TRANSPORT DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN KESTİRİMLERİ VE UYGULAMALARI

Mesut ÖZKARA

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran 2013

KABUL:

Mesut ÖZKARA tarafından hazırlanan "TRANSPORT DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN KESTİRİMLERİ VE UYGULAMALARI" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 07/06/2013

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU (BEÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ (BEÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa AŞCI (PAÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım .../.../2013

Prof. Dr. Özden ÖZEL GÜVEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Mesut ÖZKARA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TRANSPORT DENKLEMLER İÇİN
CARLEMAN KESTİRİMLERİ VE UYGULAMALARI

Mesut ÖZKARA

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU
Haziran 2013, 53 sayfa

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gerekli bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde, ikinci mertebeden bir lineer diferensiyel operatör için Carleman kestiriminin tanımı ifade edilmiş ve durağan olmayan bir transport denklem için Carleman kestirimi elde edilmiştir. Üçüncü bölümde Carleman kestirimlerinin uygulanması kapsamında, biyolojik dokularda veya atmosferde ışık ve reaktörlerde nötronların taşınımı gibi olayların modellenmesinde kullanılan transport denklemi için bazı ters problemlerin kararlılık durumları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Carleman kestirimi, Transport denklem, Ters problem, Kararlılık

Bilim Kodu: 403.06.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

CARLEMAN ESTIMATES FOR TRANSPORT EQUATIONS AND APPLICATIONS

Mesut ÖZKARA

Bülent Ecevit University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

June 2013, 53 pages

This thesis consists of three sections. The first section is devoted to some essential definitions and theorems. In the second section definition of the Carleman estimate for a second order differential operator is given and a Carleman estimate for a nonstationary transport equation is derived. Finally, in the third section stabilities of some inverse problems for transport equations which are used in modelling of propagation of light in biological tissues or in atmosphere and neutrons in reactors etc. are investigated as applications of Carleman estimates.

Keywords: Carleman estimate, Transport equation, Inverse problem, Stability

Science Code: 403.06.01

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, görüş ve önerileriyle yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU'na çok teşekkür ederim.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme ve sevgili arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A^*	:	A operatörünün Lagrange anlamında eşleniği
$\mathbb{C}^n$	:	n-boyutlu kompleks uzay
$C^k(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
D^α	:	Türev için multiindeks gösterimi
$\partial\Omega$	:	Ω bölgesinin sınırı
$H^k(\Omega)$	:	Kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$L^1(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülü integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^\infty(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülünün esaslı supremumu sonlu fonksiyonlar uzayı
n	:	Dış normal vektörü
$\nabla\varphi(x)$	:	$\varphi(x)$ fonksiyonunun gradienti; $\nabla\varphi(x)=(\varphi_{x_1},\varphi_{x_2},...,\varphi_{x_n})$
$\bar{\Omega}$	:	Ω bölgesinin kapanışı
χ	:	Kesme (cut-off) fonksiyonu
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Euclid uzayı
$supp\varphi(x)$	:	φ fonksiyonunun supportu; $supp\varphi(x)=\overline{\{x \mid x\in\Omega,\varphi(x)\neq 0\}}$

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Carleman kestirimleri bir eliptik denklem için Cauchy probleminin çözümünün tekliğini ispatlamak amacıyla Carleman (1939) tarafından ortaya konulmuş ve ardından Carleman kestirimi ve uygulamaları alanında önemli çalışmalar yapılmıştır (Hörmander 1963, Treves 1970, Taylor 1981, Hörmander 1985, Egorov 1986, Imanuvilov 1995, Fursikov and Imanuvilov 1996, Tataru 1996, Eller and Isakov 2000, Imanuvilov et al. 2009).

Kısmi türevli diferensiyel denklem için bir ters problem verildiğinde çözümün tekliğinin araştırılması, kararlılık kestiriminin yapılması ve yaklaşık çözümün elde edilmesi önemli üç meseledir. Ters problemler teorisinde Carleman kestirimleri, ilk olarak çok boyutlu ters problemler için global teklik sonuçlarının ispatlanması amacıyla kullanılmış ve bu problemler için Hölder kestirimlerinin ispatlarında da uygulanmıştır (Bukhgeim and Klibanov 1981, Klibanov 2000), daha sonra ters problemlerin çözümünün tekliğinin ve kararlılığının araştırılmasına yönelik bu kestirimlerden yararlanılmıştır (Isakov 1990, 1993, Imanuvilov and Yamamoto 1998, 2001, Isakov 2004a, b, 2006, Yamamoto 2009). Ayrıca kötü konulmuş Cauchy problemleri ve ters problemler için Lipschitz kararlılığının ispatlanmasında ve uygulama açısından önemli olan, yaklaşık çözüm yöntemlerinin ortaya konulmasında da Carleman kestirimlerinden yararlanılmaktadır (Klibanov and Timonov 2004).

1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ

Bir ters problem, kötü konulmuş olmasına rağmen, eğer çözümlerin bir sınıfı önsel (apriori) sınırlı bir küme ile sınırlandırılabilirse, kararlılık analizinin yapılabilmesini sağlayan koşullu kararlılık kestirimlerinin ispat edilebilmesi mümkün olur. Uygulamada, bu tür bir önsel sınırlı küme fiziksel olarak kabul edilebilir bir kısıtlanış kümesi olarak yorumlanabilir. Koşullu kararlılık sadece teorik olarak değil aynı zamanda kararlı nümerik yöntemler için de önemlidir. Koşullu kararlılığı ispatlamak için birçok metot vardır ve Carleman kestirimi bu metotlardan biridir.

Carleman kestirimi teorisinin incelenmesi ve kısmi diferensiyel denklemler için ters problemlere uygulanması önemli ve genel bir konu olmakla beraber, bu çalışmada transport denklemler için Carleman kestirimleri ve ters problemlere uygulamaları, (Klibanov and Pamyatnykh 2006, Machida 2011, Machida and Yamamoto 2012) çalışmalarından yararlanılarak ele alınacaktır.

1.2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda, bu çalışmada gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1 *(Kuvvetli Yakınsaklık) $\mathcal{F}$ bir normlu lineer uzay ve (f_m), $\mathcal{F}$ nin elemanlarından oluşan bir dizi olmak üzere, $m \to \infty$ iken $\|f_m - f\| \to 0$ oluyor ise (f_m) dizisi $f \in \mathcal{F}$ elemanına kuvvetli (norma göre) yakınsaktır denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.2 *(Tam Uzay) $\mathcal{F}$ bir normlu lineer uzay olmak üzere $\mathcal{F}$ nin elemanlarından oluşan her bir temel dizi $\mathcal{F}$ nin bir elemanına yakınsıyor ise $\mathcal{F}$ ye tam uzay denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.3 *(Banach Uzayı) Tam normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.4 *(Her Yerde Yoğunluk) $M \subset \mathcal{F}$ olmak üzere, her bir $f \in \mathcal{F}$ için, M nin elemanlarından oluşan bir (f_m) dizisi f ye yakınsayacak şekilde varsa, M kümesine $\mathcal{F}$ de her yerde yoğundur denir (Mikhailov 1978, s. 66).*

Teorem 1.1 *(Bunyakovskii (Cauchy-Schwarz) Eşitsizliği) H bir lineer uzay ve $h_1, h_2 \in H$ için (h_1, h_2) bir iç çarpım olsun. Bu durumda her $h_1, h_2 \in H$ için*

$$|(h_1, h_2)|^2 \leq (h_1, h_1) . (h_2, h_2)$$

eşitsizliği sağlanır (Mikhailov 1978, s. 66).

Tanım 1.5 *(Hilbert Uzayı) Üzerindeki iç çarpım ile tanımlanan $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$ normuna göre tam olan bir lineer uzaya Hilbert uzayı denir (Mikhailov 1978, s. 66).*

Tanım 1.6 *(Zayıf Yakınsaklık) H bir Hilbert uzayı ve (h_m), H nın elemanlarından oluşan bir dizi olmak üzere, her $f \in H$ için $m \to \infty$ iken $(h_m, f) \to (h, f)$ oluyor ise (h_m) dizisi $h \in H$ elemanına zayıf yakınsaktır denir (Mikhailov 1978, s. 67).*

Tanım 1.7 *(Ortonormal Sistem)* $h_1, h_2, ..., h_m, ... \in H$ *olmak üzere,* $\|h_i\| = 1$, $i = 1, 2, ..., m, ...$ *ve* $(h_i, h_j) = 0 \quad i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., m, ...$ *ise* $\{h_1, h_2, ..., h_m, ...\}$ *sistemine ortonormaldir denir (Mikhailov 1978, s. 68).*

Tanım 1.8 *(Tam Sistem)* $h_1, h_2, ..., h_m, ... \in H$ *olmak üzere,* $(f, h_i) = 0$, $i = 1, 2, ..., m, ...$ *yalnızca* $f = 0$ *olması durumunda mümkün ise* $\{h_1, h_2, ..., h_m, ...\}$ *sistemine tamdır denir.*

Tanım 1.9 *(Lineer Operatör ve Lineer Fonksiyonel)* X *ve* Y *aynı cisim üzerinde tanımlı herhangi iki lineer uzay olsun.* X *in bir* D_A *lineer alt uzayından* Y *nin içine tanımlı* $A : f \rightarrow g = A(f) = Af$ *dönüşümü, her* $f_1, f_2 \in D_A$ *ve* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *için*

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$$

eşitliğini sağlıyor ise A *ya* $D_A \subset X$ *kümesinden* Y *nin içine bir lineer operatördür denir.* Y *lineer uzayının* $\mathbb{R}$ *ya da* $\mathbb{C}$ *olması durumunda* A *ya lineer fonksiyonel denir (Mikhailov 1972, s. 72).*

Tanım 1.10 *(Sınırlı Operatör)* X *ve* Y *herhangi iki normlu lineer uzay olsun.* A, X *in bir* D_A *lineer alt uzayından* Y *nin içine tanımlı bir operatör olmak üzere, her* $f \in D_A$ *için*

$$\|Af\| \leq Cf$$

olacak şekilde bir $C > 0$ *sayısı varsa* A *operatörüne sınırlıdır denir (Mikhailov 1978, s. 73).*

Tanım 1.11 *(Sürekli Operatör)* X *ve* Y *herhangi iki normlu lineer uzay ve* A, X *in bir* D_A *lineer alt uzayından* Y *nin içine tanımlı bir operatör olsun.* A *operatörü* X *in normuna göre bir* $f \in D_A$ *elemanına yakınsayan* D_A *nın elemanlarından oluşan bir* (f_k) *dizisini,* Y *nin normuna göre* Af *ye yakınsayan bir* (Af_k) *dizisine dönüştürüyorsa,* A *operatörüne süreklidir denir (Mikhailov 1978, s. 73).*

Tanım 1.12 *(Eşlenik Operatör)* H *bir Hilbert uzayı ve* $A : H \rightarrow H$ *şeklinde,* H *da her yerde yoğun bir* D_A *kümesi üzerinde tanımlı olsun.* $D_{A^*} \subset H$ *kümesi ise her bir* $g \in D_{A^*}$ *için, bir* $h \in H$ *elemanı, her* $f \in D_A$ *için* $(Af, g) = (f, h)$ *eşitliğini sağlayacak şekilde var olan bir küme olsun.* D_{A^*} *üzerinde tanımlı, her bir* $g \in D_{A^*}$ *elemanına bir* $h = A^*g \in H$ *elemanını her* $f \in D_A$ *için*

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

olacak şekilde eşleyen A^* operatörüne A operatörünün eşleniği denir. Eğer $A = A^*$ ise A operatörüne öz-eşleniktir denir (Mikhailov 1978, s. 76).

Tanım 1.13 *(Kompakt Küme) H bir Hilbert uzayı ve $M \subset H$ olsun. M nin elemanlarından oluşan her dizi H da temel dizi olan bir alt diziye sahipse M ye kompakttır denir (Mikhailov 1978, s. 79).*

Tanım 1.14 *(Kompakt Operatör) X ve Y herhangi iki normlu uzay olsun. Bir $A : X \to Y$ operatörü lineer ve her sınırlı $M \subset X$ kümesinin $A(M)$ görüntü kümesi relatif kompakt yani $\overline{A(M)}$ kapanış kümesi kompakt ise A ya kompakt operatör denir (Kreyszig 1989, s. 405).*

Tanım 1.15 *($C^k(\Omega)$ Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi üzerinde tanımlı ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip tüm fonksiyonların kümesi $C^k(\Omega)$ ile ifade edilir. $f \in C^k(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bir multiindeks ($\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, i = 1, 2, ..., n$) ve $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ olsun. Bu durumda*

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n} f(x)$$

f fonksiyonunun kısmi türevlerini ifade eder ve $D^k f(x) = \{ D^\alpha f(x) | \; |\alpha| = k\}$ kümesi f fonksiyonunun mertebesi k olan tüm kısmi türevlerin oluşturduğu kümedir (Evans 1997, s. 617).

Tanım 1.16 *($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) $C_0^\infty(\Omega)$, Ω üzerinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu (supp$\varphi(x) = \overline{\{x : x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$) Ω nın kompakt alt kümesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir (Mikhailov 1978, s. 10).*

Tanım 1.17 *(Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $\mathcal{D}(\Omega)$ ile gösterilir. Eğer*
(a) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt kümesi vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için supp$\varphi_k \subset K$,
(b) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ve $k \to \infty$ iken $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$, yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise $k \to \infty$ için $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$ yakınsar denir.
$\mathcal{D}(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{D}'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1984, s. 81).

Tanım 1.18 *(Genelleşmiş Türev)* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *olmak üzere,* f *genelleşmiş fonksiyonunun* $D^\alpha f$ *(genelleşmiş) türevi,*

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1984, s. 94).

Tanım 1.19 *(*$C(\overline{\Omega})$*,* $C^k(\overline{\Omega})$ *Uzayları)* $C(\overline{\Omega})$*,* $\overline{\Omega}$ *üzerinde sürekli tüm fonksiyonların oluşturduğu küme,* $C^k(\overline{\Omega})$*,* $k = 1, 2, \ldots$ *,* $\overline{\Omega}$ *üzerinde* k*. mertebeye kadar tüm türevleri sürekli olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümelere ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 101);*

(a) $C(\overline{\Omega})$ *ve* $C^k(\overline{\Omega})$ *lineer uzaydır ve* $C^k(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$*,*

(b) $C(\overline{\Omega})$*, üzerinde tanımlanan*

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \underset{x \in \overline{\Omega}}{maks}\, |f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,

(c) $C^k(\overline{\Omega})$*, üzerinde tanımlanan*

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \underset{x \in \overline{\Omega}}{maks}\, |D^\alpha f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,

(d) $C(\overline{\Omega})$ *ayrılabilir uzaydır (rasyonel katsayılı tüm polinomların oluşturduğu sayılabilir bir küme* $C(\overline{\Omega})$ *da her yerde yoğundur).*

Teorem 1.2 *(Ostrogradskii Formülü)* $\partial\Omega \in C^1$ *olmak üzere* Ω *üzerinde bir* $A(x) = (A_1(x), A_2(x), ..., A_n(x))$ *vektörü tanımlansın ve* $A_i(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$*,* $i = 1, 2, ..., n$ *olsun. Bu durumda*

$$\int_\Omega \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} A(x).\mathbf{n}(x) dS$$

olur, burada $\mathbf{n}$*,* $\partial\Omega$ *nın dış normal vektörüdür (Mikhailov 1978, s. 103).*

Teorem 1.3 *(Gauss-Green Formülü)* $\partial\Omega \in C^1$ *ve* $f \in C^1(\overline{\Omega})$ *olsun. Bu durumda*

$$\int_\Omega f_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f n_i dS$$

eşitliği sağlanır, burada $n_i = \cos(\mathbf{n}, x_i)$*,* $\partial\Omega$ *yüzeyinin dış normali olan* $\mathbf{n}$ *ile* x_i *ekseni arasındaki açının kosinüsüdür (Evans 1997, s. 627).*

Teorem 1.4 *(Green Formülleri)* $\partial\Omega \in C^1$ *ve* $f, g \in C^2(\overline{\Omega}\ )$ *olsun. Bu durumda* $\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n})$, $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}$ *ve* $\mathbf{n}$, $\partial\Omega$ *yüzeyinin dış normali olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Evans 1997, s. 628);*

(a) $\int_\Omega \Delta f dx = \int_{\partial\Omega} \nabla f.\mathbf{n} dS$,

(b) $\int_\Omega \nabla f.\nabla g dx = \int_{\partial\Omega} g \nabla f.\mathbf{n} dS - \int_\Omega g \Delta f dx$,

(c) $\int_\Omega g \Delta f dx - \int_\Omega f \Delta g dx = \int_{\partial\Omega} g \nabla f.\mathbf{n} dS - \int_{\partial\Omega} f \nabla g.\mathbf{n} dS$.

Tanım 1.20 *(O ve o gösterimi)*

(a) x_0 *a yeterince yakın* x *değerleri için* $|f(x)| \leq C\,|g(x)|$ *olacak şekilde bir* C *sabiti varsa* $x \to x_0$ *iken* $f = O(g)$ *yazılır.*

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ *ise* $x \to x_0$ *iken* $f = o(g)$ *yazılır (Evans 1997, s. 620).*

Teorem 1.5 *(Gronwall Eşitsizliği)* $f(t)$ *negatif olmayan,* $[0, T]$ *aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun ve hemen hemen her* t *için,* $C_1, C_2 \geq 0$ *sabit olmak üzere*

$$f(t) \leq C_1 \int\limits_0^t f(s) ds + C_2$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ *için*

$$f(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur (Evans 1997, s.625).

Teorem 1.6 *(Lebesgue Teoremi)* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *fonksiyonları integrallenebilir, hemen hemen her yerde* $f_k \to f$ *ve integrallenebilir bir* g *fonksiyonu için hemen hemen her yerde* $|f_k| \leq g$ *olsun. Bu durumda*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

olur (Evans 1997, s. 648).

Tanım 1.21 *($L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ Uzayları)* $L^1(\Omega)$, Ω *üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu küme,* $L^2(\Omega)$, Ω *üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve (modülünün) karesi integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümelere ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 105);*

Tanım 1.22 *(a) $L^1(\Omega)$ ve $L^2(\Omega)$ lineer uzaydır ve Ω sınırlı bir bölge ise $C(\overline{\Omega}\ ) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$,*

(b) $L^1(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,

(c) $L^2(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f_1(x)\overline{f_2(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

biçimindedir,

(d) $C(\overline{\Omega}\ )$ ve $C_0^\infty(\overline{\Omega}\ )$ uzayı, $L^1(\Omega)$ ve $L^2(\Omega)$ da her yerde yoğundur,

(e) $L^1(\Omega)$ ve $L^2(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.

Tanım 1.23 *($L^\infty(\Omega)$ Uzayı) $L^\infty(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülünün esaslı (essential) supremumu sonlu olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir (Evans 1997, s. 618).*

Tanım 1.24 *($H^k(\Omega)$ Uzayları) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümeye ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 121);*

(a) $H^k(\Omega)$ lineer uzaydır ve $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$,

(b) $H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha f_1 D^\alpha \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2\, dx\right)^{1/2}$$

biçimindedir,

(c) $\partial\Omega \in C^k$ ise $C^\infty(\overline{\Omega}\ )$ uzayı, $H^k(\Omega)$ da her yerde yoğundur,

(d) $\partial\Omega \in C^k$ ise $H^k(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.

Tanım 1.25 *($\mathring{H}^k(\Omega)$ Uzayı) $\mathring{H}^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega}\ )$ uzayına ait ve Ω bölgesi ile $\partial\Omega$ yüzeyinin bir komşuluğunun arakesitinde sıfır olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümenin kapanışıdır (Mikhailov 1978, s. 131).*

Teorem 1.7 *(İz (Trace) Teoremi) Ω sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega \in C^1$ olsun. Bu durumda sınırlı bir lineer*

$$T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar;
(a) Eğer $f \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}\ )$ ise $Tf = f|_{\partial\Omega}$,
(b) Her bir $f \in H^1(\Omega)$ için $\|Tf\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^1(\Omega)}$ dır, burada $C > 0$ sayısı sadece Ω ya bağlı olup f den bağımsızdır.

T operatörüne iz operatörü, Tf ye f fonksiyonunun $\partial\Omega$ üzerindeki izi denir ve $\|Tf\|_{L^2(\partial\Omega)}$, $\|f\|_{L^2(\partial\Omega)}$ ile ifade edilir (Evans 1997, s. 258).

Teorem 1.8 *Ω sınırlı bir bölge, $\partial\Omega \in C^1$ ve $f \in H^1(\Omega)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathring{H}^1(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $\partial\Omega$ üzerinde $Tf = 0$ olmasıdır (Mikhailov 1978, s. 142).*

Teorem 1.9 *($H^1(\Omega)$ da Kısmi İntegrasyon) $f, g \in H^1(\Omega)$ ve $\partial\Omega \in C^1$ olsun. Bu durumda*

$$\int_\Omega f_{x_i} g dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i dS - \int_\Omega f g_{x_i} dx, \quad (i = 1, 2, ...n)$$

kısmi integrasyon formülü sağlanır, burada $n_i = \cos(\mathbf{n}, x_i)$, $\partial\Omega$ yüzeyinin dış normali olan $\mathbf{n}$ ile x_i ekseni arasındaki açının kosinüsü ve yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında yer alan $\partial\Omega$ üzerinde alınan integral içindeki f ve g, $\partial\Omega$ üzerinde f ve g fonksiyonlarının izidir (Mikhailov 1978, s. 139).

Tanım 1.26 *(Hadamard Anlamında İyi Konulmuş Problemler) U ve F metrik uzaylar, $A : U \longrightarrow F$ operatör olmak üzere,*

$$Au = f \tag{1.1}$$

olsun. (1.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir;

1) Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır,

2) Çözüm U uzayında tektir,

3) Koşullar F uzayında az değiştiğinde çözüm de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986, s. 26).

Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) de zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

İyi konulmuş problem tanımı 20. yüzyılın başlarında Hadamard tarafından verilmiştir. Hadamard'a göre kötü konulmuş problemler yardımı ile, reel fiziksel anlamı olan pratik olaylar tanımlanamaz. Çünkü pratikte her zaman koşullar belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçlara neden olabilir. Bu nedenle bir çok matematikçi önceleri sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemlerle ilgilenmişlerdir. Ancak pratikteki bir çok problem Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlere dönüşerek matematikçilerin karşısına çıkmıştır ve Tikhonov, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerin gerekliliğini ortaya koymuştur (Tikhonov and Arsenin 1979).

Tanım 1.27 *(Tikhonov Anlamında İyi (Şartı iyi) Konulmuş Problemler) (1.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine şartı iyi (doğru) konulmuş problem veya Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem denir;*

1) Problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ kümesine aittir,

2) Problemin çözümü M de tektir,

3) Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M kümesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir (Lavrent'ev et al. 1986, s. 27). M kümesine problemin doğruluk kümesi denir ve M genellikle kompakt bir küme olarak seçilir.

BÖLÜM 2

CARLEMAN KESTİRİMLERİ

Carleman kestirimi, bir kısmi diferensiyel denklemin çözümü için büyük parametreli bir L^2-ağırlıklı kestirimdir. Bu bölümde ilk olarak ikinci mertebeden bir lineer diferensiyel operatör için Carleman kestiriminin tanımı verilecek olup (Klibanov and Timonov 2004) daha sonra transport denklem ve transport denklem için Carleman kestiriminin elde edilişi ifade edilecektir. Ayrıca, elde edilen bu kestirim yardımıyla durağan olmayan transport denklem için bir Cauchy probleminin Lipschitz kararlılığının ispatı verilecektir (Klibanov and Pamyatnykh 2006).

2.1 GENEL CARLEMAN KESTİRİMİ

$G \subset \mathbb{R}^n$ parçalı düzgün ∂G sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun. İkinci mertebeden $A\left(x, D\right)$ lineer diferensiyel operatörü G de

$$A\left(x, D\right)u = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha\left(x\right) D^\alpha u$$

ve A operatörünün baş kısmı $A_0\left(x, D\right)$, G de

$$A_0\left(x, D\right)u = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha\left(x\right) D^\alpha u$$

şeklinde tanımlansın. A operatörünün baş kısmındaki katsayılar düzgün, $|\alpha| = 2$ için $a_\alpha \in C\left(\bar{G}\right)$, ve düşük mertebeden terimlerin katsayıları G de sürekli olsun, $|\alpha| \leq 1$ için $a_\alpha \in C^1\left(\bar{G}\right)$ olsun.

$\Gamma \subseteq \partial G$, ∂G sınırının bir parçası olsun. Γ, A operatörünün karakteristik olmayan bir yüzeyi olduğu kabul edilecektir. Γ üzerinde verilenlere göre Cauchy problemi aşağıda ifade edilmiştir.

Problem 2.1 *G de*

$$Au = f$$

denklemi ve

$$u|_{\Gamma} = p(x) \;\; ve \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = q(x)$$

koşulları altında $u \in C^2\left(\bar{G}\right)$ *fonksiyonunun belirlenmesi problemi.*

Burada n, Γ üzerinde birim dış normal vektördür. $\{t = 0\}$ durumunda verilen Cauchy şartları altında parabolik ve hiperbolik kısmi diferensiyel denklemler için klasik Cauchy problemlerinden farklı olarak, burada ifade edilen Cauchy problemi kötü konulmuş olabilir.

$c > 0$ bir sabit ve $\varphi \in C^2\left(\bar{G}\right)$ olmak üzere

$$\varphi_c = \left\{x \in \bar{G} : \varphi(x) = c\right\}$$

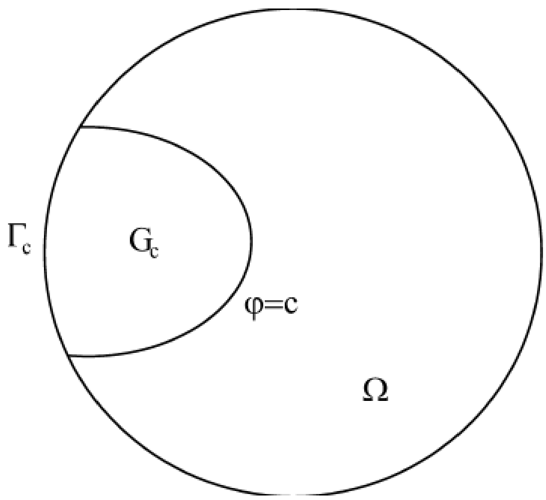
ve

$$G_c = \{x \in G : \varphi(x) > c\}$$

olarak tanımlansın. $G_c \neq \emptyset$ ve $\bar{G}_c$ da $|\nabla\varphi| \neq 0$ olsun. G_c nin sınırı

$$\partial G_c = \Gamma_c \cup \varphi_c$$

şeklinde iki kısımdan oluşur, burada $\Gamma_c \subset \Gamma$, Γ nın bir parçası ve $\Gamma_c = \Gamma \cap \{\varphi \geq c\}$ dir.



Şekil 2.1 G_c kümeleri ve Ω.

Kolaylık açısından $c = 0$ alınırsa

$$G_0 = \{x \in G : \varphi(x) > 0\}, \quad \partial G_0 = \Gamma_0 \cup \{\varphi = 0\}$$

elde edilir. Böylece $x \in \Gamma_0$ için $\varphi(x) > 0$ olur. φ fonksiyonu minimum değerini φ_0 seviye yüzeyi üzerinde alır, yani

$$\min_{x \in \bar{G}_0} \varphi(x) = \varphi(x)|_{x \in \{\varphi = 0\}} = 0.$$

Bu durum Carleman kestirimleri için oldukça önemlidir.

Bir $\lambda > 0$ parametresi için

$$C(x) = \exp[\lambda \varphi(x)]$$

olarak tanımlansın.

Tanım 2.1 *A_0 operatörünün katsayılarına, φ fonksiyonuna ve G bölgesine bağlı yeterince büyük bir $\lambda_0 = \lambda_0(A_0, \varphi, G_0)$ parametresi, her $\lambda \geq \lambda_0$ ve tüm $u \in C^2(\bar{G}_0)$ fonksiyonları için G_0 da*

$$(A_0 u)^2 C^2 \geq K\left(\lambda |\nabla u|^2 + \lambda^3 u^2\right) C^2 + \nabla \cdot U \tag{2.1}$$

kestirimi sağlanacak şekilde var olsun, burada $K > 0$ sabiti λ_0 ile aynı parametrelere bağlı, λ ve u dan bağımsız olup U vektör fonksiyonu

$$|U| \leq K\lambda^3\left(|\nabla u|^2 + u^2\right) C^2 \tag{2.2}$$

kestirimini sağlar. (2.1) kestirimi A_0 operatörü için noktasal Carleman kestirimi ve $C(x)$ fonksiyonu A_0 operatörü için Carleman ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır.

(2.2) kestiriminden

$$u|_{\Gamma_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_0} = 0 \text{ ise } U|_{\Gamma_0} = 0 \tag{2.3}$$

elde edilir.

2.2 TRANSPORT DENKLEMİ

Transport denklemi, parçacığın taşınması ile ilgili bir çok fiziksel sürecin modellenmesinde kullanılır (Case and Zweifel 1967).

Transport denklemi en genel formda

$$u_t + v \cdot \nabla u + a(x,t,v)\, u + \int_{\mathbb{R}^n} g(x,t,v,\mu)\, u(x,t,\mu)\, d\sigma_\mu = F(x,t,v) \tag{2.4}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir uzaysal değişken, $v \in \mathbb{R}^n$ parçacık hızının bir vektörü, $t \in (0,T)$ zaman, $u(x,t,v)$ parçacık akışının yoğunluğu, $a(x,t,v)$ soğurulma (absorption) katsayısı, $F(x,t,v)$ kaynakların açısal yoğunluğu ve $g(x,t,v,\mu)$ saçılım çekirdeğidir.

Bu bölümde

$$u_t + v \cdot \nabla u + a(x,t,v)\,u + \int\limits_{S^n} g(x,t,v,\mu)\,u(x,t,\mu)\,d\sigma_\mu = F(x,t,v) \tag{2.5}$$

durağan olmayan (zamana bağlı) transport denklemi ele alınacaktır, burada $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $v \in S^n = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$ dir (Case and Zweifel 1967).

Durağan (zamandan bağımsız) transport denklem de fiziksel süreçlerin modellenmesinde önemlidir. Zamana bağlı türevin önemsenmemesi sonucu (2.5) denkleminden

$$v \cdot \nabla u + a(x,v)\,u + \int\limits_{S^n} g(x,v,\mu)\,u(x,\mu)\,d\sigma_\mu = F(x,v) \tag{2.6}$$

elde edilir.

2.3 TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN CARLEMAN KESTİRİMİ VE BİR CAUCHY PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}, \quad S^n = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}, \\ H &= \Omega \times S^n \times (-T,T), \quad \Gamma = \partial\Omega \times S^n \times (-T,T) \end{aligned}$$

olsun. H bölgesinde transport denklemi

$$u_t + v \cdot \nabla u + a(x,t,v)\,u + \int\limits_{S^n} g(x,t,v,\mu)\,u(x,t,\mu)\,d\sigma_\mu = F(x,t,v) \tag{2.7}$$

ile verilsin, burada $v \in S^n$ parçacık hızının birim vektörü, $u(x,t,v)$ parçacık akışının yoğunluğu, $a(x,t,v)$ soğurulma (absorption) katsayısı, $F(x,t,v)$ kaynakların açısal yoğunluğu, $g(x,t,v,\mu)$ saçılım çekirdeğidir.

$$u|_\Gamma = p(x,t,v), \quad (x,t,v) \in \partial\Omega \times [-T,T] \times S^n, (n \cdot v) < 0 \tag{2.8}$$

sınır koşulları verilsin, burada $(n \cdot v)$, $\partial\Omega$ yüzeyinin birim dış normal vektörü n ve v hızının yönünün skaler çarpımıdır, yani bu durumda sınırda sadece giriş yapan radyasyon verilmektedir.

(2.7) denkleminin, (2.8) sınır koşulu ve $t = -T$ de verilen

$$u(x, -T, v) = q(x, v), \quad (x, v) \in \Omega \times S^n$$

başlangıç koşulu ile çözümünün aranması problemi transport denklem için klasik direkt problemdir. Bu problem için teklik, varlık ve kararlılık sonuçlarının var olduğu bilinmektedir (Prilepko and Ivankov, 1984).

$q(x, v)$ başlangıç koşulunun bilinmediği, ancak

$$u|_\Gamma = p(x, t, v), \quad (x, t, v) \in \partial\Omega \times [-T, T] \times S^n, \quad (n \cdot v) > 0 \tag{2.9}$$

ek sınır koşulunun verildiği kabul edilsin, yani sınırdan çıkış yapan $p(x, t, v)$ radyasyonu da verilmektedir.

Böylece durağan olmayan transport denklem için standart olmayan Cauchy problemi elde edilir.

Problem 2.2 *(2.8), (2.9) sınır koşulları verildiğinde, (2.7) denkleminden $u(x, t, v)$ çözümünün bulunması problemi.*

Teorem 2.1 *(Lipschitz Kararlılığı) a_1 ve g_1 pozitif sabitler olmak üzere, her $(x, t, v) \in H$ için $|a(x, t, v)| < a_1$ ve her $(x, t, v, \mu) \in H \times S^n$ için $|g(x, t, v, \mu)| < g_1$ olsun. $p(x, t, v) \in L_2(\Gamma)$, $F(x, t, v) \in L_2(H)$ ve $T > R$ olsun. $u \in C^1(\bar{\Omega} \times [-T, T]) \times C(S^n)$ fonksiyonu (2.7) denklemini ve (2.8), (2.9) koşullarını sağlasın. Bu durumda*

$$||u||_{L_2(H)} \leq K\left[||p||_{L_2(\Gamma)} + ||F||_{L_2(H)}\right] \tag{2.10}$$

Lipschitz kararlılık kestirimi sağlanır, burada $K = K(\Omega, T, g_1, a_1)$, u, p ve F fonksiyonlarından bağımsız pozitif sabittir.

Sonuç 2.1 *(Teklik) Teorem 2.1 deki koşulların sağlanması durumunda, Problem 2.2 nin çözümü tektir.*

Aşağıda Teorem 2.1 in koşullarının sağlandığı kabul edilmektedir. Teorem 2.1 in ispatı Lemma 2.2 de verilen Carleman kestirimine dayanmaktadır.

$$L_0 u = u_t + v \cdot \nabla u = u_t + \sum_{i=1}^{n} v_i u_{x_i}$$

olsun, burada $x_0 \in \Omega$ herhangi bir nokta olsun.

$\psi(x,t) = |x - x_0|^2 - \eta t^2, \quad \eta \in (0,1)$ *sabit*

fonksiyonu tanımlansın ve $c \in (0,R)$ sabit olsun.

$G_c(x_0) := \left\{(x,t) : \psi(x,t) > c^2 \text{ ve } |x| < R\right\}$

ve $G_c := G_c(0)$ olsun. Carleman ağırlık fonksiyonu

$C(x,t) = \exp[\lambda \psi(x,t)]$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 2.2 *Bir η sayısı $\eta \in (0,1)$ ve $T > \dfrac{R}{\sqrt{\eta}}$ olacak şekilde seçilsin. Ayrıca bir $c \in (0,R)$ sabiti, $G_c \subset \Omega \times (-T,T)$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda sadece G_c bölgesine bağlı olan $\lambda_0 = \lambda_0(G_c)$ ve $M = M(G_c)$ pozitif sabitleri, $G_c \times S^n$ bölgesinde tüm $u(x,t,v) \in C^1\left(\bar{G}_c\right) \times C(S^n)$ fonksiyonları ve her $\lambda \geq \lambda_0(G_c)$ için*

$$(L_0 u)^2 \geq 2\lambda(1-\eta) u^2 C^2 + \nabla U + V_t \tag{2.11}$$

noktasal Carleman kestirimini sağlayacak şekilde vardır, burada (U,V) vektör fonksiyonu

$$|(U,V)| \leq M \lambda u^2 C^2 \tag{2.12}$$

ve

$$V(x,t,v) = 2\lambda(\eta t - (v \cdot x)) u^2 C^2 \tag{2.13}$$

kestirimlerini sağlar.

Lemma 2.3 *$T > R$ olsun.Bu durumda herhangi bir $c \in (0,R)$ için tüm $\eta \in (\eta_0(R,T,c), 1)$ için $G_c \subset \Omega \times (-T,T)$ olacak şekilde bir $\eta_0 = \eta_0(R,T,c) \in (0,1)$ vardır.*

İspat. G_c bölgesinin tanımından

$G_c \subset \{\Omega \times (-T,T)\} \iff \underset{\partial\Omega}{maks}\, \psi(x,T) \leq C^2$

olur, yani $R^2 - \eta T^2 \leq c^2$olduğundan

$\eta \geq \dfrac{R^2 - c^2}{T^2}$

eşitsizliği elde edilir. $c \in (0,R)$ ve $R < T$ olduğundan $\eta \in (0,1)$ olur ve $\eta_0 = \eta$ olarak seçilebilir.

İspat. (Lemma 2.2 nin ispatı) C Carleman ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $z = uC$ olsun. Bu durumda

$$u = zC^{-1} = z \exp\left[\lambda(\eta t^2 - |x|^2)\right]$$

ve

$$\begin{aligned} u_t &= z_t C^{-1} + z 2\lambda\eta t C^{-1} \\ &= \left(z_t + 2\lambda\eta t z\right) C^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= z_{x_i} C^{-1} + z\left(-2x_i\right)\lambda C^{-1} \\ &= \left(z_{x_i} - 2\lambda x_i z\right) C^{-1} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$L_0 u = \left[z_t + \sum_{i=1}^{n} v_i z_{x_i} + 2\lambda\left(\eta t - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j\right) z\right] C^{-1}$$

olup böylece

$$\begin{aligned} \left(L_0 u\right)^2 C^2 &\geq 4\lambda\left(\eta t - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j\right) z \left(z_t + \sum_{i=1}^{n} v_i z_{x_i}\right) \\ &= 4\lambda\eta t z z_t + 4\lambda\eta t \sum_{i=1}^{n} v_i z z_{x_i} - 4\lambda \sum_{j=1}^{n} v_j x_j z z_t \\ &\quad -4\lambda \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \sum_{i=1}^{n} v_i z z_{x_i} \\ &= \left(2\lambda\eta t z^2\right)_t - 2\lambda\eta z^2 - \left[2\lambda \sum_{j=1}^{n} v_j x_j z^2\right]_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left[2\lambda\eta t v_i z^2\right]_{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\left[2\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} v_j x_j\right) v_i z^2\right]_{x_i} \\ &\quad +2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) z^2 \\ &= \left[2\lambda\left(\eta t - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j\right) z^2\right]_t - 2\lambda\eta z^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left[2\lambda\left(\eta t - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j\right) v_i z^2\right]_{x_i} + 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) z^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1 \text{ ve } z^2 = u^2 C^2$$

olduğundan

$$(L_0 u)^2 C^2 \geq 2\lambda (1-\eta) u^2 C^2 + \nabla U + V_t$$

elde edilir, burada $|(U, V)| \leq M \lambda u^2 C^2$ dir.

İspat. (Teorem 2.1 in ispatı) $T > R$ olduğundan bir $\varepsilon = \varepsilon(R, T) > 0$ sayısı

$$T > R + 3\varepsilon \text{ ve } \{|x| < 3\varepsilon\} \subset \Omega \tag{2.14}$$

olacak şekilde yeterince küçük seçilebilir. $\eta_0 = \eta_0(R, T, \varepsilon/2)$ olarak seçilsin (Lemma 2.3) ve

$$\eta = \frac{1 + \eta_0(R, T, \varepsilon/2)}{2}$$

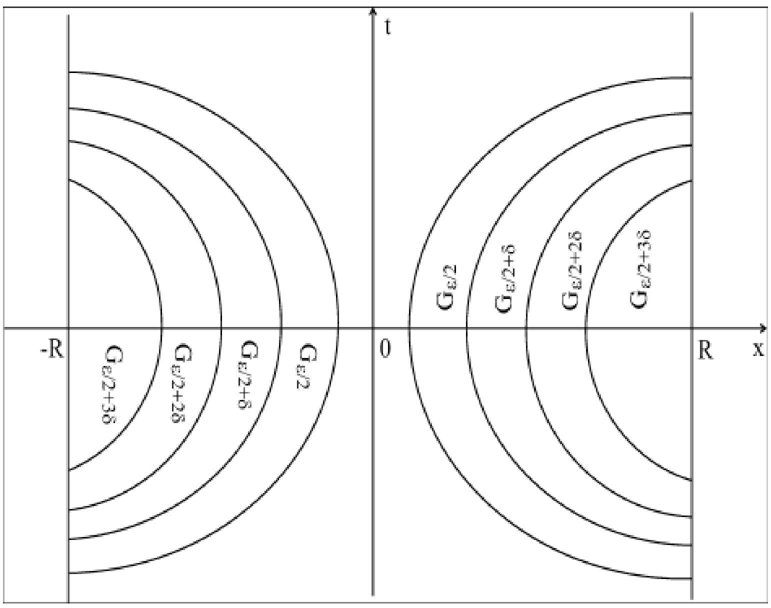
olsun. Böylece Lemma 2.3 ten

$$G_{\varepsilon/2} \subset \Omega \times (-T, T) \tag{2.15}$$

olur. Bir küçük $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon/12)$ sayısı

$$G_{\varepsilon/2+3\delta} \cap [\Omega \times (-T, T)] \neq \emptyset \text{ ve } \{|x| < 3\varepsilon\} \subset \Omega \tag{2.16}$$

olacak şekilde seçilsin. $G_{\varepsilon/2+3\delta} \subset G_{\varepsilon/2+2\delta} \subset G_{\varepsilon/2+\delta} \subset G_{\varepsilon/2}$ kümeleri 1 boyutlu durumda Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 $G_{\varepsilon/2+3\delta} \subset G_{\varepsilon/2+2\delta} \subset G_{\varepsilon/2+\delta} \subset G_{\varepsilon/2}$ kümeleri.

$\chi(x,t) \in C^1\left(\overline{\{\Omega \times (-T,T)\}}\right)$ fonksiyonu

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in G_{\varepsilon/2+2\delta} \\ 0, & (x,t) \in \{\Omega \times (-T,T)\} \backslash G_{\varepsilon/2+\delta} \\ 0 \text{ } ile \text{ } 1 \text{ } arasında, & diğer \text{ } durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

(2.7) denkleminden

$$|u_t + v \cdot \nabla u| \le K \left[a_1 |u| + \int\limits_{S^n} |u| \, d\sigma_\mu + |F| \right] \tag{2.17}$$

elde edilir, burada ve bundan sonra K sabitleri Ω, T, a_1 ve g_1 e bağlı, ancak λ ve u dan bağımsız farklı pozitif sabitlerdir.

$w(x,t,v) = u(x,t,v)\,\chi(x,t)$ olsun. Bu durumda

$$w_t + \sum_{i=1}^{n} v_i w_{x_i} = \chi\left(u_t + \sum_{i=1}^{n} v_i u_{x_i}\right) + u\left(\chi_t + \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{x_i}\right)$$

olur. χ_t, χ_{x_i}, $i = 1...,n$ türevleri sadece $G_{\varepsilon/2+\delta} \backslash G_{\varepsilon/2+2\delta}$ bölgesinde sıfırdan farklıdır ve sınırlıdır. Bu nedenle (2.17) eşitsizliğinden

$$\left| w_t + \sum_{i=1}^{n} v_i w_{x_i} \right| \le K \left[\chi\left(|u| + \int\limits_{S^n} |u| \, d\sigma_\mu + |F| \right) + (1-\chi)|u| \right]$$

elde edilir. Böylece

$$\left| w_t + \sum_{i=1}^{n} v_i w_{x_i} \right| \le K \left[\left(|w| + \int\limits_{S^n} |w| \, d\sigma_\mu + |F| \right) + (1-\chi)|u| \right] \tag{2.18}$$

olur. (2.18) eşitsizliği Carleman ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp her iki tarafın karesi alınırsa

$$\left| w_t + \sum_{i=1}^{n} v_i w_{x_i} \right|^2 C^2 \le K \left[\left(w^2 + \int\limits_{S^n} w^2 d\sigma_\mu + F^2 \right) C^2 + (1-\chi) u^2 C^2 \right]$$

elde edilir. (2.11) Carleman kestiriminden $(x,t,v) \in H_{\varepsilon/2}$, $H_{\varepsilon/2} = G_{\varepsilon/2} \times S^n$ olmak üzere

$$2\lambda(1-\eta)^2 w^2 C^2 + \nabla U + V_t \le K \left[\left(w^2 + \int\limits_{S^n} w^2 d\sigma_\mu + F^2 \right) C^2 + (1-\chi) u^2 C^2 \right]$$

elde edilir. $H_{\varepsilon/2}$ üzerinde integral alınırsa ve Gauss formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2\lambda(1-\eta)\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} w^2C^2dh \\
\leq\ & K\left[\int\limits_{H_{\varepsilon/2}}\left(w^2+\int\limits_{S^n} w^2d\sigma_\mu+F^2\right)C^2dh+\int\limits_{H_{\varepsilon/2}}(1-\chi)\,u^2C^2dh\right] \\
& +\int\limits_{M_{\varepsilon/2}}|(U,V)|\,dS \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

olur, burada $dh\equiv dxd\sigma_v dt$ ve $M_{\varepsilon/2}=\partial G_{\varepsilon/2}\times S^n$ olarak alınmıştır. A, S^n birim küresinin hacmi olmak üzere

$$\int\limits_{H_{\varepsilon/2}}\left(\int\limits_{S^n} w^2d\sigma_\mu\right)C^2dh=A\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} w^2C^2dh$$

olduğu dikkate alınarak iç tarafta bulunan S^n üzerindeki integral ortadan kaldırılabilir. Böylece (2.19) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& 2\lambda(1-\eta)\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} w^2C^2dh \\
\leq\ & K\left(\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} w^2C^2dh+\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} F^2C^2dh+(1-\chi)\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} u^2C^2dh\right) \\
& +\int\limits_{M_{\varepsilon/2}}|(U,V)|\,dS
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $K/2\lambda_0(1-\eta)<1/2$ olacak şekilde λ_0 seçilirse her $\lambda>\lambda_0$ için

$$\lambda\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} w^2C^2dh\leq K\left(\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} F^2C^2dh+\int\limits_{H_{\varepsilon/2}}(1-\chi)\,u^2C^2dh\right)+\int\limits_{M_{\varepsilon/2}}|(U,V)|\,dS \qquad (2.20)$$

elde edilir. (2.11) Carleman kestiriminden

$$\int\limits_{M_{\varepsilon/2}}|(U,V)|\,dS\leq K\lambda\int\limits_{M_{\varepsilon/2}} w^2C^2dS$$

olur ve $|x|^2-\eta t^2=(\varepsilon/2)^2$ olmak üzere $M_{\varepsilon/2}$ üzerinde $w=0$ olduğundan

$$\int\limits_{M_{\varepsilon/2}}|(U,V)|\,dS\leq K\lambda\int\limits_{M_{\varepsilon/2}} w^2C^2dS=K\lambda\int\limits_{M'_{\varepsilon/2}} p^2C^2dS$$

olur, burada $M'_{\varepsilon/2} = M_{\varepsilon/2} \cap \{(x,t) : |x| = R\} \times S^n$ olarak alınmıştır.

(2.20) eşitsizliğinin her iki tarafı için kestirim yapılacaktır. $H_{\varepsilon/2+2\delta}$ bölgesinde $w = u$ ve $H_{\varepsilon/2+3\delta} \subset H_{\varepsilon/2}$ olduğundan

$$\lambda \int\limits_{H_{\varepsilon/2}} w^2 C^2 dh \geq \lambda \int\limits_{H_{\varepsilon/2+3\delta}} w^2 C^2 dh \geq \lambda e^{2\lambda(\varepsilon/2+3\delta)^2} \int\limits_{H_{\varepsilon/2+3\delta}} u^2 dh$$

elde edilir. Ayrıca $G_{\varepsilon/2+2\delta}$ bölgesinde $1 - \chi(x,t) = 0$ olduğundan

$$\sup_{H_{\varepsilon/2}} (1-\chi) C^2 = e^{2\lambda(\varepsilon/2+2\delta)^2}$$

olur. Böylece

$$\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} (1-\chi) u^2 C^2 dh \leq e^{2\lambda(\varepsilon/2+2\delta)^2} \int\limits_{H_{\varepsilon/2}} u^2 dh$$

elde edilir. Bu durumda (2.20) eşitsizliğinden

$$\lambda e^{2\lambda(\varepsilon/2+3\delta)^2} \int\limits_{H_{\varepsilon/2+3\delta}} u^2 dh \leq K \left(\int\limits_{H_{\varepsilon/2}} F^2 C^2 dh + e^{2\lambda(\varepsilon/2+2\delta)^2} \int\limits_{H_{\varepsilon/2}} u^2 dh + \lambda \int\limits_{M'_{\varepsilon/2}} p^2 C^2 dS \right)$$

olur. $m = \sup\limits_{G_{\varepsilon/2}} \left(|x|^2 - \eta t^2 \right)$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \lambda e^{2\lambda(\varepsilon/2+3\delta)^2} \|u\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2+3\delta}\right)} \\ \leq \ & K \left(e^{2\lambda m} \|F\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2}\right)} + e^{2\lambda(\varepsilon/2+2\delta)^2} \|u\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2}\right)} + \lambda e^{2\lambda m} \|p\|^2_{L_2\left(M'_{\varepsilon/2}\right)} \right) \end{aligned}$$

olacağından, bu eşitsizliğin $\lambda \exp\left(2\lambda(\varepsilon/2+3\delta)^2\right)$ ile bölünmesiyle

$$\begin{aligned} & \|u\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2+3\delta}\right)} \\ \leq \ & K \left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda} \|F\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2}\right)} + \frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda} \|u\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2}\right)} + e^{2\lambda m} \|p\|^2_{L_2\left(M'_{\varepsilon/2}\right)} \right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

elde edilir. Burada $H_{\varepsilon/2+3\delta} \cap \{t=0\} \subset \Omega$ olmasına rağmen $\Omega \neq H_{\varepsilon/2+3\delta} \cap \{t=0\}$ olduğundan $H_{\varepsilon/2+3\delta}$ bölgesinin ötelenmesi gerekmektedir. $|x_0| = 3\varepsilon/2$ olacak şekilde x_0 seçilsin ve $G_{\varepsilon/2}(x_0)$ bölgesi ele alınsın.

$$G_{\varepsilon/2}(x_0) := \left\{ (x,t) : |x - x_0|^2 - \eta t^2 > (\varepsilon/2)^2, |x| < R \right\}$$

bölgesi $G_{\varepsilon/2}$ nin ötelenmesi ile elde edilmiştir. (2.14)-(2.16) koşullarına ek olarak

$$G_{\varepsilon/2}(x_0) \subset \Omega \times (-T,T), \;\; G_{\varepsilon/2+3\delta}(x_0) \cap [\Omega \times (-T,T)] \neq \varnothing$$

olacak şekilde $\varepsilon = \varepsilon(R,T)$ ve $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon/12)$ yeterince küçük seçilebilir.Bu durumda

$$G_{\varepsilon/2+3\delta} \cap \{t=0\} = \left\{|x| > \frac{\varepsilon}{2} + 3\delta\right\} \cap \Omega \tag{2.22}$$

ve

$$G_{\varepsilon/2+3\delta}(x_0) \cap \{t=0\} = \left\{|x-x_0| > \frac{\varepsilon}{2} + 3\delta\right\} \cap \Omega \tag{2.23}$$

olur. $B(0, \varepsilon/2+3\delta) := \{x : |x| < \varepsilon/2 + 3\delta\}$ küresi için, (2.14) kabulünden $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon/12)$ olduğundan $B(0, \varepsilon/2+3\delta) \subset \Omega$ olur. Şimdi $B \subset G_{\varepsilon/2+3\delta}(x_0) \cap \{t=0\}$ olduğu ispatlanacaktır. B küresinin herhangi bir noktası $x \in B$ olmak üzere

$$|x-x_0| \geq |x_0| - |x| = \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - 3\delta = \varepsilon - 3\delta > \frac{\varepsilon}{2} + 3\delta$$

olur ve böylece

$$|x-x_0| > \frac{\varepsilon}{2} + 3\delta$$

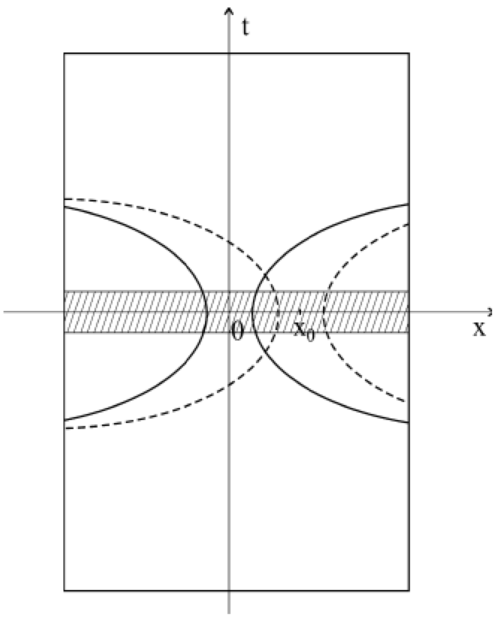
olduğu görülür. (2.23) dikkate alınırsa $B \subset G_{\varepsilon/2+3\delta}(x_0) \cap \{t=0\}$ olur. Bu nedenle (2.22)-(2.23) eşitliklerinden

$$\Omega = \left(G_{\varepsilon/2+3\delta} \cup G_{\varepsilon/2+3\delta}(x_0)\right) \cap \{t=0\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$E_{\delta_1} = \{(x,t) : x \in \Omega, |t| < \delta_1\} \subset \left(G_{\varepsilon/2} \cup G_{\varepsilon/2}(x_0)\right)$$

olacak şekilde $\delta_1 \in (0,T)$ sayısı vardır. $G_{\varepsilon/2}, G_{\varepsilon/2}(x_0)$ ve E_{δ_1} bölgeleri 1 boyutlu durum için Şekil 2.3 te gösterilmiştir.



Şekil 2.3 $\partial G_{\varepsilon/2}$ düz çizgi, $\partial G_{\varepsilon/2}(x_0)$ kesikli çizgi, E_{δ_1} taralı bölge.

(2.11) Carleman kestirimi $G_{\varepsilon/2}(x_0)$ bölgesi için geçerli olduğundan (2.21) dekine benzer bir kestirim

$$\begin{aligned} & \|u\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2+3\delta}(x_0)\right)} \\ \leq\ & K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2}(x_0)\right)}+\frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda}\|u\|^2_{L_2\left(H_{\varepsilon/2}(x_0)\right)}+e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2\left(M'_{\varepsilon/2}(x_0)\right)}\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

olarak elde edilir, burada

$$H_{\varepsilon/2}(x_0)=G_{\varepsilon/2}(x_0)\times S^n \text{ ve } M'_{\varepsilon/2}(x_0)=\partial G_{\varepsilon/2}(x_0)\cap\{(x,t):|x|=R\}$$

dir.

Böylece (2.21) ve (2.24) kestirimlerinden $E_{\delta_1}\times S^n$ üzerinde

$$\begin{aligned} & \|u\|^2_{L_2\left(E_{\delta_1}\times S^n\right)} \\ \leq\ & K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2(H)}+\frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda}\|u\|^2_{L_2(H)}+e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2(\Gamma)}\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

kestirimi elde edilir.

$$\int\limits_{S^n}\int\limits_{\Omega}u^2(x,t_1,v)\,d\sigma_v dx\leq\frac{1}{2\delta_1}\|u\|^2_{L_2\left(E_{\delta_1}\times S^n\right)}$$

olacak şekilde $t_1\in(-\delta_1,\delta_1)$ var olduğundan (2.25) eşitsizliğinden

$$\int\limits_{S^n}\int\limits_{\Omega}u^2(x,t_1,v)\,d\sigma_v dx\leq N \quad (2.26)$$

elde edilir, burada

$$N=K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2(H)}+\frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda}\|u\|^2_{L_2(H)}+e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2(\Gamma)}\right) \quad (2.27)$$

olarak alınmıştır. $S^+(t_1)=\partial\Omega\times(t_1,T)\times S^n$ olmak üzere

$$Y(x,t,v)=u_t+\sum_{i=1}^{n}v_i u_{x_i}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} u(x,t_1,v) &= u_0(x,v), \\ u|_{S^+(t_1)} &= p(x,t,v) \end{aligned}$$

ve $H^+(t_1) = \partial\Omega \times (t_1, T) \times S^n$ olsun. u nun $L_2(H^+(t_1))$ normu için kestirim yapılacaktır. (2.28) $2u$ ile çarpılıp $t \in (t_1, T)$ olmak üzere $\Omega \times S^n \times (t_1, t)$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial T}\left(u^2\right) dx d\sigma_v d\tau + \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(v_i u^2\right)_{x_i} dx d\sigma_v d\tau \\ = & \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\Omega} 2uY dx d\sigma_v d\tau \end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir. $B = (v_1 u^2, v_2 u^2, ..., v_n u^2)$ vektör fonksiyonu dikkate alındığında

$$\sum_{i=1}^{n} \left(v_i u^2\right)_{x_i} = \operatorname{div} B$$

olur ve (2.29)

$$\begin{aligned} & \int_{S^n} \int_{\Omega} u^2(x, t, v) dx d\sigma_v - \int_{S^n} \int_{\Omega} u^2(x, t_1, v) dx d\sigma_v + \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} (B \cdot n) dS d\sigma_v d\tau \\ \leq \; & K \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} u^2 dx d\sigma_v d\tau + \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} Y^2 dx d\sigma_v d\tau \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada, $\partial\Omega$ sınırındaki dış normal vektör n olmak üzere, $(B \cdot n)$, B ve n vektörlerinin skaler çarpımıdır. $|v| = 1$ olmak üzere $B = vu^2$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{S^n} \int_{\Omega} u^2(x, t, v) dx d\sigma_v \leq & \int_{S^n} \int_{\Omega} u^2(x, t_1, v) dx d\sigma_v + \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} u^2 dS d\sigma_v d\tau \\ & + K \left(\int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} u^2 dx d\sigma_v d\tau + \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} Y^2 dx d\sigma_v d\tau \right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

elde edilir. (2.17) ve (2.28) kullanılarak $|Y|$ için

$$|Y| \leq K \left[a_1 |u| + \int_{S^n} |u| \, d\sigma_\mu + |F| \right] \tag{2.31}$$

kestirimi yapılabilir. (2.30) ve (2.31) kestirimlerinden

$$\begin{aligned} \int_{S^n} \int_{\Omega} u^2(x, t, v) dx d\sigma_v \leq & \int_{S^n} \int_{\Omega} u^2(x, t_1, v) dx d\sigma_v + \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} p^2 dS d\sigma_v d\tau + \\ & + K \left(\int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} u^2 dx d\sigma_v d\tau + \int_{t_1}^{t} \int_{S^n} \int_{\partial\Omega} F^2 dx d\sigma_v d\tau \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
&\int_{S^n}\int_{\Omega} u^2(x,t,v)\,dxd\sigma_v \\
\leq\ & K\left(\int_{S^n}\int_{\Omega} u^2(x,t_1,v)\,dxd\sigma_v + \int_{t_1}^{t}\int_{S^n}\int_{\partial\Omega} p^2 dSd\sigma_v d\tau + \int_{t_1}^{t}\int_{S^n}\int_{\partial\Omega} F^2 dxd\sigma_v d\tau\right)
\end{aligned}
$$

olup, $u(x,t_1,v)$ fonksiyonunun normuna kestirim yapmak için (2.26) ve (2.27) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_{S^n}\int_{\Omega} u^2(x,t,v)\,dxd\sigma_v \\
\leq\ & K\left(N + \int_{t_1}^{t}\int_{S^n}\int_{\partial\Omega} p^2 dSd\sigma_v d\tau + \int_{t_1}^{t}\int_{S^n}\int_{\partial\Omega} F^2 dxd\sigma_v d\tau\right) \\
=\ & K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2(H)} + \frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda}\|u\|^2_{L_2(H)} + e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2(\Gamma)}\right) \\
& + K\left(\int_{t_1}^{t}\int_{S^n}\int_{\partial\Omega} p^2 dSd\sigma_v d\tau + \int_{t_1}^{t}\int_{S^n}\int_{\partial\Omega} F^2 dxd\sigma_v d\tau\right) \\
\leq\ & K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2(H)} + \frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda}\|u\|^2_{L_2(H)} + e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2(\Gamma)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\|u\|^2_{L_2(H^+(t_1))} \\
\leq\ & K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2(H)} + \frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda}\|u\|^2_{L_2(H)} + e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2(\Gamma)}\right) \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

olur. $H^-(t_1) = \Omega \times (-T, t_1) \times S^n$ olmak üzere $\|u\|^2_{L_2(H^-(t_1))}$ için benzer kestirim elde edilebilir. Bu kestirim, (2.32) ile bir arada düşünüldüğünde

$$
\|u\|^2_{L_2(H)} \leq K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2(H)} + \frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda}\|u\|^2_{L_2(H)} + e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2(\Gamma)}\right)
$$

olur. $\lambda \geq \lambda_1$,

$$
K\frac{e^{-2\lambda\delta(\varepsilon+5\delta)}}{\lambda} < \frac{1}{2}
$$

olacak şekilde seçilirse

$$
\|u\|^2_{L_2(H)} \leq K\left(\frac{e^{2\lambda m}}{\lambda}\|F\|^2_{L_2(H)} + e^{2\lambda m}\|p\|^2_{L_2(\Gamma)}\right)
$$

elde edilir ve böylece (2.10) ispatlanmış olur.

BÖLÜM 3

TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde dalga veya parçacıkların rastgele bir ortamda yayılımının matematiksel modellenmesinde kullanılan transport denklemler ele alınacaktır. Carleman kestirimleri yardımıyla transport denklem için bazı ters katsayı problemlerinin kararlılığı, ilk olarak Bölüm 3.1 de 1 boyutlu uzayda (Machida 2011), daha sonra Bölüm 3.2 de çok boyutlu uzayda (Machida and Yamamoto 2012) incelenecektir.

3.1 BİR BOYUTLU UZAYDA KARARLILIK ANALİZİ

Biyolojik dokularda X-ışınlarının saçılım yapmadan bir ortama girmesi halinde, bu ışınların yayılımı bir doğru boyunca olur ve bu doğru x-ekseni olarak alınacaktır. X-ışını ortama $x = 0$ noktasında girer ve bir kısmı absorbe olduktan sonra $x = l$ noktasından çıkar. Bu taşınım olayı l uzunluklu 1 boyutlu bir ortamda aşağıdaki transport denklemi ile modellenir (Case and Zweifel 1967).

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + p(x)u(x,t) = 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = a(x), \quad 0 < x < l, \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = b(t), \quad -T < t < T, \tag{3.3}$$

burada $u(x,t) \in \mathbb{R}$, X-ışınlarının $x \in (0,l)$ noktasında, $t \in (-T,T)$ anında yoğunluğu ve $p(x) \in \mathbb{R}$ soğurulma katsayısıdır. Ayrıca $a(x)$ (pozitif) ve $b(t)$ başlangıç ve sınır koşullarıdır.

$p \in L^\infty(0,l)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $u(l,t)$ sınır değerleri yardımıyla $p(x)$ in belirlenmesi ve iki farklı p ve q katsayısı için uygun bir $||\cdot||_*$ normu ile

$$||p - q||_{L^2(0,l)} \leq C||u[p](l,t) - u[q](l,t)||_* \tag{3.4}$$

şeklinde bir kararlılık kestiriminin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bu Teorem 3.3 te verilecektir ve bu bölümde C genel bir pozitif sabiti göstermek için kullanılacaktır.

$$u(x,t) = u[q](x,t) - u[p](x,t), \quad f(x) = p(x) - q(x), \quad R(x,t) = u[q](x,t) \tag{3.5}$$

olarak tanımlanırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{u}(x,t) + p(x)\widetilde{u}(x,t) = f(x)R(x,t), \tag{3.6}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{u}(0,t) = 0, \quad -T < t < T \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada $q(x)$ bilinen bir fonksiyon olarak kabul edilecektir. Bu durumda (3.6) eşitliğinin sağ tarafındaki $f(x)$ fonksiyonu için bir kestirim elde edilmesi amaçlanmaktadır. İleride görüleceği üzere başlangıç koşulunun sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Bunun için (3.6) denkleminin t değişkenine göre türevi alınır ve

$$y = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} \tag{3.9}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} Py(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}y(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}y(x,t) + p(x)y(x,t) = f(x)\partial_t R(x,t), && (3.10)\\ y(x,0) &= f(x)R(x,0), \quad 0 < x < l, && (3.11)\\ y(0,t) &= 0, \quad -T < t < T && (3.12) \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\partial_t R = \frac{\partial}{\partial t}R$ olup $R(x,0) \neq 0$ olması durumunda (3.11) başlangıç koşulu sıfırdan farklı olur.

$x_0 \notin [0,l]$ ve $0 < \beta < 1$ olmak üzere

$$\varphi(x,t) = (x - x_0)^2 - \beta t^2, \tag{3.13}$$

olarak tanımlansın. $\varphi(x,t)$ fonksiyonu aşağıda verilen eşitsizlik sağlanacak şekilde seçilecektir.

Lemma 3.1 *$y(x,t) \in C_0^1([0,l] \times [-T,T])$ fonksiyonu $y(0,t) = y(x,\pm T) = 0$ şartlarını sağlaması durumunda, her $s > s_0$ değerleri için*

$$\int_0^l \int_{-T}^T s y^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_0^l \int_{-T}^T |Py|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs \int_{-T}^T y^2(l,t) e^{2s\varphi(l,t)} dt \tag{3.14}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $s_0 > 0$ vardır.

İspat. P_0, transport denkleminin baş kısmı olsun;

$$P_0 y(x,t) = \partial_t y(x,t) + \partial_x y(x,t), \quad 0 < x < l, \quad -T < t < T. \tag{3.15}$$

$z = e^{s\varphi} y$ olarak tanımlanırsa

$$P_0 z = sA(x,t)z + e^{s\varphi} P_0 y \tag{3.16}$$

olup, burada

$$A(x,t) = \partial_t \varphi + \partial_x \varphi = -2\beta t + 2(x - x_0) \tag{3.17}$$

şeklinde alınmıştır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_0^l \int_{-T}^T |P_0 y|^2 e^{2s\varphi} dxdt &= \int_0^l \int_{-T}^T (P_0 z - sAz)^2 \, dxdt \\
&\geq -2s \int_0^l \int_{-T}^T A \left(\partial_t z + \partial_x z\right) z dxdt \\
&= -s \int_0^l \int_{-T}^T A \left(\partial_t z^2 + \partial_x z^2\right) dxdt \\
&= s \int_0^l \int_{-T}^T \left(\partial_t A + \partial_x A\right) z^2 dxdt - s \int_{-T}^T A(l,t) z^2(l,t) dt \\
&= 2s(1-\beta) \int_0^l \int_{-T}^T z^2 dxdt - s \int_{-T}^T A(l,t) z^2(l,t) dt \qquad (3.18) \\
&\geq 2s(1-\beta) \int_0^l \int_{-T}^T z^2 dxdt - Cs \int_{-T}^T z^2(l,t) dt \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

olur ve böylece

$$2(1-\beta) \int_0^l \int_{-T}^T s y^2 e^{2s\varphi} dxdt \leq \int_0^l \int_{-T}^T |P_0 y|^2 e^{2s\varphi} dxdt + Cs \int_{-T}^T y^2(l,t) e^{2s\varphi(l,t)} dt \tag{3.20}$$

elde edilir. $P_0 y = Py - py$ olduğundan (3.20) eşitsizliğinden (3.14) eşitsizliği elde edilir.

Lipschitz kararlılığı için Lemma 3.1 de elde edilen Carleman kestiriminden yararlanılacaktır.

T değeri

$$T > \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sup_{x\in[0,l]} |x - x_0| \tag{3.21}$$

olacak şekilde seçilsin. Bu T değeri için

$$\varphi(x, \pm T) = (x - x_0)^2 - \beta T^2 < 0, \quad x \in [0, l] \tag{3.22}$$

ve

$$\varphi(x, 0) > 0, \quad x \in [0, l] \tag{3.23}$$

olur. Bu durumda $\varepsilon > 0$ olmak üzere, yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı

$$\varphi(x, t) < -\varepsilon, \quad -T \le t \le -T + 2\delta, \quad T - 2\delta \le t \le T, \quad x \in [0, l], \tag{3.24}$$

ve

$$\varphi(x, t) > \varepsilon, \quad -\delta \le t \le \delta, \quad x \in [0, l] \tag{3.25}$$

olacak şekilde seçilebilir.

$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ kesme fonksiyonu, $0 \le \chi \le 1$ ve

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & -T + 2\delta \le t \le T - 2\delta, \\ 0, & -T \le t \le -T + \delta, T - \delta \le t \le T \end{cases} \tag{3.26}$$

olacak şekilde tanımlansın.

$$z = \chi y \tag{3.27}$$

olarak tanımlanırsa $Py = f\partial_t R$ olduğundan $z(x,t)$ fonksiyonu

$$\partial_t z + \partial_x z + pz = \chi f \partial_t R + (\partial_t \chi) y, \quad z(0, \cdot) = z(\cdot, \pm T) = 0 \tag{3.28}$$

denklemini sağlar. $z(x,t)$ fonksiyonu için Lemma (3.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} s\int_0^l\int_{-T}^T z^2 e^{2s\varphi} dxdt \quad &\le \quad C\int_0^l f^2 \left(\int_{-T}^T e^{-2s\beta t^2} dt\right) e^{2s\varphi(x,0)} dx + C\int_0^l\int_{-T}^T (\partial_t\chi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ &\quad + Cs\int_{-T}^T z^2(l,t) e^{2s\varphi(l,t)} dt \end{aligned} \tag{3.29}$$

olur ve Lebesgue teoreminden

$$\int_{-T}^{T} e^{-2s\beta t^2}dt = o\left(1\right), \quad s \rightarrow \infty \tag{3.30}$$

elde edilir, burada o küçük O dur. Sadece $-T+\delta \leq t \leq -T+2\delta$ veya $T-2\delta \leq t \leq T-\delta$ için $\partial_t \chi \neq 0$ ve bu aralıklarda $\varphi(x,t) < -\varepsilon$ olduğu dikkate alınırsa

$$\int_0^l \int_{-T}^{T} \left(\partial_t \chi\right)^2 y^2 e^{2s\varphi} dxdt \leq Ce^{-2s\varepsilon} \int_0^l \int_{-T}^{T} y^2 dxdt \tag{3.31}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned} s\int_0^l \int_{-T}^{T} z^2 e^{2s\varphi} dxdt \quad &\leq \quad o\left(1\right) \int_0^l f^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx + Ce^{-2s\varepsilon} \int_0^l \int_{-T}^{T} y^2 dxdt \\ &\quad +Ce^{Cs} \int_{-T}^{T} y^2(l,t) dt \end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir.

(3.32) denkleminin sağ tarafındaki üçüncü terimde $e^{2smaks_t \ \varphi(l,t)} \leq e^{Cs}$ eşitsizliğinden yararlanılmıştır.

$$w = ze^{s\varphi} = \chi y e^{s\varphi} \tag{3.33}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $w(x,t)$ fonksiyonu

$$\partial_t w + \partial_x w + pw = \chi e^{s\varphi} f \partial_t R + (\partial_t \chi) y e^{s\varphi} + s\left(\partial_t \varphi + \partial_x \varphi\right) w, \quad w(0,\cdot) = w(\cdot, \pm T) = 0 \tag{3.34}$$

denklemini ve şartlarını sağlar. (3.34) denklemi $-2w$ ile çarpılıp x ve t ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} -\int_0^l \int_0^T \partial_t w^2 dxdt \quad &= \quad \int_0^l \int_0^T \partial_x w^2 dxdt + \int_0^l \int_0^T 2pw^2 dxdt \\ &\quad -\int_0^l \int_0^T 2\left\{\chi e^{s\varphi} f\left(\partial_t R\right) w + (\partial_t \chi) y e^{s\varphi} w \right. \\ &\quad \left. +s\left(\partial_t \varphi + \partial_x \varphi\right) w^2 \right\} dxdt \end{aligned} \tag{3.35}$$

olur. $[0,l]$ aralığında $R(x,0) = a(x) \geq a_0$ olacak şekilde $a_0 > 0$ seçilir ve $y(x,0) = f(x)R(x,0)$ olduğu dikkate alınırsa

$$-\int_0^l \int_0^T \partial_t w^2 dxdt = \int_0^l w^2(x,0) dx = \int_0^l y^2(x,0) e^{2s\varphi(x,0)} dx \geq a_0^2 \int_0^l f^2(x) e^{2s\varphi(x,0)} dx \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.35) denkleminin sağ tarafı için

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l \int_0^T \partial_x w^2 dxdt + \int_0^l \int_0^T 2pw^2 dxdt \\
&-\int_0^l \int_0^T 2\left\{\chi e^{s\varphi} f\left(\partial_t R\right) w + (\partial_t \chi) y e^{s\varphi} w + s\left(\partial_t \varphi + \partial_x \varphi\right) w^2\right\} dxdt \\
\leq\ & \int_0^T w^2(l,t)dt + Cs\int_0^l \int_0^T w^2 dxdt \\
&+\int_0^l \int_0^T \left(\partial_t \chi\right)^2 y^2 e^{2s\varphi} dxdt + \int_0^l \int_0^T f^2 e^{2s\varphi} dxdt \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılabilir, burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılmıştır. Böylece

$$
\begin{aligned}
a_0^2 \int_0^l f^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \ \leq\ & \int_0^l \int_{-T}^T f^2 e^{2s\varphi} dxdt + \int_0^l \int_{-T}^T \left(\partial_t \chi\right)^2 y^2 e^{2s\varphi} dxdt \\
&+Cs\int_0^l \int_{-T}^T z^2 e^{2s\varphi} dxdt + \int_{-T}^T w^2(l,t)dt \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

olur. (3.32) eşitsizliği (3.38) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$
a_0^2 \int_0^l f^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq o\left(1\right) \int_0^l f^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx + Ce^{-2s\varepsilon} \int_0^l \int_{-T}^T y^2 dxdt + Ce^{Cs} \int_{-T}^T y^2(l,t)dt \qquad (3.39)
$$

elde edilir.

(3.10) denklemi $2y$ ile çarpılıp x e göre integral alınırsa

$$
\int_0^l \partial_t y^2 dx + \int_0^l \partial_x y^2 dx + \int_0^l 2py^2 dx = \int_0^l 2yf\partial_t R dx \qquad (3.40)
$$

elde edilir. (3.40) denkleminin sağ tarafı için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak bir kestirim elde edilebilir. Bu durumda

$$
\frac{\partial}{\partial_t} \int_0^l y^2 dx \leq C\int_0^l y^2 dx + C\int_0^l f^2 dx \qquad (3.41)
$$

olur, burada $y(0,t) = 0$ ve

$$
\int_0^l \partial_x y^2 dx = y^2(l,t) \geq 0 \qquad (3.42)
$$

olduğundan yararlanılmıştır. Her iki tarafın t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^l y^2(x,t)dx &\leq \int_0^l y^2(x,0)dx + C\int_0^t\int_0^l y^2 dtdx + C\int_0^t\int_0^l f^2 dtdx \\ &\leq C||f||^2_{L^2(0,l)} + C\int_0^t\int_0^l y^2 dtdx \end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliğinden

$$\int_0^l y^2 dx \leq C||f||^2_{L^2(0,l)} \tag{3.44}$$

olur ve böylece

$$\int_0^l\int_{-T}^T y^2 dxdt \leq C||f||^2_{L^2(0,l)}, \qquad -T<t<T \tag{3.45}$$

elde edilir.

(3.25) eşitsizliğinden

$$\varphi(x,0) = (x-x_0)^2 > \varepsilon + \beta\delta^2 \tag{3.46}$$

olduğu dikkate alınırsa (3.39), (3.45) ve (3.46) dan

$$\left(a_0^2 - o\left(1\right)\right) e^{2s\left(\varepsilon+\beta\delta^2\right)} \int_0^l f^2\left(x\right) dx \leq Ce^{-2s\varepsilon}||f||^2_{L^2(0,l)} + Ce^{Cs}\int_{-T}^T y^2(l,t)dt \tag{3.47}$$

elde edilir. Bu nedenle, her $s > s_0$ için

$$\left\{\left(a_0^2 - o\left(1\right)\right) e^{2s\left(\varepsilon+\beta\delta^2\right)} - Ce^{-2s\varepsilon}\right\} ||f||^2_{L^2(0,l)} \leq Ce^{Cs}\int_{-T}^T y^2(l,t)dt \tag{3.48}$$

olacak şekilde bir s_0 vardır. Böylece, aşağıda ifadesi verilen teorem ispat edilmiş olur.

Teorem 3.2 *$R, \partial_t R \in L^2(-T,T;L^\infty(0,l))$ ve $p \in L^\infty(0,l)$ olmak üzere, y (3.10)-(3.12) probleminin bir çözümü olsun. $[0,l]$ aralığında $R(x,0) > 0$ olduğu kabul edilir ve $T > \sup_{x\in[0,l]} |x-x_0|$ olacak şekilde seçilirse, herhangi bir $f \in L^2(0,l)$ için*

$$||f||^2_{L^2(0,l)} \leq C||y(l,\cdot)||_{L^2(-T,T)} \tag{3.49}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ vardır.

(3.4) e uygun olarak Lipschitz kararlılığı için Teorem 3.3 aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.3 $[0, l]$ *aralığında* $|a(x)| > 0$ *olmak üzere* u *(3.1)-(3.3) probleminin bir çözümü olsun. Ayrıca* $T > l$ *ve bir* $M > 0$ *sabiti için* $||p||_{L^\infty(0,l)}, ||q||_{L^\infty(0,l)} \leq M$ *olsun. Bu durumda*

$$||p - q||_{L^2(0,l)} \leq C||\frac{\partial(u[p](l,\cdot) - u[q](l,\cdot))}{\partial t}||_{L^2(-T,T)} \tag{3.50}$$

olacak şekilde bir $C(l, T, a, b, M) > 0$ *sabiti vardır.*

(3.1)-(3.3) probleminde zaman aralığı $(-T, T)$ olarak alınmıştır. Eğer zaman aralığı olarak $(0, T)$ verilmiş olsaydı fonksiyonların $(-T, T)$ aralığına genişletilmesi gerekirdi.

3.2 ÇOK BOYUTLU UZAYDA KARARLILIK ANALİZİ

Ω, $\partial\Omega$ sınırı C^1 den olan $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge olsun. $\mathbb{R}^n$ deki skaler çarpım $(\cdot)$ ile gösterilsin ve $\nabla = \nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ olarak tanımlansın. $u\,(x, v, t) \in \mathbb{R}$ fonksiyonu $t > 0$ anında, $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında, $V = \{v \in \mathbb{R}^n; 0 < v_0 \leq |v| \leq v_1\}$ olmak üzere $v \in V$ hızında açısal yoğunluğu ifade etsin.

$\sigma_a\,(x, v)$ ve $\sigma_s\,(x, v)$ sırasıyla soğurulma (absorption) ve saçılım katsayıları olsun. σ_a ve σ_s pozitif ölçülebilir fonksiyonlardır:

$$\sigma_a : \Omega \times V \to \mathbb{R}, \quad \sigma_s : \Omega \times V \to \mathbb{R}. \tag{3.51}$$

Toplam sönümleme (attenuation) $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$ olarak tanımlansın. $x \in \Omega, v \in V$ ve $0 < t < T$ olmak üzere $u\,(x, v, t)$ fonksiyonu için ışınımsal transport denklemi

$$Pu := P_0 u\,(x, v, t) + \sigma_t\,(x, v)\,u - \sigma_s\,(x, v) \int_V p\,(x, v, v')\,u\,(x, v', t)\,dv' = 0 \tag{3.52}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada

$$P_0 u := \partial_t u\,(x, v, t) + v \cdot \nabla u\,(x, v, t) \tag{3.53}$$

olarak tanımlıdır.

$p(x,v,v')$ faz fonksiyonu her (x,v) için

$$\int_V p(x,v,v')\,dv' = 1 \tag{3.54}$$

eşitliğini sağlar.

(3.52) denklemi, biyolojik bir dokuda veya atmosferde ışık ve reaktörlerde nötronlar gibi, rastgele bir ortamda taşınım olayını ifade eder.

$n(x)$, $\partial\Omega$ sınırının $x \in \partial\Omega$ noktasındaki birim dış normal vektörü olmak üzere, $\Gamma_\pm$

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \{(x,v) \in \partial\Omega \times V;\ n(x)\cdot v > 0\},\\ \Gamma_- &= \{(x,v) \in \partial\Omega \times V;\ n(x)\cdot v < 0\}\end{aligned} \tag{3.55}$$

şeklinde tanımlansın ve sınır koşulları

$$u(x,v,0) = a(x,v), \quad x \in \Omega, \quad v \in V, \tag{3.56}$$

$$u(x,v,t) = g(x,v,t), \quad 0 < t < T, \quad (x,v) \in \Gamma_- \tag{3.57}$$

olarak verilsin.

(3.56) başlangıç koşulu, (3.57) sınır koşulu ile $(x,v) \in \Gamma_+$, $0 < t < T$ için $u(x,v,t)$ sınır verileri ile σ_t veya σ_s katsayılarının belirlenmesi ters problemleri ele alınacaktır. Bu ters problem, optik tomografide karşılaşılan sınır ölçümlerinden σ_t veya σ_s katsayılarının belirlenmesi problemidir (Arridge 1999). Özel bir $g(x,v,t)$ lazer ışını Γ_- sınırından bölgeye girer ve çıkan $u(x,v,t)$ ışınları $\Gamma_+ \times (0,T)$ sınırında ölçülür.

Bu bölümde $H^m(\Omega)$ alışılagelmiş Sobolev uzayı olup (Adams 1975, s. 59)

$$X = H^1(0,T;L^\infty(\Omega \times V)) \cap H^2\left(0,T;L^2(\Omega \times V)\right)$$

ve herhangi bir sabitlenmiş $M > 0$ sabiti için

$$U = \left\{u \in X; \|u\|_X + \|\nabla u\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega\times V))} \le M\right\} \tag{3.58}$$

olarak tanımlanmıştır.

Teorem 3.4 *(σ_t nin belirlenmesi)* $u^k = u\left(\sigma_t^k\right), (x,v,t) \quad k=1,2$

$$\partial_t u(x,v,t) + v\cdot\nabla u + \sigma_t^k(x,v)\,u - \sigma_s(x,v)\int\limits_V p(x,v,v')\,u(x,v',t)\,dv' = 0,$$

$$u(x,v,0) = a(x,v), \quad x\in\Omega, v\in V,$$

$$u = g, \quad (x,v,t)\in\Gamma_-\times(0,T), \quad k=1,2$$

probleminin çözümleri, $u^k \in U$ *ve* $\left\|\sigma_t^k\right\|_{L^\infty(\Omega\times V)}, \|\sigma_s\|_{L^\infty(\Omega\times V)} \le M$ *olsun.* $x_0 \notin \overline{\Omega}$ *olmak üzere*

$$T > \frac{1}{v_0}\sup_{x\in\Omega}|x-x_0| \tag{3.59}$$

ve

$$a(x,v) > 0, \quad (x,v)\in\overline{\Omega\times V} \tag{3.60}$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} & C^{-1}\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_+}(n(x)\cdot v)\left|\partial_t\left(u^1-u^2\right)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}} \\ \le\ & \left\|\sigma_t^1-\sigma_t^2\right\|_{L^2(\Omega\times V)} \\ \le\ & C\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_+}(n(x)\cdot v)\left|\partial_t\left(u^1-u^2\right)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.61}$$

olacak şekilde bir $C = C(M) > 0$ *sabiti vardır.*

Teorem 3.5 *(σ_s nin belirlenmesi)* $u^k = u\left(\sigma_s^k\right), (x,v,t) \quad k=1,2$

$$\partial_t u(x,v,t) + v\cdot\nabla_u + \sigma_t(x,v)\,u - \sigma_s^k(x,v)\int\limits_V p(x,v,v')\,u(x,v',t)\,dv' = 0,$$

$$u(x,v,0) = a(x,v) \quad x\in\Omega, v\in V$$

$$u = g, \quad (x,v,t)\in\Gamma_-\times(0,T), \quad k=1,2$$

probleminin çözümleri, $u^k \in U$ *ve* $\|\sigma_t\|_{L^\infty(\Omega\times V)}, \left\|\sigma_s^k\right\|_{L^\infty(\Omega\times V)} \le M$ *olsun. (3.59) ve (3.60) şartlarının sağlandığı kabul edilirse*

$$\begin{aligned} & C^{-1}\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_+}(n(x)\cdot v)\left|\partial_t\left(u^1-u^2\right)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}} \\ \le\ & \left\|\sigma_s^1-\sigma_s^2\right\|_{L^2(\Omega\times V)} \\ \le\ & C\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_+}(n(x)\cdot v)\left|\partial_t\left(u^1-u^2\right)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.62}$$

olacak şekilde bir $C = C(M) > 0$ sabiti vardır.

(3.61) ve (3.62) eşitsizliklerindeki, ikinci eşitsizlikler ters problemler için Lipschitz kararlılığını gösterirken, birinci eşitsizlikler a ve $\left(\sigma_t^k, \sigma_s\right)$, $\left(\sigma_t, \sigma_s^k\right)$, $k = 1, 2$ verildiğinde $\Gamma_+ \times (0, T)$ üzerinde $\partial_t u$ nun belirlendiği başlangıç-sınır değer problemleri ile ilgilidir.

Teorem 3.4 ün ve Teorem 3.5 in ispatı için, lineerleştirilmiş ters problem için ispatı vermek yeterli olacaktır.

Teorem 3.6

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u + \sigma_t u - \sigma_s \int_V p\left(x, v, v'\right) u\left(x, v', t\right) dv' = f\left(x, v\right) R\left(x, v, t\right)$$

$$u\left(x, v, 0\right) = 0, \quad x \in \Omega, v \in V$$

$$u = 0, \quad (x, v, t) \in \Gamma_- \times (0, T)$$

olmak üzere

$$R, \partial_t R \in L^2\left(0, T; L^\infty\left(\Omega \times V\right)\right), \quad \sigma_t, \sigma_s \in L^\infty\left(\Omega \times V\right)$$

ve

$$u \in H^2\left(0, T; L^2\left(\Omega \times V\right)\right) \cap H^1\left(0, T; L^2\left(\Omega \times V\right)\right), \quad \nabla u \in H^1\left(0, T; L^2\left(\Omega \times V\right)\right)$$

olsun. Ayrıca (3.59) ve (3.60) şartlarının sağlandığı ve

$$R\left(x, v, 0\right) > 0, \quad (x, v) \in \overline{\Omega \times V}$$

olduğu kabul edilirse herhangi bir $f \in L^2\left(\Omega \times V\right)$ için

$$\begin{aligned} & C^{-1}\left(\int_0^T \int_{\Gamma_+} (n \cdot v) \left|\partial_t u\right|^2 dS dv dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \;& \|f\|_{L^2(\Omega \times V)} \\ \leq \;& C\left(\int_0^T \int_{\Gamma_+} (n \cdot v) \left|\partial_t u\right|^2 dS dv dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.63}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

Teorem 3.4 ün ispatı için $u = u^1 - u^2$, $f = \sigma_t^1 - \sigma_t^2$ ve $R = -u^2$ olarak alınırsa yukarıdaki lineerleştirilmiş ters problem elde edilir. u^1 ve u^2 nin regülerlik kabulleri ile (3.61) eşitsizliğini elde etmek için Teorem 3.6 kullanılır. Benzer yolla Teorem 3.6 kullanılarak Teorem 3.5 ispatlanır.

İspat. (Teorem 3.6 daki ilk eşitsizliğin ispatı) $Q = \Omega \times V$ ve $C > 0$, f fonksiyonundan bağımsız genel bir sabit olsun.

$$u_1 = \partial_t u$$

olarak tanımlanırsa

$$Pu_1(x,v,\xi) = f(x,v)\,\partial_t R(x,v,\xi), \quad (x,v) \in Q, 0 < \xi < t$$

elde edilir. Bu denklem $2u_1(x,v,\xi)$ ile çarpılır ve $(x,v,\xi) \in Q \times (0,t)$ üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \partial_t \left(\int_Q |\partial_t u(x,v,\xi)|^2 \, dxdv \right) d\xi + \int_0^t \int_Q v \cdot \nabla \left(|\partial_t u(x,v,\xi)|^2 \right) dxdvd\xi \\
&+ \int_0^t \int_Q 2\sigma_t |\partial_t u|^2 \, dxdvd\xi \\
= &\int_0^t \left(\int_Q 2\sigma_s \partial_t u(x,v,\xi) \left(\int_V p(x,v,v')\,\partial_t u(x,v',\xi)\, dv' \right) dxdv \right) d\xi \\
&+ \int_0^t \int_Q 2(\partial_t u)(x,v,\xi)\, f(x,v)\,(\partial_t R)(x,v,\xi)\, dxdvd\xi
\end{aligned} \tag{3.64}$$

elde edilir. $0 \le t \le T$ için $\sigma_t \in L^\infty(Q)$ olduğu dikkate alınır ve kısmi integrasyon kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_Q v \cdot \nabla \left(|\partial_t u|^2 \right) dxdvd\xi &= \int_0^t \int_V \int_{\partial\Omega} (n \cdot v) |\partial_t u|^2 \, dSdvd\xi \\
&= \int_0^t \left(\int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_-} \right) (n \cdot v) |\partial_t u|^2 \, dSdvd\xi \\
&\ge \int_0^t \int_{\Gamma_+} (n \cdot v) |\partial_t u(x,v,\xi)|^2 \, dSdvd\xi
\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^t \int_Q 2|\sigma_t| \; |\partial_t u|^2 \, dxdvd\xi \le C \int_0^t \int_Q |\partial_t u(x,v,\xi)|^2 \, dxdvd\xi$$

olur. $u(x,v,\xi)=\int\limits_0^\xi \partial_t u(x,v,\eta)\,d\eta$ ve $u(x,v,0)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^t \left(\int\limits_Q 2\sigma_s \partial_t u(x,v,\xi) \left(\int\limits_V p(x,v,v') \partial_t u(x,v',\xi)\,dv' \right) dxdv \right) d\xi \\
\le\ & C \int\limits_0^t \left(\int\limits_Q |\partial_t u(x,v,\xi)| \left(\int\limits_V |\partial_t u(x,v',\xi)|\,dv' \right) dxdv \right) d\xi \\
=\ & C \int\limits_0^t \left(\int\limits_Q |\partial_t u(x,v,\xi)| \left(\int\limits_V \left| \int\limits_0^\xi \partial_t u(x,v',\eta)\,d\eta \right| dv' \right) dxdv \right) d\xi \\
\le\ & C \int\limits_0^t \int\limits_Q |\partial_t u(x,v,\xi)| \left(\int\limits_V \int\limits_0^\xi |\partial_t u(x,v',\eta)|\,d\eta dv' \right) dxdvd\xi \\
\le\ & C \int\limits_0^t \int\limits_Q \left(\int\limits_V \int\limits_0^\xi \left(|\partial_t u(x,v,\xi)|^2 + |\partial_t u(x,v',\eta)|^2 \right) d\eta dv' \right) dxdvd\xi \\
\le\ & C \int\limits_0^t \int\limits_Q |\partial_t u(x,v,\xi)|^2\,dxdvd\xi, \quad 0\le t\le T,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada sondan ikinci eşitsizlikte

$$|\partial_t u(x,v,\xi)|\,|\partial_t u(x,v',\eta)| \le |\partial_t u(x,v,\xi)|^2 + |\partial_t u(x,v',\eta)|^2$$

olmasından yararlanılmıştır. Bu durumda, $u(x,v,0)=0$ olmasından dolayı

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^t \partial_t \left(\int\limits_Q |\partial_t u(x,v,\xi)|^2\,dxdv \right) d\xi \ =\ & \int\limits_Q |\partial_t u(x,v,t)|^2\,dxdv \\
& - \int\limits_Q |f(x,v)\,R(x,v,0)|^2\,dxdv
\end{aligned}$$

olup, (3.64) ün sağ tarafındaki ikinci terim için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\int\limits_Q |\partial_t u(x,v,t)|^2\,dxdv \\
&\le \int\limits_Q |\partial_t u(x,v,t)|^2\,dxdv + \int\limits_0^t \int\limits_{\Gamma_+} (n\cdot v)\,|\partial_t u(x,v,\xi)|^2\,dSdvd\xi \\
&\le C \int\limits_0^t \int\limits_Q |\partial_t u(x,v,\xi)|^2\,dxdvd\xi + C \int\limits_0^T \int\limits_Q |f|^2\,|\partial_t R|^2\,dxdvd\xi \\
&+ \int\limits_Q |f(x,v)\,R(x,v,0)|^2\,dxdv, \quad 0\le t\le T
\end{aligned} \tag{3.65}$$

elde eilir. $R(\cdot,\cdot,0) \in L^{\infty}(Q)$ ve $\partial_t R \in L^2(0,T; L^{\infty}(Q))$ olduğu dikkate alınır ve (3.65) eşitsizliği için Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_Q |\partial_t u(x,v,t)|^2 \, dxdv \leq C \|f\|^2_{L^2(Q)}, \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.66}$$

olur. (3.65) eşitsizliğinin sağ tarafı için (3.66) kullanılırsa

$$\int_0^t \int_{\Gamma_+} (n(x) \cdot v) |\partial_t u(x,v,\xi)|^2 \, dSdvd\xi \leq C \|f\|^2_{L^2(Q)}, \quad 0 \leq t \leq T$$

elde edilir ve böylece ilk eşitsizliğin ispatı tamamlanmış olur.

$y = y(x,t)$, $u = u(x,v,t)$ ve herhangi bir sabitlenmiş $v \in V$ için

$$Ly(x,t) = \partial_t y + v \cdot \nabla y, \quad x \in \Omega, t > 0 \tag{3.67}$$

olsun. $0 < \beta < v_0^2$ olmak üzere

$$\varphi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 \tag{3.68}$$

şeklinde tanımlansın. Carleman kestirimi aşağıda ifade edilmiştir.

Lemma 3.7

(i) $0 < t < T, x \in \partial\Omega, n(x) \cdot v \leq 0$ *için* $y(x,t) = 0$ *olacak şekilde* $y \in L^2(-T,T; H^1(\Omega)) \cap H_0^1(-T,T; L^2(\Omega))$ *ve her* $s \geq s_0$ *için*

$$\begin{aligned} &\int_{-T}^{T} \int_{\Omega} s |y(x,t)|^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ \leq \ & C \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |Ly|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt + Cs \int_{-T}^{T} \int_{n(x)\cdot v \geq 0} (n \cdot v) y^2 e^{2s\varphi(x,t)} dSdt \end{aligned}$$

olacak şekilde $s_0 > 0$ *ve* $C > 0$ *sabitleri vardır.*

(ii) $\Gamma_- \times (-T,T)$ *üzerinde* $y = 0$ $\nabla y \in L^2(-T,T; L^2(Q))$ *olacak şekilde* $y \in L^2(-T,T; L^2(Q)) \cap H_0^1(-T,T; L^2(Q))$ *ve her* $s \geq s_0$ *için*

$$\begin{aligned} &\int_{-T}^{T} \int_{Q} s |u(x,v,t)|^2 e^{2s\varphi} dxdvdt \\ \leq \ & C \int_{-T}^{T} \int_{Q} |Lu|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt + Cs \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} (n \cdot v) u^2 e^{2s\varphi(x,t)} dSdvdt \end{aligned}$$

olacak şekilde $s_0 > 0$ *ve* $C > 0$ *sabitleri vardır.*

İspat. (ii) nin ispatı (i) de elde edilen sonucun integralinin alınmasıyla ispatlanabileceğinden (i) için ispatı vermek yeterli olacaktır. Bunun için $z(x,t) = e^{2s\varphi(x,t)}y(x,t)$ ve $(L_s z)(x,t) = e^{s\varphi(x,t)} L\left(e^{-s\varphi}z\right)$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$L_s z = \partial_t z + v\cdot\nabla z - s\left((\partial_t\varphi) + (v\cdot\nabla\varphi)\right)z := \partial_t z + v\cdot\nabla z - sA(x,t)\,z$$

olur, burada $A = \partial_t\varphi + (v\cdot\nabla\varphi) = -2\beta t + 2v\cdot(x-x_0)$ şeklinde tanımlanmıştır. $y|_{\Gamma_-} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |Ly|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt &= \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |L_s z|^2 dxdt \\
&\geq -2s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} A\left(\partial_t z + v\cdot\nabla z\right) z dxdt \\
&= -s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\left(A\partial_t (z)^2 + Av\cdot\nabla\left(z^2\right)\right)dxdt \\
&= s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\left(\partial_t A + \nabla A\cdot v\right)z^2 dxdt - s\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} A(n\cdot v)\,z^2 dSdt \\
&= 2s\left(|v|^2 - \beta\right)\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} z^2 dxdt - s\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} A(n\cdot v)\,z^2 dSdt \\
&\geq 2s\left(v_0^2 - \beta\right)\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} z^2 dxdt - Cs\int_{-T}^{T}\int_{n(x)\cdot v\geq 0}(n\cdot v)\,z^2 dSdt
\end{aligned}$$

elde edilir ve $z = e^{s\varphi}y$ yer değiştirmesiyle ispat tamamlanmış olur.

İspat. (Teorem 3.6 nın ispatı)

$$u_1 = \partial_t u$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
Pu_1 &= f(x,v)\,\partial_t R(x,v,t)\,, \quad (x,v)\in Q, 0<t<T, \\
u_1(x,v,0) &= f(x,v)\,R(x,v,0)\,, \quad (x,v)\in Q
\end{aligned}$$

olur. y, σ_s, σ_t ve p

$$y(x,v,t) = \begin{cases} \partial_t u(x,v,t)\,, & t>0, \\ \partial_t u(x,-v,-t)\,, & t<0, \end{cases}$$

$$\sigma_s(x,v,t)=\begin{cases}\sigma_s(x,v), & t>0,\\ -\sigma_s(x,-v), & t<0,\end{cases}\qquad \sigma_t(x,v,t)=\begin{cases}\sigma_t(x,v), & t>0,\\ -\sigma_t(x,-v), & t<0,\end{cases}$$

ve

$$p(x,v,v',t)=\begin{cases}p(x,v,v'), & t>0,\\ -p(x,-v,v'), & t<0,\end{cases}$$

olarak genişletilmiştir. $\tilde{R}=\partial_t R$ olmak üzere, $t<0$ için $\tilde{R}(x,v,t)=-\tilde{R}(x,-v,-t)$ olacak şekilde $\tilde{R}$ genişletilsin. Bu durumda $t<0$ için, $\partial_t y(x,v,t)=-\left(\partial_t^2 u\right)(x,-v,-t)$ ve $\nabla y(x,v,t)=\nabla\partial_t u(x,-v,-t)$ olur ve böylece

$$y\in H^1\left(-T,T;L^2(Q)\right)\cap L^2\left(-T,T;L^2(Q)\right),\quad \nabla y\in L^2\left(-T,T;L^2(Q)\right)$$

olur. Ayrıca

$$\partial_t y+v\cdot\nabla y+\sigma_t y-\sigma_s\int_V p y dv'=f(x,v)\tilde{R}(x,v,t),\qquad (x,v)\in Q,-T\le t\le T \tag{3.69}$$

olur. (3.59) kabulünden dolayı $\dfrac{\beta}{v_0^2}<1$ ve

$$T>\frac{\sup\limits_{x\in\Omega}|x-x_0|}{\sqrt{\beta}} \tag{3.70}$$

olacak şekilde $\beta>0$ seçilebilir. İleride $\dfrac{\beta}{v_0^2}$ değeri 1 e yeterince yakın olarak alınacaktır. Böylece $x_0\notin\overline{\Omega}$ olduğundan

$$\varphi(x,\pm T)=|x-x_0|^2-\beta T^2<0,\quad x\in\overline{\Omega}$$

ve

$$\varphi(x,0)>0,\quad x\in\overline{\Omega}$$

olur. Bu durumda $\delta>0$ sayısı

$$\varphi(x,t)<-\delta,\quad -T<t<-T+2\delta,T-2\delta<t<T,x\in\overline{\Omega}$$

ve

$$\varphi(x,t)>\delta,\quad -\delta<t<\delta,x\in\overline{\Omega}$$

olacak şekilde yeterince küçük seçilebilir. $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu $0 \le \chi \le 1$ ve

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & -T + 2\delta \le t \le T - 2\delta, \\ 0, & -T \le t \le -T + \delta, T - \delta \le t \le T \end{cases}$$

olacak şekilde sabitlensin.

$$z = \chi y, \quad w = \chi y e^{s\varphi}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} & \partial_t z + v \cdot \nabla z + \sigma_t z - \sigma_s \int\limits_V p(x, v, v', t) z(x, v', t) dv' \\ = \ & \chi(t) f(x, v) \tilde{R}(x, v, t) + (\partial_t \chi) y, \quad (x, v) \in Q, -T < t < T \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$z(\cdot, \cdot, \pm T) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} & \partial_t w + v \cdot \nabla w + \sigma_t w - \sigma_s \int\limits_V p(x, v, v', t) w(x, v', t) dv' \\ = \ & \chi e^{s\varphi} f \tilde{R} + (\partial_t \chi) y e^{s\varphi} + s(\partial_t \varphi + (v \cdot \nabla \varphi)) w, \quad (x, v) \in Q, -T < t < T \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$w(\cdot, \cdot, \pm T) = 0$$

elde edilir. Bundan sonraki kısımda $C > 0$, $s > 0$ ve f fonksiyonundan bağımsız genel sabitler için kullanılacaktır. $\sigma_t \in L^\infty(Q \times (-T, T))$ ve $p \in L^\infty(\Omega \times V \times V \times (-T, T))$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_Q \left| \sigma_s(x, v, t) \int\limits_V p(x, v, v', t) z(x, v', t) dv' \right|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dx dv dt \\ \le \ & C \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_Q \left(\int\limits_V |\sigma_s(x, v, t)|^2 |p(x, v, v', t)|^2 |z(x, v', t)|^2 dv' \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dv dt \\ \le \ & C \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_V \left(\int\limits_V |z(x, v', t)|^2 dv' \right) dv \right) e^{2s\varphi(x,t)} dx dt \\ \le \ & C \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_Q |z(x, v, t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dx dv dt \end{aligned} \tag{3.73}$$

ve

$$\int\limits_{-T}^{T} \int\limits_Q |\sigma_t(x, v, t) z(x, v, t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dx dv dt \le C \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_Q |z(x, v, t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dx dv dt$$

olduğu görülür. Lemma 3.7 (ii) nin uygulanmasıyla her büyük $s > 0$ için

$$
\begin{aligned}
s\int_{-T}^{T}\int_{Q}|z|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdvdt \;\le\; & C\int_{Q}|f(x,v)|^2\left(\int_{-T}^{T}e^{-2s\beta t^2}dt\right)e^{2s\varphi(x,0)}dxdv \\
& +C\int_{-T}^{T}\int_{Q}|\partial_t\chi|^2 y^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdvdt \\
& +Ce^{Cs}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}(n\cdot v)\,y^2 dSdvdt \\
& +C\int_{-T}^{T}\int_{Q}|z|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdvdt
\end{aligned}
$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki son terim, yeterince büyük $s > 0$ seçimiyle sol tarafa dahil edilirse

$$
\begin{aligned}
s\int_{-T}^{T}\int_{Q}|z|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdvdt \;\le\; & C\int_{Q}|f(x,v)|^2\left(\int_{-T}^{T}e^{-2s\beta t^2}dt\right)e^{2s\varphi(x,0)}dxdv \\
& +C\int_{-T}^{T}\int_{Q}|\partial_t\chi|^2 y^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdvdt \\
& +Ce^{Cs}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}(n\cdot v)\,y^2 e^{2s\varphi(x,t)}dSdvdt
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

elde edilir. (3.72) denklemi $-2w(x,v,t)$ ile çarpılıp $Q\times(0,T)$ üzerinde integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
& -\int_{0}^{T}\int_{Q}\partial_t\left(w^2\right)dxdvdt-\int_{0}^{T}\int_{Q}v\cdot\nabla\left(w^2\right)dxdvdt \\
= & \int_{0}^{T}\int_{Q}2\sigma_t w^2 dxdvdt-2\sigma_s\int_{0}^{T}\int_{Q}\left(\int_{V}pw(x,v',t)\,w(x,v,t)\,dv'\right)dxdvdt \\
& -\int_{0}^{t}\int_{Q}2\left(\chi e^{s\varphi}f\tilde{R}w+(\partial_t\chi)\,ye^{s\varphi}w+s\left(\partial_t\varphi+v\cdot\nabla\varphi\right)w^2\right)dxdvdt
\end{aligned}
$$

elde edilir. $t > 0$ için $w=\chi(\partial_t u)\,e^{s\varphi}$ olduğundan $\Gamma_-\times(-T,T)$ üzerinde $w=0$ olur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^T \int_Q \partial_t \left(w^2\right) dxdvdt - \int_0^T \int_Q v \cdot \nabla \left(w^2\right) dxdvdt \\
= \; & \int_Q w\left(x,v,0\right)^2 dxdv - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \int_V w^2 \left(n \cdot v\right) dSdvdt \\
= \; & \int_Q w\left(x,v,0\right)^2 dxdv - \int_0^T \left(\int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_-} \right) w^2 \left(n \cdot v\right) dSdvdt \\
\geq \; & \int_Q w\left(x,v,0\right)^2 dxdv - \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 \left(n \cdot v\right) dSdvdt \\
= \; & \int_Q \left|y\left(x,v,0\right)\right|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dxdv - \int_0^T \int_{\Gamma_+} \chi^2 \left|\partial_t u\right|^2 \left(n \cdot v\right) e^{2s\varphi(x,t)} dSdvdt
\end{aligned}
$$

olur ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (3.73) eşitsizliğindekine benzer yöntem ile

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T \int_Q 2\sigma_t w^2 dxdvdt - 2\sigma_s \int_0^T \int_Q \left(\int_V pw\left(x,v',t\right) w\left(x,v,t\right) dv' \right) dxdvdt \\
& -\int_0^t \int_Q 2 \left(\chi e^{s\varphi} f \tilde{R} w - \left(\partial_t \chi\right) y e^{s\varphi} w - s\left(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi\right) w^2 \right) dxdvdt \\
\leq \; & Cs \int_{-T}^T \int_Q z^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt + C \int_{-T}^T \int_Q z^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt \\
& +C \int_{-T}^T \int_Q \left(\partial_t \chi\right)^2 y^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt + C \int_{-T}^T \int_Q f^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
\int_Q \left|\partial_t u\left(x,v,0\right)\right|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dxdv \;\leq\; & C \int_{-T}^T \int_Q \left|f\right|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt \\
& +C \int_{-T}^T \int_Q \left(\partial_t \chi\right)^2 y^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt \\
& +Cs \int_{-T}^T \int_Q z^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt \\
& + \int_{-T}^T \int_{\Gamma_+} \left|\partial_t u\right|^2 \left(n \cdot v\right) e^{2s\varphi(x,t)} dSdvdt \qquad (3.75)
\end{aligned}
$$

olur. (3.74) eşitsizliği (3.75) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terim ile yer değiştirilirse

$$\begin{aligned}
&\int_Q |\partial_t u(x,v,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dxdv \\
\leq\ & C\int_{-T}^{T}\int_Q |f(x,v)|^2 \left(\left(\int_{-T}^{T} e^{-2s\beta t^2} dt\right) e^{2s\varphi(x,0)} dxdv\right) \\
&+C\int_{-T}^{T}\int_Q |\partial_t \chi|^2 y^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt + Ce^{Cs}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+} (n\cdot v)\, y^2 dSdvdt
\end{aligned}$$

elde edilir. χ fonksiyonunun tanımından, sadece $-T+\delta \leq t \leq -T+2\delta$ veya $T-2\delta \leq t \leq T-\delta$ için $\partial_t\chi \neq 0$ olduğu görülür ve bu durumda $\varphi(x,t) < -\delta$ olur. Böylece

$$\int_{-T}^{T}\int_Q |\partial_t\chi|^2 y^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdvdt \leq Ce^{-2s\delta}\int_{-T}^{T}\int_Q y^2 dxdvdt$$

ve Lebesgue teoreminden

$$\int_{-T}^{T} e^{-2s\beta t^2} dt = o(1), \quad s\to\infty$$

olur. $u(\cdot,\cdot,0)=0$ olduğundan $\partial_t u(x,v,0) = f(x,v)\, R(x,v,0)$ elde edilir ve sonuç olarak $(x,v)\in\bar{Q}$ için $R(x,v,0)\neq 0$ olup her büyük $s>0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_Q |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dxdv \\
\leq\ & o(1)\int_Q |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dxdv + Ce^{-2s\delta}\int_{-T}^{T}\int_Q y^2 dxdvdt \\
&+Ce^{Cs}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+} (n\cdot v)\, y^2 dSdvdt
\end{aligned} \tag{3.76}$$

elde edilir. (3.66) eşitsizliğinden, y nin $t<0$ için $\partial_t u$ nun genişlemesi olduğu dikkate alınırsa

$$\int_Q |y(x,v,t)|^2 dxdv \leq C\|f\|^2_{L^2(Q)}, \quad -T\leq t\leq T$$

olduğu görülür. $x_0 \notin \bar{\Omega}$ olduğundan, $x\in\bar{\Omega}$ ve bir $\varepsilon>0$ sabiti için $|x-x_0| \geq \varepsilon > 0$ olup, (3.76) eşitsizliğinden her büyük $s > 0$ için

$$\begin{aligned}
(1 - o(1))\, e^{2s\varepsilon} \int\limits_Q |f(x,v)|^2 \, dxdv &\le (1 - o(1)) \int\limits_Q |f(x,v)|^2 \, e^{2s\varphi(x,0)} dxdv \\
&\le Ce^{-2s\delta} T \int\limits_Q |f(x,v)|^2 \, dxdv \\
&\quad + Ce^{Cs} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{\Gamma_+} (n \cdot v)\, y^2 dS dv dt
\end{aligned}$$

olur. y fonksiyonu, $t < 0$ için $\partial_t u$ nun genişlemesi olduğundan her büyük $s > 0$ için

$$\left\{(1 - o(1))\, e^{2s\varepsilon} - Ce^{-2s\delta} T\right\} \int\limits_Q |f(x,v)|^2 \, dxdv \le Ce^{Cs} \int\limits_{\Gamma_+} \int\limits_0^T (n \cdot v)\, |\partial_t u|^2 \, dS dv dt$$

elde edilir. $s > 0$ değerini yeterince büyük seçilmesiyle ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Adams R A (1975) *Sobolev Spaces*. Academic, New York.

Arridge S R (1999) Optical tomography in medical imaging. *Inverse Problems* 15: 41-93.

Bukhgeim A L and Klibanov M V (1981) Global uniqueness of a class of multidimensional inverse problems. *Sov. Math. Dokl.*, 24: 244–247.

Carleman T (1939) Sur un probleme d'unicite pour les systemes d'equations aux derivees partielles a deux variables independentes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 2: 1–9.

Case K M and Zweifel P F (1967) *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley, Boston.

Chae D, Imanuvilov O Y and Kim S M (1996) Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions. *J. Dyn. Control Syst.*, 2: 449–483.

Egorov Y V (1986) *Linear Differential Equations of Principal Type*. Consultants Bureau, New York.

Eller M M and Isakov V (2000) Carleman estimates with two large parameters and applications. *Contemp. Math.*, 268: 117–136.

Evans L C (1997) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence RI.

Fursikov A V and Imanuvilov O Y (1996) *Controllability of Evolution Equations*. Lecture Notes Series Vol:34 Seoul National University, Korea.

Hörmander L (1963) *Linear Partial Differential Operators*. Springer, Berlin.

Hörmander L (1985) *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV*. Springer, Berlin.

Imanuvilov O Y (1995) Controllability of parabolic equations. *Sbornik Math.*, 186: 879–900.

Imanuvilov O Y, Puel J-P and Yamamoto M (2009) Carleman estimates for parabolic equations with nonhomogeneous boundary conditions. *Chinese Ann. Math.*, 30: 333–378.

Imanuvilov O Y and Yamamoto M (1998) Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate. *Inverse Problems*, 14: 1229–1245.

Imanuvilov O Y and Yamamoto M (2001) Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations. *Comm. P. D. E.*, 26: 1409–1425.

Isakov V (1990) *Inverse Source Problems.* American Mathematical Society, Providence RI.

Isakov V (1993) Carleman type estimates in an anisotropic case and applications. *J. Diff. Eqns.*, 105: 217–238.

Isakov V (2004a) Carleman type estimates and their applications. *New Analytic and Geometric Methods in Inverse Problems*, Springer, Berlin, pp. 93–125.

Isakov V (2004b) Carleman estimates and applications to inverse problems. *Milan J. Math.*, 72: 249–271.

Isakov V (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Springer, Berlin.

Klibanov M V (2000) Carleman estimates and inverse problems in last two decades. *Surveys on Solutions Methods for Inverse Problems*, Springer, New York, pp. 119-146.

Klibanov M V and Timonov A A (2004) *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications,* VSP, Utrecht.

Klibanov M V and Pamyatnykh S E (2006) Lipschitz stability of a non-standard problem for the non-stationary transport equation via a Carleman estimate. *Inverse Problems,* 22: 881.

Kreyszig E (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley-Sons, Canada.

Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P (1986) *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* American Mathematical Society, Providence RI.

Machida M (2011) A Brief Introduction to Inverse Problems by Carleman Estimates, *Lecture Notes*, University of Michigan.

Machida M and Masahiro Yamamoto M (2012) Global Lipschitz stability in determining coefficients of the radiative transport equation, *preprint*, *arXiv*:1212.6730 [math.AP].

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow.

Prilepko A I and Ivankov A L (1984) Inverse problems for the time-dependent transport equation. *Soviet Math. Dokl.,* 29: 559–564.

Tataru D (1996) Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems. *J. Math. Pures Appl.*, 75: 367–408.

Taylor M (1981) *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, Princeton NJ.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Tikhonov A N and Arsenin V Ya (1979) *Methods of Solution of Ill Posed Problems*. Nauka, Moscow.

Treves F (1970) *Linear Partial Differential Equations*. Gordon and Breach, New York.

Vladimirov V S (1984) *Equations of Mathematical Physics.* MIR, Moscow.

Yamamoto M (2009) Carleman estimates for parabolic equations and applications. *Inverse Problems,* 25: 123013.

ÖZGEÇMİŞ

Mesut ÖZKARA, 1984'te Zonguldak'ta doğdu; ilk ve orta öğrenimini Zonguldak'ta tamamladıktan sonra 2002 yılında girdiği Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2008 yılında mezun oldu. Halen 2010 yılında girdiği BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Ketenciler Köyü Cariyeli Mah.
No:7/2 67300
Ereğli / ZONGULDAK

Tel : (372) 334 32 75
E-posta : mesut_ozkara67@hotmail.com