FUZZY METRİK UZAYLAR

2015

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELİH ÇINAR

FUZZY METRİK UZAYLAR

Melih ÇINAR

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

ZONGULDAK
Haziran 2015

KABUL:

Melih ÇINAR tarafından hazırlanan "FUZZY METRİK UZAYLAR" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. …./…./2015

Başkan: Prof. Dr. Erdal COŞKUN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. İlhan KARATAŞ ....
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL ....
Bülent Ecevit Üniversitesi

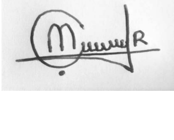
ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. …./…./2015

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Melih ÇINAR



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY METRİK UZAYLAR

Melih ÇINAR

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erdal COŞKUN
Haziran 2015, 89 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; fuzzy mantığın ortaya çıkma sebebi, tarihçesi ve kullanım alanları hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde; tez ile ilgili ön bilgilere, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde; farklı fuzzy metrik uzay tanımları ele alınmıştır. Özellikle; Kramosil ve Michalek Anlamında Fuzzy Metrik Uzaylar, Kaleva ve Seikkela Anlamında Fuzzy Metrik Uzaylar, George ve P. Veeramoni Anlamında Fuzzy Metrik Uzaylar, Non- Archimedean Fuzzy Metrik Uzaylar, Shaban Sedghi Anlamında M Fuzzy Metrik Uzaylar, T- Bag Anlamında D^* Fuzzy Metrik Uzaylar' a yer verilmiş ve örneklerle desteklenmeye çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde ise tezden çıkarılabilecek sonuçlara yer verilmiştir.

ÖZET (devam ediyor)

Anahtar Kelimeler: Fuzzy küme, fuzzy sayı, fuzzy metrik uzaylar

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

FUZZY METRIC SPACES

Melih ÇINAR

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Erdal COŞKUN
June 2015,89 pages

The thesis consists of 4 chapters.

In the first chapter, the birth of fuzzy logic, its history and usage are discussed.

In the second chapter, rudiments about the thesis, basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, different fuzzy metric spaces are discussed in details. Especially, Fuzzy Metric Spaces by Kramosil and Michalek, Fuzzy Metric Spaces by Kaleva and Seikkela, Fuzzy Metric Spaces by George and P. Veeramoni, Non- Archimedean Fuzzy Metric Spaces, *M*-Fuzzy Metric Spaces by Shaban Sedghi, D^{*}- Fuzzy Metric Spaces by T- Bag ... are examined in detail and supported by examples.

Keywords: Fuzzy set, fuzzy number, fuzzy metric spaces

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Bilgi ve birikimlerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocalarım; Sayın Prof. Dr. Erdal COŞKUN, Sayın Doç. Dr. Tülin COŞKUN, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL'e ve biricik aileme sonsuz teşekkürlerimi; bugünleri bize lütuf eden Yüce Allah'a (c.c) ise sonsuz şükürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

No Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

No | Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayıların cümlesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayıların cümlesi
$\chi_A(x)$	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\mu_A(x)$	: x in A fuzzy kümesine aitlik derecesi
$\mathcal{F}(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün fuzzy kümelerin ailesi
$F(X)$	: X üzerindeki bütün fuzzy kümelerin ailesi
A_α	: A nın α kesimi
$A_{\alpha'}$	: A nın kesin α kesimi
$\mathrm{day}(A)$	: A fuzzy kümesinin dayanağı
$Core(A)$	: A fuzzy kümesinin çekirdeği
$L(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün fuzzy sayıların ailesi
$\bar{0}$	: Fuzzy sayıların toplamaya göre birim
$\bar{1}$	: Fuzzy sayıların çarpmaya göre birim elemanı
ε	: İstenildiği kadar küçük seçilebilen pozitif reel sayı
$c(F)$	: Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin ailesi
$m(F)$	: Bütün sınırlı fuzzy sayı dizilerinin ailesi
Δ_l	: Sola olan uzaklık
Δ_r	: Sağa olan uzaklık
(x, λ)	: Fuzzy nokta
d	: Klasik metrik
D	: Bir genelleştirilmiş metrik türü
S	: Bir genelleştirilmiş metrik türü
$\mathcal{G}$	: Negatif olmayan bütün fuzzy sayıların ailesi
$\lvert A\rvert$	: A fuzzy sayısının büyüklüğü
$W(A)$	: A fuzzy sayısının uzunluğu
$\lvert A\rvert$	: A fuzzy sayısının büyüklüğü

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

A^{-}	: A fuzzy sayısının yansıması
A^{-1}	: A fuzzy sayısının tersi
$\oplus$	: Kapalı aralıklar ve fuzzy sayılar için toplam sembolü
$\ominus$	: Kapalı aralıklar ve fuzzy sayılar için çıkarma sembolü
$\otimes$	: Kapalı aralıklar ve fuzzy sayılar için çarpma sembolü
$\oslash$	: Kapalı aralıklar ve fuzzy sayılar için bölme sembolü
$*$	: Sürekli $t -$ norm
M	: George ve Veeramoni anlamında fuzzy metrik
E	: $\mathbb{R}$ de bir alt aralık
R	: Kramosil ve Michalek anlamında fuzzy metrik
$\bar{d}$	: Kaleva ve Seikkela anlamında fuzzy metrik
D^{*}	: Tarapada Bag anlamında fuzzy metrik

KISALTMALAR

N.A	**:** Non-Archimedean Fuzzy Metrik Uzay

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 FUZZY (BULANIK) MANTIĞIN DOĞUŞU

"Hamza çok uzun boyludur", "Zeynep güzel bir kızdır", "Galerideki koyu mavi araba çok pahalı bir arabadır" gibi cümleler; göreceli kavramlar içerdiğinden herkeste aynı etkiyi bırakmaz, yani herkes için aynı doğruluk değeriyle nitelendirilmez. (Unutulmamalıdır ki klasik mantık sistemleri kesin doğruluk değerlerini içerir. Yani klasik mantık sistemlerinde doğruluk değeri ya "0" dır, ya da "1". Dolayısıyla söz konusu eleman ya kümeye aittir, ya da ait değildir.) Yani Hamza bazıları tarafından çok uzun boylu olarak nitelendirilebilirken, bazıları tarafından orta boylu ve hatta kısa olarak bile nitelendirilebilir. Benzer şekilde 'güzellik', 'çirkinlik'; 'ucuzluk', 'pahalılık'; 'açıklık', 'koyuluk' gibi kavramlar net bir şekilde tanımlanmamış ve hep muğlak ifadeler olarak kalmıştır. Fakat öte yandan her ne kadar göreceli olsa da, insanların bu tür cümlelere olan ihtiyacı kaçınılmazdır. Mutlak siyah ve mutlak beyazın arasında grinin binlerce tonu vardır ve bunlara günlük hayatta illa ki bu tonlara da ihtiyaç duyulmaktadır. Kişiler arasındaki bu iletişim sorununu çözmek; bu tarz belirsiz kavramları herkeste aynı etkiyi bırakacak şekilde tanımlamaktan geçiyordu. İşte bu belirsizliği ortadan kaldırma çabaları fuzzy mantık olarak adlandırılan yeni bir mantık sisteminin kapılarını açmıştır. Peki bu tarz kavramlara tek anlam ihtiva edecek şekilde nasıl doğruluk verilebilirdi? Bu sorunun yanıtı ise, sürekli veya dereceli biçimde bir doğruluk, yani 'bulanık' doğruluk kavramını kullanmakta gizlidir. Yani klasik mantık sistemlerindeki gibi doğruluk değeri sadece "0" ya da "1" den ibaret değil; 0 ile 1 dahil olmak üzere arasındaki tüm değerleri de içermektedir. Bulanık doğruluk kavramının, klasik (sıradan) doğruluk kavramıyla benzerlikleri vardır, fakat daha geneldir, ve uygulama alanı daha geniştir, belirsizliğin, doğruluk ölçütünün keskin bir şekilde tanımlanamamasından kaynaklanan durumlardaki problemlerle uğraşmak için güzel bir olanak sağlar.

1.2 FUZZY MANTIĞIN TARİHÇESİ

Mantıksal paradokslar ve Heisenberg'in belirsizlik ilkesi, 1920'ler ve 1930'larda çok değerli mantık sistemlerinin gelişmesine yol açtı. Kuantum teorisyenleri, iki değerli mantık sistemlerinin 'doğru' ve 'yanlış'tan oluşan değer kümesine, bir üçüncü veya orta doğruluk değeri ekleyerek 'belirlenemezlik'in ifade edilebilmesine imkan sağladılar. Bundan sonraki aşamada, 'doğru' ve 'yanlış', 'belirlenemezlik' tayfının sınır koşulları olarak görülüp belirlenemezlik derecelendirildi.

Heisenberg'in belirsizlik ilkesi, 'belirlenemezlik'inin sürekliliğiyle, bilimi çok değerliliğe zorladı. Pek az batılı filozof çok değerliliği benimsemesine rağmen, Lukasiewicz, Gödel, ve Black, ilk çok-değerli ya da bulanık mantık ve küme sistemlerini geliştirdiler.

1930'ların başlarında Polonyalı mantıkçı Jan Lukasiewicz ilk üç-değerli mantık sistemini geliştirdi. Lukaziewicz, daha sonra doğruluk değerlerinin kümesini tüm sayılara genelleştirdi.

1930'larda kuantum filozofu Max Black, sürekli değerlere sahip mantığı, eleman düzeyinde kümelere uyguladı. Black, bulanık-küme üyelik fonksiyonlarından bahseden ilk kişi oldu. Black, ifade etmeye çalıştığı yapılardaki belirsizliği 'müphemlik' olarak adlandırdı. Zadeh'in bulanık-küme teorisinin aksine, Black'in çok değerli kümelerindeki her bir eleman, sürekli değerlere sahip bir mantık çerçevesinde ele alınan bir cümleyle eş-değerdi.

Fuzzy kavramı ilk kez 1965'te, Azerbaycan doğumlu Lotfi Askar Zadeh (Lütfü Askerzade) Fuzzy Kümeler (Fuzzy Sets) başlıklı bir makalesinde ele alındı. Berkeley Kaliforniya Üniversitesi'nde profesör olan L. Askerzade, bu tarihin dört yıl öncesinde, 1961'de, yayımladığı bir makalesinde "olasılık dağılımıyla tanımlanamayan bulanık ya da belirsiz nicelikler için farklı bir matematiğe" gereksinim olduğunu yazıyordu. Çünkü, Askerzade doğadaki görüngüler ile süreçlerin sonlu değerli mantıkla açıklanamayacağını düşünüyordu. 1960'ların sonlarında Askerzade'nin makalesi kesinlik vurgusundan vazgeçmeyen bilimsel çevreler tarafından kabul görmemiş, dahası ABD Kongresi'nde ABD Ulusal Bilim Vakfı (NSF – National Science Foundation) kaynaklarının boşa harcanmasına örnek olarak anılmıştı. 70'lerde ise Avrupalı, ve özellikle Japonyalı bilim adamlarının bu konuda artan araştırmaları ile mühendislik uygulamaları nedeniyle fuzzy mantık ile fuzzy kümeler kuramı artan hızla gelişti. Günümüzde fuzzy mantık otomobillerin vites kutularından bulaşık makinelerine, elektronik devreleri ile yapay zekanın karar verme algoritmalarına kadar oldukça kapsamlı teknik uygulamalara sahip; dahası Tokyo monorail sistemi fuzzy metro temelli bilgisayar ile mühendislik sistemleriyle işlemekte. Bilgisayar ile enformatik bilimleri, kontrol sistemleri, karar-alma algoritmaları fuzzy mantığın yoğun olarak kullanıldığı alanlar olarak beliriyor.

Fuzzy mantığın başlıca özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

i) "doğru" , "çok doğru" , "az çok doğru" v.b. gibi sözel olarak ifade edilen (linguistik-dilsel-değişkenli)doğruluk derecelerine sahip olması,

ii) Geçerliliği kesin değil fakat yaklaşık olan çıkarım kurallarına sahip olması,

iii) Her kavramın bir derecesi olması,

iv) Her mantıksal sistemin fuzzy sistemine aktarılabilmesi,

v) Fuzzy mantıkta bilginin, fuzzy kısıtlara ait değişkenlerin esnekliği veya denkliğiyle yorumlanması.

1.3 FUZZY MANTIĞIN AVANTAJ VE DEZAVANTAJLARI

Fuzzy mantıktan yola çıkılarak kullanılan fuzzy denetleyicilerle ilgili başlıca üstünlükler, zayıf noktalar ve eleştiriler aşağıda açıklanmıştır.

1.3.1 Avantajlar

Günlük hayatta olduğu gibi belirsiz, zamanla değişen, karmaşık, iyi tanımlanmamış sistemlerin denetimine basit çözümler getirir.

Sistem basit bir matematiksel modelle tanımlanabilen bir sistemse o zaman geleneksel bir denetim yeterli olacaktır. Ama karmaşık bir sisteme geleneksel bir mantık uygulamak hem çok zor hem de yüksek maliyetlidir. Buna karşılık fuzzy mantık denetimi geleneksel mantığa göre sistemi daha iyi analiz edebileceği gibi aynı zamanda da ekonomiktir.

Fuzzy mantıkta işaretlerin bir ön işleme tabi tutulmaları ve oldukça geniş bir alana yayılan değerlerin az sayıda üyelik fonksiyonlarına indirgenmeleri nedeni ile fuzzy denetim genellikle daha küçük bir yazılımla daha hızlı bir şekilde sonuçlanır.

Söz edilen az sayıda değerler üzerinde uygulanacak kural sayısı da az olduğundan sonuca ulaşmak daha da çabuklaşacaktır.

Bu durum geleneksel bilgisayar ortamında böyledir.Özel geliştirilmiş bir donanımla sonuca daha da hızlı ulaşmak olasıdır. Örneğin Sanyo-Fisher firması mühendisleri, video kayıt cihazında kullanmayı düşündükleri mikro bilgisayarın yetersiz kalmasından dolayı, fuzzy denetim kullanmaya karar vermişlerdir. Fuzzy denetim yazılım boyutlarının daha küçük olmasını sağladığından, dış bellek kullanımına gerek kalmamıştır.

Fuzzy mantık denetiminin sağladığı bir diğer avantaj ise doğrudan kullanıcı girişlerine ve kullanıcının deneyimlerinden yararlanabilmesine olanak sağlamasıdır.

Bilindiği gibi otomatik vites değişimi motorun belli hızlara ulaşması sonucunda otomatik olarak gerçekleşir. Buna karşılık manuel vitesli bir arabada ise sürücü, yol, yük ve kendi araba kullanış tarzına göre belli durumlarda vites değiştirir. Subaru tarafından üretilen justy tipi otomobilde kullanılan aktarım organının değiştirilmesi, bir kayışın konumunun fuzzy mantık kullanılarak değiştirilmesi ile sağlanır. Böylece arabanın ivmesi ve performansı sürekli olarak ayarlanır hale gelir. Subaru, bu otomobilde kullandığı fuzzy mantık üyelik fonksiyonlarını, otomobili test şoförlerine kullandırarak ve onlardan ivme ve performans açısından en iyi aktarım oranını öğrenerek ayarlamıştır. Bu konuda Honda ve Nissan da benzer çalışmalar yapmışlardır.

1.3.2 Dezavantajlar

Fuzzy denetimde kullanılan kurallar deneyime çok bağlıdır.

Üyelik fonksiyonlarının seçiminde belirli bir yöntem yoktur.En uygun fonksiyon deneme ile bulunur. Bu da oldukça uzun bir zaman alabilir.

Denetlenen sistemin bir kararlılık analizi yapılamaz ve sistemin nasıl cevap vereceği önceden kestirilemez. Yapılacak tek şey benzetim çalışmasıdır.

1.4 FUZZY MANTIĞIN UYGULAMA ALANLARI

Fuzzy mantık uygulamaları ilk olarak çimento sektöründe kullanılmaya başlanmıştır. Bu sektörde kireç taşı ve kil 1000-1400 derece sıcaklıkta reaksiyona girmektedir. Fırın içindeki sıcaklık ve oksijen oranı çimentonun kalitesini doğrudan etkilemektedir. Sadece bu konuda uzman operatörler istenilen limitler dahilinde ürün elde edebilmektedirler. Ama vardiyalı bir sistemle çalışan bu fabrikada çok sayıda operatör vardır ve her operatörün uzmanlıklarının farklı olması nedeniyle farklı niteliklerde ve verimlilikte ürün elde edilmektedir. İstenilen kalitede ürün sadece bu işte yıllardır çalışan uzmanlar tarafından sağlanabilmektedir. Zira çimento üretimi fuzzy bir yapıya sahiptir ve süreç kontrolünü fuzzy kurallar sağlamaktadır. Örneğin ısıyı 10 derece yükselt veya 5 derece azalt gibi kesin kurallar değil biraz azalt , biraz yükselt gibi bulanık terimlerle ifade edilen kurallarla kontrol edilmektedir. Bir Danimarka firması bu sürecin kontrolü için uzman operatörlerin kullandığı 50-60 pratik kuraldan hareketle bir mikro kontrolör oluşturmuşlar ve sonuç olarak sabit ürün kalitesi ve yakıtta büyük tasarruf elde etmişlerdir.

Daha sonraları fuzzy mantık; Mühendislik, Tıp, Sosyoloji, Psikoloji, İşletme, Ulaştırma, Yapay Zeka, Kavşak Sinyalizasyonu gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaya başlandı. Günümüzde Fuzzy Mantık hemen hemen her alanda kendine kolaylıkla uygulama alanı bulabilmektedir. Aşağıdaki çizelgede Fuzzy Mantığı kullanan ürünler ve fuzzy mantığın üründeki işlevi belirtilmiştir.

Çizelge 1.1 Fuzzy mantığın bazı ürünlerdeki işlevi

ÜRÜN	FUZZY MANTIĞIN İŞLEVİ
Asansör Denetimi	Yolcu trafiğini değerlendirir. Yolcu trafiğini değerlendirir.
SLR Fotoğraf Makinesi	Ekranda birkaç obje olması durumunda en iyi fokusu ve aydınlatmayı belirler
Video Kayıt Cihazı	Cihazın elle tutulması nedeniyle çekim sırasında oluşan sarsıntıları ortadan kaldırır.

Çizelge 1.1 (devam ediyor)

Çamaşır Makinesi	Çamaşırın kirliliğini, ağırlığını, kumaş cinsini sezer, ona göre yıkama programını seçer.
Elektrik Süpürgesi	Yerin durumun ve kirliliğini sezer ve motor gücünü uygun ayarlar.
Su Isıtıcısı	Isıtmayı kullanılan suyun miktar ve sıcaklığına göre ayarlar.
Klima	Ortam koşullarını değerlendirerek en iyi çalışma durumunu algılar, odaya birisi girerse soğutmayı arttırır.
ABS Fren Sistemi	Tekerleklerin kilitlenmeden frenlenmesini sağlar.
El Bilgisayarı	El yazısı ile veri ve komut girişine olanak tanır.
Sendai Metro Sistemi	Hızlanma ve yavaşlamayı ayarlayarak rahat bir yolculuk sağlanmasının yanı sıra durma konumunu iyi ayarlar, güçten tasarruf sağlar.
Televizyon	Ekran kontrastını,parlaklığını ve rengini ayarlar

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TOREMLER

2.1 FUZZY KÜME KAVRAMI VE İLGİLİ TANIM VE TEOREMLER

2.1.1 Tanım (Karakteristik Fonksiyon)

X herhangi bir küme olmak üzere $A \subset X$ olsun.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \text{ ise} \\ 0, x \notin A \text{ ise} \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı $\chi_A(x): X \to \{0,1\}$ fonksiyonuna A kümesinin ***karakteristik fonksiyonu*** denir.

2.1.2 Tanım (Fuzzy Küme)

X herhangi bir küme, $A \subset X$ ve $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\mu_A: X \to [0,1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\} \subset X \times I \tag{2.2}$$

kümesine X de bir ***fuzzy küme*** denir. Burada μ_A ya A fuzzy kümesinin ***üyelik fonksiyonu*** ve Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \in I$ değerine de ***x in A ya ait olma derecesi*** denir (Zadeh,1965).

$\mathbb{R}$ üzerindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir.

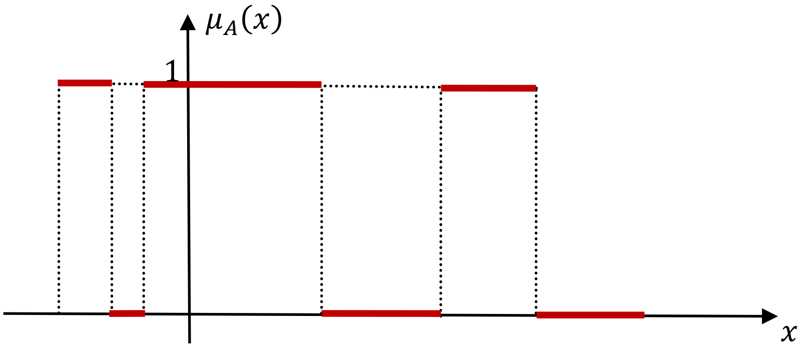
Klasik küme teorisinde A bir küme olmak üzere; A nın üyelik (karakteristik) fonksiyonu $\mu_A(x), x \in A$ iken 1 ve $x \notin A$ iken 0 olmak üzere iki değer almaktadır. Üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerini alan bu kümelere ***adi*** veya ***basit küme*** denir.

Özel olarak;

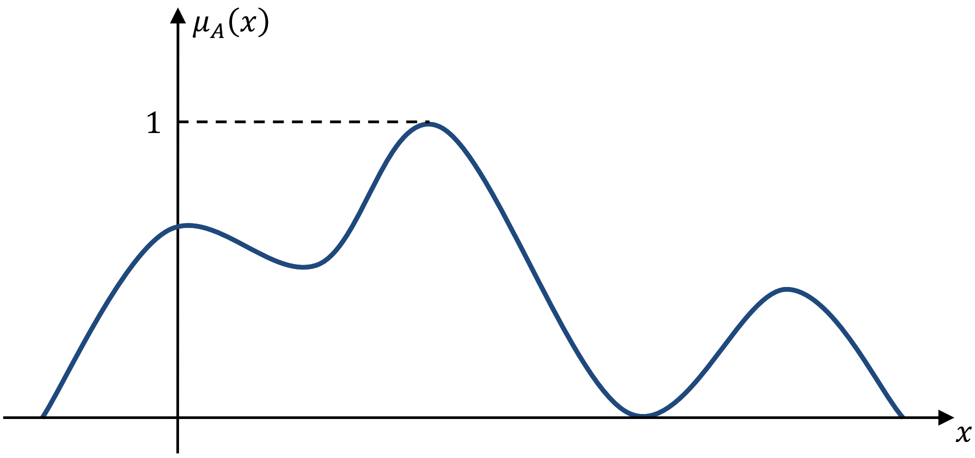
<u>X Fuzzy kümesi</u>; $\mu_X(x) = 1$ olmak üzere $X = \{(x, 1) | x \in X\}$,

<u>$\emptyset$ Fuzzy kümesi</u>; $\mu_\emptyset(x) = 0$ olmak üzere $\emptyset = \{(x, 0) | x \in X\}$

şeklinde gösterilir.



Şekil 2.1 Klasik bir A kümesi



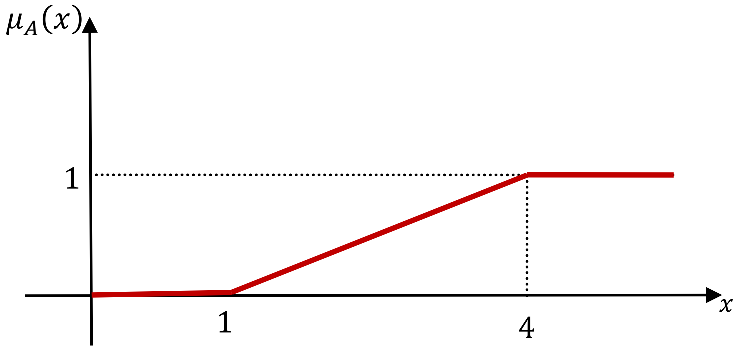
Şekil 2.2 $\mathbb{R}$ de bir A fuzzy kümesi

2.1.2.1 Örnek

Üyelik fonksiyonu $\mu_A\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ olan ve

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(x-1), & 1 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir fuzzy kümedir.



Şekil 2.3 A fuzzy kümesi

2.1.2.2 Tanım (Sabit Fuzzy Küme)

Her $x \in X$ için üyelik derecesi $\mu_A(x) = \alpha \in [0,1]$ olan kümelere ***sabit fuzzy küme*** denir (Zadeh 1965).

2.1.2.3 Örnek

$X = \mathbb{N}$ ve $\mu_A(x) = 0.7$ olsun. $A = \{(x, 0.7) | x \in \mathbb{N}\}$ fuzzy kümesi açıkça sabit bir fuzzy kümedir (Zadeh 1965).

2.1.3 Tanım (Eşit Fuzzy Kümeler)

X boştan farklı herhangi bir küme, A ve B; X kümesinde iki fuzzy küme olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B ye ***eşit fuzzy kümeler*** denir (Zadeh 1965).

2.1.3.1 Örnek

$X = \{0,1\}$ olmak üzere A ve B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_A(x) = x$ ve $\mu_B(x) = x^2$ olsun. Bu durumda A ve B eşit fuzzy kümelerdir.

Gerçekten; her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ dir. Yani

$A = \{(0,0), (1,1)\}, B = \{(0,0), (1,1)\}$

dır. Dolayısıyla A ve B eşit fuzzy kümelerdir.

2.1.4 Tanım

Kümeler teorisinde kullanılan kapsama, birleşim ve kesişim sembolleri yerine fuzzy kümelerde $\leq$, $\vee$, $\wedge$ sembolleri kullanılır.

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve A, B, C fuzzy kümeler olsun.

i) Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise ***B fuzzy kümesi, A fuzzy kümesini kapsıyor*** denir ve $A \leq B$ ile gösterilir.

ii) $A \vee B \coloneqq \{(x, \mu_{A\vee B}(x)) \colon \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A\vee B}(x) := \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$

şeklinde tanımlanan kümeye ***A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi*** denir ve $A \vee B$ ile gösterilir.

iii) $A \wedge B \coloneqq \{(x, \mu_{A\wedge B}(x)) \colon \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A\wedge B}(x) := \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$

şeklinde tanımlanan kümeye ***A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi*** denir ve $A \wedge B$ ile gösterilir.

iv) $A' \coloneqq \left\{\left(x, \mu_{A'}(x)\right) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A'}(x) \coloneqq 1 - \mu_A(x)\right\}$ şeklinde tanımlanan A' fuzzy kümesine ***A nın tümleyeni*** denir.

v) X teki fuzzy kümelerinin bir ailesi $\{A_i | i \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu durumda $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ve $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} A_i$ fuzzy kümeleri sırasıyla

$$C = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} A_i \coloneqq \left\{(x, \mu_C(x)) \colon \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_C(x) := \max_{i\in\mathbb{N}}\{\mu_{A_i}(x)\}\right\}$$

$$D = \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} A_i \coloneqq \left\{(x, \mu_D(x)) \colon \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_D(x) := \min_{i\in\mathbb{N}}\{\mu_{A_i}(x)\}\right\}$$

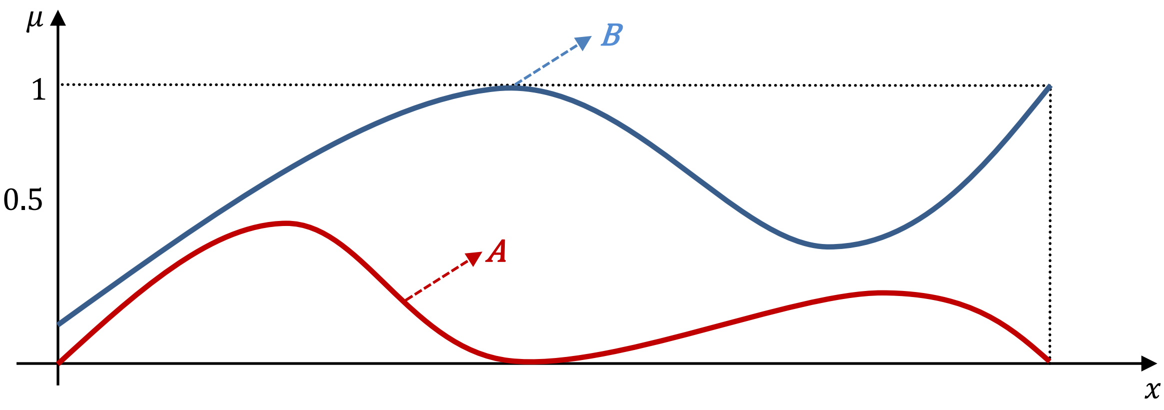
şeklinde tanımlıdır.

vi) $A \setminus B \coloneqq \left\{\left(x, \mu_{A\setminus B}(x)\right) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A\setminus B}(x) \coloneqq \min\{\mu_A(x), \mu_{B'}(x)\}\right\}$

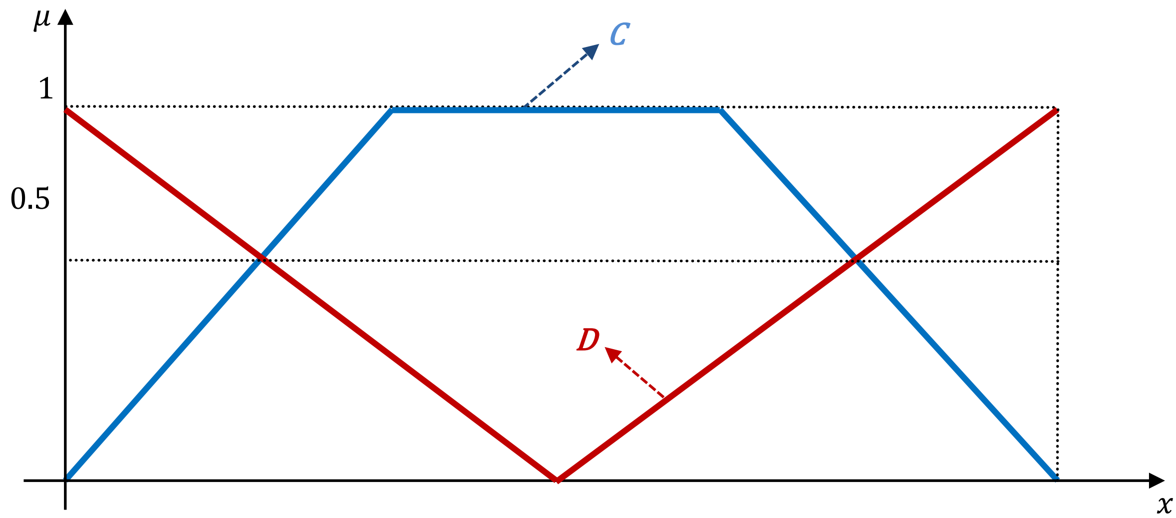
şeklinde tanımlanan kümeye ***A, B fuzzy kümelerinin farkı*** denir (Chang 1968).

2.1.4.1 Not

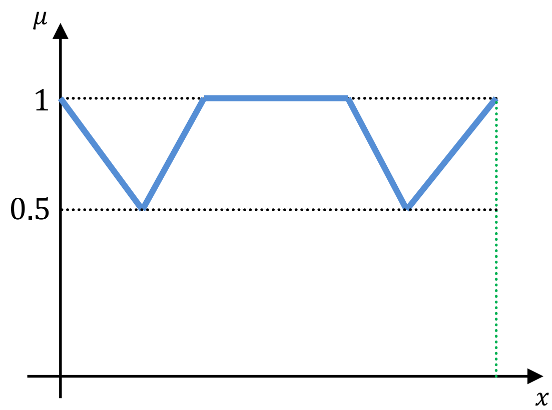
Yukarıdaki tanımları somut hale getirmek için aşağıda şekilli örneklere yer verilmiştir.



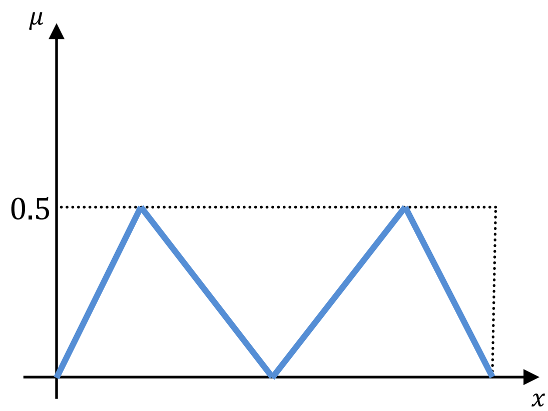
Şekil 2.4 A nın B yi kapsaması



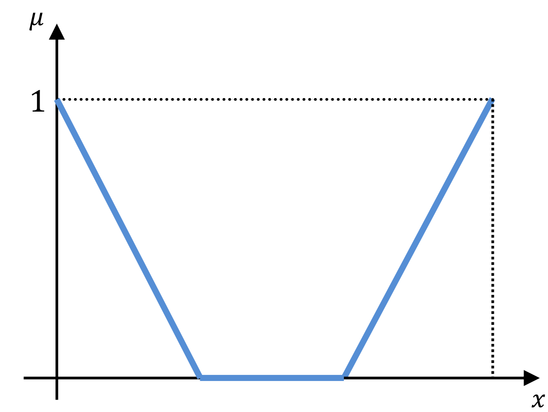
Şekil 2.7 C ve D fuzzy kümeleri (Şekil 2.6-2.9 da kullanılacak)



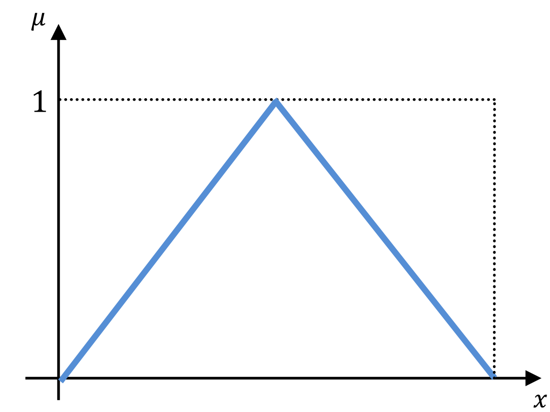
Şekil 2.6 C ve D fuzzy kümelerinin birleşimi



Şekil 2.5 C ve D fuzzy kümelerinin kesişimi



Şekil 2.9 C ve D fuzzy kümelerinin birleşimi



Şekil 2.8 C ve D fuzzy kümelerinin kesişimi

2.1.4.2 Örnek

$X = \{a, b\}$ ve $A = \{(a, 0.1), (b, 0.5)\}$, $B = \{(a, 0.2), (b, 0.7)\}$ şeklinde tanımlı iki fuzzy küme olmak üzere; $A \vee B, A \wedge B, A^{'}, A \setminus B$ fuzzy kümeleri aşağıdaki şekilde belirlenir.

i) Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olduğundan B, A fuzzy kümesini kapsar. Yani $A \leq B$ dir.

ii) $A \vee B =: C$ olsun. Her $x \in X$ için $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_C(x)$ dır. Dolayısıyla

$$\mu_C(a) = 0.1, \mu_C(b) = 0$$

olacağından

$A \vee B = \{(a, 0.2), (b, 0.7)\}$

olur.

iii) $A \wedge B =: D$ olsun. Bu durumda

$$\mu_D(a) = 0.1, \mu_D(b) = 0.5$$

olur. Böylece $A \wedge B = \{(a, 0.1), (b, 0.5)\}$ olacaktır.

iv) A' fuzzy kümesinin üyelik derecesi $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ olduğundan

$\mu_{A'}(a) = 0.9, \qquad \mu_{A'}(b) = 0.5$

$$A' = \{(a, 0.9), (b, 0.5)\}$$

bulunur.

v) $A \setminus B = A \wedge B'$ şeklinde tanımlı olduğundan $A \setminus B$ fuzzy kümesinin üyelik derecesi $\mu_{A \setminus B} = \min\{\mu_A(x), \mu_{B'}(x)\}$ yazılır. Böylece

$\mu_{A \setminus B}(a) = 0.1$ ve $\mu_{A \setminus B}(b) = 0.3$

olduğundan

$$A \setminus B = \{(a, 0.1), (b, 0.3)\}$$

bulunur.

2.1.4.3 Teorem

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B \subset X$ iki fuzzy küme olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir (Chang 1968):

i) $(A')' = A.$ (2.3)

ii) $A \leq B \Leftrightarrow B' \leq A'.$

iii) $(A \vee B)' = A' \wedge B', (A \wedge B)' = A' \vee B'.$ (2.4)

iv) $\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)' = \bigwedge_{i \in I} A_i{}'.$ (2.5)

v) $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigvee_{i \in I} A_i{}'$ (2.6)

İspat:

A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu μ_A, B fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu μ_B olmak üzere;

i) $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ve $\mu_{(A')'}(x) = 1 - \left(1 - \mu_A(x)\right) = \mu_A(x)$

olduğundan

$(A')' = A$

dir.

ii) $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ve $\mu_{B'}(x) = 1 - \mu_B(x)$

dir. Dolayısıyla

$A \leq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

$\Leftrightarrow 1 - \mu_A(x) \geq 1 - \mu_B(x)$

$\Leftrightarrow 1 - \mu_B(x) \leq 1 - \mu_A(x)$

$\Leftrightarrow \mu_{B'}(x) \leq \mu_{A'}(x)$

$\Leftrightarrow B' \leq A'$

elde edilir.

iii) $(A \vee B)' = A' \wedge B'$ eşitliğini göstermek için;

her $x \in X$ olmak üzere $\mu_{(A \vee B)'}(x) = \mu_{A' \wedge B'}(x)$ eşitliği gösterilmelidir.

$\mu_A, \mu_B : X \rightarrow [0,1]$,

$A' \wedge B'$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu; $\min\{1 - \mu_A, 1 - \mu_B\}$,

$A \vee B$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu; $\max\{\mu_A, \mu_B\}$,

$(A \vee B)'$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu da; $1 - \max\{\mu_A, \mu_B\}$

dır.

$1 - \max\{\mu_A, \mu_B\} = \min\{1 - \mu_A, 1 - \mu_B\}$

eşitliği göz önüne alınırsa;

$(A \vee B)'$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu; $\min\{1 - \mu_A, 1 - \mu_B\}$ olur. Dolayısıyla her $x \in X$ için $\mu_{(A \vee B)'}(x) = \mu_{A' \wedge B'}(x)$, yani $(A \vee B)' = A' \wedge B'$

dir. Benzer şekilde;

$A' \vee B'$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu; $\max\{1 - \mu_A, 1 - \mu_B\}$,

$(A \wedge B)'$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu; $1 - \min\{\mu_A, \mu_B\}$ dır. Burada

$1 - \min\{\mu_A, \mu_B\} = \max\{1 - \mu_A, 1 - \mu_B\}$ eşitliği göz önüne alınırsa;

$(A \wedge B)'$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu; $\max\{1 - \mu_A, 1 - \mu_B\}$ olur. Dolayısıyla

her $x \in X$ için $\mu_{(A \wedge B)'}(x) = \mu_{A' \vee B'}(x)$ dir.

iv) $\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right) = \max\{\mu_{A_i}(x)\}$ ve $\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)' = 1 - \max\{\mu_{A_i}(x)\}$

olduğundan

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)' = \min\{1 - \mu_{A_i}(x)\}$$

dir. Tümleyen alma özelliğinden

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)' = \min\{\mu_{A'_i}(x)\} = \bigwedge_{i \in I} A'_i$$

olur.

v) $\bigwedge_{i \in I} A_i = \min\{\mu_{A_i}(x)\}$ ve $\left(\bigwedge_{i \in I} A_i\right)' = 1 - \min\{\mu_{A_i}(x)\}$

olduğundan

$$\left(\bigwedge_{i \in I} A_i\right)' = \max\{1 - \mu_{A_i}(x)\}$$

$$= \max\{\mu_{A'_i}(x)\}$$

$$= \bigvee_{i \in I} A'_i$$

bulunur. ■

2.1.4.4 Uyarı

Fuzzy kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özeliklere sahiptir.

Çizelge 2.1 Fuzzy kümelerde bazı özellikler

Tek kuvvet özelliği $A \vee A = A$ $A \wedge A = A$	Değişme özelliği $A \vee B = B \vee A$ $A \wedge B = B \wedge A$

Çizelge 2.1 (devam ediyor)

Yutma özelliği $A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee X = X$ $A \wedge \emptyset = \emptyset$
Özdeşlik özelliği $A \wedge X = A$ $A \vee \emptyset = A$	Birleşme özelliği $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
Dağılma özelliği $B \wedge \left(\bigvee_{t \in T} A_t \right) = \bigvee_{t \in T} (A_t \wedge B)$ $B \vee \left(\bigwedge_{t \in T} A_t \right) = \bigwedge_{t \in T} (A_t \vee B)$	De Morgan kuralı özelliği $\left(\bigvee_{t \in T} A_t \right)' = \bigwedge_{t \in T} A_t'$ $\left(\bigwedge_{t \in T} A_t \right)' = \bigvee_{t \in T} A_t'$

2.1.4.5 Teorem

A ve B, X kümesinde herhangi iki fuzzy küme olsun.

i) $A \vee B$ fuzzy kümesi A ve B yi içeren en küçük fuzzy kümedir.

ii) $A \wedge B$ fuzzy kümesi A ve B tarafından içerilen en büyük fuzzy kümedir.

Kanıt.

i) A, B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olduğundan

$$A \leq A \vee B \text{ ve } B \leq A \vee B$$

dır.

Öte yandan A ve B yi içeren herhangi bir fuzzy kümesi D olsun. Yani $A \leq D$ ve $B \leq D$ olsun. O halde her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_D(x)$ ve $\mu_B(x) \leq \mu_D(x)$ dır. Dolayısıyla her $x \in X$ için

$$\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \leq \mu_D(x) \Leftrightarrow \mu_{A \vee B}(x) \leq \mu_D(x)$$

dır. Yani $A \vee B \leq D$

dir. Dolayısıyla $A \vee B$ fuzzy kümesi; A ve B yi içeren herhangi bir D fuzzy kümesi tarafından içerildiğinden, A ve B yi içeren en küçük fuzzy küme $A \vee B$ dir.

ii) A, B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B; ve her $x \in X$ için

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olduğundan

$$A \wedge B \leq A, A \wedge B \leq B$$

dır.

Öte yandan A ve B tarafından içerilen herhangi bir fuzzy küme D olsun. Yani $D \leq A$ ve $D \leq B$ olsun. O halde her $x \in X$ için $\mu_D(x) \leq \mu_A(x)$ ve $\mu_D(x) \leq \mu_B(x)$ dır. Dolayısıyla her $x \in X$ için

$$\mu_D(x) \leq \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \Leftrightarrow \mu_D(x) \leq \mu_{A \wedge B}(x)$$

dır. Yani $D \leq A \wedge B$ dir. Dolayısıyla $A \wedge B$ fuzzy kümesi; A ve B tarafından içerilen herhangi bir D fuzzy kümesini içerdiğinden, A ve B tarafından içerilen en büyük fuzzy küme $A \wedge B$ dir.

2.1.4.6 Uyarı

X herhangi bir küme ve A bir fuzzy küme olsun. Bu durumda

i) $A \wedge A' = \emptyset$ olmak zorunda değildir.
ii) $A \vee A' = X$ olmak zorunda değildir.

Dolayısıyla klasik kümelerden farklı olarak;

$$\mu_{A \cup A'}(x) = \mu_X(x) \text{ ve } \mu_{A \cap A'}(x) = \mu_\emptyset(x)$$

eşitlikleri geçerli olmak zorunda değildir.

Aşağıda bu duruma aksi bir örnek verilmiştir.

2.1.4.7 Örnek

$X = \{a, b\}, A = \{(a, 0.2), (b, 0.9)\}$ olsun. $A \wedge A' = \emptyset$ ve $A \vee A' = X$ olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$A' = \{(a, 0.8), (b, 0.1)\}$ dır. $\mu_{A \wedge A'}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{A'}(x)\}$ şeklinde tanımlandığından

$A \wedge A' = \{(a, 0.2), (b, 0.1)\} \neq \emptyset$

bulunur. Ayrıca

$\mu_{A \vee A'}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{A'}(x)\}$

olduğundan

$A \vee A' = \{(a, 0.8), (b, 0.9)\} \neq X$

bulunur.

2.1.5 Tanım (Fuzzy Kümenin Kuvveti)

$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ fuzzy kümesinin ***n. Kuvveti***

$$A^n = \left\{\left(x, \left(\mu_A(x)\right)^n\right) : x \in X\right\} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.5.1 Örnek

$A = \{(3,0.7), (5,0.8), (6,0.9), (7,1)\}$fuzzy küme olsun. A fuzzy kümesi için A^2, A^3, A^n

$A^2 = \{(3,0.49), (5,0.64), (6,0.81), (7,1)\}$

$A^3 = \{(3,0.343), (5,0.512), (6,0.729), (7,1)\}$

$A^n = \{(3, (0.7)^n), (5, (0.8)^n), (6, (0.9)^n), (7,1)\}$

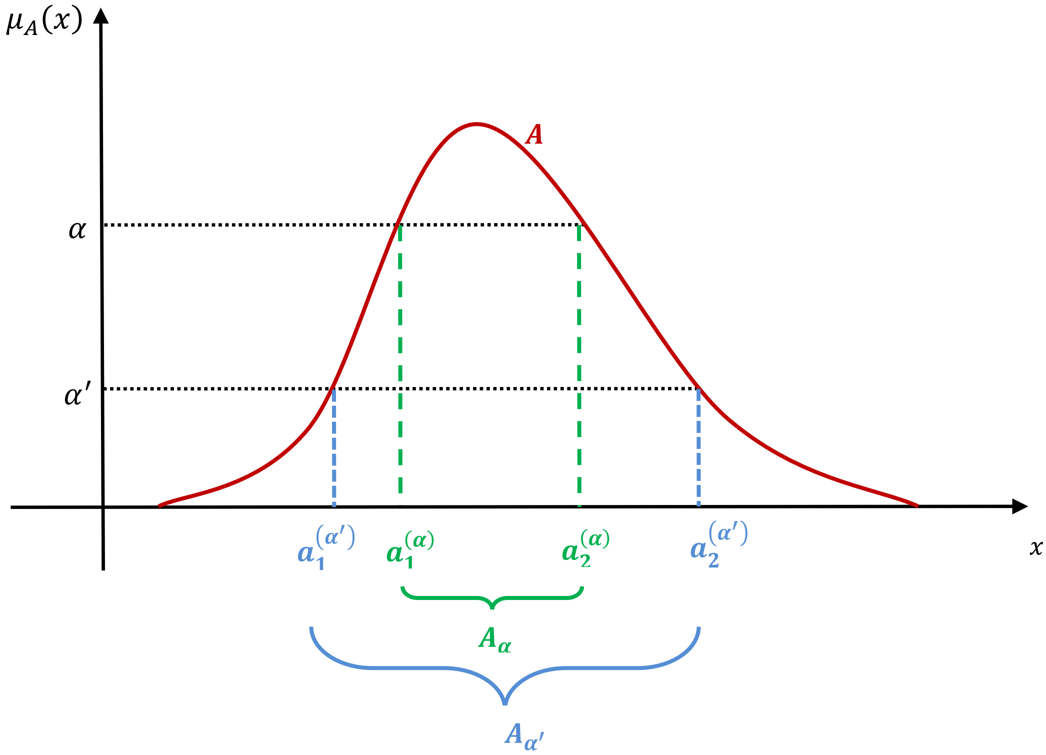
olarak elde edilir.

2.1.6 Tanım ($\alpha -$ kesim, Kesin $\alpha -$ kesim)

A bir fuzzy küme ve $\alpha \in]0,1]$ olsun. A fuzzy kümesinin ***α −kesimi*** ve ***kesin α −kesimi*** sırasıyla A_α ve $A_{\alpha'}$ ile gösterilir ve

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ ve } A_{\alpha'} = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha'\} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.10 A kümesinin α ve α' kesimleri

2.1.7 Tanım (Normallik)

$A \subset X$ bir fuzzy küme olsun. Eğer en az bir $x_0 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ise A fuzzy kümesine ***normaldir*** denir.

2.1.7.1 Örnek

$X = \left[\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right]$, $A \subset X$ bir fuzzy küme ve A nın üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{5}, & x \in \left[\frac{5}{2}, 5\right[\\ \frac{-2x+15}{5}, & x \in \left[5, \frac{15}{2}\right] \end{cases} \tag{2.9}$$

olarak verilsin. $\mu_A(5) = 1$ olduğundan A fuzzy kümesi normaldir.

2.1.8 Tanım (Dayanak)

A bir fuzzy küme olsun. ***A nın dayanağı*** üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktaların kümesidir. Yani

$$\text{day}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.8.1 Örnek

$X = \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ bir fuzzy küme ve A nın üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

olarak verilsin. Bu durumda

$\text{day}(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

dır.

2.1.9 Tanım (Boy)

A bir fuzzy küme olsun. ***A nın boyu***

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanır ve $h(A)$ ile gösterilir.

2.1.9.1 Örnek

$X = \mathbb{Z}$, $A \subset \mathbb{Z}$ bir fuzzy küme ve A nın üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \frac{1}{x^4} \tag{2.13}$$

olarak verilsin. $\mu_A(1) = \mu_A(-1) = 1$ ve her $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$ için $\mu_A(x) < 1$ olduğundan

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$$

dir. Dolayısıyla A nın boyu 1 dir.

2.1.10 Tanım (Çekirdek)

A bir fuzzy küme olsun. $\mu_A(x) = 1$ koşulunu sağlayan tüm $x \in X$ lerin oluşturduğu kümeye,

A nın çekirdeği denir. $Core(A)$ ile gösterilir ve

$$Core(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.10.1 Örnek

$X = \mathbb{Z}$, $A \subset \mathbb{Z}$ bir fuzzy küme ve A nın üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \frac{1}{x^8} \qquad (2.15)$$

olarak verilsin. A fuzzy kümesinin çekirdeği

$$Core(A) = \{-1,1\}$$

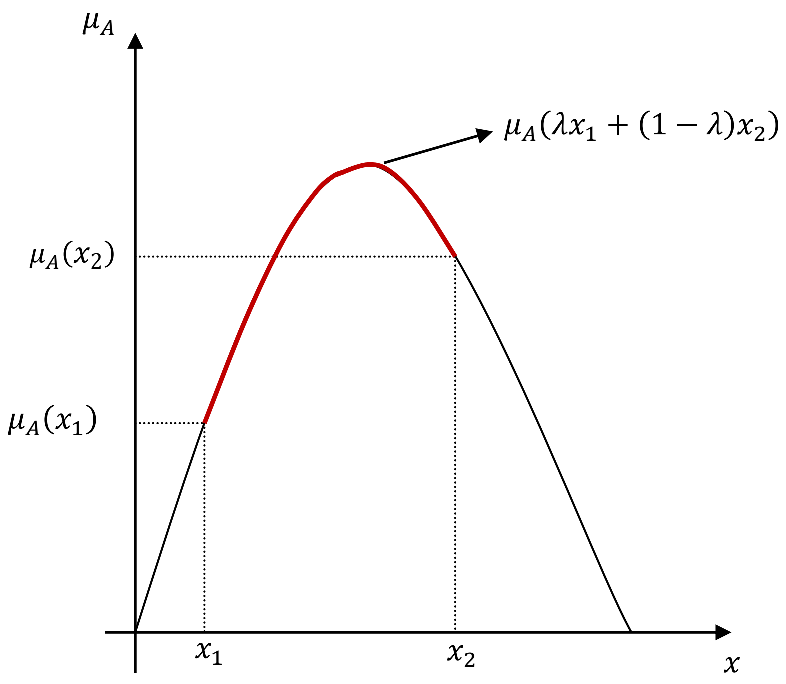
dir.

2.1.11 Tanım (Konvekslik)

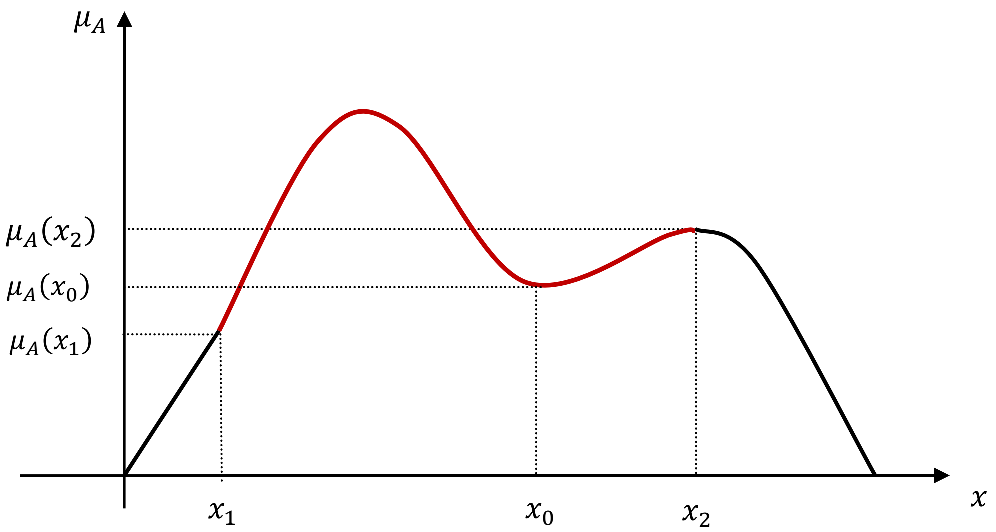
Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için üyelik derecesi

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \qquad (2.16)$$

eşitsizliğini sağlayan A fuzzy kümesine ***konvekstir*** denir.



Şekil 2.11 Konveks fuzzy küme



Şekil 2.12 Konveks olmayan fuzzy küme

2.1.11.1 Sonuç

$A \subset X$ fuzzy kümesinin ***konveks*** olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in]0,1]$ için $A_\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\}$ kümesinin klasik anlamda konveks olmasıdır.

Kanıt:

$\Rightarrow$: A fuzzy kümesi konveks olsun. Yani, her $\lambda \in [0,1]$ için ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

olsun.

$x_1, x_2 \in A_\alpha$ ve $\alpha = \mu_A(x_1)$ olarak seçilsin. O zaman her $x_2 \in X$ için $\mu_A(x_2) \geq \mu_A(x_1) = \alpha$ olur. $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ olduğundan her $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} = \mu_A(x_1) = \alpha$$

dır. Yani

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$$

olur. Yani A_α klasik anlamda konvekstir.

$\Leftarrow$: A_α kümesi klasik anlamda konveks olsun. A_α nın tanımına göre

$$\mu_A(x_2) \geq \mu_A(x_1) = \alpha$$

şartını sağlayacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ elemanları seçilsin.

$$\mu_A(x_2) \geq \alpha$$

olduğundan A_α nın tanımı gereğince $x_1, x_2 \in A_\alpha$ dır.

A_α klasik anlamda konveks olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$, yani $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yani A fuzzy kümesi konveks olur.

2.1.11.2 Teorem

A ve B fuzzy kümeleri konveks ise $A \wedge B$ fuzzy kümesi de konvekstir.

İspat

$C = A \wedge B$ olsun. Bu takdirde

$$\mu_C(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \min\{\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \mu_B(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\}$$

olur. Şimdi de A ve B nin konveksliğinden,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

ve

$$\mu_B(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece

$$\mu_C(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \min\{\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)\}\}$$

$$\geq \min\{\min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_1)\}, \min\{\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\}\}$$

$$\geq \min\{\mu_{A \wedge B}(x_1), \mu_{A \wedge B}(x_2)\}$$

$$\geq \min\{\mu_C(x_1), \mu_C(x_2)\}$$

yazılabilir. Bu ise

$$\mu_C(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_C(x_1), \mu_C(x_2)\}$$

eşitsizliğini verir. Bu ise ispatı tamamlar.

2.2 FUZZY SAYI KAVRAMI VE İLGİLİ TANIM VE TEOREMLER

2.2.1 Fuzzy Sayı ve Çeşitleri

2.2.1.1 Tanım (Fuzzy sayı)

$\mu_A: \mathbb{R} \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile belirli $\mathbb{R}$ nin bir A fuzzy alt kümesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa A ya bir ***fuzzy sayı*** denir**:**

i) A normaldir:

Yani $\mu_A(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur.

ii) A fuzzy konvekstir:

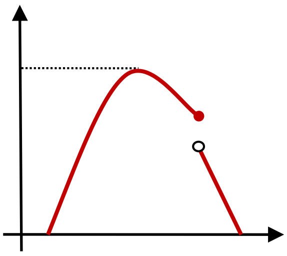
Yani her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$

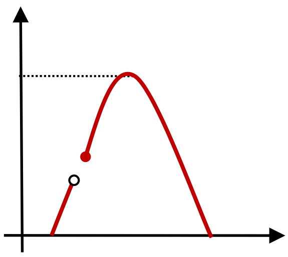
dir.

iii) μ_A üst-yarı süreklidir:

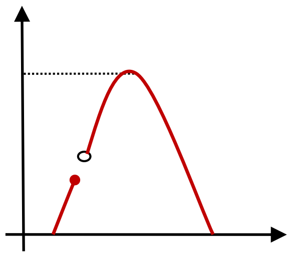
Yani her $t \in [0,1]$ için $\{x: \mu_A(x) < t\}$ kümesi açık olmalıdır.



Şekil 2.13 Üst-yarı sürekli

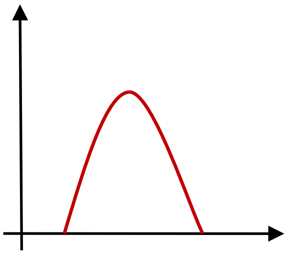


Şekil 2.14 Üst-yarı sürekli değil

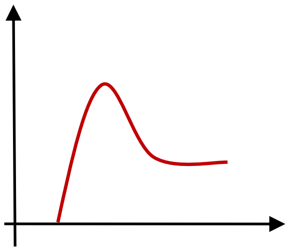


Şekil 2.15 Üst-yarı sürekli

vi) $A_{0'} = \{x \in \mathbb{R}: \mu_A(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakt kümedir.

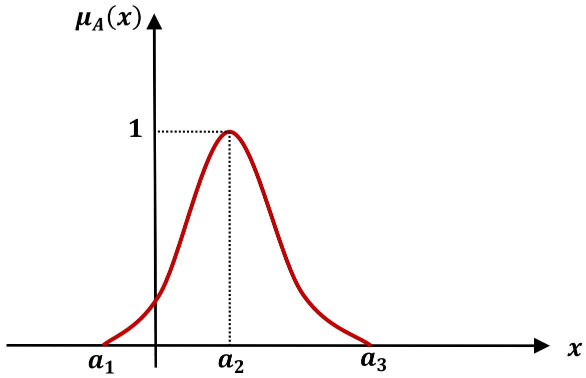


Şekil 2.17 Kompakt



Şekil 2.16 Kompakt değil

Bundan sonraki bölümlerde tüm fuzzy sayıların kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir.



Şekil 2.18 Bir $A = [a_1, a_2, a_3]$ fuzzy sayısı

Önerme

$0 \leq \alpha \leq 1$ olan her α için bir A fuzzy sayısının α kesimi $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ şeklinde kapalı bir aralıktır (Diamond and Kloeden1994).

Kanıt.

A, bir fuzzy sayı olsun. Konveks bir fuzzy sayının α kesimi de konvekstir. Yani bir aralıktır. Ayrıca A normal olduğundan $\mu_A(t_0) = 1$ olacak şekilde bir $t_0 \in \mathbb{R}$ vardır. μ_A üst yarı-sürekli olduğundan $\mu_A(s) = a$ olmak üzere her $t \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$|s - t| < c = c(t)$ iken $\mu_A(t) < a + \varepsilon$ olacak şekilde bir $c > 0$ vardır. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere, $s \notin A_\alpha$ ve $\varepsilon := \frac{\alpha - \mu_A(s)}{2}$ olsun. Böylece $s \in \mathbb{R} \setminus A_\alpha$ ifadesi doğrudur.

$c > 0$ olmak üzere;

$-c < s - t < c$ olması için gerekli ve yeterli koşul $-s - c < -t < c - s$ olmasıdır. Açıkça bu eşitsizlik $s + c > t > s - c$ şeklinde de yazılabilir. $\mu_A(s) < \alpha$ ve A üst yarı sürekli olduğundan

$$\mu_A(t) < \mu_A(s) + \frac{\alpha - \mu_A(s)}{2} < \alpha$$

eşitsizliği elde edilir. Yani $\mu_A(t) < \alpha$ dır. Dolayısıyla $t,\ A_\alpha$ aralığının elemanı değildir. O halde $t \in \mathbb{R} \setminus A_\alpha$ olur ve $(s - c, s + c) \cap A_\alpha = \emptyset$ eşitliği elde edilir. Böylece

$(s - c, s + c) \subset \mathbb{R} \setminus A_\alpha$ olup $\mathbb{R} \setminus A_\alpha$ açıktır.

Dolayısıyla A_α kapalıdır.

Not

i) Bir fuzzy kümenin konvekslik şartı aşağıdaki şekilde de verilebilir.

A fuzzy sayısının $\alpha -$ kesim kümesi $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]$ aşağıdaki şartı sağlıyorsa ve A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu sürekli ise A fuzzy kümesi ***konvekstir*** denir.

$\alpha' < \alpha \Rightarrow A_\alpha \subset A_{\alpha'}$

yani

$\alpha' < \alpha \Rightarrow a_1^{\alpha'} \leq a_1^\alpha, a_3^{\alpha'} \geq a_3^\alpha$

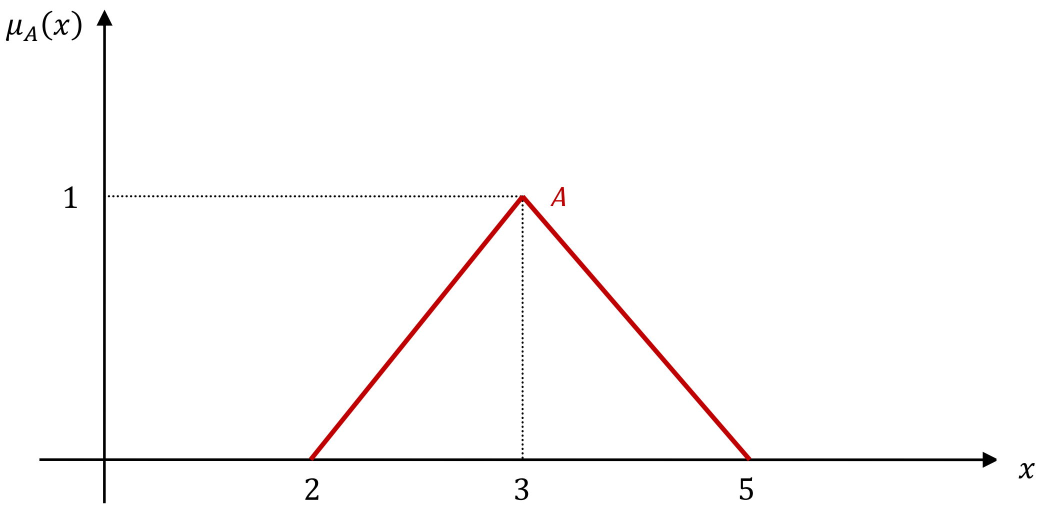
dır.

ii) Bir fuzzy sayının her $\alpha -$ kesimine karşılık gelen aralıklar, ayrık aralıkların birleşimi olarak değil yalnız bir aralık olarak ifade edilebiliyorsa o fuzzy sayı fuzzy konveks olur.

Örnek

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [2,3] \text{ ise} \\ -x+4, & x \in [3,5] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanan $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu ile karakterilize edilen A bir fuzzy sayıdır ve grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.19 A fuzzy sayısı

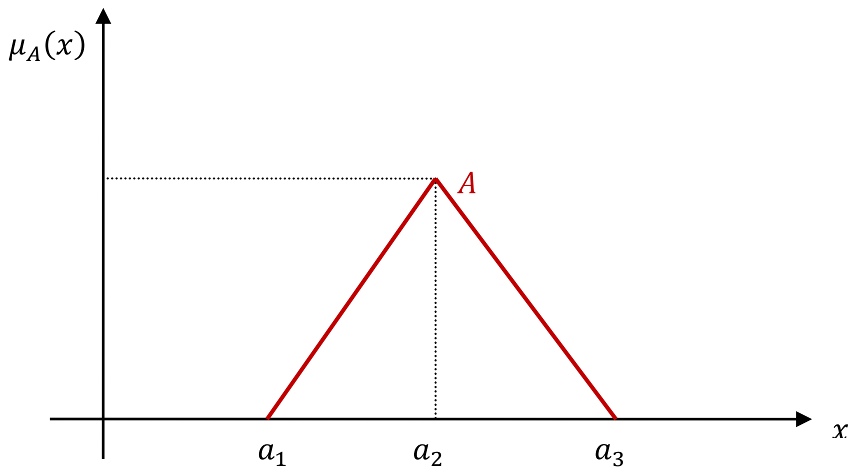
Not

$\alpha \in]0,1]$ için herhangi bir fuzzy sayının $\alpha -$ kesimi kapalı bir aralık olduğu için her fuzzy sayı bir konveks fuzzy kümedir. Fakat bazı konveks fuzzy kümelerin $\alpha -$ kesimi açık ya da yarı-açık bir aralık olabileceği için tersi doğru değildir.

2.2.1.2 Tanım (Üçgensel Fuzzy Sayı)

Üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan A fuzzy sayısına ***üçgensel fuzzy sayı*** denir ve $A = (a_1, a_2, a_3)$ üçlüsü ile gösterilir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \text{veya x} > a_3 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \le x \le a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 < x \le a_3 \end{cases} \tag{2.18}$$



Şekil 2.20 A üçgensel fuzzy sayısı

Uyarı

Her $\alpha \in [0,1]$ için A fuzzy sayısına $\alpha -$ kesimi,

$$\frac{a_1^\alpha - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha, \frac{a_3^\alpha - a_3}{a_3 - a_2} = \alpha$$

eşitliklerinden

$$a_1^\alpha = (a_2 - a_1)\alpha + a_1$$

$$a_3^\alpha = -(a_3 - a_2)\alpha + a_3$$

elde edilir. Buradan A_α aralığı

$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3]$

olur.

Örnek

$A = (-5, -1, 1)$ üçgensel fuzzy sayısı için üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \text{ veya } x > 1 \\ \frac{x+5}{4}, & -5 \le x \le -1 \\ \frac{1-x}{2}, & -1 < x \le 1 \end{cases} \tag{2.19}$$

dir. A fuzzy sayısının $\alpha -$ kesim aralığı

$$\frac{x+5}{4} = \alpha \Rightarrow x = 4\alpha - 5$$

$$\frac{1-x}{2} = \alpha \Rightarrow x = -2\alpha + 1$$

$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [4\alpha - 5, -2\alpha + 1]$

olarak bulunur.

Örneğin $\alpha = 0.5$ için,

$A_{0.5} = [a_1^{0.5}, a_3^{0.5}] = [-3, 0]$

aralığı elde edilir.

2.2.1.3 Tanım (Yamuk Fuzzy Sayılar)

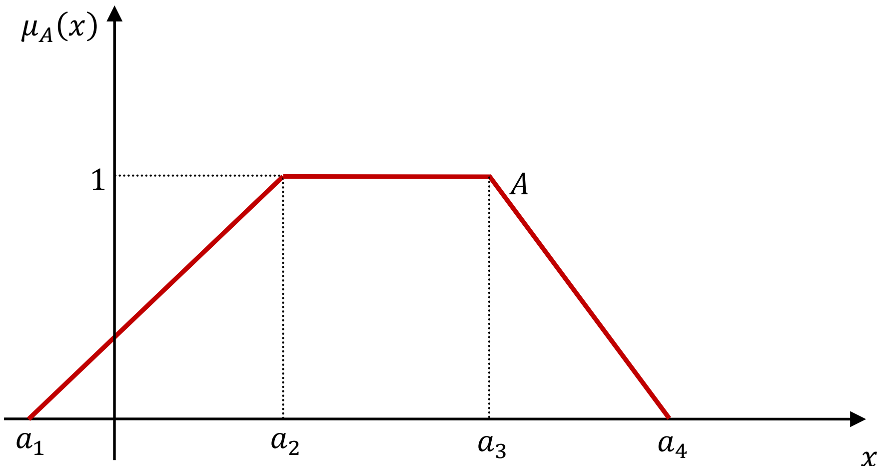
Üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \text{veya x} > a_4 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \le x < a_2 \\ 1, & a_2 \le x \le a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 < x \le a_4 \end{cases} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlı A fuzzy sayısına ***yamuk fuzzy sayısı*** denir ve

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

şeklinde gösterilir.



Şekil 2.21 Yamuk A Fuzzy Sayısı

Uyarı

Yamuk A fuzzy sayıları için $\alpha -$ kesim aralığı aşağıdaki şekilde elde edilir. Her $\alpha \in [0,1]$ için

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4] \qquad (2.21)$$

olur. Eğer $a_2 = a_3$ olursa, yamuk fuzzy sayısı, bir üçgensel fuzzy sayı belirtir.

2.2.2 Fuzzy Sayılarda Aritmetik İşlemler

Fuzzy sayılardaki aritmetik işlemler, aralıklardaki aritmetik işlemler genelleştirilerek elde edilir. Bu yüzden öncelikle aralıklardaki aritmetik işlemler hatırlatılacaktır.

2.2.2.1 Klasik Anlamdaki Aralıklarda Aritmetik İşlemler

Herhangi bir $A = [a_1, a_2]$ için uzunluk, büyüklük, yansıma ve ters kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Uzunluk ($\boldsymbol{W(A)}$) : $W(A) := W[a_1, a_2] = a_2 - a_1$

Büyüklük ($|\boldsymbol{A}|$) : $|A| := |[a_1, a_2]| = \max(|a_1|, |a_2|) = \begin{cases} |a_1|, |a_1| \geq |a_2| \\ |a_2|, |a_1| \leq |a_2| \end{cases}$

Yansıma ($\boldsymbol{A^-}$) : $A^- := [-a_2, -a_1]$

Ters ($\boldsymbol{A^{-1}}$) : $A^{-1} := [a_1, a_2]^{-1} = \left[\min\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right), \max\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right)\right], (a_1 \neq 0, a_2 \neq 0)$

Örnek

[3,7] aralığı için;

Uzunluk: $W(A) = W[3,7] = 7 - 3 = 4$

Büyüklük : $|A| = |[3,7]| = \max(|3|, |7|) = 7$

Yansıma : $A^{-} = [-7, -3]$

Ters : $A^{-1} = [3,7]^{-1} = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right]$

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ aralıkları için aşağıdaki işlemler tanımlanabilir.

Toplama:

$a \in [a_1, a_2]$ ve $b \in [b_1, b_2]$ olsun. O halde $a + b \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ dır. Çünkü $a \in [a_1, a_2]$ ve $b \in [b_1, b_2]$ ise

$a_1 \leq a \leq a_2$ ve $b_1 \leq b \leq b_2$ dir. Dolayısıyla $a_1 + b_1 \leq a + b \leq a_2 + b_2$ dır.

Sembolik olarak

$$A \oplus B := [a_1, a_2] \oplus [b_1, b_2] := [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \tag{2.22}$$

şeklinde gösterilir.

Çıkarma:

$a \in [a_1, a_2]$ ve $b \in [b_1, b_2]$ olsun. Dolayısıyla $a - b \in [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$ dır. O halde sembolik olarak

$$A \ominus B := [a_1, a_2] \ominus [b_1, b_2] := [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \tag{2.23}$$

şeklinde gösterilir.

Çarpma:

$a \in [a_1, a_2]$ ve $b \in [b_1, b_2]$ olsun. Dolayısıyla

$$ab \in [\min(a_1b_1, a_2b_2, a_1b_2, a_2b_1), \max(a_1b_1, a_2b_2, a_1b_2, a_2b_1)]$$

dır. O halde sembolik olarak

$$A \otimes B := [a_1, a_2] \otimes [b_1, b_2] := [\min(a_1b_1, a_2b_2, a_1b_2, a_2b_1), \max(a_1b_1, a_2b_2, a_1b_2, a_2b_1)] \tag{2.24}$$

şeklinde gösterilir.

Bölme:

$a \in [a_1, a_2]$ ve $b \in [b_1, b_2]$ olsun. Çarpma özelliğinden yararlanarak; $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$

olmak üzere

$$\frac{A}{B} := A \otimes B^{-1} := [a_1, a_2] \oslash [b_1, b_2] := [a_1, a_2]\left[\min\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}\right), \max\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}\right)\right] \tag{2.25}$$

gösterimi kullanılır.

Minumum: $A \wedge B := [a_1, a_2] \wedge [b_1, b_2] := [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)]$

Maksimum: $A \vee B := [a_1, a_2] \vee [b_1, b_2] := [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)]$

Sabit ile Çarpma: $k \in \mathbb{R}$ ise $k \otimes A := k \otimes [a_1, a_2] := [ka_1, ka_2]$

Not

Eğer A ve B aralıkları pozitif gerçel sayılarda tanımlı ise yukarıdaki eşitlikler basitleştirilerek;

Çarpma:

$$A \otimes B := [a_1, a_2] \otimes [b_1, b_2] := [a_1 b_1, a_2 b_2] \tag{2.26}$$

Ters:

$$A^{-1} := [a_1, a_2]^{-1} := \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right] \tag{2.27}$$

Bölme:

$$\frac{A}{B} =: [a_1, a_2] \oslash [b_1, b_2] := \left[\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right] \tag{2.28}$$

olarak tanımlanabilir.

Not

Sırasıyla $0 = [0,0]$ ve $1 = [1,1]$ aralıkları; aralıklar üzerindeki toplama ve çarpma işlemleri için etkisiz (birim) elemanlardır.

Yani

$A \oplus 0 = 0 \oplus A = A$

$A \otimes 1 = 1 \otimes A = A$

dır.

Örnek

$A = [4,8],\ B = [-2,3]$ olsun. O halde;

i) $A \oplus B = [4-2, 8+3] = [2,11]$

ii) $A \ominus B = [4-3, 8-(-2)] = [1,10]$

iii) $A \otimes B = [4,8] \otimes [-2,3]$

$= \left[\min\left(4.(-2), 8.3, 4.3, 8.(-2)\right), \max\left(4.(-2), 8.3, 4.3, 8.(-2)\right)\right]$

$= [\min(-8, 24, 12, -16), \max(-8, 24, 12, -16)] = [-16, 24]$

iv) $A \oslash B = [4,8] \otimes \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right] = \left[\min\left(-2, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -4\right), \max\left(-2, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -4\right)\right] = \left[-4, \frac{8}{3}\right]$

v) $A \wedge B = [\min(4,-2), \min(8,3)] = [-2,3]$

vi) $A \vee B = [\max(4,-2), \max(8,3)] = [4,8]$

vii) $k = \frac{1}{4}$ ise $k \otimes A = \frac{1}{4} \otimes [4,8] = \left[\frac{1}{4}.4, \frac{1}{4}.8\right] = [1,2]$

Aritmetik İşlemlerde Bazı Özellikler

A ve B herhangi iki kapalı aralık olmak üzere;

i) $A \oplus B = B \oplus A$

ii) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

iii) Her $A, B \subset \mathbb{R}^+$ için

$A \otimes B = B \otimes A$

dır.

iv) Her $A, B, C \subset \mathbb{R}^+$ için

$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

dır. Gerçekten

$([a_1, a_2] \otimes [b_1, b_2]) \otimes [c_1, c_2] = [a_1 b_1, a_2 b_2] \otimes [c_1, c_2] = [a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2]$

$= [a_1, a_2] \otimes [b_1 c_1, b_2 c_2] = [a_1, a_2] \otimes ([b_1, b_2] \otimes [c_1, c_2])$

dır.

2.2.2.2 Fuzzy Sayılarda Aritmetik İşlemler (Kaufmann and Gupta 1991)

A ve B iki fuzzy sayı ise A ve B nin toplamı da bir fuzzy sayı mıdır ? Diğer bir deyişle A ve B nin toplamı da konveks ve normal midir? Bu bölümde bu soruların cevapları araştırılacaktır.

Bu kesimde $A \oplus B$ gösterimi α −kesimi $A_\alpha \oplus B_\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$ ile belirli A ve B fuzzy sayılarının toplamını temsil edecektir.

Teorem

A ve $B, \mathbb{R}$ de iki fuzzy sayı ise $A \oplus B$ fuzzy kümesi $\mathbb{R}$ de konvekstir.

Kanıt:

A ve B nin α −kesim kümeleri sırasıyla

$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

$B_\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$

α' − kesim kümeleri sırasıyla

$A_{\alpha'} = \left[a_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'}\right]$

$B_{\alpha'} = \left[b_1^{\alpha'}, b_2^{\alpha'}\right]$

dır. A ve B konveks olduğundan

$(\alpha < \alpha') \Longrightarrow \left[a_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'}\right] \subset [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

$(\alpha < \alpha') \Longrightarrow \left[b_1^{\alpha'}, b_2^{\alpha'}\right] \subset [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$

olur.

$A_\alpha \oplus B_\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$

$A_{\alpha'} \oplus B_{\alpha'} = \left[a_1^{\alpha'} + b_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'} + b_2^{\alpha'}\right]$

dır. Dolayısıyla

$(\alpha < \alpha') \Longrightarrow \left[a_1^{\alpha'} + b_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'} + b_2^{\alpha'}\right] \subset [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$

elde edilir. Yani $A \oplus B$ konvekstir. ■

Teorem

A ve B, $\mathbb{R}$ de iki fuzzy sayısı ise $A \oplus B$ de $\mathbb{R}$ de bir fuzzy alt kümedir ve normaldir.

Kanıt:

A ve B, $\mathbb{R}$ de iki fuzzy sayısı olduğundan $\mu_A(x_0) = 1$ ve $\mu_B(y_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $y_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Yani A ve B fuzzy sayılarının $\alpha = 1$ kesimi

$A_1 = [a_1^1, a_2^1] \neq \emptyset$

$B_1 = [b_1^1, b_2^1] \neq \emptyset$

dır. O halde

$A_1 \oplus B_1 = [a_1^1 + b_1^1, a_2^1 + b_2^1] \neq \emptyset$

dır. Böylece $A \oplus B$ normaldir. ■

Fuzzy Sayılarda Toplama İşlemi

A ve B iki fuzzy sayı ve $\alpha \in [0,1]$ için A ve B nin $\alpha -$ kesim kümeleri sırasıyla

$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}: \mu_A(x) \geq \alpha\}$

$B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}: \mu_B(x) \geq \alpha\}$

olsun.

Her $\alpha \in [0,1]$ için $A_\alpha \oplus B_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \oplus [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$

eşitliği geçerlidir.

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $A \oplus B$ nin üyelik fonksiyonu

$\mu_{A\oplus B}(z) = \bigvee_{z=x+y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$

ile belirlidir.

Örnek

Her $x \in \mathbb{R}$ için üyelik fonksiyonu

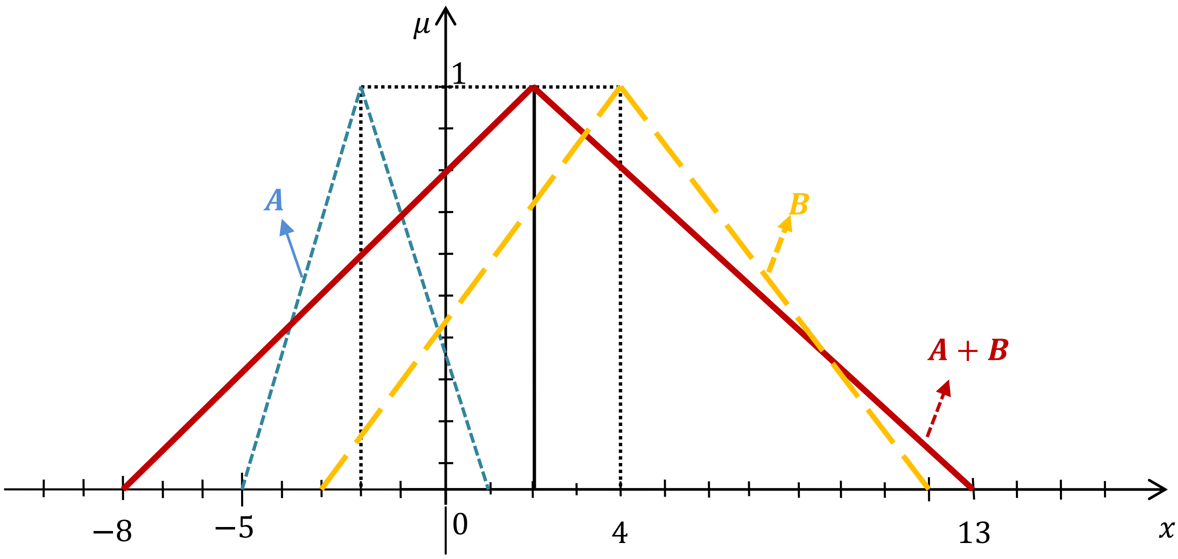
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ \frac{x}{3} + \frac{5}{3}, & -5 \leq x \leq -2 \\ -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & -2 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} \qquad (2.29)$$

ve

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 \\ \frac{x}{7} + \frac{3}{7}, & -3 \leq x \leq 4 \\ -\frac{x}{8} + \frac{12}{8}, & 4 \leq x \leq 12 \\ 0, & x \geq 12 \end{cases} \qquad (2.30)$$

şeklinde tanımlı A ve B fuzzy sayıları için $A_\alpha \oplus B_\alpha$ kümesini belirleyerek $\mu_{A \oplus B}$ yi hesaplayınız.

Çözüm:



Şekil 2.22 *A, B* ve *A+B* kümeleri

$$\alpha = \frac{a_1^\alpha}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow a_1^\alpha = 3\alpha - 5$$

$$\alpha = -\frac{a_2^\alpha}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a_2^\alpha = -3\alpha + 1$$

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1]$$

dır.

$$\alpha = \frac{b_1^\alpha}{7} + \frac{3}{7} \Rightarrow b_1^\alpha = 7\alpha - 3$$

$$\alpha = -\frac{b_2^\alpha}{8} + \frac{12}{8} \Rightarrow b_2^\alpha = 12 - 8\alpha$$

$$B_\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [7\alpha - 3, 12 - 8\alpha]$$

dır.

$$A_\alpha \oplus B_\alpha = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1] \oplus [7\alpha - 3,12 - 8\alpha] = [10\alpha - 8, 13 - 11\alpha]$$

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -8 \\ \frac{x}{10} + \frac{8}{10}, & -8 \leq x \leq 2 \\ -\frac{x}{11} + \frac{13}{11}, & 2 \leq x \leq 13 \\ 0, & x \geq 13 \end{cases}$$

bulunur.

Örnek

Aşağıdaki tabloda bazı x değerlerine ait üyelik dereceleri verilen A ve B fuzzy sayıları için $\mu_{A\oplus B}(x)$ i belirleyiniz.

Çizelge 2.2 *x* in *A* ya ait olma derecesi

x	0	1	2	3	4	5
$\mu_A(x)$	0.1	0.5	0.9	1	0.6	0.2

Çizelge 2.3 *x* in *B* ye ait olma derecesi

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_B(x)$	0.2	0.3	1	0.8	0.7	0.1	0.1

Çözüm:

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{A\oplus B}(z) = \bigvee_{z=x+y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

olduğundan

Çizelge 2.4 x in $A \oplus B$ ye ait olma derecesini belirleme çizelgesi

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
0	0,2 / 0,1	0,3 / 0,1	1 / 0,1	0,8 / 0,1	0,7 / 0,1	0,1 / 0,1	0,1 / 0,1
1	0,2 / 0,5	0,3 / 0,5	1 / 0,5	0,8 / 0,5	0,7 / 0,5	0,1 / 0,5	0,1 / 0,5
2	0,2 / 0,9	0,3 / 0,9	1 / 0,9	0,8 / 0,9	0,7 / 0,9	0,1 / 0,9	0,1 / 0,9
3	0,2 / 0,1	0,3 / 0,1	1 / 0,1	0,8 / 0,1	0,7 / 0,1	0,1 / 0,1	0,1 / 0,1
4	0,2 / 0,6	0,3 / 0,6	1 / 0,6	0,8 / 0,6	0,7 / 0,6	0,1 / 0,6	0,1 / 0,6
5	0,2 / 0,2	0,3 / 0,2	1 / 0,2	0,8 / 0,2	0,7 / 0,2	0,1 / 0,2	0,1 / 0,2

Bu tablodan yararlanarak $\mu_{A\oplus B}(x)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

Çizelge 2.5 x in $A \oplus B$ ye ait olma derecesi

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mu_{A\oplus B}(x)$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.9	1	0.8	0.7	0.6	0.2	0.1	0.1

Fuzzy Sayılarda Çıkarma İşlemi

A ve B iki fuzzy sayı ve $\alpha \in [0,1]$ için A ve B nin $\alpha -$ kesim kümeleri sırasıyla

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}: \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{2.31}$$

$$B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}: \mu_B(x) \geq \alpha\} \tag{2.32}$$

olsun. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{A\ominus B}(z) = \bigvee_{z=x-y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right) \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlıdır ve

her $\alpha \in [0,1]$ için $A_\alpha \ominus B_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \ominus [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$ aralığı ile belirlidir.

Örnek

Yukarıdaki örnekte verilen bilgileri kullanarak $\mu_{A\ominus B}$ yi belirleyiniz.

Çözüm:

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{A\ominus B}(z) = \bigvee_{z=x-y} \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\big)$$

olduğundan

Çizelge 2.6 x in $A \ominus B$ ye ait olma derecesini belirleme çizelgesi

	0	1	2	3	4	5	6
0	0,2 / 0,1	0,3 / 0,1	1 / 0,1	0,8 / 0,1	0,7 / 0,1	0,1 / 0,1	0,1 / 0,1
1	0,2 / 0,5	0,3 / 0,5	1 / 0,5	0,8 / 0,5	0,7 / 0,5	0,1 / 0,5	0,1 / 0,5
2	0,2 / 0,9	0,3 / 0,9	1 / 0,9	0,8 / 0,9	0,7 / 0,9	0,1 / 0,9	0,1 / 0,9
3	0,2 / 0,1	0,3 / 0,1	1 / 1	0,8 / 1	0,7 / 0,1	0,1 / 1	0,1 / 1
4	0,2 / 0,6	0,3 / 0,6	1 / 0,6	0,8 / 0,6	0,7 / 0,6	0,1 / 0,6	0,1 / 0,6
5	0,2 / 0,2	0,3 / 0,2	1 / 0,2	0,8 / 0,2	0,7 / 0,2	0,1 / 0,2	0,1 / 0,2

Böylece $\mu_{A\ominus B}$ üyelik fonksiyonu

Çizelge 2.7 x in $A \ominus B$ ye ait olma derecesi

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mu_{A\ominus B}(x)$	0.1	0.1	0.1	0.5	0.7	0.8	0.9	1	0.6	0.3	0.2	0.2

şeklinde belirlenir.

Fuzzy Sayılarda Çarpma İşlemi

A ve B, $\mathbb{R}$ da iki fuzzy küme olmak üzere

$$A_\alpha \otimes B_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \otimes [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha]$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{A \otimes B}(z) = \bigvee_{z=x.y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

şeklinde de gösterilebilir.

Fuzzy Sayılarda Bölme İşlemi

İki fuzzy kümenin bölümü $\mathbb{R}^+$ da tanımlı olup $b_1^\alpha, b_2^\alpha > 0$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$A_\alpha \oslash B_\alpha = [a_1^\alpha / b_2^\alpha, a_2^\alpha / b_1^\alpha] \tag{2.34}$$

ve

Her $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mu_{A \oslash B}(z) = \bigvee_{z=x/y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right) \tag{2.35}$$

olacak şekilde tanımlanır.

2.2.3 İki Fuzzy Sayı Arasındaki Uzaklık

2.2.3.1 Arnold Kaufman ve Madan M. Gupta Anlamında Fuzzy Sayılar Arasındaki Uzaklık

Tanım

E; $\mathbb{R}$ de bir aralık, $*$ bir işlem ve $(X, Y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}$ olmak üzere $d(X, Y) \in \mathbb{R}$, fonksiyonu her $X, Y, Z \in \mathrm{E}$ için

i) $d(X, Y) \geq 0,$ (2.36)

ii) $X = Y \Longrightarrow d(X, Y) = 0,$ (2.37)

iii) $d(X, Y) = d(Y, X),$ (2.38)

iv) $d(X, Z) \leq d(X, Y) * d(Y, Z)$ (2.39)

özelliklerini sağlarsa $d(X, Y)$ ye ***uzaklık*** denir.

Buradaki uzaklık kavramı klasik metrik kavramından farklıdır. (Çünkü metrik tanımındaki

$X = Y \Leftrightarrow d(X, Y) = 0$ koşulu sağlanmaz.)

Tanım

$A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2],\ C = [c_1, c_2]$, $\mathbb{R}$ de üç aralık olsun.

$$\Delta_l(A, B) = |a_1 - b_1|\ , \Delta_r(A, B) = |a_2 - b_2| \tag{2.40}$$

farkları sırasıyla sola olan uzaklık ve sağa olan uzaklık olarak adlandırılacaktır.

Not

Yukarıda tanımlanan Δ_l ve Δ_r uzaklık kavramları (2.36-2.39) koşullarını sağlar. Gerçekten

Her $A, B, C \subset \mathbb{R}$ için

1) $\Delta_l(A, B) \geq 0$, çünkü $|a_1 - b_1| \geq 0$ dır.
2) $A = B \Longrightarrow \Delta_l(A, B) = 0$ dır. Çünkü $a_1 = b_1 \Longrightarrow |a_1 - b_1| = 0$
3) $\Delta_l(A, B) = \Delta_l(B, A)$ çünkü $|a_1 - b_1| = |b_1 - a_1|$
4) $\Delta_l(A, C) \leq \Delta_l(A, B) + \Delta_l(B, C)$ çünkü $|a_1 - c_1| \leq |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1|$
dır.

Δ_r nın ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı

Δ_l ve Δ_r uzaklık kavramları ile belirli,

$$\vartriangle (a, b) := \Delta_l(A, B) + \Delta_r(A, B) \tag{2.41}$$

şeklinde tanımlı $\vartriangle (a, b)$ bir uzaklıktır.

(2.36-2.39) koşullarının bu kabul için sağlandığını göstermek kolaydır.

Tanım

$A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2], C = [c_1, c_2]$, keyfi aralıklar, β_1, β_2 ; A_0 ve B_0 kesimlerini çevrelemek için uygun keyfi değerler ve $[\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\delta(A, B) = \frac{1}{2(\beta_2 - \beta_1)} d(A, B) \tag{2.42}$$

normalleştirilmiş uzaklık olarak tanımlanır.

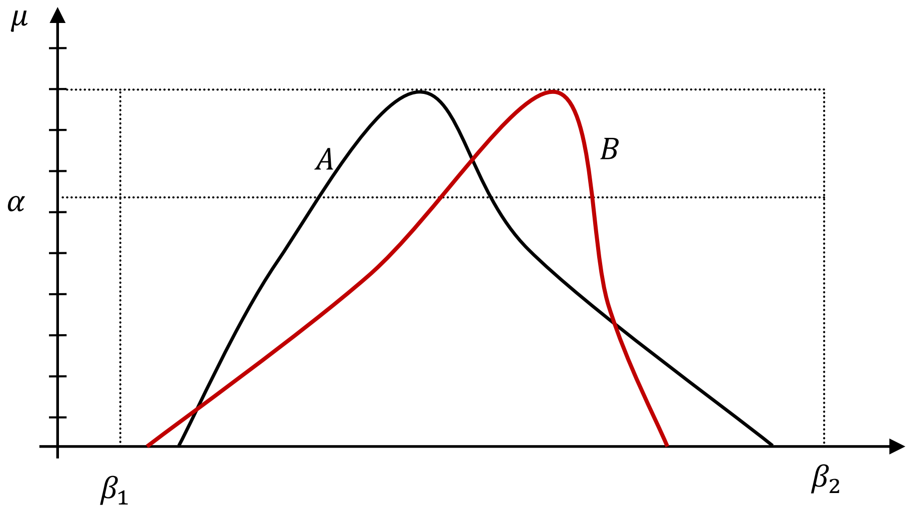
$$0 \leq \delta(A, B) \leq 1 \tag{2.43}$$

yazılabilir.

Aşağıdaki şekildeki gibi $\mathbb{R}$ de iki A ve B fuzzy sayıları ele alınsın.

$$\delta(A_\alpha, B_\alpha) = \left\{\frac{1}{[2(\beta_2 - \beta_1)]}\right\} d(A_\alpha, B_\alpha) \tag{2.44}$$

yazılabilir.



Şekil 2.23 A ve B fuzzy sayıları

$\delta(A_\alpha, B_\alpha)$ nin $\alpha = 0$ den $\alpha = 1$ e integrali alınırsa; (2.43) denklemini sağlayan uzaklıkların toplam uzaklığı elde edilir.

$$\delta(A, B) = \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \delta(A_\alpha, B_\alpha) d_\alpha = \frac{1}{2(\beta_2 - \beta_1)} \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \Delta\, (A_\alpha, B_\alpha)\, d\alpha \tag{2.45}$$

$$= \frac{1}{2(\beta_2 - \beta_1)} \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} |a_1^\alpha - b_1^\alpha| + |a_2^\alpha - b_2^\alpha|\, d\alpha \tag{2.46}$$

Bu denklem iki fuzzy sayı arasındaki uzaklığı verir.

Örnek

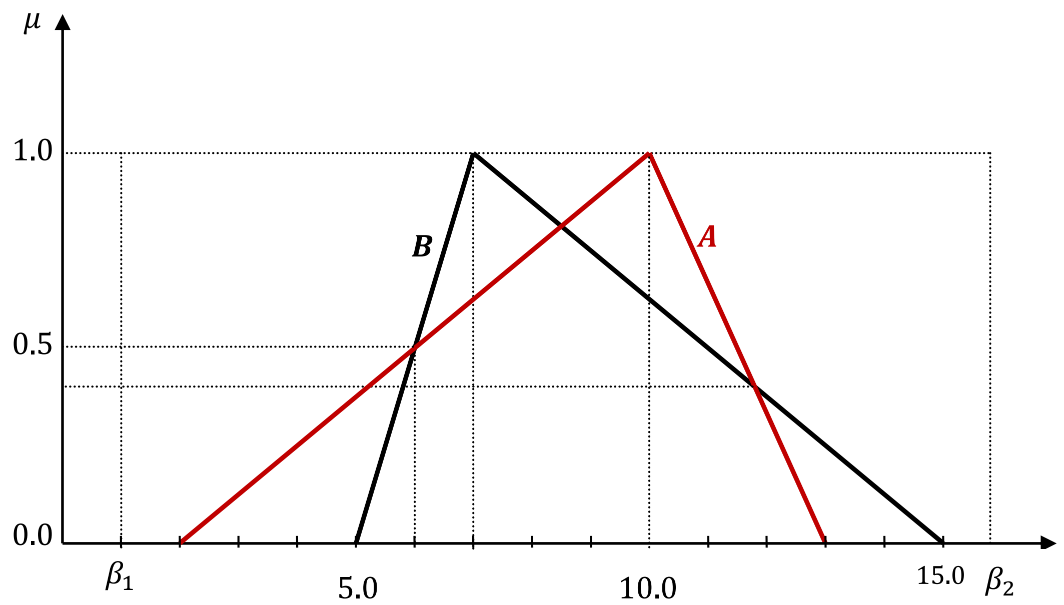
Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, x \leq 2 \\ \frac{x}{8} - \frac{2}{8}, 2 \leq x \leq 10, \\ -\frac{x}{3} + \frac{13}{3}, 10 \leq x \leq 13, \\ 0,\ \ x \geq 13, \end{cases} \tag{2.47}$$

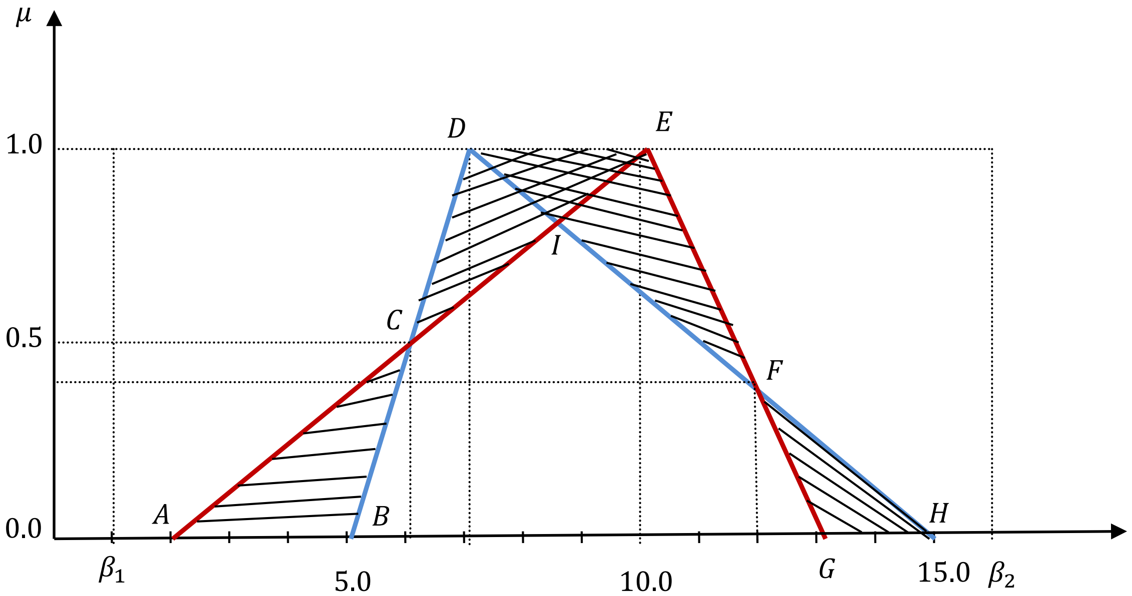
ve

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, x \leq 5, \\ \frac{x}{2} - \frac{5}{2}, 5 \leq x \leq 7, \\ -\frac{x}{8} + \frac{15}{8}, 7 \leq x \leq 15 \\ 0, x \geq 15 \end{cases} \tag{2.48}$$

üyelik fonksiyonları ile belirlenen A ve B fuzzy sayıları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.



Şekil 2.24 A ve B fuzzy sayıları



Şekil 2.25 $\delta(A,B)$ mesafesi (alan metodu ile)

Her $\alpha \in [0,1]$ için

$A_\alpha = [2 + 8\alpha, 13 - 3\alpha]$

$B_\alpha = [5 + 2\alpha, 15 - 8\alpha]$

dır.

$2 + 8\alpha = 5 + 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0.5$ ve $x = 6$

dır.

$13 - 3\alpha = 15 - 8\alpha \Rightarrow \alpha = 0.4$ ve $x = 11.8$

dır.

O halde $a_1^\alpha - b_1^\alpha = 2 + 8\alpha - 5 - 2\alpha = -3 + 6\alpha$

$a_2^\alpha - b_2^\alpha = 13 - 3\alpha - 15 + 8\alpha = 5\alpha - 2$

$$\int_{\alpha=0}^{0,5} (-3 + 6\alpha)d\alpha + \int_{\alpha=0,5}^{1} (6\alpha - 3)d\alpha + \int_{\alpha=0}^{0,4} (-2 + 5\alpha)d\alpha + \int_{\alpha=0,4}^{1} (5\alpha - 2)d\alpha = 2{,}8.$$

Eğer $\beta_1 = 2$ ve $\beta_2 = 16$ seçilirse

$$\delta(A,B) = \frac{1}{2(16-2)}(2,8) = 0,1$$

olur. Yukarıdaki şekildeki ABC, CDE, DEF, FGH üçgenlerin alanları toplanarak uzaklık ölçümünün doğruluğu kontrol edilebilir.

$$A(ABC) + A(CDE) + A(DEF) + A(FGH) = \frac{3.0,5}{2} + \frac{3.0,5}{2} + \frac{3.0,6}{2} + \frac{2.0,4}{2} = 2,8$$

dır.

2.2.3.2 Fuzzy Sayılar Arasındaki Uzaklık

$L(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ deki tüm fuzzy sayıların ailesi olmak üzere, $A, B \in L(\mathbb{R})$ olsun. A ve B fuzzy sayıları arasındaki uzaklığı hesaplamak için bir sonraki bölümde

$$\bar{d}: L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(A,B) = \sup_{\alpha\in[0,1]} d_H(A_\alpha, B_\alpha) = \sup_{\alpha\in[0,1]} max\{|a_1^\alpha - b_1^\alpha|, |a_2^\alpha - b_2^\alpha|\} \tag{2.49}$$

metriği kullanılacaktır.

2.2.4 Fuzzy Sayı Dizileri

2.2.4.1 Tanım (Fuzzy Sayı Dizisi)

Bir $u = \{u_k\}$ fuzzy sayı dizisi, $u: \mathbb{N} \to L(\mathbb{R})$ şeklinde tanımlanan bir u dönüşümüdür. u_k fuzzy sayısı fonksiyonun $k \in \mathbb{N}$ deki değerini gösterir ve dizinin k −yıncı terimi olarak adlandırılır (Matloka 1986).

2.2.4.2 Tanım (Fuzzy Yakınsaklık)

$\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $k > n_0$ iken $\bar{d}(u_k, u_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı mevcutsa $u = \{u_k\}$ fuzzy sayı dizisi bir u_0 fuzzy sayısına ***yakınsaktır*** denir ve $\lim_{k\to\infty} u_k = u_0$ şeklinde gösterilir. $\lim_{k\to\infty} u_k$ mevcutsa $\{u_k\}$ dizisi ***yakınsaktır***, aksi halde ıraksaktır denir.

Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi $c(F)$ ile gösterilecektir.

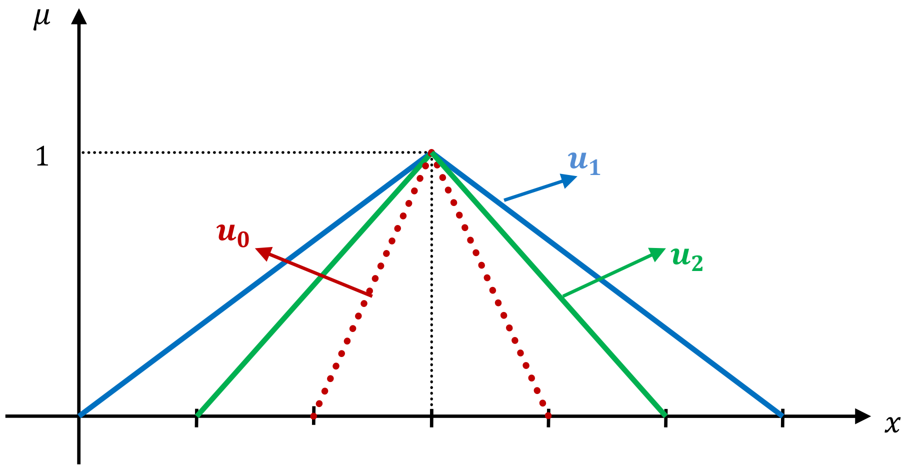
Örnek

$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.50}$$

üyelik fonksiyonu ile belirli $u = \{u_k\}$ fuzzy sayı dizisinin limiti

$$u_0(x) = \begin{cases} x - 2, x \in [2,3] \text{ ise} \\ -x + 4, x \in [3,4] \text{ ise} \\ 0, \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.51}$$

üyelik fonksiyonuna sahip bir fuzzy sayısıdır.



Şekil 2.26 u_k fuzzy sayısının u_0 fuzzy sayısına yakınsaması

Aşağıdaki iki teoremin ispatı klasik anlamdaki ispata benzer olduğundan teoremler ispatına değinilmeden verilecektir.

Teorem

Yakınsak bir $u = \{u_k\}$ fuzzy sayı dizisinin limiti tektir.

Teorem

Eğer $\lim_{k\to\infty} u_k = u_0$ ve $\lim_{k\to\infty} v_k = v_0$ ise

i) $\lim_{k\to\infty}(u_k + v_k) = u_0 + v_0,$ (2.52)

ii) $\lim_{k\to\infty}(u_k - v_k) = u_0 - v_0,$ (2.53)

iii) $\lim_{k\to\infty}(u_k v_k) = u_0 v_0$, (2.54)

iv) $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{u_k}{v_k}\right) = \frac{u_0}{v_0}$, (her $k \in \mathbb{N}$ için $0 \notin \text{day}(v)$ ve $0 \notin \text{day}(v_0)$)

özellikleri geçerlidir (Matloka 1986).

2.2.4.3 Tanım (Fuzzy Cauchy Dizisi)

Her $\varepsilon > 0$ ve her $k > k_0$ için $\bar{d}(u_k, u_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_0 pozitif tamsayısı mevcut ise $u = \{u_k\}$ fuzzy dizisine bir ***Cauchy dizisi*** denir.

Gerçel sayı dizilerinde olduğu gibi yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda fuzzy Cauchy dizisidir.

2.2.4.4 Tanım (Fuzzy Alt Dizi)

$u = \{u_k\}$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\{k_n\}$ doğal sayıların artan bir dizisi olsun. Bu durumda $\{u_{k_n}\}$ dizisine $\{u_k\}$ fuzzy dizisinin bir fuzzy ***alt dizisi*** denir.

2.2.4.5 Teorem

Yakınsak bir $u = \{u_k\}$ fuzzy sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizisinin limiti de $u = \{u_k\}$ fuzzy sayı dizisinin limiti ile aynıdır.

2.2.4.6 Tanım (Sınırlılık)

Eğer $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ fuzzy sayılar cümlesi sınırlı ise $u = \{u_k\}$ fuzzy sayı dizisine ***sınırlıdır*** denir. Yani sınırlı dizi; herhangi bir k sayısı için $K \leq u_k \leq M$ olacak şekilde K ve M gibi iki fuzzy sayısının mevcut olmasıdır.

Tüm sınırlı fuzzy sayı dizileri $m(\text{F})$ ile gösterilecektir.

Örnek

$$u_k(x) = \begin{cases} S_1, & k \text{ tek ise} \\ S_2, & k \text{ çift ise} \end{cases} \tag{2.55}$$

şeklinde tanımlı

$$S_1(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ -2x + 3, & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.56}$$

$$S_2(x) = \begin{cases} 2x - 7, & x \in \left[\frac{7}{2}, 4\right] \\ -2x + 9, & x \in \left[4, \frac{9}{2}\right] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.57}$$

üyelik fonksiyonları ile belirli $\{u_k\}$ dizisi sınırlıdır.

2.3 FUZZY NOKTA

2.3.1 Tanım (Fuzzy Nokta)

$X \neq \emptyset$, $\lambda \in [0,1]$ ve her $y \in X$ için

$$x_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda, y = x \\ 0, y \neq x \end{cases} \tag{2.58}$$

olarak tanımlanan fuzzy kümelere ***fuzzy nokta*** denir (Ming and Ying-Ming 1980).

Yani $X \neq \emptyset$ olmak üzere X in herhangi bir fuzzy alt kümesi; $y = x \in X$ noktası hariç diğer bütün noktalarda 0 değerini alıyorsa bu fuzzy kümeye X de ***fuzzy nokta*** denir.

Bu tezde fuzzy noktalar (x, λ) ile, X üzerindeki tüm fuzzy noktaların kümesi ise $P_F(X)$ ile gösterilecektir. Özel olarak $X = \mathbb{R}$ ise fuzzy noktalar, ***fuzzy skalerler*** olarak adlandırılacak tüm fuzzy skalerlerin kümesi de $S_F(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir.

Bir A fuzzy kümesi kendisine ait olan fuzzy noktaların kümesi olarak;

$$A = \{(x, \lambda) : \mu_A(x) \geq \lambda\} \tag{2.59}$$

şeklinde düşünülebilir.

2.3.1.1 Tanım

(a, λ) ve (b, λ) iki fuzzy skaler olsun.

i) $a > b$ ya da $(a, \lambda) = (b, \gamma)$ ise (a, λ) skalerine (b, γ) skalerinden büyüktür denir ve kısaca $(a, \lambda) \succcurlyeq (b, \gamma)$ ile gösterilir.

ii) $a \geq b$ ise (a, λ),(b, γ) den küçük değildir denir ve $(a, \lambda) \succ (b, \gamma)$ ya da $(b, \gamma) \prec (a, \lambda)$ ile gösterilir.

iii) $a \geq 0$ ise (a, λ)a negatif olmayandır denir ve tüm negatif olmayan fuzzy skalerlerin kümesi $S_F^+(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}$, $S_F^+(\mathbb{R})$ olarak düşünülürse $(\mathbb{R}, \succ)$ ve $(\mathbb{R}, \succcurlyeq)$, $(\mathbb{R}, \geq)$ ile aynıdır.

Aşağıdaki tanımda fuzzy noktalar kümesi üzerinde tanımlı metrik tanımı verilecektir. Bu tanım üçgen eşitsizliğinde "≥" yerine "≻" alınmasının dışında klasik metrik tanımına benzerdir.

2.3.1.2 Tanım

$\{(a_n, \lambda_n)\}$ fuzzy skalerlerin bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \{\lambda_i : \lambda_i < \lambda, i \in \mathbb{N}\}$ sonlu bir küme ve $\{\lambda_i\}$ nin $\{\lambda_l\}$ ile gösterilen bir alt dizisi var öyle ki $\lim_{n\to\infty} \lambda_l = \lambda$ ise; $\{(a_n, \lambda_n)\}$ fuzzy skalerler dizisi $\lambda \neq 0$ olmak üzere (a, λ) fuzzy skalerine ***yakınsar*** denir ve $\lim_{n\to\infty}(a_n, \lambda_n) = (a, \lambda)$ ile gösterilir.

2.3.1.3 Tanım

$(P_F(X), d_F)$, (X, d) tarafından indirgenmiş bir fuzzy metrik uzay ve $\{(x_n, \lambda_n)\}$; $(P_F(X), d_F)$ deki fuzzy noktaların bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\big((x_n, \lambda_n), (x, \lambda)\big) = 0_\lambda$ ve her $\gamma \in]0,1]$için $\lambda \geq \gamma$ vardır öyle ki $\lim_{n\to\infty}\big((x_n, \lambda_n), (x, \gamma)\big) = 0_\lambda$ise$\{(x_n, \lambda_n)\}$ fuzzy skalerler dizisi(x, λ) ya yakınsar denir. (x, λ) skalerine de dizinin ***limiti*** denir ve $\lim_{n\to\infty}(x_n, \lambda_n) = (x, \lambda)$ ile gösterilir.

2.3.1.4 Tanım

$(x_n, \lambda_n) \in (P_F(X), d_F)$ fuzzy noktalar dizisi bir ***Cauchy dizisi*** olarak adlandırılır eğer $\lambda \in]0,1]$ vardır öyle ki her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} d_F\big((x_{m+n}, \lambda_{m+n}), (x_n, \lambda_n)\big) = 0_\lambda. \qquad (2.60)$$

2.3.1.5 Tanım

Eğer bir fuzzy metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa, bu uzaya ***tam*** fuzzy metrik uzay denir.

2.3.2 Tanım (Fuzzy Noktalar Kümesi Üzerinde Fuzzy Metrik) (Xia and Gua 2004)

X boştan farklı bir küme ve $d_F : P_F(X) \times P_F(X) \to S_F^+(\mathbb{R})$ bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $\{(x, \lambda), (y, \gamma), (z, \rho)\} \subset P_F(X)$ için d_F dönüşümü

i) Negatif olmayanlık:

$d_F\big((x, \lambda), (y, \gamma)\big) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = y$ ve $\lambda = \gamma = 1$ dır.

ii) Simetriklik:

$d_F\big((x, \lambda), (y, \gamma)\big) = d_F\big((y, \gamma), (x, \lambda)\big)$;

iii) Üçgen eşitsizliği:

$$d_F\big((x,\lambda),(z,\rho)\big) \prec d_F\big((x,\lambda),(y,\gamma)\big) + d_F\big((y,\gamma),(z,\rho)\big)$$

koşullarını sağlarsa d_F ye $P_F(X)$ te tanımlanan bir ***fuzzy metrik***; $(P_F(X), d_F)$ ye fuzzy ***metrik uzay***; $d_F\big((x,\lambda),(y,\gamma)\big)$ ye de iki fuzzy nokta arasında tanımlanan ***fuzzy uzaklık*** denir.

2.3.2.1 Örnek

(X,d) bir klasik metrik uzay olsun. $P_F(X)$ teki keyfi $(x,\lambda),(y,\gamma)$ iki fuzzy noktasının uzaklığı

$$d_F\big((x,\lambda),(y,\gamma)\big) = (d(x,y), \min\{\lambda,\gamma\})$$

olarak tanımlanırsa; $(P_F(X), d_F)$ bir fuzzy metriktir.

Çözüm.

i) Negatif olmayanlık:

$P_F(X)$ teki keyfi iki fuzzy nokta $(x,\lambda),(y,\gamma)$olsun. d, bir klasik metrik olduğundan $d(x,y) \geq 0$ dır. 1.6 tanımdan

$$d_F\big((x,\lambda),(y,\gamma)\big) = (d(x,y), \min\{\lambda,\gamma\})$$

negatif olmayan fuzzy skalerdir.

$d_F\big((x,\lambda),(y,\gamma)\big) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $d(x,y) = 0$ ve $\min\{\lambda,\gamma\} = 1, x = y$ ve $\lambda = \gamma = 1$

olmasıdır.

ii) Simetriklik:

Her $\{(x,\lambda),(y,\gamma)\} \subset P_F(X)$ için,

$$d_F\big((x,\lambda),(y,\gamma)\big) = (d(x,y), \min\{\lambda,\gamma\}) = (d(y,x), \min\{\gamma,\lambda\}) = d_F\big((y,\gamma),(x,\lambda)\big)$$

dır.

iii) Üçgen eşitsizliği:

Her $\{(x,\lambda),(y,\gamma),(z,\rho)\} \subset P_F(X)$ için

$$d_F\big((x,\lambda),(z,\rho)\big) = (d(x,z), \min\{\lambda,\rho\}) \prec \big((d(x,y) + d(y,z), \min\{\lambda,\rho,\gamma\})\big)$$

$= (d(x,y), \min\{\lambda,\gamma\}) + (d(y,z), \min\{\gamma,\rho\})$

$= d\big((x,\lambda),(y,\gamma)\big) + d\big((y,\gamma),(z,\rho)\big)$

olur.

2.4 KLASİK ANLAMDA METRİK UZAYLAR

2.4.1 Tanım (Klasik Metrik)

X boştan farklı bir küme olsun. Her $x,y,z \in X$ için

d1) $d(x,y) \geq 0,$ (2.61)

d2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$ (2.62)

d3) $d(x,y) = d(y,x),$ (2.63)

d4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$ (2.64)

şartlarını sağlayan bir $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna ***metrik*** (***klasik anlamda metrik***), (X,d) çiftine ise metrik (klasik anlamda metrik) uzay denir.

2.4.2 Tanım ($D -$ Metrik (ya da Genelleştirilmiş Metrik) Uzaylar) (Sedghi vd. 2007)

İlk defa Dhage (1992) tarafından tanıtılan $D -$ metrik uzaylar, daha sonra $D -$ metrik uzaylar (Sedghi vd. 2007) tarafından aşağıdaki gibi tekrar tanımlandı:

X boştan farklı bir küme olsun. Her $x,y,z,a \in X$ için

i) $D(x,y,z) \geq 0,$ (2.65)

ii) $D(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z,$ (2.66)

iii) $D(x,y,z) = D(p\{x,y,z\})$ p bir permütasyon fonksiyonu olmak üzere, (2.67)

iv) $D(x,y,z) \leq D(x,y,a) + D(a,z,z).$ (2.68)

şartlarını sağlayan bir $D: X^3 \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ***genelleştirilmiş metrik*** (***ya da D − metrik***), (X,D) çifti ise genelleştirilmiş metrik (ya da $D -$ metrik) uzay olarak adlandırılır.

2.4.2.1 Not

(Sedghi vd. 2007) tarafından tekrar tanımlanan $D -$ metrikler, $D^* -$ olarak sembolize edilmiştir. Fakat bu sembolün ileriki bölümlerde bulunan $D^* -$ fuzzy metrik sembolüyle karışmaması için $D -$ sembolü kullanılmaya devam edilecektir.

2.4.2.2 Örnek

$x,y,z \in X$ ve d bir klasik metrik olmak üzere; $D(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)$ bir genelleştirilmiş metrik (ya da $D -$ metrik) tir.

Çözüm.

Her $x, y, z, a \in X$ için

i) d metrik olduğundan $d(x,y) \geq 0$, $d(y,z) \geq 0$, $d(z,x) \geq 0$ dır. Dolayısıyla

$D(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \geq 0$

dır.

ii) $D(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) = 0$

$\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \wedge d(y,z) = 0 \wedge d(z,x) = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$

iii) d, bir metrik olduğundan;

$d(x,y) = d(y,x), d(y,z) = d(z,)$ ve $d(z,x) = d(x,z)$

dir. Dolayısıyla;

$D(x,y,z) = D(p\{x,y,z\})$

dır.

iv) d, bir metrik olduğundan;

$d(y,z) \leq d(y,a) + d(a,z)$ ve $d(z,x) \leq d(z,a) + d(a,x)$

tir. Aynı zamanda $d(z,z) = 0$ dır.

$D(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)$

$\leq d(x,y) + d(y,a) + d(a,z) + d(z,a) + d(a,x) + d(z,z)$

$= d(x,y) + d(y,a) + d(a,x) + d(a,z) + d(z,z) + d(z,a) = D(x,y,a) + D(a,z,z)$

Yani;

$D(x,y,z) \leq D(x,y,a) + D(a,z,z)$

dir.

O halde $D(x,y,z)$ fonksiyonu bir $D-$ metriktir.

2.4.2.3 Örnek

i) $D(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\},$ (2.69)

ii) $X = \mathbb{R}^n$, her $p \in \mathbb{R}^+$ için

$$D(x,y,z) = \left(\|x-y\|^{\frac{1}{p}} + \|y-z\|^{\frac{1}{p}} + \|z-x\|^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.70}$$

iii) $X = \mathbb{R}^+$ için

$$D(x,y,z,t) = \begin{cases} 0, & x = y = z \text{ ise}, \\ \max\{x,y,z\}, & \text{aksi durumlarda}, \end{cases} \tag{2.71}$$

Hepsi birer $D-$ metriğe örnektir.

2.4.2.4 Uyarı

Bir $D-$ metrik uzayında, $D(x,x,y) = D(x,y,y)$ dır.

Gerçekten;

i) $D(x,x,y) \le D(x,x,x) + D(x,y,y) = D(x,y,y)$ (2.72)

ve benzer olarak

ii) $D(y,x,x) = D(y,y,y) + D(y,x,x) = D(y,x,x)$ (2.73)

Böylece i) ve ii) den $D(x,x,y) = D(x,y,y)$ dır.

2.4.2.5 Tanım (Sınırlılık, Yakınsaklık)

(X,D) bir $D-$ metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

i) X in A alt kümesinin $\boldsymbol{D}-$ ***sınırlı*** olduğu söylenebilir eğer öyle bir $r > 0$ vardır ki her $x,y \in A$ için $D(x,y,y) < r$ dir.

ii) X teki bir $\{x_n\}$ dizisi bir x e ***yakınsaması*** için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ iken $D(x_n,x_n,x) = D(x,x,x_n) \to 0$ dır.

Yani her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \ge n_0$ için

$D(x,x,x_n) < \varepsilon$ dır (2.74)

Bu tanımlar aşağıdaki ile denktir.

Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n,m \ge n_0$için $D(x,x_n,x_m) < \varepsilon$ dır.

Gerçekten (2.74) denkleminden

$D(x_n,x_m,x) = D(x_n,x,x_m) \le D(x_n,x,x) + D(x,x_m,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (2.75)

Tersine, (2.75) denkleminde

$m = n$ seçersek $D(x_n,x_n,x) < \varepsilon$ dır.

iii) X teki bir $\{x_n\}$ dizisi bir ***Cauchy dizisi*** olarak adlandırılır eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n,m \ge n_0$ için $D(x_n,x_n,x_m) < \varepsilon$ dır.

iv) Eğer her Cauchy dizisi yakınsaksa (X,D) $D-$ metrik uzayına ***tam***dır denir

2.4.2.6 Yardımcı Teorem

(X,D) bir $D-$ metrik uzay olsun. Eğer X teki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaksa, x tektir.

Kanıt:

$x_n \to x$, $x_n \to y$ ve $y \neq x$ olsun.$\{x_n\}$; x e ve y ye yakınsadığından, her bir $\varepsilon > 0$ için $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \ge n_1$ için $D(x,x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \ge n_2$ için $D(y,y,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Eğer $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$ olarak seçilirse her $n \ge n_0$ için üçgen eşitsizliğinden

$D(x,x,y) \le D(x,x,x_n) + D(x_n,y,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Böylece $D(x,x,y) = 0$

olur. Bu ise $D(x,x,y) > 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $x = y$ dir.

2.4.2.7 Yardımcı Teorem

(X,D) bir $D-$ metrik uzay olsun. Eğer X teki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaksa, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Kanıt:

$x_n \to x$ olduğu için her $\varepsilon > 0$ için $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_1 \Rightarrow D(x_n,x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m \geq n_2 \Rightarrow D(x,x_m,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Eğer $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$ seçilirse her $n,m \geq n_0$ için üçgen eşitsizliğinden

$D(x_n,x_n,x_m) \leq D(x_n,x_n,x) + D(x,x_m,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

2.4.3 Tanım ($S-$ Metrik Uzaylar)

X boştan farklı bir küme olsun. X üzerindeki bir genelleştirilmiş metrik (ya da $S-$ metriği) Her $x,y,z,a \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir $S: X^3 \to [0,\infty[$ fonksiyonudur:

i) $S(x,y,z) \geq 0,$

ii) $S(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z,$

iii) $S(x,y,z) \leq S(a,y,z) + S(a,x,x)$

(X,S) çiftine de genelleştirilmiş metrik (ya da $S-$ metriği) denir.

d, X üzerinde klasik metrik olmak üzere;

i) $X = \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$S(x,y,z) = \|y + x - 2z\| + \|y - z\|, \tag{2.76}$$

ii) $S(x,y,z) = d(x,y) + d(x,z),$

iii) $X = \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$S(x,y,z) = \|y - z\| + \|y - z\|, \tag{2.77}$$

iv) $X = \mathbb{R}$, $x,y,z \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$S(x,y,z) = |a^{y+z} - a^{2x}| + |y - z| \tag{2.78}$$

v) $x,y,z \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ için

$$S(x,y,z) = \left|a^{d(x,y)} - a^{d(y,z)}\right| + d(y,z) \tag{2.79}$$

fonksiyonları $S-$ metriğe birer örnektir.

2.4.3.1 Uyarı

Bir $S-$ metrik uzayında,

$S(x, y, y) = S(y, x, x)$ (2.80)

dır. Gerçekten;

Üstteki tanımdaki 2) ve 3) ten

i) $S(x, y, y) \leq S(y, y, y) + S(y, x, x) = S(y, x, x)$ (2.81)

dır. Benzer olarak;

ii) $S(y, x, x) \leq S(x, x, x) + S(x, y, y) = S(x, y, y)$ (2.82)

dır. Böylece i) ve ii) den

$S(x, y, y) = S(y, x, x)$ (2.83)

dir.

2.4.3.2 Uyarı

(X, S) bir $S-$ metrik uzay olsun. Eğer $f: X^2 \to [0, \infty[$, her $x, y \in X$ için $f(x, y) = S(x, y, y)$ olarak tanımlanırsa; f, X üzerinde bir klasik metriktir.

Kanıt:

Metrik özelliklerinden d1) , d2) oldukça açıktır.

d3) özelliği incelenecek olursa;

$f(x, z) = S(x, z, z) \leq S(y, z, z) + S(y, x, x) = S(x, y, y) + S(y, z, z) = f(x, y) + f(y, z)$

dır. Böylece f, X üzerinde bir klasik metriktir.

2.4.3.3 Tanım (Sınırlılık)

X in A alt kümesi ***$S-$ sınırlıdır*** denir eğer bir $r > 0$ vardır öyle ki her $x, y \in A$ için $S(x, y, y) < r$.

2.4.3.4 Tanım (Yakınsaklık)

X teki bir $\{x_n\}$ dizisinin x e yakınsaması için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ iken $S(x_n, x, x) = S(x, x_n, x_n) \to 0$. Yani her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n \geq n_0$ için $S(x, x_n, x_n) < \varepsilon$ olmasıdır.

2.4.3.5 Tanım (Cauchy Dizisi)

X teki bir $\{x_n\}$ dizisi ***Cauchy dizisi*** olarak adlandırılır eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m \geq n_0$ için $S(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$ dır.

2.4.3.6 Tanım (Tamlık)

Eğer (X,S) $S-$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa, bu uzaya ***tam*** metrik uzay denir.

2.4.3.7 Yardımcı Teorem

(X,S) bir $S-$ metrik uzayı olsun. Eğer $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri varsa $S(x_n, y_n, y_n) \to S(x,y,y)$ dır.

Kanıt:

X^3 te $(\{x_n, y_n, y_n\})$ dizisi bir $(x,y,y) \in X \times X \times X$ e yakınsadığından; yani her $\varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ x, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n =$ y olduğundan

öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_1$ için $S(x,x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$,

ve öyle bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_2$ için $S(y,y,y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

dır. Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçilirse, her $n \geq n_0$ için üçgen eşitsizliğinden

$$S(x_n, y_n, y_n) \leq S(x, y_n, y_n) + S(x, x_n, x_n) \leq S(y, y_n, y_n) + S(y,x,x) + S(x, x_n, x_n)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + S(y,x,x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + S(y,x,x)$$

dır. Böylece

$$S(x_n, y_n, y_n) - S(y,x,x) < \varepsilon$$

dır. Diğer yandan

$$S(y,x,x) \leq S(x_n,x,x) + S(x_n,y,y) \leq S(x_n,x,x) + S(y_n,y,y) + S(y_n,x_n,x_n)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + S(x_n,y_n,y_n) = S(x_n,y_n,y_n) + \varepsilon.$$

yani

$$S(y,x,x) - S(x_n,y_n,y_n) < \varepsilon.$$

Bu yüzden $|S(x_n,y_n,y_n) - S(x,y,y)| < \varepsilon$,

yani

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n,y_n,y_n) = S(x,y,y)$$

dır. ■

2.4.3.8 Yardımcı Teorem

(X,S) bir $S-$ metrik uzay olsun. Eğer X teki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaksa, x tektir.

Kanıt:

$x_n \to y$ ve $y \neq x$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi x e ve y ye yakınsadığı için

Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_1$ için $S(x_n, x, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

ve

öyle bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_2$ için $S(x_n, y, y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçilirse, her $n \geq n_0$ için üçgen eşitsizliğinden

$S(x, y, y) \leq S(x_n, x, x) + S(x_n, y, y) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Böylece

$S(x, y, y) = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x = y$

dir. ■

2.4.3.9 Yardımcı Teorem

(X, S) bir $S -$ metrik uzay olsun. Eğer X teki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsarsa, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Kanıt:

$x_n \to x$ olduğundan; her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_1$ için $S(x, x_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

ve

öyle bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $m \geq n_2$ için $S(x, x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçilirse; o halde her $n, m \geq n_0$ için üçgen eşitsizliğinden

$$S(x_n, x_m, x_m) \leq S(x, x_n, x_n) + S(x, x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Böylece

$\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. ■

BÖLÜM 3

FUZZY METRİK UZAYLAR

3.1 KRAMOSİL VE MİCHALEK ANLAMINDA FUZZY METRİK UZAYLAR

3.1.1 Tanım

$E \subset \mathbb{R}$, $X \times X \times E$ kartezyen çarpımı üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan f_R karakteristik fonksiyonu ile belirli R fuzzy kümesine X üzerinde bir ***fuzzy metrik*** denir:

i) Her $x, y \in X$ ve her $\lambda \leq 0$ için $f_R(x, y, \lambda) = 0,$ (3.1)

ii) $\lambda > 0$ keyfi olmak üzere $f_R(x, y, \lambda) = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = y,$ (3.2)

iii) Her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in E$ için $f_R(x, y, \lambda) = f_R(y, x, \lambda),$ (3.3)

iv) S:$[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ölçülebilir, ikili gerçel fonksiyon; $\lambda, \mu \in E$ ve $S(1,1) = 1$ olmak üzere

$$f_R(x, z, \lambda + \mu) \geq S\big(f_R(x, y, \lambda), f_R(y, z, \mu)\big), \tag{3.4}$$

v) $f_R(x, y, \lambda)$; $\lim_{\lambda \to \infty} f_R(x, y, \lambda) = 1$ olmak üzere her $(x, y) \in X \times X$ çifti için soldan sürekli ve λ nın artan bir fonksiyonudur (Kramosil and Michalek 1975).

Özel olarak, 1975 yılında Kramosil ve Michalek, klasik metrik uzayın bir diğer genelleştirilmesi olan ve Menger tarafından 1942 yılında tanımlanıp, Schweizer ve Sklar tarafından 1960 yılında geliştirilen olasılıksal metrik uzay kavramını fuzzy duruma genelleştirerek fuzzy metrik uzayı tanımladılar.

3.1.2 Tanım

3.1.1 Tanım' daki $ii)$ özelliği yerine aşağıdaki $ii)'$ alınırsa; ***R*** fuzzy kümesine ***fuzzy yarı-metrik*** denir (Kramosil and Michalek 1975).

ii)′ Her $\lambda > 0$ ve $x \in X$ için $f_R(x, x, \lambda) = 1.$ (3.5)

3.1.3 Tanım (Yakınsaklık)

$(X, f_R, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. $\{x_n\}$, X te bir dizi olmak üzere, eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_R(x_n, x, t) = 1 \tag{3.6}$$

ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına ***yakınsıyor*** denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

3.1.4 Tanım (Cauchy Dizisi)

$\{x_n\}$, X te bir dizi olmak üzere, eğer her $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_R(x_{n+p}, x_n, t) = 1 \tag{3.7}$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir ***Cauchy dizisi*** denir.

3.2 KALEVA VE SEİKKELA ANLAMINDA FUZZY METRİK UZAYLAR

Ön Bilgiler

Negatif olmayan tüm fuzzy sayılarının kümesi $\mathcal{G}$ ile gösterilecektir. (Her $t < 0$ için $u(t) = 0$ ise u fuzzy sayısı negatif olmayandır.)

$\mathbb{R}$ deki tüm fuzzy sayılarının kümesi için ise $L(\mathbb{R})$ sembolü kullanılacaktır. Fuzzy sayıların toplamaya ve çarpmaya göre birimleri sırasıyla $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ ile gösterilecektir. $r \in \mathbb{R}$ için $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısı

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 1, & t = r \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.1 Tanım

X bir küme, $L, R: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ simetrik, artan iki dönüşüm ve $L(0,0) = 0, R(1,1) = 1$ olsun. Eğer $\bar{d}: X \times X \to \mathcal{G}$ fonksiyonu

i) $\bar{d}(x,y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y,$ (3.9)

ii) Her $x, y \in X$ için $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x),$ (3.10)

iii) Her $x, y, z \in X$ için

a) $s \le u_1(x,z)$, $t \le u_1(z,y)$, $s + t \le u_1(x,y)$ olmak üzere

$$\bar{d}(x,y)(s+t) > L\left(\bar{d}(x,z)(s), \bar{d}(z,y)(t)\right) \tag{3.11}$$

b) $\bar{d}(x,y)(s+t) \leq R\left(\bar{d}(x,z)(s), \bar{d}(z,y)(t)\right)$ (3.12)

$s \geq u_1(x,z)$ (3.13)

$t \geq u_1(z,y)$ (3.14)

$s+t \geq u_1(x,y)$ (3.15)

koşullarını sağlıyorsa $(X, \bar{d}, L, R)$ ye ***fuzzy metrik uzay*** denir (Kaleva and Seikkela 1984).

3.2.2 Tanım

Bir $(X, \bar{d}, L, R)$ fuzzy metrik uzayındaki yakınsaklık

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} \bar{d}(x_n, x) = \bar{0}$ (3.16)

şeklinde tanımlanır (Kaleva and Seikkela 1984).

3.2.3 Tanım

X teki bir $\{x_n\}$ dizisi $\lim_{n,m\to\infty} \bar{d}(x_m, x_n) = \bar{0}$ koşulunu sağlıyor ise bu diziye bir ***Cauchy dizisi*** denir.

Eğer X teki her Cauchy dizisi yakınsaksa, bu fuzzy metrik uzaya ***tam fuzzy metrik uzay*** denir (Kaleva and Seikkela 1984).

3.3 GEORGE VE P. VEERAMONİ ANLAMINDA FUZZY METRİK UZAYLAR

George ve Veeramani; Kramosil ve Michalek' in fuzzy metrik tanımını 1994 yılında fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff topolojisini elde etmek için aşağıdaki şekilde geliştirdiler.

Bu bölümde George ve Veeramani anlamında fuzzy metrik uzaylar incelenecektir.

3.3.1 Tanım (Sürekli $t-$ Norm)

$*: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi için

i) $*$ işlemi değişmeli ve birleşmelidir.

ii) $*$ işlemi süreklidir.

iii) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$.

iv) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olan her $a,b,c,d \in [0,1]$ için $a * b \leq c * d$.

koşulları sağlanıyorsa $*$ ikili işlemine ***sürekli*** $\boldsymbol{t-}$ ***norm*** denir (Schwiezer and Sklar1960).

3.3.2 Örnek

$a * b = ab$ şeklinde tanımlanan ikili işlem bir sürekli $t-$ normdur. Gerçekten;

Her $a, b, c, d \in [0,1]$ için

i) $a * b = ab = ba = b * a$

dır. Dolayısıyla $a * b = b * a$ olduğundan $*$ işlemi değişmelidir.

Öte yandan

$(a * b) * c = (ab) * c = (ab)c = a(bc) = a(b * c) = a * (b * c)$

$\Longrightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$

olduğundan $*$ işlemi birleşmelidir.

ii) $(a_n), (b_n);$ $[0,1]$ üzerinde iki dizi ve $a_n \longrightarrow a, b_n \longrightarrow b$ olsun.

$a_n \longrightarrow a$ ve $b_n \longrightarrow b$ olduğundan $a_n b_n \longrightarrow ab$

dır. O halde

$a_n * b_n \longrightarrow a * b$

olur. Yani $*$ işlemi dizisel süreklidir. Dolayısıyla $*$ işlemi süreklidir.

iii) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a1 = a$

iv) $a \le c$ ve $b \le d$ olan her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $ab \le cd$

dir. Yani $a * b \le c * d$

dir.

O halde $*$ işlemi bir sürekli $t-$ normdur.

3.3.3 Örnek

Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = \max\{0, a + b - 1\}$ şeklinde tanımlı ikili işlem bir sürekli $t-$ normdur.

Çözüm.

Gerçekten; her $a, b, c, d \in [0,1]$ için

i) $a * b = \max\{0, a + b - 1\} = \max\{0, b + a - 1\} = b * a$

dır. Yani $*$ değişmelidir.

$(a * b) * c = (\max\{0, a + b - 1\}) * c$

$= \max\{0, \max\{0, a + b - 1\} + c - 1\}$

$= \max\{0, a + b - 1 + c - 1\} = \max\{0, a + b + c - 1 - 1\}$

$= \max\{0, a + \max\{0, b + c - 1\} - 1\} = a * \max\{0, b + c - 1\} = a * (b * c)$

$\Longrightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$

Yani $*$ birleşme özelliğine sahiptir.

ii) $(a_n), (b_n)$, $[0,1]$ üzerinde iki dizi ve $a_n \longrightarrow a, b_n \longrightarrow b$ olsun.

$a_n \longrightarrow a$ ve $b_n \longrightarrow b \Longrightarrow a_n * b_n = \max\{0, a_n + b_n - 1\} \longrightarrow \max\{0, a + b - 1\} = a * b$

dır. $a_n * b_n \longrightarrow a * b$ olduğundan $*$ dizisel süreklidir.

O halde $*$ süreklidir.

iii) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = \max\{0, a + 1 - 1\} = \max\{0, a\} = a \Longrightarrow a * 1 = a$.

iv) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olmak üzere her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a + b \leq c + d$ dir. O halde

$a + b - 1 \leq c + d - 1 \Longrightarrow \max\{a + b - 1\} \leq \max\{c + d - 1\} \Longrightarrow a * b \leq c * d$

dir.

Dolayısıyla $*$ sürekli $t-$ normdur.

3.3.4 Örnek

Benzer şekilde her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = \min\{a, b\}$ işleminin de bir sürekli $t-$ norm olduğu kolayca gösterilebilir.

3.3.5 Tanım

X boş olmayan bir küme, $*$ işlemi sürekli t −norm ve M; $X^2 \times]0, \infty[$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. M fonksiyonu; her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için

i) $M(x, y, t) > 0,$ (3.17)

ii) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y,$ (3.18)

iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t),$ (3.19)

iv) Her $t, s > 0$ için $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ (3.20)

v) $M(x, y, .):]0, \infty[\rightarrow [0,1]$ süreklidir.

koşullarını sağlıyorsa; M ye X üzerinde bir ***fuzzy metrik*** ve $(X, M, *)$ üçlüsüne de bir ***fuzzy metrik uzay*** denir (George and Veeramoni 1994).

3.3.6 Teorem

Her $x, y \in X$ için $M(x, y, .)$ artan bir fonksiyondur (George ve P. Veeramoni, 1994).

Kanıt.

Kabul edelim ki $0 < t < s$ ve $M(x, y, s) < M(x, y, t)$ olsun. O halde

$M(x, y, t) * M(y, y, s - t) \leq M(x, y, s) < M(x, y, t)$

olur. Diğer taraftan

$M(y, y, s - t) = 1$ olduğundan

$M(x, y, t) * 1 = M(x, y, t) < M(x, y, t)$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$

olmalıdır. O halde $M(x, y, .)$ artan bir fonksiyondur. ■

3.3.7 Örnek

(X, d) bir metrik uzay ve $a * b = ab$ olsun. Her $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için

$$M_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} \tag{3.21}$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir fuzzy metriktir (George and Veeramoni 1994).

Kanıt.

$x, y, z \in X$; $t, s > 0$ *ve* $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için

i) d, bir metrik olduğundan her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır.

$k, m, n \in \mathbb{R}^+, t > 0$ olduğundan $M_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt \quad + md(x,y)} > 0$

dır.

ii) $M_d(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow kt^n = kt^n + md(x, y) \Leftrightarrow md(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

iii) d, metrik olduğundan $d(x, y) = d(y, x)$ tir. Dolayısıyla

$M_d(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n+md(x,y)} = \frac{kt^n}{kt^n+md(y,x)} = M_d(y,x,t).$

iv) $M_d(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$

olduğu yani;

d bir metrik $k,m,n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} \cdot \frac{ks^n}{ks^n + md(y,z)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)}$$

olduğu gösterilmelidir. d bir metrik olduğundan

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

dir. Öte yandan

$\frac{k(t+s)^n}{kt^n} > 1, \frac{k(t+s)^n}{ks^n} > 1$ dir ve dolayısıyla

$m\frac{k(t+s)^n}{kt^n} > m, m\frac{k(t+s)^n}{ks^n} > m$

dir.

$md(x,z) \leq m\frac{k(t+s)^n}{kt^n} d(x,y) + m\frac{k(t+s)^n}{ks^n} md(y,z)$

$$\Rightarrow \frac{md(x,z)}{k(t+s)^n} \leq \frac{md(x,y)}{kt^n} + \frac{md(y,z)}{ks^n} = \frac{ks^n md(x,y) + kt^n md(y,z)}{k^2(st)^n}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{md(x,z)}{k(t+s)^n} \leq 1 + \frac{ks^n md(x,y) + kt^n md(y,z)}{k^2(st)^n}$$

$\Rightarrow \frac{k(t+s)^n + md(x,z)}{k(t+s)^n} \leq \frac{k^2(st)^n + ks^n md(x,y) + kt^n md(y,z)}{k^2(st)^n}$

olur. Metrik tanımından ve $m > 0$ olduğundan;

$m^2 d(x,y) d(y,z) \geq 0$

dır. Dolayısıyla

$$\frac{k(t+s)^n + md(x,z)}{k(t+s)^n} \leq \frac{k^2(st)^n + ks^n md(x,y) + kt^n md(y,z)}{k^2(st)^n}$$

$$\leq \frac{k^2(st)^n + ks^n md(x,y) + kt^n md(y,z) + m^2 d(x,y) d(y,z)}{k^2(st)^n}$$

$$\frac{k^2(st)^n}{k^2(st)^n + ks^n md(x,y) + kt^n md(y,z) + m^2 d(x,y) d(y,z)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)}$$

$$\Rightarrow \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} \cdot \frac{ks^n}{ks^n + md(y,z)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)}$$

$\Rightarrow M_d(x,y,t) * M_d(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$

bulunur.

v) Her $x, y \in X$, $t_0 > 0$ için

$$\lim_{t \to t_0} M_d(x,y,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = \frac{\lim_{t \to t_0} kt^n}{\lim_{t \to t_0} kt^n + md(x,y)} = \frac{kt_0{}^n}{kt_0{}^n + md(x,y)}$$

$$= M_d(x,y,t_0)$$

O halde M_d bir fuzzy metriktir.

3.3.8 Sonuç

Yukarıdaki teoremde $k = m = n = 1$ alınırsa

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} \tag{3.22}$$

elde edilir. M_d fuzzy metriğine d tarafından indirgenen ***standart fuzzy metrik*** denir (George and Veeramoni 1994).

3.3.9 Sonuç

Her metrik uzaydan bir fuzzy metrik uzay elde edilebilir (George and Veeramoni 1994).

3.3.10 Örnek

$(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzay ve $a * b = ab$ olsun. $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik her $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ için

$$M_d(x,y,t) = \begin{cases} \frac{t}{t+|x-y|}, 0 < t \leq 1 \\ 0, \ t = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

olarak tanımlansın. $*$ sürekli $t-$normu ile verilen $(X, M_d, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Kanıt:

$x, y, z \in X$; $t, s > 0$ için

i) d bir metrik olduğundan her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y| \geq 0$ dır. Diğer taraftan her $t > 0$ için $t + |x-y| > 0$ dır. O halde

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+|x-y|} > 0$$

dır.

ii) $M_d(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow t = t + |x-y| \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$

iii) $M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+|x-y|} = \frac{t}{t+|y-x|} = M_d(y,x,t)$ (d metrik olduğundan)

iv) $M_d(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{t}{t+|x-y|} . \frac{s}{s+|y-z|} \leq \frac{t+s}{t+s+|x-z|}$

olduğu gösterilmelidir. Metrik tanımından;

$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

dır ve diğer taraftan $\frac{t+s}{t} > 1, \frac{t+s}{s} > 1$

olduğundan

$$|x-z| \leq \frac{t+s}{t}|x-y| + \frac{t+s}{s}|y-z|$$

$$\Rightarrow \frac{|x-z|}{t+s} \leq \frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s} \leq \frac{s|x-y| + t|y-z|}{ts}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{|x-z|}{t+s} \leq 1 + \frac{s|x-y| + t|y-z|}{ts}$$

$$\Rightarrow \frac{t+s+|x-z|}{t+s} \leq \frac{st+s|x-y|+t|y-z|)}{st}$$

olur. Metrik tanımından;

$|x-y|.|y-z| \geq 0$

olduğundan;

$$\frac{t+s+|x-z|}{t+s} \leq \frac{st+s|x-y|+t|y-z|}{st} \leq \frac{st+s|x-y|+t|y-z|+|x-y||y-z|}{st}$$

$$\frac{st}{st+s|x-y|+t|y-z|+|x-y||y-z|} \leq \frac{t+s}{t+s+|x-z|)}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+|x-y|} . \frac{s}{s+|y-z|} \leq \frac{t+s}{t+s+|x-z|}$$

$$\Rightarrow M_d(x,y,t) * M_d(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$$

bulunur.

v) Her $x, y \in X$, $t_0 > 0$ için

$$\lim_{t\to t_0} M_d(x,y,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{t}{t+|x-y|} = \frac{\lim_{t\to t_0} t}{\lim_{t\to t_0} t+|x-y|} = \frac{t_0}{t_0+|x-y|} = M_d(x,y,t_0)$$

dır.

3.3.11 Örnek

$(\mathbb{R},d)$ bir metrik uzay ve $a*b=\min\{a,b\}$ olsun. $d(x,y)=|x-y|$ şeklinde tanımlanan d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik her $x,y\in\mathbb{R}$, $t\in[0,1]$ için $M_d(x,y,t)=\frac{t}{t+|x-y|}$, $M_d(x,y,0)=0$ olarak tanımlansın. $*$ sürekli $t-$ normu ile verilen $(X,M_d,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Kanıt:

i) Her $x,y\in\mathbb{R}$ için d bir metrik olduğundan $d(x,y)=|x-y|\geq 0$ dır. $t>0$ olduğundan $t+|x-y|>0$ dır.

$$M_d(x,y,t)=\frac{t}{t+|x-y|}>0$$

dır.

ii) $M_d(x,y,t)=1 \Leftrightarrow t=t+|x-y| \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x=y.$

iii) $M_d(x,y,t)=\frac{t}{t+|x-y|}=\frac{t}{t+|y-x|}=M_d(y,x,t)$ (d metrik olduğundan)

iv) $M_d(x,y,t)*M(y,z,s)=\min\left\{\frac{t}{t+|x-y|},\frac{s}{s+|y-z|}\right\}\leq\frac{t+s}{t+s+|x-z|}$

olduğu gösterilmelidir. Metrik tanımından;

$|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$ ve $\frac{t+s}{t}>1, \frac{t+s}{s}>1$

olduğundan

$|x-z|\leq\frac{t+s}{t}|x-y|+\frac{t+s}{s}|y-z|$

$$\Rightarrow \frac{|x-z|}{t+s}\leq\frac{|x-y|}{t}+\frac{|y-z|}{s}\leq\frac{s|x-y|+t|y-z|}{ts}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{|x-z|}{t+s}\leq 1+\frac{s|x-y|+t|y-z|}{ts}$$

$\Rightarrow \frac{t+s+|x-z|}{t+s}\leq\frac{st+s|x-y|+t|y-z|)}{st}$

olur. Metrik tanımından;

$|x-y||y-z| \geq 0$

olduğundan;

$$\frac{t+s+|x-z|}{t+s} \leq \frac{st+s|x-y|+t|y-z|}{st} \leq \frac{st+s|x-y|+t|y-z|+|x-y||y-z|}{st}$$

$$\frac{st}{st+s|x-y|+t|y-z|+|x-y||y-z|} \leq \frac{t+s}{t+s+|x-z|)}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+|x-y|}\frac{s}{s+|y-z|} \leq \frac{t+s}{t+s+|x-z|}$$

$$\Rightarrow M_d(x,y,t) * M_d(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$$

bulunur.

v) Her $x, y \in X$, $t_0 > 0$ için

$$\lim_{t\to t_0} M_d(x,y,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{t}{t+|x-y|} = \frac{\lim_{t\to t_0} t}{\lim_{t\to t_0} t+|x-y|} = \frac{t_0}{t_0+|x-y|} = M_d(x,y,t_0)$$

dır. Dolayısıyla $(X, M_d,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3.3.12 Örnek

$C[a,b] = \{f | f: [a,b] \to \text{F fonksiyonu süreklidir}\}$, $(C[a,b], d)$ bir metrik uzay ve $a * b = ab$ olsun. $d(f,g) = sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ şeklinde tanımlanan d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik her $f, g \in C[a,b]$, $t \in [0,1]$ için

$$M_d(f,g,t) = \frac{t}{t+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|},\ M_d(f,g,0) = 0 \tag{3.24}$$

olarak tanımlansın. $*$ sürekli $t-$ normu ile verilen $(C[a,b], M_d,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Kanıt:

i) $t > 0$ ve her $f, g \in C[a,b]$ için d bir metrik olduğundan;

$d(f,g) = sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| \geq 0$

dır. Dolayısıyla

$sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| \geq 0$

dır.

$$M_d(f,g,t) = \frac{t}{t + sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|} > 0$$

dır.

ii) $M_d(f,g,t) = 1 \Leftrightarrow t = t + sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$

$\Leftrightarrow sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| = 0$

$\Leftrightarrow$ Her $x \in [a,b]$ için $|f(x)-g(x)| = 0$

$\Leftrightarrow$ Her $x \in [a,b]$ için $f(x)-g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x).$

iii) $M_d(f,g,t) = \frac{t}{t+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|} = \frac{t}{t+sup_{x\in[a,b]}|g(x)-f(x)|} = M_d(g,f,t).$

iv) $M_d(f,g,t) * M(g,h,s) = \frac{t}{t+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|} \cdot \frac{s}{s+sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}$

$$\leq \frac{t+s}{t+s+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|}$$

eşitsizliği gösterilmelidir.

Metrik tanımından;

$sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)| \leq sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| + sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|$

ve

$\frac{t+s}{t} > 1, \frac{+s}{s} > 1$

olduğundan

$sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)| \leq \frac{t+s}{t} sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| + \frac{t+s}{s} sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|$

$$\Rightarrow \frac{sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|}{t+s} \leq \frac{sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|}{t} + \frac{sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}{s}$$

$$\leq \frac{s.\,sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| + t.\,sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}{ts}$$

$$\Rightarrow\ 1+\frac{sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|}{t+s}$$

$$\leq 1+\frac{ssup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+tsup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}{ts}$$

$$\Rightarrow\ \frac{t+s+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|}{t+s}\leq\frac{st+s.sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+t.sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|)}{st}$$

olur. Metrik tanımından;

$$sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|\geq 0$$

olduğundan;

$$\frac{t+s+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|}{t+s}$$

$$\leq\frac{st+ssup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+tsup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}{st}$$

$$\leq\frac{st+s.sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+t.sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}{st}$$

$$\Rightarrow\frac{st}{st+s+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+tsup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}$$

$$\leq\frac{t+s}{t+s+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|}$$

$$\Rightarrow\frac{t}{t+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|}\frac{s}{s+sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|}$$

$$\leq\frac{t+s}{t+s+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|}$$

$$\Rightarrow M_d(f,g,t)*M_d(g,h,s)\leq M_d(f,h,t+s)$$

bulunur.

v) Her $f,g\in C[a,b]$, $t_0>0$ için

$$\lim_{t\to t_0}M_d(f,g,t)=\lim_{t\to t_0}\frac{t}{t+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|}=\frac{\lim\limits_{t\to t_0}t}{\lim\limits_{t\to t_0}t+sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|}$$

$$= \frac{t_0}{t_0 + sup_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|} = M_d(f, g, t_0)$$

Dolayısıyla M_d , bir fuzzy metriktir.

3.3.13 Örnek

$X = \mathbb{R}, a * b = ab$ olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $t \in]0, \infty[$ için $M(x, y, t) = e^{-\frac{|x-y|}{t}}$ olsun. Bu durumda $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm.

i) $|x - y| \geq 0 \Rightarrow \frac{|x-y|}{t} \geq 0 \Rightarrow -\frac{|x-y|}{t} \leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{|x-y|}{t}} > 0 \Rightarrow M(x, y, t) \geq 0$ dır.

ii) $M(x, y, t) = e^{-\frac{|x-y|}{t}} = 1 \Rightarrow \frac{|x-y|}{t} = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $M(x, y, t) = e^{-\frac{|x-y|}{t}} = e^{-\frac{|y-x|}{t}} = M(y, x, t)$.

iv) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ olduğundan

$$|x - z| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)|x - y| + \left(\frac{t+s}{s}\right)|y - z|$$

$$\frac{|x - z|}{t + s} \leq \frac{|x - y|}{t} + \frac{|y - z|}{s}$$

$$e^{\frac{|x-z|}{t+s}} \leq e^{\frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s}}$$

$$e^{\frac{|x-z|}{t+s}} \leq e^{\frac{|x-y|}{t}} . e^{\frac{|y-z|}{s}}$$

$$e^{-\frac{|x-z|}{t+s}} \geq e^{-\frac{|x-y|}{t}} . e^{-\frac{|y-z|}{s}}$$

$$M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

v) $t_0 > 0$ olsun.

$$\lim_{t\to t_0} M(x, y, t) = \lim_{t\to t_0} e^{-\frac{|x-y|}{t}} = e^{-\frac{|x-y|}{t_0}} = M(x, y, t_0)$$

bulunur.

3.3.14 Uyarı

Her fuzzy metrik uzay, bir metrik uzay değildir. Hemen aşağıda buna bir örnek verilmiştir.

3.3.15 Örnek

$X = \mathbb{N}$ ve $a * b = ab$ olsun. Her $t > 0$ için;

$$M(x,y,t)=\begin{cases}\frac{x}{y};x\leq y\\ \frac{y}{x};y\leq x\end{cases} \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanırsa $(\mathbb{N},M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm.

i) Her $x,y\in\mathbb{N}$ için

a) $x\leq y$ ise $M(x,y,t)=\frac{x}{y}>0$ (Çünkü $x,y\in\mathbb{N}$ dir.)

b) $y\leq x$ ise $M(x,y,t)=\frac{y}{x}>0$ (Çünkü $x,y\in\mathbb{N}$ dir.)

Dolayısıyla $M(x,y,t)>0$ dır.

ii) Her $x,y\in\mathbb{N}$ ve $t>0$ için $M(x,y,t)=1\Leftrightarrow x=y$ olduğunu gösterelim.

a) $x\leq y\Rightarrow M(x,y,t)=\frac{x}{y}=1\Leftrightarrow x=y.$

b) $y\leq x\Rightarrow M(x,y,t)=\frac{y}{x}=1\Leftrightarrow x=y.$

iii) Her $x,y\in\mathbb{N}$ ve $t>0$ için

$$M(x,y,t)=\begin{cases}\frac{x}{y};x\leq y\\ \frac{y}{x};y\leq x\end{cases}=\begin{cases}\frac{y}{x};x\leq y\\ \frac{x}{y};y\leq x\end{cases}=M(y,x,t)$$

dır.

iv) Her $x,y\in\mathbb{N}$ ve $s,t>0$ için

$M(x,y,t)*M(y,z,s)\leq M(x,z,t+s)$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $x\leq y$ olsun.

a) $x\leq y\leq z$ ise $M(x,y,t)=\frac{x}{y}$, $M(y,z,s)=\frac{y}{z}$ ve $M(x,z,t+s)=\frac{x}{z}$

olup

$M(x,y,t)*M(y,z,s)=\frac{x}{y}\frac{y}{z}=\frac{x}{z}=M(x,z,t+s)$

dır.

b) $x\leq z\leq y$ ise $M(x,y,t)=\frac{x}{y}$, $M(y,z,s)=\frac{z}{y}$ ve $M(x,,t+s)=\frac{x}{z}$

olup

$$M(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{x}{y}\frac{z}{y} \le \frac{x}{z} = M(x,z,t+s)$$

dır.

c) $z \le x \le y$ ise $M(x,y,t) = \frac{x}{y}, M(y,z,s) = \frac{z}{y}$ ve $M(x,z,t+s) = \frac{z}{x}$

olup

$$M(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{x}{y}\frac{z}{y} \le \frac{z}{x} = M(x,z,t+s)$$

dır. Benzer şekilde $y \le x$ için;

$$M(x,y,t) * M(y,z,s) \le M(x,z,t+s)$$

olduğu görülür.

v) Her $t_0 > 0$ için;

$\lim_{t_0} M(x,y,t) = M(x,y,t_0)$

olduğu açıktır. Bu sebeple $M(x,y,.): (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir. Böylece $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Fakat

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{x}{y}; x \le y \\ \frac{y}{x}; y \le x \end{cases}$$

iken ℕ üzerinde $M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ eşitliğini sağlayacak bir d metriği yoktur. Gerçekten;

X üzerinde $M(x,y,t)$ yi üreten bir d metriğinin var olduğu kabul edilsin.

$$M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$$

$$(t + d(x,y))M(x,y,t) = t$$

$$d(x,y) = \frac{\mathrm{t}(1 - M(x,y,t))}{M(x,y,t)}$$

d1)

Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ sağlanıp sağlanmadığı incelenecek olursa

$(\Rightarrow:)$

$d(x,y) = 0$ olsun. O halde

$$d(x,y) = \frac{\mathrm{t}(1 - M(x,y,t))}{M(x,y,t)} = 0$$

$\mathrm{t}(1 - M(x,y,t)) = 0$

$\Leftrightarrow M(x,y,t) = 1$ (t > 0 olduğundan)

$M(x,y,t)$ bir fuzzy metrik olduğundan $M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ dir.

$(\Leftarrow:)$

$x = y$ olsun. O halde $M(x,y,t) = \frac{x}{y} = \frac{y}{x} = 1$ dir.

$$d(x,y) = \frac{\mathrm{t}(1 - M(x,y,t))}{M(x,y,t)} = \frac{\mathrm{t}(1-1)}{1} = 0$$

O halde $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ dir.

d2) Her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$d(x,y) = d(y,x)$ dir. Gerçekten;

$M(x,y,t)$ bir fuzzy metrik olduğundan $M(x,y,t) = M(y,x,t)$

$$d(x,y) = \frac{\mathrm{t}(1 - M(x,y,t))}{M(x,y,t)} = \frac{\mathrm{t}(1 - M(y,x,t))}{M(y,x,t)} = d(y,x)$$

d3) $t = 2, x = 1, y = 2, z = 3$ alınırsa $M(x,y,t) = \frac{1}{2}$, $M(y,z,t) = \frac{2}{3}$, $M(x,z,t) = \frac{1}{3}$

$$d(x,y) = \frac{\mathrm{t}(1 - M(x,y,t))}{M(x,y,t)} = \frac{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$d(y,z) = \frac{\mathrm{t}(1 - M(y,z,t))}{M(y,z,t)} = \frac{2(1 - \frac{2}{3})}{\frac{2}{3}} = 1$$

$$d(x,z) = \frac{\mathrm{t}(1 - M(y,z,t))}{M(y,z,t)} = \frac{2(1 - \frac{1}{3})}{\frac{1}{3}} = 4$$

$d(x,z) > d(x,y) + d(y,z)$

dir. Dolayısıyla (X, d) bir metrik uzay değildir.

3.3.16 Örnek

$X = \mathbb{R}^+$ olsun. $x, y \in X, t > 0$ için

$$M(x, y, t) = \frac{\min\{x,y\}+t}{\max\{x,y\}+t} \tag{3.26}$$

olarak tanımlanırsa; $(M, .)$, X üzerinde bir fuzzy metriktir.

3.3.17 Tanım (Dizi)

$(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n \in X$ olmak üzere $f: \mathbb{N} \to X$ şeklinde tanımlanan her fonksiyona X fuzzy metrik uzayında bir ***dizi*** denir ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ veya kısaca (x_n) ile gösterilir.

3.3.18 Tanım (Yakınsaklık)

$(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay, (x_n), X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_0, t) > 1 - r$ oluyorsa (x_n) dizisi x_0 noktasına ***yakınsıyor*** denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

3.3.19 Tanım (Cauchy Dizisi)

$(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay, (x_n), X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $m, n \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - r$ oluyorsa (x_n) dizisine ***Cauchy dizisi*** denir. Eğer bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayına ***tam***dır denir.

3.3.20 Önerme

a$* b = ab$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$; $(X, M_d,*)$ fuzzy metrik uzayında iki Cauchy dizisi ve $t > 0$ olsun. O halde $\{M_d(x_n, y_n, t)\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $(0,1)$ deki bazı gerçel sayılara yakınsar.

3.3.21 Tanım (Tamlık)

Eğer bir fuzzy metrik uzaydaki her Cauchy dizisi uzaydaki bir noktaya yakınsıyor ise bu fuzzy metrik uzaya ***tam fuzzy metrik uzay*** denir.

3.3.22 Örnek

$\{A, B\}, X = (2, \infty)$ aralığının bir bölüntüsü olsun öyle ki $\{2n - 1\}_{n=2}^{\infty} \subset A$ ve $\{2n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ ve Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = \max\{0, a + b - 1\}$ ve 2.3.15 Örnekteki $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzay göz önüne alınsın. Her iki dizinin de $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayında Cauchy dizisi olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi, eğer $n = 2,3, \ldots$ için $a_n = 2n - 1$ ve $b_n = 2n$ ise $n \to \infty$ iken

$M(a_n, b_n, t) = \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \to 0$

dır.

3.3.23 Uyarı

$\mathbb{R}$ tam fuzzy metrik uzay değildir. Bunun için aşağıda $(\mathbb{R}, M,*)$ fuzzy metrik uzayındaki her Cauchy dizisinin yakınsak olmadığına dair aksi bir örnek verilecektir.

3.3.24 Örnek

$(\mathbb{R}, d)$ metrik uzay, $d(x, y) = |x - y|$ ve $a * b = ab$ olsun.

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x,y)} \tag{3.27}$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathbb{R}, M,*)$ fuzzy metrik uzaydır. Bu uzayda

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

olacak biçimde (S_n) dizisini ele alalım. Her $p > 0$ için;

$$M(S_{n+p}, S_n, t) = \frac{t}{t + |S_{n+p} - S_n|} = \frac{t}{t + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} M(S_{n+p}, S_n, t) = 1$$

olur. O halde (S_n) dizisi $(\mathbb{R}, M,*)$ fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Eğer $\mathbb{R}$ tam fuzzy metrik uzay ise en az bir $x \in \mathbb{R}$ noktası vardır ki $n \to \infty$ iken $M(S_n, x, t) \to 1$ dir.

$M(S_n, x, t) \to 1$ ise $n \to \infty$ iken $\frac{t}{t+|S_n - x|} \to 1$

$\Rightarrow n \to \infty$ iken $|S_n - x| \to 0$

$\Rightarrow S_n \to x$

olmalıdır. Ancak bu $\mathbb{R}$ de doğru değildir. Bu sebeple $\mathbb{R}$ tam fuzzy metrik uzay değildir.

3.3.25 Teorem

Standart $(X, M_d,*)$ fuzzy metrik uzayının tam olması için gerekli ve yeterli koşul (X, d) metrik uzayının tam olmasıdır.

Kanıt:

$(\Rightarrow:)$ $(X, M_d,*)$ standart fuzzy metrik uzayı tam ve $\{x_n\} \subset X$ de bir Cauchy dizisi olsun. O halde

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni$ her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

dır. Standart fuzzy metrik tanımından her $n, m \geq n_0$ ve her $t > 0$ için

$$M_d(x_n, x_m, t) = \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} > \frac{t}{t + \varepsilon}$$

olduğundan $0 < r < 1$ koşulunu sağlayan her r için $\varepsilon = \frac{rt}{1-r}$ alınırsa

$$M_d(x_n, x_m, t) > 1 - r$$

elde edilir. Yani $\{x_n\}$ dizisi $(X, M_d, *)$ standart fuzzy metrik uzayında Cauchy dizisi olur. $(X, M_d, *)$ fuzzy metrik uzayı tam olduğundan $\{x_n\}$ Cauchy dizisi X de bir x noktasına yakınsar.

O halde

$$M_d(x_n, x_m, t) = \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = 1$$

yazılabilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x_m, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

bulunur. Bu ise (X, d) metrik uzayı tamdır.

$(\Leftarrow:)$ (X, d) metrik uzayı tam olsun. $(X, M_d, *)$ standart fuzzy metrik uzayında bir $\{x_n\} \subset X$ Cauchy dizisi alınsın. O zaman her $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m \geq n_0$ için $M_d(x_n, x_m, t) > 1 - r$

dir.

Standart metrik tanımından

$$M_d(x_n, x_m, t) = \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} > 1 - r$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{rt}{1 - r}$$

yazılabilir. $\varepsilon = \frac{rt}{1-r}$ alınırsa,

her $\varepsilon > 0$ için her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ bulunur. Yani $\{x_n\}$ dizisi (X, d) metrik uzayında Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi X de bir x noktasına yakınsar ve $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x_m, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t+d(x_n,x)} = \frac{t}{t} = 1$$

elde edilir. Yani $\{x_n\}$ dizisi $(X, M_d, *)$ uzayında x noktasına yakınsar ve dolayısıyla $(X, M_d, *)$ standart fuzzy metrik uzayı tamdır. ■

3.4 NON-ARCHİMEDEAN FUZZY METRİK UZAYLAR

X boştan farklı keyfi bir küme, $*$ sürekli $t-$ norm ve M, her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için aşağıdaki şartları sağlayan $X^2 \times [0, \infty[$ üzerinde bir fuzzy kümeyse $(X, M, *)$ üçlüsüne ***Non-Archimedean fuzzy metrik uzay*** denir:

i) $M(x, y, 0) = 0,$ (3.28)

ii) $M(x, y, t) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olmasıdır. (3.29)

iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$ (3.30)

iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t \vee s)$, $t \vee s = \max\{s, t\},$ (3.31)

v) $M(x, y, .): [0, \infty[\rightarrow [0,1]$ süreklidir. (3.32)

Üstteki iv) koşulu Kramosil ve Michalek fuzzy metrik uzay tanımındaki iv) koşulunu gerektirdiğinden; her Non-Archimedean fuzzy metrik uzay, Kramosil ve Michalek anlamında fuzzy metrik uzaydır.

Kolaylık olması bakımından Non-Archimedean fuzzy metrik uzaylar N.A. fuzzy metrik uzay olarak kısaltılacaktır.

3.4.1 Teorem

Her $x, y \in X$ için $M(x, y, t)$ N.A. fuzzy metriği t ye göre artandır.

3.4.2 Örnek

i) Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. d; X üzerinde klasik bir metrik olmak üzere; M, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $X^2 \times (0, \infty)$ üzerinde $M(x, y, t) = e^{-\frac{d(x,y)}{t}}$ şeklinde tanımlanan bir fuzzy küme olsun. O halde $(X, M, *)$ bir N.A. fuzzy metrik uzaydır.

ii) Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ ve M; $M(x, y, t) = \frac{\min\{x,y\}}{\max\{x,y\}}$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. O halde $(X, M, *)$ bir N.A. fuzzy metrik uzaydır.

3.4.3 Teorem

X teki bir $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $t > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ dir.

3.4.4 Tanım

Her $0 < \varepsilon < 1$ ve $t > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n, m > n_0$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ ise ***Cauchy dizisi*** denir. Cauchy dizisinin bu tanımı George ve Veeramani tarafından verilen ile özdeştir. Eğer bir N.A. fuzzy metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa $(X, M, *)$ N.A. fuzzy metrik uzayının ***tam*** olduğu söylenebilir.

3.4.5 Not

Bir sonraki yardımcı teoremde kullanılmak üzere aşağıdaki şekilde bir $\emptyset$ dönüşümler ailesi tanımlanacaktır.

Φ, bir dönüşümler ailesi olsun öyle ki her $\emptyset \in \Phi$ için

i) $\emptyset:]0,1] \rightarrow [0,\infty[$,

ii) $\emptyset$ sürekli ve azalandır.

iii) $\emptyset(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ve her $x, y \in]0,1]$ için $\emptyset(xy) \leq \emptyset(x) + \emptyset(y)$.

3.4.6 Yardımcı Teorem

Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b \geq ab$, $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ve her $x, y \in X$ için $M(x, y, .)$ fuzzy metriği 0 noktasında süreksiz olsun. Eğer $d: X^2 \rightarrow [0,\infty[$

$$d(x,y) = \sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{1} \emptyset\big(M(x,y,t)\big)\, dt \qquad (3.33)$$

şeklinde tanımlanırsa $0 < \alpha < 1$ olmak üzere d, X üzerinde bir metriktir.

Kanıt:

Her $x, y \in X$ için $d(x, y)$ nin iyi tanımlanmış olduğu tanımdan açıktır.

i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ olduğu açıktır.

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow$Her $t > 0$ için $\emptyset\big(M(x, y, t)\big) = 0 \Leftrightarrow$ Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x,y) = \sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{1} \emptyset\big(M(x,y,t)\big)\, dt = \sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{1} \emptyset\big(M(y,x,t)\big)\, dt = d(y,x)$

iv) $M(x, y, t) \geq M(x, z, t) * M(z, y, t) \geq M(x, z, t).M(z, y, t)$

ve $\emptyset$ azalan olduğu için

$$d(x,y) = \sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{1} \emptyset\big(M(x,y,t)\big)\, dt \leq \sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{1} \emptyset\big(M(x,z,t).M(z,y,t)\big)\, dt$$

$$\leq \sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{1} \emptyset\big(M(x,z,t)\big)\, dt + \sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{1} \emptyset\big(M(z,y,t)\big)\, dt = d(x,z) + d(z,y)$$

dır. Bu d nin X üzerinde bir metrik olduğunu ispatlar. ■

3.5 SHABAN SEDGHİ VE NABİ SHOBE ANLAMINDA $M-$ FUZZY METRİK UZAYLAR

X boştan farklı bir küme, $*$ sürekli t norm olmak üzere her $x, y, z, a \in X$ ve her $t, s > 0$ için M, $X^3 \times (0,\infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir fuzzy küme ise, $(X, M,*)$ sıralı üçlüsüne bir ***M − fuzzy metrik uzayı*** denir (Sedghi and Shobe 2006):

i) $M(x, y, z, t) > 0$, (3.34)

ii) $M(x,y,z,t) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y = z$ olmasıdır. (3.35)

iii) $M(x,y,z,t) = M(p\{x,y,z\},t)$ (p bir permütasyon fonksiyonu olmak üzere) (3.36)

iv) $M(x,y,a,t) * M(a,z,z,s) \le M(x,y,z,t+s)$, (3.37)

v) $M(x,y,z,.) : (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

3.5.1 Not

Bu kısımda $M -$ fuzzy metrik uzayları, sürekli $t -$ norm yardımıyla George ve Veeramani anlamında fuzzy metrik uzayların bir genelleştirilmesi olarak tanımlanacaktır.

3.5.2 Yardımcı Teorem

$(X,M,*)$ bir $M -$ fuzzy metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ ve her $t > 0$ için

i) $M(x,x,y,t) = M(x,y,y,t)$. (3.38)

ii) $M(x,y,z,.)$ artandır.

Kanıt:

i) $\varepsilon > 0$ olsun. O halde FM4 ten

a) $M(x,x,y,\varepsilon + t) \ge M(x,x,x,\varepsilon) * M(x,y,y,t) = M(x,y,y,t)$,

b) $M(y,y,x,\varepsilon + t) \ge M(y,y,y,\varepsilon) * M(y,x,x,t) = M(y,x,x,t)$.

a) ve b) de $\varepsilon \to 0$ iken limit alınırsa $M(x,x,y,t) = M(x,y,y,t)$

elde edilir.

ii) Her $x,y,z,a \in X$ ve $t,s > 0$ için FM4 ten

$M(x,y,a,t) * M(a,z,z,s) \le M(x,y,z,t+s)$ dır.

Eğer $a = z$ seçilirse;

$M(x,y,z,t) * M(z,z,z,s) \le M(x,y,z,t+s)$

yani

$M(x,y,z,t+s) \ge M(x,y,z,t)$

elde edilir. ■

3.5.3 Uyarı

$(X,M,*)$ bir $M -$ fuzzy metrik uzay olsun. Her $t > 0$ için $M(x,x,y,t) = M(x,y,y,t)$ dır. Gerçekten; her $\varepsilon > 0$ için üçgen eşitsizliğinden

i) $M(x,x,y,\varepsilon + t) \ge M(x,x,x,\varepsilon) * M(x,y,y,t) = 1 * M(x,y,y,t) = M(x,y,y,t)$

ii) $M(y,y,x,\varepsilon + t) \ge M(y,y,y,\varepsilon) * M(y,x,x,t) = 1 * M(y,x,x,t) = M(y,x,x,t)$

dır.

i) ve ii) nin $\varepsilon \to 0$ iken limitleri alındığında $M(x,x,y,t) = M(x,y,y,t)$ elde edilir.

3.5.4 Örnek

(X,d) bir metrik uzay ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. Her $t \in]0,\infty[$, her $x,y,z \in X$ için $D(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$ ve

$$M(x,y,z,t) = \frac{t}{t+D(x,y,z)} \tag{3.39}$$

olsun. O halde $(X,M,*)$ bir $M-$ fuzzy metrik uzaydır. M ye d tarafından indirgenen standart $M-$ fuzzy metriği denir.

3.5.5 Örnek

$X = [0,1]$ ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = \min\{a,b\}$ olsun. $X \times X \times X \times (0,\infty)$ üzerindeki bir M fuzzy kümesi her $t > 0$ için

$$M(x,y,z,t) = \frac{t}{t+|x-y|+|y-z|+|z-x|} \tag{3.40}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3.5.6 Örnek

X boştan farklı bir küme ve D, X üzerinde bir $D-$ metrik olsun. Her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. Her $t \in]0,\infty[$ ve her $x,y,z \in X$ için

$$M(x,y,z,t) = \frac{t}{t+D(x,y,z)} \tag{3.41}$$

şeklinde tanımlansın. $(X,M,*)$ bir $M-$fuzzy metrik uzay olduğunu göstermek kolaydır.

Çözüm.

i) $t > 0$ ve $D-$ bir metrik olduğundan her $x,y,z \in X$ için $D(x,y,z) \geq 0$ dır. Dolayısıyla

$$M(x,y,z,t) = \frac{t}{t+D(x,y,z)} > 0$$

dır.

ii) $M(x,y,z,t) = 1 \Leftrightarrow t = t + D(x,y,z) \Leftrightarrow D(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$

iii) $M(x,y,z,t) = \frac{t}{t+D(x,y,z)} = \frac{t}{t+D(x,z,y)} = \frac{t}{t+D(y,z,x)} = \frac{t}{t+D(y,x,z)} = \frac{t}{t+D(z,x,y)} = \frac{t}{t+D(z,y,x)}$

($D-$ metrik olduğundan)

Dolayısıyla $M(x,y,z,t) = M(p\{x,y,z\},t)$

dir.

iv) $M(x,y,a,t) * M(a,z,z,s) \leq M(x,y,z,t+s)$

yani;

$$\frac{t}{t+D(x,y,a)}\frac{s}{s+D(a,z,z)} \leq \frac{t+s}{t+s+D(x,y,z)}$$

olduğu gösterilmelidir. $D-$ Metrik tanımından;

$$D(x,y,z) \leq D(x,y,a) + D(a,z,z)$$

dır. $\frac{t+s}{t} > 1, \frac{t+s}{s} > 1$ olduğundan,

$$D(x,y,z) \leq \frac{t+s}{t} D(x,y,a) + \frac{t+s}{s} D(a,z,z)$$

$$\Rightarrow \frac{D(x,y,z)}{t+s} \leq \frac{D(x,y,a)}{t} + \frac{D(a,z,z)}{s} \leq \frac{sD(x,y,a)+tD(a,z,z)}{ts}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{D(x,y,z)}{t+s} \leq 1 + \frac{sD(x,y,a)+tD(a,z,z)}{ts}$$

$$\Rightarrow \frac{t+s+D(x,y,z)}{t+s} \leq \frac{st+sD(x,y,a)+tD(a,z,z)}{st}$$

olur. Öte yandan

$$D(x,y,a).D(,z,z) \geq 0$$

olduğundan;

$$\frac{t+s+D(x,y,z)}{t+s} \leq \frac{st+sD(x,y,a)+tD(a,z,z)}{st}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\frac{st}{st+sD(x,y,a)+tD(a,z,z)+D(x,y,a)D(a,z,z)} \leq \frac{t+s}{t+s+D(x,y,z)}$$

$$\leq \frac{st+sD(x,y,a)+D(a,z,z)+D(x,y,a)D(a,z,z)}{st}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+D(x,y,a)}\frac{s}{s+D(a,z,z)} \leq \frac{t+s}{t+s+D(x,y,z)}$$

$$\Rightarrow M(x,y,a,t) * M(a,z,z,s) \leq M(x,y,z,t+s)$$

elde edilir.

v) Her $x,y,z \in X$, $t_0 > 0$ için

$$\lim_{t\to t_0} M(x,y,z,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{t}{t + D(x,y,z)} = \frac{\lim_{t\to t_0} t}{\lim_{t\to t_0} t + D(x,y,z)} = \frac{t_0}{t_0 + D(x,y,z)}$$

$$= M(x,y,z,t_0)$$

O halde $(X, M,*)$ bir $M -$ fuzzy metrik uzaydır.

3.5.7 Örnek

X, boştan farklı keyfi bir küme ve ψ, $\mathbb{R}_+ \to (0,1)$ artan ve sürekli bir fonksiyon öyle ki $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(t) = 1$ olsun. Bu fonksiyonların 3 tipik örneği $\psi(x) = \frac{x}{x+1}$, $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$ ve $\psi(x) = 1 - e^{-x}$ dir. Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. Her $t \in (0,\infty)$, her $x, y \in X$ için $d(x,y)$ klasik bir metrik olmak üzere, $M(x,y,t) = \psi(t)^{d(x,y)}$ olarak tanımlayalım. $(X, M,*)$ ın bir fuzzy metrik uzay olduğunu göstermek kolaydır.

3.5.8 Yardımcı Teorem

$(X, M,*)$ bir $M -$ fuzzy metrik uzay olsun. Her $x, y, z \in X$ için $M: X^3 \times (0,\infty) \to [0,1]$

$$M(x,y,z,t) = M(x,y,t) * M(y,z,t) * M(z,x,t) \tag{3.43}$$

şeklinde tanımlanırsa, $(X, M,*)$ bir $M -$ fuzzy metrik uzaydır.

Kanıt:

i) Her $x, y, z \in X$, her $t > 0$ için $M(x,y,z,t) > 0$ olduğunu göstermek kolaydır.

ii) $M(x,y,z,t) = 1 \Leftrightarrow M(x,y,t) = M(y,z,t) = M(z,x,t) = 1 \Leftrightarrow x = y = z$ dir.

iii) p bir permütasyon fonksiyonu olmak üzere $M(x,y,z,t) = M(p\{x,y,z\},t)$ dir.

iv) Her $s > 0$ için

$M(x,y,z,t+s) = M(x,y,t+s) * M(y,z,t+s) * M(z,x,t+s)$

$\geq M(x,y,t) * M(y,a,t) * M(a,z,s) * M(z,a,s) * M(a,x,t)$

$= M(x,y,a,t) * M(a,z,s) * M(z,a,s) * M(z,z,s) = M(x,y,a,t) * M(a,z,z,s)$

dir.

v) $(X, M,*)$ bir $M -$ fuzzy metrik uzay olduğundan süreklidir. Dolayısıyla $M(x,y,z,.): (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

3.5.9 Tanım (Yakınsaklık)

$(X, M,*)$ bir $M -$ fuzzy metrik uzay olsun. X teki bir $\{x_n\}$ dizisi bir x e ***yakınsaması*** için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ iken $M(x,x,x_n,t) \to 1$ dir.

3.5.10 Tanım (Cauchy dizisi)

$(X, M, *)$ bir $M-$ fuzzy metrik uzay olsun. X teki bir $\{x_n\}$ dizisine ***Cauchy dizisi***dir denir eğer her bir $0 < \varepsilon < 1$ ve $t > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m \geq n_0$ için $M(x_n, x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ dır.

3.5.11 Tanım (Tamlık)

$(X, M, *)$ bir $M-$ fuzzy metrik uzayının ***tam*** olması için gerek ve yeter koşul her Cauchy dizisi yakınsak olmasıdır.

3.5.12 Tanım (Sürekli Fonksiyon)

$(X, M, *)$ bir $M-$fuzzy metrik uzay olsun. Eğer $X^3 \times (0, \infty)$ üzerindeki $\{(x_n, y_n, z_n, t_n)\}$ dizisi bir $(x, y, z, t) \in X^3 \times (0, \infty)$ noktasına yakınsak; yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \tag{3.44}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y, \tag{3.45}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \tag{3.46}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} M(x, y, z, t_n) = M(x, y, z, t) \tag{3.47}$$

iken

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z_n, t_n) = M(x, y, z, t) \tag{3.48}$$

ise

M, $X^3 \times (0, \infty)$ üzerinde ***sürekli bir fonksiyon***dur denir.

3.5.13 Yardımcı Teorem

$(X, M, *)$ bir $M-$ fuzzy metrik uzay olsun. O halde M, $X^3 \times (0, \infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

Kanıt:

$x, y, z \in X$, $t > 0$ ve $(x'_n, y'_n, z'_n, t'_n)_n$, $X^3 \times (0, \infty)$ üzerinde (x, y, z, t) e yakınsayan bir dizi olsun.

$\left(M(x'_n, y'_n, z'_n, t'_n)\right)_n$, $]0,1]$ aralığında bir dizi olduğu için $(x'_n, y'_n, z'_n, t'_n)_n$ dizisinin bir (x_n, y_n, z_n, t_n) alt dizisi vardır öyle ki $\left(M(x_n, y_n, z_n, t_n)\right)_n$ dizisi [0,1] aralığındaki bir noktaya yakınsar.

$\delta > 0$ sabiti $\delta < \frac{t}{2}$ olarak seçilsin.

O halde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $|t - t_n| < \delta$ dir. Böylece

$M(x_n, y_n, z_n, t_n) \geq M(x_n, y_n, z_n, t - \delta)$

$\geq M\left(x_n, y_n, z, t - \frac{4\delta}{3}\right) * M\left(z, z_n, z_n, \frac{\delta}{3}\right)$

$\geq M\left(x_n, z, y, t - \frac{5\delta}{3}\right) * M\left(y, y_n, y_n, \frac{\delta}{3}\right) * M\left(z, z_n, z_n, \frac{\delta}{3}\right)$

$\geq M(z, y, x, t - 2\delta) * M\left(x, x_n, x_n, \frac{\delta}{3}\right) * M\left(y, y_n, y_n, \frac{\delta}{3}\right) * M\left(z, z_n, z_n, \frac{\delta}{3}\right)$

ve her $n \geq n_0$ için

$M(x, y, z, t + 2\delta) \geq M(x, y, z, t_n + \delta)$

$\geq M\left(x, y, z, t_n + \frac{2\delta}{3}\right) * M\left(z_n, z, z, \frac{\delta}{3}\right)$

$\geq M\left(x, z_n, y_n, t_n + \frac{\delta}{3}\right) * M\left(y_n, y, y, \frac{\delta}{3}\right) * M\left(z_n, z, z, \frac{\delta}{3}\right)$

$\geq M(z_n, y_n, x_n, t_n) * M\left(x_n, x, x, \frac{\delta}{3}\right) * M\left(y_n, y, y, \frac{\delta}{3}\right) * M\left(z_n, z, z, \frac{\delta}{3}\right)$

$n \longrightarrow \infty$ iken limit alındığında,

$\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z_n, t_n) \geq M(x, y, z, t - 2\delta) * 1 * 1 * 1 = M(x, y, z, t - 2\delta)$

ve sırasıyla

$M(x, y, z, t + 2\delta) \geq \lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z_n, t_n) * 1 * 1 * 1 = \lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z_n, t_n).$

Bu yüzden $M(x, y, z, t)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z_n, t_n) = M(x, y, z, t)$

elde edilir. Böylece M, $X^3 \times (0, \infty)$ üzerinde süreklidir.

3.6 TARAPADA BAG ANLAMINDA $D^* -$ FUZZY METRİK UZAYLAR

Tarapada Bag 2012 yılında $M -$ fuzzy metrik tanımını aşağıdaki şekilde tekrar tanımladı.

3.6.1 Tanım ($D^* -$ Fuzzy Metriği)

Eğer X boştan farklı bir küme, her $x, y, z, a \in X$ ve $t, s \in [0, \infty[$ için D^*, $X^3 \times [0, \infty[$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon ise $(X, D^*, *)$ sıralı üçlüsüne bir **$D^* -$ fuzzy metrik uzayı** denir (T.Bag 2012):

i) $D^*(x, y, z, 0) = 0,$ (3.49)

ii) Her $t > 0$ için $D^*(x, y, z, t) = 1 \Leftrightarrow x = y = z,$ (3.50)

iii) $D^*(x, y, z, t) = D^*(p\{x, y, z\}, t)$ (simetri) (p bir permütasyon fonksiyonu olmak üzere)

iv) $D^*(x, y, a, t) * D^*(a, z, z, s) \leq D^*(x, y, z, t + s),$ (3.51)

v) $\lim_{t\to\infty} D^*(x, y, z, t) = 1$ (3.52)

3.6.2 Örnek

[8] X boş olmayan bir küme ve D, X üzerinde bir $D-$ metrik olsun. Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ seçilirse her $t \in [0, \infty[$ ve her $x, y, z \in X$ için

$$D^*(x, y, z, t) = \frac{t}{t + D(x,y,z)} \tag{3.53}$$

olarak tanımlanırsa D^*, X üzerinde bir fuzzy metrik ve $(X, D^*, *)$ bir D^*- fuzzy metrik uzaydır.

BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Bu tezde farklı fuzzy metrik uzay tanımları ele alınmış, bunlar arasındaki ilişkiler saptanmaya çalışılmıştır. Bu açıdan bakıldığında söz konusu tez, fuzzy kavramı ve fuzzy metrik uzaylar üzerine çalışacak kişilere yol gösterici nitelikte olacaktır.

Tezin son kısmında, genelleştirilmiş metrik türlerinden biri olan $S-$ metriklere yer verilmiştir. Genelleştirilmiş metriklerden yararlanılarak birer fuzzy metrik tanımının literatüre kazandırılması ve henüz genelleştirilmiş $S-$ metriklerden tanıtılmış bir fuzzy metrik uzay olmaması; üzerine düşünülmesi gereken ve olası bir yeni fuzzy metrik tanımının ortaya konulacağı güzel bir çalışma konusudur ve bundan sonraki çalışmalarımızda bu konu üzerine yoğunlaşılacaktır.

KAYNAKLAR

Altun I and Mihet D (2010) Ordered Non-Archimedean Fuzzy Metric Spaces and Some Fixed Point Results, *Hindawi Publishing Corporation,* 2010: 1–11.

Bag T (2012) Some Results on $D^* -$ Fuzzy Metric Spaces, *International Journal of Mathematics and Scientific Computing,* 2 (1): 29-33.

Bulanık mantık. (t.y.) Ziyaret tarihi: 07.04.2015, adres: www.deu.edu.tr/userweb/k.yaralioglu/dosyalar/bul_man.doc

Chang C L (1968) Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24: 182-190

Cho Y J, Grabiec M and Radu V (2006) *On Nonsymmetric Topological and Probabilistic Structures.* ISBN: 978-1594549175, Nova Science Pub Inc. Pte. Ltd., New York, 210 pp.

Coşkun E (2002) *Analiz I.* ISBN: 975-6674-06-7, Alp Yayınevi, İstanbul, 350 s.

Deng Z (1982) Fuzzy Pseudo-Metric Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 86 (1): 74–95.

Dhage B C (1992) Generalised Metric Spaces and Mappings with Fixed Point. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 84 (4): 329–336.

Diamond P and Kloeden P (2001) *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications.* ISBN: 981-02-1731-5, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,Singapore, 175 pp.

Erceg M A (1979) Metric Spaces in Fuzzy Set Theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 69 (1): 205-230.

George A, Veeramani P (1994) On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 64: 395–399.

George A, Veeramani P (1997) On Some Results of Analysis for Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 90 (3): 365–368.

Goetschel R and Voxman W (1986) Elementary Fuzzy Calculus. *Fuzzy Sets and Systems,* 18 (1): 31–43.

Grabiec M (1988) Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 27 (3): 385-399.

Gregori V and Romaguera S (2002) Some Properties of Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 115 (3): 485–489.

Gregori V, Crevillen A L, Morillas S and Sapena A (2009) On Convergence in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 156 (18): 3002–3006.

Hadzic O and Pap E (1994) *Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces.* ISBN: 978-90-481-5875-1, Kluwer Academic Publishers, 273 pp.

Kaleva O and S Seikkala S (1984) On Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets And Systems,* 12:215-229.

Kaufmann A and Gupta M M (1988) *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science.* ISBN: 0444705015, Elsevier Science Inc., New York, 338 pp.

Kaufmann A and Gupta M M (1991) *Introduction to Fuzzy Arithmetic.* ISBN: 978-0442008994, Van Nostrand Reinhold Company, 384 pp.

Korkmaz Ö (2012) Fuzzy Metrik ve Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar Üzerine. *Yüksek Lisans Tezi*, Cumhıriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Sivas, 56 s.

Kramosil I and Michalek J (1975) Fuzzy Metric and Statisical Metric Spaces. *Kybernetica*, 11 (5): 336-344.

Matloka M (1986) Sequence of Fuzzy Numbers. *Busefal*, 28-37.

Mihet D (2008) Fuzzy ψ-Contractive Mappings in Non-Archimedean Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 159 (6): 739–744.

Pao-Ming P and Ying-Ming L (1980) Fuzzy Topology I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and More-Smith Convergence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 76 (2): 571-599.

Schwiezer B and Sklar (1960) Statiscial Metric Spaces, *Paci.C. J. Math.*,10: 313-334.

Sedghi S and Shobe N (2006) Fixed Point Theorem in $M-$ Fuzzy Metric Spaces with Property (E). *Advances in Fuzzy Mathematics*, 1 (1): 55-65.

Sedghi S and Shobe N (2011) A Common Unique Random Fixed Point Theorems in $S-$ Metric Spaces. *Journal of Prime Research in Mathematics Advances in Fuzzy Mathematics*, 7: 25-34.

Sedghi S, Shobe N and Aliouche A (2012) A Generalization of Fixed Point Theorems in $S-$Metric Spaces. *Advances in МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК,* 64 (3): 258-266.

Sedghi S, Shobe N and Choudhury B S (2012) Relation Between Metric and Fuzzy Metric Spaces and Some Fixed Point Theorems. *J. Appl. Math. & Informatics,* 30 (1-2): 265-278.

Sedghi S, Zhou H and Shobe N (2007) A Common Fixed Point Theorems in $D^{*}-$ Metric Spaces. *Hindawi Publishing Corporation*, 2007: 1-13.

Soykan Y (2012) *Metrik Uzaylar ve Topolojisi.* ISBN: 9786051332451, Nobel Akademi, Ankara, 548 s.

Xia Z-Q, Gua F-F (2004) Fuzzy Metric Spaces, *Journal of Applied Mathematics and Computing, 16* (1-2): 371-381.

Zadeh L A (1965) Fuzzy Sets, *Information and Control,* 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Melih ÇINAR, 13.11.1989'da Bandırma'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bandırma'da tamamladı. 2007 yılında BEÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. Bir yıl yabancı dil hazırlık okuduktan sonra; 2012 yılında bölümü birincilikle tamamladı ve aynı yıl BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Programına başladı. 2015'in Ocak ayında ise Yıldız Teknik Üniversitesi'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve halen görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: İhsaniye Mah. Celal Atik Cad. No:24 Daire:11 Bandırma/BALIKESİR

Tel: (212) 383 31 08/641
E-posta: mcinar@yildiz.edu.tr