \beta_0(\Omega)\frac{r}{R} \tag{4.17}$$

elde edilir. Şimdi Stoyan (2000) de verilen Ω *dikdörtgeninin* inf-sup *sabiti için bir alt yaklaşımı (sınırı) kullanacağız:* $L \geq 1$ *dikdörtgenin kenarları arasındaki oran olmak üzere* $\beta_0(\Omega) \geq \frac{1}{L}\sin\frac{\pi}{8}$ *dir. Bu durumda, ya* $L = \frac{\log\frac{R}{r}}{\theta}$ *ya da* $L = \frac{\theta}{\log\frac{R}{r}}$ *dır ve burada* L *değeri* r, R *ve* θ *parametre değerlerine bağlıdır. Bu değerlerden birisini (4.17) de yerine koyarsak sadece onun geometrik özelliklerine bağlı bir halka kesitinin* $\beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right)$ inf-sup *sabitinin bir alt yaklaşımını elde ederiz.*

Aşağıdaki teorem önceki sonuçlara benzerdir ve iki bölgenin inf-sup sabitlerini ilişkilendirmek için yararlıdır.

Teorem 4.1.8 g, *birim disk* $\mathbb{D}$ *nin* Ω *bölgesi üzerine bijektif konform dönüşümü olsun ve* $g(0) = g'(0) - 1 = 0$ *olduğunu kabul edelim.* $\widetilde{g}$ *univalent fonksiyon olsun ve* $\widetilde{g}(0) = \widetilde{g}'(0) - 1 = 0$ *olduğunu ve* $0 < \varepsilon < 1$ *olmak üzere her* $z \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ *için*

$$|\widetilde{g}'(z) - g'(z)| \leq \varepsilon\, |g'(z)| \tag{4.18}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman $\widetilde{g}$, $\mathbb{D}$ *den diğer* $\widetilde{\Omega}$ *bölgesi üzerine konform olarak dönüşümdür ve bölgelerin* inf-sup *sabitleri için*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\beta_0(\Omega) \leq \beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\beta_0(\Omega) \tag{4.19}$$

elde edilir.

İspat. Teoremin koşullarını ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$||\widetilde{g}'(z)| - |g'(z)|| \leq |\widetilde{g}'(z) - g'(z)| \leq \varepsilon\, |g'(z)|$$

elde edilir. Buradan

$$0 < (1-\varepsilon)\,|g'(z)| \leq |\widetilde{g}'(z)| \leq (1+\varepsilon)\,|g'(z)| \tag{4.20}$$

bulunur ve böylece $\widetilde{g}$ de konformdur. Böylece

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\left|\widetilde{g}'(z)\right| < \left|g'(z)\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}\left|\widetilde{g}'(z)\right| \tag{4.21}$$

dır. (4.20) eşitsizliği kullanılarak Teorem 4.1.5 in ispatına benzer hesaplamaları yapılırsa

$$\Gamma_{\widetilde{\Omega}} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2}\Gamma_{\Omega}$$

eşitsizliğini elde edelir. (4.5) ve (4.6) dan

$$\beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\beta_0(\Omega)$$

bulunur. Dönüşümlerin rollerini değiştirerek ve (4.21) eşitsizliğini kullanarak

$$\beta_0(\Omega) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right)$$

elde edilir. Son iki eşitsizlik birlikte teoremi ispatlar.

Uyarı 4.1.9 **(a)** *Yukarıdaki gibi η, Ω nın $\widetilde{\Omega}$ üzerine konform dönüşümünü göstersin. O zaman ($w = g(z)$ olmak üzere) $\widetilde{g}'(z) = \eta'(w).g'(z)$ dir ve (4.18) şartı her $w \in \Omega$ için*

$$\left|\eta'(w) - 1\right| \leq \varepsilon < 1$$

e denktir. Bu, $\eta' - 1$ in maksimum normu küçüktür anlamındadır ve bu nedenle η birim dönüşüme yaklaşır.

(b) $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ *ise basit bir hesaplama ile*

$$0 < 1 - 4\varepsilon \leq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \text{ ve } \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 1 + 4\varepsilon$$

elde edilir. Bunu ve (4.19) u birlikte kullanırsak

$$0 < (1-4\varepsilon)\beta_0(\Omega) \leq \beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right) \leq (1+4\varepsilon)\beta_0(\Omega)$$

elde edilir ve ve ayrıca $0 < \beta_0(\Omega) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Stoyan 2000) eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right) - \beta_0(\Omega)\right| \leq 2\sqrt{2}\varepsilon$$

bulunur.

(c) *Teorem 4.1.8 in nümerik faydası aşağıdadır.* $\widetilde{g}$ *univalent fonksiyonu, örneğin bir polinom ya da açıklandığı şekilde* g *fonksiyonuna yakınsayan bir kesirli rasyonel fonksiyon olarak yapılandırılabilir. Bu durumda basit bir sonlu boyutlu özdeğer problemini çözerek* $\beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right)$ *yi nümerik olarak elde edebiliriz. Bu değer ile bölgenin* inf-sup *sabiti için bir yaklaşımını elde ederiz.*

(d) Ω *bölgesi bazı* $0 < \alpha < 1$ *için* $C^{1,\alpha}$ *düzgün sınırına sahip olsun. Bölgelerin* Ω_n, $n = 1, 2, \ldots,$ *dizisini ve bunlara karşılık gelen* g_n *konform dönüşümlerini gözönüne alalım. Aşağıdaki anlamda bölgelerin* $\{\Omega_n\}$ *dizisi* Ω *bölgesine yakınsasın: Herbir* $0 < \varepsilon < 1$ *için* $n > N$ *olduğunda*

$$\sup_{\mathbb{D}} |g_n' - g'| < \varepsilon \tag{4.22}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ *vardır. O zaman Teorem 4.1.8 den*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \beta_0\left(\Omega_n\right) = \beta_0\left(\Omega\right)$$

dir, yani inf-sup *sabitlerinin yakınsaklığı elde edilir. Böylece limit bölgesinin* inf-sup *sabitine yakınsayan bölgelerin bir dizisinin* inf-sup *sabitlerinin yakınsaklığı için bir yeterli koşul elde ederiz. (4.22) den daha zayıf koşul gözönüne alınırsa bu durumda* inf-sup *sabitlerinin yakınsaklığı garanti edilemez, aşağıda verilen Uyarı 4.2.4 e bakınız.*

Örnek 4.1.10 *Teorem 4.1.8 in özel bir durumu olarak,* $\sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n| \leq \varepsilon < 1$ *olmak üzere*

$$g\left(z\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

özelliğini sağlayan $\Omega = g\left(\mathbb{D}\right)$ *bölgelerini göz önüne alabiliriz. Böyle bölgeler schlicht dir ve*

$$\pi \leq |\Omega| \leq \pi\left(1+\varepsilon\right) \text{ ve } 2\pi \leq |\partial\Omega| \leq 2\pi\left(1+\varepsilon\right)$$

anlamında hemen hemen daireseldir. Burada $|\Omega|$, Ω *nın alanını ve* $|\partial\Omega|$, $\partial\Omega$ *kapalı eğrisinin uzunluğunu gösterir.* $\widetilde{g}\left(z\right) \equiv z$ *seçebiliriz. Bu durumda*

$$\beta_0\left(g\left(\mathbb{D}\right)\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

elde edilir.

4.2 POLİNOM DÖNÜŞÜMLERİ

Bu kısımda polinom dönüşümü durumlarını inceleyeceğiz ve ayrıca bazı örnekler vereceğiz. Kısım 3.2 de görüldüğü gibi, M bir sonlu matris olmak üzere, böyle bölgelerin Schur tamamlayıcı operatörü $\ell_{(2,-1)}$ Hilbert (dizi) uzayı üzerinde tanımlı $\frac{1}{2}(\mathcal{I}-\mathcal{C}M\mathcal{C})$ operatörüne birimsel denktir, bakınız Sonuç 3.2.5. Böyle bölgeler için inf-sup sabitini hesaplamak mümkündür: Uygun özdeğeri seçilerek ve Uyarı 3.4.2 (a) kullanılarak M matrisi için bir özdeğer probleminin çözülmesi gerekir.

Uyarı 4.2.1 *Eğer* $g(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, $\rho \geq 2$ *inci mertebeden* $\mathbb{D}$ *içindeki univalent polinomu ise* $g(\mathbb{D})$ *bölgesinin* inf-sup *sabiti için basit bir üst yaklaşım (sınır) direkt olarak bulunabilir. Böyle polinomları için* $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ *dir (Duren 1983) ve sonlu* M *matrisinin kurulumundan,*

$$|\det M| = n!\,|a_n|^n \leq \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan $|\mu_2|^{n-1} \geq n!\,|a_n|^n$ *ve böylece Uyarı 3.4.2 (a) dan*

$$\beta_0^2(g(\mathbb{D})) \leq \frac{1}{2}\left(1 - (n!\,|a_n|^n)^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < |a_n| \leq \frac{1}{n}$ *olduğundan* inf-sup *sabitinin karesinin bu üst sınırını oluşturan terim için*

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - (n!\,|a_n|^n)^{\frac{1}{n-1}}\right) < \frac{1}{2}$$

bulunur.

Örnek 4.2.2 $g(z) = a_1 z + a_2 z^2$, $a_1 \neq 0$ *durumunda* $b_0 = \frac{1}{a_1}$, $b_1 = -\frac{2a_2}{a_1^2}$ *dir ve*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{|a_1|^2 - 2|a_2|^2}{\overline{a}_1^2} & \frac{a_2}{\overline{a}_1} \\ 2\frac{a_2}{\overline{a}_1} & 0 \end{pmatrix}$$

dir. $M\mathcal{C}$ *nin özdeğerleri*

$$\mu_1 = 1$$

ve

$$\mu_2 = -\frac{2a_2^2}{\overline{a}_1^2}$$

dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$(a_1, 2a_2)^T$

ve

$(\overline{a}_2, -\overline{a}_1)^T$

dır. $|z| \leq 1$ *içinde* $g'(z) \neq 0$ *olduğundan ve* $g'\left(-\frac{a_1}{2a_2}\right) = 0$ *kullanılarak* $\left|\frac{a_1}{2a_2}\right| > 1$ *elde edilir. Buradan* $|\mu_2| < \frac{1}{2}$ *bulunur. Dahası* $a_1 = 1$ *ve* $|a_2| \to \frac{1}{2}$ *için* $|\mu_2| \to \frac{1}{2}$ *bulunur. Eğer* $a_1 = 1$ *ve* $|a_2| = \frac{1}{2}$ *ise* $\mathbb{D}$ *içinde* $g'(z) \neq 0$ *dır, fakat bir* $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ *için* $g'(z_0) \neq 0$ *olmak üzere* $g'(z_0) = 0$ *dır (bu durumda* $g(z_0) \in \partial\Omega$ *noktasında* 2π *lik bir iç açı, bir iç uç (bir internal cusp) vardır). Uyarı 3.4.2 (a) dan* inf-sup *kararlılık (stability) sabiti için* $\beta_0^2(\Omega) = \frac{1}{2} - \left|\frac{a_2}{a_1}\right|^2$ *bulunur.*

Örnek 4.2.3 $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ *ve* $m > 1$ *bir tamsayı olsun.* $g_{(m,\alpha)}(z) = z - \frac{c}{m^{\alpha+1}} z^m$, $|c| \leq m^\alpha$ *için* $\mathbb{D}$ *içinde univalent olsun. Bu durumda*

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{c^2}{m^{2\alpha+1}} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{m^{\alpha+1}} \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{2c}{m^{\alpha+1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{(m-1)c}{m^{\alpha+1}} & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{mc}{m^{\alpha+1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. MC *nin özdeğerleri şimdi reeldir.*

$m \geq 2$ *çift ise bunlar*

$$1, \ \frac{c^2}{m^{2\alpha+1}} \text{ ve } k = 2, \ldots, \frac{m}{2} \text{ için } \pm\sqrt{k(m-k+1)}\frac{c}{m^{\alpha+1}}$$

dir. Bir $m \geq 3$ *tek tamsayısı için özdeğerler*

$$1, \ \frac{c^2}{m^{2\alpha+1}}, \ \frac{m+1}{2}\frac{c}{m^{\alpha+1}}$$

dir ve sadece $m \geq 5$ *tek tamsayısı için özdeğerler*

$$k = 2, \ldots, \frac{m-1}{2} \text{ için } \pm\sqrt{k(m-k+1)}\frac{c}{m^{\alpha+1}}$$

dir. Uyarı 3.4.2 den $\Omega_{(m,\alpha)} := g_{(m,\alpha)}(\mathbb{D})$ *nin* inf-sup *sabiti olarak*

$$\beta_0^2\left(\Omega_{(m,\alpha)}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m+1}{2}\frac{|c|}{m^{\alpha+1}}\right) & , \ m \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)}\frac{|c|}{m^{\alpha+1}}\right) & , \ m \text{ çift ise} \end{cases} \tag{4.23}$$

bulunur. Dahası m tek ise $\beta_0^2\left(\Omega_{(m,\alpha)}\right)$, Schur tamamlayıcı operatörünün basit özdeğerleridir ve m çift ise $\beta_0^2\left(\Omega_{(m,\alpha)}\right)$, Schur tamamlayıcı operatörünün iki (double) özdeğeridir. Örneğin $m := 4$, $\alpha := 0$ ve $c := 1$ özel durumunda kolayca hesaplanacağı gibi $\beta_0^2\left(\Omega_{(4,0)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}$, $\mathcal{S}$ nin double özdeğeridir ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar

$$p_1(z) = \operatorname{Re} \frac{1 + \frac{\sqrt{6}}{2} z^2}{1 - \frac{1}{4} z^3} \quad ve \quad p_2(z) = \operatorname{Im} \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{2} z^2}{1 - \frac{1}{4} z^3}$$

dir.

Uyarı 4.2.4 *$\alpha := 0$ ve $0 < |c| \leq 1$ için, Örnek 4.2.3 kullanılırsa,*

$$\begin{aligned}
\|g_m - g\|_0^2 &= \frac{|c|^2}{m^2} \int_{\mathbb{D}} z^m \overline{z}^m dxdy = \frac{\pi |c|^2}{m^2(m+1)}, \\
\max_{z \in \mathbb{D}} |g_m(z) - g(z)| &= \frac{|c|}{m} \max_{z \in \mathbb{D}} |z^m| = \frac{|c|}{m}, \\
\|g_m' - g'\|_0^2 &= \frac{\pi |c|^2}{m}, \\
\max_{z \in \mathbb{D}} |g_m'(z) - g'(z)| &= |c| \max_{z \in \mathbb{D}} |z|^{m-1} = |c|
\end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada $g_m := g_{(m,0)}$ ve $g(z) = z$ dir. Bu eşitlikler L^2 içinde ve $\mathbb{D}$ üzerinde maksimum normu içinde $\lim_{m \longrightarrow \infty} g_m = g$ olduğunu gösterir ve dahası L^2 normu içinde $\lim_{m \longrightarrow \infty} g_m' = g'$ nin geçerli olduğunu (ama maksimum normu içinde geçerli olmadığını) gösterir. Bu anlamda $\mathbb{D}$ birim diskine yakınsayan, bölgelerin Ω_m $m = 1, 2, \ldots,$ in dizisine sahibiz. Bununla birlikte, bölgelerin (4.23) inf-sup *sabitlerinin limiti*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \beta_0^2(\Omega_m) = \frac{1}{2} - \frac{|c|}{4} < \frac{1}{2} = \beta_0^2(\mathbb{D})$$

dir. Eğer Örnek 4.2.3 de $\alpha := 1$ alırsak yani $c \in \mathbb{R}$, $0 < |c| \leq 1$ için univalent de olan

$$\widehat{g}_m(z) := g_{(m,1)}(z) = z - \frac{c}{m^2} z^m$$

yi incelersek, o zaman

$$\beta_0^2(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m+1}{2m^2}|c|\right) &, \ m \text{ tek ise} \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{m(m+2)}}{2m^2}|c|\right) &, \ m \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde ederiz. Bu modifiye edilmiş durumda L^2 ve maksimum normlarının her ikisi içinde $m \longrightarrow \infty$ için $\widehat{g}_m \longrightarrow g$ ve $\widehat{g}_m' \longrightarrow g'$ elde ederiz. Aynı zamanda $\lim_{m \longrightarrow \infty} \beta_0^2\left(\widehat{\Omega}_m\right) = \beta_0^2(\mathbb{D})$ dir.

Polinom örneklerimiz pratik ilişkiden uzak görünebilir, fakat onlar önemli sorulara açıklık getirir: Bu örnekler bir bölgenin inf-sup sabitinin aynı zamanda katlı özdeğeri olabileceğini ve ayrıca aslında L^2 normu içinde ne dönüşüm fonksiyonunun yakınsaklığının ne de onun türevinin yakınsaklığının, bölgelerin inf-sup sabitlerinin limit bölgesinin inf-sup sabitine yakınsaması için yeterli olmadığını gösterir.

4.3 BÖLGELERİN DİĞER ÖZEL SINIFLARI İÇİN YAKLAŞIMLAR

Bu kısımda polinom olması gerekli olmayan, özel özelliklere sahip g univalent konform dönüşümlerini inceleyeceğiz ve $\Omega = g(\mathbb{D})$ bölgelerinin inf-sup sabitlerini hesaplayacağız. $\mathbb{D}$ nin Ω üzerine olan univalent g konform dönüşümünün $g(0) = 0$ ve $g'(0) = 1$ olacak şekilde normalleştirilmiş olduğunu kabul edelim. Böyle fonksiyonların sınıfını A ile gösterelim. A nın alt sınıfını tanımlayacağız.
$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \infty$ olsun ve

$$S_{(\alpha_1,\alpha_2)} := \left\{ g \in A : \alpha_1 < \operatorname{Re} \frac{zg'(z)}{g(z)} \leq \alpha_2 \right\} \tag{4.24}$$

şeklinde tanımlansın.

Uyarı 4.3.1 *$\alpha_2 = \infty$ ve $0 \leq \alpha := \alpha_1 < 1$ ise (4.24)*

$$S_\alpha := \left\{ g \in A : \operatorname{Re} \frac{zg'(z)}{g(z)} > \alpha \right\}$$

halini alır ve bu kümeye α.mertebeden yıldız-tipi (starlike) fonksiyonların sınıfı denir. Dahası $\alpha = 0$ ise S_0 a ait fonksiyonlar, $\mathbb{D}$ birim diskini orijine göre bir yıldız-tipi bölge üzerine (örten), yani $w \in \Omega$ verildiğinde her $0 \leq t \leq 1$ için $tw \in \Omega$ özelliğini sağlayan bir bölge üzerine, resmeder (Ne yazık ki α nın diğer değerleri için geometrik temsiller yoktur).

Bazı $0 < \alpha \leq 1$ için

$$S_\alpha^* := \left\{ g \in A : \left| \arg \frac{zg'(z)}{g(z)} \right| < \frac{\pi\alpha}{2} \right\}$$

sınıfına ait bir g fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ nin resmedildiği $g(\mathbb{D})$ bölgeleri için daha uygun bir geometrik açıklama mevcuttur. S_α^*, α. mertebeden kuvvetli yıldız-tipi fonksiyonlarının sınıfıdır.

$z \in \partial\mathbb{D}$ için $\arg(zg'(z))$ niceliği, $g(z)$ noktasında $\partial g(\mathbb{D})$ sınırına dışa doğru birim normali arasındaki açıdır. Böylece $\arg\frac{zg'(z)}{g(z)}$, $g(z)$ noktasına orijinden çıkan ışın ve $g(z)$ noktasında $\partial g(\mathbb{D})$ sınırına dışa doğru birim normali arasındaki açıya eşittir (Stoyan (2000) de aynı açı ele alınmıştır).

Böylece $\alpha < 1$ olmak üzere S_α^* ya ait bir fonksiyon, birim diski, sınırı $\pi(1-\alpha)$ radyal açısının dışından ulaşılabilir olan ve orijine göre yıldız-tipi olan sınırlı Jordan bölgesi üzerine resmeder. $S_0 = S_1^*$ dir.

A nın diğer altsınıfı

$$K_{(\alpha_1,\alpha_2)} := \left\{g \in A : zg'(z) \in S_{(\alpha_1,\alpha_2)}\right\} \tag{4.25}$$

dir. Benzer şekilde Uyarı 4.3.1 deki gibi α. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfını

$$K_\alpha := \{g \in A : zg'(z) \in S_\alpha\}$$

ve α. mertebeden kuvvetli konveks fonksiyonların sınıfını

$$K_\alpha^* := \{g \in A : zg'(z) \in S_\alpha^*\}$$

ile göstereceğiz. Konveks fonksiyonlar, yani $K := K_0$ a ait olan fonksiyonlar, $\mathbb{D}$ yi bir konveks bölge üzerine dönüştürür. Dahası $g \in K \Leftrightarrow zg' \in S$ dir ve her konveks fonksiyon $S_{\frac{1}{2}}$ ye aittir, bakınız Duren (1983).

İlk olarak, (4.2) eşitsizliğindeki sabit için hesaplama, yıldız-şekilli bölgeler için Horgan and Payne (1983) de türetilmiştir ve bu inf-sup sabiti için bir alt sınır elde etmek amacıyla Stoyan (2000) de kullanılmıştır.

Birim diski, polar koordinatlarda sınırı $f(\varphi)e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ ile temsil edilen bir Ω bölgesi üzerine dönüştüren fonksiyon $g \in S_0$ olsun. Bundan dolayı $0 \leq \theta < 2\pi$ için,

$$g\left(e^{i\theta}\right) = f(\varphi(\theta))\, e^{i\varphi(\theta)}$$

olur ve burada $\varphi = \varphi(\theta)$ karşılık gelen sınır fonksiyonudur. Kolayca görüleceği gibi, $z = e^{i\theta}$ için, $\dot{f}(\varphi) := \frac{df(\varphi)}{d\varphi}$ ve $\varphi'(\theta) := \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$ olmak üzere,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \varphi'(\theta)\left(1 - i\frac{\dot{f}(\varphi)}{f(\varphi)}\right)$$

dir ve böylece

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} = \varphi'(\theta) \text{ ve } \arg\frac{zg'(z)}{g(z)} = \arg\left(1 - i\frac{\dot{f}(\varphi)}{f(\varphi)}\right) = -\arctan\left(\frac{\dot{f}(\varphi)}{f(\varphi)}\right)$$

elde edilir. Şimdi $g \in S_0$ den $\varphi^{'}(\theta) > 0$ dir ve bu nedenle ayrıca $z \in \partial\mathbb{D}$ için

$$|g'(z)| = |g(z)|\,\varphi'(\theta)\sqrt{1+\left(\frac{\dot{f}(\varphi)}{f(\varphi)}\right)^2} \tag{4.26}$$

elde edilir. Üsttekilerden aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.3.2 *Ω bölgesi onun uygun konform dönüşümü bazı $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ için (4.24) sınıfından olacak şekilde verilsin. Dahası Ω nın sınırı, iç yarıçapı r ve dış yarıçapı R olan orijin merkezli bir annulusun içinde kalsın. O zaman*

$$c_{\partial\Omega} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}\alpha_2}\left(\max_{0\leq\varphi<2\pi}\sqrt{1+\left(\frac{\dot{f}(\varphi)}{f(\varphi)}\right)^2}\right)^{-1}$$

olmak üzere bölgenin inf-sup *sabiti için*

$$\beta_0(\Omega) \geq c_{\partial\Omega}\frac{r}{R}$$

dir.

İspat.(4.26) denklemi ile birlikte Sonuç 4.1.1 i ve Tanım (4.24) ü kullanırız.

Uyarı 4.3.3 *Eğer ayrıca bazı $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ ve $0 < \alpha < 1$ için $g \in S_{(\alpha_1,\alpha_2)} \cap S_\alpha^*$ olduğu kabul edilirse,*

$$1 \leq \sqrt{1+\left(\frac{\dot{f}(\varphi)}{f(\varphi)}\right)^2} \leq \frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$$

bulunur ve buradan, Sonuç 4.3.2 deki sabit için daha basit $c_{\partial\Omega} = \frac{\alpha_1 \cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\sqrt{2}\alpha_2}$ ifadesi elde edilir.

Uyarı 4.3.4 *Sonuç 4.3.2 de verilen sonuç yeni değildir, bakınız Dobrowolski (2005). Dobrowolski (2005) de ayrıca benzer sonuç daha yüksek boyutlu yıldız-şekilli bölgeler içinde verilmektedir.*

Örnek 4.3.5 *Sonuç 4.3.2 nin koşulları bazı $0 < \varepsilon < 1$ için*

$$\left|\frac{zg^{'}(z)}{g(z)} - \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right| \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

ise kesinlikle sağlanır. Bu tür univalent konform dönüşümler için

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \le \left|\varphi'(\theta)\right| \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad ve \quad \left|\arg \frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \le \arcsin \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$$

bulunur. Sonuç 4.1.1 den inf-sup *sabitinin alt yaklaşımı*

$$\beta_0(\Omega) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2$$

olur.

Uyarı 4.3.6 *Uygun sınır fonksiyonlarını kullanmaksızın* inf-sup *sabitinin bir yaklaşımı elde edilebilir. İlk olarak $g \in S_\alpha^*$ den*

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$$

bağlılığını sağladığını gözlemleyiniz, yani,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \left(\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\right)^\alpha$$

olacak şekilde, $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| \le |z|$, $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\mathbb{D}$ içinde bir ω holomorfik fonksiyonu vardır. $\varrho(z) = \left|\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\right|^{2\alpha}$ pozitif (radyal olmayan) ağırlık fonksiyonunu kullanarak (4.2) eşitsizliğinin bir varyantını düşünelim, yani $\Gamma_{2,\varrho}(\mathbb{D}) := \left\{u : \int_{\mathbb{D}} u^2 \varrho dA < \infty\right\}$ olmak üzere $\mathbb{D}$ üzerinde (4.3) ifadesini sağlayan $\Gamma_{2,\varrho}(\mathbb{D})$ içindeki bütün eşlenik harmonik u ve v fonksiyonları için

$$\int_{\mathbb{D}} u^2 \varrho dA \le \Gamma_\varrho \int_{\mathbb{D}} v^2 \varrho dA \tag{4.27}$$

olacak şekilde pozitif bir Γ_ϱ sabitini bulalım. $L_{2,\varrho}(\mathbb{D})$ nin holomorfik fonksiyonlardan oluşan $AL_{2,\varrho}(\mathbb{D})$ altuzayını ele alalım. Eğer $f = u + iv$ denirse (4.27) eşitsizliği, $\mathbb{D}$ üzerinde Friedrichs eşitsizliğinin ağırlıklı bir varyantına karşılık gelir: $\gamma_\varrho = \frac{\Gamma_\varrho - 1}{\Gamma_\varrho + 1}$ ve $f \in AL_{2,\varrho}(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{D}} f^2 \varrho dA \le \gamma_\varrho \int_{\mathbb{D}} |f|^2 \varrho dA$$

dir. Eğer böyle bir $\Gamma_\varrho < \infty$ sabiti varsa, o zaman Sonuç 4.1.1 dekine benzer olarak

$$\Gamma_\Omega \le \Gamma_\varrho \frac{R^2}{r^2}$$

elde edilir. Burada $z \in \partial\mathbb{D}$ için $0 < r \le |g(z)| \le R$ dir, yani Ω, sınırı iç ve dış yarıçapı sırasıyla r ve R olan bir annulus içinde kalan sınırlı bir yıldız-şekilli bölgedir. Böyle bir bölge için

$$\beta_0(\Omega) \ge c_\varrho \frac{r}{R}$$

elde edilir. Burada $c_\varrho := (1+\Gamma_\varrho)^{-\frac{1}{2}}$ *ağırlık fonksiyonuna bağlıdır, yani bölgenin şekline ve (bölgenin şekline de bağlı olan)* α *sabitine bağlıdır.*

inf-sup sabiti için bir yaklaşım, karşılık gelen konform dönüşümü (4.25) sınıfında olan Ω bölgesi içinde mevcuttur. Eğer $\kappa(z)$, $g(z)$ noktasında $\partial\Omega$ nın eğriliği ise, o zaman

$$\kappa(z) = \frac{1}{|g'(z)|}\operatorname{Re}\left(1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right)$$

dir. Şimdi $g \in K_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ den

$$\frac{\alpha_1}{\kappa(z)} \leq \left|g'(z)\right| \leq \frac{\alpha_2}{\kappa(z)}$$

bulunur. Sonuç 4.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.7 *Ω bölgesi, bazı $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ için onun karşılık gelen konform dönüşümü (4.25) sınıfı içinde olacak şekilde verilirse, o zaman eğer $0 < \kappa_{\min}$ ve $\kappa_{\max} < \infty$ sırasıyla $\partial\Omega$ eğriliğinin minimum ve maksimum değerleri ise, bölgenin* inf-sup *sabiti için*

$$\beta_0(\Omega) \geq \frac{\alpha_1\kappa_{\min}}{\sqrt{2}\alpha_2\kappa_{\max}}$$

bulunur.

4.4 KÖŞELİ BÖLGELER

Bu kısımda birim diskten Ω ya olan konform dönüşümün sonlu sayıda köşeli parçalı düzgün sınıra sahip durumu inceleyeceğiz. Karşılık gelen Friedrichs operatörleri kompakt olmamasına rağmen böyle bölgeler için Friedrichs eşitsizliği sağlanır. Bu inf-sup sabitinin hesablamayı zorlaştırır, örneğin dikdörtgen durumu için bakınız Stoyan (2000). Aşağıda verilen sonucu kullanacağız (bakınız Warschawski (1932)):

Önerme 4.4.1 *$\partial\Omega$, $k = 1,2,\ldots,n$ için $g(b_k)$ köşeleri ile bir kapalı parçalı Lyapunov eğrisi olsun. Burada iç açılar $\alpha_k\pi$, $0 < \alpha_k \leq 2$ dir. Eğer g, $g'(0) > 0$ olacak şekilde birim disk $\mathbb{D}$ nin Ω üzerine konform dönüşümü ise o zaman h, $\overline{\mathbb{D}}$ üzerinde sıfırdan farklı bir sürekli Hölder fonksiyonu olmak üzere*

$$g'(z) = h(z)\prod_{k=1}^{n}(z-b_k)^{\alpha_k-1} \tag{4.28}$$

dir.

Eğer $\mathbb{D}$ üzerinde $h \equiv 1$ alırsak birim diskten $g(b_k)$ köşeli ve bunlara karşılık gelen iç açılı, bir çokgen üzerine olan Schwarz-Christoffel dönüşümüne indirger, bakınız Nehari (1952). $\widetilde{\Omega}$, karşılık gelen $\widetilde{g}$ Schwarz-Christoffel dönüşümü

$$\widetilde{g}'(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - b_k)^{\alpha_k - 1} \tag{4.29}$$

türevine sahip olan bir çokgen olsun. Bu nedenle $\widetilde{\Omega}$ çokgeni Önerme 4.4.1 deki Ω bölgesi için olduğu gibi, $\partial\mathbb{D}$ üzerinde $k = 1, \ldots, n$ için aynı b_k ön köşelerine sahiptir. Hölder süreklilikten

$$1 \leq c_h := \frac{\sup_{\overline{\mathbb{D}}} |h|}{\inf_{\overline{\mathbb{D}}} |h|} < \infty$$

dir ve $g'(z) = \widetilde{g}'(z)\, h(z)$.
$\widetilde{\Omega}$ üzerinde (4.2) eşitsizliği ile tekrar başlayıp Teorem 4.1.3 dekine benzer hesaplama yaparsak

$$\Gamma_{\Omega} \leq c_h^2 \Gamma_{\widetilde{\Omega}}$$

elde edilir ve buradan, (4.6) yardımı ile

$$\beta_0(\Omega) \geq \frac{1}{c_h} \beta_0\left(\widetilde{\Omega}\right) \tag{4.30}$$

bulunur.

Sonuç 4.4.2 *g ve $\widetilde{g}$, birim diskin Ω ve $\widetilde{\Omega}$ üzerine konform dönüşümleri olsun ve onların türevleri (4.28) ve (4.29) daki gibi olsun. Ω bölgesi parçalı Lyapunov sınırına sahipse, o zaman bazı $1 \leq c_h < \infty$ sabiti ile (4.30) elde edilir.*

Aşağıda bazı örnekleri hesaplayalım.

Örnek 4.4.3 *Birim diskten $g(1) = 0$ dışında düzgün sınırlı bir sonlu $\Omega^{(\omega)}$ bölgesine tanımlı $0 < \omega \leq 2$ olan*

$$g(z) = (1 - z)^{\omega} \tag{4.31}$$

konform dönüşümünü inceleyelim. Burada $\omega \neq 1$ için $\omega\pi$ iç açısına sahiptir. Eğer $\omega = 1$ ise bölge ötelenmiş birim diske dönüştürülür. ($\omega = 2$ durumunda bölge bir kardiyoiddir ve orijinde bir iç uca sahiptir.) (4.31) için

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \omega)}{\Gamma(-\omega)\,\Gamma(k+1)} z^k \quad ve \quad \frac{1}{g'(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\Gamma(k - 1 + \omega)}{\omega\Gamma(\omega - 1)\,\Gamma(k+1)} z^k$$

seri açılımını kullanarak $k = 0, 1, 2, \ldots$ *için*

$$s_k^{(\omega)} = \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega\pi}\left(\frac{1}{(k-\omega+1)} - \frac{1}{(k-\omega+2)}\right)$$

bulunur. (4.31) karşılık gelen dönüşümü ile dönüştürülen bölgenin Friedrichs operatörünü $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{(\omega)}$ *ile gösterelim. Karşılık gelen sonsuz matrislerin basit bir hesaplama ile* $p \in L^2(\mathbb{D})$ *ve* $0 \leq \omega \leq 1$ *için*

$$\left(\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{(1+\omega)}(M_z p), M_z p\right) = \frac{\omega}{1+\omega}\left(\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{(\omega)} p, M_z p\right)$$

elde edilir. Burada M_z, z *değişkeni ile çarpmayı gösterir.* $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \in AL_2(\mathbb{D})$ *için*

$$\|p\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}|p_k|^2 \;\; ve \;\; \|M_z p\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}|p_k|^2$$

bulunur. Buradan $\|M_z p\|^2 \leq \|p\|^2 \leq 2\|M_z p\|^2$ *elde edilir. Bunu Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile birlikte kullanarak*

$$\frac{\left|\left(\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{(1+\omega)}(M_z p), M_z p\right)\right|}{\|M_z p\|^2} \leq \left|\frac{\sqrt{2}\omega}{1+\omega}\right| \frac{\left\|\mathcal{F}_{\mathbb{D}}^{(\omega)} p\right\|}{\|p\|}$$

bulunur. Operatör normu içinde $\left\|\mathcal{F}^{(\omega)}\right\| \leq 1$ *olduğundan* $0 \leq \omega \leq 1$ *için*

$$\beta_0^2\left(\Omega^{(1+\omega)}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \left|\frac{\sqrt{2}\omega}{1+\omega}\right|\right) \tag{4.32}$$

bulunur ve buradan

$$\left\|\mathcal{F}^{(1+\omega)}\right\| \leq \left|\frac{\sqrt{2}\omega}{1+\omega}\right| < 1 \tag{4.33}$$

elde edilir.

Uyarı 4.4.4 *(4.33) eşitsizliği* $1-\sqrt{2} \leq \omega < 0$ *için de sağlanır fakat o zaman* $\Omega^{(\omega)}$ *bölgesi, onun Friedrichs operatörü* $\left\|\mathcal{F}^{(\omega)}\right\| \leq 1$ *norm hesabını sağlamasına rağmen, sonsuzdur. Bu yüzden, (4.32) yaklaşımı* $1-\sqrt{2} \leq \omega \leq 0$ *ile bütün* $\Omega^{(1+\omega)}$ *bölgeleri için de geçerlidir.*

Örnek 4.4.5 *Köşeli bir bölge için bir başka örnek wedge dir:*

$$W_\alpha := \left\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}\right\}$$

Bu bölge orijinde bir köşeye sahiptir ve böylece karşılık gelen konform dönüşümün türevi birim çember üzerinde bir tekilliğe sahiptir. (3.13) terimlerinin basit bir hesabı, $k = 0, 1, \ldots,$ *için*

$$s_{2k}^{(W_\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right);\ s_{2k+1}^{(W_\alpha)} = 0$$

olduğunu gösterir ve dahası $W_0 := \left\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ *sonsuz bir şerit olmak üzere,*

$$M^{(W_\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} M^{(W_0)}$$

dir. Bu yüzden bütün özdeğerler için benzer eşitliğe sahibiz ve buradan

$$1 - 2\beta_0^2 (W_\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(1 - 2\beta_0^2 (W_0)\right)$$

elde edilir. $0 < \beta_0^2 (W_0) \leq \frac{1}{2}$ *olduğunda (bakınız Putinar and Shapiro (2000))*

$$\frac{1}{2}\left(1 - \left|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|\right) \leq \beta_0^2 (W_\alpha) \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Dahası Putinar and Shapiro (2000) de sonsuz şerit ve wedge nin genelleşmiş anlamda quadrature bölge olduğu ve ilgili operatörlerin sadece sürekli spektrumuma sahip olduğu ispatlanmıştır.

Örnek 4.4.6 $\mathbb{D}$ *birim diskinden bir hiperbolün dış tarafı (yani bu hiperbolün odağını içermeyen bölge) üzerine dönüşen*

$$g(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

konform dönüşümünü düşünelim.

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)} z^{2k+1} \quad ve \quad \frac{1}{g'(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(-1)^k \Gamma\left(k - \frac{3}{2}\right)}{4\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)} z^{2k}$$

dir ve buradan $k = 0, 1, \ldots,$ *için*

$$s_{2k} = (-1)^k \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) \quad ve\ s_{2k+1} = 0$$

elde edilir. Bunlar neredeyse $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *li bir köşeye sahip olan bir wedge durumundaki gibi hemen hemen aynı terimlerdir (bakınız bir önceki Örnek 4.4.5). Karşılık gelen matrislerin bir incelenişinden* $k = 0, 1, \ldots,$ *için*

$$\widehat{p}_{2k} = (-1)^k p_{2k},\ \widehat{p}_{2k+1} = p_{2k+1} = 0 \ \ ve\ \widehat{q}_{2k} = q_{2k} = 0,\ \widehat{q}_{2k+1} = (-1)^k q_{2k+1},$$

girişlerine sahip olan bu özvektörler için

$$\begin{aligned} M^{(W_\alpha)}p &= \mu p \Leftrightarrow M^{(hiperbol)}\widehat{p} = \mu\widehat{p} \\ M^{(W_\alpha)} &= \mu q \Leftrightarrow M^{(hiperbol)}\widehat{q} = -\mu\widehat{q}. \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle

$$\beta_0\left(W_{\frac{\pi}{2}}\right) = \beta_0\left(hiperbol\right)$$

elde edilir.

4.5 KATLI BAĞLANTILI BÖLGELER

Bir önceki sonuçların hepsi sadece basit bağlantılı bölgeler için geçerlidir. Garabedian (1951) den alınan aşağıdaki sonuç, en azından yeterince düzgün sınırlı bölge durumlarında $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{S}$ operatörleri arasındaki bazı ilşkileri vermektedir. Bu sonuç (2.14) Friedrichs özdeğer problemi ile oldukça farklı karakterli bir diğer problemi ilişkilendirir.

Önerme 4.5.1 (Garabedian, bakınız Garabedian (1951)) *Ω bölgesinin sınırı sürekli eğriliğe sahip olsun. $f \in AL_{2,0}(\Omega)$ fonksiyonu ve $\mu \in \mathbb{R}$, (2.14) özdeğer problemini sağlar ancak ve ancak*

$$U(w) := \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\mu\overline{f(\omega)} - f(\omega)}{w-\omega} dA(\omega)$$

ile tanımlı fonksiyon

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{w}}^2 U + \mu\partial_{\overline{w}}\partial_w\overline{U} = 0 \quad &, \quad \Omega \text{ içinde} \\ U = 0 \quad &, \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{aligned} \tag{4.34}$$

özdeğer problemini sağlar. Dahası $w \in \Omega$ için ayrıca

$$\partial_{\overline{w}}U(w) = -\mu\overline{f(w)} + f(w) \tag{4.35}$$

ve buradan

$$\left(1-\mu^2\right) f(w) = \partial_{\overline{w}}U(w) + \mu\partial_w\overline{U(w)} \tag{4.36}$$

bulunur.

Şimdi (4.34) ün, Schur tamamlayıcı operatörünün özdeğer problemi ile nasıl bağlantılı olduğuna açıklık getirelim. Teorem 2.3.2 nin ispatındaki gibi

$$\Delta = 4\partial_{\overline{w}}\partial_w, \ \operatorname{div} = 2\operatorname{Re}\partial_w \text{ ve } \operatorname{grad} = 2\partial_{\overline{w}}$$

eşitliklerini kullanırız. Bazı kompleks değerli v fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\operatorname{div} v &= 2\partial_{\overline{w}}\left(2\operatorname{Re}\partial_w v\right) = 2\partial_{\overline{w}}\left(\partial_w v + \overline{\partial_w v}\right) \\ &= 2\partial_{\overline{w}}\partial_w v + 2\partial_{\overline{w}}^2\overline{v} = \frac{1}{2}\Delta v + 2\partial_{\overline{w}}^2\overline{v} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\partial_{\overline{w}}^2\overline{v} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\operatorname{div} v - \frac{1}{4}\Delta v$$

ve

$$\partial_{\overline{w}}^2\left(2\overline{v}\right) + \mu\partial_{\overline{w}}\partial_w\left(2v\right) = \operatorname{grad}\operatorname{div} v - \frac{1-\mu}{2}\Delta v$$

bulunur. Böylece, U ve μ, (4.34) ü çözer ancak ve ancak $v := \frac{1}{2}\overline{U}$ ve $\lambda := \frac{1-\mu}{2}$, Cosserat özdeğer problemi denen

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\operatorname{div} v - \lambda\Delta v = 0 \quad &, \quad \Omega \text{ içinde} \\ v = 0 \quad &, \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{aligned}$$

yi çözer (Velte 1990). Bu, diğer taraftan bu bazı reel değerli p fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \Delta v = \operatorname{grad} p, \ \operatorname{div} v = \lambda p \quad &, \quad \Omega \text{ da} \\ v = 0 \quad &, \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{aligned}$$

ye denktir ve bu λ özdeğerine karşılık gelen p basınç özfonksiyonu ile birinci tipten Stokes probleminin Schur tamamlayıcı operatörü için özdeğer problemidir.

Önerme 4.5.1, (4.35) denklemi ile ilişkilidir (bu p basınç özfonksiyonu ile f Friedrichs özfonksiyonu ilşkilidir):

$$\begin{aligned} \lambda p &= \operatorname{div} v = 2\operatorname{Re}\partial_w v = 2\operatorname{Re}\overline{\partial_w v} = 2\operatorname{Re}\partial_{\overline{w}}\overline{v} \\ &= \operatorname{Re}\partial_{\overline{w}}U = \operatorname{Re}\left(f - \mu\overline{f}\right) = (1-\mu)\operatorname{Re} f = 2\lambda\operatorname{Re} f \end{aligned}$$

dir. $f \in AL_{2,0}(\Omega)$ olduğundan, Friedrichs eşitsizliğinde $0 < \mu < 1$ bulunur ve buradan $\lambda \neq 0$ elde edilir. Böylece $p = 2\operatorname{Re} f$ bulunur. f nin yerine $-if$ alarak aynı hesaplama yapılırsa $\frac{1+\mu}{2}$ özdeğeri için $2\operatorname{Im} f$ basınç özfonksiyonu bulunur.

Basit bağlantılı bölge durumlarına benzer olarak, f özfonksiyonuna karşılık gelen bir $0 < \mu < 1$ Friedrich özdeğerinden f ye karşılık gelen $2\operatorname{Re} f$ ve $2\operatorname{Im} f$ basınç özfonksiyonları ve bunlar için ($\frac{1}{2}$ ye göre simetrik olan) $\frac{1\mp\mu}{2}$ özdeğerleri elde edilir.

Yukarıdaki sonuçta önerildiği edildiği gibi katlı bağlantılı bölgeler için $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{S}$ operatörleri arasındaki bir bağlantıyı göstermek istiyoruz.

Kısım 3.1 deki gibi konform dönüşümün kullanımı imkansızdır, çünkü katlı bağlantılı bölgelerin ele alındığı durumlarda, basit bağlantılı bölgeler için birim diske benzer kanonik (standart) bölge yoktur, bakınız Nehari (1952). Önerme 2.3.1, Putinar and Shapiro (2001) de sadece basit bağlantılı bölgeler için ispatlandı, dolayısıyla böyle bir olasılığa da sahip değiliz (kısım 2.3 deki gibi).

Katlı bağlantılı bölgelerin ele alındığı durumunda Teorem 2.3.2 dekine benzer bir ispat için temel araç, bir sonraki bölümde göreceğimiz kompleks formülasyon (5.1.3) ve Garabedian (1951) de

$$K(w,\omega) = -\frac{2}{\pi}\partial_w \partial_{\overline{\omega}} G(w,\omega) \tag{4.37}$$

ile verilen sonucu kullanan ve temsil sonucu olarak adlandırılan Önerme 5.1.2 dir. Burada $K(w,\omega)$ Bergman çekirdeğidir ve $G(w,\omega)$, sınır eğrileri sürekli eğriliğe sahip olan sonlu bağlantılı Ω bölgesinin Green fonksiyonunu göstermektedir .İspatın tekniği Teorem 2.3.2 nin ispatına çok benzerdir.

h, Ω içinde bir harmonik fonksiyon olsun. $F(w) := \partial_w h(w)$ fonksiyonunu tanımlayalım. h, harmonik olduğundan F holomorfiktir çünkü

$$\partial_{\overline{w}} F(w) = \partial_{\overline{w}} \partial_w h(w) = \frac{1}{4}\Delta h(w) = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} u_0(w) &:= -w\overline{F(w)} = -w\overline{\partial_w h(w)}, \\ p_R(w) &:= -4\operatorname{Re} F(w) = -4\operatorname{Re}\partial_w h(w) \end{aligned}$$

fonksiyonları, Uyarı 5.1.3 den, (2.1) homojen momentum denklemi ve $\operatorname{div} u_0 = \frac{1}{2}p_R$ eşitliğini sağlar.

$$H(w) := -\frac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega} u_0(\omega)\,\partial_{\overline{\omega}} G(w,\omega)\,d\overline{\omega}$$

harmonik fonksiyonu $-u_0$ ın sınır değerlerine eşit olan sınır değerlerine sahiptir, bakınız Garabedian (1951). u_0 ın tanımını yerine yazarak, w ya göre kısmi diferansiyeli alarak ve

(4.37) kullanılarak

$$\partial_w H(w) = \frac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega} \partial_w \partial_{\overline{\omega}} G(w,\omega)\,\omega\overline{\partial_\omega h(\omega)}d\overline{\omega} = -\frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} K(w,\omega)\,\omega\partial_{\overline{\omega}}\overline{h(\omega)}d\overline{\omega}$$

bulunur. Green teoreminden

$$\partial_w H(w) = \int_\Omega K(w,\omega)\,\omega\partial_\omega\partial_{\overline{\omega}}\overline{h(\omega)}dA(\omega) + \int_\Omega \partial_\omega (K(w,\omega)\,\omega)\,\overline{\partial_\omega h(\omega)}dA(\omega)$$

elde edilir. İlk terim sıfırdır çünkü h harmoniktir. Böylece, Bergman çekirdeği için $\partial_\omega K(w,\omega) = 0$ da kullanılarak,

$$\partial_w H(w) = \int_\Omega K(w,\omega)\,\overline{\partial_\omega h(\omega)}dA(\omega) = \int_\Omega K(w,\omega)\,\overline{F(\omega)}dA(\omega)$$

elde edilir. Şimdi

$$u = u_0 + H$$

fonksiyonu, karşılık gelen p_R basıncı ile (2.1) homojen momentum denklemini sağlar ve sıfır sınır değerlerine sahiptir. Böylece

$$\mathcal{S}p_R(w) = \operatorname{div} u(w) = \frac{1}{2}p_R(w) + 2\operatorname{Re}\int_\Omega K(w,\omega)\,\overline{F(\omega)}dA(\omega)$$

sonucuna ulaşırız. h yerine $-ih$ alınarak yapılan benzer hesaplama ile, $-4F(w) = p_R(w) + ip_I(w)$ olmak üzere,

$$\mathcal{S}p_I(w) = \operatorname{div} u(w) = \frac{1}{2}p_I(w) - 2\operatorname{Im}\int_\Omega K(w,\omega)\,\overline{F(\omega)}dA(\omega)$$

elde edilir. Son denklemleri bir araya getirelim:

$$2\mathcal{S}F(w) = F(w) - \overline{\int_\Omega K(w,\omega)\,\overline{F(\omega)}dA(\omega)}.$$

Böylece Teorem 2.3.2 ye benzer aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5.2 *Ω, sınır bileşenleri sürekli eğriliğe sahip olan sonlu bağlantılı bir bölge olsun. O zaman Ω nın Schur tamamlayıcı ve Friedrichs operatörleri için (2.16) sağlanır.*

BÖLÜM 5

STOKES AKIŞKANLARI İÇİN TEMSİL TEOREMLERİ

Bu bölümde Zsuppán (2008a) dan yararlanacağız ve harmonik fonksiyonlar yardımı ile Stokes akışkanları için temsil formüllerini araştıracağız.

5.1 GİRİŞ

Bu bölümde harmonik fonksiyonlar aracılığıyla Stokes akışkanları için Kratz (1991) ve Kratz and Lindae (1992) de verilen temsil formüllerini inceleyeceğiz. Karmaşık notasyonlardan kaçınacağız, çünkü üç boyutlu bölgelerle de ilgilenilmektedir. Ama önceki bölümlerde verilen sonuçlar ile bağlantısını da göstereceğiz.

Notasyonlar çoğunlukla Kratz (1991) ve Kratz and Lindae (1992) de kullanılanlara benzerdir. $\mathbb{R}^3$ uzayının alışılmış iç çarpımı ve vektör çarpımını kullanacağız. İki boyutlu formüllerde $\overrightarrow{x}^{\perp} = \binom{x_1}{x_2}^{\perp} := \binom{x_2}{-x_1}$ olsun. ∇, div, rot ve Δ diferansiyel operatörleri sırasıyla gradyant, diverjans, rotasyon ve skaler fonksiyonların Laplasyanını gösterecek ve burada iki boyutlu $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)^T$ vektör alanı için rotasyon daha önceki bölümlerde olduğu gibi

$\operatorname{rot} \overrightarrow{v} := \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}$

ile verilmektedir.

Tanım 5.1.1 *$\overrightarrow{v}$ vektör alanı için eğer $\overrightarrow{v} \in C_2(\Omega)$ ise ve $\overrightarrow{x} \in \Omega$ için*

$$\Delta \overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}\right) = \nabla p\left(\overrightarrow{x}\right), \ \operatorname{div} \overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}\right) = 0 \tag{5.1}$$

olacak şekilde bir $p \in C_1(\Omega)$ (karşılık gelen basınç) fonksiyonu varsa $\overrightarrow{v}$ ye $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$, bölgesinde bir Stokes fonksiyonu denir.

***Önerme 5.1.2 (Kratz (1991) de Teorem** 1)* *$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge olsun. Bir $\overrightarrow{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu Ω içinde karşılık gelen p basıncı ile bir Stokes fonksiyonudur ancak ve ancak*

$$\overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x} \operatorname{div} \overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x}^{\perp} \operatorname{rot} \overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + \overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) \tag{5.2}$$

$$p\left(\overrightarrow{x}\right) = -2 \operatorname{div} \overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right), \ \overrightarrow{x} \in \Omega \text{ için} \tag{5.3}$$

olacak şekilde Ω *içinde bir* $\overrightarrow{h}$ *harmonik fonksiyonu vardır, bu* $\overrightarrow{h}$ *harmonik fonksiyonu tektir ve* $\overrightarrow{x} \in \Omega$ *için*

$$\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{4}\left(p(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right) \tag{5.4}$$

dir.

Uyarı 5.1.3 *Bir önceki Önerme 5.1.2 nin sadece basit bağlantılı bölgeler için değil, keyfi düzlem bölgeleri için de geçerli olduğuna dikkat edelim. Dahası basit bağlantılı bölgeler durumunda Önerme 5.1.2 , Önerme 3.1.2 de kullanılan karmaşık notasyon ile verilen temsile denktir, Çünkü*

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})\right) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = -z\overline{\partial_z h(z)} + h(z)$$

olduğu kolayca doğrulanır. Bunun yanı sıra basit bağlantılı bölgelerde her bir h *harmonik fonksiyonu,* v_1 *ve* v_2 *holomorfik fonksiyonları ile* $h = v_1 + \overline{v_2}$ *olarak ayrışır, yani*

$$-z\overline{\partial_z h(z)} + h(z) = -z\overline{v_1'(z)} + v_1 + \overline{v_2}$$

dir ve bu, Önerme 3.1.2 ve Önerme 5.1.2 de verilen iki boyutlu Stokes fonksiyonlarının çeşitli temsilleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyar. Böylece bu temsil formüllerinin genelleştirilmesi ve incelenmesi bu kısmı ve önceki bölümleri birleştirir.

5.2 ÜÇ BOYUTLU DURUMLARDA STOKES FONKSİYONLARI

Önerme 5.1.2 de iki boyutlu Stokes fonksiyonları için temsilin genelleştirilmişi olduğu gibi üç boyutlu Stokes fonksiyonlar içinde temsile sahibiz.

Önerme 5.2.1 (Kratz (1991) de Teorem 2) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *orijine göre yıldız-şekilli bir bölge olsun. Bu durumda* $\overrightarrow{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *fonksiyonu* Ω *içinde karşılık gelen* p *basıncı ile bir Stokes fonksiyonudur ancak ve ancak*

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})\right) \tag{5.5}$$

$$p(\overrightarrow{x}) = -2\operatorname{div}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x}\in\Omega \text{ için} \tag{5.6}$$

olacak şekilde bir $\overrightarrow{h}$ *harmonik fonksiyonu vardır,* $\overrightarrow{h}$ *harmonik fonksiyonu tektir ve* $\overrightarrow{x} \in \Omega$ *için*

$$\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{6}\left(p(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{x}\times\nabla\phi(\overrightarrow{x}) \tag{5.7}$$

elde edilir. Burada ϕ fonksiyonu Ω içinde harmoniktir ve $\overrightarrow{x} \in \Omega$ için

$$\phi(\overrightarrow{x}) = -\frac{1}{4}\int_0^1 t^4 \overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(t\overrightarrow{x})\,dt \tag{5.8}$$

şeklinde verilir.

Kratz (1991) Teorem 2 de kullanılan $\widetilde{\overrightarrow{v}}$ harmonik fonksiyonunun Önerme 5.2.1 de çok az bir değişikliğe uğratıldığına dikkat edelim: $\overrightarrow{h} = \frac{3}{2}\widetilde{\overrightarrow{v}}$ eşitliğini kullandık. Önerme 5.2.1 in sadece üç boyutlu yıldız-şekilli bölgeler için geçerli olduğuna dikkat edelim.
Diğer bir temsil teoremi aşağıdaki önermede verilecektir

Önerme 5.2.2 (Kratz-Lindae, bakınız Kratz and Lindae (1992)) *$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bölgesinin orijine göre yıldız-şekilli bir bölge olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\overrightarrow{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu Ω içinde karşılık gelen p basıncı ile bir Stokes fonksiyonudur ancak ve ancak*

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) = \nabla\varphi(\overrightarrow{x}) + \operatorname{rot}\left(r^2\overrightarrow{x} \times \nabla\Psi(\overrightarrow{x})\right) + \overrightarrow{x} \times \nabla\Phi(\overrightarrow{x}),\ r = |\overrightarrow{x}| \text{ olmak üzere} \tag{5.9}$$

$$p(\overrightarrow{x}) = -6\Psi(\overrightarrow{x}) - 10\overrightarrow{x}.\nabla\Psi(\overrightarrow{x}) - 4\overrightarrow{x}.\nabla(\overrightarrow{x}.\nabla\Psi(\overrightarrow{x})),\ \overrightarrow{x} \in \Omega \text{ için} \tag{5.10}$$

olacak şekilde Ω içinde Ψ, Φ ve φ (skaler) harmonik fonksiyonları vardır. $p(0) = \Psi(0) = \Phi(0) = \varphi(0) = 0$ normalleştirmesi altında bu harmonik fonksiyonlar $\overrightarrow{v}$ Stokes fonksiyonu (ve onun p basıncı) tarafından tek şekilde belirlenir ve bunlar $\overrightarrow{x} \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\Psi(\overrightarrow{x}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\sqrt{\tau} - 1\right\} p(\tau\overrightarrow{x})\,d\tau, \\
\Phi(\overrightarrow{x}) &= -\int_0^1 w(\tau\overrightarrow{x})\,d\tau, \\
\varphi(\overrightarrow{x}) &= \int_0^1 \overrightarrow{x}.\widetilde{\overrightarrow{v}}(\tau\overrightarrow{x})\,d\tau
\end{aligned}$$

formülleri ile verilir. Burada $\overrightarrow{v}^*(\overrightarrow{x}) = \widetilde{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) - \nabla\varphi(\overrightarrow{x})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\widetilde{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x} \times \nabla\left(r^2\Psi\right)\right) \\
w(\overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{x}.\int_0^1 \operatorname{rot}\overrightarrow{v}^*(\tau\overrightarrow{x})\,d\tau
\end{aligned}$$

şeklindedir.

5.2.1 YILDIZ-ŞEKİLLİ BÖLGELERDE DENK TEMSİLLER

Bu alt kısımda Önerme 5.2.1 ve Önerme 5.2.2 deki temsili sonuçların nasıl birleştirilebileceğini göstereceğiz. Bunu başarmak için aşağıdaki tanımı veriyoruz.

Tanım 5.2.3 *$p \in C_1(\Omega)$ skaler fonksiyonu ve $\overrightarrow{q} \in C_1(\Omega)$ vektör alanı, $\overrightarrow{x} \in \Omega$ için*

$$\text{rot}\,\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{x}\right) = -\nabla p\left(\overrightarrow{x}\right), \ \text{div}\,\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{x}\right) = 0 \qquad (5.11)$$

denklemlerini sağlarsa bunlar eşlenik olarak adlandırılırlar.

Kuaternionik analizde (5.11) denklemleri Moisil-Teodorescu denklemleri olarak bilinirler. Ayrıca bunlar Velte (1996) da göz önüne alınmıştır.

Aşağıdaki sonuçların ispatı için Kratz (1991) ve Kratz and Lindae (1992) de de kısmen kullanılan vektör analizinden birkaç formüle de ihtiyacımız var.

Burada, ilgili $\varphi := \varphi\left(\overrightarrow{x}\right)$ ve $\overrightarrow{u} := \overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)$ fonksiyonlarının kısmi türevlerinin var ve/veya sürekli olduklarını kabul edelim.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x}\,\text{div}\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} \times \text{rot}\,\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{u} + \nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}\right) + \text{rot}\left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{u}\right) && (5.12)\\
\text{div}\left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{u}\right) &= -\overrightarrow{x}.\,\text{rot}\,\overrightarrow{u} && (5.13)\\
\Delta\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}\right) &= \overrightarrow{x}.\Delta\overrightarrow{u} + 2\,\text{div}\,\overrightarrow{u} && (5.14)\\
\Delta\left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{u}\right) &= \overrightarrow{x} \times \Delta\overrightarrow{u} + 2\,\text{rot}\,\overrightarrow{u} && (5.15)\\
\text{rot}\left(\varphi\overrightarrow{x}\right) &= -\overrightarrow{x} \times \nabla\varphi && (5.16)\\
\text{div}\left(\varphi\overrightarrow{x}\right) &= n\varphi + \overrightarrow{x}.\nabla\varphi, \ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ için} && (5.17)\\
\Delta\left(\varphi\overrightarrow{x}\right) &= \overrightarrow{x}\Delta\varphi + 2\nabla\varphi && (5.18)\\
\Delta\left(\overrightarrow{x} \times \nabla\varphi\right) &= \overrightarrow{x} \times \nabla\Delta\varphi && (5.19)\\
\text{rot}\left(\overrightarrow{x} \times \nabla\varphi\right) &= -\nabla\left(\varphi + \overrightarrow{x} \times \nabla\varphi\right) + \overrightarrow{x}\Delta\varphi && (5.20)\\
\nabla\left(r^2\varphi\right) &= 2\varphi\overrightarrow{x} + r^2\nabla\varphi, \ r = \left|\overrightarrow{x}\right| \text{ ile} && (5.21)\\
\Delta\left(r^2\varphi\right) &= 6\varphi + 4\overrightarrow{x}.\nabla\varphi + r^2\Delta\varphi && (5.22)\\
\overrightarrow{x}\Delta\left(r^2\varphi\right) &= \nabla\left(r^2\varphi + \overrightarrow{x}.\nabla\left(r^2\varphi\right)\right) + \text{rot}\left(r^2\overrightarrow{x} \times \nabla\varphi\right) && (5.23)
\end{aligned}$$

Önerme 5.2.4 *$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, orijine göre yıldız-şekilli bir bölge olduğunu kabul edelim. Bu durumda Ω üzerinde $\left(\overrightarrow{q}, p\right)$ çifti eşlenik çifttir ancak ve ancak $\overrightarrow{x} \in \Omega$ için*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{x}\right) &= \nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x} \times \nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right), && (5.24)\\
p\left(\overrightarrow{x}\right) &= \phi\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x}.\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right) && (5.25)
\end{aligned}$$

olacak şekilde Ω içinde φ ve ϕ skaler harmonik fonksiyonları vardır. Bu harmonik fonksiyonlar, $\varphi(0) = \phi(0) = p(0) = 0$ normalleştirmesi altında $\left(\overrightarrow{q}, p\right)$ çifti tarafından tek *şekilde belirlenir ve bunlar*

$$\phi\left(\overrightarrow{x}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\tau^2} e^{1-\frac{1}{\tau}} p\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau, \tag{5.26}$$

$$\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \int_0^1 \overrightarrow{x}.\overrightarrow{q}\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau \; \left(= \int_0^1 \overrightarrow{x}\left(\overrightarrow{q}\left(\tau\overrightarrow{x}\right) - \tau\overrightarrow{x} \times \nabla\phi\left(\tau\overrightarrow{x}\right)\right) d\tau\right) \tag{5.27}$$

formülleri ile verilir.

İspat.(5.16) ve (5.20) den (5.24) ve (5.25) denklemlerinin φ ve ϕ harmonik fonksiyonları ile (5.11) i sağladığını görürüz. Diğer yönü ispatlamak için aşağıdaki özdeşlikler faydalıdır (bakınız Kratz and Lindae (1992) de (8) ve (9)):

$$\tau\frac{d}{d\tau}\left\{\phi\left(\tau\overrightarrow{x}\right)\right\} = \overrightarrow{x}.\nabla\left\{\phi\left(\tau\overrightarrow{x}\right)\right\}, \tag{5.28}$$

$$\tau\frac{d}{d\tau}\left\{\overrightarrow{q}\left(\tau\overrightarrow{x}\right)\right\} = -\overrightarrow{q}\left(\tau\overrightarrow{x}\right) + \nabla\left\{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{q}\left(\tau\overrightarrow{x}\right)\right\}. \tag{5.29}$$

Sabitlenen $\overrightarrow{x} \in \Omega$ için $z(t) := \phi\left(t\overrightarrow{x}\right)$ olsun. (5.25) ve (5.28) özdeşliği kullanılarak $p\left(t\overrightarrow{x}\right) = \phi\left(t\overrightarrow{x}\right) + t\overrightarrow{x}.\nabla\left\{\phi\left(t\overrightarrow{x}\right)\right\}$ bulunur ve $z(t)$ fonksiyonu için

$$t^2 z'(t) + z(t) = p\left(t\overrightarrow{x}\right)$$

ile verilen adi diferansiyel denklemine ulaşırız. $z(0) = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak bu denklem çözülür ve

$$z(t) = e^{\frac{1}{t}} \int_0^1 \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{1}{\tau}} p\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau$$

bulunur. Böylece $\phi\left(\overrightarrow{x}\right) = z(1) = \int_0^1 \frac{1}{\tau^2} e^{1-\frac{1}{\tau}} p\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau$ sonucuna ulaşılır. ϕ için Tanım (5.26) da olduğu gibi bu ifayi seçerek geri hesaplama ile (5.25) elde edilir.
Dahası $\Delta p = 0$ olduğundan

$$\Delta\phi\left(\overrightarrow{x}\right) = \Delta\int_0^1 \frac{1}{\tau^2} e^{1-\frac{1}{\tau}} p\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\tau} e^{1-\frac{1}{\tau}} \Delta p\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau = 0$$

bulunur. (5.29) içinde $\widetilde{\overrightarrow{q}}(x) := \overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{x} \times \nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right)$ yerine yerleştirilerek $\overrightarrow{x}.\widetilde{\overrightarrow{q}} = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{x}\right)$ olduğunu gözlemleriz ve bu nedenle

$$\int_0^1 \tau\frac{d}{d\tau}\left\{\widetilde{\overrightarrow{q}}\left(\tau\overrightarrow{x}\right)\right\} d\tau = -\int_0^1 \widetilde{\overrightarrow{q}}\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau + \int_0^1 \nabla\left\{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{q}\left(t\overrightarrow{x}\right)\right\} d\tau$$

elde edilir. İntegral ve gradyant yer değiştirilerek sağ tarafta (5.27) bulunur. Şimdi kısmi integrasyon ile

$$\left[\tau\widetilde{\overrightarrow{q}}\left(\tau\overrightarrow{x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \widetilde{\overrightarrow{q}}\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau = -\int_0^1 \widetilde{\overrightarrow{q}}\left(\tau\overrightarrow{x}\right) d\tau + \nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)$$

elde edilir ve $\widetilde{\overrightarrow{q}}\left(\overrightarrow{x}\right)=\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right)$ ve böylece(5.24) bulunur. Dahası (5.14) ve (5.11) den

$$\Delta\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)=\Delta\int_0^1\overrightarrow{x}.\overrightarrow{q}\left(\tau\overrightarrow{x}\right)d\tau\int_0^1\tau^2\overrightarrow{x}.\left(\Delta\overrightarrow{q}\right)\left(\tau\overrightarrow{x}\right)+2\tau\left(\operatorname{div}\overrightarrow{q}\right)\left(\tau\overrightarrow{x}\right)d\tau=0$$

sonucuna ulaşılır.

Geriye φ ve ϕ nin tekliğini göstermek kaldı. Bunun için $\overrightarrow{q}=\nabla\varphi+\overrightarrow{x}\times\nabla\phi\equiv0$ ve $p=\phi+\overrightarrow{x}.\nabla\phi\equiv0$ olacak şekilde $\varphi\left(0\right)=\phi\left(0\right)=0$ özelliğine sahip φ ve ϕ yi göz önüne alalım. Yine $\overrightarrow{x}\in\Omega$ yı sabitleyerek ve $z\left(t\right)=\phi\left(t\overrightarrow{x}\right)$ alarak $z\in C^{\infty}\left[0,1\right]$ elde edilir ve (5.28) den

$$t^2z'\left(t\right)+z\left(t\right)=0 \text{ ve } z\left(0\right)=0$$

bulunur. Bu adi diferansiyel denklemi $z\left(t\right)\equiv0$ tek çözümüne sahiptir ve buradan $\phi\equiv0$ elde edilir. Bunu $\nabla\varphi+\overrightarrow{x}\times\nabla\phi\equiv0$ denkleminde yerine yazarak $\nabla\varphi\equiv0$ ve ayrıca normalleşmesi ile de $\varphi\equiv0$ elde edilir.

Teorem 5.2.5 *$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ orijine göre yıldız-şekilli bir bölge olsun. Önerme 5.2.1 ve Önerme 5.2.2 de verilen temsil formülleri denktir.*

İspat.$(\overrightarrow{v},p)$ Stokes çiftinin, Ψ, Φ, φ üç harmonik skaler fonksiyonları ile Önerme 5.2.2 deki (5.9), (5.10) formülleri tarafından verildiğini kabul edelim. ϕ,

$$\Phi\left(\overrightarrow{x}\right)=\frac{4}{3}\phi\left(\overrightarrow{x}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{x}.\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right) \tag{5.30}$$

denkleminin çözümü olsun. $\overrightarrow{x}\in\Omega$ için $\phi\left(\overrightarrow{x}\right)=3\int_0^1\Phi\left(t\overrightarrow{x}\right)dt$ dir (bunun için ispat Kratz (1991) de Önerme 2 ye çok benzerdir) ve $\Delta\phi\left(\overrightarrow{x}\right)=0$ elde edilir. Şimdi

$$\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)=\frac{2}{3}\nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)+\left(\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x}\times\left(\frac{2}{3}\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}\times\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \tag{5.31}$$

ifadesini tanımlayalım. (5.31) yapısından $\chi\left(\overrightarrow{x}\right)=\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)$ ve $\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)=\frac{2}{3}\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}\times\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)=\frac{2}{3}\nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)+\chi\left(\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Dahası (5.16) ve (5.20) den $\overrightarrow{x}\in\Omega$ için $\operatorname{rot}\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)=-\nabla\chi\left(\overrightarrow{x}\right)$ ve $\operatorname{div}\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)=0$ ve böylece (5.15) ve (5.18) ile birlikte

$$\nabla\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)=\frac{2}{3}\nabla\Delta\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}\Delta\chi\left(\overrightarrow{x}\right)+2\nabla\chi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}\times\Delta\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)+2\operatorname{rot}\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)=0$$

elde edilir, yani $\overrightarrow{h}$ harmoniktir. (5.31) den basit hesaplama ile

$$-2\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{h} = -6\chi - 4\overrightarrow{x}.\nabla\chi = -6\Psi - 10\overrightarrow{x}.\nabla\Psi - 4\overrightarrow{x}.\nabla\left(\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\right)$$

bulunur ve buradan (5.9) kullanılarak (5.5) elde edilir.

Şimdi hız formüllerini ele alacağız.

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{A}_{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) &= 2\nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) - \nabla\left(\overrightarrow{x}.\nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - \mathrm{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)\right),\\
3\overrightarrow{A}_{\phi}\left(\overrightarrow{x}\right) &= 2\overrightarrow{x}\times\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right) - \mathrm{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\left(\overrightarrow{x}\times\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\right),\\
2\overrightarrow{A}_{\Psi}\left(\overrightarrow{x}\right) &= \mathrm{rot}(r^2\overrightarrow{x}\times\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right) - \nabla\left(r^2\left(\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\right) +\\
&\quad 2\left(\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{x}\times\left(\overrightarrow{x}\times\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere (5.31) den

$$\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) - \frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - \frac{1}{2}\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{A}_{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{A}_{\phi}\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{A}_{\Psi}\left(\overrightarrow{x}\right)$$

bulunur. Bu ifadeleri basitleştirelim. İlk olarak (5.20) ve $\Delta\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$ den $\overrightarrow{A}_{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) = \nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)$ bulunur. (5.16), (5.21), (5.30) ve $\Delta\phi\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$ bizi $\overrightarrow{A}_{\phi}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\times\nabla\Phi\left(\overrightarrow{x}\right)$ eşitliğine götürür. (5.21), (5.22), (5.23) ifadelerinden

$$\overrightarrow{A}_{\Psi}\left(\overrightarrow{x}\right) = \mathrm{rot}\left(r^2\overrightarrow{x}\times\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(r^2\Delta\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\overrightarrow{x}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\Delta\Psi\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$ den $\overrightarrow{A}_{\Psi}\left(\overrightarrow{x}\right) = \mathrm{rot}\left(r^2\overrightarrow{x}\times\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ bulunur. Basitleştirilmiş ifadeleri toplayalım ve ilaveten (5.12) özdeşliğini kullanalım. Böylece

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x}\times\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) + \mathrm{rot}\left(r^2\overrightarrow{x}\times\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + \overrightarrow{x}\times\nabla\Phi\left(\overrightarrow{x}\right)$$

elde edilir. Buradan, (5.9) kullanılarak (5.5) elde edilir

Şimdi Önerme 5.2.1 in temsili formülünün sağlandığını kabul edelim. $\Delta\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$ dan Tanım 5.2.3 anlamında $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)$ ve $-\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)$ eşlenik fonksiyonlarına ulaşılır:

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = -\nabla\left(-\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \text{ ve } \mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = 0.$$

Önerme 5.2.4 den χ ve ζ harmonik skaler fonksiyonları ile

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) = \nabla\chi\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x}\times\nabla\zeta\left(\overrightarrow{x}\right) \text{ ve } -\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) = \zeta\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x}.\nabla\zeta\left(\overrightarrow{x}\right) \tag{5.32}$$

yi elde ederiz. $\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)$ skaler fonksiyonu için

$$\zeta\left(\overrightarrow{x}\right) = -3\Psi\left(\overrightarrow{x}\right) - 2\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)$$

denklemini çözerek (Önerme 5.2.4 dekine benzer hesaplama ile)

$$\Psi(\overrightarrow{x}) = -\int_0^1 \frac{1}{2\tau^2} e^{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)} \zeta(\tau\overrightarrow{x})\, d\tau$$

ve

$$\Delta\Psi(\overrightarrow{x}) = -\int_0^1 \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)} (\Delta\zeta)(\tau\overrightarrow{x})\, d\tau = 0$$

ifadelerini elde ederiz.

Bunu (5.32) de yerine yazarak ve Önerme 5.2.1 den $p = -2\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{h}$ eşitliği kullanarak Önerme 5.2.2 de (5.10) formülüne denk olan

$$p = -(6\Psi + 4\overrightarrow{x}.\nabla\Psi) - \overrightarrow{x}.\nabla(6\Psi + 4\overrightarrow{x}.\nabla\Psi)$$

eşitliğine ulaşılır. Önerme 5.2.1 kullanılarak $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) = -4\nabla\phi(\overrightarrow{x}) + 2\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})$ ve (5.32) den

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) = -\nabla(4\phi(\overrightarrow{x}) - 2\chi(\overrightarrow{x})) - \overrightarrow{x} \times \nabla(6\Psi(\overrightarrow{x}) + 4\overrightarrow{x}.\nabla\Psi(\overrightarrow{x})) \tag{5.33}$$

elde edilir.

$$4\phi(\overrightarrow{x}) - 2\chi(\overrightarrow{x}) = \Phi(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}.\nabla\Phi(\overrightarrow{x})$$

denkleminin çözümü (Önerme 5.2.4 deki benzer hesaplama ile)

$$\Phi(\overrightarrow{x}) = \int_0^1 \frac{1}{\tau^2} e^{1-\frac{1}{\tau}} (4\phi(\tau\overrightarrow{x}) - 2\chi(\tau\overrightarrow{x}))\, d\tau$$

ve $\Delta\Phi(\overrightarrow{x}) = 0$ olur. Bu, (5.33) de yerine yazılarak

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) = -\nabla(\Phi(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}.\nabla\Phi(\overrightarrow{x})) - \overrightarrow{x} \times \nabla(6\Psi(\overrightarrow{x}) + 4\overrightarrow{x}.\nabla\Psi(\overrightarrow{x}))$$

elde edilir ve (5.22), (5.23) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \mathrm{rot}\left(r^2\overrightarrow{x} \times \nabla\Psi(\overrightarrow{x})\right) - \overrightarrow{x} \times \nabla\Phi(\overrightarrow{x})\right) &= 0 \\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \mathrm{rot}\left(r^2\overrightarrow{x} \times \nabla\Psi(\overrightarrow{x})\right) - \overrightarrow{x} \times \nabla\Phi(\overrightarrow{x})\right) &= 0
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. İkinci denklem sağlanır. Tekrar Önerme 5.2.4 den φ ve ω harmonik skaler fonksiyonları ile

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \mathrm{rot}\left(r^2\overrightarrow{x} \times \nabla\Psi(\overrightarrow{x})\right) - \overrightarrow{x} \times \nabla\Phi(\overrightarrow{x}) &= \nabla\varphi(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} \times \nabla\omega(\overrightarrow{x}), \\
0 &= \omega(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}.\nabla\omega(\overrightarrow{x})
\end{aligned}$$

elde edilir. Dahası ikinci denklem bölge içinde $\omega \equiv 0$ olduğunu gösterir (Önerme 5.2.4 ispatının son kısmına bakınız). Böylece $\overrightarrow{v}$ için

$$\overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}\right) = \nabla\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) + \operatorname{rot}\left(r^2\overrightarrow{x} \times \nabla\Psi\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + \overrightarrow{x} \times \nabla\Phi\left(\overrightarrow{x}\right)$$

bulunur. Bu, Önerme 5.2.2 deki (5.9) formülüdür.

5.2.1 ve 5.2.2 Önermelerinde fonksiyonları yaklaşık olarak seçerek yıldız-şekilli bir bölgede Stokes çifti için denk formülleri elde edilir.

Uyarı 5.2.6 *Bu sonuç, (5.9) ve (5.10) dan yararlanarak aşağıdaki formüllerden elde edilmiştir.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\overrightarrow{v} &= -\nabla\left(\Phi + \overrightarrow{x}.\nabla\Phi\right) - \overrightarrow{x} \times \nabla\left(6\Psi + 4\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\right) \\
p &= -\left(6\Psi + 4\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\right) - \overrightarrow{x}.\nabla\left(6\Psi + 4\overrightarrow{x}.\nabla\Psi\right).
\end{aligned}$$

Eğer $\overrightarrow{v}$, karşılık gelen p basıncı ile bir bölgede bir Stokes fonksiyonu ise yukarıdaki formüller $\operatorname{rot}\overrightarrow{v}$ ve p nin bu bölgede eşlenik (harmonik) fonksiyonlar olduğunu gösterir. (ve tersi olarak $\overrightarrow{q}$, p ye eşlenik ise $\overrightarrow{q}$ nun her hangi bir serbest vektör potansiyelli fonksiyonunun diverjansı p basıncına karşılık gelen bir p basınçlı bir Stokes fonksiyonudur.)

Uyarı 5.2.7 *Neuber (1934) de $\overrightarrow{v}$ Stokes fonksiyonlarının ve $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}\left(\overrightarrow{x}\right)$ ve $H_0 = H_0(\overrightarrow{x})$ harmonik potansiyellerinin terimleri içinde, karşılık gelen p basıncının Papkovich-Neuber temsili denilen bir temsili vardır:*

$$\overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}\right) = -\nabla H_0\left(\overrightarrow{x}\right) - \nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{H}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + 2\overrightarrow{H}\left(\overrightarrow{x}\right), \tag{5.34}$$

$$p\left(\overrightarrow{x}\right) = -2\operatorname{div}\overrightarrow{H}\left(\overrightarrow{x}\right). \tag{5.35}$$

Eğer bu bölge yıldız-şekilli ise (5.34) den $\operatorname{rot}\overrightarrow{v} = 2\operatorname{rot}\overrightarrow{H}$ bulunur ve bunu (5.8) de yerine yazarsak

$$\phi\left(\overrightarrow{x}\right) = -\frac{1}{2}\int_0^1 t^4\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{H}\left(t\overrightarrow{x}\right)dt$$

ve (5.7) de yerine yazarsak

$$\overrightarrow{h} = -\frac{2}{3}\nabla H_0 + \frac{5}{3}\overrightarrow{H}\left(\overrightarrow{x}\right) - \frac{1}{3}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{H}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + \frac{1}{3}\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{H}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{x} \times \nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right)$$

elde edilir. Bu formüller Önerme 5.2.1 deki $\overrightarrow{h}$ yardımcı harmonik fonksiyonu ve Papkovich-Neuber potansiyelleri arasında bir bağlantı oluşturur. Dahası

$$\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{H} - \overrightarrow{h}\right) = -\nabla\left(2\phi\right),\ \operatorname{div}\left(\overrightarrow{H} - \overrightarrow{h}\right) = 0$$

dır.

Uyarı 5.2.8 *Eğer bölge yıldız-şekilli ise aynı zamanda Önerme 5.2.2 deki φ, Ψ, Φ yardımcı harmonik fonksiyonları ve (5.34) ve (5.35) içindeki H_0 ve $\overrightarrow{H}$ harmonik potansiyelleri arasında da bir ilişki vardır.*

Uyarı 5.2.9 $r = |\overrightarrow{x}|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H}(\overrightarrow{x}) &: = (\Psi(\overrightarrow{x}) + 2\overrightarrow{x}.\nabla\Psi(\overrightarrow{x}))\overrightarrow{x} - r^2\nabla\Psi(\overrightarrow{x}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{x} \times \nabla\Phi(\overrightarrow{x}),\\ H_0(\overrightarrow{x}) &: = -\varphi(\overrightarrow{x}),\end{aligned}$$

denirse (5.20)-(5.23) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}-\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{H}(\overrightarrow{x})\right) + 2\overrightarrow{H}(\overrightarrow{x}) &= \operatorname{rot}\left(r^2\overrightarrow{x} \times \nabla\Psi(\overrightarrow{x})\right) + \overrightarrow{x} \times \nabla\Phi(\overrightarrow{x}),\\ -2\operatorname{div}\overrightarrow{H}(\overrightarrow{x}) &= -6\Psi(\overrightarrow{x}) - 10\overrightarrow{x}.\nabla(\overrightarrow{x}) - 4\overrightarrow{x}.\nabla(\overrightarrow{x}.\nabla\Psi(\overrightarrow{x}))\end{aligned}$$

olduğu kolayca elde edilir ve bunlar (5.9), (5.10) ve (5.34), (5.34) arasında ilişki oluştururlar. (5.30) dan (5.34), (5.35) ve Önerme 5.2.1 deki temsillerdeki harmonik fonksiyonlar arasında

$$\overrightarrow{H}(\overrightarrow{x}) + \frac{2}{3}\nabla H_0(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) + \frac{1}{6}\overrightarrow{x} \times \nabla(\overrightarrow{x}.\nabla\phi(\overrightarrow{x}))$$

bağlantısı da elde edilir.

5.2.2 KEYFİ UZAYSAL BÖLGELERİN TEMSİLİ

Bu alt kısımda bölge için yıldız-şekilliliğe kısıtlanışı nasıl önleyeceğimiz sorusu üzerinde çalışacağız. Bu, Kratz (1991) de belirtildiği gibi bölge içinde bir kesin denklemin çözünebilirliğinin ispatlanması ile yapılabilir (Kratz (1991) de denklem (20) ye bakınız).
Bundan kaçınmak için Önerme 5.2.1 de hız formülü içindeki bir ilave tamamlayıcı terim ile bunu genelleştirmenin bir başka yolunu seçebiliriz. Dahası bir yardımcı harmonik fonksiyon yerine bir harmonik vektör fonksiyonu ve ayrıca bir harmonik skaler fonksiyonu (Papkovich-Neuber potansiyellerinin durumundaki gibi) kullanırız.

Teorem 5.2.10 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *bir bölge olsun.* $(\overrightarrow{v}, p)$, Ω *üzerinde bir Stokes çiftidir ancak ve ancak*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= -\frac{1}{2}\nabla(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{w}) - \frac{1}{2}\operatorname{rot}(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{w} + \psi\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{w}, &(5.36)\\ p &= -2\operatorname{div}\overrightarrow{w} &(5.37)\end{aligned}$$

olacak şekilde Ω üzerinde $\overrightarrow{w}$ ve ψ harmonik fonksiyonları vardır. Dahası bu harmonik fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{v} - \frac{1}{6}\left(p\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \times rot\,\overrightarrow{v}\right), && (5.38)\\
\psi &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v} && (5.39)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. İspat Kratz (1991) de Teorem 2 nin ispatına çok benzerdir. $\overrightarrow{v}$ ve p, $\overrightarrow{w}$ ve ψ harmonikleri ile (5.36) ve (5.37) de verildiği gibi olsun. (5.13)-(5.18) denklemlerini kullanarak

$$\Delta\left(-\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{w}\right) + \overrightarrow{w}\right) = \frac{1}{2}p,\ \Delta\left(-\frac{1}{2}rot\left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{w} + \psi\overrightarrow{x}\right)\right) = \frac{1}{2}p$$

ve

$$\operatorname{div}\overrightarrow{v} = \operatorname{div}\left(-\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{w}\right) + \overrightarrow{w}\right) - \frac{1}{2}\Delta\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{w}\right) + \operatorname{div}\overrightarrow{w} = 0$$

eşitliklerine sahip oluruz. Böylece $(\overrightarrow{v}, p)$ bir Stokes çiftidir.

Şimdi $(\overrightarrow{v}, p)$ bir Stokes çifti olsun. (5.1) dan $\Delta\overrightarrow{v} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{v} = \nabla p$, $\operatorname{rot}\Delta\overrightarrow{v} = 0$ ve $\Delta p = 0$ eşitliklerini elde ederiz. (5.13)-(5.18) kullanılarak hesaplama yaparsak (ayrıca (5.38) de bakınız):

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{2}{3}\overrightarrow{v} - \frac{1}{6}\left(p\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \times \operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\right] &= \frac{2}{3}\Delta\overrightarrow{v} - \frac{1}{6}(2\nabla p + \overrightarrow{x}\Delta p - \overrightarrow{x} \times \operatorname{rot}\Delta\overrightarrow{v}\\
&\quad -2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{v})\\
&= \frac{2}{3}\Delta\overrightarrow{v} - \frac{1}{6}\left(2\Delta\overrightarrow{v} + 2\Delta\overrightarrow{v}\right) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left[\frac{2}{3}\overrightarrow{v} - \frac{1}{6}\left(p\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \times \operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\right] &= -\frac{1}{6}\left(3p + \overrightarrow{x}.\nabla p + \overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\\
&= -\frac{1}{6}\left(3p + \overrightarrow{x}.\Delta\overrightarrow{v} - \overrightarrow{x}.\Delta\overrightarrow{v}\right) = -\frac{1}{2}p
\end{aligned}$$

dır ve buradan (5.38) de tanımllı $\overrightarrow{w}$ harmoniği ile (5.37) elde edilir. Tekrar (5.13)-(5.18)den $r = |\overrightarrow{x}|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{w}\right) &= \frac{2}{3}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{v}\right) - \frac{1}{3}p\overrightarrow{x} - \frac{1}{6}r^2\nabla p,\\
\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{w}\right) &= \frac{2}{3}\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{v}\right) - \frac{1}{6}\overrightarrow{x} \times \nabla\left(\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{x} \times \operatorname{rot}\overrightarrow{v} + \frac{1}{6}r^2\nabla p
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.12) den

$$-\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{w}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}\right)+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}+\frac{1}{12}\overrightarrow{x}\times\nabla\left(\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)$$

ve buradan Tanım (5.39) u kullanarak (5.36) temsil formülünü elde ederiz.

Uyarı 5.2.11 *Teorem 5.2.10 deki (5.36), (5.36) temsil formülleri ayrıca (5.34), (5.35) Papkovich-Neuber temsilleri ile karşılaştırılabilir:*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= -\frac{2}{3}\nabla H_0-\frac{1}{3}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{H}\right)+\frac{1}{3}\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{H}\right)+\frac{5}{3}\overrightarrow{H},\\ \psi &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{H}.\end{aligned}$$

Uyarı 5.2.7 deki $\overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{h}$ ve ϕ harmonik fonksiyonları arasındaki bağlantılara benzer olarak burada ayrıca

$$\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{H}-\overrightarrow{w}\right)=-\nabla\left(2\psi\right),\ \operatorname{div}\left(\overrightarrow{H}-\overrightarrow{w}\right)=0$$

eşitliklerini elde ederiz.

Uyarı 5.2.12 *Teorem 5.2.10 deki yardımcı harmonik fonksiyonlar $\overrightarrow{v}$ Stokes fonksiyonu ve ona karşılık gelen p basıncı tarafından tek bir şekilde belirlenmemiştir. Bazı $\overrightarrow{w}$ ve ψ harmonikleri için bir Ω uzaysal bölgesinde (bakınız (5.36))*

$$-\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{w}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}+\psi\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{w}=0$$

olduğunu varsayalım. Eğer bu denklemin rotasyonunu alırsak (5.20) ve $\Delta\psi=0$ dan

$$\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{w}-\frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}\right)\right)=\frac{1}{2}\nabla\left(\psi+\overrightarrow{x}.\nabla\psi\right)$$

denklemi elde edilir. (5.37) den $\nabla\operatorname{div}\overrightarrow{w}=0$ ve buradan Ω içinde $\operatorname{div}\overrightarrow{w}=3\gamma\in\mathbb{R}$ bulunur. Böylece $\overrightarrow{w}_0:=\overrightarrow{w}-\gamma\overrightarrow{x}$ için $\operatorname{div}\overrightarrow{w}=0$ ve buradan $\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}_0$ elde edilir. Buna göre ayrıca $\operatorname{rot}\overrightarrow{x}=0$ dan

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\left(2\overrightarrow{w}_0-\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}_0\right)\right) &= \nabla\left(\psi+\overrightarrow{x}.\nabla\psi\right),\\ \operatorname{div}\left(2\overrightarrow{w}_0-\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}_0\right)\right) &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.Bu d enklemler Ω içinde keyfi ω harmoniği ve $C\in\mathbb{R}$ ile $\widetilde{\overrightarrow{w}_0}:=\overrightarrow{w}_0+\nabla\omega$ ve $\widetilde{\psi}:=\psi+C$ için de geçerlidir. Bu, Teorem 5.2.10 deki harmonik fonksiyonların Stokes fonksiyonu ve ona karşılık gelen basınç fonksiyonu tarafından tek bir şekilde belirlenemeyeceği anlamına gelir. (Yukarıdaki denklemler gösterir ki aslında $2\overrightarrow{w}_0-\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{w}_0\right)$ ve $-\psi-\overrightarrow{x}.\nabla\psi$ fonksiyonları Tanım 5.2.3 anlamında eşleniktir.)

BÖLÜM 6

LİNEER ESNEKLİK

Bu bölümde Zsuppán (2008a) dan yararlanacağız ve Navier denkleminin çözümünün, lineer esneklik için, temsilini genelleştireceğiz. Ayrıca iki ve üç boyutlu formüller arasındaki ilişki ele alınacaktır.

6.1 LİNEER ESNEKLİK

Bu kısımda $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ bölgelerinde

$$\Delta \overrightarrow{v} = \nabla p, \ \operatorname{div} \overrightarrow{v} = \nu p \tag{6.1}$$

denklemlerinin $\overrightarrow{v}$ ve p çözümlerinin temsillerini inceleyeceğiz. İki boyutlu durumda Ω bölgesi için kısıtlama yokken üç boyutlu durumda Ω bölgesinin yıldız-şekilli olduğu farz edilir. ($\nu = 0$ için tabiki Stokes çiftlerini elde ederiz, bakınız (5.1)).

Uyarı 6.1.1 *λ ve μ Lamé sabitleri olmak üzere bir izotropik materyal gövdesinin $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ yer değiştirme vektörü için*

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \overrightarrow{v} + \mu \Delta \overrightarrow{v} = 0 \tag{6.2}$$

lineer esneklik probleminin Navier denklemini düşünelim. p yi

$$p := -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \operatorname{div} \overrightarrow{v} \tag{6.3}$$

ile tanımlarsak bu p, hidrostatik basıncı $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ Poisson oranı ile böldüğümüzde elde edilen sıkıştırılamaz limit içindedir.

$$\nu := -\frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

denilerek (6.2) yerine (6.1) denklemlerini elde ederiz. Genel (iki ya da üç boyutlu) bölgelerde (6.2) denkleminin çözümü, ((5.34) ve (5.35) e benzer şekilde, (bir tek olmayan)

$H_0 = H_0(\overrightarrow{x})$ ve $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}(\overrightarrow{x})$ harmonik fonksiyonları ile temsil edilebilirler: Eğer $\nu \neq 1$ (ya da denk olarak $\lambda + 2\mu \neq 0$) ise

$$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{H} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\nabla\left(H_0 + \overrightarrow{x}.\overrightarrow{H}\right) = 2\overrightarrow{H} - \frac{1}{1-\nu}\nabla\left(H_0 + \overrightarrow{x}.\overrightarrow{H}\right)$$

dir.

Uyarı 6.1.2 *Eğer $\overrightarrow{v}$ için bazı sınır koşulları (örneğin homojen Dirichlet) verilmiş olsaydı (6.1) denklemleri bir özdeğer problemi olarak da düşünülebilirdi.*

Eğer problem bölgesi yıldız-şekilli olarak belirlenirse aşağıdaki temsili elde ederiz. Bu temsil Önerme 5.2.1 in bir genellemesini oluşturur.

Teorem 6.1.3 *$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ orijine göre yıldız-şekilli bir bölge olsun ve $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq \frac{3}{4}, 1$ olsun. $\overrightarrow{v} \in C_2(\Omega)$ ve $p \in C_1(\Omega)$, (6.1) denklemlerini sağlar ancak ve ancak*

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})\right) + \left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}), \tag{6.4}$$

$$p(\overrightarrow{x}) = -2\operatorname{div}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x}\in\Omega \text{ için} \tag{6.5}$$

olacak şekilde bir $\overrightarrow{h} \in C_2(\Omega)$ harmonik fonksiyonu vardır. $\overrightarrow{h}$ harmonik fonksiyonu tektir ve

$$\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = \frac{2}{3-4\nu}\left(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{4}\left(p(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x} - \frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right) + \overrightarrow{x}\times\nabla\phi(\overrightarrow{x})\right) \tag{6.6}$$

eşitliği elde edilir. Burada ϕ fonksiyonu, Ω içinde harmoniktir ve

$$\phi(\overrightarrow{x}) = -\frac{1}{4(1-\nu)}\int_0^1 t^{4(1-\nu)}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(t\overrightarrow{x})\,dt \tag{6.7}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. İlk olarak $\overrightarrow{v}$ ve p, Ω içinde $\overrightarrow{h}$ harmoniği ile (6.4) ve (6.5) deki gibi verilsin. (5.13)-(5.17) özdeşlikleri ve $\Delta\overrightarrow{h} = \nabla\operatorname{div}\overrightarrow{h} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta\overrightarrow{v} &= -\frac{1}{2}\left(2\nabla\operatorname{div}\overrightarrow{h} + \overrightarrow{x}.\operatorname{div}\Delta\overrightarrow{h} + \overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\Delta\overrightarrow{h} + 2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}\right)\\
&= -2\nabla\operatorname{div}\overrightarrow{h} = \nabla p,\\
\operatorname{div}\overrightarrow{v} &= -\frac{1}{2}\left(3\operatorname{div}\overrightarrow{h} + \overrightarrow{x}.\nabla\operatorname{div}\overrightarrow{h} - \overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}\right) + \left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\operatorname{div}\overrightarrow{h}\\
&= -\frac{1}{2}\left(3\operatorname{div}\overrightarrow{h} + \overrightarrow{x}.\Delta\overrightarrow{h}\right) + \left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\operatorname{div}\overrightarrow{h} = -2\nu\operatorname{div}\overrightarrow{h} = \nu p
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\overrightarrow{v}$ ve p, (6.1) denklemlerini sağlar.

Şimdi de $\overrightarrow{v}$ ve p, (6.1) denklemlerini sağlasın. $\nu \neq 1$ olduğu için, buradan da,

$$\operatorname{rot}\Delta\overrightarrow{v}=0 \text{ ve } (\nu-1)\,\Delta p=0$$

ve $\Delta p = 0$ elde edilir. $\overrightarrow{h}$ ve ϕ, (6.6) ve (6.7) de tanımlandığı gibi olsun. (5.14) den, $k(\overrightarrow{x}) := \overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})$ fonksiyonu, Ω içinde harmoniktir. Dahası

$$\Delta\phi(\overrightarrow{x})=\frac{1}{4(1-\nu)}\Delta\left(\int_0^1 t^{3-4\nu}k(t\overrightarrow{x})\,dt\right)=\frac{1}{4(1-\nu)}\int_0^1 t^{5-4\nu}(\Delta k)(t\overrightarrow{x})\,dt=0$$

elde edilir ve buradan ϕ nin Ω içinde harmonik olduğu anlamına ulaşılır. Kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x}.\nabla\phi(\overrightarrow{x}) &= -\frac{1}{4(1-\nu)}\overrightarrow{x}.\int_0^1 t^{4-4\nu}(\nabla k)(t\overrightarrow{x})\,dt\\
&= -\frac{1}{4(1-\nu)}\int_0^1 t^{4-4\nu}\frac{d}{dt}(k(t\overrightarrow{x}))\,dt\\
&= -\frac{1}{4(1-\nu)}k(\overrightarrow{x})+\int_0^1 t^{3-4\nu}k(t\overrightarrow{x})\,dt\\
&= -\frac{1}{4(1-\nu)}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})-4(1-\nu)\,\phi(\overrightarrow{x})
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ϕ fonksiyonunun

$$4(1-\nu)\,\phi(\overrightarrow{x})+\overrightarrow{x}.\nabla\phi(\overrightarrow{x})+\frac{1}{4(1-\nu)}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})=0 \tag{6.8}$$

denklemini sağladığı sonucuna ulaşılır.

Tekrar (5.13)-(5.20) ve (6.1) özdeşliklerini kullanarak (6.6) dan

$$\begin{aligned}
\Delta\overrightarrow{h} &= \frac{2}{3-4\nu}\left(\Delta\overrightarrow{v}-\frac{1}{4}\left(2\nabla p-\frac{2}{1-\nu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\right)\\
&= \frac{2}{3-4\nu}\left(\nabla p-\frac{1}{4}\left(2\nabla p-\frac{2}{1-\nu}(\nu\nabla p-\nabla p)\right)\right)=0,\\
\operatorname{div}\overrightarrow{h} &= \frac{2}{3-4\nu}\left(\operatorname{div}\overrightarrow{v}-\frac{1}{4}\left(3p+\overrightarrow{x}.\nabla p+\frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\right)\\
&= \frac{2}{3-4\nu}\left(\nu p-\frac{1}{4}\left(3p+\overrightarrow{x}.\nabla p+\frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{x}.(\nu\nabla p-\nabla p)\right)\right)\\
&= \frac{2}{3-4\nu}\left(\nu p-\frac{3}{4}p\right)=-\frac{1}{2}p
\end{aligned}$$

eşitliklerini ve böylece buradan (6.5) elde edilir. (5.16), (6.1) ve

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{v})=\overrightarrow{x}\times\nabla\operatorname{div}\overrightarrow{v}-\nabla(\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v})-\operatorname{rot}\overrightarrow{v}-\overrightarrow{x}\times\Delta\overrightarrow{v}$$

özdeşliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(p\overrightarrow{x}-\frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right) &= -\overrightarrow{x}\times\nabla p-\frac{1}{1-\nu}((\nu-1)\,\overrightarrow{x}\times\nabla p\\
&\quad -\nabla\left(\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)-\operatorname{rot}\overrightarrow{v})\\
&= \frac{1}{1-\nu}\left(\nabla\left(\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)+\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\Delta\phi=0$ ile birlikte (5.20) ve (6.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\overrightarrow{h} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}-\frac{2}{3-4\nu}\nabla\left(\phi+\overrightarrow{x}.\nabla\phi+\frac{1}{4(1-\nu)}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\\
&= -2\nabla\phi+\frac{1}{2(1-\nu)}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikler birleştirilerek

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)\right)+\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right)-\\
&\quad \frac{1}{3-4\nu}\overrightarrow{x}\times\left(4(1-\nu)\,\phi\left(\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{x}.\nabla\phi\left(\overrightarrow{x}\right)+\frac{1}{4(1-\nu)}\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da (6.8) kullanılarak (6.4) bulunur.

Geriye $\overrightarrow{h}$ harmonik fonksiyonunun tekliğini göstermek kaldı. (6.4) temsilinin $\overrightarrow{h}_1$ ve $\overrightarrow{h}_2$ harmonikleri için de geçerli olduğunu kabul edelim. O zaman

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{h}_1-\overrightarrow{h}_2\right)+\overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{h}_1-\overrightarrow{h}_2\right)\right)+\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\left(\overrightarrow{h}_1-\overrightarrow{h}_2\right)=0$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer $\overrightarrow{h}_0:=\overrightarrow{h}_1-\overrightarrow{h}_2$ şeklinde alınırsa, o zaman

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}_0+\overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_0\right)+\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\overrightarrow{h}_0=0 \tag{6.9}$$

elde edilir ve buradan da diverjans alarak $\overrightarrow{x}\in\Omega$ için

$$\nu\operatorname{div}\overrightarrow{h}_0\left(\overrightarrow{x}\right)=0$$

ifadesine ulaşırız.

Eğer $\nu=0$ ise (aslında bu, Stokes fonksiyonlarının durumudur), Kratz (1991) de Önerme 4 ün ispatındaki gibi bazı $\gamma\in\mathbb{R}$ için $\overrightarrow{h}_0=\gamma\overrightarrow{x}$ eşitliği elde edilir. ((6.1) içindeki p fonksiyonu (eklenilen bir sabite göre) $\nu=0$ için belirlenmiştir. Bu sabit aslında γ dır.)

Eğer $\nu\neq0$ ise, Ω içinde $\operatorname{div}\overrightarrow{h}_0=0$ dır ve bunu (6.9) eşitliğinde yerine yazarak

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_0+\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\overrightarrow{h}_0=0 \tag{6.10}$$

ifadesine ulaşırız. (6.10) ifadesinin rotasyonu

$$4(1-\nu)\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}_0 + \nabla\left(\overrightarrow{x}.\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}_0\right) = 0 \tag{6.11}$$

denklemini verir. Bunu $\overrightarrow{x}$ ile çarpalım ve $\psi(\overrightarrow{x}) := \overrightarrow{x}.\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}_0(\overrightarrow{x})$ şeklinde tanımlayalım. (5.14) ile $\Delta\psi = 0$, (6.10) ile $\nabla\psi(\overrightarrow{x}) = -4(1-\nu)\,rot\,\overrightarrow{h}_0$ ve

$$4(1-\nu)\,\psi(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}.\nabla\psi(\overrightarrow{x}) = 0 \tag{6.12}$$

eşitliğine ulaşırız. $0 \in \Omega$ olduğundan, Kratz (1991) de 4 Önermesinin ispatına benzer, sabitlenmiş bir $\varepsilon > 0$ için $U_\varepsilon(0) \subseteq \Omega$ orijininin bir komşuluğuna sahibiz. Sabitlenmiş bir $\overrightarrow{x} \in U_\varepsilon(0)$ için $f(t) := \psi(t\overrightarrow{x})$ olarak tanımlansın. Buna göre $f(0) = 0$ elde edilir ve (6.12) dan $[0,1]$ aralığında

$$4(1-\nu)\,f(t) + tf'(t) = 0$$

eşitliğini de elde etmiş oluruz. Böylece $\overrightarrow{x} \in U_\varepsilon(0)$ için

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \nu < 1 \text{ için} \\ Ct^{-4(1-\nu)} & , \quad C \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere, } \nu > 1 \text{ için} \end{cases}$$

ve buradan

$$\psi(\overrightarrow{x}) = f(1) = \begin{cases} 0 & , \quad \nu < 1 \text{ için} \\ C & , \quad \nu > 1 \text{ için} \end{cases}$$

elde edilir. (6.11) içinde bunu yerine yazalım:

$$4(1-\nu)\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}_0 = 0$$

elde edilir. Buna göre $\nu \neq 1$ olduğundan, $U_\varepsilon(0)$ içinde $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{h}_0 = 0$ sonucuna ulaşılır. Şimdi (6.10)

$$\left(\frac{3}{2} - 2\nu\right)\overrightarrow{h}_0 = 0$$

olduğunu verir ve $\nu \neq \frac{3}{4}$ olduğundan ayrıca $U_\varepsilon(0)$ içinde $\overrightarrow{h}_0 = 0$ elde ederiz. Ω içinde $\overrightarrow{h}_0$ harmonik olduğu için $\overrightarrow{h}_0 = 0$ dır ve böylece Ω içinde özdeş olarak $\overrightarrow{h}_1 - \overrightarrow{h}_2 = 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 6.1.4 *(6.2) lineer esneklik problemindeki Lamé sabitleri genellikle* $\mu > 0$ *ve* $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ *ı sağlar (ikinci terime sıkıştırma modülü denir), yani* $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$ *dür. Teorem 6.1.3 de* $\nu \neq \frac{3}{4}$ *ve* $\nu \neq 1$ *kısıtlamaları sırasıyla* $\lambda \neq -\frac{7}{3}\mu$ *ve* $\lambda \neq -2\mu$ *Lamé sabitleri anlamındadır. Böylece Teorem 6.1.3 ün, Lamé sabitlerinin keyfi değerleri için (yani* $\mu > 0$ *ve* $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ *ı sağlayan değerler için) bir üç boyutlu yıldız-şekilli bölgede bir yardımcı harmonik vektör fonksiyonu tarafından (6.2) probleminin çözümünü temsil edebileceğini gördük*

Uyarı 6.1.5 *Teorem 6.1.3 de* $\overrightarrow{h}$ *yerine* $\widetilde{\overrightarrow{h}} := \frac{2}{3-4\nu}\overrightarrow{h}$ *kullanılırsa (6.4) ve (6.5) temsil formülleri*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) &= -\frac{1}{3-4\nu}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\widetilde{\overrightarrow{h}}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}\times\operatorname{rot}\widetilde{\overrightarrow{h}}(\overrightarrow{x})\right) + \widetilde{\overrightarrow{h}}(\overrightarrow{x}),\\ p(\overrightarrow{x}) &= -\frac{4}{3-4\nu}\operatorname{div}\widetilde{\overrightarrow{h}}(\overrightarrow{x})\end{aligned}$$

şekline dönüştürülür. Bu denklemlerde $\nu = 0$ *alırsak Stokes fonksiyonlarının durumunu ve Kratz (1991) de Teorem 2 de verilen bunların kesin temsillerini elde ederiz.*

Temsil teoremlerinin genelleştirmesini tamamlamak için Teorem 6.1.3 ün iki boyutlu karşılığını göz önüne alacağız.

Teorem 6.1.6 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *bir bölge ve* $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq \frac{1}{2}, 1$ *olsun.* $\overrightarrow{v} \in C_2(\Omega)$ *ve* $p \in C_1(\Omega)$ *fonksiyonları (6.1) denklemlerini sağlarlar ancak ve ancak*

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})\right) + (1-2\nu)\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) \tag{6.13}$$

$$p(\overrightarrow{x}) = -2\operatorname{div}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x}\in\Omega \text{ için} \tag{6.14}$$

olacak şekilde bir $\overrightarrow{h} \in C_2(\Omega)$ *harmonik fonksiyonu vardır.* $\overrightarrow{h}$ *harmonik fonksiyonu tektir ve* $\overrightarrow{x} \in \Omega$ *için*

$$\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{1-2\nu}\left(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{4}\left(p(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x} - \frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right)\right) \tag{6.15}$$

elde edilir.

İspat. Kratz (1991) de de kullanıldığı gibi

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varphi\vec{x}) &= 2\varphi+\vec{x}.\nabla\varphi && (6.16)\\
\operatorname{div}\left(\vec{x}^{\perp}\operatorname{rot}\vec{v}\right) &= \vec{x}.(\Delta\vec{v}-\nabla\operatorname{div}\vec{v}) && (6.17)\\
\operatorname{rot}(\varphi\vec{x}) &= \vec{x}^{\perp}.\nabla\varphi && (6.18)\\
\operatorname{rot}\left(\vec{x}^{\perp}\operatorname{rot}\vec{v}\right) &= \vec{x}^{\perp}.(\Delta\vec{v}-\nabla\operatorname{div}\vec{v})-2\operatorname{rot}\vec{v} && (6.19)\\
\Delta(\varphi\vec{x}) &= 2\nabla\varphi+\vec{x}\Delta\varphi && (6.20)\\
\Delta\left(\vec{x}^{\perp}\operatorname{rot}\vec{v}\right) &= \vec{x}^{\perp}\operatorname{rot}(\Delta\vec{v})-2(\Delta\vec{v}-\nabla\operatorname{div}\vec{v}) && (6.21)
\end{aligned}$$

özdeşlikleri kullanacağız.

İlk olarak, $\vec{h}$ harmonik olmak üzere $\vec{v}$ ve p, (6.13) ve (6.14) de verildiği gibi olsun. (6.20) ve (6.21) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{v} &= -\frac{1}{2}\left(2\nabla\operatorname{div}\vec{h}+\vec{x}\operatorname{div}\Delta\vec{h}+\vec{x}^{\perp}\operatorname{rot}\Delta\vec{h}-2\Delta\vec{h}+2\nabla\operatorname{div}\vec{h}\right)\\
&\quad+(1-2\nu)\Delta\vec{h}\\
&= -2\nabla\operatorname{div}\vec{h}=\nabla p
\end{aligned}$$

bulunur ve (6.16), (6.17) den diverjans için

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{v} &= -\frac{1}{2}\left(2\operatorname{div}\vec{h}+\vec{x}.\nabla\operatorname{div}\vec{h}+\vec{x}.\Delta\vec{h}-\vec{x}.\nabla\operatorname{div}\vec{h}\right)+(1-2\nu)\operatorname{div}\vec{h}\\
&= -2\nu\operatorname{div}\vec{h}=\nu p
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\vec{v}$ ve p, (6.1) denklemlerini sağlar.

Şimdi $\vec{v}$ ve p nin (6.1) denklemlerini sağladığını kabul edelim. Buradan $\operatorname{rot}\Delta\vec{v}=0$ elde edilir. Ayrıca $(\nu-1)\Delta p=0$ ve bu yüzden, $\nu\neq 1$ olduğundan, $\Delta p=0$ dır. $\vec{h}$ fonksiyonu (6.15) ifadesinde verildiği gibi olsun. (6.20) ve (6.21) den

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{h} &= \frac{1}{1-2\nu}\left[\Delta\vec{v}-\frac{1}{4}\left(2\nabla p+\vec{x}\Delta p-\frac{1}{1-\nu}\left(\vec{x}^{\perp}\operatorname{rot}\Delta\vec{v}-2\Delta\vec{v}+2\nabla\operatorname{div}\vec{v}\right)\right)\right]\\
&= \frac{1}{1-2\nu}\left[\nabla p-\frac{1}{4}\left(2\nabla p-\frac{1}{1-\nu}(2\nu\nabla p-2\nabla p)\right)\right]=0
\end{aligned}$$

bulunur ve dahası (6.16) ve (6.17) den

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{h} &= \frac{1}{1-2\nu}\left[\operatorname{div}\vec{v}-\frac{1}{4}\left(2p+\vec{x}.\nabla p-\frac{1}{1-\nu}(\vec{x}.\Delta\vec{v}-\vec{x}.\nabla\operatorname{div}\vec{v})\right)\right]\\
&= \frac{1}{1-2\nu}\left[\nu p-\frac{1}{4}\left(2p+\vec{x}.\nabla p-\frac{1}{1-\nu}(\vec{x}.\nabla p-\nu\vec{x}.\nabla p)\right)\right]\\
&= \frac{1}{1-2\nu}\left[\nu-\frac{1}{2}\right]p=-\frac{1}{2}p
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu, $\overrightarrow{h}$ harmoniği ile (6.14) ü verir. (6.18) ve (6.16) dan

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\overrightarrow{h} &= \frac{1}{1-2\nu}\left[\operatorname{rot}\overrightarrow{v}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{x}^{\perp}.\nabla p-\frac{1}{1-\nu}\left(\overrightarrow{x}^{\perp}.\left(\Delta\overrightarrow{v}-\nabla\operatorname{div}\overrightarrow{v}\right)-2\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{1-2\nu}\left[\operatorname{rot}\overrightarrow{v}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{x}^{\perp}.\nabla p-\frac{1}{1-\nu}\left(\overrightarrow{x}^{\perp}.\left(\nabla p-\nu\nabla p\right)-2\operatorname{rot}\overrightarrow{v}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{1-2\nu}\left[1-\frac{1}{2\left(1-\nu\right)}\right]\operatorname{rot}\overrightarrow{v}=\frac{1}{2\left(1-\nu\right)}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.15) ile son denklemleri birleştirir ve

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}+\overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}\right)=\frac{1}{4}p\overrightarrow{x}-\frac{1}{4\left(1-\nu\right)}\overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}-\left(1-2\nu\right)\overrightarrow{h}$$

eşitliğini kullanırsak (6.13) elde edilir.
Tekliği ispatlamak için $\overrightarrow{h}_1$ ve $\overrightarrow{h}_2$ harmonikleri ile

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}_1+\overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_1\right)+\left(1-2\nu\right)\overrightarrow{h}_1=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}_2+\overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_2\right)+\left(1-2\nu\right)\overrightarrow{h}_2$$

eşitliğini göz önüne alalım. $\overrightarrow{h}_0:=\overrightarrow{h}_1-\overrightarrow{h}_2$ olsun. $\Delta\overrightarrow{h}_0=0$ ve

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}_0+\overrightarrow{x}^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_0\right)+\left(1-2\nu\right)\overrightarrow{h}_0=0 \tag{6.22}$$

elde edilir ve buradan diverjans ve rotasyon alarak

$$\nu\operatorname{div}\overrightarrow{h}_0=0\ \text{ve}\ \left(1-\nu\right)\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_0=0$$

bulunur. $\nu\neq 1$ olduğundan $\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_0=0$ sonucuna ulaşılır. Eğer $\nu\neq 0$ ise, o zaman ayrıca $\operatorname{div}\overrightarrow{h}_0=0$ elde edilir. Bu (6.22) içinde yerine yazılırsa $\left(1-2\nu\right)\overrightarrow{h}_0=0$ olur. $\nu\neq\frac{1}{2}$ olduğundan ayrıca $\overrightarrow{h}_0=0$ bulunur Eğer $\nu=0$ ise, kesin olarak Kratz (1991) de Teorem 1 de olduğu gibi, bazı $\gamma\in\mathbb{R}$ için $\overrightarrow{h}_0=\gamma\overrightarrow{x}$ eşitliğine sahip oluruz. Bu ispatı tamamlar.

Uyarı 6.1.7 *Teorem 6.1.6 içinde $\nu=0$ alınırsa. Kratz (1991) den iki boyutlu Stokes fonksiyonlarının temsil teoremlerine ulaşılır.*

6.2 ÇEŞİTLİ TEMSİLLER ARASINDA BAĞLANTILAR

Kratz (1991) Uyarı 2 de ifade edildiği gibi, iki boyutlu Stokes fonksiyonları, üçüncü bileşen sıfır alınarak ve diğer iki bileşen üçüncü koordinata bağlı olmamak üzere üç boyutlu Stokes fonksiyonları olmalarına rağmen, Stokes fonksiyonları için Önerme 5.2.1 de verilen üç boyutlu temsil formülleri Önerme 5.1.2 de verilen iki boyutlu formüllere indirgenemez.

$\overrightarrow{v} = (v_1(\overrightarrow{x}), v_2(\overrightarrow{x}))^T \in C_2(\Omega_*)$ ve $p = p(\overrightarrow{x}) \in C_1(\Omega_*)$ fonksiyonları iki boyutlu yıldız-şekilli bir Ω_* bölgesinde (6.1) denklemlerini sağlasın. Bu durumda $x_3 = 0$ ve $v_3(\overrightarrow{x}) = 0$ alınarak

$$\overrightarrow{v}^*(\overrightarrow{x}) := (v_1(x_1, x_2, 0), v_2(x_1, x_2, 0), 0)^T \text{ ve } p^*(\overrightarrow{x}) := p(x_1, x_2, 0)$$

ifadelerini tanımlarız. Aynı zamanda bu fonksiyonlar herhangi bir üç boyutlu yıldız-şekilli Ω bölgesinde (6.1) denklemlerini sağlar ve $x_3 = 0$ düzlemi ile Ω bölgesinin kesişimi Ω_* bölgesidir. $\overrightarrow{v}^*$ ve p^* fonksiyonlarını kullanarak Teorem 6.1.3 de verilen (6.6) ve (6.7) yardımı ile $\overrightarrow{h}^*$ ve ϕ^* fonksiyonlarını tanımlarız. $x_3 = 0$ için

$$\overrightarrow{x}.\operatorname{rot}\overrightarrow{v}^*(\overrightarrow{x}) = x_3(\partial_1 v_2(\overrightarrow{x}) - \partial_2 v_1(\overrightarrow{x})) = 0$$

elde edilir ve buradan da $\phi^*(x_1, x_2, 0) = 0$ sonucuna ulaşılır. Dahası

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \operatorname{rot}\overrightarrow{v}^*(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) \\ -x_1 \operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x}^\perp \operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. (6.6) tanımında bu yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{h}^*(x_1, x_2, 0) = \frac{2}{3-4\nu}\left\{\begin{pmatrix} \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} p(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1-\nu}\begin{pmatrix} \overrightarrow{x}^\perp \operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

elde edilir ve bu açık bir şekilde iki boyuta kısıtlanırsa

$$\overrightarrow{h}_*(\overrightarrow{x}) = \frac{2}{3-4\nu}\left\{\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{4}\left[p(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x} - \frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{x}^\perp \operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right]\right\}.$$

bulunur. Burada $\overrightarrow{h}_*$, $\overrightarrow{h}^*$ ın birinci ve ikinci bileşeninden oluşan vektörü tanımlar. Eğer $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})$ ve $p(\overrightarrow{x})$ fonksiyonları ile Teorem 6.1.6 kullanılırsa bu durumda (6.15) den, yardımcı harmonik fonksiyon için

$$\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{1-2\nu}\left\{\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{4}\left[p(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x} - \frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{x}^\perp \operatorname{rot}\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right]\right\}$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu formüller, eğer (6.1) fonksiyonları iki boyuta kısıtlanırsa, Teorem 6.1.3 ün Teorem 6.1.6 daki gibi benzer yardımcı harmonik fonksiyonu üretmediğini gösterir. Fakat bu harmonik fonksiyonlar arasında

$$\left(\frac{3}{2} - 2\nu\right)\overrightarrow{h}_*(\overrightarrow{x}) = (1-2\nu)\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})$$

basit bağlantısına sahip oluruz ki bu da onların birbirinin sabit katları olduğunu gösterir.

Uyarı 6.2.1 *(6.1) denklemlerinin çözümlerinin iki ve üç boyutlu temsilleri arasındaki bağlantıyı gözlemlemek için başka bir yol vardır.*
$\overrightarrow{v}$ ve p, bir üç boyutlu yıldız-şekilli Ω bölgesinde (6.1) denklemlerini sağlasın. (6.6) tarafından Teorem 6.1.3 deki yardımcı harmonik fonksiyonu

$$\overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{x}\right) = \left(h_1\left(\overrightarrow{x}\right), h_2\left(\overrightarrow{x}\right), h_3\left(\overrightarrow{x}\right)\right)^T$$

şeklinde belirlensin ve

$$\overrightarrow{h}^*\left(\overrightarrow{x}\right) := \left(h_1\left(x_1, x_2, 0\right), h_2\left(x_1, x_2, 0\right), 0\right)^T$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Karşılık gelen harmonik fonksiyon (iki boyuta kısıtlı)

$$\overrightarrow{h}_*\left(x_1, x_2\right) := \left(h_1\left(x_1, x_2, 0\right), h_2\left(x_1, x_2, 0\right)\right)^T$$

olsun.

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{h}^*\left(\overrightarrow{x}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{rot}\overrightarrow{h}_*\left(x_1, x_2\right) \end{pmatrix} \text{ ve } \operatorname{div}\overrightarrow{h}^*\left(\overrightarrow{x}\right) = \operatorname{div}\overrightarrow{h}_*\left(x_1, x_2\right)$$

elde edilir. (6.4) üç boyutlu formülünün sağ tarafının ilk terimi içinde $\overrightarrow{h}^*$ yi yerine yazalım ve ayrıca $x_3 = 0$ olsun. $\overrightarrow{x}_* = \left(x_1, x_2\right)^T$ notasyonu da kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}\operatorname{div}\overrightarrow{h}^*\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x} \times \operatorname{rot}\overrightarrow{h}^*\left(\overrightarrow{x}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\operatorname{div}\overrightarrow{h}_*\left(x_1, x_2\right) + \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_*\left(x_1, x_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{x}_*\operatorname{div}\overrightarrow{h}_*\left(\overrightarrow{x}_*\right) + \overrightarrow{x}_*^{\perp}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_*\left(\overrightarrow{x}_*\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

dır. Bu yöntem ile (6.4) ün iki boyutlu bir kısıtlamasını elde ederiz.

Uyarı 6.2.2 *Bu bir*

$$\overrightarrow{v}_*\left(\overrightarrow{x}_*\right) := -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}_*\operatorname{div}\overrightarrow{h}_*\left(\overrightarrow{x}_*\right) + \overrightarrow{x}\operatorname{rot}\overrightarrow{h}_*\left(\overrightarrow{x}_*\right)\right) + \left(\frac{3}{2} - 2\nu\right)\overrightarrow{h}_*\left(\overrightarrow{x}_*\right)$$

fonksiyonunu verir ve bu fonksiyon, $x_3 = 0$ düzlemi ile Ω yıldız-şekilli uzaysal bölgesinin kesişimi olan Ω_* bölgesinde, $p_*\left(\overrightarrow{x}_*\right) := -2\operatorname{div}\overrightarrow{h}_*\left(\overrightarrow{x}_*\right)$ karşılık gelen fonksiyonu ile birlikte,

$$\Delta\overrightarrow{v}_* = \nabla p_* \text{ ve } \operatorname{div}\overrightarrow{v}_* = \left(\nu - \frac{1}{4}\right)p_*$$

denklemlerini sağlar. Böylece, Teorem 6.1.3 de verilen $\nu \in \mathbb{R}$ *değeri için temsil formüllerinin iki boyutlu kısıtlanışından (yukarıda tarif edilen yol ile)* ν *yerine* $\nu - \frac{1}{4}$ *değeri alınarak Teorem 6.1.6 ya karşılık gelen formüllerin elde edileceğini görmüş olduk: (ayrıca Teorem 6.1.6 da* $\nu \neq \frac{1}{2}$ *iken Teorem 6.1.3 de* $\nu \neq \frac{3}{4}$ *olduğunu gözlemleyiniz.)*

KAYNAKLAR

Adams R A (1975) *Sobolev Spaces*, Pure and Appl. Math. 65., Academic Press, New York.

Aharonov D and Shapiro H S (1976) Domains in which analytic functions satisfy quadrature identities, *J. Analyse Math.* 30: 39-73.

Aristov P P and Chizhonkov E V (1995) *On the constant in the LBB condition for rectangular domains*. Report No. 9534, Dept. Math., Univ. of Nijmegen.

Arushanyan I O and Chizhonkov E V (1997) Numerical investigation of the constant in the inf-sup inequality using boundary integral equations. *In: Packages of Programmes for Applications*, V.A. Morozov, O.B. Arushanyan (eds.), Editing House of Moscow Univ., 49-59.

Babuška I (1973) The finite element method with Lagrangian multipliers, *Numer. Math.* 20: 179-192.

Başkan T (1996) *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, 2. Baskı, Bilimsel Araştırma Basım ve Yayın İşletmesi.

Bergman S and Schiffer M (1951) Kernel functions and conformal mapping, *Composition Math.* 8: 205-249.

Bourdon P S (1987) Density of the polynomials in Bergman spaces, *Pacific Journal of Mathematics* 130: 215-221.

Brezzi F (1974) On the existence, uniqueness and approximation of saddlepoint problems arising from Lagrange multipliers, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.* 8: 129-151.

Brezzi F and Fortin M (1991) *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, New York.

Chizhonkov E G (1996) On spectral properties of the pressure operator induced by the Stokes equations. In: Proceedings of the Conference in memory of the 175th birthday of P.L. Chebyshev, v. 2. *Editing House of the Mech.-Math.* Faculty of Moscow Univ., 363-366.

Chizhonkov E V (1995*) On the constant in the LBB condition for ring domains*. Report No. 9537, Dept. Math., Univ. of Nijmegen.

Chizhonkov E V and Olshanskii M A (2000) On the domain geometry dependence of the LBB condition. *Math. Modell. Numer. Analysis* 34 (5): 935-951.

Costabel M and Dauge M (2000) *On the Cosserat spectrum in polygons and polyhedra,* IRMAR Conference Lausanne.

Crouzeix M (1974) Étude d'une méthode de linéarisation. Résolution numé- rique des équations Stokes stationnaires. *In: Cahier de l'INRIA* 12: 139-244.

Crouzeix M (1997) On an operator related to the convergence of Uzawa's algorithm for the Stokes equation. *In: Computational Science for the 21st Century (J. Périaux et al., eds.).* New York: Wiley, 242-249.

Dobrowolski M (2003) On the LBB constant on stretched domains, *Mat. Nachr.*, 254-255, 64-67.

Dobrowolski M (2005) On the LBB condition in the numerical analysis of the Stokes equations, *Appl. Numer. Math.* 54: 314-323.

Dobrowolski M and Stoyan G (2001) Algebraic and discrete Velte decompositions, *BIT* 41(3): 465-479.

Duren P L (1970) *Theory of Hp spaces*, Pure and Appl. Math. 38., Academic Press, New York.

Duren P L (1983) *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York.

Friedrichs K (1937) On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. *Trans. AMS* 41: 321-364.

Garabedian P R (1951) A partial di erential equation arising in conformal mapping, *Pacific J. Math.* 1: 485-524.

Garcia S R (2007) Means of unitaries, conjugations, and the Friedrichs operator, *J. Math. Anal. Appl.* 335: 941-947.

Gaultier M and Lezaun M (1992) Quelques propriétés du spectre de l' opérateur -div $(-\Delta)^{(-1)}\nabla$ dans L^2, *C.R. Acad. Sci.*(Paris) 315: 321-364.

Girault V and Raviart P A (1986) *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer, New York.

Horgan C O and Payne L E (1983) On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuska-Aziz. *Achive Rat. Mech. Anal.* 82: 165-179.

Jakobsson S (2002) The harmonic Bergman kernel and the Friedrichs operator, *Ark. Mat.,* 40: 89-104.

Kellogg O D (1931) On the derivatives of harmonic functions on the boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.* 33(2): 486-510.

Kratz W (1991) On the representation of Stokes ows, *SIAM J. Math. Anal.* 22(1991)2: 414-423.

Kratz W (1992) Lindae A., A representation formula for three-dimensional Stokes ows, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 11(1992)3: 371-375.

Kratz W and Peyerimho A (1990) A numerical algorithm for the Stokes problem based on an integral equation for the pressure via conformal mappings, *Numerische Mathematik* 58: 255-272.

Ladyzhenskaya O A (1969) *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York.

Lin P and Rochberg R (1995) On the Friedrichs operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123: 3335-3342.

Maday Y, Meiron D and Patera A T (1993) Ronquist E.M., Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem: application to spectral element discretizations, *SIAM J. Sci. Comput.* 14: 310-337.

Mikhlin S G (1973) The spectrum of the operator pencil of elasticity theory, *Uspekhi Mat. Nauk* 28, No. 3 (171): 43-82.

Nečas J (1965) *Equations aux Dérivées Partielles*, Presses le l'Université de Montreal.

Nehari Z (1952) *Conformal Mapping*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

Neuber H (1934) Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizit ätstheorie, *Z. Angew. Math. Mech.* 14: 203-212 (German).

Pommerenke C (1991) *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin.

Putinar M and Shapiro H S (2000) The Friedrichs operator of a planar domain, *Oper. Theory Adv. Appl.*,113 , Birkhäuser Verlag, Basel, 303-330.

Putinar M and Shapiro H S (2001) The Friedrichs operator of a planar domain II, *Oper. Theory Adv. Appl.*,127 , Birkhäuser Verlag, Basel, 519-551.

Razali M R M, Nashed M Z and Murid A H M (1997) Numerical conformal mapping via the Bergman kernel, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 82: 333-350.

Sakai M (1981) Null quadrature domains, *J.Analyse Math* 40: 144-154.

Sakai M (1982) *Quadrature domains*, Lecture Notes in Math. 934, Springer-Verlag, 287-331.

Shapiro H S (1987) *Unbounded quadrature domains*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 287-331.

Soykan Y (2012) *Fonksiyonel Analiz,* Nobel Yayıncılık.

Spiegel M R (1959) *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*, Schaum's Outline Series.

Stoyan G (1999) Towards discrete Velte decompositions and narrow bounds for inf-sup constants, *Computers & Maths. with Appls.*, 38, 7-8: 243-261.

Stoyan G (2000a) Iterative Stokes solvers in the harmonic Velte subspace, *Computing* 67, 13-33.

Stoyan G (2000b) -Δ = -grad div+rot rot for matrices, with application to the nite element solution of the Stokes problem, *East-West J. Numer. Math.* 8: 323-340.

Stoyan G (2004) Strauber Gy., Baran Á., Generalizations to discrete and analytical Crouzeix-Velte decompositions, *Numerical Linear Algebra*, 11: 565-590.

Velte W (1990) On optimal constants in some inequalities. *In: The Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Methods (Heywood J.G. et al., eds.).* Lecture Notes in Math. 1431. Springer-Verlag Berlin, 158-168.

Velte W (1996) On inequalities of Friedrichs and Babuska-Aziz, *Meccanica* 31: 589-596.

Warschawski S (1932) Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung (in german), *Math. Zeitschrift* 35: 21-456.

Zimmer S (1996) *Rand-Druckkorrektur für die Stokes-Gleichung*, Thesis, Techn. Univ. München.

Zsuppán S (2004) On the spectrum of the Schur complement of the Stokes operator via conformal mapping, *Methods and Applications of Analysis*, Vol.11: 133-154.

Zsuppán S (2005) On connections between the Stokes-Schur and the Friedrichs operator, with applications to the inf-sup problem, *Annales Univ. Sci. Budapest.*, 48: 151-171.

Zsuppán S (2008a) *On the Stokes Problem*, PhD Thesis. Eötvös Lorand University of Sciences, Faculty of Informatics, Department of Numerical Analysis.

Zsuppán S (2008b) On representations of Stokes ows and of the solutions of Naviers equation for linear elasticity, *Analysis*, Vol. 28, Issue 2: 219-237.

ÖZGEÇMİŞ

Vedat İRGE 1986'da Bolu da doğdu; İlk, orta ve lise öğrenimini aynı şehirde tamamladı; 2005 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi; 2010'da mezun oldu. Aynı yıl girdiği BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Sağlık Mah. Alan Sok. No:3/1
BOLU

Tel : (0 546) 249 08 90
E-posta : vedatirge_1986@hotmail.com