REGÜLER MODÜL $\mathbb{Z}G$ ' NİN *n*. SERBEST METABELYEN LIE KUVVETİ $M_n(\mathbb{Z}G)$ ' NİN MODÜL YAPISI

Evren EYİCAN POLATLI

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Şubat 2014

KABUL:

Evren EYİCAN POLATLI tarafından hazırlanan "REGÜLER MODÜL $\mathbb{Z}G$' NİN n. SERBEST METABELYEN LIE KUVVETİ $M_n(\mathbb{Z}G)$' NİN MODÜL YAPISI" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 17/02/2014

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM (BEÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Melih GÖCEN (BEÜ) ....

Üye : Doç. Dr. Nayil KILIÇ (SÜ) ....

ONAY:

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ...../...../2014

Prof. Dr. Şadi ŞEN
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

E. Eyican.

Evren EYİCAN POLATLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REGÜLER MODÜL $\mathbb{Z}G$ ' NİN *n*. SERBEST METABELYEN LIE KUVVETİ $M_n(\mathbb{Z}G)$ ' NİN MODÜL YAPISI

Evren EYİCAN POLATLI

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM

Şubat 2014, 47 sayfa

G keyfi bir grup, n bir pozitif tamsayı ve $M_n(\mathbb{Z}G)$ regüler modül $\mathbb{Z}G$ nin n. serbest metabelyen Lie kuvveti olsun. Bu tezde $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin modül yapısı çalışılmıştır. Birinci bölümde tez için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde Serbest Metabelyen Lie Cebirleri tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde G-modüller ele alınmış ve regüler modül tanımı verilmiştir. Dördüncü bölümde bir permütasyon modülünün modül direkt ayrışımı ve beşinci bölümde $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin modül yapısı açıklanmıştır. Son bölümde ise beşinci bölümdeki sonuçların bazı uygulamaları ve örnekleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regüler modül, Permütasyon Modülleri, Metabelyen Lie Kuvvetler

Bilim Kodu: 403.01.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

THE MODULE STRUCTURE OF THE *n*-TH FREE METABELIAN LIE POWER $M_n(\mathbb{Z}G)$ OF THE REGULAR MODULE $\mathbb{Z}G$

Evren EYİCAN POLATLI

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Seyhun KESİM
February 2014, 47 pages

Let G be an arbitrary group, n a positive integer and $M_n(\mathbb{Z}G)$ the n-th free metabelian Lie power of the regular module $\mathbb{Z}G$. In this thesis, the module structure of $M_n(\mathbb{Z}G)$ is studied. In the first chapter, some definitions and theorems necessary for the thesis are given. In the second chapter, free metabelian Lie algebras are introduced. In the third chapter, *G*-modules are considered and the definition of the regular module is given. In the fourth chapter, the direct decomposition of a permutation module and in the fifth chapter, the module structure of $M_n(\mathbb{Z}G)$ are explained. In the final chapter, some applications and examples of the results of the fifth chapter are given.

Keywords: Regular module, Permutation modules, Metabelian Lie Powers

Science Code: 403.01.01

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, görüş ve önerileriyle yardımcı olan Değerli Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM ’e (BEÜ) ve hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi bu süreçte manevi desteklerini hep yanımda hissettiren sevgili eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$G(w)$	:	w nın G deki stabilizeri
$\lvert G \rvert$	:	G nin mertebesi
$\lvert G \rvert \| n$	:	$\lvert G \rvert$ tam böler n
$\lvert G \rvert \nmid n$	:	$\lvert G \rvert$ tam bölmez n
$\binom{n}{k}$	:	n nin k -lı kombinasyonlarının sayısı

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümdeki materyalin çoğu Bhattacharya P B, Jain S K and Nagpaul S R (1994) den Türkçe'ye çevrilerek alınmıştır.

Tanım 1.1. G bir grup ve X bir küme olsun. Bu durumda eğer her $a,b \in G$, $x \in X$ için

(i) $a(bx) = (ab)x$

(ii) $1_G x = x$

olacak şekilde $\phi(a,x) = ax$ ile tanımlanan bir $\phi : G \times X \to X$ fonksiyonu varsa G nin X üzerinde etki ettiği söylenir. ϕ fonksiyonuna G nin X üzerindeki etkisi denir ve X in bir G-küme olduğu söylenir.

Tanım 1.2. (R – Modül): R birim elemanlı bir halka, $(M , +)$ bir abelyen grup ve

$$f : \underset{(r,m)}{R \times M} \underset{\mapsto}{\to} \underset{rm}{M}$$

bir fonksiyon olsun öyle ki $\forall r, r_1, r_2 \in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için

(i) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$

(ii) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

(iii) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$

(iv) $1_R m = m$

koşulları sağlansın. Bu durumda *M* ye bir sol *R*–modül denir ve ${}_R M$ şeklinde yazılır. Çoğunlukla *rm* skaler çarpım adını alır. Sağ *R*–modüller de benzer şekilde tanımlanır. Eğer *R* birim elemanlı komütatif bir halka ve *M* bir sol *R*-modül ise $mr = rm$ tanımlaması ile *M* bir sağ *R*-modül yapılır. Bu halde bir sol *R*–modül ve bir sağ *R*–modül birbiriyle çakışır. Dolayısıyla *R* birim elemanlı komütatif bir halka ise sol ve sağ *R*–modüller arasında bir fark gözetmeyeceğiz ve onlara basit bir şekilde *R*–modüller diyeceğiz.

Bu bölüm boyunca bütün modüller aksi ifade edilmedikçe sol modüller olarak ele alınacaktır.

Tanım 1.3. ***(R*- Cebir):** *R* bir komütatif halka olsun. Bir *R*–cebir bir sol *R*–modül olan bir *A* halkası (daima birim elemanlı) dır, öyle ki her $r \in R$, $a,b \in A$ için

$$r(ab) = (ra)b = a(rb)$$

dir (Brundan 2000).

Örnek 1.1. $(G,+)$ keyfi bir abelyen grup, $g\in G$ ve $n\in \mathbb{Z}$ olsun. *ng* skaler çarpımını şu şekilde tanımlayalım:

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g + g + \ldots + g}_{n-\tan e} & (n > 0) \\ 0 & (n = 0) \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \ldots + (-g)}_{|n|-\tan e} & (n < 0) \end{cases}$$

Bu skaler çarpım ile *G* bir $\mathbb{Z}$ - modüldür.

Örnek 1.2. *R* birim elemanlı bir halka olsun. $a\in R$, $m\in R$ olmak üzere *am* tanımı ile *R* halkasına sol *R*–modül gözüyle bakılabilir. Bu durumda *R* deki distribütif özellikler ve çarpma işleminin asosyatifliği, *R* nin bir sol *R*- modül olduğunu gösterir.

Örnek 1.3. R halkası üzerindeki bütün $m\times n$ matrislerin kümesi M olmak üzere M bir R–modüldür. Çünkü M, matrislerdeki toplama işlemine göre bir abelyen gruptur ve $r\in R, (a_{ij})\in M$ olmak üzere

$$r(a_{ij})=(ra_{ij})$$

olarak tanımlanan skaler çarpım ilgili modül aksiyomlarını sağlar.

Örnek 1.4. Örnek 1.3 de $R = \mathbb{R}$ ve $m = 1$, $n = 2$ (veya $m = 1$, $n = 3$) olmak suretiyle bütün 1×2 (veya 1×3) matrislerin kümesini $M = \mathbb{R}^2$ (veya $M = \mathbb{R}^3$) ile gösterirsek bir düzlemde (veya bir uzayda) bütün vektörlerin kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı teşkil eder. Modüller, skalerlerin cisim yerine birim elemanlı bir halkadan alındığı genelleştirilmiş vektör uzaylarıdır, yani her vektör uzayı aynı zamanda bir modüldür.

Örnek 1.5. R halkası üzerindeki $R[x]$ polinom halkası bir R–modüldür. Çünkü $R[x]$ polinomlardaki toplama işlemine göre bir abelyen gruptur ve $r, a_i\in R, \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\in R[x]$ olmak üzere

$$r\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i=\sum_{i=0}^{\infty}(ra_i)x^i$$

olarak tanımlanan skaler çarpım ilgili modül aksiyomlarını sağlar. Burada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ formal toplamında sonlu sayıda a_i sıfırdan farklıdır.

Örnek 1.6. M ve N birer R-modül olsun. $M\times N$ kartezyen çarpımında $\forall x, x'\in M, y, y'\in N$ ve $r\in R$ için

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$r(x,y)=(rx,ry)$$

tanımıyla $M \times N$ bir *R*-modül olur, M ve N modüllerinin direkt çarpımı adını alır.

Teorem 1.1. *M* bir *R*-modül olsun. Bu durumda $a \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir:

(i) $0m = 0$

(ii) $a0 = 0$

(iii) $(-a)m = a(-m) = -(am)$

Burada (i) ve (ii) de sağ taraftaki sıfırlar M nin ve (i) de sol taraftaki sıfır ise *R* nin sıfırıdır.

İspat.
(i) $am = (a+0)m = am + 0m \Rightarrow (M,+)$ abelyen grup olduğundan $0m = 0$ olmak zorundadır.

(ii) $am = a(m+0) = am + a0 \Rightarrow (R,+)$ abelyen grup olduğundan $a0 = 0$ olmak zorundadır.

(iii) (i) den dolayı $0 = 0m = (a+(-a))m = am + (-a)m$ dir. (ii) den dolayı $0 = a0 = a(m + (-m)) = am + a(-m)$ dir. Diğer taraftan $(M,+)$ bir grup olduğundan sadeleştirme özellikleri geçerlidir, yani $am + (-a)m = am + a(-m) \Rightarrow (-a)m = a(-m)$ bulunur.

Tanım 1.4. (*R*- Alt Modül) *M* bir *R*-modül ve *N*, *M* nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa *N*, *M* nin bir *R*-alt modülüdür denir.

(i) $a - b \in N$, $\forall a, b \in N$

(ii) $ra \in N$, $\forall a \in N, r \in R$

Örnek 1.7. Açık bir biçimde $\{0\}$ ve *M*, *M* nin *R*-alt modülleridir. Bunlar trivial alt modüller olarak adlandırılır.

Örnek 1.8. Eğer R bir cisim ise N, M nin bir alt uzayıdır. Dolayısıyla her alt uzay bir alt modül olarak alınabilir.

Örnek 1.9. Bir R halkasının her sol ideali sol R – modül R nin bir R–alt modülüdür.

Örnek 1.10. Eğer M bir R–modül ve $x \in M$ ise

$$Rx = \{rx \mid r \in R\}$$

kümesi M nin x içeren bir R-alt modülüdür. Çünkü $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$r_1x - r_2x = (r_1 - r_2)x \in Rx$$

$$r_1(r_2x) = (r_1r_2)x \in Rx$$

dir.

Teorem 1.2. $(N_i)_{i\in\Lambda}$ bir R-modül M nin R–alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i\in\Lambda} N_i$ de bir R –alt modüldür.

İspat. $x, y \in \bigcap_{i\in\Lambda} N_i$ ve $a \in R$ olsun. $\forall i \in \Lambda$ için N_i ler R-alt modüller olduğundan $x - y, ax \in N_i$ bulunur ki bu ise $\bigcap_{i\in\Lambda} N_i$ nin bir R-alt modül olduğunu gösterir.

M bir R-modül ve S, M nin bir alt kümesi olsun. Ayrıca M nin S i içeren bütün R alt-modüllerinin kümesini A ile gösterelim. $M \in A$ olduğundan $A \neq \varnothing$ dur.

$$K = \bigcap_{N\in A} N$$

olsun. Bu durumda K, M nin S i içeren en küçük R-alt modülüdür ve (S) ile gösterilir. M nin S alt kümesini içeren en küçük R-alt modülüne S tarafından üretilen R-alt modül denir. Eğer $S=\{x_1,...,x_m\}$ sonlu bir küme ise bu durumda $K=(x_1,...,x_m)$ yazılır.

Tanım 1.5. (Sonlu Olarak Üretilen Modül) Eğer uygun $x_i \in M$, $1 \le i \le k$ ler için $M=(x_1,...,x_k)$ ise bir R-modül M bir sonlu olarak üretilen modül adını alır ve $x_1,...,x_k$ elemanları M yi üretir denir.

Tanım 1.6. (Devirli Modül) Eğer uygun bir $x \in M$ için $M=(x)$ ise bu durumda bir R-modül M ye bir devirli modül denir.

Örnek 1.11. Alt modül örneklerinden Örnek 1.10. bize x tarafından üretilen bir devirli modülün tam olarak $\{rx \mid r \in R\} = Rx$ olduğunu gösterir.

Teorem 1.3. Eğer bir R-modül M bir $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi tarafından üretilir ve $1 \in R$ ise bu durumda

$$M=\left\{r_1x_1+r_2x_2+...+r_nx_n \mid r_i \in R\right\}$$

dir. Sağ taraf sembolik olarak $\sum_{i=1}^{n} Rx_i$ yazılır.

İspat. Açık bir biçimde, eğer $m, m_1, m_2 \in \sum_{i=1}^{n} Rx_i$ ve $r \in R$ ise

$$m_1 - m_2, rm \in \sum_{i=1}^{n} Rx_i$$

dir. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^{n} Rx_i$ M nin bir R-alt modülüdür. Ayrıca

$$1x_i = x_i \in Rx_i \subset \sum_{i=1}^{n} Rx_i$$

dir, yani bütün x_i ler için $x_i \in \sum_{i=1}^{n} Rx_i$ olur. M, M nin bütün x_i leri içeren en küçük R alt-modülü olduğu için

$$\sum_{i=1}^{n} Rx_i = M$$

olmak zorundadır.

Tanım 1.7. (Alt Modüllerin Toplamı) $1 \leq i \leq k$ için (N_i) bir M modülünün R-alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^{k} N_i$ tarafından üretilen alt modüle yani $1 \leq i \leq k$ için N_i alt modüllerini içeren en küçük alt modüle $1 \leq i \leq k$ için N_i alt modüllerinin toplamı denir ve

$$\sum_{i=1}^{k} N_i$$

ile gösterilir.

Teorem 1.4. $1 \leq i \leq k$ için (N_i) bir M modülünün R-alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{k} N_i = \left\{ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \,\middle|\, x_i \in N_i \right\}$$

dir.

İspat. $S = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_k \mid x_i \in N_i\}$ olsun. Eğer $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ ve $y_1 + y_2 + \ldots + y_k \in S$ ise

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) - (y_1 + y_2 + \ldots + y_k) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \ldots + (x_k - y_k) \in S$$

olur, çünkü $x_i - y_i \in N_i$ $(1 \leq i \leq k)$ dir. Ayrıca eğer $r \in R$ ise

$r(x_1 + x_2 + ... + x_k) = rx_1 + rx_2 + ... + rx_k \in S$

dir, çünkü $rx_i \in N_i \quad (1 \le i \le k)$ dir. Dolayısıyla S bir R-alt modülüdür.

Eğer K, her bir alt modül N_i yi içeren herhangi bir R-alt modül ise bu durumda K, $x_1 + x_2 + ... + x_k, x_i \in N$ formundaki bütün elemanları içerir. Dolayısıyla K, S yi içerir ve S her $N_i \ (1 \le i \le k)$ yi içeren en küçük alt modüldür. Sonuçta $S = \sum_{i=1}^{k} N_i$ nin tanımı kullanılarak $S = \sum_{i=1}^{k} N_i$ elde edilir.

Tanım 1.8. (Direkt Toplam) M bir R-Modül ve $\sum_{i=1}^{k} N_i$, M in R-alt modüllerinin bir (N_i), $1 \le i \le k$ **,** ailesinin toplamı olsun. Eğer $\forall x \in \sum_{i=1}^{k} N_i$ bir tek şekilde

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i \qquad (x_i \in N_i)$$

olarak ifade edilebiliyor ise $\sum_{i=1}^{k} N_i = N$ e bir direkt toplam denir ve

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_k = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i$$

yazılır.

Teorem 1.5. M bir R-modül ve $1 \le i \le k$ için (N_i) M nin R-alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $\sum_{i=1}^{k} N_i$ bir direkt toplamdır.

(ii) $0 = \sum_{i=1}^{k} x_i \in \sum_{i=1}^{k} N_i \Rightarrow \forall i, x_i = 0$

(iii) $N_i \bigcap \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} N_j = \{0\},\ 1 \le i \le k$

İspat.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Direkt toplam tanımından çıkar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). $x \in N_i \bigcap \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} N_j = \{0\},\ 1 \le i \le k$ olsun. Bu durumda

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_{i-1} + x_{i+1} + ... + x_k \in N_i$$

ve

$$0 = x_1 + x_2 + ... + x_{i-1} + (-x) + x_{i+1} + ... + x_k \Rightarrow x = 0$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i). $i = 1, 2, ..., k$ için $x_i, y_i \in N_i$ olmak üzere $x = x_1 + x_2 + ... + x_k$ ve $y = y_1 + y_2 + ... + y_k$ olsun. Bu durumda

$$0 = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + ... + (x_k - y_k)$$

elde edilir ki bu

$$x_1 - y_1 \in N_1 \bigcap \sum_{i=2}^{k} N_i = \{0\} \Rightarrow x_1 - y_1 = 0$$

yani $x_1 = y_1$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $x_2 = y_2, ..., x_k = y_k$ bulunur. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^{k} N_i$ bir direkt toplamdır.

Tanım 1.9. (R-Homomorfi) M ve N gibi iki R-modül verilsin. Her $x, y \in M, r \in R$ için aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $f : M \to N$ foksiyonuna M nin N içine bir R-homomorfisi denir.

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(rx) = rf(x)$.

Tanım 1.10. (Endomorfi) $Hom_R(M,N)$, M nin N içine R-homomorfilerinin kümesini göstersin. Eğer $M = N$ ise $f : M \to N$ fonksiyonuna M in bir endomorfisi denir ve $Hom_R(M,M)$ kümesi $End_R(M)$ ile gösterilir.

Örnek 1.12. M bir R-modül olsun. Bu durumda $i(x) = x, x \in M$ ile verilen $i : M \to M$ fonksiyonu açık olarak M nin M üzerine bir R-homomorfisidir ve M nin idandik endomorfisi adını alır.

Örnek 1.13. $\bar{0}(x) = 0,\ x \in M$ ile verilen $\bar{0} : M \to M$ fonksiyonu M nin M içine bir R-homomorfisidir ve M sıfır endomorfisi adını alır.

Örnek 1.14. M komutatif ve birim elemanlı bir R halkası üzerinde bir R-modül ve α, R nin sabit bir elemanı olmak üzere $f(x) = \alpha x, x \in M$ ile verilen f fonksiyonu M nin M içine bir R-homomorfisidir.

Tanım 1.11. (Çekirdek (ker) ve Görüntü (im)) $f : M \to N$ bir R-modül M nin bir R-modül N içine bir R-homomorfisi olsun. Bu durumda

$$K = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

kümesine f nin çekirdeği denir ve ker f ile gösterilir.

$$f(M) = \{ f(x) \mid x \in M \}$$

kümesine de M nin f altındaki görüntüsü denir ve im f ile gösterilir.

Tanım 1.12. (Tam Dizi) Sonlu veya sonsuz *R*-modüllerden ve *R*-homomorfilerden oluşan bir

$$\ldots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

dizisi eğer her n için im f_n = ker f_{n+1} ise tamdır.

Özel olarak *A, B, C R*-modüllerinden, f ve *g R*-homomorfilerden oluşan

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

tam dizisine bir kısa tam dizi denir.

Tanım 1.13. (Monomorfi, Epimorfi, İzomorfi) Eğer $f : M \to N$ homomorfisi birebir ise bir monomorfi, örten ise bir epimorfi, hem birebir hem de örten ise bir izomorfi adını alır. Eğer $f : M \to N$ bir izomorfi ise *M*, *N* e izomorftur denir ve $M \cong N$ yazılır.

Tanım 1.14. *N* bir *R*-modül *M* nin bir *R*-alt modülü ve $a_1, a_2 \in M$ olsun. Eğer $a_1 - a_2 \in N$ ise $a_1 \equiv a_2 (\text{mod}\, N)$ deriz. "$\equiv$" bir denklik bağıntısıdır. $\bar{a}$, $a \in M$ yi içeren denklik sınıfını göstersin. Açık bir biçimde

$$\bar{a} = a + N = \{a + x \mid x \in N\}$$

dir. Denklik sınıflarının kümesini M / N ile gösterelim. M / N deki ikili işlemleri

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in M / N$$

$$r\bar{a} = \overline{ra}, \quad \bar{a} \in M / N, r \in R.$$

olarak tanımlayalım. Bu ikili işlemlerin iyi tanımlı olduğu ve M/N kümesini bir *R*-modül yaptığı kolayca görülebilir. Bu modüle M nin modülo *N* bölüm modülü denir.

Tanım 1.15. (Lineer Bağımsızlık) Bir *R*-modül *M* nin $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanlarının sonlu bir dizisi ya da bir listesi, eğer herhangi $a_1, ..., a_n \in R$ için

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \text{ iken } a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

oluyorsa, lineer bağımsızdır denir. Sonlu bir dizi, eğer lineer bağımsız değilse lineer bağımlıdır denir.

Bir *R*-modül *M* nin bir *S* alt kümesi, eğer *S* nin farklı elemanlarının her sonlu dizisi lineer bağımsız ise, lineer bağımsızdır denir.

Tanım 1.16. (Taban) Bir *R*-modül *M* nin bir *B* alt kümesi, eğer

(i) *M*, *B* tarafından üretilir,

(ii) *B* lineer bağımsız bir küme

ise, bir tabandır.

Tanım 1.17. (Serbest Modül) Bir *R*-modül *M* ye, eğer bir tabanı varsa, bir serbest modül denir. Diğer bir deyişle *M*, eğer *S* gibi lineer bağımsız bir alt kümesi tarafından üretilir ise, bir serbest modül adını alır.

Tanım 1.18. (Rank) Bir birim elemanlı komütatif *R* halkası üzerinde sonlu olarak üretilen bir *M* serbest modülünün herhangi bir tabanındaki elemanlarının sayısına *M* nin rankı denir ve rank*M* yazılır.

Tanım 1.19. (Tensör Çarpım) *M* bir sağ *R*-modül ve *N* bir sol *R*-modül olsun. *M* ve *N* nin tensör çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanan bir abelyen gruptur.

$Z(M,N)$ tabanı $M \times N$ olan bir serbest abelyen grup yani bir serbest $\mathbb{Z}$-modül, $Y(M,N)$ ise $Z(M,N)$ nin $\forall m, m_1, m_2 \in M$, $\forall n, n_1, n_2 \in N$ ve $\forall r \in R$ için aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir alt grubu olsun.

$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$
$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$

$(mr, n) - (m, rn)$

$T(M,N) = Z(M,N)/Y(M/N)$ bölüm grubuna M ve N nin tensör çarpımı denir ve $T(M,N) = M \otimes_R N$ ile gösterilir. Ayrıca $(m,n) + Y(M,N) = m \otimes n$ yazacağız.

Teorem 1.6. *M* ve *N* sırasıyla sağ ve sol *R*-modüller olsunlar. Bu durumda $\forall m, m_1, m_2 \in M$, $\forall n, n_1, n_2 \in N$ ve $\forall r \in R$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$

(ii) $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$

(iii) $mr \otimes n = m \otimes rn$

İspat. $Y(M,N)$ nin her elemanının $m \in M$, $n \in N$ için

$\phi(m,n) = (m,n) + Y(M,N)$

ile verilen $\phi : M \times N \to Z(M,N)/Y(M,N)$ kanonik homomorfisi altındaki görüntüsü sıfırdır.

Teorem 1.7. *M* ve *N* sırasıyla sağ ve sol *R*-modüller olsun.

(i) $\lambda \in \mathbb{Z}$, $m \in M$ ve $n \in N$ olsun. Bu durumda,

$\lambda m \otimes n = \lambda(m \otimes n) = m \otimes \lambda n$

özel olarak

$0 \otimes n = 0 = m \otimes 0$

ve

$-m \otimes n = -(m \otimes n) = m \otimes (-n)$

dir.

(ii) $M \otimes_R N$ nin her elemanı $m_i \in M, n_i \in N$ olmak üzere $\sum_{sonlu} m_i \otimes n_i$ formundadır.

İspat.

(i) Sabit bir $n \in N$ için $\phi(m) = m \otimes n \quad (m \in M)$ ile verilen $\phi : M \to M \otimes_R N$ fonksiyonunu ele alalım. ϕ bir grup homorfisidir. Dolayısıyla $\lambda \in \mathbb{Z}$ için $\lambda m \otimes n = \lambda(m \otimes n)$ ve benzer şekilde $m \otimes \lambda n = \lambda(m \otimes n)$ elde ederiz.

(ii) $\mathbb{Z}(M, N)$ nin her elemanı

$$\sum_{sonlu} \lambda_i (m_i, n_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}, m_i \in M, n_i \in N$$

formunda olduğundan $M \otimes_R N$ nin her elemanı $\sum \lambda_i (m_i \otimes n_i)$ sonlu toplamı şeklindedir.

Diğer taraftan $\lambda_i (m_i \otimes n_i) = \lambda_i m_i \otimes n_i$ olduğundan, $M \otimes_R N$ nin her elemanı $m \otimes n, m \in M$, $n \in N$ tipindeki elemanların sonlu toplamı şeklindedir.

Bir sağ *R*-modül *A* için *n.* tensör kuvvet

$$T_n A = \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{n-\text{tane}}$$

dir ve $T_0A = \mathbb{Z}$ yazılır.

a_n , T_nA nın $a_1,...,a_n \in A$ ve uygun $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ için $a_i = a_j$ olmak üzere

$$a_1 \otimes ... \otimes a_n$$

tipindeki bütün elemanlar tarafından üretilen alt modülü olsun. *A* nın *n*. eksterior kuvveti

$$\Lambda_n A = T_nA / \mathrm{a}_n$$

olarak tanımlanır.

$a_1 \otimes ... \otimes a_n \in T_nA$ nın $T_nA \to \Lambda_n A$ doğal projeksiyonu altındaki kanonik görüntüsü $a_1 \Lambda ... \Lambda a_n$ ile gösterilir. Özel olarak

$$\Lambda_2 A = T_2A / \mathrm{a}_2 = A \otimes A \big/ \big\langle a \otimes a \mid a \in A \big\rangle$$

ve her $a \in A$ için $a \Lambda a = 0$ dır.

b_n , T_nA nın $a_1,...,a_n \in A$ ve ρ $\{1,...,n\}$ nin herhangi bir permütasyonu olmak üzere

$$a_1 \otimes ... \otimes a_n - a_{\rho(1)} \otimes ... \otimes a_{\rho(n)}$$

tipindeki bütün elemanlar tarafından üretilen alt modülü olsun. *A* nın *n*. simetrik kuvveti

$$S_nA = T_nA / \mathrm{b}_n$$

olarak tanımlanır.

$a_1 \otimes ... \otimes a_n \in T_nA$ nın $T_nA \to S_nA$ doğal projeksiyonu altındaki kanonik görüntüsü $a_1 \circ ... \circ a_n$ ile gösterilir.

BÖLÜM 2

SERBEST METABELYEN LIE CEBİRLERİ

Tanım 2.1. R birim elemanlı komütatif bir halka olmak üzere R üzerinde bir Lie cebiri A aşağıdaki özellikleri sağlayan bir cebirdir:

(i) $A \otimes_R A \to A$ fonksiyonu

$$A \otimes_R A \to \Lambda_2 A \to A$$

ayrılışına sahiptir yani eğer $x \otimes y$ nin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü $[x, y]$ ile gösterirsek her $x \in A$ için

$$[x, x] = 0$$

dır.

(ii) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (Jacobi birimi) (Serre 1992)

Hemen (i) den

$$[x, y] = -[y, x]$$

olduğu görülür ve bu eşitliğe ters değişme özelliği denir.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. Bir X kümesi için $L = L(X), \mathbb{Z}$ ve X üzerinde serbest Lie cebirini göstersin. L

$$L(X)=\bigoplus_{n\geq 1} L_n(X)$$

direkt modül ayrışımına sahiptir. Burada $L_n = L_n(X)$ L nin n. homojen bileşenini göstermektedir.

Teorem 2.1. $L_n(X)$, girişleri X den alınan n. dereceden sol-normlu Lie çarpımları yani $x_i \in X$, $i=1,2,...,n$ olmak üzere $[x_1,x_2,...,x_n]=[[x_1,x_2,...,x_{n-1}],x_n]$ elemanları tarafından üretilir.

İspat. Eğer $a,b\in L(X)$ $x_1,x_2,...,x_k,y_1,y_2,...,y_l \in X$ olmak üzere $a=[x_1,x_2,...,x_k]$, $b=[y_1,y_2,...,y_l]$ ise bu durumda $[a,b]$ nin X in elemanlarının sol-normlu Lie çarpımlarının bir lineer kombinasyonları olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunu l üzerinde tümevarımla yapacağız. Eğer $l=0$ veya 1 ise sonuç aşikârdır.

Şimdi eğer $y=y_l+1$ ise Jacobi birimi ve ters değişme özelliği kullanılarak

$$[a,[b,y]]=-[b,[y,a]]-[y,[a,b]]=-[[a,y],b]+[[a,b],y]$$

elde edilir ki bu tümevarım hipotezi nedeniyle istediğimiz formdur.

Hall tabanının tanımını hatırlayalım. Hall taban elemanlarının tanımı, L nin tamamı sıralanmış sabit bir serbest üreteç kümesi X den elde edilir. X kümesinin elemanları derecesi 1 olan Hall elemanlarıdır. Derecesi en fazla n olan Hall elemanlarının tanımlandığını ve Hall elemanlarının total sıralamasının aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım:

Eğer herhangi iki w_1,w_2 Hall elemanları için $\text{der}\,w_1>\text{der}\,w_2$ ise $w_1>w_2$ dir. (der = derece)

Bu durumda $[u,v]$ nin derecesi n olan bir Hall elemanı olması için gerek ve yeter koşullar $\text{der}\,u+\text{der}\,v=n$, $u>v$ ve eğer $u=[u_1,u_2]$ $v\geq u_2$ dir.

Hall elemanları $L(X)$ in bir tabanıdır ve derecesi *n* olan Hall taban elemanları da $L_n(X)$ in bir tabanıdır (Bakhturin 1985).

$S = S(X)$ $\mathbb{Z}$ ve X üzerindeki simetrik cebiri ve $n \geq 0$ için $S_n(X)$, S nin *n*. homojen bileşenini göstersin. Bu durumda *S*, $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n(X)$ direkt ayrışımına sahiptir.

$n \geq 1$ için, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ olmak üzere $x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n$ elemanları S_n nin bir $\mathbb{Z}$ tabanını oluşturur ve $S_0 = \mathbb{Z}1$ dir (Serre 1992).

L birim elemanlı komutatif bir K halkası üzerindeki bir Lie cebiri olsun. $n = 0,1,2,...$ için $L^{(n)}$ tümevarımla tanımlanır.

Eğer $L^{(0)} = L$ ve $L^{(n+1)} = \left[L^{(n)}, L^{(n)}\right]$ ise $L^{(1)} = L' = [L, L]$, $L^{(2)} = L'' = \left[[L,L],[L,L]\right]$ olmak üzere

$$L = L^{(0)} \geq L^{(1)} \geq L^{(2)} \geq ... \geq L^{(n)} \geq ...$$

formunda *L* nin ideallerinin bir azalan zincirini elde ederiz.

Tanım 2.2. *X* üzerindeki serbest metabelyen Lie cebiri

$$M = M(X) = L / L''$$

olarak tanımlanır. *M*

$$M(X) = \bigoplus_{n \geq 1} M_n(X)$$

direkt modül ayrışımına sahiptir. Burada $M_n = M_n(X)$ M nin *n*. homojen bileşenini göstermektedir.

Teorem 2.2. M, $n \geq 1$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve $x_1 > x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n$ olmak üzere $[x_1, x_2, ..., x_n]$ formundaki sol normlu Lie çarpımlarından oluşan bir $\mathbb{Z}$-tabanına sahiptir (Bakhturin 1985).

Teorem 2.3. M ye ait bütün sol-normlu Lie çarpımları için $3 \leq i \leq n-1$ olmak üzere

$$[x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n] = [x_1, x_2, ..., x_{i+1}, x_i, ..., x_n]$$

yani M de sol normlu Lie çarpımları $x_3, ..., x_n$ girişlerine göre simetriktir.

İspat. $u \in M'$ olsun. Bu durumda $M'' = 0$ olduğundan $a, b \in M$ için $[u, a, b] = [u, b, a]$ ve

$$[u, a, b] - [u, b, a] = -[a, u, b] - [u, b, a] = [b, a, u] = [[b, a], u] \in M'$$

dür.

Şimdi, $u = [x_1, x_2, ..., x_{i-1}]$, $a = x_i$ ve $b = x_{i+1}$ olsun. Eğer $i \geq 3$ ise, bu durumda $u \in M'$ ve yukarıdaki eşitlikten

$$[x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = [x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, x_i]$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını bitirir.

Yukarıdaki teoremden hemen 3, … , n nin herhangi bir σ permütasyonu için

$$[x_1, x_2, x_3, ..., x_n] = \left[x_1, x_2, x_{\sigma(3)}, ..., x_{\sigma(n)}\right]$$

olduğu görülür.

Lemma 2.1. $n \geq 2$ için,

$$\nu_n : M_n \to S_1 \otimes S_{n-1}$$

$$\nu_n\left(\left[x_1, x_2, ..., x_n\right]\right) = x_1 \otimes \left(x_2 \circ ... \circ x_n\right) - x_2 \otimes \left(x_1 \circ ... \circ x_n\right)$$

ve

$$\kappa_n : S_1 \otimes S_{n-1} \to S_n$$

$$\kappa_n\left[x_1 \otimes \left(x_2 \circ ... \circ x_n\right)\right] = x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n$$

olmak üzere

$$0 \to M_n \xrightarrow{\nu_n} S_1 \otimes S_{n-1} \xrightarrow{\kappa_n} S_n \to 0$$

dizisi bir kısa tam dizidir yani ν_n bire-bir, κ_n örten ve $\operatorname{im}\nu_n = \ker\kappa_n$ dir.

İspat. (Hannebauer and Stöhr 1990)

Lemma 2.2. Bir $\mathbb{Z}$-modül olarak M_n nin rankı, $|X| = r$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$\text{rank } M_n = (n-1)\binom{r+n-2}{n}$$

dir.

İspat: Lemma 2.1 deki kısa tam dizi kullanılarak

$$\text{rank } \left(S_1 \otimes S_{n-1}\right) = \text{rank } M_n + \text{rank } S_n$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\text{rank } S_n = \binom{r+n-1}{n}$$

dir (İnce 2008). Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} M_n &= r\binom{r+n-2}{n-1} - \binom{r+n-1}{n} \\ &= r\binom{r+n-2}{n-1} - \binom{r+n-2}{n} - \binom{r+n-2}{n-1} \\ &= (r-1)\binom{r+n-2}{n-1} - \binom{r+n-2}{n} \\ &= n\binom{r+n-2}{n} - \binom{r+n-2}{n} \\ &= (n-1)\binom{r+n-2}{n}\end{aligned}$$

dir.

BÖLÜM 3

G -MODÜLLER VE $\mathbb{Z}G$ -MODÜLLER

Bu bölümdeki materyalin çoğu Hilton and Stammbach (1971) den Türkçe'ye çevrilerek alınmıştır.

R bir halka ve G bir çarpımsal grup olsun.

$$RG = \left\{ \sum_{g\in G} r_g g \,\middle|\, r_g \in R \right\}$$

kümesi

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} p_g g = \sum_{g\in G} \left(r_g + p_g \right) g$$

(burada $r_g + p_g$ r_g ve p_g nin R deki toplamıdır.) ve

$$\sum_{g\in G} r_g g \sum_{g'\in G} p_{g'} g' = \sum_{g\in G} \sum_{g'\in G} r_g p_{g'} g g'$$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır ve grup halkası adını alır.

Özel olarak $R = \mathbb{Z}$ için $\mathbb{Z}G$ grup halkası elde edilir. $\mathbb{Z}G$ tabanı G olan bir serbest abelyen gruptur. Herhangi iki taban elemanının çarpımı G deki çarpım ile verilir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}G$ grup halkasının elemanları $\sum_{g\in G} n_g g$ formundadır ve burada $n_g \in \mathbb{Z}$ sonlu sayıdaki elemanlar hariç 0 değerini alır. $\mathbb{Z}G$ de çarpma işlemi

$$\left(\sum_{g\in G} n_g g\right)\left(\sum_{h\in G} m_h h\right) = \sum_{k\in G} n_k k$$

olarak tanımlanır ve burada

$$n_k = \sum_{\substack{g,h\in G \\ gh=k}} n_g m_h$$

dir. $\mathbb{Z}G$ grup halkası aşağıdaki evrensel özellik tarafından karakterize edilir.

Önerme 3.1. R bir halka ve $i : G \to \mathbb{Z}G$ aşikar gömme fonksiyonu olsun. $f(gh) = f(g)\,f(h)$ ve $f(1) = 1_R$ koşullarını sağlayan herhangi bir $f : G \to R$ fonksiyonuna karşılık $f' i = f$ olacak şekilde bir tek $f' : \mathbb{Z}G \to R$ homomorfisi vardır.

İspat. $\sum_{g\in G} n_g g \in \mathbb{Z}G$ için $f'\left(\sum_{g\in G} n_g g\right) = \sum_{g\in G} n_g f(g)$ ile tanımlanan $f' : \mathbb{Z}G \to R$ fonksiyonunu ele alalım. f' açık bir biçimde $f\hat{i} = f$ olacak şekildeki tek halka homomorfisidir.

Bir sağ G-modül bir A abelyen grubudur öyle ki $\gamma : G \to \operatorname{Aut} A$ bir grup homomorfisidir. $a \in A$ nın bu otomorfi altındaki görüntüsü $\gamma(g)$ yi (diğer bir deyişle g nin a üzerindeki etkisini) ag ile göstereceğiz.

$\operatorname{Aut} A \subseteq \operatorname{End} A$ olduğundan grup halkasının evrensel özelliği kullanılarak $\gamma' : \mathbb{Z}G \to \operatorname{End} A$ halka homomorfisi elde edilir ve bu şekilde A, $\mathbb{Z}G$ üzerinde bir sağ modül yani bir sağ $\mathbb{Z}G$ -modül yapılır.

Tersine eğer A bir sağ $\mathbb{Z}G$ -modül ise bu durumda $\mathbb{Z}G$ deki grup elemanları tersinir olduğundan ve herhangi bir halka homomorfisi tersinir elemanları tersinir elemanlara götürdüğünden A bir sağ G-modüldür. Bu argüman G-modül ve $\mathbb{Z}G$ -modül kavramları arasında herhangi bir fark gözetmenin gerekli olmadığını ortaya koyar.

Bir sağ G-modül eğer $\gamma : G \to \operatorname{Aut} A$ fonksiyonu trivial yani G nin her elemanı A da birim eleman olarak etki ederse, trivialdir denir. $a \in A$ olsun. Bu durumda $g \in G$ nin etkisi $ag = a$ $(\forall g \in G)$ dir. Her abelyen gruba herhangi bir G grubu için trivial bir G-modül gözüyle bakılabilir.

$g \in G$ için $\alpha(g) = 1$ ile tanımlanan $\alpha : G \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu vasıtasıyla $\sum_{g \in G} n_g g \in \mathbb{Z}G$ için $\varepsilon\left(\sum_{g \in G} n_g g\right) = \sum_{g \in G} n_g$ ile tanımlanan $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ halka homomorfisi elde edilir. ε nun çekirdeği IG ile gösterilir ve $\ker \varepsilon = IG$ yazılır.

Lemma 3.1. Bir Abel grubu olarak IG , $W = \{g - 1 \mid 1 \neq g \in G\}$ kümesi üzerinde serbesttir.

İspat. $\sum_{g \in G} n_g (g - 1) = 0$ olsun. $1 \neq g$ olduğundan $\forall g \in G$ için $n_g = 0$ elde edilir ki bu W nun lineer bağımsız olduğunu gösterir. Dolayısıyla W nun, IG yi ürettiğini göstermek yeterlidir. $\sum_{g \in G} n_g g \in IG$ olsun. Bu durumda $\sum_{g \in G} n_g = 0$ olduğundan $\sum_{g \in G} n_g (g - 1) = \sum_{g \in G} n_g g$ elde edilir ve bu da teoremin ispatını bitirir.

Tanım 3.1. (Regüler Modül) G nin regüler modülü $\mathbb{Z}G$ dir ve $\mathbb{Z}G$ ye bir sağ $\mathbb{Z}G$ -modül gözüyle bakılır. $h \in G$ nin $\mathbb{Z}G$ üzerindeki etkisi

$$\left(\sum_{g \in G} n_g g\right) h = \sum_{g \in G} n_g gh$$

ile verilir.

BÖLÜM 4

PERMÜTASYON MODÜLLERİ

Bu bölümdeki materyal Kesim (1997) den Türkçe'ye çevrilerek alınmıştır.

Tanım 4.1. Bir $\mathbb{Z}G$ -modül *V* ye, eğer her $x \in X$, her $g \in G$ için $xg \in X$ olacak şekilde bir *X*, $\mathbb{Z}$-tabanına sahipse bir permütasyon modülü denir. Ayrıca *V* nin bu *X* $\mathbb{Z}$-tabanına *V* nin permütasyon tabanı adı verilir.

Örnek 4.1. $\mathbb{Z}G$, permütasyon tabanı *G* olan bir permütasyon modülüdür.

Lemma 4.1. Eğer *V* permütasyon tabanı *X* olan bir permütasyon modül ise, bu durumda

$$V = \bigoplus_{w \in \Omega} V_w$$

dır ve burada Ω, *X* üzerinde *G* nin orbitlerinin temsilcilerinin bir kümesi ve $V_w = w\mathbb{Z}G$ dir.

İspat. *G* bir grup ve *X*, *V* permütasyon modülünün permütasyon tabanı olsun. Bu durumda *X* bir ayrık birleşim olarak $X = \bigcup_{w \in \Omega} wG$ şeklinde yazılabilir. $x \in X$ olsun. Dolayısıyla uygun bir $w \in \Omega$ ve uygun bir $g_x \in G$ için $x = wg_x$ dir. Şimdi

$$V = \left\{ \sum_{x \in X} n_x x \,\middle|\, n_x \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sum_{w \in \Omega} \left(\sum n_{wg_x} wg_x \right) \right\}$$

yazılabilir.

$V_w = \left\{ \sum n_{wg_x} wg_x \right\}$ yazılırsa bu durumda $V_w = w\mathbb{Z}G$ ve $V = \sum_{w \in \Omega} V_w$, $V_w \bigcap \sum_{w \neq w'} V_{w'} = \{0\}$ yani $V = \underset{w \in \Omega}{\oplus} V_w$ olduğu görülür.

Tanım 4.2. *G* bir grup, *V* bir permütasyon modülü ve Ω, *V* nin *X* permütasyon tabanı üzerinde *G* nin orbitlerinin temsilcilerinin bir kümesi olsun. $w \in \Omega$ için,

$$G(w) = \left\{ g \in G \,\middle|\, wg = w \right\}$$

kümesine *w* nun *G* deki stabilizeri denir.

Tanım 4.3. *G* bir grup, *V* bir permütasyon modülü ve *X*, *V* nin permütasyon tabanı olsun. Eğer her $x \in X$ için $xg = xh \Rightarrow g = h$ koşulu sağlanırsa *G*, *X* üzerinde serbest olarak etki eder deriz.

Lemma 4.2. $w \in \Omega$ olsun ve *G* nin wG orbiti üzerinde serbest olarak etki ettiğini varsayalım. Bu durumda V_w regüler modül $\mathbb{Z}G$ ye izomorftur.

İspat. $r \in \mathbb{Z}G$ için $\alpha(r) = wr$ ile verilen $\alpha : \mathbb{Z}G \to V_w$ fonksiyonunu ele alalım. α nın *G*-modül izomorfisi olduğunu göstereceğiz. $r = \sum_{g \in G} n_g g \in \ker \alpha$ olsun. Bu durumda

$$\alpha(r) = wr = w\left(\sum_{g \in G} n_g g \right) = \sum_{g \in G} n_g wg = 0$$

dır. wg $(g \in G)$ elemanları ikişer ikişer birbirlerinden farklı ve V_w nin bir $\mathbb{Z}$ tabanını oluşturduklarından $\forall g \in G$ için $n_g = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $r = 0$ ve α birebirdir. Ayrıca α aşikâr örtendir. Dolayısıyla $\forall r \in \mathbb{Z}G$, $\forall h \in G$ için $\alpha(rh) = \alpha(r)h$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathbb{Z}G$ üzerindeki *G*-etkiyi ve Ω nın bir *G*-küme olduğu gerçeğini kullanarak

$$\alpha(rh) = \alpha\left(\left(\sum_{g \in G} n_g g \right) h \right) = \alpha\left(\sum_{g \in G} n_g gh \right) = \sum_{g \in G} n_g (wg)h = \alpha(r)h$$

olduğunu görürüz.

Lemma 4.3. $w \in \Omega$ olsun. Bu durumda G nin wG orbiti üzerinde serbest olarak etki etmesi için gerek ve yeter koşul $G(w) = \{1\}$ olmasıdır.

İspat. (Gereklilik) G, wG orbiti üzerinde serbest olarak etki etsin ve $g \in G(w)$ olsun. Bu durumda $wg = w = w1$ elde edilir ki bu, etki serbest olduğundan $g = 1$ sonucunu verir. Dolayısıyla $G(w) = \{1\}$ dir.

(Yeterlilik) $w \in \Omega$, $G(w) = \{1\}$ olsun. Etkinin serbest olmadığını varsayalım. Şu halde $xg = xh$ olacak şekilde uygun $x \in wG$, $h, g \in G, h \neq g$ elemanları vardır. Bu durumda uygun bir $g' \in G$ için $x = wg'$ ve $(wg')g = (wg')h$ yani

$$w(g'g) = w(g'h) \Rightarrow w = w(g'h)(g'g)^{-1} = 1 \Rightarrow g'h = g'g \Rightarrow h = g$$

elde edilir ki bu $h \neq g$ olduğundan bir çelişkidir.

Önerme 4.1. Eğer $G(w) = \{1\}$ ise bu durumda V permütasyon modülünün $\mathbb{Z}G$ -alt modülü V_w (rankı 1 olan) bir serbest $\mathbb{Z}G$ -modüldür.

İspat. $G(w) = \{1\}$ olduğundan Lemma 4.3. nedeniyle G, wG üzerinde serbest olarak etki eder. Bu durumda Lemma 4.2. nedeniyle V_w nın regüler yani rankı 1 olan bir serbest $\mathbb{Z}G$ -modül olduğunu görürüz.

Önerme 4.2. V permütasyon modülünün $\mathbb{Z}G$ -alt modülü V_w nın bir trivial $\mathbb{Z}G$ -modül olması için gerek ve yeter koşul $G(w) = G$ olmasıdır.

İspat. (Gereklilik) Bir trivial modülünün tanımından hemen görülür.
(Yeterlilik) $G(w) = G$ yani $\forall g \in G$ için $wg = w$ olsun. Bu durumda $wG = \{w\}$ dır ve G, V_w üzerinde trivial olarak etki eder.

BÖLÜM 5

$M_n(\mathbb{Z}G)$ NİN MODÜL YAPISI

Bu bölümdeki materyal Kesim (1997) den Türkçe'ye çevrilerek alınmıştır.

$\mathbb{Z}G$ nin Simetrik ve Serbest Metabelyen Lie Kuvvetleri

G nin regüler modülü $\mathbb{Z}G$ bir serbest $\mathbb{Z}$-modüldür. $\mathbb{Z}G$ üzerindeki serbest Lie cebiri için $L(\mathbb{Z}G)$ yazarız. Dolayısıyla $L(\mathbb{Z}G)$, $\mathbb{Z}$ üzerinde serbest Lie cebiridir öyle ki $L(\mathbb{Z}G)$ bir $\mathbb{Z}$-alt modülü olarak $\mathbb{Z}G$ yi içerir ve $\mathbb{Z}G$ nin her tabanı (yani bir $\mathbb{Z}$-modül olarak $\mathbb{Z}G$ nin her serbest üreteç kümesi) $L(\mathbb{Z}G)$ nin bir serbest üreteç kümesidir. G nin $\mathbb{Z}G$ üzerindeki etkisi bir tek şekilde $L(\mathbb{Z}G)$ ye genişler öyleki $L(\mathbb{Z}G)$ üzerinde G nin elemanlarının cebir otomorfileri olarak etki ettiği bir $\mathbb{Z}G$-modüldür. $\mathbb{Z}G$ nin *n*. Lie kuvveti, $L(\mathbb{Z}G)$ nin $\mathbb{Z}G$-alt modülü ve *n*. homojen bileşeni olan $L_n(\mathbb{Z}G)$ dir. Bu nedenle $L(\mathbb{Z}G)$ aşağıdaki direkt ayrışıma sahip bir derecelendirilmiş modüldür.

$$L(\mathbb{Z}G) = \bigoplus_{n\geq 1} L_n(\mathbb{Z}G)$$

Benzer şekilde simetrik cebir $S(\mathbb{Z}G)$ yi ve serbest metabelyen Lie cebir $M(\mathbb{Z}G)$ yi elde ederiz. Burada $M(\mathbb{Z}G)$ yi $L(\mathbb{Z}G)$ ile $L(\mathbb{Z}G)$ nin ikinci türetilmiş alt cebiri olan $L(\mathbb{Z}G)''$nün bölümü olarak tanımlarız. Bütün bu cebirler aşikâr olarak derecelendirilmiş $\mathbb{Z}G$-modüller olarak ele alınacak ve homojen bileşenleri $S_n(\mathbb{Z}G)$ ve $M_n(\mathbb{Z}G)$ sırasıyla $\mathbb{Z}G$ nin *n*. simetrik kuvveti ve *n*. serbest metabelyen Lie kuvveti olarak adlandırılacaktır.

G bir grup olsun. G nin elemanları $\mathbb{Z}G$ nin serbest $\mathbb{Z}$-tabanını oluşturur. $\mathbb{Z}G$ nin serbest $\mathbb{Z}$-tabanı G nin keyfi bir şekilde sıralandığını varsayalım. Bu durumda $g_1, g_2, ..., g_n \in G$ ve $g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_n$ olmak üzere $g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_n$ monomialleri $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin serbest $\mathbb{Z}$-tabanını oluşturur. $g_1, g_2, ..., g_n \in G$ ve $g_1 > g_2 \leq g_3 ... \leq g_n$ olmak üzere $[g_1, g_2, ..., g_n]$ sol normlu Lie monomialleri $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin serbest $\mathbb{Z}$-tabanını oluşturur.

G nin $\mathbb{Z}G$-modüller $S_n(\mathbb{Z}G)$ ve $M_n(\mathbb{Z}G)$ üzerindeki etkileri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir:

$g_1, g_2, ..., g_n, h \in G$ için

$$(g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_n)h = (g_1 h) \circ (g_2 h) \circ ... \circ (g_n h)$$

$$[g_1, g_2, ..., g_n]h = [g_1 h, g_2 h, ..., g_n h]$$

Açıkça $S_n(\mathbb{Z}G)$ bir permütasyon modülüdür.

Şimdi G bir grup olsun. G nin keyfi fakat sabit sıralandığını varsayalım ve $S_n(\mathbb{Z}G)$ permütasyon tabanı

$$\mathcal{B}_n = \{ g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_n \mid g_1, g_2, ..., g_n \in G, g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_n \}$$

olan regüler modül $\mathbb{Z}G$ nin n. simetrik kuvveti olsun. $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin serbest $\mathbb{Z}$-tabanı $\mathcal{B}_n$ üzerindeki G orbitleri ele alalım ve Ω onların temsicilerinin bir kümesi olsun. $w \in \Omega$ için w nın G deki stabilizerini $G(w)$ ile gösterelim. $\mathcal{B}_n$ i ayrık bir birleşim olarak

$$\mathcal{B}_n = \bigcup_{w \in \Omega} wG$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca

$$\mathcal{B}_n = \left(\bigcup_{\substack{w \in \Omega \\ G(w)=\{1\}}} wG \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{w \in \Omega \\ G(w)=G}} wG \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{w \in \Omega \\ \{1\} \neq G(w) \neq G}} wG \right)$$

yazabiliriz. Böylece, $S_n(\mathbb{Z}G)$ aşağıdaki $\mathbb{Z}G$-modül direkt ayrışımına sahiptir.

$$S_n(\mathbb{Z}G) = \left(\underset{\substack{w \in \Omega \\ G(w)=\{1\}}}{\oplus} w\mathbb{Z}G \right) \oplus \left(\underset{\substack{w \in \Omega \\ G(w)=G}}{\oplus} w\mathbb{Z}G \right) \oplus \left(\underset{\substack{w \in \Omega \\ \{1\} \neq G(w) \neq G}}{\oplus} w\mathbb{Z}G \right)$$

Teorem 5.1. G bir keyfi grup olsun. Bu durumda $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin modül direkt ayrışımında, $\underset{\substack{w \in \Omega \\ G(w)=\{1\}}}{\oplus} w\mathbb{Z}G$ bir serbest $\mathbb{Z}G$-modüldür.

İspat. Önerme 4.1. den kolayca görülür.

Şimdi amacımız, $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin direkt ayrışımı içinde ikinci direkt toplamı yani $\underset{\substack{w \in \Omega \\ G(w)=G}}{\oplus} w\mathbb{Z}G$ yi belirlemek. Önerme 4.2. nedeniyle eğer $G(w) = G$ ise $w\mathbb{Z}G$ devirli modülleri $\mathbb{Z}$ ye izomorf trivial modüllerdir. Dolayısıyla $G(w) = G$ olmak üzere $w \in \mathcal{B}_n$ lerden oluşan kümeyi yani

$$\Omega_0 = \left\{ w \in \mathcal{B}_n \mid G(w) = G \right\}$$

kümesini belirlemek yeterlidir

Önerme 5.1. G bir keyfi grup ve n bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda eğer G sonsuz veya G sonlu olup $m = |G| \nmid n$ ise $\Omega_0 = \varnothing$ dir. Eğer $n = mq$ $(q \geq 1, q \in \mathbb{Z})$ ise bu durumda $G = \left\{ g_1, g_2, ..., g_m \mid g_1 < g_2 < ... < g_m \right\}$ olmak üzere $\Omega_0 = \left\{ g_1^q \circ g_2^q \circ ... \circ g_m^q \right\}$ dur.

İspat. $w = x \circ x_2 \circ ... \circ x_n$, $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ olsun. Eğer uygun bir i için $g = x_i$ ise $g \in G$ w tarafından içerilir denir. İlk olarak $\forall g \in G$ için $wg = w$ ise her $g \in G$ nin w tarafından içerildiğini iddia ediyoruz. Gerçekten $x \in G$ w tarafından içerilsin ve $y \in G$ olsun. y nin w tarafından içerildiğini göstermek istiyoruz. x, w tarafından içerildiğinden $w = x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n$ şeklindedir. G bir grup olduğundan $y = xg$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Dolayısıyla, $wg = xg \circ x_2 g \circ ... \circ x_n g = y \circ x_2 g \circ ... \circ x_n g$ yani y, wg tarafından içerilir. Fakat $wg = w$ dır. Bu, eğer $\Omega_0 \neq \varnothing$ ise, G nin sonlu bir grup olduğunu gösterir (çünkü $w \in \Omega_0$ sonsuz çoklukta eleman içeremez). Şimdi G sonlu ve $|G| = m$ olsun. Eğer $g = x_1 = x_2 = ... = x_q$ ve

$g \neq x_{q+1},\dots,x_n$ ise G nin w tarafından q çok katlılıkla içerildiğini söyleriz. Şimdi eğer $\forall g \in G$ için $wg = w$ ise $\forall g \in G$ nin w tarafından aynı çok katlılıkla içerildiğini iddia ediyoruz. Gerçekten, $x \in G$ w tarafından q çok katlılıkla içerilsin ve $y \in G$ olsun. y nin de w tarafından q çok katlılıkla içerildiğini göstereceğiz. x, q çok katlılıkla w tarafından içerilsin. $x_{q+1},\dots,x_n \neq x$ olduğunda

$$w = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{q-\text{tane}} \circ x_{q+1} \circ \dots \circ x_n = x^q \circ x_{q+1} \circ \dots \circ x_n$$

şeklindedir. G bir grup olduğundan $y = xg$ olacak şekilde uygun bir $g \in G$ vardır. Bu nedenle

$$wg = xg \circ xg \circ \dots \circ xg \circ x_{q+1}g \circ \dots \circ x_n g = y \circ y \circ \dots \circ y \circ x_{q+1}g \circ \dots \circ x_n g$$

ve $q+1 \leq i \leq n$ için $x_i g \neq y$ dir (çünkü aksi taktirde $x_i g = y = xg \Rightarrow x_i = x$ çelişkisi elde edilirdi). Dolayısıyla y de q çok katlılıkla wg tarafından içerilir ve $wg = w$ dur. Eğer $n = mq$ ise $w = g_1^q \circ g_2^q \circ \dots \circ g_m^q$, $g_1 < g_2 < \dots < g_m$ şeklindedir.

Sonuç 5.1. $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin direkt ayrışımındaki ikinci toplam eğer $|G| \nmid n$ ise sıfır ve eğer $|G| \mid n$ ise $\mathbb{Z}$ ye izomorftur.

İspat. Bu önerme 4.2. ve önerme 5.1. in bariz bir sonucudur.

Regüler Modül $\mathbb{Z}G$ nin *n*. Serbest Metabelyen Lie Kuvveti $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin Modül Yapısı

Şimdi G keyfi bir grup ve $\mathbb{Z}G$ regüler modül olsun. G , $\mathbb{Z}G$ nin sabit bir tabanı ve dolayısıyla metabelyen Lie cebiri $M(\mathbb{Z}G)$ nin bir serbest üreteç kümesidir. $M(\mathbb{Z}G)$ de bir monomial ile G nin elemanlarının bir Lie çarpımını ifade ederiz. $M(\mathbb{Z}G)$ nin her monomiali G ye göre bir çoklu dereceye sahiptir. Bunun aynısı $S_n(\mathbb{Z}G)$ cebirine uygulanır. Çoklu dereceleri $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin standart taban elemanlarını kullanarak etiketleyeceğiz. $<$ G nin keyfi bir sıralaması ve $\mathcal{B}_n$, $g_1, g_2, ..., g_n \in G$ ve $g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_n$ olmak üzere $g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_n$ monomiallerini içeren $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin bir tabanı olsun. Total derecesi n olan çoklu dereceler ile $\mathcal{B}_n$ nin elemanları arasında $(1-1)$ bir ilişki vardır. $c \in \mathcal{B}_n$ için $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$, $M_n(\mathbb{Z}G)$ deki çoklu derecesi c olan monomialler tarafından üretilen $\mathbb{Z}$-alt modül olsun. Dolayısıyla $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ tam olarak çok katlılıklarda sayılmak üzere c ile aynı girişlere sahip monomialler tarafından üretilen $\mathbb{Z}$-alt modül olsun. Bir $\mathbb{Z}$-modül olarak $M_n(\mathbb{Z}G)$, $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ çoklu homojen bileşenlerinin bir direkt toplamıdır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$-modüller olarak

$$M_n(\mathbb{Z}G) = \bigoplus_{c \in \mathcal{B}_n} M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$$

dir. Şimdi Ω, $\mathcal{B}_n$ üzerinde *G*-orbitlerin temsilcilerinin bir kümesi ve $w \in \Omega$ için, $G(w)$, G içinde *w* nun stabilizeri olsun. Bu durumda yukarıdaki direkt ayrışım

$$M_n(\mathbb{Z}G) = \bigoplus_{w \in \Omega} \left(\bigoplus_{c \in wG} M_{n,c}(\mathbb{Z}G) \right)$$

olarak yeniden yazılabilir. $\forall w \in \Omega$ için $\bigoplus_{c \in wG} M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ nin $M_n(\mathbb{Z}G)$nin bir alt modülü olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $a \in M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ ise bu durumda bir $g \in G$ için $ag \in M_{n,cg}(\mathbb{Z}G)$ dir. Bu gerçeği göstermek için, $c = g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_n$ olsun, bu durumda a çok katlılıklarda sayılmak üzere $g_1, g_2, ..., g_n$ i içeren ve derecesi n olan Lie çarpımlarının bir lineer kombinasyonudur. Diğer taraftan, ag $g_1g, g_2g, ..., g_ng$ elemanlarını içeren, derecesi *n* olan Lie çarpımıdır ve

$$g_1g \circ g_2g \circ ... \circ g_ng = (g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_n)g$$

olduğundan $ag \in M_{n,cg}(\mathbb{Z}G)$ dir. Eğer $c \in wG$ ise bu durumda $cg \in wG$ dir. Dolayısıyla $\bigoplus_{c \in wG} M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ bir alt modüldür. Şimdi, $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin modül yapısını incelemek istiyoruz. $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin direkt ayrışımı

$$M_n(\mathbb{Z}G) = \left[\underset{\substack{w\in\Omega \\ G(w)=\{1\}}}{\oplus} \left(\underset{c\in wG}{\oplus} M_{n,c}(\mathbb{Z}G) \right) \right] \oplus \left[\underset{\substack{w\in\Omega \\ G(w)=G}}{\oplus} \left(\underset{c\in wG}{\oplus} M_{n,c}(\mathbb{Z}G) \right) \right] \oplus \left[\underset{\substack{w\in\Omega \\ \{1\}\neq G(w)\neq G}}{\oplus} \left(\underset{c\in wG}{\oplus} M_{n,c}(\mathbb{Z}G) \right) \right]$$

olarak yeniden yazılabilir. Amacımız, bu direkt ayrışımdaki birinci ve ikinci direkt toplamlar hakkında detaylı bilgi elde etmektir. İlk olarak, $G(w)=\{1\}$ olsun. Bu durumda $|wG|=|G|$ dir. Dolayısıyla

$$\underset{c\in wG}{\oplus} M_{n,c}(\mathbb{Z}G) = \underset{g\in G}{\oplus} M_{n,wg}(\mathbb{Z}G) = \underset{g\in G}{\oplus} \left(M_{n,w}(\mathbb{Z}G) \right) g$$

dir. g bir otomorfi olarak etki ettiğinden, eğer $\mathcal{M}_{n,w}$, $M_{n,w}$ nin bir tabanı ise, bu durumda $(\mathcal{M}_{n,w})g$, $M_{n,wg}$ nin bir tabandır. Dolayısıyla $\bigcup_{g\in G} (\mathcal{M}_{n,w})g = \mathcal{M}_{n,w}G$, $\underset{c\in wG}{\oplus} M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ nin bir $\mathbb{Z}$-tabanıdır. G grubu bu taban üzerinde serbest olarak etki eder ve $\mathcal{M}_{n,w}$ bir temsilciler kümesi olarak alınabilir. Sonuç olarak; $\underset{c\in wG}{\oplus} M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$, serbest üreteç kümesi $\mathcal{M}_{n,w}$ olan bir serbest $\mathbb{Z}G$ -modüldür.

İkinci olarak $G(w)=G$ olsun. Bu durumda $|wG|=1$ dir $(wG=\{w\})$. Önerme 5.1. nedeniyle eğer G sonsuz veya G sonlu ve $|G| \nmid n$ ise bu durumda $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin direkt ayrışımındaki ikinci direkt toplam sıfırdır. Eğer $|G|=m$, $1<g_2<g_3<...<g_m$ olmak üzere $G=\{1,g_2,g_3,...,g_m\}$ ve $m|n$ $(n=mq)$ ise, bu durumda önerme 5.1. e göre wG sadece $c=1^q\circ g_2^q\circ...\circ g_m^q$, $(q\geq 1,\ q\in\mathbb{Z})$ elemanına sahiptir. Teorem 2.1. nedeniyle, $[u,x^q] = \left[u, \underbrace{x,x,...,x}_{q-\text{tane}} \right]$ olmak üzere, $\left[g_i, 1^q, g_2^q, ..., g_{i-1}^q, g_i^{q-1}, g_{i+1}^q, ..., g_m^q \right]$ $(q\geq 1,\ q\in\mathbb{Z})$ elemanları $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ nin bir $\mathbb{Z}$-tabanını oluşturur. Bu özel halde IG ile $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ arasında $n=m$ halinde

$$\varphi: IG \to M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$$
$$g_i - 1 \mapsto [g_i, 1, g_2, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n]$$

$n = qm$ halinde $(q > 1,\ q \in \mathbb{Z})$

$$\varphi : IG \to M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$$
$$g_i - 1 \mapsto \left[g_i, 1^q, g_2^q, ..., g_{i-1}, g_{i+1}^q, ..., g_m^q \right]$$

$\mathbb{Z}G$-modül izomorfisi vardır. φ nin $\mathbb{Z}G$-modül izomorfisi olduğunu $n = m$ halinde göstereceğiz. Diğer hal de benzer şekilde gösterilir. IG ve $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ nin serbest Abel grupları olduklarını biliyoruz. φ tanımı gereği IG nin taban elemanlarını $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ nin taban elemanlarına götürür. IG ve $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ nin her ikisinin de tabanında $|G| - 1 = n - 1$ eleman vardır. Dolayısıyla φ $(1-1)$ ve örtendir. Böylece $\forall g_i \in G \setminus \{1\}, \forall h \in G$ için $\varphi((g_i - 1)h) = (\varphi(g_i - 1))h$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $(g_i - 1)h = g_i h - h = g_i h - 1 - (h - 1)$ ifadesini ele alalım.

$$\varphi((g_i - 1)h) = \varphi(g_i h - 1 - (h-1)) = \varphi(g_i h - 1) - \varphi(h - 1)$$

$$= [g_i h, 1, g_2, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n] - [h, 1, g_2, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n]$$

dir. Diğer taraftan

$$(\varphi(g_i - 1))h = [g_i, 1, g_2, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n]h = [g_i h, h, g_2 h, ..., g_{i-1} h, g_{i+1} h, ..., g_n h]$$

dir. Eğer $h = 1$ ise istenen eşitlik sağlanır. Şimdi $h \neq 1$ olduğunu varsayalım. İlk önce $g_i h \neq 1$ halini ele alalım. Son Lie çarpımında bütün grup elemanları tam olarak bir kez yer almak zorunda olduğundan 1, son $n-2$ girişin herhangi biri olmak zorundadır. Teorem 2.3., Jacobi birimi ve ters değişme özelliği kullanılarak

$$[g_i h, h, g_2 h, ..., g_{i-1} h, g_{i+1} h, ..., g_n h] = [g_i h, h, 1 ..., g_n h] = -[h, 1, g_i h, ..., g_n h] - [1, g_i h, h, ..., g_n h]$$

yazılabilir. Bu istenen eşitliği ispatlar. Geriye kalan hal $g_i h = 1$ yani $h = g_i^{-1}$ dir. Bu halde

$$\varphi\left((g_i-1)\,g_i^{-1}\right)=\varphi\left(1-g_i^{-1}\right)=\varphi\left(-\left(g_i^{-1}-1\right)\right)=-\left[g_i^{-1},1,g_2,\ldots,g_i,\ldots,g_n\right]$$

dir.

Diğer taraftan Teorem 2.3. ve ters değişme özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left(\varphi(g_i-1)\right)g_i^{-1} &= [g_i,1,g_2,\ldots,g_{i-1},g_{i+1},\ldots,g_n]\,g_i^{-1} \\
&= \left[g_ig_i^{-1},1g_i^{-1},g_2g_i^{-1},\ldots,g_{i-1}g_i^{-1},\,g_{i+1}g_i^{-1},\ldots,g_ng_i^{-1}\right] \\
&= \left[1,\,g_i^{-1},\,g_2g_i^{-1},\ldots,\,g_{i-1}g_i^{-1},\,g_{i+1}g_i^{-1},\ldots,\,g_ng_i^{-1}\right] \\
&= -\left[g_i^{-1},\,1,\,g_2g_i^{-1},\ldots,\,g_{i-1}g_i^{-1},\,g_{i+1}g_i^{-1},\ldots,\,g_ng_i^{-1}\right]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla φ, IG ve $M_{n,c}(\mathbb{Z}G)$ arasında bir $\mathbb{Z}G$-modül izomorfisidir. Sonuç olarak aşağıda verilen teoremi ispatladık.

Teorem 5.2. G keyfi bir grup, n bir pozitif tamsayı ve $M_n(\mathbb{Z}G)$ regüler modül $\mathbb{Z}G$ nin n. serbest metabelyen Lie kuvveti olsun. Ayrıca Ω, n. simetrik kuvvet $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin $\mathcal{B}_n$ standart permütasyon tabanının G orbitlerinin temsilcilerinin bir kümesi olsun ve $w\in\Omega$ için $G(w)$, w nun G deki stabilizerini göstersin. Bu durumda $M_n(\mathbb{Z}G)$,

$$M_n(\mathbb{Z}G)=\left[\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=\{1\}}}\left(\bigoplus_{c\in wG}M_{n,c}(\mathbb{Z}G)\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=G}}\left(\bigoplus_{c\in wG}M_{n,c}(\mathbb{Z}G)\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ \{1\}\neq G(w)\neq G}}\left(\bigoplus_{c\in wG}M_{n,c}(\mathbb{Z}G)\right)\right]$$

modül direkt ayrışımına sahiptir. Ayrıca, bu modül direkt ayrışımında birinci direkt toplam bir serbest $\mathbb{Z}G$-modül ve ikinci direkt toplam eğer G sonsuz veya G sonlu olup $|G|\nmid n$ ise sıfırdır. Eğer G sonlu ve $|G|\,|\,n$ ise ikinci direkt toplam IG ye izomorftur.

BÖLÜM 6

UYGULAMALAR VE ÖRNEKLER

Uygulama 6.1. Eğer G nin 1 hariç mertebesi n yi bölen hiçbir elemanı yoksa, bu durumda $M_n(\mathbb{Z}G)$ bir serbest $\mathbb{Z}G$ -modüldür.

$\forall g \in G \setminus \{1\}$ için $|g| \nmid n$ olduğunu varsayalım. $\forall w \in \Omega$ için $G(w) = \{1\}$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddianın doğruluğunu ispatlamak için uygun bir $1 \neq g \in G$ ve uygun bir $w \in \Omega$ için $g \in G(w)$ olduğunu varsayalım. Şimdi, bu durumda eğer $x \in G$ ve x, w da q çok katlılıkla içerilirse $|g| = d$ olmak üzere $x, xg, xg^2, ..., xg^{d-1}$ elemanlarının da w da aynı çok katlılıkla içerildiğini iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $x \in G$ ve x in w da q çok katlılıkla içerildiğini varsayalım. Bu durumda uygun $x_1 = ... = x_q = x$ ve $x_{q+1}, ..., x_n \neq x$ için $w = x \circ ... \circ x \circ x_{q+1} \circ ... \circ x_n$ dir. $1 \leq s \leq d-1$ için G nin $y = xg^s$ elemanını ele alalım. y nin w da aynı çok katlılıkla içerildiğini göstermek istiyoruz. w üzerindeki G -etki nedeniyle

$$wg^s = xg^s \circ ... \circ xg^s \circ x_{q+1}g^s \circ ... \circ x_n g^s = y \circ ... \circ y \circ x_{q+1}g^s \circ ... \circ x_n g^s$$

elde edilir. $q+1 \leq i \leq n$ için $x_i g^s \neq y$ dir. Çünkü aksi taktirde $x_i g^s = y = xg^s \Rightarrow x_i = x$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla y, $wg^s = w$ da q çok katlılıkla içerilir. Bu da w da içerilen elemanların G nin $\langle g \rangle$ devirli alt grubuna göre kalan sınıflarının bir birleşimini oluşturduğunu ve her bir kalan sınıfının elemanlarının aynı çok katlılıkla ortaya çıktığını gösterir. Sonuç olarak $d = |\langle g \rangle| \mid n$ elde edilir. Şimdi $\forall w \in \Omega$ için $G(w) = \{1\}$ olduğundan

$$M_n(\mathbb{Z}G) = \bigoplus_{\substack{w \in \Omega \\ G(w)=\{1\}}} \left(\bigoplus_{c \in wG} M_{n,c}(\mathbb{Z}G) \right)$$

direkt ayrışımı geçerlidir ve Teorem 5.2. nedeniyle $M_n(\mathbb{Z}G)$ bir serbest $\mathbb{Z}G$ -modüldür.

Uygulama 6.2. *p* bir asal sayı olmak üzere *G*, mertebesi *p* olan ve *g* tarafından üretilen bir devirli grup, yani $G=\langle g\rangle=\{1,g,...,g^{p-1}\}$, $(1<g<...<g^{p-1})$ olsun. Bu durumda $G(w)=\{1\}$ veya $G(w)=G$ dir.

Teorem 5.2 den, $M_n(\mathbb{Z}G)$ nin bir modül direkt ayrışımı aşağıdaki gibidir:

$$M_n(\mathbb{Z}G)=\left[\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=\{1\}}}\left(\bigoplus_{c\in wG}M_{n,c}(\mathbb{Z}G)\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=G}}\left(\bigoplus_{c\in wG}M_{n,c}(\mathbb{Z}G)\right)\right]$$

Bu direkt ayrışımda birinci direkt toplam serbest $\mathbb{Z}G$ -modüldür. Ayrıca ikinci direkt toplam eğer *G* sonsuz veya $p\nmid n$ ise sıfırdır. Eğer *G* sonlu ve $p\mid n$ ise ikinci direkt toplam IG ye izomorftur. Eğer $p\mid n$ ise $\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=G}}\left(\bigoplus_{c\in wG}M_{n,c}(\mathbb{Z}G)\right)=M_{n,w}(\mathbb{Z}G)$ de w

$$w=1^q\circ g^q\circ...\circ\left(g^{p-1}\right)^q,(n=pq)$$

şeklindedir ve $M_{n,w}(\mathbb{Z}G)$ nin bir $\mathbb{Z}-$tabanı $i=1,2,...,p-1$ için

$$\left[g^i,1^q,g^q,...,\left(g^i\right)^{q-1},...,\left(g^{p-1}\right)^q\right]$$

elemanlarından oluşur.

Uygulama 6.3. *G*, mertebesi 4 olan *g* tarafından üretilen bir devirli grup yani $G=\langle g\rangle=\{1,g,g^2,g^3\}$ olsun. $n=4$ ve $1<g<g^2<g^3$ keyfi sıralaması için $\mathcal{S}_4$ üzerinde $\{1\circ1\circ g^2\circ g^2, g\circ g\circ g^3\circ g^3\}$ *G*-orbitinin temsilcisi olan $w=1\circ1\circ g^2\circ g^2$ yi ele alalım. Bu durumda *w* nın *G* deki stabilizeri $G(w)=\{1,g^2\}$ dir. Bu stabilizer *G* nin trivial olmayan bir alt grubudur.

Dolayısıyla $w=1\circ 1\circ g^2\circ g^2$ için, $wG=\{1\circ 1\circ g^2\circ g^2, g\circ g\circ g^3\circ g^3\}$ ve

$\mathcal{M}_{4,w}G=\{[g^2,1,1,g^2],[g^3,g,g,g^3]\}$,

$\bigoplus_{c\in wG} M_{4,c}(\mathbb{Z}G)$ nin bir $\mathbb{Z}-$tabanıdır. Bu uygulama G nin mertebesinin bir asal sayı olmadığı durumda Teorem 5.2. deki direkt ayrışımda ne serbest ne de IG ye izomorf olan direkt toplamların ortaya çıktığını göstermektedir.

Uygulama 6.4. Eğer $|G|=r$ ise $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin bir $\mathbb{Z}$-modül olarak rankının $\binom{r+n-1}{n}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin serbest $\mathbb{Z}$-tabanı

$$\mathcal{B}_n=\{g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_n \mid g_1,g_2,\ldots,g_n\in G, g_1\le g_2\le\ldots\le g_n\}$$

üzerindeki G orbitleri ele alalım ve Ω bu orbitlerin temsilcilerinin bir kümesi olsun. $w\in\Omega$ için $G(w)$, w nın G deki stabilizerini göstersin. Böylece, $S_n(\mathbb{Z}G)$ aşağıdaki $\mathbb{Z}G$-modül direkt ayrışımına sahiptir:

$$S_n(\mathbb{Z}G)=\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=\{1\}}} w\mathbb{Z}G\oplus\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=G}} w\mathbb{Z}G\oplus\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ \{1\}\ne G(w)\ne G}} w\mathbb{Z}G$$

$S_n(\mathbb{Z}G)$ nin modül direkt ayrışımında, $\bigoplus_{\substack{w\in\Omega\\ G(w)=\{1\}}} w\mathbb{Z}G$ bir serbest $\mathbb{Z}G$-modüldür. Yani eğer her $w\in\Omega$ için $G(w)=\{1\}$ ise $S_n(\mathbb{Z}G)$ bir serbest $\mathbb{Z}G$-modüldür. Ayrıca $\mathcal{B}_n$ i ayrık bir birleşim olarak $\mathcal{B}_n=\bigcup_{w\in\Omega} wG$ şeklinde ifade edebiliriz. Orbit-stabilizer teoremi kullanılarak

$$|wG|=(G:G(w))=\frac{|G|}{|G(w)|}=|G|$$

bulunur. Ayrıca

$$\left|\mathscr{B}_n\right| = \sum_{w\in\Omega} |wG| = |\Omega||G|$$

olduğundan

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|}\binom{r+n-1}{n}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $S_n(\mathbb{Z}G)$ nin bir serbest $\mathbb{Z}G$ -modül olduğu durumda rankı

$$\operatorname{rank} S_n(\mathbb{Z}G) = \frac{1}{|G|}\binom{r+n-1}{n}$$

dir.

Örnek 6.1. $G = \{1, g, g^2\}$ çarpım tablosu aşağıda verilen devirli grup olsun.

	1	g	g^2
1	1	g	g^2
g	g	g^2	1
g^2	g^2	1	g

$1 < g < g^2$ keyfi sıralaması için $|G| = 3$ olduğundan $S_2(\mathbb{Z}G)$ rankı $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$ olan bir serbest $\mathbb{Z}-$modüldür. $\mathscr{B}_2$ permütasyon tabanı aşağıdaki elemanlardan oluşur:

$$\begin{array}{ll} w_1 = 1\circ 1 & w_2 = 1\circ g \\ \quad\; g\circ g & \quad\; g\circ g^2 \\ \quad\; g^2\circ g^2 & \quad\; g^2\circ 1 \end{array}$$

Bu iki sütunun her biri $\mathcal{B}_2$ üzerinde bir $G-$orbiti göstermektedir ve w_1, w_2 bu $G-$orbitlerin temsilcileri olarak alınmıştır yani $\Omega=\{w_1, w_2\}$ dir.

$$w_1G=(1\circ 1)G=\{1\circ 1, g\circ g\ , g^2\circ g^2\ \}$$

$$w_2G=(1\circ g)G=\{1\circ g, g\circ g^2\ , 1\circ g^2\ \}$$

olduğundan permütasyon tabanı

$$\mathcal{B}_2\ = w_1G\cup w_2G=(1\circ 1)G\cup(1\circ g)G$$

olarak ifade edilebilir.

Diğer taraftan

$$S_2(\mathbb{Z}G)=\underset{\substack{w\in\Omega \\ G(w)=\{1\}}}{\oplus} w\mathbb{Z}G\ = w_1\mathbb{Z}G\oplus w_2\mathbb{Z}G$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla $S_2(\mathbb{Z}G)$ rankı $\frac{1}{3}\binom{3+2-1}{2}=\frac{1}{3}\binom{4}{2}=2$ ve tabanı $\{w_1, w_2\}$ olan bir serbest $\mathbb{Z}G$ -modüldür.

$M_2(\mathbb{Z}G)$ rankı $(2-1)\binom{3+2-2}{2}=\binom{3}{2}=3$ ve tabanı $\{[g,1],\ [g^2,1],[g^2, g]\}$ olan bir serbest $\mathbb{Z}-$modüldür. Ayrıca

$$M_2(\mathbb{Z}G)=\underset{\substack{w\in\Omega \\ G(w)=\{1\}}}{\oplus}\left(\underset{c\in wG}{\oplus}M_{2,c}(\mathbb{Z}G)\right)=\underset{c\in w_2G}{\oplus}M_{2,c}(\mathbb{Z}G)$$

olduğunu görürüz ve

$\mathcal{M}_{2,w_2}G = \{[g,1],\ [g^2,1],[g^2,g]\}$,

$\underset{c\in w_2G}{\oplus} M_{2,c}(\mathbb{Z}G)$ nin bir $\mathbb{Z}-$tabanıdır.

Örnek 6.2. $G=\{1,x,y,z\}$ çarpım tablosu aşağıda verilen Klein 4-grup olsun.

	1	x	y	z
1	1	x	y	z
x	x	1	z	y
y	y	z	1	x
z	z	y	x	1

$1 < x < y < z$ keyfi sıralaması için $|G|=4$ olduğundan $S_3(\mathbb{Z}G)$ rankı $\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=20$ olan bir serbest $\mathbb{Z}-$modüldür. $\mathcal{B}_3$ permütasyon tabanı aşağıdaki elemanlardan oluşur:

$$\begin{array}{lllll}
w_1: 1\circ 1\circ 1 & w_2: 1\circ 1\circ x & w_3: 1\circ 1\circ y & w_4: 1\circ 1\circ z & w_5: x\circ y\circ z \\
\quad x\circ x\circ x & \quad x\circ x\circ 1 & \quad x\circ x\circ z & \quad x\circ x\circ y & \quad 1\circ z\circ y \\
\quad y\circ y\circ y & \quad y\circ y\circ z & \quad y\circ y\circ 1 & \quad y\circ y\circ x & \quad z\circ 1\circ x \\
\quad z\circ z\circ z & \quad z\circ z\circ y & \quad z\circ z\circ x & \quad z\circ z\circ 1 & \quad y\circ x\circ 1
\end{array}$$

Bu beş sütünün her biri $\mathcal{B}_3$ üzerinde bir G-orbiti göstermektedir ve w_1,w_2,w_3,w_4,w_5 bu $G-$orbitlerin temsilcileri olarak alınmıştır yani $\Omega=\{w_1,w_2,w_3,w_4,w_5\}$ dir.

$$\mathcal{B}_3 = (1\circ 1\circ 1)G\cup(1\circ 1\circ x)G\cup(1\circ 1\circ y)G\cup(1\circ 1\circ z)G\cup(x\circ y\circ z)G$$

olarak ifade edilebilir.

$$S_3(\mathbb{Z}G) = \underset{\substack{w\in\Omega \\ G(w)=\{1\}}}{\oplus} w\mathbb{Z}G = w_1\mathbb{Z}G\oplus w_2\mathbb{Z}G\oplus w_3\mathbb{Z}G\oplus w_4\mathbb{Z}G\oplus w_5\mathbb{Z}G$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla $S_3(\mathbb{Z}G)$ rankı $\frac{1}{4}\binom{4+3-1}{3}=\frac{1}{4}\binom{6}{3}=5$ olan bir serbest $\mathbb{Z}G$- modül olup w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 monomialleri $S_3(\mathbb{Z}G)$ nin bir serbest $\mathbb{Z}G$- tabanını oluştururlar.

$M_3(\mathbb{Z}G)$ rankı $(3-1)\binom{4+3-2}{3}=2\binom{5}{3}=20$ ve tabanı

$[x,1,1]$, $[x,1,x]$, $[x,1,y]$, $[x,1,z]$, $[y,1,1]$, $[y,1,x]$, $[y,1,y]$, $[y,1,z]$, $[z,1,1]$, $[z,1,x]$, $[z,1,y]$, $[z,1,z]$, $[y,x,x]$, $[y,x,y]$, $[y,x,z]$, $[z,x,x]$, $[z,x,y]$, $[z,x,z]$, $[z,y,y]$, $[z,y,z]$

elemanlarından oluşan bir serbest $\mathbb{Z}-$modüldür. Ayrıca

$$M_3(\mathbb{Z}G)=\bigoplus_{\substack{w\in\Omega \\ G(w)=\{1\}}}\left(\bigoplus_{c\in wG} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)\right)$$

$$=\bigoplus_{c\in w_2G} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)\oplus\bigoplus_{c\in w_3G} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)\oplus\bigoplus_{c\in w_4G} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)\oplus\bigoplus_{c\in w_5G} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)$$

olduğunu görürüz.

$\mathcal{M}_{3,\,w_2}G=\{[x,1,1],[x,1,x],[z,y,y],[z,y,z]\}$,

$\mathcal{M}_{3,\,w_3}G=\{[y,1,1],[z,x,x],[y,1,y],[z,x,z]\}$,

$\mathcal{M}_{3,\,w_4}G=\{[z,1,1],[y,x,x],[y,x,y],[z,1,z]\}$

ve

$\mathcal{M}_{3,\,w_5}G=\{[y,x,z],[z,1,y],[z,1,x],[x,1,y],[z,x,y],[y,1,z],[x,1,z],[y,1,x]\}$

sırasıyla $\underset{c\in w_2G}{\oplus} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)$, $\underset{c\in w_3G}{\oplus} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)$, $\underset{c\in w_4G}{\oplus} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)$ ve $\underset{c\in w_5G}{\oplus} M_{3,c}(\mathbb{Z}G)$ nin $\mathbb{Z}-$tabanlarıdır.

KAYNAKLAR

Amayo R K and Stewart I (1974) *Infinite dimensional Lie algebras*. Noordhoff International Publishing, Leyden, the Netherlands.

Bakhturin Yu A (1985) *Identical Relation in Lie Algebras* (in Russian, English Translation: Utrecht VNU Science Pres BV, 1987), Moscow.

Bhattacharya P B, Jain S K and Nagpaul S R (1994) *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 246-268.

Brundan J (2000) *Graduate Algebra Lecture Notes*, University of Oregon, pp. 89-101.

Bryant R M, Stöhr R and Zerck R (1994) Metabelian Lie powers of group representations. *J. Austral. Math. Soc*., 56: 145-168.

Bryant R M and Stöhr R (2000) On the module structure of free Lie algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352: 901-934.

Hannebauer T and Stöhr R (1990) Homology of Groups with coeffficients in Free Metabelian Lie Powers and Extreior Powers of Relation Modules and Aplications to Group Theory. *Rend. Circ. Mat*., Palermo, pp. 77-113.

Hartley B and Stöhr R (1991) Homology of higher relation modules and torsion in free central extensions of groups. *Proc. London Math. Soc*., 62 (3): 325-352.

Hilton P and Stammbach U (1971) *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag.

İnce M K (2008) *Regüler Modüllerin Simetrik Kuvvetleri*. Yüksek Lisans Tezi, ZKÜ.

Kesim S (1997) *Metabelian Lie Powers of Regular Modules*. M. Sc. Thesis, UMIST.

Serre J P (1992) *Lie algebras and Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Stöhr R (1987) On torsion in free central extensions of some torsion-free groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 46: 249-289.

Stöhr R (1992) Homology of Metabelian Lie Powers and Torsion in Relatively Free Groups. *Quart. J. Math*., 43: 361-380.

Stöhr R (1995) Symmetric powers, metabelian Lie powers and torsion in groups. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 18: 449-466.

ÖZGEÇMİŞ

Evren EYİCAN POLATLI 1986 yılında Zonguldak ilinin Merkez ilçesinde doğdu. İlköğretimini ve lise öğrenimini Çaycuma ilçesinde tamamladı. Çaycuma Oktay-Olcay Yurtbay Anadolu Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2004 yılında Balıkesir Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne girdi. 2008 yılında "87" ortalama ile bölüm birincisi olarak mezun olduktan sonra Balıkesir ilinin Dursunbey ilçesinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Şu an Zonguldak ilinde matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Bahçelievler Mah. Yıldız Sok.
67100 ZONGULDAK

Tel : 0(537) 9248753
E-posta : evreneyican@hotmail.com