VLASOV-POISSON SİSTEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİNİN VE KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Hava BULUT

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Eylül 2014

KABUL:

Hava BULUT tarafından hazırlanan "VLASOV-POISSON SİSTEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİNİN VE KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 12/09/2014

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ ....
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tufan TURACI ....
Karabük Üniversitesi

ONAY:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2014

Prof. Dr. Şadi ŞEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Hava BULUT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VLASOV-POISSON SİSTEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİNİN VE KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Hava BULUT

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Eylül 2014, 75 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde bu çalışmanın amacı ve kapsamı ifade edilmiştir. İkinci bölümde, bu tezde ele alınan problemlerin çözülebilirliğinin araştırılmasında gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde genelleşmiş fonksiyon, genelleşmiş türev kavramları ve Sobolev uzayları üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölüm; ters ve kötü konulmuş problem konusuna ve çeşitli alanlarda ortaya çıkan bu tür problemlere örneklere ayrılmıştır. Beşinci bölümde; kinetik teorinin bazı temel kavramları tanıtılmış ve Vlasov tipi sistemler tartışılmıştır. Son olarak altıncı bölümde ise Vlasov-Poisson sistemi için bazı ters problemlerin çözümünün tekliği ve kararlılığı araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Vlasov-Poisson sistemi, Ters problem, Teklik, Kararlılık

Bilim Kodu: 403.06.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF THE UNIQUENESS AND STABILITY OF THE SOLUTION OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR THE VLASOV-POISSON SYSTEM

Hava BULUT

Bülent Ecevit University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Fikret GÖLGELEYEN

September 2014, 75 pages

This thesis consists of six chapters. The first chapter is the introduction where we outline the aim and the scope of this study. In the second chapter, some essential definitions and theorems are given for investigating the solvability of problems which are considered in this thesis. The third chapter explaines the concepts of generalized function, generalized derivative and Sobolev spaces. The fourth chapter is devoted to topic of inverse and ill posed problems and some examples of such problems from different areas. In the fifth chapter, some basic notions of kinetic theory are introduced and Vlasov type systems are discussed. Finally, in the last chapter, the uniqueness and stability of the solutions of some inverse problems for the Vlasov-Poisson systems are investigated.

Keywords: Vlasov-Poisson System, Inverse Problem, Uniqueness, Stability

Science Code: 403.06.01

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında değerli vaktini bana ayıran, görüş ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim sevgili eşime, canım anneme, babama ve ağabeylerime en içten duygularımla sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Ω	:	Verilen bir bölge
$\bar{\Omega}$	:	Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	:	Ω bölgesinin sınırı
$C^k(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı *k*. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
D^α	:	Türev için multiindeks gösterimi
$\nabla u(x)$	:	$u(x)$ fonksiyonunun gradienti; $\nabla u(x) = (u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n})$
Δ	:	Laplace operatörü
$H^k(\Omega)$	:	Kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$D'(\Omega)$	:	Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı
$L_1(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$(.,.)_{L_2(\Omega)}$	:	$L_2(\Omega)$ da iç çarpım
$supp\varphi(x)$	:	φ fonksiyonunun supportu; $supp\varphi(x) = \overline{\{x \mid x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$

BÖLÜM 1

GİRİŞ

"Ters problem" ve "kötü konulmuş problem" kavramları 20. yüzyılın ortalarından itibaren başlayarak her geçen gün bilim ve teknolojide daha popüler hale gelmiştir. Bugün gelinen noktada; bilgisayar cebiri, diferensiyel ve integral denklemler, fonksiyonel analiz gibi klasik matematiğin çeşitli branşlarında ortaya çıkan çok sayıda karmaşık (kararsız ve genellikle lineer olmayan) problemin ters ve/veya kötü konulmuş problem olduğu görülmektedir. Bu tür problemler aynı zamanda fizik, jeofizik, tıp ve astronomi gibi matematiğin kullanıldığı pek çok sahada büyük önem arz etmektedir. Zira bu problemlerin çözümleri, incelenen ortama ait yoğunluk, dalga yayılım hızı, elastisite parametreleri, iletkenlik, elektriksel ve manyetik geçirgenlik gibi önemli özellikler hakkında bilgiler vermektedir. Ayrıca doğrudan erişilemeyen bölgelerde homojenliğin bozulduğu noktaların konumunun ve karakterinin belirlenmesi (tıbbi ve teknik tomografi) meselesi de bir ters problemdir.

Ters ve kötü konulmuş problemler ile günlük hayatımızda da sıklıkla karşılaşılmaktadır. Örneğin, uzayda farklı açılardan aydınlatılabilen bir cismi düşünelim. Bu cismin şekli biliniyorken gölgesinin şeklinin bulunması problemi iyi konulmuştur. Diğer taraftan cismin çeşitli düzlemler üzerindeki izdüşümlerinden (gölgesinden), cismin şeklinin belirlenmesi ters problemi sadece konveks cisimler için iyi konulmuştur çünkü konkav bir bölge açıktır ki bu yolla belirlenemez. Böyle bir problem ilk defa, ayın üzerine düşen gölgeden dünyanın şeklinin küresel olduğu sonucuna varan Aristo tarafından formülize edilmiş ve çözülmüştür.

Bu çalışmada ters ve kötü konulmuş problem kavramları açıklanmış ve farklı bilim dallarından bu tür problemlere örnekler verilmiştir. Ayrıca kinetik teoride önemli bir yeri olan ve öz uyumlu alan yaklaşımında düşük yoğunluklu plazmadaki elektronların ve iyonların yoğunluklarının değişimini (evrimini) modelleyen Vlasov-Poisson sistemi için başlangıç-sınır değer problemlerine ilişkin bazı ters problemlerin, verilen sınırlandırmalar ve şartlar altında çözümünün tekliği ve kararlılığı araştırılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, Vlasov-Poisson sistemi için bazı ters problemlerin çözülebilirliğinin incelenmesinde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir:

Tanım 2.1 *(Norm) Bir X vektör uzayı üzerindeki norm, X üzerinde tanımlı olup bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve x, y X de keyfi vektörler ve c bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyondur:*

1) $\|x\| \geq 0$,
2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$,
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği).

Üzerinde bir norm tanımlanmış bir X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Normlu uzaylar $(X, \|\cdot\|)$ ya da kısaca X ile gösterilir (Kreyszig 1989, s. 67).

Tanım 2.2 *(Tam Uzay) X bir normlu lineer uzay olmak üzere X in elemanlarından oluşan her bir Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise X e tam uzay denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 2.3 *(Banach Uzayı) Tam normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 2.4 *(Her Yerde Yoğunluk) $M \subset X$ olmak üzere, her bir $x \in X$ için, M nin elemanlarından oluşan bir (x_n) dizisi x e yakınsayacak şekilde varsa, M cümlesine X de her yerde yoğundur denir (Mikhailov 1978, s. 66).*

Tanım 2.5 *(Ayrılabilir Uzay) Bir B Banach uzayı her yerde yoğun sayılabilir bir cümle içeriyorsa, B Banach uzayına ayrılabilirdir denir (Mikhailov 1978, s. 66).*

Tanım 2.6 *(İç Çarpım Uzayı) Bir iç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım $X \times X$ den X in bir K skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür, yani X in her x ve y vektör çifti, (x, y) ile gösterilen ve aşağıdaki özelikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektedir:*

1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
2) $(cx, y) = c\,(x, y)$,
3) $(x, y) = (y, x)$,
4) $(x, x) \geq 0,\;\; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Kreyszig 1989, s. 151).

Tanım 2.7 *(Hilbert Uzayı) Bir Hilbert uzayı, üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır (Kreyszig 1989, s. 151).*

Teorem 2.1 *(Bunyakovskii (Cauchy-Schwarz) Eşitsizliği) Her $h_1, h_2 \in H$ için*

$$|(h_1, h_2)|^2 \leq (h_1, h_1)\,.\,(h_2, h_2)$$

eşitsizliği sağlanır (Mikhailov 1978, s. 66).

Tanım 2.8 *(Lineer Operatör) Bir A lineer operatörü, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir operatördür:*

(i) A nın $D\,(A)$ tanım bölgesi bir vektör uzayı olup, $R\,(A)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.
(ii) Her $x, y \in D\,(A)$ ve c skaleri için,

$$\begin{aligned} A\,(x + y) &= A\,(x) + A\,(y) \\ A\,(cx) &= cA\,(x) \end{aligned}$$

dir (Kreyszig 1989, s. 96).

Tanım 2.9 *(Sınırlı Lineer Operatör) X ve Y normlu uzaylar ve $D\,(A) \subset X$ olmak üzere, $A : D\,(A) \longrightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer, her $x \in D\,(A)$ için,*

$$\|Ax\| \leq c\,\|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa, A operatörü sınırlıdır denir (Kreyszig 1989, s. 107).

Tanım 2.10 *(Sürekli Operatör) X ve Y normlu uzaylar, $D(A) \subset X$ olmak üzere, $A : D(A) \longrightarrow Y$ lineer olması zorunlu olmayan herhangi bir operatör olsun. A operatörünün bir $x_0 \in D(A)$ noktasında sürekli olması için, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(A)$ için, $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olması gerekmektedir. Eğer her $x \in D(A)$ noktasında A sürekli ise, A operatörü süreklidir denir. A nın lineer olması halinde aşağıdaki önemli teorem verilebilir:*

Teorem 2.2 *(Süreklilik ve Sınırlılık) X ve Y normlu uzaylar, $D(A) \subset X$ olmak üzere, $A : D(A) \longrightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda*
(a) A nın sürekli olması için gerek ve yeter koşul A nın sınırlı olmasıdır,
(b) A bir tek noktada sürekli ise, her noktada süreklidir (Kreyszig 1989, s. 113).

Tanım 2.11 *(Kompakt Küme) (M, d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun. A daki her (x_n) dizisi, A nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse A ya kompakttır denir. Eğer M cümlesinin kendisi kompakt ise (M, d) ye kompakt metrik uzay denir (Rynne and Youngson 2000, s. 16).*

Tanım 2.12 *(Kompakt Operatör) X ve Y herhangi iki normlu uzay ve $A : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer X deki her sınırlı (x_n) dizisi için, Y deki (Ax_n) dizisi bir yakınsak alt diziye sahipse, A operatörüne kompakttır denir (Rynne and Youngson 2000, s. 161).*

Tanım 2.13 *(Kısmi Türevli Denklem) Bir kısmi türevli denklem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen u fonksiyonu ve onun sonlu sayıda kısmi türevlerinin oluşturduğu bir bağıntıdır. Bu denklemin en genel biçimi, $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ olmak üzere*

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

dır. (2.1) denkleminde en yüksek kısmi türev basamağı k dır. k ya kısmi türevli denklemin basamağı (mertebesi) denir (Dernek 2009, s. 1).

Tanım 2.14 *($C(\overline{\Omega})$, $C^k(\overline{\Omega})$ Uzayları) $C(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ üzerinde sürekli tüm fonksiyonların oluşturduğu cümle, $C^k(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots$, $\overline{\Omega}$ üzerinde k. mertebeye kadar tüm türevleri sürekli* *olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir.* $f \in C^k(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *bir multi-indeks* $(\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, i = 1, 2, ..., n)$ *ve* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ *olsun. Bu durumda*

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n} f(x)$$

f fonksiyonunun kısmi türevlerini ifade eder.

Tanım 2.15 *($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) $C_0^\infty(\Omega)$, Ω üzerinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu (supp$\varphi(x) = \overline{\{x|\ x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$) Ω nın kompakt alt cümlesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir (Mikhailov 1978, s. 10).*

Teorem 2.3 *(Ostrogradskii Formülü) $\partial\Omega \in C^1$ olmak üzere Ω üzerinde bir $A(x) = (A_1(x), A_2(x), ..., A_n(x))$ vektörü tanımlansın ve $A_i(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., n$ olsun. Eğer $\operatorname{div} A(x) = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ da sürekli ya da Ω üzerinde integrallenebilirse, bu durumda Ostrogradskii'nin formülü olarak bilinen aşağıdaki formül sağlanır:*

$$\int_\Omega \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} A(x).\mathbf{n}(x) dS,$$

burada $\mathbf{n}$, $\partial\Omega$ nın dış birim normal vektörüdür (Mikhailov 1978, s. 103).

Teorem 2.4 *(Gauss-Green Formülü) $\partial\Omega \in C^1$ ve $f \in C^1(\overline{\Omega})$ olsun. Bu durumda*

$$\int_\Omega f_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f n_i dS$$

eşitliği sağlanır, burada $n_i = \cos(\mathbf{n}, x_i)$, $\partial\Omega$ yüzeyinin dış normali olan $\mathbf{n}$ ile x_i ekseni arasındaki açının kosinüsüdür (Evans 1997, s. 627).

Tanım 2.16 *($L_1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ Uzayları) $L_1(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu cümle, $L_2(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülünün karesi integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu kümelere ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 105);*

(a) $L_1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ lineer uzaydır ve Ω sınırlı bir bölge ise $C(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$,

(b) $L_1(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,

(c) $L_2(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1,f_2)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f_1(x)\overline{f_2(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

biçimindedir,

(d) $C(\overline{\Omega})$ ve $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ uzayı, $L_1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ da her yerde yoğundur,

(e) $L_1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.

Teorem 2.5 *(Young Eşitsizliği) Kabul edelim ki $1 < p,\ q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu durumda*

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad (a,b>0)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $C(\varepsilon)=(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}q^{-1}$ için

$$ab \le \varepsilon a^p + C\left(\varepsilon\right)b^q \quad (a,b>0,\ \varepsilon>0)$$

olur.

İspat. $x \to e^x$ dönüşümünün konveks olduğu göz önüne alınırsa

$$ab = e^{\log a+\log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q} \le \frac{1}{p}e^{\log a^p}+\frac{1}{q}e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

bulunur (Evans 2000, s. 622). ■

Teorem 2.6 *(Hölder eşitsizliği) Kabul edelim ki $1 \le p,q \le \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu durumda eğer $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$ ise*

$$\int_U |uv|\,dx \le \|u\|_{L^p(U)}\,\|v\|_{L^q(U)}$$

olur.

Tanım 2.17 *(Koni Koşulu) Bir Ω bölgesi koni şartını sağlar denir, eğer bir C sonlu konisi varsa öyle ki Ω nın her x noktası, Ω içerisinde kalan ve C ye eş olan bir sonlu C_x konisinin tepe noktasıdır. Dikkat edilmelidir ki burada C_x in C den paralel öteleme ile elde edilmesi gerekmez, fakat basit olarak katı hareketlerle elde edilir (Adams 2002, s. 82).*

BÖLÜM 3

GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR VE SOBOLEV UZAYLARI

Tanım 3.1 *(Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $\mathcal{D}(\Omega)$ ile gösterilir. Eğer*
(a) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $supp\varphi_k \subset K$,
(b) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ve $k \to \infty$ iken $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise $k \to \infty$ için $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$ yakınsar denir.
$\mathcal{D}(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{D}'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1984, s. 81).

Lemma 3.1 (Du Bois Reymond) *Ω bölgesinde lokal integrallenebilir bir $f(x)$ fonksiyonun bu bölgede hemen hemen her yerde sıfır olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyon tarafından üretilen f regüler genelleşmiş fonksiyonunun Ω da sıfır olmasıdır (Vladimirov 1979, s. 18).*
Genelleşmiş fonksiyona örnek olarak,

$$L_1(a,b) = \left\{ f(x) : \int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$$

yani Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar kümesinden olan $f(x)$ fonksiyonunun ürettiği

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx, \;\; \varphi(x) \in C_0^\infty(a,b)$$

fonksiyonelini gösterebiliriz. Bu şekilde (yani $L_1(a,b)$'den olan elemanlar üzerinden) tanımlanmış genelleşmiş fonksiyonlara regüler genelleşmiş fonksiyonlar denir (Hasanoğlu 2001, s. 22).

Örnek 3.1 *Tekil (singüler) genelleşmiş fonksiyonlara örnek olarak Dirac'ın δ fonksiyonunu gösterebiliriz:*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \;\; \varphi(x) \in C_0^\infty(a,b).$$

Tanım 3.2 *(Genelleşmiş Türev) $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^{\alpha}f$ (genelleşmiş) türevi,*

$$(D^{\alpha}f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^{\alpha}\varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1984, s. 94).

Örnek 3.2

$$h(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Heaviside fonksiyonunu ele alalım. Sürekli olmayan bu fonksiyonun genelleşmiş türevi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir (Hasanov 2001, s. 23).
$h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ ve $h(x)$ in tanımladığı genelleşmiş fonksiyon

$$(h, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx$$

fonksiyonelidir. Bu fonksiyonelin genelleşmiş türevini hesaplayalım. Bu amaçla

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \ \varphi(x) \in C_0^{\infty}(a, b)$$

ve

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi')$$

eşitliklerinden yararlanarak

$$(h', \varphi) = -(h, \varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

elde ederiz ki bu da $h(x)$ fonksiyonunun genelleşmiş türevinin δ fonksiyonuna eşit olduğunu gösterir. Şimdi $h(x)$ in ikinci türevini hesaplayalım:

$$(h'', \varphi) = -(h', \varphi') = (h, \varphi'') = \int_0^{\infty} \varphi''(x)\,dx = -\varphi'(0) = -(\delta, \varphi') = (\delta', \varphi).$$

Son eşitlik, $h(x)$ in ikinci mertebeden genelleşmiş türevinin δ fonksiyonunun genelleşmiş türevine eşit olduğunu gösterir.

Örnek 3.3 *Sonlu elemanlar yönteminde baz fonksiyonu olarak yaygın bir biçimde kullanılan kısmi lineer sürekli* $\xi = \xi(x)$ *fonksiyonunu ele alalım:*

$$\xi(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1,0], \\ 1-x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \overline{\in} [-1,1]. \end{cases}$$

Bu fonksiyonun $x = -1$, $x = 0$ *ve* $x = 1$ *noktalarında türevi yoktur. Bu düşünceyi biraz daha açıklarsak, bu noktalarda sağ türev ve sol türev vardır, fakat birbirinden farklıdır. Ayrıca,*

$$\xi'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1,0), \\ -1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \overline{\in} [-1,1]. \end{cases} \tag{3.1}$$

fonksiyonu $x = -1$, $x = 0$ *ve* $x = 1$ *noktalarında tanımlanmamıştır. Böylelikle klasik anlamda* $\xi = \xi(x)$ *fonksiyonu* $(-\infty, +\infty)$ *aralığında diferensiyellenebilir fonksiyon değildir, bu nedenle onun genelleşmiş türevini hesaplayalım. Genelleşmiş türev tanımından,* $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$ *için*

$$\xi'(x) = -(\xi, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, \varphi'(x)\, dx$$

yazılabilir. Burada $\operatorname{supp}\xi(x) = [-1,1]$ *olduğu ve* $\xi(x)$ *in analitik ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} (\xi', \varphi) &= -\int_1^0 (1+x)\, \varphi'(x)\, dx - \int_0^1 (1-x)\, \varphi'(x)\, dx \\ &= -\int_1^0 \varphi'(x)\, dx - \int_0^1 \varphi'(x)\, dx - \int_1^0 x d\varphi + \int_0^1 x d\varphi \\ &= -[\varphi(0) - \varphi(-1)] - [\varphi(1) - \varphi(0)] - [x\varphi]_{-1}^0 + [x\varphi]_0^1 \\ &\quad + \int_{-1}^0 \varphi(x)\, dx - \int_0^1 \varphi(x)\, dx \end{aligned}$$

böylelikle de

$$(\xi', \varphi) = \int_{-1}^0 \varphi(x)\, dx - \int_0^1 \varphi(x)\, dx$$

elde edilir. Öte yandan, genelleşmiş fonksiyonun

$$(\xi', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi'(x)\, \varphi(x)\, dx$$

tanımını kullanarak sağ taraftaki integrali $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ *ve* $(1, +\infty)$ *aralıklarına parçalar ve bu aralıklarda* $\xi'(x)$ *in (3.1) deki ifadesini kullanırsak*

$$(\xi', \varphi) = \int_{-1}^0 \varphi(x)\, dx - \int_0^1 \varphi(x)\, dx$$

elde ederiz; görüldüğü gibi bu eşitliğin sağ tarafı yukarıda elde edilen genelleşmiş türevin sağ tarafına eşittir. Bu ise $(-1,0)$ ve $(0,1)$ aralıklarında klasik türevle genelleşmiş türevin aynı olduğu anlamına gelir.

Böylelikle, türev kavramı genişletilerek genelleşmiş türev tanımı verildi. Bu bize, bir yandan fonksiyon kavramını genişleterek daha geniş sınıftan olan fonksiyonları kullanma, öte yandan sürekli olmayan fonksiyonlar üzerinde bile türevle (genelleşmiş anlamda) ilgili işlemleri yapma olanağı sağlar (Hasanoğlu 2001, s. 25).

Örnek 3.4 *$\mathbb{R}$ de $f(x)=|x|$ fonksiyonunun genelleşmiş türevi var ve $sgn(x)$ dir.*

Tanım 3.3 *(Sobolev Uzayları) m bir pozitif tamsayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\|.\|_p$ de $L^p(\Omega)$ uzayında bir norm olmak üzere, sağ tarafı anlamlı kılan her u için*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty, \tag{3.2}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \tag{3.3}$$

şeklinde bir $\|.\|_{m,p}$ fonksiyoneli tanımlayalım. Bazı durumlarda bölgeler ile ilgili çıkabilecek karışıklığı önlemek için $\|u\|_{m,p}$ sembolü yerine $\|u\|_{m,p,\Omega}$ de kullanılmaktadır. (3.2) veya (3.3) normu ile verilen aşağıdaki uzaylar Sobolev uzayı olarak adlandırılır:

a) $H^{m,p}(\Omega) : \{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ kümesinin $\|.\|_{m,p}$ normuna göre tamlanışı;

b) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$;

c) $W_0^{m,p}(\Omega) : W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı,

(Adams 2002, s. 59). Açıktır ki

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

ve eğer $1 \leq p < \infty$ ise

$$W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

dır, çünkü $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğundur. Her m için aşağıdaki gömme zinciri mevcuttur:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega).$$

Ayrıca her Ω bölgesi için $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ dır. 1964 yılında Meyer ve Serrin tarafından yayınlanan bu sonuç, o zamana kadar literatürde var olan bu uzaylar arasındaki ilişkiye dair karışıklığı ortadan kaldırmıştır. Bu temel sonucun uzun bir süre elde edilememiş olması şaşırtıcı bir durumdur. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayları Sobolev tarafından tanıtılmıştır. Diğer taraftan ilgili birçok uzay başka matematikçiler tarafından da çalışılmıştır, bunlara örnek olarak C. B. Morrey (1940), J. Deny ve J. L. Lions (1955) verilebilir. Bu tür uzayları göstermek için bir çok farklı sembol ($W^{m,p}$, $H^{m,p}$, $P^{m,p}$, L_p^m vb.) kullanılmıştır. Ayrıca Sobolev'in ismiyle anılmadan önce başka isimler altında, örneğin Beppo Levi uzayları olarak adlandırılırlardı (Adams 2002, s. 60).

Teorem 3.2 *$W^{m,p}(\Omega)$ bir Banach uzayıdır.*

İspat. $\{u_n\}$, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $\{D^\alpha u_n\}$, $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $L^p(\Omega)$ da bir Cauchy dizisidir. $L^p(\Omega)$ tam olduğundan u ve u_α fonksiyonları vardır, öyle ki $n \to \infty$ iken $u_n \to u$ ve $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ dır. $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ olduğundan u_n, $T_{u_n} \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonunu tanımlar. Her $\phi \in D(\Omega)$ için Hölder eşitsizliğinden

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\,|\phi(x)|\,dx \leq \|\phi\|_{p'}\,\|u_n - u\|_p$$

sağlanır. Burada p', p nin üstel eşleniğidir. Bu yüzden $n \to \infty$ iken her $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için $T_{u_n}(\phi) \to T_u(\phi)$ dir. Benzer şekilde her $\phi \in D(\Omega)$ için $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \to T_{u_\alpha}(\phi)$ olur. Buradan her $\phi \in D(\Omega)$ için

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi)$$

elde edilir. Böylece $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $u \in W^{m,p}(\Omega)$ olduğunda Ω da genelleşmiş anlamda $u_\alpha = D^\alpha u$ olduğu görülür. Son olarak, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{m,p} = 0$ olduğundan $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı tamdır (Adams 2002, s. 60). ■

Uyarı 3.1 *Bundan sonra p nin üstel eşleniği p' ile gösterilecektir:*

$$p' = \begin{cases} \infty,\ p = 1 \\ \frac{p}{(p-1)},\ 1 < p < \infty \\ 1,\ p = \infty. \end{cases}$$

Riesz Gösterim Teoremi $W^{m,p}(\Omega)$ uzayına genişletilerek $W_0^{m,p}(\Omega)$ nın duali $D'(\Omega)$ nın bir alt uzayı ile tanımlanır. Eğer $1 < p < \infty$ ise $W_0^{m,p}(\Omega)$ nın duali $L^{p'}(\Omega)$ nın daha zayıf bir norm göre tamlanışı olarak ifade edilir (Adams 2002, s. 62).

Tanım 3.4 *($L^p(\Omega^{(m)})$ Uzayının Duali) $1 < p < \infty$ olmak üzere her $L \in (L^p(\Omega^{(m)}))'$ ne karşılık bir tek $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ vardır öyle ki her $u \in L^p(\Omega^{(m)})$ için*

$$L(u) = \int_{\Omega^{(m)}} u(x)v(x)dx = \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega_\alpha} u_\alpha(x)v_\alpha(x)dx = \sum_{|\alpha| \le m} \langle u_\alpha, v_\alpha \rangle$$

dır. Burada u_α ve v_α; sırasıyla u ve v nin Ω_α ya kısıtlanışlarıdır. Üstelik

$$\left\| L; (L^p(\Omega^{(m)}))' \right\| = \left\| v; L^{p'}(\Omega^{(m)}) \right\|$$

dır. Böylece

$$\left(L^p(\Omega^{(m)})\right)' = L^{p'}(\Omega^{(m)})$$

olur (Adams 2002, s. 62).

Tanım 3.5 *($W^{m,p}(\Omega)$ Uzayının Duali) $1 \le p < \infty$ olmak üzere her $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$ için $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ elemanları vardır öyle ki eğer v nin Ω_α ya kısıtlanışı v_α ise her $u \in W^{m,p}(\Omega)$ için*

$$L(u) = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle \tag{3.4}$$

dır. Ayrıca

$$\left\| L; (W^{m,p}(\Omega))' \right\| = \inf \left\| v; L^{p'}(\Omega^{(m)}) \right\| = \min \left\| v; L^{p'}(\Omega^{(m)}) \right\|, \tag{3.5}$$

sağlanır. Burada minimum her $u \in W^{m,p}(\Omega)$ için (3.4) eşitliğini sağlayan tüm $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ kümesi üzerinden alınır. Eğer $1 \le p < \infty$ ise (3.4) ve (3.5) eşitliklerini sağlayan $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ elemanı tektir (Adams 2002, s. 62).

Tanım 3.6 *($W_0^{1,p}(\Omega)$ nın dual uzayı) $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayının duali $W^{-1,p'}(\Omega)$ ile $H_0^1(\Omega)$ uzayının duali ise $H^{-1}(\Omega)$ ile gösterilir. $L^2(\Omega)$ uzayının duali yine kendisi yani $L^2(\Omega)$ ile tanımlanır. Ancak $H_0^1(\Omega)$ uzayını duali ile tanımlayamıyoruz. Burada aşağıdaki kapsamalar sağlanır*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

Bu kapsamalar sürekli ve yoğundur. Eğer Ω bölgesi sınırlı ise

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega), \quad \frac{2N}{(N+2)} \le p < \infty,$$

olup bunlar sürekli ve yoğun kapsamadır. Eğer Ω sınırlı değil ise aynı kapsamalar sadece $\frac{2N}{(N+2)} \le p < 2$ için geçerlidir (Brezis 2011, s. 291).

Tanım 3.7 *(Gömmeler) X normlu uzayı Y normlu uzayı içine gömülmüştür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa*
i) X, Y nin alt vektör uzayıdır ve
ii) $I : X \to Y$, $\forall x \in X$ için $Ix = x$ özdeşlik operatörü süreklidir.
I lineer olduğundan (ii) koşulu

$$\|Ix; Y\| \leq M \|x; X\|, \; x \in X$$

olacak şekilde M sabitinin varlığına denktir (Adams 2002, s. 9).

Teorem 3.3 *m negatif olmayan bir tam sayı ve $0 < v < \lambda \leq 1$ olsun. O zaman aşağıdaki gömmeler vardır:*

$$C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{m}\left(\overline{\Omega}\right), \tag{3.6}$$
$$C^{m,v}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{m}\left(\overline{\Omega}\right), \tag{3.7}$$
$$C^{m,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{m,v}\left(\overline{\Omega}\right). \tag{3.8}$$

Eğer Ω sınırlı ise (3.7) ve (3.8) gömmeleri kompakttır. Eğer Ω konveks ise

$$C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{m,1}\left(\overline{\Omega}\right), \tag{3.9}$$
$$C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{m,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right) \tag{3.10}$$

gömmeleri vardır. Eğer Ω konveks ve sınırlı ise (3.6) gömmesi kompakttır ve $\lambda < 1$ ise (3.10) de kompakttır (Adams 2002, s. 11).

Uyarı 3.2 *Sobolev uzaylarının gömme özellikleri analizde özellikle de türev ve integral operatörü ile ilgili çalışmalarda gereklidir. Sobolev uzayları için en önemli gömme sonuçları Sobolev gömme teoremi adı altında bir tek teorem olarak birleştirilmiştir. Bu teoremin birbirinden farklı ispat yöntemleri vardır. Gömme sonuçlarının birçoğu, koni şartını çeşitli şekillerde sağlayan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgeleri için elde edilmiştir. Bazı gömmeler daha güçlü geometrik hipotezler gerektirir (Adams 2002, s. 79). Sobolev Gömme Teoremi $W^{m,p}(\Omega)$ uzayının aşağıdaki tipten Banach uzayları içine gömmelerinin varlığını ifade eder:*

i) $W^{j,q}(\Omega)$, $j \leq m$ ve özel olarak $L^q(\Omega)$,

ii) $W^{j,q}(\Omega_k)$, $1 \leq k \leq n$; Ω_k, Ω ile $\mathbb{R}^n$ de k boyutlu bir düzlemin arakesitidir.

iii) $C_B^j(\Omega)$, Ω üzerinde j. mertebeye kadar sürekli türevlenebilir, sınırlı fonksiyonlar uzayıdır ve

$$\left\| u, C_B^j(\Omega) \right\| = \max_{0\leq|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|$$

normu ile verilir.

iv) $C^j\left(\overline{\Omega}\right)$, Ω da j. mertebeye kadar düzgün sürekli türevlenebilir sınırlı fonksiyonlardan oluşan, $C_B^j(\Omega)$ nin kapalı alt uzayıdır:

$$\left\| \phi; C^j\left(\overline{\Omega}\right) \right\| = \max_{0\leq|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \phi(x)|.$$

v) $C^{j,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$, Ω da j. mertebeye kadar türevleri λ ya göre Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan, $C^j\left(\overline{\Omega}\right)$ nın kapalı alt uzayıdır. $C^{j,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$ da norm

$$\left\| \phi; C^{j,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right) \right\| = \left\| \phi; C^j\left(\overline{\Omega}\right) \right\| + \max_{0\leq\alpha\leq j} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ x\neq y}} \left| \frac{D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)}{|x-y|^\lambda} \right|$$

ile verilir.

Teorem 3.4 *(Sobolev Gömme Teoremi) Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve Ω_k $(1 \leq k \leq n)$ da Ω ile $\mathbb{R}^n$ de k boyutlu bir düzlemin ara kesiti olsun ($k = n$ ise $\Omega_k = \Omega$). Ayrıca $j \geq 0$, $m \geq 1$ tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Teoremin ifadesi üç farklı durum için verilecektir (Adams 2002, s. 85).*

1. Durum Ω bölgesinin koni şartını sağladığını farzedelim.

a) $mp > n$ ya da $m = n$ ve $p = 1$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega) \tag{3.11}$$

dır. Diğer taraftan $1 \leq k \leq n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_k),\ p \leq q \leq \infty \tag{3.12}$$

ve özel olarak

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega),\ p \leq q \leq \infty$$

dır.

b) $1 \leq k \leq n$ ve $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_k)\,, \;\; p \leq q < \infty \tag{3.13}$$

ve özel olarak

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)\,, \;\; p \leq q < \infty$$

dır.

c) $mp < n$ ve $n - mp < k \leq n$ ya da $p = 1$ ve $n - m \leq k \leq n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_k)\,, \;\; p \leq q \leq p^* = kp/(n - mp)\,. \tag{3.14}$$

Özel olarak

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)\,, \;\; p \leq q \leq p^* = np/(n - mp) \tag{3.15}$$

dır.

2. Durum Ω kuvvetli local Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman (3.11) gömmelerinin $C_B^j(\Omega)$ hedef uzayı daha küçük olan $C^j\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı ile yer değiştirebilir ve bu durumda gömmeler aşağıdaki formda ifade edilebilir: Eğer $mp > n > (m-1)p$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C^{j,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right), \;\; 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p} \tag{3.16}$$

ve $n = (m-1)p$ ise

$$W^{j+m}(\Omega) \to C^{j,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right), \;\; 0 < \lambda < 1. \tag{3.17}$$

Ayrıca $n = m - 1$ ve $p = 1$ ise $\lambda = 1$ için (3.17) sağlanır.

3. Durum W uzayı ile W_0 uzayı yer değiştirirse, 1. ve 2. durumlardaki gömülmelerin hepsi Ω keyfi bölgelerinde geçerlidir.

Tanım 3.8 *($H^k(\Omega)$ Uzayları) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu cümleye ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 121);*

(a) $H^k(\Omega)$ lineer uzaydır ve $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$,

(b) $H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha f_1 D^\alpha \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir,

(c) $\partial\Omega \in C^k$ *ise* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *uzayı,* $H^k(\Omega)$ *da her yerde yoğundur,*

(d) $\partial\Omega \in C^k$ *ise* $H^k(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Tanım 3.9 *(*$\mathring{H}^k(\Omega)$ *Uzayı)* $\mathring{H}^k(\Omega)$*,* $C^k(\overline{\Omega})$ *uzayına ait ve* Ω *bölgesi ile* $\partial\Omega$ *yüzeyinin bir komşuluğunun arakesitinde sıfır olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümlenin kapanışıdır (Mikhailov 1978, s. 131).*

Teorem 3.5 *(İz (Trace) Teoremi)* Ω *sınırlı bir bölge ve* $\partial\Omega \in C^1$ *olsun. Bu durumda sınırlı bir lineer*

$$T : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar;

(a) Eğer $f \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *ise* $Tf = f|_{\partial\Omega}$*,*

(b) Her bir $f \in H^1(\Omega)$ *için* $\|Tf\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)}$ *dır, burada* $C > 0$ *sayısı sadece* Ω *ya bağlı olup* f *den bağımsızdır.*

T *operatörüne iz operatörü,* Tf *ye* f *fonksiyonunun* $\partial\Omega$ *üzerindeki izi denir ve* $\|Tf\|_{L_2(\partial\Omega)}$*,* $\|f\|_{L_2(\partial\Omega)}$ *ile ifade edilir (Evans 1997, s. 258).*

BÖLÜM 4

TERS VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

Denklem, bölge ve koşullar verildiğinde, denklemi ve koşulları sağlayan çözümün bulunması problemine direkt problem denir. Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki bunların çözümleri için ayrıca ek bilgiye gerek duyulur. Verilen bu ek bilgiye göre problemdeki denklemin bir veya birkaç katsayısının veya sağ tarafının ya da sınır koşullarından bir veya birkaçının denklemin çözümü ile birlikte bulunması problemine ters problem denir. Diferensiyel denklemler için ters problemler teorisinin karakteristik özelliklerinden biri, bu problemlerin Hadamard anlamında kötü konulmuş olmalarıdır.

Tanım 4.1 *(Hadamard anlamında iyi konulmuş problemler) İyi konulmuş problem tanımı 20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi J. S. Hadamard tarafından verilmiştir. U ve F metrik uzaylar, $A : U \longrightarrow F$ bir operatör olmak üzere*

$$Au = f \tag{4.1}$$

denklemini ele alalım. (4.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir;
i. Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır.
ii. Problemin çözümü U uzayında tektir.
iii. Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986, s. 26). Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

Hadamard'a göre kötü konulmuş problemler, reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz. Çünkü pratikte her zaman koşullar belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçlara götürebilir. Bu nedenle birçok matematikçi önceleri sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemlerle ilgilenmişti. Öte yandan birçok pratik problem de Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlere dönüşerek ister istemez matematikçilerin karşısına çıkıyordu. Hadamard'ın kendisinin örnek olarak gösterdiği kötü konulmuş problem, aşağıda verilen Laplace denklemi için Cauchy problemidir, bu da elektromanyetik alanların bulunması problemiyle ilgilidir.

Tanım 4.2 *(Tikhonov anlamında iyi konulmuş problemler) İlk defa, bir Rus matematikçi olan A. N. Tikhonov, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerin gerekliliğini ortaya koymuştur. (4.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine şartı iyi (doğru) konulmuş problem veya Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem denir:*

i. U bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ cümlesine aittir.

ii. Problemin çözümü M de tektir.

iii. Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir (Lavrent'ev et al. 1986, s. 27).

M cümlesine problemin doğruluk cümlesi denir ve M genellikle kompakt bir cümle olarak seçilir.

Teorem 4.1 *(A. N. Tikhonov) X, F Banach uzayları olmak üzere,*

$$A : X \longrightarrow F$$

lineer kompakt operatör, $M \subset X$ bir kompakt cümle olsun. Eğer $x \in X$ ve $f \in F$ olmak üzere,

$$Ax = f$$

denkleminin çözümü tek ise bu çözüm M cümlesinde f ye düzgün olarak sürekli bağımlıdır, yani keyfi bir $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta(\epsilon) > 0$ sayısı vardır ki

$$\|Ax_1 - Ax_2\| < \delta(\epsilon)$$

ve $x_1, x_2 \in M$ *ise*

$\|x_1 - x_2\| \leq \epsilon$

eşitsizliği sağlanır (Tikhonov and Arsenin 1979).

Genel anlamda ters problemler, cevabın bilindiği halde, sorunun bilinmediği ya da sonuçların bilindiği halde sebebin bilinmediği problemler olarak tanımlanabilir. Doğrudan erişilemeyen bir çevre hakkında bilgi edinmek için, bu bölgelerden gelen akustik, sismik ve elektromanyetik işaretler özel algılayıcılar yardımı ile değerlendirilir. Bu işaretler üzerinde yapılan geliş zamanı, geliş doğrultusu, genlik, faz/frekans, polarizasyon vb. ölçümlerden elde edilen bilgilere göre çevrenin ilgi duyulan özelliklerinin araştırılması, bir ters problemin ortaya çıkmasına sebep olur. Bu nedenle ters problemler teorisi, uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme dallarındaki çalışmaların teorik alt yapısını oluşturmuştur.
"Ters problem" ve "kötü konulmuş problem" kavramları 20. yüzyılın ortalarından başlayarak modern bilimde her geçen gün daha popüler hale gelmiştir. Elli yılı aşkın bir süredir bu problemler üzerine yapılan çalışmalar şunu göstermiştir: klasik matematiğin çeşitli branşlarında (bilgisayar cebiri, diferensiyel ve integral denklemler, kısmi diferensiyel denklemler, fonksiyonel analiz) ortaya çıkan çok sayıda karmaşık (kararsız ve genellikle lineer olmayan) problem ters veya kötü konulmuş olarak sınıflandırılabilir. Ters ve kötü konulmuş problemler aynı zamanda fizik, jeofizik, tıp ve astronomi gibi matematiğin kullanıldığı pek çok sahada çalışılmaya ve sistematik olarak uygulanmaya başlanmıştır, çünkü bu problemlerin çözümleri incelenen ortamın yoğunluk ve dalga yayılım hızı, elastisite parametreleri, iletkenlik, elektriksel ve manyetik geçirgenlik gibi önemli özelliklerini ve ayrıca doğrudan erişilemeyen bölgelerde homojenliğin bozulduğu noktaların konumuna ve karakterine ilişkin bilgileri vermektedir.
Matematiksel fiziğin direkt problemlerinde araştırmacılar; sesin, sıcaklığın, sismik veya elektromanyetik dalgaların yayılımı gibi çeşitli fiziksel olayları ifade eden fonksiyonları kesin veya yaklaşık olarak bulmaya çalışırlar. Bu problemlerde, ortamın özelliklerinin (denklemin katsayıları ile ifade edilir), fiziksel sürecin başlangıç anındaki durumunun (durağan olmayan hallerde), sınırda sağlanan özelliklerin (bölge sınırlı ise ve/veya durağan halde) bilindiği kabul edilmektedir. Bununla birlikte sıklıkla ortamın özelliklerinin bilinmediği durumlarla karşılaşılmaktadır. Bu da direkt problemin çözümü hakkında verilen bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının belirlenmesi ters probleminin ortaya

çıkmasına sebebiyet vermektedir. Ancak bu problemlerin bir çoğu kötü konulmuştur çünkü verilerdeki hatalara karşı çözümlerinin kararsızlığı söz konusudur. Diğer yandan ters problemlerin çözümleri ele alınan ortama dair önemli bilgiler verir, örneğin sıcaklık, potansiyel fark veya kirlilik ile ilgili bir araştırma söz konusu ise ihlalin, bozulmanın veya kaynağın yerinin, şeklinin ve yapısının belirlenmesine yardımcı olur.

Günlük yaşantımızda sıklıkla ters ve kötü konulmuş problemlerle karşılaşılmaktayız ve eğer ruhsal ve fiziksel olarak sağlıklı durumdaysak genellikle bu problemleri hızlı ve etkili bir şekilde çözebilmekteyiz. Örneğin, görsel algımızı ele alalım. Gözlerimizin belli bir anda çevremizdeki sadece sınırlı sayıdaki noktadan görsel bilgi alabildiği bilinmektedir. Peki bu durumda neden etrafımızdaki herşeyi görebildiğimiz hissine kapılıyoruz? Hiç şüphesiz bunun nedeni kişisel bir bilgisayar gibi çalışarak belirli noktalardan alınan verileri interpolasyon ve kestirim yaparak görüntüyü tamamlayan beynimizdir. Bir cismin gerçek görüntüsünün belli sayıdaki noktadan tatmin edici bir şekilde oluşturulabilmesi için bu cismin daha önceden bizim tarafımızdan görülmüş olması gerekir. Dolayısıyla bir nesnenin ve çevresinin görüntüsünün oluşturulması problemi kötü konulmuş bir problemdir (çözüm tek değil veya kararsız), buna rağmen beynimiz oldukça hızlı bir şekilde bu problemi çözebilmektedir. Bunun nedeni beynin önceki geniş tecrübelerini (a priori information) kullanabilme yeteneğidir (Kabanikhin 2008).

Ters ve kötü konulmuş problemler teorisi bilimin ve teknolojinin hemen hemen tüm sahalarında sıklıkla kullanılmaktadır. Özel olarak, fizik (astronomi, kuantum mekaniği, akustik, elektrodinamik vb.), jeofizik (sismik çalışmalar, elektrik, manyetik ve gravimetrik araştırmalar, sondaj, manyetotellürik ölçüm vb.), tıp (X-ışını, NMR tomografi, ultrason vb.), çevre (hava ve su kalitesinin araştırılması, uzay gözlem vb.), ekonomi (optimal kontrol teorisi, finans matematiği vb.) bu alanlardan bazılarıdır.

Ters problemleri sınıflandırabilmek için öncelikle direkt problemi tanımlamalıyız. Matematiksel fizikte bir direkt problem genellikle bazı fiziksel alanların, süreçlerin veya olayların (elektromanyetik, akustik, sismik, ısı vb.) modellenmesi problemidir. Bir direkt problemi çözerken amaç, belli bir anda bölgenin belli bir noktasındaki fiziksel alanı veya süreci ifade eden bir fonksiyonun bulunmasıdır. O halde direkt problemin formülasyonu; olayın gerçekleştiği bölgeyi, olayı modelleyen denklemi, başlangıç ve sınır koşullarını içerir.

Örneğin akustik denklem için bir direkt başlangıç-sınır değer problemi aşağıdaki gibi verilebilir:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinin sınırı $\Gamma = \partial\Omega$ olmak üzere

$$c^{-2}(x)\, u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) . \nabla u + h(x,t) \tag{4.2}$$

denkleminin

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x) \tag{4.3}$$

başlangıç koşullarını ve

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = g(x,t) \tag{4.4}$$

sınır koşulunu sağlayan $u(x,t)$ çözümünün bulunması problemi. Burada $u(x,t)$ akustik basınç, $c(x)$ ortamdaki sesin hızı, $\rho(x)$ ortamın yoğunluğu ve $h(x,t)$ de kaynak fonksiyondur. Matematiğin bir çok direkt problemi gibi bu problemde iyi konulmuş bir problemdir. Diğer taraftan ters problem, $u(x,t)$ nin yanı sıra direkt problemin yukarıda verilen formülasyonunda yer alan bazı fonksiyonlarında belirlenmesini içerir. Bu durumda bilinmeyen fonksiyonları bulmak için direkt problemin çözümü hakkında ayrıca bir ek bilgi gerekir, örneğin

$$u|_{\Gamma} = f(x,t) . \tag{4.5}$$

4.1 TERS PROBLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

4.1.1 Bilinmeyen Fonksiyona Göre Sınıflandırma

(4.2)-(4.5) problemi eğer başlangıç koşullarının yani $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının bulunması isteniyorsa geriye dönük (retrospektif) problem, sınır koşulundaki $g(x,t)$ nin bulunması isteniyorsa sınır problemi olarak adlandırılır. Eğer (4.3) başlangıç koşulları bilinmiyor, diğer yandan (4.5) ek bilgisi ve (4.4) sınır koşulu Ω nın sınırının sadece bir kısmında yani $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ da veriliyor ve $u(x,t)$ nin bulunması hedefleniyorsa (4.2)-(4.5) problemine devam (continuation) problemi denir. Eğer (4.2) denkleminde kaynağın yani $h(x,t)$ nin bulunması gerekiyorsa (4.2)-(4.5) ters problemine ters kaynak problemi, $c(x)$ ve $\rho(x)$ katsayılarının belirlenmesi gerekiyor ise katsayı ters problemi veya ters ortam (medium) problemi adı verilir. Burada ifade etmek gerekir ki bu teori yeni ve hızlı gelişen bir alan olduğundan ters problemlerin sınıflandırılması henüz tamamlanmamıştır. Ayrıca hem başlangıç hem de sınır koşullarının bilinmediği ya da Ω bölgesinin veya bu bölgenin sınırının bir bölümünün bilinmediği durumlar da mevcuttur (Kabanikhin 2008).

4.1.2 Ek Bilgiye Göre Sınıflandırma

Pratikte bölgenin sınırında verilen (4.5) verisi ölçüm için en uygun (ulaşılabilir) olandır, fakat bazı durumlarda ölçüm aletleri incelenen bölgenin içine yerleştirilir:

$$u(x_m, t) = f_m(t), \; m = 1, 2, ...,$$

bu da dahili (interior) bir problemi ortaya çıkarır. Optimal kontrol teorinin bir çok problemi gibi geriye dönük (retrospektif) ters problemler "son (final)" gözlem adı verilen

$$u(x, T) = \hat{f}$$

ek bilgisi ile verilir. Ters saçılım problemi, $u(x,t) = e^{iwt}\bar{u}(x,\omega)$ harmonik salınımının olduğu durumlarda formülize edilir ve X_1 gözlem noktalarının kümesi, $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ da gözlem frekanslarının kümesi olmak üzere ilgili ek bilgi, örneğin

$$\bar{u}(x, \omega_\alpha) = \bar{f}(x, \alpha), \; x \in X_1, \; \alpha \in \Omega,$$

şeklinde verilir. Bazen ilgili diferensiyel operatörün

$$\Delta U - \nabla \ln \rho . \nabla U = \lambda U$$

özdeğerleri ve özfonksiyonlarının karakteristikleri verilir, bu tür problemlerde ters spektral problem olarak bilinir. Diğer yandan bazı durumlarda, $\{x^m\}$ noktalarına yerleştirilmiş yerel kaynaklardan üretilen dalgalar için $\{x_k\}$ noktalarına varış zamanına dair bilgiler mevcut olabilmektedir:

$$\tau(x^m, x_k) = \tilde{f}(x^m, x_k), \; x_k \in X_1, \; x^m \in X_2.$$

Bu ek bilgi ile $c(x)$ hızının belirlenmesi problemi ters kinematik problem olarak isimlendirilir (Kabanikhin 2008).

4.1.3 Örnekler

Bu bölümde sunulan örnekler Kabanikhin (2008) in "Definitions and examples of inverse and ill-posed problems" başlıklı çalışmasından derlenmiştir.

Örnek 4.1 *(Cebir, lineer cebirsel denklem sistemleri)*

$Aq = f$ lineer cebirsel denklem sistemini düşünelim. Burada A bir $m \times n$ matris, q ve f sırasıyla n ve $m-$boyutlu vektörlerdir. Kabul edelim ki rank$(A) = \min(m, n)$ olsun. O halde $m < n$ için sistemin birçok çözümü olabilir, $m > n$ için çözüm olmayabilir ve $m = n$ için sistemin tek çözümü vardır. Son durumda bir A^{-1} ters operatörü vardır ve uzay sonlu boyutlu olduğundan bu operatör sınırlıdır. Böylece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemin her üç şartı da sağlanmış oldu.

Şimdi A matrisinin dejenere olmadığı durumda, çözümün f de meydana gelen pertürbasyonlara karşı bağlılığını araştıracağız. Ana denklem perturbe edilmiş denklemden çıkarılırsa

$$A(q + \delta q) = f + \delta f$$

yani $A\delta q = \delta f$ elde edilirki buradan da $\delta q = A^{-1}\delta f$ ve $\|\delta q\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta f\|$ bulunur. Ayrıca $\|A\| \|q\| \geq \|f\|$ dir. Sonuç olarak, çözümdeki relatif hata için en iyi değerlendirme

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

elde edilir ve bu da hatanın, matrisin şart sayısı olarak adlandırılan $\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ sabiti tarafından belirlendiğini gösterir. Eğer şart sayısı relatif olarak büyük ise sisteme kötü şartlı sistem denir. Dolayısı ile eğer matris kötü şartlı ise ilgili sistem her ne kadar teorik olarak iyi konulmuş ve $\|A^{-1}\| < \infty$ kararlılık şartını sağlarsa da pratikte kararsız olarak değerlendirilebilir. Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi yeterince büyük n ve $|\alpha| > 1$ için kötü şartlıdır. Çünkü ters matriste a^{n-1} formunda elemanlar vardır. Pertürbasyon durumunda, yukarıdaki değerlendirme

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} / \left(1 - \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

şeklini alır ($\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$).

Kabul edelim ki $m = n$ ve $\det A = 0$ olsun. Bu durumda sistemin ya çözümü yoktur ya da birden fazla çözümü vardır. O halde $Aq = f$ problemi dejenere A matrisi için kötü konulmuştur.

Örnek 4.2 *(Analiz, türev)*

Kabul edelim ki $f'(x) = q(x)$ olsun ve $f(x)$ in yerine $f_n(x) = f(x) + \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ fonksiyonu bilinsin. Bu durumda $q_n(x) = q(x) + \sqrt{n}\cos(nx)$ ve $n \to \infty$ için $\|f - f_n\|_C \to 0$ iken $\|q - q_n\|_C \to \infty$ olur.

Örnek 4.3 *(Analiz, Fourier serileri)*

Bir Fourier serisinin toplamının hesaplanması problemi Fourier katsayılarından bir $q(x)$ fonksiyonunun bulunmasını ifade etmektedir. Bu problemin, toplamdaki sapmalar C metriğinde değerlendirilirken, l_2 metriğinde Fourier katsayılarındaki küçük sapmalara karşı kararsız olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kx$$

olsun ve $q(x)$ in f_k Fourier katsayılarında $\tilde{f}_k = f_k + \dfrac{\varepsilon}{k}$ şeklinde küçük sapmalar meydana gelsin. Burada

$$\tilde{q}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k \cos kx$$

olmak üzere l_2 metriğinde yukarıda verilen iki seri arasındaki fark

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - \tilde{f}_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$$

olup $\varepsilon \to 0$ için sıfıra yaklaşır. Bununla birlikte

$$q(x) - \tilde{q}(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx$$

farkı istenildği kadar büyütülebilir çünkü bu seri $x = 0$ için ıraksaktır. O halde, eğer serilerin toplamındaki sapma C metriğinde değerlendirilirse, bu durumda Fourier serilerinin toplamı kararlı olmaz.

Örnek 4.4 *(Geometri)*

Uzayda farklı açılardan aydınlatılabilen bir cisim düşünelim. Bu cismin şekli biliniyorken gölgesinin şeklinin bulunması problemi iyi konulmuştur. Diğer taraftan cismin çeşitli düzlemler üzerindeki izdüşümlerinden (gölgesinden), cismin şeklinin belirlenmesi ters problemi sadece konveks cisimler için iyi konulmuştur, çünkü konkav bir bölge açıktırki bu yolla belirlenemez. Böyle bir problem ilk defa ayın üzerine düşen gölgeden dünyanın şeklinin küresel olduğu sonucuna varan Aristo tarafından formülize edilmiş ve çözülmüştür. Açıktır ki sadece ay yüzeyi üzerindeki gölgesinden yararlanarak dünyanın şeklinin belirlenmesi (projektif geometri) ters probleminin çözümü tek değildir. Aristo, günbatımındaki ufuk çizgisinin düz olmasına dayanarak dünyanın davul şeklinde olduğunu ileri sürenlerin olduğunu söylemiştir. Ancak kendisi dünyanın şeklinin küresel olmasına delil olarak iki gözlem (ters problem için ek bilgi) ortaya koymuştur: dünya yüzeyinin herhangi bir noktasında, yukarıdan bırakılan bir cisim aşağıya dikey olarak düşmektedir ve dünya yüzeyinde hareket edildiğinde gök haritası değişmektedir, örneğin, kuzeye ya da güneye doğru uzun yolculuklar yapmamız halinde geceleri görebildiğimiz takım yıldızların ufuktan olan yükseklikleri (bulunduğumuz enleme göre) artar ya da azalır veya ekvatorda durup kuzeye doğru baktığımızda artık Kutup Yıldızını ve üyesi olduğu Ursa Minor (Küçük Ayı) takım yıldızını göremeyiz.

Örnek 4.5 *(Diferensiyel denklemler)*

Radyoaktif bozunma oranı radyoaktif maddenin miktarı ile orantılıdır. Burada q_1 oran sabitine bozunma sabiti adı verilir. Radyoaktif bozunma süreci, $u(t)$ belli bir andaki ve q_0 da başlangıç anındaki radyoaktif madde miktarları olmak üzere aşağıda verilmiş olan adi diferensiyel denklem için bir Cauchy problemi ile ifade edilmektedir:

$$\frac{du}{dt} = -q_1 u(t), \ t \geq 0, \tag{4.6}$$

$$u(0) = q_0. \tag{4.7}$$

Direkt problem: q_0 ve q_1 verildiğinde $u(t)$ madde miktarının zamana göre değişiminin bulunmasıdır. Bu problem iyi konulmuş bir problemdir ve çözümü de açık olarak

$$u(t) = q_0 e^{-q_1 t}, \ t \geq 0$$

olarak elde edilir. Şimdi kabul edelim ki q_0 ve q_1 bilinmesin ancak bazı t değerleri için radyoaktif madde miktarı $u(t)$ ölçülebilsin.

Ters Problem: direkt problemin çözümü hakkında verilmiş olan ek bilgiden $u(t_k) = f_k$, $(k = 1, 2, ..., N)$, (4.6) denklemindeki q_1 katsayısının ve q_0 (4.7) başlangıç koşulunun bulunmasıdır.

Örnek 4.6 *(Diferensiyel denklem sistemi)*

Bir kimyasal kinetik süreci, aşağıdaki lineer adi diferensiyel denklem sistemi için bir Cauchy probleminin çözümüyle verilir:

$$\frac{du_i}{dt} = q_{i1}u_1(t) + q_{i2}u_2(t) + ... + q_{in}u_n(t), \tag{4.8}$$

$$u_i(0) = \overline{q_i}, \qquad i = 1, ..., N. \tag{4.9}$$

Burada $u_i(t)$, t anındaki i. maddenin yoğunluğudur. q_{ij} sabit parametreleri i. maddenin yoğunluğundaki değişme oranının bu süreçteki maddelerin yoğunluğuna göre değişim oranını ifade eder.

Direkt problem: q_{ij} parametreleri ve $\overline{q_i}$ yoğunluğu verildiğinde başlangıç anında $u_i(t)$ nin belirlenmesi problemidir.

Diğer taraftan (4.8) diferensiyel denklemi için bir ters problem; maddelerin $u_i(t)$ yoğunlukları $t \in [t_1, t_2]$ zaman periyodu için ölçüldüğünde yani verildiğinde q_{ij} parametrelerinin bulunması problemi olarak verilebilir. Yani (4.8) sisteminin çözümünden bu sistemin katsayılarının bulunması problemidir. Bu ters problemin iki farklı versiyonu düşünülebilir. Birinci versiyonda (4.9) başlangıç koşulları biliniyordur. Yani $\overline{q_i}$ ler verilmiştir. Yani ilgili $u_i(t)$ çözümleri ölçülmüştür. İkinci versiyonda $\overline{q_i}$ ler bilinmiyordur ve q_{ij} ile birlikte belirlenmesi gerekir.

Örnek 4.7 *(İkinci mertebeden diferensiyel denklem)*

Birim kütleye sahip bir parçacığın bir doğru boyunca hareket ettiğini varsayalım. Bu hareket zamana bağlı bir $q(t)$ kuvveti tarafından gerçekleştirilsin. Eğer parçacık $x = 0$ başlangıç noktasında ve $t = 0$ anındaki hızı sıfır ise bu durumda Newton kanunlarına göre bu parçacığın hareketi bir $u(t)$ fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki Cauchy problemi ile ifade edilir:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = q(t),\ t \in [0, T], \tag{4.10}$$

$$u(0) = 0,\ \frac{du}{dt}(0) = 0. \tag{4.11}$$

Burada $u(t)$, t anında parçacığın koordinatıdır. Şimdi kabul edelim ki $q(t)$ kuvveti bilinmesin fakat $u(t)$ koordinatı herhangi bir zamanda ölçülebilsin (veya $[0, T]$ aralığındaki bir noktada). Bu durumda $u(t)$ den $q(t)$ nin bulunması bir ters problem olmuş olur. Diğer bir deyişle (4.10) denkleminin sağ tarafını (4.10)-(4.11) probleminin $u(t)$ çözümünden bulunması ters problemi karşımıza çıkar.

Şimdi bu ters problemin kararsız olduğunu ispatlayacağız. Kabul edelim ki $u(t)$ bazı $q(t)$ ler için direkt problemin bir çözümü olsun. Bu çözüm için aşağıdaki sapmaları düşünelim:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n}\cos(nt).$$

Bu durumda sağ taraf için söz konusu sapmalar

$$q_n(t) = q(t) - n\cos(nt)$$

olur. Açıkçası, $n \to \infty$ iken $\|u - u_n\|_{C[0,T]} \to 0$ ve $\|q - q_n\|_{C[0,T]} \to \infty$ dır. Böylece (4.10)-(4.11) lineer diferensiyel denkleminin sağ tarafının bulunması problemi kararsız olmuş olur. Burada dikkat etmek gerekir ki eğer her $t \in [0,T]$ için $u(t)$ değerleri verilirse ters problem, iki kez türev alma işlemine indirgenir.

Örnek 4.8 *(Birinci çeşit Fredholm integral denklemi)*

Birinci çeşit Fredholm integral denkleminin çözülmesi problemini düşünelim:

$$\int_a^b K(x,s)q(s)ds = f(x),\ \ c \le x \le d. \tag{4.12}$$

Burada $K(x,s)$ çekirdek fonksiyonu ve $f(x)$ verilmiş olup $q(s)$ nin bulunması istenmektedir. Ayrıca $f(x) \in C[c,d]$, $q(s) \in C[a,b]$ ve $K(x,s)$, $K_x(x,s)$, $K_s(x,s)$ fonksiyonlarının $c \le x \le d$, $a \le s \le b$ dikdörtgeninde sürekli olduğu kabul edilmektedir. (4.12) denkleminin çözümü problemi kötü konulmuştur. Çünkü çözümler bazı $f(x) \in C[c,d]$ fonksiyonları için var olmayabilir. Örneğin $[c,d]$ de sürekli fakat türevlenemeyen $f(x)$ fonksiyonu alalım. Böyle bir sağ taraf için denklem bir $q(s)$ çözümüne sahip olamaz. Çünkü $K(x,s)$ çekirdeği için verilen şartlar her $q(s)$ sürekli fonksiyonu için (4.12) denkleminin sol tarafındaki integralin x parametresine göre diferensiyellenebilir olmasını gerektirmektedir. Ayrıca çözümün başlangıç verisine sürekli bağımlı olma şartı (4.12) denklemi için sağlanmaz.

Örnek 4.9 *(İkinci çeşit Volterra integral denklemi)*

İkinci çeşit Volterra integral denkleminin çözülmesi problemini ele alalım:

$$\int_0^x K(x,s)q(s)ds = f(x),\ \ 0 \le x \le 1. \tag{4.13}$$

Açıktır ki $K \equiv 1$ için problem (4.13), $f^{'}(x) = q(x)$ türev alma işlemine denktir. $f_n = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ dizisi problemin kararsız olduğunu gösterir.

Örnek 4.10 *(Laplace denklemi için Cauchy problemi)*

Kabul edelim ki $u = u(x, y)$ aşağıdaki problemin bir çözümü olsun:

$$\Delta u = 0,\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}, \tag{4.14}$$

$$u(0, y) = f(y),\ y \in \mathbb{R}, \tag{4.15}$$

$$u_x(0, y) = 0,\ y \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

$f(y)$ verisi aşağıdaki gibi seçilsin:

$$f(y) = u(0, y) = \frac{1}{n}\sin(ny). \tag{4.17}$$

Bu durumda (4.14)-(4.16) probleminin çözümü

$$u(x, y) = \frac{1}{n}\sin(ny)(e^{nx} + e^{-nx}),\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.18}$$

ile verimiştir.

$n \to \infty$ için $f(y) \to 0$ iken (4.18) çözümünün değeri, her $x > 0$ sabiti ve yeterince büyük n sayısı için, istenildiği kadar büyük yapılabilir. Bu yüzden C^1 veya W_2^l $(l < \infty)$ uzaylarında verilerde ortaya çıkacak küçük değişiklikler çözümde bağımsız olarak büyük değişikliklere yol açar ve bu da (4.14)-(4.16) probleminin kötü konulmuş olduğu anlamına gelir.

Örnek 4.11 *(Birinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem için ters problem)*

Her $x \in \mathbb{R}$ için $q(x)$ sürekli ve $\varphi(x)$ de sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki Cauchy problemi iyi konulmuştur:

$$u_x - u_y + q(x)u = 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.19}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Problem (4.19), (4.20) nin çözümü için verilmiş olan

$$u(0, y) = \psi(y),\ y \in \mathbb{R}$$

ek bilgisine göre $q(x)$ in elde edilmesi ters problemini ele alalım. (4.19), (4.20) nin çözümü aşağıdaki formülle verilmiştir:

$$u(x, y) = \varphi(x + y)\exp\left(\int_{x+y}^{x} q(\xi)d\xi\right),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.21}$$

(4.21) şartı

$$\psi(y) = \varphi(y)\exp(\int_y^0 q(\xi)d\xi),\ y \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

olmasını gerektirir. Böylece

1) $y \in \mathbb{R}$ için $\varphi(y)$ ve $\psi(y)$ sürekli türevlenebilir;

2) $\dfrac{\psi(y)}{\varphi(y)} > 0,\ y \in \mathbb{R};\ \psi(0) = \varphi(0)$

şartları ters problemin

$$q(x) = -\frac{d}{dx}[\text{In}\,\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}],\ x \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşuldur. Eğer $\varphi(y)$ ve $\psi(y)$ sadece sürekli ise bu durumda problem kötü konulmuş olur.

Örnek 4.12 *(Isı denklemi için ters zamanlı Cauchy problemi-geri parabolik denklem)*

Ters zamanlı Cauchy problemi aşağıdaki gibi ifade edilir: $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0 \tag{4.24}$$

denklemini ve

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0 \tag{4.25}$$

sınır şartlarını sağlasın.

$t = T > 0$ sabit anında, $u(x,t)$ nin verilen değerlerine göre:

$$u(x,T) = f(x),\ 0 \le x \le \pi, \tag{4.26}$$

$t = 0$ başlangıç anında $u(x,t)$ değerlerinin:

$$u(x,0) = q(x),\ 0 \le x \le \pi \tag{4.27}$$

belirlenmesi problemi. Bu problem (4.24)-(4.27) bağıntılarını sağlayan $q(x)$ fonksiyonu verildiğinde $u(x,t)$ fonksiyonunun bulunması probleminin tersidir. (4.24)-(4.27) direkt probleminin çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} q_n \sin nx \tag{4.28}$$

formundadır. Burada $\{q_n\}$, $q(x)$ in Fourier katsayılarıdır:

$$q_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi q(x)\sin(nx)dx.$$

(4.28) de $t = T$ alınırsa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2T} q_n \sin nx,\ x \in [0,\pi] \tag{4.29}$$

elde edilir ve bu da

$$q_n = f_n e^{n^2T},\ \ n = 12, ...,$$

olmasını gerektirir. Burada $\{f_n\}$, $f(x)$ in Fourier katsayılarıdır. $q(x) \in L^2(0,\pi)$ fonksiyonu $\{q_n\}$ Fourier katsayıları ile tek türlü belirli olduğundan ters problemin $L^2(0,\pi)$ deki çözümü tektir. Dikkat etmek gerekir ki (4.27) şartı bir limit şartı olarak

$$\lim_{t\to+0}\int_0^\pi [u(x,t) - q(x)]^2 dx = 0$$

sağlanır. (4.24)-(4.26) ters problemi bir çözüme sahiptir ancak ve ancak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 e^{2n^2T} < \infty$$

sağlanırsa. Açıktır ki $f \in L^2(0,\pi)$ olan fonksiyonlar için bu şart sağlanmaz.

Örnek 4.13 *(Isı iletim denklemi için katsayı ters problemi) Isı iletim denklemi için sınır değer probleminin $u(x,t)$ çözümü, içi boş bir tüpteki difüzyon veya bir çubuktaki ısı dağılımı gibi bir çok fiziksel olayı tasvir eder:*

$$c\rho u_t = (ku_x)_x - \alpha u + f,\ \ 0 < x < l,\ \ 0 < t < T, \tag{4.30}$$

$$u(0,t) - \lambda_1 u_x(0,t) = \mu_1(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{4.31}$$

$$u(l,t) - \lambda_2 u_x(l,t) = \mu_2(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{4.32}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le l. \tag{4.33}$$

Bu denklemdeki katsayılar ve sınır koşulları ele alınan fiziksel olayın parametrelerini ifade eder. (4.30)-(4.33) problemi eğer bir çubuktaki sıcaklık dağılımını ifade ediyorsa bu durumda c ve k çubuğun yapısını karakterize eden ısı kapasite katsayısı ve ısı iletim katsayısı olarak adlandırılır. Bu durumda direkt problem bilinen c, ρ, k, α, f, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 ve φ

parametrelerinden bir t anında ve bir x noktasında teldeki ısının bulunmasını ifade etmektedir (yani $u(x,t)$ fonksiyonunun bulunması). Şimdi kabul edelim ki $k = k\,(x)$ ısı iletim katsayısı dışındaki $u(x,t)$ yi belirleyen bütün katsayı ve fonksiyonlar bilinsin. Ayrıca bir x_0 iç noktasında çubuğun ısısı ölçülebilsin yani $u(x_0,t) = f(t)$, $0 \le t \le T$ verilsin. Bu durumda şöyle bir ters problem ortaya çıkar: (4.30)-(4.33) de bütün fonksiyonların ve $f(t)$ fonksiyonun verilmesi şartı altında $k(x)$ ısı iletim katsayısını bulunuz.

Örnek 4.14 *(Ölçüm verilerinin yorumlanması) Durağan olmayan alanları kaydetmekte kullanılan bir çok ölçüm aygıtının çalışması söyle tasvir edilebilir: aygıtın girişine bir $q(t)$ sinyali ulaşır ve bir $f(t)$ fonksiyonu çıkış olarak kaydedilir, en basit durumda $q(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları aşağıdaki formülle bağlantılıdır:*

$$\int_0^t g(t-\tau)q(\tau)d\tau = f(t). \tag{4.34}$$

Bu durumda $g(t)$, aygıtın etki tepki fonksiyonu olarak adlandırılır. Teoride, giriş $\delta\,(t)$ genelleşmiş fonksiyonu yani Dirac delta fonksiyonu

$$\int_a^t g(t-\tau)\delta(t)d\tau = g(t)$$

olduğunda $g(t)$ aygıtın çıkışı olur. Uygulamada $g(t)$ fonksiyonunu elde etmek için giriş olarak yeterince kısa ve güçlü bir etki gerekmektedir. Sonuç olarak ortaya çıkan çıkış fonksiyonu etki tepki fonksiyonunu temsil etmektedir. Böylece ölçüm verilerinin yorumlanması problemi yani $q(t)$ giriş sinyalinin şeklinin belirlenmesi (4.34) daki birinci tip integral denkleminin çözülmesine indirgenir. $q(t)$ giriş sinyaliyle $f(t)$ çıkış fonksiyonu arasındaki ilişki daha karışık da olabilir, lineer bir aygıt için bu ilişki

$$\int_0^t K(t,\tau)q(\tau)d\tau = f(t)$$

şeklindedir. Diğer taraftan $q(t)$ ve $f(t)$ arasındaki ilişki lineer olmayabilir

$$\int_0^t K(t,\tau,q)d\tau = f(t).$$

Bu model, alternatif elektromanyetik alanlarını ve sürekli bir ortamdaki basınç ve gerilim modlarını kaydeden aygıtların, yeryüzündeki titreşimleri kaydeden sismografların ve benzeri birçok aygıtın çalışma sistemini tasvir eder.

Örnek 4.15 *Lineer kötü konulmuş problemlerin en önemli ve en genel örneği $Aq = f$ denklemidir. Burada $A : D(A) \subset Q \to R(A) \subset F$ kompakt operatör, Q ve F ayrılabilir Hilbert uzaylarıdır. $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$ tekil sistemi kullanılarak minimal normlu bir pseudo çözüm (sözde çözüm) oluşturulabilir,*

$$q_{np} = A^{\dagger} f = \sum_{\sigma_n \neq 0} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n.$$

Burada $A^{\dagger}$, A kompakt lineer operatörünün Moore-Penronse tersidir. Picard kriterine göre

$$f \in D(A^{\dagger}) \iff \sum_{\sigma_n \neq 0} \frac{|\langle f, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty.$$

Bu sebeple $Aq = f$ in çözümü sadece f özel verisi için var olabilir. Ayrıca $f_n = \sqrt{\sigma_n} u_n$ seçilirse bu durumda $q_n = v_n / \sqrt{\sigma_n}$ ve $Aq_n = f_n$ olur. Böylece $n \to \infty$ için $f_n \to 0$ fakat $q_n \to \infty$ olur. Kötü konulmuşluğun derecesi $\sigma_n \searrow 0$ yakınsaklık oranı, şartlı kararlılık fonksiyonu, süreklilik modülü $\omega(M, \delta) := \sup \{\|q\| : q \in M, \|Aq\| \leq \delta\}$ veya indeks fonksiyonuyla verilir.

Uyarı 4.1 *(4.34) denklemini çözmek için Fourier veya Laplace dönüşümü uygulanabilir. Kabul edelim ki $g(\widetilde{\lambda})$, $q(\widetilde{\lambda})$ ve $f(\widetilde{\lambda})$ sırasıyla $g(t)$, $q(t)$ ve $f(t)$ nin Fourier dönüşümleri olsun:*

$$\widetilde{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} g(t) dt, \ \widetilde{q}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} q(t) dt, \ \widetilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt.$$

Bu durumda konvolüsyon teoreminden

$$g(\widetilde{\lambda}) q(\widetilde{\lambda}) = f(\widetilde{\lambda})$$

ve sonuç olarak Fourier dönüşümünün tersi kullanılarak (4.34) denkleminin çözümü

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{q}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \frac{\widetilde{f}(\lambda)}{\widetilde{g}(\lambda)} d\lambda \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35) formülüne dayanan hesaplama yöntemi kararsızdır. Çünkü gündelik uygulamalarda aygıtın etki tepki fonksiyonunun Fourier dönüşümü olan $\widetilde{g}(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda \to \infty$ için sıfıra gider. Bu ölçülen verilerdeki keyfi küçük değişikliklerin $q(t)$ çözümünde çok büyük değişikliklere yol açabileceği anlamına gelir.

Çizelge 4.1: İyi ve kötü konulmuş problemler (I) (Kabanikhin 2008).

İyi konulmuş problemler	Kötü konulmuş problemler
Aritmetik	
Küçük bir A sayısı ile çarpım $Aq = f$	Küçük bir sayı ile bölme $q = A^{-1}f \ (A \ll 1)$
Cebir	
Bir matris ile çarpma işlemi $Aq = f$	$q = A^{-1}f$ A kötü şartlı, dejenere veya $m \times n$ matristir.
Analiz	
İntegral $f(x) = f(0) + \int_0^x q\,(\xi)\,d\xi$	Türev $q\,(x) = f'(x)$
Diferensiyel denklemler	
Sturm-Liouville problemi $u''\,(x) - q\,(x)\,u\,(x) = \lambda u(x)$ $u\,(0) - hu'\,(0) = 0$ $u\,(1) - hu'(1) = 0$	Ters Sturm-Liouville problemi $\{\lambda_n,\ \|u_n\|\}$ yardımıyla $q(x)$ bulunur
İntegral geometri	
$\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x,y)ds$ integralleri bulunur	$\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x,y)ds = f(\xi,\eta)$' den q bulunur
İntegral denklemler	
2. tip Volterra ve Fredholm denklemleri $q(x) + \int_0^x K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$	1. tip Volterra ve Fredholm denklemleri $\int_0^x K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$
$Aq = f$ operatör denklemleri	
$\exists m > 0; \forall q \in Q$ $m\,\langle q, q\rangle \leq \langle Aq, q\rangle$	$A : D(A) \subset Q \to R(A) \subset F$ A kompakt lineer operatör (singüler değerli)

Çizelge 4.2: İyi ve kötü konulmuş problemler (II) (Kabanikhin 2008).

<table>
<tr><th>İyi konulmuş problemler</th><th>Kötü konulmuş problemler</th></tr>
<tr><td colspan="2">Eliptik denklemler</td></tr>
<tr><td>$\Delta u = 0,\ x \in \Omega$
$u|_{\Gamma} = g$ veya $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma} = f,$
veya $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})\big|_{\Gamma} = h$
Dirichlet veya Neumann problemi,
Robin problemi (karşık)</td><td>$\Delta u = 0,\ x \in \Omega$
Cauchy problemi
Başlangıç-sınır değer problemi
($\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$ alt sınırı için)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parabolik denklemler</td></tr>
<tr><td>$u_t = \Delta u,\ t > 0,\ x \in \Omega$
Cauchy problemi
$u|_{t=0} = f(x)$
Başlangıç-sınır değer problemi
$u|_{t=0} = 0$
$u|_{\Gamma} = g(x,t)$</td><td>Ters zaman Cauchy problemi
(Geri parabolik)
$-u_t = \Delta u,\ t > 0,\ x \in \Omega$
$u|_{t=0} = f$
Başlangıç-sınır değer problemi
(Sınırın bir kısmındaki veriye göre)
$\begin{cases} u_t = \Delta u,\ \ x \in \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = f_1,\ \ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = f_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hiperbolik denklemler</td></tr>
<tr><td>Cauchy problemi
$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$
Başlangıç-sınır değer problemi
$u|_{\Gamma} = g$</td><td>Dirichlet ve Neumann problemleri
Cauchy problemi
(Veriler zaman tipi uzayda veriliyor)
$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ \ x \in \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = f_1,\ \ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = f_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Direkt problemler</td><td>Katsayı ters problemleri</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q\,(x)\,u \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$
$\begin{cases} u_t = \Delta u - q\,(x)\,u \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \nabla(q(x)\nabla u) = 0,\ x \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = g \text{ veya } \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma} = f \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q\,(x)\,u \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{\Gamma} = f,\ \ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma} = g \end{cases}$
$\begin{cases} u_t = \Delta u - q\,(x)\,u \\ u|_{t=0} = 0,\ u|_{\Gamma} = f,\ \ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma} = g \end{cases}$
$\begin{cases} \nabla(q(x)\nabla u) = 0 \\ u|_{\Gamma} = g \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma} = f \end{cases}$</td></tr>
</table>

BÖLÜM 5

KİNETİK TEORİ

Bu bölüm temel olarak Andreasson (2011) in "The Einstein-Vlasov system/kinetic theory" başlıklı çalışmasından derlenmiştir.

Genel rölativitede kinetik teori, son yıllarda artan ilgiye rağmen fenomenolojik maddeyi modellemek için akışkan modellerine kıyasla daha az kullanılmıştır. Matematiksel bakış açısından bir kinetik modelin kullanımının temel avantajları vardır. Eğik olmayan uzay-zamanlarda (non-curved spacetimes) kinetik teori uzun yıllar boyunca matematiksel olarak yoğun bir şekilde çalışılmış ve mühendislik alanlarında da önemli bir yer edinmiştir.

Kinetik teorinin amacı bir parçacıklar topluluğunun zaman evrimini modellemektir. Parçacıklar, fiziksel durumlara bağlı olarak tamamen farklı nesneler olabilir. Örneğin nötr bir gazdaki parçacıklar; atomlar ve moleküller, plazmadakiler ise elektronlar ve iyonlardır. Astrofizikte parçacıklar; yıldızlar, galaksiler ve galaksi kümeleridir. Parçacık sistemlerinin matematiksel modelleri sıklıkla kinetik veya akışkan denklemleri ile tanımlanır. Kinetik teorinin karakteristik bir özelliği, modelleri istatikseldir ve parçacık sistemleri $f = f(t, x, p)$ yoğunluk fonksiyonları ile tanımlanır. Bu fonksiyon, parçacıkların yoğunluğunu verilen $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ uzay-zaman konumunda ve $p \in \mathbb{R}^3$ momentumunda temsil eder. Bu yoğunluk fonksiyonu zengin bir bilgi içerir ve makroskopik nicelikler bu fonksiyondan kolaylıkla hesaplanır. Bir akışkan modelde, sistemi tanımlayan nicelikler p momentumuna bağlı değildir sadece (t, x) uzay-zaman noktasına bağlıdır. Bir model seçimi genelde ilgilenilen sistemin fiziksel özelliklerine veya nümerik değerlendirmelere göre yapılır. Çok saf bir akışkan modelin kabuk-kesen-tekilliklerin artmasına neden olabileceği unutulmamalıdır ve bu da fiziksel bir durum değildir. Kinetik bir tanımlamada ise böyle bir olgu kabul edilemez.

Sistemin zaman evrimi, fiziksel duruma bağlı olarak parçacıklar arasındaki etkileşimle tanımlanır. Örneğin, nötr bir gazın itici mekanizması; parçacıklar arasındaki çarpışmadır (Boltzmann denklemleri). Bir plazma için etkileşim, yükler tarafından oluşturulan elektromanyetik alan iledir (Vlasov-Maxwell sistemi) ve astrofizikte etkileşim gravitasyoneldir (Vlasov-Poisson sistemi ve Einstein-Vlasov sistemi). Tabii ki etkileşim işlemlerinin kombinasyonları da söz konusu olabilir, fakat çoğu durumda biri baskın olup zayıf işlem ihmal edilir.

5.1 RÖLATİVİSTİK BOLTZMANN DENKLEMİ

Minkowski uzay-zamanı içinde nötr parçacıklar topluluğunu ele alalım. Metriğin işaretleri $(-,+,+,+)$ şeklinde olsun. Bu bölümde bütün parçacıkların durgun kütlelerinin $m=1$ olduğunu varsayacağız ve c ışık hızını 1 değerine normalize edeceğiz. Her bir parçacık için dört-momentum p^a, $a=0,1,2,3$ şeklinde gösterilir. Bütün parçacıklar eşit durgun kütleye sahip olduğundan, her bir parçacık için dört-momentum kütle kabuğuna sınırlandırılmıştır, $p^a p_a = -m^2 = -1$. Dolayısıyla üç-momentum $p \in \mathbb{R}^3$ ile gösterilir ve p^a, $p^a = (p^0, p)$ şeklinde yazılabilir. Burada $p^0 = \sqrt{1+|p|^2}$, p üç-momentumlu bir parçacığın enerjisidir ve $|p|$, p nin olağan Öklid uzunluğudur. p momentumlu bir parçacığın rölativistik hızı $\widehat{p}$ ile gösterilir ve

$$\widehat{p} = \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} \tag{5.1}$$

ile ifade edilir. Burada $|\widehat{p}| < 1 = c$ dir. Rölativistik Boltzmann denklemi bir parçacıklı dağılım fonksiyonu $f = f(t,x,p)$ nin uzay-zaman davranışını modeller ve

$$\left(\partial_t + \frac{p}{p_0}\cdot\nabla_x\right) f = Q(f,f) \tag{5.2}$$

yapısına sahiptir. Burada rölativistik çarpışma operatörü

$$Q(f,g) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{S^2} k(p,q,w)\left[f(p+a(p,q,w)w)g(q-a(p,q,w)w) - f(p)g(q)\right] dwdp \tag{5.3}$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (5.2) de $g=f$ dir. Burada dw, S^2 de yüzey alanı elemanıdır. $k(p,q,w)$ ise etkileşim işleminde diferensiyel kesite bağlı saçılma çekirdeğidir. Rölativistik durumda diferensiyel kesit örnekleri için (Cercignani and Kremer 2002) ve (de Groot et al. 1980) çalışmalarına bakılabilir. $a(p,q,w)$ fonksiyonu çarpışma mekaniğinden kaynaklanır. Eğer p ve q momentumuna sahip iki parçacık, $w \in S^2$ saçılma açısı ile elastik olarak çarpışırsa, momentumları örneğin $p \to p'$ ve $q \to q'$ olarak değişir. p, q ve $p\prime$, $q\prime$ arasındaki ilişki

$$p\prime = p + a(p,q,w)w,\; q\prime = q - a(p,q,w)w \tag{5.4}$$

ile verilir. Burada

$$a(p,q,w) = \frac{2(p^0+q^0)p^0q^0(w\cdot(\widehat{q}-\widehat{p}))}{(p^0+q^0)^2-(w\cdot(p+q))^2}. \tag{5.5}$$

Bu ilişki dört-momentumun korumununun bir sonucudur:

$$p^a + q^a = p^{a'} + q^{a'}$$

ya da eşdeğer olarak

$$p^0 + q^0 = p^{0'} + q^{0'}, \tag{5.6}$$

$$p + q = p^{'} + q^{'}. \tag{5.7}$$

Bunlar rölativistik parçacık dinamiği için korunum denklemleridir. Klasik durumda ilgili korunum denklemleri şöyledir;

$$|p|^2 + |q|^2 = \left|p^{'}\right|^2 + \left|q^{'}\right|^2, \tag{5.8}$$

$$p + q = p^{'} + q^{'}. \tag{5.9}$$

$a(p,q,w)$ fonksiyonu momentum uzayında p ve $p\prime$ (q ve $q\prime$) arasındaki mesafeyi verir. Rölativistik olmayan, Newtonian, klasik durumda ise benzer fonksiyon

$$a_{cl}(p,q,w) = w\cdot(q-p) \tag{5.10}$$

yapısına sahiptir. Denklem (5.3) te a yerine a_{cl} yazarsak klasik Boltzmann çarpışma operatörünü elde ederiz (saçılma çekirdeğini göz ardı edersek). (5.3) çarpışma operatörünün başka gösterimleri de mevcuttur (Strain 2011). Rölativistik Boltzmann denkleminin klasik çözümleri $c \to \infty$ için çalışılmıştır ve bu çözümlerin limitinin klasik Boltzmann denklemini sağladığı ispat edilmiştir.

Önceki çalışma, başlangıç verileri genel olduğundan, daha geneldir, diğeri ise vakuma yakın veriler ile ele alınmıştır. Sonraki sonuç daha güçlüdür çünkü $c \to \infty$ için söz konusu limitin zamana göre düzgün olduğu gösterilmiştir.

Klasik Boltzmann denklemlerinin çözümlerinin varlığına dair temel sonuç, renormalize çözümlerin varlığını ispatlayan Diperna and Lions (1989) ve Dudynski and Ekiel-Jezewska (1992) tarafından elde edilmiştir. Klasik çözümle ilgili olarak, Illner and Shinbrot (1984) vakuma yakın başlangıç verileri için rölativistik olmayan Boltzmann denkleminin global çözümlerinin varlığını göstermişlerdir. Glassey (2006) teknik bir çalışmada rölativistik durumda vakuma yakın veriler için global varlığı (existence) ispatlamıştır. Burada diferensiyel kesit üzerinde sadece azalma ve integrallenebilme koşullarına ihtiyacı vardır. Ancak bunlar fiziksel bakış açısından tamamiyle tatmin edici değildir. Diferansiyel kesit üzerine daha kısıtlayıcı kesme (cut-off) kabulleri altında Strain (2010) farklı bir ispat yapmıştır. Homojen rölativistik Boltzmann denklemi için küçük başlangıç verilerine göre global varlık teoremi, sınırlı diferensiyel kesit varsayımı altında Noutchegueme and Tetsadjio (2003) de gösterilmiştir. Dengeye yakın başlangıç verileri için klasik çözümlerin global varlığı Glassey and Strauss (1993) tarafından diferensiyel kesitte bazı varsayımlar kullanılarak ispatlanmıştır. Strain (2010) ise varlığı "yumuşak potansiyeller" durumunda göstermiştir. Dengeye yakınsama oranları Glassey and Strauss (1993) ve Strain (2010) de verilmiştir. Rölativistik olmayan durumda, benzer sonuçlar için Ukai (1974), Shizuta (1983), Nishida and Imai (1976) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Çarpışma operatörü $Q(f,g)$ şu şekilde yazılabilir

$$Q(f,g) = Q^{+}(f,g) - Q^{-}(f,g).$$

Burada Q^{+} ve Q^{-} sırasıyla kazanç ve kayıp terimleridir. Eğer kayıp terimi silinirse sadece kazanç terimli Boltzmann denklemi elde edilir. Yukarıda bahsedilen, küçük veri kullanılarak elde edilen sonuçlar için ispat metotları sadece-kazanç-terimli denklemler üzerine yoğunlaşmıştır ve bunlar çözüldüğü zaman kayıp terimini eklemek kolaydır. Andreasson et al. (2004) de kazanç terimli klasik ve rölativistik Boltzmann denklemlerinin trivial verilerin küçük bir komşuluğuna sınırlanmayan başlangıç verileri için patlama yaptığı (blow-up) gösterilmiştir. Dolayısıyla, eğer sınırlandırılmamış veri için klasik çözümlerin global varlığının ispatı verilecekse, bu durumda tam çarpışma operatörünü kullanmak gerekmektedir.

Kazanç terimi, momentum değişkenine göre güzel bir regülerleştirme özelliğine sahiptir. Genel olarak regülerleştirme (regülarizasyon) teorisi, çözüm kümesinin sınırlandırılarak daha iyi bir çözüme ulaşılabileceği fikrine dayanır. Bu yaklaşımda kötü konulmuş problemleri çözebilmek için problemlere çeşitli varsayımlar ve kısıtlamalar eklenir. Örneğin en küçük kareler metodu regülarizasyonun çok basit bir şekli olarak görülebilir. Andreasson (1996) da verilen $f \in L^{2}(\mathbb{R}^{3})$ ve $g \in L^{1}(\mathbb{R}^{3})$, $f, g > 0$ için

$$\left\| Q^{+}(f,g) \right\|_{H^{1}\left(\mathbb{R}_{p}^{3}\right)} \leq C \left\| f \right\|_{L^{2}\left(\mathbb{R}_{p}^{3}\right)} \left\| g \right\|_{L^{1}\left(\mathbb{R}_{p}^{3}\right)} \tag{5.11}$$

olduğu, saçılma çekirdeği üzerindeki bazı teknik gereklilikler altında ispatlanmıştır. Burada H^s Sobolev uzayıdır. Bu regülerleştirme sonucu klasik durum için ilk olarak Lions (1994) tarafından ispatlanmıştır. Verilen ispat, Fourier integral operatörler teorisine, durgun faz metoduna dayanır ve rölativistik durumda çok farklı olan çarpışma geometrisinin dikkatli analizine ihtiyaç duyar. Klasik ve rölativistik durumlarda basitleştirilmiş ispatlar Wennberg (1994, 1997) de verilmiştir.

Regülerleştirme teoreminin bir çok uygulaması vardır. Önemli bir uygulaması, geniş zamanlarda çözümlerin dengeye yakınsamasının ispatıdır. Daha açık olarak, Lions regülerleştirme teoremini kullanarak periyodik sınır koşullu klasik Boltzmann denkleminin çözümlerinin, zaman sonsuza giderken L^1 de bir Maxwellian globaline

$M = e^{-\alpha|p|^2+\beta p+\gamma}$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^3$

yakınsadığını ispat etmiştir. Bu sonuç ilk olarak Arkeryd (1992) tarafından standart olmayan analiz kullanılarak elde edilmiştir. Yakınsamanın, sonsuza giden bir zaman dizisi boyunca oluştuğu unutulmamalıdır. Diğer taraftan burada limitin tek ve diziye bağlı olup olmadığı bilinmemektedir. Rölativistik durumda, rölativistik Maxwellian'a yakınsama ile ilgili benzer bir problem, Jüttner denge çözümü,

$J = e^{-\alpha\sqrt{1+|p|^2}+\beta p+\gamma}$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^3$ ve $\alpha > |\beta|$

Glassey and Strauss (1993, 1995) tarafından çalışılmıştır. Periyodik durumda, bir Jüttner çözümüne yakın başlangıç verileri için çeşitli fonksiyon uzaylarında yakınsaklığı ispatlamışlardır. Rölativistik kazanç terimi için regülerleştirme teoremi elde edince, Lions metodunu takip etmek ve keyfi başlangıç verileri için global Jüttner çözümüne yakınsaklığı ispatlamak kolay bir iştir. Ayrıca Desvillettes and Villani (2005) rölativistik olmayan durumda dengeye yakınsama oranını detaylı olarak çalışmışlardır. Rölativistik durum için benzer bir çalışma henüz yapılmamıştır.

Minkowski uzayında rölativistik Boltzmann denklemi üzerine daha fazla bilgi için Cercignani and Kremer (2002), de Groot et al.(1980), Glassey (1996), Synge (1957) ve rölativistik olmayan durum için Villani (2011), Glassey (1996), Cercignani et al. (1988) e bakılabilir.

5.2 VLASOV-MAXWELL VE VLASOV-POISSON SİSTEMLERİ

Çarpışmaların çok az ve etkileşimin sadece parçacıkların yükleriyle olduğu parçacıklar topluluğundan oluşan bir "çarpışmasız plazma"yı ele alalım. Basitlik için plazmanın tek çeşit parçacıktan oluştuğunu varsayalım. Buna rağmen aşağıdaki sonuçlar birkaç çeşit parçacık türünden oluşan plazmalar içinde geçerlidir. Burada parçacık durgun kütlesi ve parçacık yükü bire normalize edilmiştir. Kinetik çerçevede, çarpışmasız plazmayı modellemek için en genel denklemler kümesi, rölativistik Vlasov-Maxwell sistemidir:

$$\partial_t f + \widehat{v} \cdot \nabla_x f + (E(t,x) + \widehat{v} \times B(t,x)) \cdot \nabla_v f = 0, \tag{5.12}$$

$$\partial_t E + j = c\nabla \times B,\ \nabla \cdot E = \rho, \tag{5.13}$$

$$\partial_t B = -c\nabla \times E,\ \nabla \cdot B = 0. \tag{5.14}$$

Yurada verilen sistemde momentum için p yerine v gösterimi kullanılmıştır. E ve B sırasıyla elektrik ve manyetik alanlar, $\widehat{v}$ rölativistik hızdır,

$$\widehat{v} = \frac{v}{\sqrt{1 + |v|^2 / c^2}}, \tag{5.15}$$

burada c ışık hızıdır. Yük yoğunluğu g ve akım j

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f dv,\ j = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{v} f dv \tag{5.16}$$

ile verilir. (5.12) denklemi rölativistik Vlasov denklemidir, (5.13) ve (5.14) ise Maxwell denklemleridir.

Küresel simetrik başlangıç verileri ele alındığında 3-boyutta özel bir durum ortaya çıkan böyle veriler için çözümünde küresel simetrik olacağı gösterilebilir ve ayrıca manyetik alanda sabit olmak zorundadır. O halde $\nabla \times E = -\partial_t B$ Maxwell denklemi, elektrik alanının bir ϕ potansiyelinin gradyeni olduğunu ifade etmektedir. Dolayısıyla, küresel simetrik durumda rölativistik Vlasov-Maxwell sistemi

$$\partial_t f + \widehat{v} \cdot \nabla_x f + \beta E(t,x) \cdot \nabla_v f = 0, \tag{5.17}$$

$$E = \nabla\phi,\ \Delta\phi = \rho \tag{5.18}$$

yapısını alır. Burada $\beta = 1$ ve sabit manyetik alan sıfıra eşitlenmiştir. Çünkü sabit bir manyetik alan bu durumda hiçbir farklılığa sebep olmaz. Bu sistem herhangi bir simetri kısıtlaması olmayan başlangıç verisi için anlamlıdır ve rölativistik Vlasov-Poisson sistemi olarak adlandırılır. Başka bir özel durum ise (5.12), (5.13), (5.14) te $c \to \infty$ için elde edilen

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \beta E(t,x) \cdot \nabla_v f = 0, \tag{5.19}$$

$$E = \nabla\phi,\ \Delta\phi = \rho \tag{5.20}$$

sistemidir. Burada $\beta = 1$ dir. Bu sonucun farklı bir versiyonu Schaeffer (1986) da gösterilmiştir. Bu Vlasov-Poisson sistemidir ve $\beta = 1$ plazma durumunda itici kuvvetlere karşılık gelir. $\beta = -1$ ise çekici kuvvetlere ve bu durumda Vlasov-Poisson sistemi Newton öz-graviteli sistemi için bir model oluşturur.

Kinetik teorideki temel problemlerden biri, bir çarpışmasız gaz içinde spontane şok oluşumlarının ortaya çıkıp çıkmayacağıdır. Diğer bir deyişle, düzgün başlangıç verileri için, yukarıdaki denklemlerin çözümlerinin her zaman düzgün kalıp kalmayacağıdır.

Eğer başlangıç verisi küçük ise, yukarıdaki bütün durumlar için bu problem olumlu bir çözüme sahiptir. Büyüklüğü sınırlı olmayan başlangıç verileri için durum biraz daha karışıktır. Zamana ise global düzgün çözümler elde edebilmek için asıl mesele, momentumların supportunu kontrol edebilmektir:

$$Q(t) := \sup\left\{|v| : \exists(s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}^3\ f(s,x,v) \neq 0\right\} \text{ ve} \tag{5.21}$$

$Q(t)$ yi sürekli bir fonksiyonla sınırlandırarak, sonlu zamanda $Q(t)$ patlamasının önüne geçilebilir. Bu tür bir kontrol, düzgün çözümlerin global varlığını elde etmek için yeterlidir. Tam 3-boyutlu rölativistik Vlasov-Maxwell sistemi için, çözümlerin her zaman düzgün kalıp kalmayacağı açık bir problemdir. Bu durumda global varlık için farklı yeterli bir kriter Pallard (2005) tarafından verilmiştir ve elektromanyetik alan için $Q(t)$ ye göre yeni bir sınır gösterilmiştir. İki uzay ve üç momentum boyutlarında, Glassey ve Schaeffer (1997, 1998) $Q(t)$ nin rölativistik Vlasov-Maxwell sistemi için kontrol edilebileceğini ve böylece bu durum için düzgün çözümlerin global varlığını göstermiştir.

Rölativistik ve rölativistik olmayan Vlasov-Poisson denklemleri yapı olarak çok benzerdirler. Özellikle, her iki durumda da alan için olan denklem özdeştir. Ancak, bu iki sistemle ilgili matematiksel sonuçlar çok farklıdır. Rölativistik olmayan durumda, Batt (1977) küresel simetrik veri için olumlu bir çözüm elde etmiştir. Pfaffelmoser (1992) genel düzgün veri için ispat yapan ilk kişidir. İspatın basitleştirilmiş bir versiyonu Schaeffer (1991) tarafından verilmiştir. Pfaffelmoser

$$Q(t) \leq C(1+t)^{(51+\delta)/11}$$

sınırını elde etmiştir. Burada $\delta > 0$ keyfi olarak küçük alınabilir. Bu sınır sonradan farklı yazarlar tarafından geliştirilmiştir. $\beta = 1$ ve $\beta = -1$ için geçerli olan en kesin sınır, Horst

(1993) tarafından verilmiştir ve

$$Q(t) \leq C(1+t)\log(2+t)$$

şeklindedir. İtici kuvvetler durumunda ($\beta = 1$) Rein (1998), Vlasov-Poisson sistemi için yeni bir özdeşlik kullanarak daha iyi bir değerlendirme elde etmiştir. Bu özdeşlik Illner and Rein (1996) ve Perthame (1996) tarafından birbirinden bağımsız olarak bulunmuştur. Rein' in değerlendirmesi

$$Q(t) \leq C(1+t)^{\frac{2}{3}}$$

şeklindedir. Pfaffelmoserden bağımsız olarak ve yaklaşık aynı zamanda Lions and Perthame (1991) global varlığı ispatlamak için farklı bir metot kullanmışlardır. Bu metot genel olarak daha uygulanabilirdir. Andreasson (1997) ve Kunze and Rendall (2001) bu metotların başarı ile uygulandığı örnek çalışmalardır. Diğer yandan, yukarıda tanımlanan $Q(t)$ üzerinde güçlü çalışmalarda değerlendirmeler vermez. Rölativistik Vlasov-Poisson denklemi için, Glassey and Schaeffer (1985) $\beta = 1$ durumunda, Batt'ın yukarıda bahsedilen sonuca benzer şekilde eğer veri küresel simetrik ise $Q(t)$ nin, kontrol edilebileceğini göstermiştir. Ayrıca silindirik simetri durumunda da $Q(t)$ nin kontrol edilebildiği gösterilmiştir. Eğer $\beta = -1$ ise Glassey and Schaeffer (1985) tarafından negatif toplam enerjili küresel simetrik veri için sonlu zamanda patlamanın (blow-up) oluştuğu gösterilmiştir. Daha yeni olarak, Lemou et al. (2008) patlama çözümünün yapısını araştırmıştır. Patlamanın ultra-rölativistik gravitasyonel Vlasov-Poisson sisteminin öz-benzer çözümü tarafından belirlendiğini göstermişlerdir. Rölativistik Vlasov-Poisson sisteminin, Lorentz değişmezliğine sahip olmadığından fiziksel olmayan bir sistem olduğu unutulmamalıdır. Bu sistem bir klasik Galilei değişmez alan denkleminden ve bir rölativistik transport denkleminden (5.17) oluşan hibrit bir yapıdır. Özel olarak $\beta = -1$ durumunda, Einstein-Vlasov sisteminin özel bir hali değildir. Denklem, $\beta = 1$ durumunda, sadece küresel simetrik veri için, temel bir fiziksel denklemdir. Yukarıda bahsedilen sonuçların hepsi klasik çözümlerle ilgilidir. Zayıf çözümler için durum farklıdır, özel olarak rölativistik Vlasov-Maxwell sisteminin zayıf çözümlerinin varlığı bilinmektedir (DiPerna and Lions 1989).

Ayrıca, hem çarpışmaları hem de parçacıklar tarafından oluşturulan elektrik ve manyetik alanı hesaba katan modeller de araştırılmaktadır. Vlasov–Maxwell-Boltzmann sistemi için bir Maxwellian yakınındaki klasik çözümler Guo (2003) tarafından da elde edilmiştir.

Vlasov-Maxwell-Landau sistemi için benzer sonuçlar bir Jüttner çözümü yakınında Guo and Strain (2004) tarafından gösterilmiştir.
Rölativistik Vlasov-Maxwell sistemi ve Vlasov-Poisson sistemi üzerine daha fazla bilgi için Glassey (1996) in kitabına ve Rein (2006) makalesine bakılabilir.

5.3 NORDSTRÖM-VLASOV SİSTEMİ

Nordström yerçekimi 1913'te tanımlanan yerçekimi teorisinin alternatifidir. Bu model maddenin bir kinetik tanımıyla birlikte ele alındığında Nordström-Vlasov sistemi elde edilir. Nordström yerçekiminde, ϕ skaler alanı gravitasyonel alanı aşağıdaki belirtilen anlamda tanımlar. Nordström-Vlasov sistemi

$$\partial_t^2\phi - \Delta_x\phi = -e^{4\phi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{f\,dp}{\sqrt{1+|p|^2}}, \tag{5.22}$$

$$\partial_t f + \widehat{p}\cdot\nabla_x f - \left[(\partial_t\phi + \widehat{p}\cdot\nabla_x\phi)\,p + (1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}\nabla_x\phi\right]\cdot\nabla_p f = 0 \tag{5.23}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\widehat{p} = \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}$$

p momentumlu bir parçacığın rölativistik hızını gösterir. Her bir parçacıgın kütlesi, gravitasyonel sabit ve ışık hızı bire normalize edilmiştir. Bu sistemin bir çözümü (f,ϕ) şu şekilde yorumlanır. Uzay-zaman konformal olarak-düz metrikli

$$g_{\mu v} = e^{2\phi}diag(-1,1,1,1)$$

bir Lorentzian manifoldudur.
Bu metrikte, kütle kabuğunda tanımlı f parçacık dağılımı

$$f(t,x,p) = f(t,x,e^{\phi}p) \tag{5.24}$$

şeklinde verilir. Bu sistem ile ilgili ilk matematiksel çalışması Calogera (2003) tarafından yapılmıştır ve statik çözümlerin varlığı ispatlanmıştır. Statik çözümlerin kararlılığı Calogero, Sanchez ve Soler tarafından 2009 da araştırılmıştır. Yerçekiminin Nordström-Vlasov modeli fiziği doğru tanımlamamasına rağmen sistem klasik limitle Vlasov-Poisson sistemine yaklaşır. Aslında, Calogero and Lee (2004) te ışık hızı sonsuza giderken, Nordström-Vlasov sisteminin çözümü, Vlasov-Poisson sisteminin çözümü gibi eğilim gösterirler.

Cauchy problemi bir çok kişi tarafından çalışılmıştır ve genel başlangıç verisi için klasik çözümlerin global varlığı problemi bir süre açık kalmıştır. Bu problem 2006 yılında Calogero tarafından çözülmüştür. Nordström-Vlasov sistemi için başka ilginç bir sonuç da Bauer et al. (2006) da verilmiştir ve burada elektrodinamikteki dipol formülüne benzer bir radyasyon formülü elde edilmiştir.

BÖLÜM 6

VLASOV-POISSON SİSTEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER

6.1 KİNETİK DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu çalışmada durağan olmayan genel bir kinetik denklem için bir ters problem ele alınacaktır. Bu tür problemler fiziksel olarak parçacık etkileşimlerinin, saçılım göstergelerinin, radyasyon kaynaklarının tespitini ve benzeri fiziksel parametrelerin bulunmasını içermektedir.

Ω, $\mathbb{R}^{2n+1}$ $(n \geq 1)$ Euclid uzayında bir bölge olsun. $(x, v, t) \in \Omega$ değişkenleri için $x \in D$, $v \in G$, $t \in (0, T)$ olup, burada D ve G, $\mathbb{R}^n$ de sınırı C^3'ten olan bölgelerdir. Bu bölümde, Ω bölgesinde aşağıda verilmiş olan kinetik denklemin çözümünün tekliği araştırılacaktır:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) + \int_G K(x, v, v') \, u(x, v', t) \, dv' = \rho(x, t) . \tag{6.1}$$

Bu denklem genel olarak; x konum, v hız ve t zaman değişkenlerinin uzayında $u(x, v, t)$ parçacık yoğunluğunu modelize etmektedir. (6.1) denkleminde $\rho(x, t)$ bilinmeyen kaynak fonksiyonu, $K(x, v, v')$ saçılım çekirdeği olup x noktasında v yönünden $v\prime$ yönüne saçılan parçacıkların miktarını belirtmektedir, ayrıca $f = (f_1, ..., f_n)$ de bir parçacık üzerine etkiyen kuvvettir.

Problem 6.1 *(6.1) denkleminden Ω bölgesinde tanımlı $u(x, v, t)$ ve $\rho(x, t)$ fonksiyonlarını, $K(x, v, v')$, $f = (f_1, ..., f_n)$ fonksiyonlarının bilinmesi ve $u(x, v, t)$ fonksiyonunun bölgenin sınırında izinin verilmesi koşulu altında bulalım.*

Problem 1 aşırı belirgin bir problemdir. Bu nedenle onun yerine aşağıdaki belirgin problem ele alınacaktır.

Problem 6.2 *$K(x, v, v')$, $f = (f_1, ..., f_n)$ fonksiyonları ve ayrıca bölgenin sınırında $u(x, v, t)$ fonksiyonunun izi verilsin:*

$$u|_{\partial\Omega} = u_0, \tag{6.2}$$

ayrıca $\rho(x,v,t)$ *fonksiyonu her* $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ *için*

$$\left\langle \rho, \widehat{L}\eta \right\rangle = 0 \tag{6.3}$$

bağıntısını sağlasın. Buna göre (6.1) denkleminden Ω *bölgesinde tanımlı* $u(x,v,t)$ *ve* $\rho(x,v,t)$ *fonksiyonlarının belirlenmesi problemini ele alalım. Burada,*

$$\widehat{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial v_i}$$

şeklinde tanımlı bir diferensiyel operatördür.

Şimdi ispatta kullanacağımız bazı gösterimleri tanıtalım. Üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilir ve bölgenin sınırında sıfır olan reel değerli fonksiyonların kümesi:

$$\widetilde{C}_0^3 = \left\{\varphi \in C^3(\Omega),\, \varphi|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

olmak üzere aşağıda verilen iki özelliğe sahip bütün u fonksiyonlarının kümesini $\Gamma(A)$ ile göstereceğiz:

i.Her $u \in \Gamma(A)$ için bir $F \in L_2(\Omega)$ fonksiyonu vardır öyle ki her $\varphi \in \widetilde{C}_0^3$ için $\langle u, A^*\varphi\rangle = \langle F, \varphi\rangle$ ve $Au = F$ tir. Burada

$$Au = \widehat{L}Lu,\ \widehat{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial v_i}$$

ve A^* da A nın Lagrange anlamında eşleniğidir.

ii. Bir $\{u_k\} \subset \widetilde{C^3}_0$ dizisi vardır öyle ki $L_2(\Omega)$ da $k \to \infty$ için $u_k \to u$ ve $\langle Au_k, u_k\rangle \to \langle Au, u\rangle$ olur.

Teorem 6.1 *Kabul edelim ki* $f \in C^1(\Omega)$, $K(x,v,v') \in C^1\left(\overline{D} \times \overline{G} \times \overline{G}\right)$ *olsun ve aşağıdaki eşitsizlikler her* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *sağlansın:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha_1 |\xi|^2,$$

$$\alpha_1 - \frac{L_0}{2} > \alpha_2,\ L_0 = l_0 C,\ l_0 = \max_{1\leq i\leq n} \left\{ \max_{x\in\overline{D}} \int_G \int_G K_{v_i}^2(x,v,v')\,dv\,dv' \right\}. \tag{6.4}$$

Burada α_1, α_2 *pozitif sayılardır. Bu durumda Problem 2 en çok bir* (u,ρ) *çözümüne sahiptir, öyle ki* $u \in \Gamma(A)$ *ve* $\rho \in L_2(\Omega)$ *dir.*

İspat. (u,ρ), Problem 2 nin bir çözümü olsun öyle ki $\partial\Omega$ da $u=0$ ve $u\in\Gamma(A)$. Denklem (6.1) ve (6.3) koşulu $Au=0$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan $u\in\Gamma(A)$ olduğundan $\{u_k\}\subset\widetilde{C}_0^3$ dizisi vardır, öyle ki $L_2(\Omega)$ da $k\to\infty$ iken $u_k\to u$ ve $\langle Au_k,u_k\rangle\to 0$ dır. $\partial\Omega$ sınırında $u_k=0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$-2\langle Au_k,u_k\rangle = 2\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial}{\partial v_i}(Lu_k),u_{k_{x_i}}\right\rangle$$

elde edilir. En son eşitliğin sağ tarafı için aşağıdaki özdeşlikler mevcuttur:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}2\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial v_i}(Lu_k) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial v_i}\frac{\partial u_k}{\partial v_j}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial v_i}\left[\frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u_k}{\partial v_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{\partial u_k}{\partial v_i}\right]\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial v_j}\left(v_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i\frac{\partial u_k}{\partial v_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial v_j}\right)\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial v_i}\left[v_i\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2\right]+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial v_j}\left(f_i\frac{\partial u_k}{\partial v_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(f_i\frac{\partial u_k}{\partial v_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\\
&-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_i\frac{\partial u_k}{\partial v_i}\frac{\partial u_k}{\partial v_j}\right)+\int_G K_{v_i}(x,v,v')u_k(x,v',t)\,dv'\frac{\partial u_k}{\partial x_i}.
\end{aligned}\tag{6.5}$$

Eğer Ω bölgesinin geometrisi ve $\partial\Omega$ sınırında $u_k=0$ şartı dikkate alınırsa (6.5) ten

$$-\langle Au_k,u_k\rangle = J(u_k),\tag{6.6}$$

elde edilir, burada

$$J(u_k)\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial v_i}\frac{\partial u_k}{\partial v_j}+\int_G K_{v_i}(x,v,v')u_k(x,v',t)\,dv'\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)d\Omega.\tag{6.7}$$

(6.7) deki üçüncü terim için aşağıdaki değerlendirmeler yapılabilir:

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\int_G K_{v_i}(x,v,v')u_k(x,v',t)\,dv'u_{k_{x_i}}d\Omega\\
\geq\ &-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(\left(\int_G K_{v_i}(x,v,v')u_k(x,v',t)\,dv'\right)^2+u_{k_{x_i}}^2\right)d\Omega\\
\geq\ &-L_0\int_\Omega|\nabla_v u_k|^2\,d\Omega-\int_\Omega|\nabla_x u_k|^2\,d\Omega,
\end{aligned}\tag{6.8}$$

burada $l_0 = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left\{\max\limits_{x\in\overline{D}}\int\limits_G\int\limits_G K_{v_i}^2(x,v,v')dvdv'\right\}$, $L_0 = l_0 C$ dir. Ω bölgesi sınırlı ve $\partial\Omega$ üzerinde $u_k = 0$ olduğundan, teoremin varsayımları ve (6.8) eşitsizliği kullanılırsa:

$$\begin{aligned} J\left(u_k\right) &> \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla_x u_k\right|^2 d\Omega + \alpha_1\int\limits_{\Omega}\left|\triangledown_v u_k\right|^2 d\Omega - \frac{L_0}{2}\int\limits_{\Omega}\left|\triangledown_v u_k\right|^2 d\Omega - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|\triangledown_x u_k\right|^2 d\Omega \\ &\geq c\int\limits_{\Omega}\left|u_k\right|^2 d\Omega,\ c>0, \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\nabla_x u_k = \left(u_{k_{x_1}}, ..., u_{k_{x_n}}\right)$ dır. $\Gamma\left(A\right)$ nin tanımı göz önünde bulundurulursa $c\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \leq 0$ eşitsizliği elde edilir. Son olarak (6.1) denkleminden $\rho\left(x,v,t\right) = 0$ olduğu görülür. Böylelikle problemin çözümünün tekliği ispatlanmış olur. ■

6.2 VLASOV-POISSON SİSTEMİ İÇİN BİR BAŞLANGIÇ-NEUMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Öz uyumlu alan yaklaşımında düşük yoğunluklu plazmadaki elektronların ve iyonların yoğunluklarının değişimi (evrimi) aşağıdaki Vlasov-Poisson sistemiyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^-}{\partial t} + \frac{1}{m_-}\left\langle p, \nabla_x u^-\right\rangle + e\left\langle \nabla_x\varphi, \nabla_p u^-\right\rangle &= g^-\left(x,p,t\right), \\ \frac{\partial u^+}{\partial t} + \frac{1}{m_+}\left\langle p, \nabla_x u^+\right\rangle - e\left\langle \nabla_x\varphi, \nabla_p u^+\right\rangle &= g^+\left(x,p,t\right), \end{aligned}$$

$$-\triangle\varphi = 4\pi\rho,\ \ \rho = \int_{\mathbb{R}^n}\left(u^+ - u^-\right)dp$$

Burada $x = (x_1, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, ∇_x ve ∇_p sırasıyla x ve p ye göre gradyan (gradient) operatörleri; Δ, x e göre Laplace operatörü; $\left\langle .,. \right\rangle$, $\mathbb{R}^n$ de iç çarpım, m_+ ve m_- sırasıyla iyonların ve elektronların kütlesi, e elektronun yükü ve $\varphi(x,t)$ öz uyumlu alanın potansiyeli; g^-, g^+ bazı fonksiyonlardır. Bundan sonra aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır

$$v_t = \frac{\partial v}{\partial t}, v_\xi = \frac{\partial v}{\partial \xi}, v_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Vlasov-Poisson sistemi için direkt Cauchy problemi üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Zayıf çözümün varlığına dair ilk çalışma Arsen'ev (1975) tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1977 de Batt, küresel simetrik veri için global çözümün varlığını ispatlamıştır. 1981 de Horst, bu global klasik çözülebilirliği silindirik simetrik veri için genişletmiştir. 1985 yılında Bardos ve Degond global varlık teorimini "küçük" veri için ispatlamıştır. Son olarak 1989 yılında Pfaffelmoser, varlık teoremini veri üzerinde küçüklük şartı olmaksızın ispatladı. Bundan sonra 1991 yılında Horst, Lions ve Perthame tarafından aynı teoremlerin daha basit ispatları verilmiştir. Son olarak da Hwang and Velazquez (2010) bu konuda önemli sonuçlar elde etmiştir.

Diğer taraftan, fiziksel önemine rağmen sınır değer problemleri için az sayıda çalışma yapılmıştır. Zamandan bağımsız Vlasov-Poisson sistemi bir boyutlu durumda Greengard and Raviart (1990) tarafından ele alınmıştır.

Yukarıda bahsedilen bütün çalışmalar Vlasov-Poisson sistemi için direkt problemler üzerine yoğunlaşmıştır, ters problem üzerine ise literatürde çok az sayıda çalışma vardır. Bu bölümde böyle bir sistem için başlangıç-Neumann sınır değer problemine ilişkin bir ters problemin bazı şartlar altında çözümünün tekliği ve kararlılığı araştırılacaktır. Vlasov-Poisson sistemi için bu tür ters problemler ilk defa Amirov (2001) ve Gölgeleyen and Yamamoto (2014) de ele alınmıştır.

6.2.1 Ters Problemin İfadesi

İlk olarak

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : -a_i < x_i < a_i,\ a_i > 0,\ i = 1, ..., n\}$$

ve

$$\Omega = \{(x, p, t) : x \in D,\ p \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0, T)\}$$

bölgelerini ele alalım. Ayrıca v, D bölgesinin dış birim normal vektörünü göstersin. Ele alınan sistemdeki fiziksel sabitlerin varlığı önemli bir matematiksel sorun teşkil etmediği için gösterimde kolaylığı ve basitliği sağlamak açısından bütün sabitleri bire normalize ediyoruz.

Verilen $g^-(x, p, t)$ ve $g^+(x, p, t)$ için $u^-(x, p, t)$, $u^+(x, p, t)$ ve $\varphi(x, t)$ fonksiyonları

$$u_t^- + \left\langle p, \nabla_x u^- \right\rangle + \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u^- \right\rangle + \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_p u_2^- \right\rangle = 0, \tag{6.9}$$

$$u_t^+ + \left\langle p, \nabla_x u^+ \right\rangle - \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u^+ \right\rangle - \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_p u_2^+ \right\rangle = g^+, \tag{6.10}$$

$$-\Delta \varphi = 4\pi \rho, \quad \rho = \int_{\mathbb{R}^n} \left(u^+ - u^-\right) dp, \tag{6.11}$$

denklemlerini,

$$u^-\big|_{t=0} = u_0^-, \quad u^+\big|_{t=0} = u_0^+, \tag{6.12}$$

başlangıç koşullarını,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|_{\partial D\times(0,T)} &= \varphi_0, && (6.13)\\
u^{\pm}(x,p,t) &= u^{\pm}(x,p-2v\langle v,p\rangle,t),\ x\in\partial D && (6.14)
\end{aligned}$$

sınır koşullarını sağlasın.

Burada (6.14) koşulu aynasal yansıma (specular reflection) özelliği olarak adlandırılır ve fiziksel olarak bir katı cismin yüzeyinden parçacıkların regüler olarak yansıma şartını ifade etmektedir. Diğer bir ifade ile yüzeye dik olan momentum bileşeni bir parçacığın katı cisimle çarpışması sonrası sadece işaret değiştirir. Diğer taraftan tanjant komponenti değişmeden kalır. (6.13) sınır şartında φ_0 fonksiyonu pozitif olarak alınacaktır. (6.9)-(6.14) sistemi için bir direkt problem, Hwang and Velazquez (2010) de ele alınmış ve $n=3$ için sınırlı konveks bir bölgede problemin genel çözümü araştırılmıştır.

Problem 6.3 *(Ters Problem) Yukarıda verilen (6.9)-(6.14) bağıntılarını ve*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g^+}{\partial x_i\partial p_i} &= 0, && (6.15)\\
g^+(x,p,t) &= g^+(x,p-2v\langle v,p\rangle,t),\ x\in\partial D, && (6.16)\\
u^{\pm}(x,p,t) &= 0,\ (x,p,t)\in D\times(R^n\setminus G)\times(0,T) && (6.17)
\end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $u^-(x,p,t)$, $u^+(x,p,t)$, $\varphi(x,t)$ ve $g^+(x,p,t)$ fonksiyonlarının $u^+(x,p,T)$, $x\in D$, $p\in\mathbb{R}^n$ ek verisinden bulunması problemini ele alalım. Burada G, $\mathbb{R}^n$' de Lebesgue ölçülebilir bir kümedir.

Ayrıca (6.15) şartının önemini burada vurgulamak gerekir. Bazı durumlarda bilinmeyen $g^+(x,p,t)$ kaynak fonksiyonu izotropik olarak ortaya çıkar yani p' ye bağlı olmaz ve bu durumda (6.15) şartı kendiliğinden sağlanır. Bu ele alınan ters problemin aşırı belirgin olmasına sebep olur. Ters problemler teorisinde aşırı belirgin ters problem tanımı şöyle verilmektedir: eğer verideki bağımsız değişkenlerin sayısı denklemdeki bilinmeyen katsayı veya sağ taraftaki bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişken sayısını aşıyor ise o zaman bu tür ters problemlere aşırı belirgin ters problem denir. Böyle problemlerin tekliğini ispatlamak belki basit olabilir fakat çözülebilirlik şartlarının sağlanması zordur (Amirov 2001). Ayrıca aşırı belirgin ters problemlerin ifadesi gerekli minimum bilgiden daha fazlasını içerdiği için uygulama açısından da pek kullanışlı değildir. Aşırı belirgin problemin belirgin probleme indirgenme metodu Anikonov and Amirov (1983) tarafından önerilmiştir ve bilinmeyen $g^+(x,p,t)$ fonksiyonunun sınıfının genişletilmesine dayanmaktadır. Bu metoda göre $g^+(x,p,t)$ fonksiyonu sadece x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı değil, ayrıca p yönüne de özel bir şekilde bağlıdır. Daha açık olarak $g^+(x,p,t)$ nin p ye bağlılığı keyfi değildir, yani $g^+(x,p,t)$ nin bir özel diferensiyel denklemi ((6.15) denklemi) sağlaması gerekir ve bu şekilde yeni problem $g^+(x,p,t)$ ile birlikte belirgin hale dönüşür. Eğer g^+ fonksiyonu $g^+(x,p,t) = g_1(x,t) + g_2(p,t)$ şeklinde verilirse bu durumda (6.15) kendiliğinden sağlanacaktır.

Bundan sonra

$$I = \frac{1}{mesD} \int_D \psi dx$$

olarak alınacak ve aşağıda verilen notasyonlar kullanılacaktır. γ_1, $\gamma_2 > 0$ sabitlerini öyle seçelim ki

$$\int_D \psi_{x_1}^2 dx \geq \gamma_1 \int_D (\psi - I)^2 dx, \forall\psi \in H_1(D) \tag{6.18}$$

$$\int_D \psi_{p_1}^2 dp \geq \gamma_2 \int_G \psi^2 dp, \forall\psi \in \overset{\circ}{H}_1(G) \tag{6.19}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Ayrıca γ_3, $\gamma_4 > 0$ alalım öyle ki $\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_3} > 0$, $\dfrac{2\pi}{\delta\gamma_4} < \gamma_1$ ve $\alpha > \dfrac{4\pi\gamma_4 (mesG)^2}{\gamma_2}$, $M^2 < \frac{1}{\gamma_3^n}$ olsun. Bilinmeyen u^-, u^+, φ fonksiyonları için aşağıdaki şekilde bir $\mathcal{A}_{\alpha,M}$ kümesi alalım

$$A_{\alpha,M} = \left\{ \begin{array}{c} (u^-, u^+, \varphi) \in (C^2(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2 \times C^2(\overline{D} \times \times [0,T]); \\ \left|\nabla_p u^\pm\right|, \left|\nabla_p u^\pm_{p_i}\right| \leq M,\ i = 1, ..., n,\ \sum_{i,j=1}^n \varphi_{x_i x_j} \xi_i \xi_j \leq -\alpha \left|\xi\right|^2, \forall\xi \in R^n \end{array} \right\}.$$

γ_5 ve β sabitlerini sırasıyla

$$1 - \gamma_5(T-t)M^2 > 0,$$

$$\beta\left(1 - \gamma_5(T-t)M^2\right) - 4\pi\gamma_4(mesG)^2 > 0$$

olacak şekilde seçelim. Son olarak $(T-t)$,

$$\frac{\beta(T-t)}{\gamma_5} < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde yeterince küçük olsun. Aşağıdaki teorem ters problemin çözümünün tekliğini ispatlamaktadır.

Teorem 6.2 *Eğer $I = 0$ ise ters problem en çok bir $(u^-, u^+, \varphi, g^+) \in A_{\alpha,M} \times C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ çözümüne sahiptir.*

İspat. Kabul edelim ki $\left(u_1^-, u_1^+, \varphi_1, g_1^+\right)$ ve $\left(u_2^-, u_2^+, \varphi_2, g_2^+\right)$ problemin iki çözümü olsun öyle ki $\left(u_i^-, u_i^+, \varphi_i\right) \in A_{\alpha,M}$ ve $g_i^+ \in C^2(\Omega)$, $i = 1, 2$. Eğer $u^- \equiv u_2^- - u_1^-$, $u^+ \equiv u_2^+ - u_1^+$, $\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ ve $g^+ \equiv g_2^+ - g_1^+$ olarak alınırsa (u^-, u^+, φ, g^+),

$$u_t^- + \left\langle p, \nabla_x u^- \right\rangle + \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u^- \right\rangle + \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_p u_2^- \right\rangle = 0, \tag{6.20}$$

$$u_t^+ + \left\langle p, \nabla_x u^+ \right\rangle - \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u^+ \right\rangle - \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_p u_2^+ \right\rangle = g^+, \tag{6.21}$$

$$-\Delta \varphi = 4\pi\rho, \quad \rho = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(u^+ - u^-\right) dp \tag{6.22}$$

denklem sistemini,

$$u^-\big|_{t=0} = 0, \quad u^+\big|_{t=0} = 0, \quad u^+\big|_{t=T} = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right|_{\partial D \times (0,T)} = 0 \tag{6.23}$$

homojen başlangıç sınır koşullarını sağlar. (6.20) denklemi $2\beta\,(T-t)\,u^-$ile çarpılırsa

$$\beta\left(u^-\right)^2 + 2\beta\,(T-t)\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}\left(u_2^-\right)_p, u^- + d_1\left(u^-\right) = 0 \tag{6.24}$$

elde edilir, burada

$$\begin{aligned} d_1\left(u^-\right) &= \left[\beta\,(T-t)\left(u^-\right)^2\right]_t + \beta\,(T-t)\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\left(u^-\right)^2\right]_{x_i} \\ &\quad +\beta\,(T-t)\sum_{t=1}^{n}\left[\varphi_1 x_i\left(u^-\right)^2\right]_{p_i} \\ : &= J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. (6.21) denklemine,

$$2\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^+ \frac{\partial}{\partial p_i}$$

operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & 2\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^+ \left[\left(u_t^+ + \sum_{i=1}^{n} p_i u_{x_i}^+ - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1x_i} u_{p_i}^+ - \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(u_2^+\right)_{p_i}\right)_{p_j}\right] \\ = \;& 2\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^+ g_{p_j}^+ \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$2\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^{+} u_{tp_j}^{+} = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(u_{x_j}^{+}+u_{t}^{+}\right)_{p_j}+\left(u_{x_j}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{t}-\left(u_{t}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_j}\right] \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}2\sum_{i,j=1}^{n} p_i u_{x_j}^{+} u_{x_tp_j}^{+} &= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(p_i u_{x_j}^{+}u_{x_i}^{+}\right)_{p_j}+\left(p_i u_{x_j}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_i}\right.\\ &\quad\left.-\left(p_i u_{x_i}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_j}\right]\end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}2\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{1x_i} u_{x_j}^{+} u_{p_tp_j}^{+} &= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\varphi_{1x_i} u_{x_j}^{+}u_{p_i}^{+}\right)_{p_j}+\left(\varphi_{1x_i} u_{x_j}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{p_i}\right.\\ &\quad\left.-\left(\varphi_{1x_i} u_{p_i}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_j}+\varphi_{1x_ix_j}u_{p_i}^{+}u_{p_j}^{+}\right]\end{aligned} \tag{6.27}$$

özdeşlikleri ve (6.15) koşulundan

$$\begin{aligned}&\left|\nabla_x u^{+}\right|^2-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\varphi_1\right)_{x_ix_j}u_{p_i}^{+}u_{p_j}^{+}-2\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_j}^{+}\varphi_{x_i}\left(u_2^{+}\right)_{p_ip_j}\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{1x_i}\left(u_{p_i}^{+}\right)^2\right)_{x_i}+d_2\left(u^{+}\right)\\ =\;& 2\sum_{j=1}^{n}\left(u^{+}g_{p_j}^{+}\right)_{x_j}\end{aligned} \tag{6.28}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}d_2\left(u^{+}\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\left(u_{x_j}^{+}u_{t}^{+}\right)_{p_j}+\left(u_{x_j}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{t}-\left(u_{t}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_j}\right)\\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(p_iu_{x_j}^{+}u_{x_i}^{+}-\varphi_{1x_i}u_{x_j}^{+}u_{p_i}^{+}\right)_{p_j}-\left(\varphi_{1x_i}u_{x_j}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{p_i}\right.\\ &\quad\left.+\left(p_iu_{x_j}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_i}-\left(p_iu_{x_i}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_j}\right)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\varphi_{1x_i}u_{p_i}^{+}u_{p_j}^{+}\right)_{x_j}\\ &:=\sum_{j=1}^{9}I_k\end{aligned}$$

dır. Eğer (6.22) denklemi φ ile çarpılırsa

$$\left|\nabla_x\varphi\right|^2+d_3\left(\varphi\right)=4\pi\varphi\int_{\mathbb{R}^n}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp \tag{6.29}$$

bulunur. Burada

$$d_3\left(\varphi\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_i}\varphi\right)_{x_i}$$

olur. Ayrıca

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_i}\left(u_2^-\right)_{p_i}u^-\right)\geq-\frac{1}{\gamma_5}\left|\nabla_x\varphi\right|^2-\gamma_5M^2\left(u^-\right)^2, \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^+\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_{x_j}\left(u_2^+\right)_{p_ip_j}\right) &= 2\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^+\left(u_2^+\right)_{p_ip_j}\\ &\leq \frac{1}{\gamma_3}\left|\nabla_x\varphi\right|^2+\gamma_3\left|\nabla_xu^+\right|^2M^2n, \end{aligned}\tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}4\pi\varphi\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u^+-u^-\right)dp &\leq \frac{2\pi}{\gamma_4}\varphi^2+2\pi\gamma_4\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u^+-u^-\right)dp\right)^2\\ &\leq \frac{2\pi}{\gamma_4}\varphi^2+4\pi\gamma_4 mesG\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\left(u^+\right)^2-\left(u^-\right)^2\right)dp,\end{aligned}\tag{6.32}$$

değerlendirmeleri sırasıyla (6.24), (6.28) ve (6.29) de kullanılır ve $\mathcal{A}_{\alpha,M}$ kümesinin tanımı dikkate alınırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\beta\left(u^-\right)^2-\frac{1}{\gamma_5}\beta\left(T-t\right)\left|\nabla_x\varphi\right|^2-\gamma_5\beta\left(T-t\right)M^2\left(u^-\right)^2+d_1\left(u^-\right)\leq 0, \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}&\left|\nabla_xu^+\right|^2+\alpha\left|\nabla_pu^+\right|^2-\frac{1}{\gamma_5}\left|\nabla_x\varphi\right|^2-\gamma_5M^2n\left|\nabla_xu^+\right|^2\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_1x,\left(u_{p_i}^+\right)^2\right)_{x_i}-2\sum_{j=1}^{n}\left(u^+g_{p_i}^+\right)_{x_i}+d_1\left(u^+\right)\leq 0\end{aligned}\tag{6.34}$$

$$\left|\nabla_x\varphi\right|^2-\frac{2\Pi}{\gamma_4}\varphi^2-4\pi\gamma_4 mesG\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\left(u^+\right)^2+\left(u^-\right)^2\right)dp+d_1\left(\varphi\right)\leq 0. \tag{6.35}$$

(6.33), (6.34), (6.35) eşitsizlikleri toplanır, Ω bölgesi üzerinde integral alınır ve

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u^{\pm}\left(x,p',t\right)\right)^2dp'\right)dpdxdt\\ =&\int_{(0,T)\times D}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u^{\pm}\left(x,p',t\right)\right)^2dp'\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}dpdxdt\\ =& \; mesG\int_{\Omega}\left(u^{\pm}\left(x,p,t\right)\right)^2dpdxdt\end{aligned}\tag{6.36}$$

eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\beta\left(1-\gamma_5\left(T-t\right)M^2\right)-4\pi\gamma_4\left(mesG\right)^2\right)\left(u^-\right)^2 d\Omega \\
&+\left(1-\gamma_3 M^2 n\right)\int_{\Omega}\left|\nabla_x u^+\right|^2 d\Omega+\left(\alpha\gamma_2-4\pi\gamma_4\left(mesG\right)^2\right)\int_{\Omega}\left(u^+\right)^2 d\Omega \\
&+\int_{\Omega}\left(1-\frac{\beta}{\gamma_5}\left(T-t\right)-\frac{1}{\gamma_3}\right)\left|\nabla_x\varphi\right|^2 d\Omega-\frac{2\pi}{\gamma_4}\int_{\Omega}\varphi^2 d\Omega \\
&-\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(u^+ g^+_{p_j}\right)_{x_j} d\Omega+\int_{\Omega}\left(d_1\left(u^-\right)+d_1\left(u^+\right)+d_1\left(\varphi\right)\right)d\Omega\leq 0
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Burada $d\Omega = dpdxdt$, $p\in\mathbb{R}^n$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$ olup (6.37) de φ_0 fonksiyonunun pozitiflik şartı kullanılmıştır. Şimdi $d_1\left(u^-\right)$, $d_2\left(u^+\right)$ ve $d_3\left(\varphi\right)$ terimlerinin her birinin Ω bölgesi üzerinde integrallerinin sıfır olduğunu gösterelim. Bölgenin geometrisi ve (6.17) şartı dikkate alındığında $\partial G\times D\times(0,T)$ üzerinde $\dfrac{\partial u^\pm}{\partial_{x_i}}\equiv\dfrac{\partial u^\pm}{\partial t}=0$, $i=1,...,n$ olacaktır. Bu nedenle Ω üzerinde integral alındıktan sonra J_3, I_1, I_4, I_5, I_6 terimleri sıfır olur. Diğer taraftan (6.14) şartından dolayı $u^\pm$ fonksiyonları $x_i=\pm a_i$, $i=1,...,n.$ hiperdüzlemlerinde p_i ye göre çift fonksiyonlardır. J_2, I_3, I_8, I_9 terimlerinin integrallerine Gauss-Green formülü uygulanırsa bu integrallerin sıfır olduğu görülür çünkü; $x_i=\pm a_i$ hiperdüzleminde p_i ye göre integrallerin her biri tek fonksiyondur. Bu durumu daha açık olarak görmek için örneğin

$$
I_8=\sum_{j=1}^{n}\left(p_i u^+_{x_i}u^+_{p_j}\right)x_j
$$

terimini ele alalım. (6.14) şartına göre $u^+_{p_j}$ bir tek fonksiyon, $u^+_{x_i}$ ise bir çift fonksiyondur. Ayrıca $u^+_{x_i}u^+_{p_j}$ ise $x_j=\pm a_j$, $j=1,...,n$ hiperdüzlemlerinde p_j ye göre tek fonksiyon olacaktır. Bu durumda $i\neq j$ için $p_i u^+_{x_i}u^+_{p_j}$ fonksiyonu tek fonksiyon olur. Diğer taraftan $i=j$ iken I_7 ve I_8 den

$$
\sum_{i=1}^{n}\left(p_i u^+_{x_i}u^+_{p_j}\right)_{x_i}
$$

terimi elde edilir. Burada integraller çifttir, fakat $d_2(u^+)$ da bu terimler zıt işaretlidir bu da sonucun sıfır olmasına sebep olur. Ayrıca $u^\pm|_{t=0}=0$, $u^+|_{t=T}=0$ şartlarından Ω üzerinde integralleri alındığında J_1 ve I_2 terimleri sıfır olur. Son olarak $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right|_{\partial D\times(0,T)}=0$ sınır koşulu ve (6.14), (6.16) şartlarından

$$
d_3\left(\varphi\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_i}\varphi\right)_{x_i}
$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n}\left(u^{+}g_{p_j}^{+}\right)_{x_j}$$

terimleri (6.37) de sırasıyla integral alındıktan sonra sıfır olur. Böylelikle (6.37) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\beta\left(1-\gamma_5\beta\left(T-t\right)M^2\right)-4\pi\gamma_4\left(mesG\right)^2\right)\left(u^{-}\right)^2 d\Omega\\
&+\left(1-\gamma_3M^2n\right)\int_{\Omega}\left|\nabla_x u^{+}\right|^2 d\Omega+\left(\alpha\gamma_2-4\pi\gamma_4\left(mesG\right)^2\right)\int_{\Omega}\left(u^{+}\right)^2 d\Omega\\
&+\left(\delta\gamma_1-\frac{2\pi}{\gamma_4}\right)\int_{\Omega}\varphi^2 d\Omega\leq 0
\end{aligned}\tag{6.38}$$

şekline indirgenir. $\mathcal{A}_{\alpha,M}$ kümesinin tanımı dikkate alınırsa (6.38) eşitsizliğindeki her bir integralin katsayısının pozitif olduğu görülür bu da Ω bölgesinde $u^{\pm}\left(x,p,t\right)=\varphi\left(x,p,t\right)=0$ olmasını gerektrir. Son olarak, (6.10) denkleminden Ω üzerinde $g^{+}\left(x,p,t\right)=0$ elde edilir. Böylece ters problemin çözümünün tekliği ispatlanmış olur. ■

Teorem 6.2'nin ispatına benzer bir yolla verilen ek bilgiye göre, ele alınan ters problemin çözümünün karalılığı için enerji tipi bir değerlendirme yapılabilir. Burada $L_2(0,T;L^2(D\times G)$ uzayının dualinin yine kendisi olduğu göz önünde bulundurarak $H^1(0,T;L^2(D\times G)$ uzayının dualini $(H^1(0,T;L^2(D\times G))'$ ile gösterelim ve normu da

$$\left\|g^{+}\right\|_{(H^1(0,T;L^2(D\times G)))'}=\sup_{\mu\in(H^1(0,T;L^2(D\times G)))}\frac{\int_0^T(g^{+},\mu)_{L^2(D\times G)}dt}{\|\mu\|_{H^1(0,T;L^2(D\times G)}}$$

biçiminde tanımlayalım.

Kabul edelim ki $\left(u_k^{-},u_k^{+},\varphi_k,g_k^{+}\right)$, $k=1,2$, (6.9)-(6.17) sistemini sağlasın. Bu durumda aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 6.3 *Teorem 6.1 in şartları altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\begin{aligned}
&\left\|u_2^{-}-u_1^{-}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D\times G))}+\left\|u_2^{+}-u_1^{+}\right\|_{L_2(0,T;H^1(D\times G))}\\
&+\left\|\varphi_2-\varphi_1\right\|_{L_2(0,T;H^1(D))}+\left\|g_2^{+}-g_1^{+}\right\|_{(H^1(0,T;L^2(D\times G)))'}\\
\leq\ & C\Big(\left\|g_2^{-}-g_1^{-}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D\times G))}+\left\|\left(u_2^{+}-u_1^{+}\right)(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L_2(D\times G)}\\
&+\left\|\left(u_2^{+}-u_1^{+}\right)(\cdot,\cdot,0)\right\|_{H^1(D\times G)}+\left\|\left(u_2^{+}-u_1^{+}\right)(\cdot,\cdot,T)\right\|_{H^1(D\times G)}\Big).
\end{aligned}\tag{6.39}$$

Burada $C>0$ olup M, T ve Ω ya bağlıdır.

İspat. İlk olarak, $u^{-}=u_2^{-}-u_1^{-}$, $u^{+}=u_2^{+}-u_1^{+}$, $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$, $g^{-}=g_2^{-}-g_1^{-}$, $g^{+}=g_2^{+}-g_1^{+}$, $\rho=\rho_2-\rho_1$, $u_0^{-}=u_2^{-}\left(\cdot,\cdot,0\right)-u_1^{-}\left(\cdot,\cdot,0\right)$, $u_0^{+}=u_2^{+}\left(\cdot,\cdot,0\right)-u_1^{+}\left(\cdot,\cdot,0\right)$ ve

$u_T^+ = u_2^+(\cdot,\cdot,T) - u_1^+(\cdot,\cdot,T)$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
u_t^- + \left\langle p, \nabla_x u^- \right\rangle + \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u^- \right\rangle + \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_p u_2^- \right\rangle &= g^-, &(6.40)\\
u_t^+ + \left\langle p, \nabla_x u^+ \right\rangle - \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u^+ \right\rangle - \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_p u_2^+ \right\rangle &= g^+, &(6.41)
\end{aligned}
$$

$$
-\Delta\varphi = 4\pi\rho,\ \rho = \int_{\mathbb{R}^n} \left(u^+ - u^-\right) dp, \tag{6.42}
$$

$$
u^-\Big|_{t=0} = u_0^-,\ \ u^+\Big|_{t=0} = u_0^+,\ \ u^+\Big|_{t=T} = u_T^+ \tag{6.43}
$$

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial v}\bigg|_{\partial D\times(0,T)} = 0 \tag{6.44}
$$

sistemi elde edilir. (6.40) denklemi $2\beta(T-t)u^-$ ile çarpılır ve (6.30), $2ab \le a^2/\gamma_6 + \gamma_6 b^2$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\beta\left(u^-\right)^2 + \left(\beta(T-t)\left(u^-\right)^2\right)_t - \frac{1}{\gamma_5}\beta(T-t)\left|\nabla_x\varphi\right|^2\\
&-\gamma_5\beta(T-t)M^2\left(u^-\right)^2 + d_4\left(u^-\right)\\
\le\ &\frac{\beta(T-t)}{\gamma_6}\left(u^-\right)^2 + \beta(T-t)\gamma_6\left(g^-\right)^2,
\end{aligned} \tag{6.45}
$$

bulunur. Burada

$$
d_4\left(u^-\right) = \sum_{t=1}^{n}\left\{\left(\beta(T-t)p_i\left(u^-\right)^2\right)_{x_i} + \sum_{t=1}^{n}\left(\beta(T-t)\varphi_{x_i}\left(u^-\right)^2\right)_{p_i}\right\}
$$

dir. Son eşitsizlikte γ_6 yı öyle seçelimki $\lambda_1 > 0$ olsun. (6.45) eşitsizliğinin Ω üzerinde integrali alınır ve (6.14), (6.17), (6.43) şartları göz önünde bulundurulursa

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\beta - \frac{\beta(T-t)}{\gamma_6} - \gamma_5\beta(T-t)M^2\right)\left(u^-\right)^2 d\Omega - \frac{1}{\gamma_5}\beta(T-t)\left|\nabla_x\varphi\right|^2\\
\le\ &\int_\Omega \beta(T-t)\gamma_6\left(g^-\right)^2 d\Omega + \int_{D\times G}\beta T\left(u_0^-\right)^2 dpdx.
\end{aligned} \tag{6.46}
$$

olduğu görülür. Şimdi

$$
2\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^+ \frac{\partial}{\partial p_i}
$$

operatörünü (6.41) denklemine uygulayalım. Eğer (6.25)-(6.27) özdeşlikleri ve (6.31) eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\nabla_x u^+\right|^2 + \alpha\left|\nabla_p u^+\right|^2 - \frac{1}{\gamma_3}M^2 n\left|\nabla_x u^+\right|^2 + \gamma_3 M^2 n\left|\nabla_x u^+\right|^2\\
&+\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{1x_i}\left(u_{p_i}^+\right)^2\right)_{x_i} + d_5\left(u^+\right)\\
\le\ &-2\sum_{j=1}^{n}\left(u^+ g_{p_j}^+\right)_{x_j} - \sum_{j=1}^{n}\left(u_{x_i}^+ u_{p_j}^+\right)_t,
\end{aligned} \tag{6.47}
$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
d_5\left(u^+\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\left(u^+_{x_j}u^+_t\right)_{p_j} - \left(u^+_t u^+_{p_j}\right)_{x_j}\right] \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(p_i u^+_{x_j}u^+_{x_i} - \varphi_{1x_i}u^+_{x_j}u^+_{p_i}\right)_{p_j} - \left(\varphi_{1x_i}u^+_{x_j}u^+_{p_j}\right)_{p_i}\right. \\
&+ \left.\left(p_i u^+_{x_j}u^+_{p_j}\right)_{x_i} - \left(p_i u^+_{x_i}u^+_{p_j}\right)_{x_j}\right] + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\varphi_{1x_i}u^+_{p_i}u^+_{p_j}\right)_{x_j}
\end{aligned}
$$

dir. Ω üzerinde (6.47) eşitsizliğinin integrali alınıp, (6.15),(6.43) bağıntılarından ve $\mathcal{A}_{\alpha,M}$ tanımından faydalanılarak

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\left(\left(1-\gamma_3 M^2 n\right)\left|\nabla_x u^+\right|^2 + \alpha\left|\nabla_p u^+\right|^2 - \frac{1}{\gamma_3}\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)d\Omega \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_{D\times G}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(u^+_{x_j}(x,p,T)\right)^2 + \left(u^+_{p_j}(x,p,T)\right)^2\right)dxdp \\
& \frac{1}{2}\int_{D\times G}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(u^+_{x_j}(x,p,0)\right)^2 + \left(u^+_{p_j}(x,p,0)\right)^2\right)dxdp \qquad (6.48)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan (6.42) denklemi φ ile çarpılır ve (6.32) kullanılırsa

$$
\left|\nabla_x\varphi\right|^2 - \frac{2\pi}{\gamma_4}\varphi^2 - 4\pi\gamma_4 mesG\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(u^+\right)^2 + \left(u^-\right)^2\right)dp + d_3(\varphi) \leq 0 \qquad (6.49)
$$

olur. Benzer şekilde (6.49) denkleminin Ω üzerinde integrali alınıp (6.36) ve (6.44) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\left(\left|\nabla_x\varphi\right|^2 - \frac{2\pi}{\gamma_1\gamma_4}\left|\nabla_x\varphi\right|^2 - 4\pi\gamma_4\left(mesG\right)^2\left(u^-\right)^2\right. \\
& \left. - \frac{4\pi\gamma_4\left(mesG\right)^2}{\gamma_2}\left|\nabla_p u^+\right|^2\right)d\Omega \\
\leq\ & 0. \qquad (6.50)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak (6.46), (6.48) ve (6.50) eşitsizlikleri toplanarak

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\beta-\frac{\beta(T-t)}{\gamma_6}-\gamma_5\beta(T-t)M^2-4\pi\gamma_4(mesG)^2\right)\left(u^-\right)^2 d\Omega\\
&+\int_{\Omega}\left(\left(1-\gamma_3M^2n\right)\left|\nabla_x u^+\right|^2+\left(\alpha-\frac{4\pi\gamma_4}{\gamma_2}(mesG)^2\right)\left|\nabla_p u^+\right|^2\right)d\Omega\\
&+\int_{\Omega}\left(1-\frac{1}{\gamma_5}\beta(T-t)-\frac{1}{\gamma_3}-\frac{2\pi}{\gamma_1\gamma_4}\right)\left|\nabla_x\varphi\right|^2 d\Omega\\
\leq\ &\int_{\Omega}\beta(T-t)\gamma_6\left(g^-\right)^2 d\Omega+\int_{D\times G}\beta T\left(u_0^-\right)^2 dpdx\\
&+\frac{1}{2}\int_{D\times G}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(u_{x_j}^+(x,p,T)\right)^2+\left(u_{p_j}^+(x,p,T)\right)^2\right)dxdp\\
&+\frac{1}{2}\int_{D\times G}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(u_{x_j}^+(x,p,0)\right)^2+\left(u_{p_j}^+(x,p,0)\right)^2\right)dxdp
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\lambda_1\ &:\ =\beta-\frac{\beta(T-t)}{\gamma_6}-\gamma_5\beta(T-t)M^2-4\pi\gamma_4(mesG)^2,\\
\lambda_2\ &:\ =1-\gamma_3M^2n,\\
\lambda_3\ &:\ =\alpha-\frac{4\pi\gamma_4}{\gamma_2}(mesG)^2,\\
\lambda_4\ &:\ =1-\frac{1}{\gamma_5}\beta(T-t)-\frac{1}{\gamma_3}-\frac{2\pi}{\gamma_1\gamma_4},\\
\lambda_5\ &=\ \min\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\},\ \lambda_6=\max\left\{\beta(T-t)\gamma_6,\beta T,\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\lambda_5\left(\left\|u^-\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|\nabla_x u^+\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|\nabla_p u^+\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|\nabla_x\varphi\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))}^2\right)\\
\leq\ &\lambda_6\left(\left\|g^-\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|u_0^-\right\|_{L_2(D\times G)}^2+\left\|\nabla_{x,p}u_0^+\right\|_{L_2(D\times G)}^2\right.\\
&\left.+\left\|\nabla_{x,p}u_T^+\right\|_{L_2(D\times G)}^2\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edelir. Ayrıca (6.18)-(6.19) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\left\|u^-\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|u^+\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|\nabla_{x,p}u^+\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|\varphi\right\|_{L_2(0,T;L_2(D\times G))}^2+\left\|\nabla_x\varphi\right\|_{L_2(0,T;L_2(D\times G))}^2\\
\leq\ &C\left(\left\|g^-\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|u_0^-\right\|_{L_2(D\times G)}^2+\left\|\nabla_{x,p}u_0^+\right\|_{L_2(D\times G)}^2+\left\|\nabla_{x,p}u_T^+\right\|_{L_2(D\times G)}^2\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani,

$$\begin{aligned}
&\left\|u^-\right\|_{L_2(0,T;L_2(D\times G))}^2+\left\|u^+\right\|_{L_2(0,T;H^1(D\times G))}^2+\left\|\varphi\right\|_{L_2(0,T;H^1(D\times G))}^2\\
\leq\ &C\left(\left\|g^-\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|u_0^-\right\|_{L_2(D\times G)}^2+\left\|\nabla_{x,p}u_0^+\right\|_{L_2(D\times G)}^2\right.\\
&\left.+\left\|\nabla_{x,p}u_T^+\right\|_{L_2(D\times G)}^2\right) \qquad (6.51)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan (6.41) denkleminden

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^T \left(g^+,\mu\right)_{L^2(D\times G)} dt\right| &\leq \left|\int_0^T \left(u_t^+,\mu\right)_{L^2(D\times G)} dt\right| \\
&+\left|\int_0^T \left(p,\nabla_x u^+,\mu\right)_{L^2(D\times G)} dt\right| \\
&+\left|\int_0^T \left(\nabla_x\varphi_1,\nabla_p u^+,\mu\right)_{L^2(D\times G)} dt\right| \\
&+\left|\int_0^T \left(\nabla_x\varphi,\nabla_p u_2^+,\mu\right)_{L^2(D\times G)} dt\right| \\
: &= K_1+K_2+K_3+K_4
\end{aligned}
$$

yazılabilir. K_1, K_2, K_3 ve K_4 terimleri sırasıyla aşağıdaki gibi değerlendirilir:

$$
\begin{aligned}
K_1 &< \left|\int_0^T \left(u^+,\mu_t\right)_{L^2(D\times G)} dt\right| + \left|\left(u_T^+,\mu(\cdot,\cdot,T)\right)_{L^2(D\times G)}\right| \\
&+\left|\left(u_0^+,\mu(\cdot,\cdot,T)\right)_{L^2(D\times G)}\right| \\
&\leq \left\|u^+\right\|_{L_2(0,T;L_2(D\times G))}\left\|\mu_t\right\|_{L_2(0,T;L_2(D\times G))} \\
&+\left\|u_T^+\right\|_{L^2(D\times G)}\left\|\mu(\cdot,\cdot,T)\right\|_{L^2(D\times G)} \\
&+\left\|u_0^+\right\|_{L^2(D\times G)}\left\|\mu(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L^2(D\times G)} \\
&\leq C\left\|\mu\right\|_{H^1(0,T;L^2(D\times G))}(\left\|u^+\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G)}+\left\|u_T^+\right\|_{L^2(D\times G)}+\left\|u_0^+\right\|_{L^2(D\times G)}).
\end{aligned}
$$

Son eşitsizlikte iz teoreminden faydalanılmıştır:

$$
\left\|\mu(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L^2(D\times G)},\ \left\|\mu(\cdot,\cdot,T)\right\|_{L^2(D\times G)} \leq C\left\|\mu\right\|_{H^1(0,T;L^2(D\times G))}.
$$

G sınırlı bir bölge olduğundan

$$
\begin{aligned}
K_2 &\leq \left\|\left\langle p,\nabla_x u^+\right\rangle\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}\left\|\mu\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))} \\
&\leq C\left\|\left\langle p,\nabla_x u^+\right\rangle\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}\left\|\mu\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sırasıyla $\varphi_1\in C^2(\overline{D}\times[0,T])$ ve $\left|\nabla_p u_2^+\right|\leq M$ şartları dikkate alındığında

$$
\begin{aligned}
K_3 &\leq \left\|\left\langle \nabla_x\varphi_1,\nabla_p u^+\right\rangle\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}\left\|\mu\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))} \\
&\leq C\left\|\nabla_p u^+\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}\left\|\mu\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
K_4 &\leq \left\|\left\langle \nabla_x\varphi,\nabla_p u_2^+\right\rangle\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}\left\|\mu\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))} \\
&\leq C\left\|\nabla_x\varphi\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}\left\|\mu\right\|_{L^2(0,T;L^2(D\times G))}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\left\|g^{+}\right\|_{\left(H^{1}(0,T;L^{2}(D\times G))\right)'} &\leq \Big(C\left\|u^{+}\right\|_{L^{2}(0,T;H^{1}(D\times G))}\left\|\nabla_{x}\varphi\right\|_{L^{2}(0,T;L^{2}(D\times G))} \\ &\quad+\left\|u_{T}^{+}\right\|_{L^{2}(D\times G)}\left\|u_{0}^{+}\right\|_{L^{2}(D\times G)}\Big) \qquad (6.52)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada C, bölgeye ve verilen fonksiyonlara bağlı pozitif sabitlerdir. Dolayısıyla, (6.51) eşitsizliğinden (6.39) eşitsizliğini elde etmiş oluruz ki böylelikle ispat tamamlanır. ■

6.3 VLASOV-POISSON SİSTEMİ İÇİN BİR BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ

Oldukça düşük yoğunluklu plazmayla dolu bir $D\subset\mathbb{R}^{n}$ bölgesini düşünelim. Vlasov'un önerdiği plazma modelinde iyonlar ve elektronlar için dağılım fonksiyonları aşağıdaki sistemi sağlar (Samarskii, 1980):

$$\begin{aligned} l_{\pm}^{\varphi}u^{\pm} &\equiv \frac{\partial u^{\pm}}{\partial t}+\frac{1}{m_{\pm}}\left\langle p,\nabla_{x}u^{\pm}\right\rangle \mp e\left\langle \nabla_{x}\varphi,\nabla_{p}u^{\pm}\right\rangle = g^{\pm}\left(x,p,t\right), \\ -\Delta\varphi &= 4\pi\rho,\ \rho=\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp. \qquad (6.53)\end{aligned}$$

Burada $x\in D$, $p\in\mathbb{R}^{n}$, $t>0$, $u^{+}\left(u^{-}\right)$ faz uzayındaki iyonların (elektronların) dağılım fonksiyonu, m_{+} (m_{-}) iyon (elektron) kütlesi, e elektron yükü ve φ elektrik alan potansiyelidir. Aşağıdaki ters problemin çözülebilirliğini araştıracağız.

Problem 6.4 $\Omega=\left\{(x,\rho,t):x\in D,\ p\in\mathbb{R}^{n},\ t\in(0,T)\right\}$ *bölgesinde tanımlanan (6.53) bağıntılarını ve*

$$u^{\pm}\mid_{\partial\Omega}=u_{0}^{\pm},\quad \varphi\mid_{\partial D\times(0,T)}=\varphi_{0} \qquad (6.54)$$

şartlarını sağlayan $u^{\pm}$, g^{-}, φ fonksiyonlarının bulunması problemini ele alalım. Burada g^{-} fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2}g^{-}}{\partial x_{i}\partial p_{i}}=0 \qquad (6.55)$$

diferensiyel denklemini sağlamaktadır ve ayrıca (6.53) de g^{+} bilinen bir fonksiyondur.

$\gamma_{1},\gamma_{2},\gamma_{3}>0$ sayılarını sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler sağlanacak şekilde seçelim:

$$\int_{D}\varphi_{x_{1}}^{2}dx\geq\gamma_{1}\int_{D}\varphi^{2}dx,\ \forall\varphi\in\overset{\circ}{H}_{1}\left(D\right),$$

$8\pi/\gamma_2 < \gamma_1,$

$$\int_G \varphi_{p_1}^2 dG \geq \gamma_3 \int_D \varphi^2 dG,\ \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}_1(D).$$

Burada $G \subset \mathbb{R}^n$, Lebesgue ölçülebilir sınırlı bir kümedir. Ayrıca $\alpha > 4\pi\gamma_2/\gamma_3$, $M < m\_ne/32$ ve $\Re_{\alpha,M}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan $(u^{\pm}, \varphi)$ nin oluşturduğu bir küme olsun:

$$u^{\pm} \in C^2(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \varphi \in C^2 D;$$

$$|\nabla_p u^{\pm}| \leq M, \quad \left|\nabla_p u_{p_i}^{-}\right| < M, \quad p \notin G \text{ için } u^{\pm} = 0;$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{x_i x_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha |\xi|^2.$$

Son olarak,

$$1(T-t) M^2 e\gamma_4 > 0$$

$$\beta\left(1 - \gamma_4 (T-t) eM^2\right) - 4\pi\gamma_2 \text{emes} G > 0$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde γ_4 ve β sabitlerini seçelim. Ayrıca $(T-t)$, $\beta(T-t)/\gamma_4 < 3/8$ olacak şekilde yeterince küçük olsun.

Teorem 6.4 *Yukarıda belirtilen koşular altında (6.53) in en çok bir $(u^{\pm}, \varphi, g^{-})$ çözümü vardır, öyle ki; $(u^{\pm}, \varphi) \in \Re_{\alpha,M}$ ve $g^{-} \in C^2(\Omega)$ dır.*

İspat. $\left(u_1^{\pm}, \varphi_1, g_1^{-}\right)$ ve $\left(u_2^{\pm}, \varphi_2, g_2^{-}\right)$, (6.53)-(6.55) sistemini sağlayan iki vektör fonksiyonu olsun öyle ki; $\left(u_i^{\pm}, \varphi_i\right) \in \Re_{\alpha,M}$ ve $g_i^{-} \in C^2(\Omega)$, $i = 1, 2$. Eğer $u^{\pm} = u_2^{\pm} - u_1^{\pm}$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ve $g^{-} = g_2^{-} - g_1^{-}$ olarak alınırsa

$$\ell_{\pm}^{\varphi_1} u_1^{\pm} \equiv \frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial t} + \frac{1}{m_{\pm}} \left\langle p, \nabla_x u_1^{\pm} \right\rangle \mp e \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u_1^{\pm} \right\rangle = g_1^{\pm}(x, p, t),$$

$$\ell_{\pm}^{\varphi_2} u_2^{\pm} \equiv \frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial t} + \frac{1}{m_{\pm}} \left\langle p, \nabla_x u_2^{\pm} \right\rangle \mp e \left\langle \nabla_x \varphi_2, \nabla_p u_2^{\pm} \right\rangle = g_2^{\pm}(x, p, t)$$

ve

$$\begin{aligned} \ell_{\pm}^{\varphi_2} u_2^{\pm} - \ell_{\pm}^{\varphi_1} u_1^{\pm} \quad \equiv \quad & \frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial t} - \frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial t} + \frac{1}{m_{\pm}} \left(\left\langle p, \nabla_x u_2^{\pm} \right\rangle - \left\langle p, \nabla_x u_1^{\pm} \right\rangle \right) \\ & \mp e \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u_2^{\pm} \right\rangle \end{aligned}$$

olup

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t} + \frac{1}{m_{\pm}} \left\langle p, \nabla_x u^{\pm} \right\rangle \mp e \left\langle \nabla_x \varphi_1, \nabla_p u^{\pm} \right\rangle \mp e \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_p u_2 \right\rangle = g^{\pm}$$

denklemi elde edilir. O halde $(u^{\pm},\varphi,g^{-})$ fonksiyonları

$$l_{\pm}^{\varphi_1}u^{\pm}\mp e\left\langle \nabla_x\varphi,\nabla_p u_2^{\pm}\right\rangle = g^{\pm}, \tag{6.56}$$

$$-\Delta\varphi = 4\pi\rho,\ \rho=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp,\ g^{+}=0, \tag{6.57}$$

sistemini ve (6.54) şartının homojen versiyonunu sağlar.
u^{-} fonksiyonu için (6.56) denklemine $2\sum\limits_{j=1}^{n}u_{x_i}^{-}\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{\partial}{\partial_{p_j}}\left[u_t^{-}+\frac{1}{m_-}\sum_{i=1}^{n}p_iu_{x_i}^{-}+e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{1x_i}u_{p_i}^{-}+e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}u_{2p_i}^{-}\right]\\
=&\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}u_{tp_j}^{-}+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{\partial}{\partial_{p_j}}\left(\frac{1}{m_-}\sum_{i=1}^{n}p_iu_{x_i}^{-}\right)+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{\partial}{\partial_{p_j}}\left(e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{1x_i}u_{p_i}^{-}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{\partial}{\partial_{p_j}}\left(e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}u_{2p_i}^{-}\right)\\
=&\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}u_{tp_j}^{-}+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{1}{m_-}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(p_iu_{x_i}^{-}\right)+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}e\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\varphi_{1x_i}u_{p_i}^{-}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}e\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\varphi_{x_i}u_{2p_i}^{-}\right)\\
=&\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}u_{tp_j}^{-}+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{1}{m_-}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_j}\left(p_i\right)u_{x_i}^{-}+p_i\frac{\partial}{\partial p_j}\left(u_{x_i}^{-}\right)\right]\\
&+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}e\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\varphi_{1x_i}\right)u_{p_i}+\varphi_{1x_i}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(u_{p_i}^{-}\right)\right]\\
&+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}e\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\varphi_{x_i}\right)u_{2p_i}+\varphi_{x_i}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(u_{2p_i}^{-}\right)\right]\\
=&\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}u_{tp_j}^{-}+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{1}{m_-}u_{x_j}^{-}+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\frac{1}{m_-}\sum_{i=1}^{n}p_iu_{x_ip_j}^{-}\\
&+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{1x_i}u_{p_ip_j}^{-}+\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}u_{2p_ip_j}^{-}\\
=&\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}^{-}u_{tp_j}^{-}+\frac{1}{m_-}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{x_j}^{-}\right)^2+\frac{1}{m_-}\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_j}^{-}p_iu_{x_ip_j}\\
&+e\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\varphi_{1x_i}u_{p_ip_j}^{-}+e\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_j}^{-}\varphi_{x_i}u_{2p_ip_j}^{-}
\end{aligned}$$

sağlanır. Diğer taraftan herhangi $a\left(x,y,z\right),\ u\left(x,y,z\right)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
2au_xu_{yz} &= \left(au_xu_y\right)_z+\left(au_xu_z\right)_y-\left(au_yu_z\right)_x-a_zu_xu_y\\
&\quad -a_yu_xu_z+a_xu_yu_z,
\end{aligned}$$

formülü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
2p_iu^-_{x_j}u^-_{x_ip_j} &= \left(p_iu^-_{x_j}u^-_{x_i}\right)_{p_j} + \left(p_iu^-_{x_j}u^-_{p_j}\right)_{x_i} - \left(p_iu^-_{x_i}u^-_{p_j}\right)_{x_j}, \ (i \neq j) \\
2p_iu^-_{x_i}u^-_{x_ip_j} &= 2\left(p_ju^-_{x_j}u^-_{x_j}\right)_{p_j} + \left(p_ju^-_{x_j}u^-_{p_j}\right)_{xj} - \left(p_ju^-_{x_j}u^-_{p_j}\right)_{x_j} \\
&\quad -p_{jxj}u^-_{x_j}u^-_{x_j} - p_{jxj}u_{xj}u_{pj} + p_{jxj}u_{xj}u_{pj} \\
&= \left(p_ju^{-2}_{xj}\right)_{p_j} - u^{-2}_{x_j}, \ (i = j) \\
2\varphi_{1x_i}u^-_{x_j}u^-_{p_ip_j} &= \left(\varphi_{1x_i}u^-_{x_j}u^-_{p_i}\right)_{p_j} + \left(\varphi_{1x_i}u^-_{x_j}u^-_{p_j}\right)_{p_i} - \left(\varphi_{1x_i}u^-_{p_i}u^-_{p_j}\right)_{x_j} \\
&\quad +\varphi_{1x_ix_j}u^-_{p_i}u^-_{p_j}
\end{aligned}
$$

özdeşliklikleri yazılabilir. O halde

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{j=1}^{n} u^-_{x_j}u^-_{tp_j} + \frac{2}{m_-}\left|\nabla_x u^-\right|^2 + \frac{1}{m_-}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(p_iu^-_{x_j}u^-_{x_i}\right)_{p_j} + \left(p_iu^-_{x_j}u^-_{p_j}\right)_{x_i}\right. \\
& \left. - \left(p_iu^-_{x_i}u^-_{p_j}\right)_{x_j}\right] + \frac{1}{m_-}\sum_{j=1}^{n}\left[p_j\left(u^-_{x_j}\right)^2_{p_j} - u^{-2}_{x_j}\right] \\
& +e\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\varphi_{1x_i}u^-_{x_j}u^-_{p_i}\right)_{p_j} + \left(\varphi_{1x_i}u^-_{x_j}u^-_{p_j}\right)_{p_i} - \left(\varphi_{1x_i}u^-_{p_i}u^-_{p_j}\right)_{x_j} + \left(\varphi_{1x_ix_j}u^-_{p_i}u^-_{p_j}\right)\right] \\
& +2e\sum_{i,j=1}^{n} u^-_{x_j}\varphi_{x_i}u^-_{2p_ip_j} \\
= \ & \frac{1}{m_-}\left|\nabla_x u^-\right|^2 + e\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{1x_ix_j}u^-_{p_i}u^-_{p_j} + 2e\sum_{i,j=1}^{n} u^-_{x_j}\varphi_{x_i}u^-_2 p_ip_j + \operatorname{div} u^- = 0
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

elde edilir, burada

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} u^- &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(p_iu^-_{x_j}u^-_{x_i} + \varphi_{1x_i}u^-_{x_j}u^-_{p_i}\right)_{p_j} + \left(\varphi_{x_i}u^-_{x_j}u^-_{p_j}\right)_{p_i} + \left(p_iu^-_{x_j}u^-_{p_i}\right)_{x_i} \\
&\quad - \left(p_iu^-_{x_i}u^-_{p_j} + \varphi_{1x_i}u^-_{p_i}u^-_{p_j}\right)_{x_j} + \sum_{j=1}^{n}(u^-_{x_j}u^-_t)_{p_j} + (u^-_{x_j}u^-_{p_j})_t - (u^-_t u^-_{p_j})_{x_j}
\end{aligned}
$$

dir. Şimdi u^+ fonksiyonu için (6.56) de verilen denklemi $2\beta\,(T-t)\,u^+$ ile çarpalım;

$$
\left[u^+_t + \frac{1}{m_+}\sum_{i=1}^{n} p_iu^+_{x_i} - e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{1x_i}u^+_{p_i} - e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}u^+_{2p_i}\right]2\beta\,(T-t)\,u^+ = g^+,
$$

$$
\begin{aligned}
& 2\beta\,(T-t)\,u^+u^+_t + 2\beta\,(T-t)\,u^+\frac{1}{m_+}\sum_{i=1}^{n} p_iu^+_{x_i} - 2\beta\,(T-t)\,u^+e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{1x_i}u^+_{p_i} \\
& -2\beta\,(T-t)\,u^+e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}u^+_{2p_i} = 0
\end{aligned}
$$

ve dolayısıyla

$$\left(\beta\left(T-t\right)\left(u^{+}\right)^{2}\right)_{t}+\beta\left(u^{+}\right)^{2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m_{+}}p_{i}\left(u^{+}\right)^{2}\right)_{x_{i}}-e\left(\varphi_{1x_{i}}\left(u^{+}\right)^{2}\right)_{p_{i}}$$
$$-2\beta\left(T-t\right)u^{+}e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_{i}}u_{2p_{i}}^{+}=0$$

bulunur. Böylelikle

$$\beta\left(u^{+}\right)^{2}-2\beta\left(T-t\right)e\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_{i}}u_{2p_{i}}^{+}u^{+}+\operatorname{div}u^{+}=0, \tag{6.59}$$

$$\operatorname{div}u^{+}=\left(\beta\left(T-t\right)\left(u^{+}\right)^{2}\right)t+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_{+}}\left(p_{i}\left(u^{+}\right)^{2}\right)_{x_{i}}-e\left(\varphi_{1x_{i}}\left(u^{+}\right)^{2}\right)_{p_{i}}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (6.57) denklemini φ ile çarparsak, açık olarak

$$-\varphi\Delta\varphi=4\pi\varphi\rho=4\pi\varphi\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp,$$
$$-\varphi\left(\varphi_{x_{1}x_{1}}+\varphi_{x_{2}x_{2}}+...+\varphi_{x_{n}x_{n}}\right)=4\pi\varphi\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp,$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\varphi\varphi_{x_{i}x_{i}}=4\pi\varphi\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp,$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_{i}}\varphi\right)_{x_{i}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_{i}}\right)^{2}=4\pi\varphi\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp$$

olduğu görülür. Yani

$$\left|\nabla_{x}\varphi\right|^{2}+\operatorname{div}\varphi=4\pi\varphi e\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp,\ \operatorname{div}\varphi=-\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_{i}}\varphi\right)_{x_{i}} \tag{6.60}$$

denklemi bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}2ab &\leq a^{2}+b^{2},\ 2ab\leq\frac{a^{2}}{8}+8b^{2},\\ \left|\langle f,g\rangle\right|^{2} &\leq \left\|f\right\|^{2}\left\|g\right\|^{2},\ \left(\int_{\mathbb{R}^{n}}f\left(x\right)dp\right)^{2}\leq\int_{\mathbb{R}^{n}}f^{2}dp\int_{\mathbb{R}^{n}}dp\end{aligned}$$

eşitsizlikleri kullanılarak aşağıdaki değerlendirme yapılabilir:

$$\begin{aligned}4\pi\varphi e\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp &\leq \frac{2\pi}{\gamma_{2}}\varphi^{2}e+2\pi\gamma_{2}e\left(\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp\right)^{2}\\ &\leq \frac{2\pi}{\gamma_{2}}\varphi^{2}e+2\pi\gamma_{2}mesG\int_{\mathbb{R}^{n}}\left(u^{+}-u^{-}\right)dp.\end{aligned}$$

Burada (6.36) eşitliğinden

$$4\pi\varphi e\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u^+-u^-\right)dp\le\frac{2\pi}{\gamma_2}\varphi^2e+4\pi\gamma_2 mesG\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u^+)^2-\left(u^-\right)^2dp$$

yazılır. Diğer taraftan

$$2e\sum_{i=1}^{n}u^-_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_i}u^-_{2p_ip_j}\right)=2e\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}u^-_{x_i}u^-_{2p_ip_j}\right)$$

$$\le e\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{8}\varphi^2_{x_j}+\sum_{j=1}^{n}8e\left(\sum_{i=1}^{n}u^-_{x_i}u^-_{2p_ip_j}\right)^2$$

$$=\frac{e}{8}\left|\nabla_x\varphi\right|^2+\sum_{j=1}^{n}8e\left(\sum_{i=1}^{n}u^-_{x_j}u^-_{2p_ip_j}\right)^2$$

$$\le\frac{e}{8}\left|\nabla_x\varphi\right|^2+8e\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(u^-_{x_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(u^-_{2p_ip_j}\right)^2\right)$$

$$\le\frac{e}{8}\left|\nabla_x\varphi\right|^2+32e\left|\nabla_x u^-\right|^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(u^-_{2p_ip_j}\right)^2 \tag{6.61}$$

olduğu görülür. (6.58)-(6.60) denklemleri toplanırsa

$$\frac{1}{m_-}\left|\nabla_x u^-\right|^2+e\alpha\left|\nabla_p u^-\right|^2-\frac{e}{8}\left|\nabla_x\varphi\right|^2-32e\left|\nabla_x u^-\right|^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(u^-_{p_ip_j}\right)^2$$

$$+\beta\left(u^+\right)^2-\beta\left(T-t\right)e\left(\frac{\left|\nabla_x\varphi\right|^2}{\gamma_4}+\gamma_4M^2(u^+)^2\right)+\left|\nabla_x\varphi\right|^2-\frac{2\pi}{\gamma_2}\varphi^2$$

$$-4\pi\gamma_2 mesG\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left((u^+)^2-\left(u^-\right)^2\right)dp+\operatorname{div}u^++\operatorname{div}u^-+\operatorname{div}\varphi\le 0$$

olur. Yani

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|\nabla_x\varphi\right|^2+\left[\beta(1-\gamma_4\left(T-t\right)eM^2)-4\pi\gamma_2 mesG\right](u^+)^2\\&+\frac{1}{m_-}-32eM^2n\left|\nabla_x u^-\right|^2+e(\alpha-\frac{4\pi\gamma_2}{\gamma_3})(u^-)^2+\operatorname{div}u^++\operatorname{div}u^-+\operatorname{div}\varphi\le 0\end{aligned} \tag{6.62}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ω üzerinde (6.62) eşitsizliğinin integrali alındığında $\varphi=u^\pm=0$ ve (6.53) ten $g^-=0$ elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

KAYNAKLAR

Adams R A and Fournier J J F (2003) *Sobolev Spaces*, Elsevier.

Amirov A (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*, VSP, Utrecht The Netherlands.

Andreasson H (2011) The Einstein-Vlasov system/kinetic theory. *Living Rev. Relativity*, 14: 4.

Anikonov Y E (2001) *Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations*, VSP, Utrecht The Netherlands.

Anikonov Y E and Amirov A (1983) A uniqueness theorem for the solution of an inverse probem for the kinetic equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 272 (6):1292-1293.

Arsen'ev A (1975) Global existence of a week solution of Vlasov's system of equations. *U.S.S.R. Comp. Math. Phys*, 15: 131-143.

Bardos C and Degond P (1985) Global existence for the Vlasov-Poisson equation in three space variables with small initial data. *Ann. Inst. Henri Poincare, Analyse non linearie*, 2: 101-118.

Batt J (1977) Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics. *J. Diff. Eqns*, 25: 342-364.

Batt J and Rein G (1993) A rigorous stability result for the Vlasov-Poisson system in three dimensions. *Anal. di Mat. Pura ed Appl*, 164: 133-154.

Bauer S, Kunze M, Rein G and Rendall A D (2006) Multipole radiation in a collisionless gas coupled to electromagnetism or scalar gravitation. *Commun. Math. Phys*. 266: 267–288.

Brezis H (2011) *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.

Binney J and Tremaine S (1987) *Galactic Dynamics*, Princeton Universty Press, Princeton.

Bostan M (2006) Boundary value problem for the N-dimensional time periodic Vlasov-Poisson system. *Math. Meth. Appl. Sci.* 29: 1801-1848.

Bouchut F (1993) Existence and uniqueness of a global smooth solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in three dimensions. *J. Funct. Anal*, 111: 239-258.

Calogero S (2003) Spherically symmetric steady states of galactic dynamics in scalar gravit. Class. *Quantum Grav*, 20: 1729–1741.

Calogero S (2006) Global classical solutions to the 3D Nordstrom-Vlasov system. *Commun Math. Phys*, 266: 343–353.

Calogero S and Lee H (2004) The non-relativistic limit of the Nordstrom–Vlasov system. *Commun. Math. Sci*. 2: 19–34.

Cercignani R and Kremer M (2002) *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications, Progress in Mathematical Physics*, Birkhauser, Basel.

Cercignani C, Illner R and Pulvirenti M (1988) *The Mathematical Theory of Dilute Gases, Applied Mathematical Sciences*, Springer, Berlin; New York.

Courant R and Hilbert D (1962) *Methods of Mathematical Physics, vol 2: Partial Differential Equations*, Interscience, New York.

Evans L C (1990) *Partial differential equations,* American mathematical society, R.I.

Degond P and Raviart P A (2006) An asymptotic analysis of the one-dimensional Vlasov-Poisson system*:* the Child-Langmuir law. *Asymptotic Analysis*. 4: 187-214.

Desvillettes L and Villani C (2005) On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems: The Boltzmann equation. *Invent. Math*, 159: 245–316.

DiPerna R J and Lions P L (1989) On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability. *Ann. Math*, 130: 321–366.

Dudynski M and Ekiel-Jezewska M L (1992) Global existence proof for the relativistic Boltzmann equation. *J. Stat. Phys*: 66: 991–1001.

Glassey R T (1996a) *The Cauchy problem in kinetic theory, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, Philadelphia, PA.

Glassey R T (1996b) *The Cauchy Problem in Kinetic Theory,* SIAM, Philadelphia.

Glassey R T (2006) Global solutions to the Cauchy problem for the relativistic Boltzmann equation with near-vacuum data. *Commun, Math. Phys*, 264: 705–724.

Glassey R T and Strauss W (1993) Asymptotic stability of the relativistic Maxwellian. *Publ. Res. Inst. Math. Sci*, 29: 301–347.

Glassey R T and Schaeffer J (1997) The 'Two and One–Half Dimensional' Relativistic Vlasov–Maxwell System. *Commun. Math. Phys*. 185: 257–284.

Glassey R T and Schaeffer J (1998) The Relativistic Vlasov–Maxwell System in Two Space Dimensions. *Arch. Ration. Mech. Anal*., 141: 355–374.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Goldston R J and Rutherford P H (1995) *Introduction to Plasma Pyhsics, IOP Publishing*, Bristol.

Golgeleyen F and Amirov A (2011) On the approximate solution of a coefficient inverse problem for the kinetic equation. *Math. Commun*, 16: 283-298.

Golgeleyen F and Yamamoto M (2014) A inverse problem for the Vlasov-Poisson system. *J. Inverse and III-Posed Problems*, (Accepted).

Greengard C and Raivart P A (1990) A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson equations: the plane diode. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 63: 473-507.

de Groot S R, van Leeuwen W A and van der Wert C (1980) *Relativistic Kinetic Theory: Principles and Applications*, North-Holland; Elsevier, Amsterdam; New York.

Guo Y (2003) The Vlasov-Maxwell-Boltzmann system near Maxwellians. *Invent. Math*. 153: 593–630.

Horst E (1981, 1982) On the classical solutions of the initial value problem for the ummodified non-linear Vlasov equation. *Math. Meth. Appl. Sci*, 3: 229-248 and 4: 19-32.

Horst E (1993) On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov-Poisson system. *Math. Meth. Appl. Sci*, 16: 75-85.

Hwang H J and Velázquez J J L (2010) Global existence for the Vlasov-Poisson system in bounded domains. *Arch. Rational Mech. Anal*, 195: 763-796.

Illner R and Shinbrot M (1984) The Boltzmann equation, global existence for a rare gas in an infinite vacuum. *Commun. Math. Phys*, 95: 217–226.

Isakov V (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

Kabanikhin S I (2008) Inverse and Ill-Posed Problems. *J. Inv. III-Posed Problems*,16: 317-357.

Kreyszig E (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley-Sons, Canada.

Lavrent'ev M M (1967) *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York.

Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, American Mathematical Society, Providence RI.

Lions J L and Magenes E (1972) *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer-Verlag, London.

Lions P L and Perthame B (1991) Propagation of moments and regularity of solutions for the 3 dimensional Vlasov-Poisson system. *Invent. Math*, 105: 415-430.

Marsden J E and Hoffman M J (1993) *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, New York.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*, Mir Publishers, Moscow.

Nishida T and Imai K (1976) Global solutions to the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equation. *Publ. Res. Inst. Math. Sci*, 12: 229–239.

Noutchegueme N and Tetsadjio M E (2003) Global solutions for the relativistic Boltzmann equation in the homogeneous case on the Minkowski space-time, *arXiv e-print*.

Pallard C (2005a) On the boundedness of the momentum support of solutions to the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Indiana Univ. Math J,* 54: 1395–1409.

Pallard C (2005b) A pointwise bound on the electromagnetic field generated by a collisionless plasma. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci*. 15: 1371–1391.

Petrovskii I G (1967) *Partial Differential Equations*, W. B. Saunders Company, Philadelphia.

Pfaffelmoser K (1992) Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data. *J. Diff. Eqns*, 95: 281-303.

Rein G (1994) Static solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*, 115: 559–570.

Rein G (2006) *Collisionless Kinetic Equations from Astrophysics–The Vlasov–Poisson System*, Elsevier, Amsterdam.

Romanov V G (1987) *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VSP, Utrecht The Netherlands.

Samarskii A A (1980) Some problems of the theory of differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya,* 16: 1925-1935.

Schaeffer J (1991) Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions. *Comm. P.D.E.*, 16: 1313-1335.

Schaeffer J (1986) The classical limit of the relativistic Vlasov–Maxwell system. *Commun. Math.Phys*, 104: 403–421.

Shizuta Y (1983) On the classical solutions of the Boltzmann equation. *Commun. Pure Appl. Math*, 36: 705–754.

Strain R M (2010) Global Newtonian limit for the relativistic Boltzmann equation near vacuum. *SIAM J. Math. Anal*, 42: 1568–1601.

Strain R M (2011) Coordinates in the relativistic Boltzmann theory. *Kinet. Relat. Mod.*, 4: 345-359.

Synge J L (1957) *The Relativistic Gas,* North-Holland, Interscience, Amsterdam, New York.

Tikhonov A N and Arsenin V Ya (1979) *Methods of Solution of Ill Posed Problems*, Nauka, Moscow.

Tikhonov A and Samarskii A (1963) *Equations of Mathematical Physics,* Pergamon Press Ltd., Oxford.

Ukai S (1974) On the existence of global solutions of a mixed problem for the nonlinear Boltzmann equation. *Proc. Japan Acad*, 50: 179–184.

Vladimirov V S (1984) *Equations of Mathematical Physics*, MIR, Moscow.

Yosida K (1980) *Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Hava BULUT, 1986 yılında Gümüşhane'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladıktan sonra 2005 yılında girdiği Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında mezun oldu. Aynı yıl Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Güroymak Anadolu Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Güroymak Anadolu Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi
Güroymak/BİTLİS

Tel :

E-posta : nfk_t@mynet.com